ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1971

Seria: AUTOMATYKA z. 19 Nr kol. 317

JERZY FRĄCKOWIAK

Katedra Elektroniki
Politechnika Śląska

PROJEKTOWANIE BEZHAZARDOWYCH UKŁADÓW LOGICZNYCH Z ELEMENTAMI NOR

Streszczenie. Praca dotyczy zagadnienia syntezy minimalnej, bezhazardowej, 3 - poziomowej sieci NOR realizującej zadaną funkcję przełączającą. W części 1 opisano w skrócie metodę syntezy minimalnej 3 - poziomowej sieci NOR, podaną w [1]. Część 2 zawiera metodę syntezy minimalnych, bezhazardowych (bez hazardu statycznego) układów logicznych. W części 3 podano metodę syntezy minimalnej bezhazardowej, 3 - poziomowej sieci logicznej NOR. Zakończenie zawiera informację o programie na maszynę cyfrową.

Zagadnienie projektowania logicznych układów sterowania, blokady i sygnalizacji opartych o element NOR jest bardzo ważne zarówno w technice elektronicznej jak i poza nią, bowiem element NOR jest często podstawowym elementem systemów logicznych. Z zagadnieniem tym związany jest problem syntezy kombinacyjnego układu logicznego składającego się z elementów NOR, przy braku negacji zmiennych realizowanej funkcji. Wraz z zagadnieniem syntezy sieci NOR pojawia się problem jej minimalizacji, która ma na celu przede wszystkim uzyskanie maksymalnej niezawodności układu. Minimalizacja ma za zadanie umożliwić konstrukcję sieci realizującej zadaną funkcję przełączającą i zawierającej minimalną ilość elementów. Przy braku dodatkowych ograniczeń sieci zagadnienie tak postawione nie jest rozwiązywalne (wyjąwszy metodę przeglądu, która nie wchodzi w rachubę z praktycznego punktu widzenia). Dlatego też w literaturze spotkać można [2] ograniczenie rozpatrywanych struktur do 3 - poziomowej struktury układu logicznego. Trzy poziomy

logiczne, to minimalna ilość poziomów konieczna do realizacji dowolnej funkcji Boole'a. Zatem układ w strukturze 3-poziomowej zapewnia maksymalną szybkość działania, a ponadto jest układem prostym i przejrzystym, co w praktyce ma duże znaczenie. Innym ważnym praktycznie zagadnieniem w syntezie sieci logicznych jest uzyskiwanie rozwiązań bezhazardowych. Zagadnienie to, ważne w sieci kombinacyjnej, jest znacznie ważniejsze dla sieci sekwencyjnej, której synteza w ostatnim etapie nie różni się od syntezy układu kombinacyjnego, a zatem metodę podaną dalej można używać w obydwu przypadkach. Niniejsza praca w części 1 opisuje w skrócie metodę syntezy minimalnej, 3-poziomowej sieci NOR wyłożoną szerzej w [1]. W części 2 podano metodę syntezy minimalnej sieci logicznej, pozbawionej hazardu statycznego. Część 3 zawiera metodę syntezy minimalnej, bezhazardowej, 3-poziomowej sieci NOR. W zakończeniu podano informację o programie na maszynę cyfrową.

1. Metoda syntezy minimalnej, 3-poziomowej sieci NOR

Metoda ta została opisana bliżej w [1]. Przypomni się tu tylko, że podstawą metody jest algorytm G^m generacji wyższych, maksymalnych implicentów dopuszczalnych zadanej funkcji Boole'a. Uzyskany za pomocą algorytmu G^m zbiór implicentów jest podstawą do otrzymania wszystkich implicentów głównych. Implicenty te umieszcza się w wierszach tablicy CC, której rozwiązanie pozwala skonstruować układ logiczny realizujący zadaną funkcję przy pomocy minimalnej ilości elementów NOR w 3-poziomowej strukturze układu. Dla ilustracji zastosowania metody rozwiąże się podany dalej przykład.

Przykład

$$F = C\bar{D} + \bar{A}\bar{B}C + B\bar{C}D + A\bar{B}\bar{C}$$

$$P = (C + \bar{D})\left[(\bar{A}\bar{B}) + C\right]\left[B + D + \bar{C}\right]\left[A + (\bar{B}\bar{C})\right] = \left[C + \bar{D}(\bar{A}\bar{B})\right]\left[AB + B\bar{C} + AD + D(\bar{B}\bar{C}) + A\bar{C} + \bar{C}\right] = \left[C + (\bar{A}\bar{B})\bar{D}\right]\left[AB + AD + D(\bar{B}\bar{C}) + \bar{C}\right] = ABC + ACD + CD\bar{B} + (\bar{A}\bar{B})\bar{C}\bar{D}$$

Wyższe implicenty maksymalne:

$I_1 = A + B + C$; $I_2 = A + C + D$; $I_3 = C + D + \bar{B}$; $I_4 = \bar{A}\bar{B} + \bar{C} + \bar{D}$;

Test dominacji:

$I_1 + I_4 = A + B + C + \bar{A}\bar{B} + \bar{C} + \bar{D} = 1$;

$I_2 + I_4 = A + C + D + \bar{A}\bar{B} + \bar{C} + \bar{D} = 1$;

$I_3 + I_4 = C + D + \bar{B} + \bar{A}\bar{B} + \bar{C} + \bar{D} = 1$;

I_4 jest quasi-niezłożonym implicentem dominującym.

$I_1 + I_2 = A + B + C + A + C + D = A + B + C + D \neq 1$

$I_1 + I_3 = A + B + C + C + D + \bar{B} = 1$ ale $I_2 + I_3 = A + C + D + C + D + \bar{B} = A + \bar{B} + C + D \neq 1$;

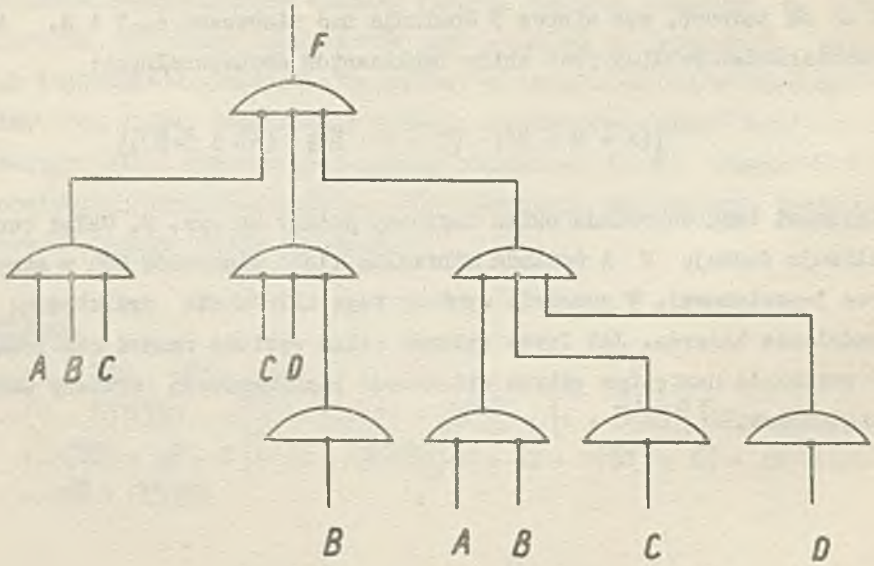
Zatem implicenty $I_1 - I_3$ nie są implicentami dominującymi. $I_1 - I_4$ jest pełnym zbiorem implicentów głównych. W celu stwierdzenia, które z nich muszą wejść do rozwiązania minimalnego należy utworzyć tablicę CC. Tablicę tę pokazano na rys. 1. Z rysunku widać, że wiersze 1, 3 i 4 są jądrowe, zaś wiersz 5 dominuje nad wierszami 6, 7 i 8. Zatem rozwiązaniem tablicy jest zbiór implicentów dopuszczalnych:

$$\left\{(A + B + C);\ (C + D + \bar{B});\ (\bar{A}\bar{B} + \bar{C} + \bar{D});\right\}$$

Zbiorowi temu odpowiada układ logiczny podany na rys. 2. Układ ten realizuje funkcję F i posiada minimalną ilość elementów NOR w strukturze 3-poziomowej. W procesie syntezy tego układu nie dyskutowano zagadnienia hazardu. Jak łatwo wykazać układ posiada hazard statyczny. W rozdziale następnym opisze się metodę bezhazardowej syntezy układów logicznych.

IMPLICENTY GŁÓWNE		$A+B+C+D$	$A+B+C+\bar{D}$	$A+B+C+D$	$\bar{A}+\bar{B}+C+D$	$A+\bar{B}+\bar{C}+\bar{D}$	$\bar{A}+B+\bar{C}+\bar{D}$	$\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}+\bar{D}$	$\bar{B}$	$\bar{A}\bar{B}$	$\bar{C}$	$\bar{D}$
1	$A+B+C$	×	⊗									
2	$A+C+D$	×		×								
3	$C+D+\bar{B}$			×	⊗				•			
4	$\bar{A}\bar{B}+\bar{C}+\bar{D}$					⊗	⊗	⊗		•	•	•
5	$\bar{B}$								×			
6	$\bar{B}\bar{C}$								×			
7	$\bar{B}\bar{D}$								×			
8	$\bar{B}\bar{C}\bar{D}$								×			
9	$\bar{A}\bar{B}$									×		
10	$\bar{C}$										×	
11	$\bar{D}$											×

Rys. 1



Rys. 2

2. Metoda bezhazardowej syntezy minimalnych układów logicznych

Opisana niżej metoda, aczkolwiek zastosowana zostanie następnie do syntezy sieci NOR, jest metodą uniwersalną i wymagającą niewielkiej tylko modyfikacji stosowanych powszechnie algorytmów syntezy minimalnych układów logicznych. Ważnym jest to, że metoda nadaje się zarówno dla funkcji o małej jak i dużej liczbie zmiennych. W wyniku zastosowania metody uzyskuje się sieć realizującą zadaną funkcję logiczną, która to sieć pozbawiona jest hazardu statycznego.

Dla wyjaśnienia metody wprowadzi się obecnie pewne definicje.

Definicja 2.1

Zmienną hazardową x^h nazywa się argument funkcji logicznej, jeżeli przy zmianie wartości tego i tylko tego argumentu funkcja nie zmienia swej wartości.

Przykład

Niech będzie funkcja $F = f(A, B, C)$. Jeżeli $f(000) = f(001)$, to zmienna C jest zmienną hazardową.

Definicja 2.2

Zmienną hazardową x_s^h przypisaną pewnemu stanowi s argumentów funkcji nazywa się zmienną hazardową x^h, określoną dla stanu s w sposób następujący:

jeżeli

$$f(s) = f(s_s)$$

gdzie:

s, s_s - stany sąsiednie;

to

$$s = x_n, \ldots x_k^h, \ldots x_1$$

i

$$s_s = x_n, \ldots \bar{x}_k^h, \ldots x_1$$

Stąd

$$x_k^h = x_{ks}^h.$$

Definicja 2.3

Zbiorem Z_s zmiennych hazardowych dla stanu s argumentów funkcji nazywa się pełny zbiór zmiennych hazardowych przypisanych stanowi s.

Dla składnika jedynki (czynnika zera) s funkcji F określmy zbiór implikantów (implicentów) I_s pokrywających ten składnik jedynki (czynnik zera) i spełniający warunek

$$\forall x_{si}^h \in Z_s;\ \exists I_{sj} \in I_s;\ I_{sj} \not\ni f(x_s^h);$$

Innymi słowy dla każdej zmiennej hazardowej $x_{si}^h \in Z_s$ istnieje w zbiorze I_s implikant (implicent) niezależny od tej zmiennej.

Definicja 2.4

Zbiór implikantów (implicentów) I_s dla składnika jedynki (czynnika zera) s nazywa się bezhazardowym zbiorem elementarnym przypisanym stanowi s.

Twierdzenie 2.1

Jeżeli w zbiorze implikantów (implicentów) I będącym pokryciem funkcji F, dla każdego składnika jedynki (czynnika zera) s tej funkcji istnieje podzbiór $I_s \subseteq I$ będący elementarnym zbiorem bezhazardowym, to zbiór I stanowi bezhazardowe pokrycie funkcji F.

Dowód: dowód podano w Dodatku.

Z twierdzenia 2.1 wynika, że aby otrzymać pokrycie bezhazardowe funkcji F należy dla każdego składnika jedynki (czynnika zera) tej funkcji zapewnić istnienie bezhazardowego zbioru elementarnego. Wiąże się to z uprzednim określeniem zbiorów Z_{si} poszczególnych stanów. Spełniając warunki wypowiedziane w Twierdzeniu 2.1 otrzymuje się pokrycie

bezhazardowe. Minimalność tego pokrycia należy następnie przedyskutować w oparciu o rozszerzoną tablicę Mc Cluskey'a (tablica ta zostanie opisana dalej). W algorytmie opisanym niżej minimalność i bezhazardowość rozwiązania zostają zapewnione w tym samym kroku algorytmu.

Algorytm syntezy minimalnego pokrycia bezhazardowego

1. Określenie prostych implikantów (implicentów) zadanej funkcji.
2. Określenie zbioru Z_s dla każdego składnika jedynki (czynnika zera) funkcji.
3. Utworzenie rozszerzonej tablicy Mc Cluskey'a i rozwiązanie jej.

Rozszerzona tablica Mc Cluskey'a ma zwiększoną ilość kolumn. Mianowicie każdemu składnikowi jedynki (czynnikowi zera) s odpowiada zbiór kolumn, w których umieszcza się wszystkie elementy zbioru Z_s, przy czym jednemu elementowi odpowiada jedna kolumna. Pokrycie danej kolumny przez implikant (implicent) zaznaczone jest przez znak "x" wtedy, gdy implikant (implicent) pokrywa dany składnik jedynki (czynnik zera) s odpowiadający tej kolumnie oraz nie zawiera zmiennej hazardowej przy należnej tej kolumnie. Rozwiązaniem minimalnym jest minimalny zbiór implikantów (implicentów) pokrywający wszystkie kolumny tablicy. Przy rozwiązywaniu tablicy stosować można wszystkie techniki redukcyjne używane do uproszczenia tablicy Mc Cluskey'a.

Opisaną wyżej metodę syntezy minimalnego układu bezhazardowego wyjaśni się bliżej na przykładzie.

Przykład

$$F = (0,1,5,7)_{ABC}$$

1. Określenie prostych implikantów funkcji:

0	0,1 (1)
1	1,5 (4)

$$\frac{5}{7} \quad \underline{5,7\ (2)}$$

2. Określenie zbioru Z_s dla każdego składnika jedynki:
(elementy zbioru Z_s będą zapisywane w nawiasach obok składnika jedynki)

0 (1)
1 (1,4)
5 (4,2)
7 (2)

3. Rozszerzona tablica Mc Cluskey'a:

SKŁADNIKI JEDYNKI / IMPLIKANTY	0	1		5		7
ZMIEN. HAZ	1	1	4	2	4	2
0,1 (1)	X	X				
1,5 (4)			X		X	
5,7 (2)				X		X

Rys. 3

Z tablicy na rys. 3 widać, że znak "x" stawiany jest w danej kolumnie tylko wtedy, gdy implikant pokrywa dany składnik jedynki i w implikancie brak zmiennej hazardowej z danej kolumny. Symbol zmiennej brakującej w implikancie podany jest w nawiasie obok implikanta i został ustalony w kroku 1.

Jak wynika z tablicy na rys. 3 dla pokrycia wszystkich jej kolumn trzeba wszystkich trzech implikantów. Zatem zbiór implikantów 0,1 (1); 1,5 (4); 5,7 (2); jest minimalnym rozwiązaniem bezhazardowym. W celu zmniejszenia ilości kolumn w tablicy opisany algorytm oraz tablicę moż-

na nieco zmodyfikować. Mianowicie zamiast składników jedynki oraz zbiorów $'Z_s$ umieścić można w kolumnach tablicy implikanty quasi-elementarne Q-E.

Definicja 2.5

Implikantem quasi-elementarnym Q-E funkcji Boole'a n zmiennych $F(x_n \ldots x_1)$ nazywa się koniunkcję liter $k = \bigwedge_i x_i^{e_i}$

$$i \in I; \quad c(I) = n-1;$$

dla której spełnione jest $^1k \subseteq {}^1F$.

Definicja 2.6

Zmodyfikowaną tablicą Mc Cluskey'a nazywa się tablicę zawierającą w wierszach proste implikanty funkcji F, a w kolumnach implikanty Q-E tej funkcji oraz składniki jedynki niepokryte przez żaden z implikantów Q-E.

Znak "x" na przecięciu wiersza i kolumny stawia się wtedy, gdy implikant prosty pokrywa implikant Q-E lub składnik jedynki. Pokrycie wszystkich kolumn tablicy stanowi jednocześnie bezhazardowe pokrycie funkcji F.

Algorytm syntezy minimalnego pokrycia bezhazardowego przy użyciu zmodyfikowanej tablicy Mc Cluskey'a ma następujące kroki:

1. Określenie implikantów Q-E funkcji F.
2. Określenie prostych implikantów funkcji F.
3. Utworzenie zmodyfikowanej tablicy Mc Cluskey'a i rozwiązanie jej.

Zatem dla przykładu podanego poprzednio:

1. Implikanty Q-E: 0,1; 1,5; 5,7;
2. Proste implikanty: 0,1; 1,5; 5,7;
3. Zmodyfikowana tablica Mc Cluskey'a: tablicę tę pokazano na rys. 4.

IMPLIKANTY Q-E / PROSTE IMPLIKANTY	0,1	1,5	5,7
0,1	X		
1,5		X	
5,7			X

Rys. 4

3. Metoda syntezy minimalnej, bezhazardowej, 3-poziomowej sieci NOR

Wykorzystuje się tu metodę opisaną w części 2 niniejszej pracy, adaptując tylko poszczególne kroki algorytmu dla celów syntezy sieci NOR. Istotniejsza różnica, jaka zachodzi między algorytmem podanym w części 2 i algorytmem opisanym dalej, to określanie implicentów Q-E tylko dla tych czynników zera, które nie są pokryte przez dominujący implicent quasi-niezłożony. Wynika to stąd, że dla czynników zera pokrytych przez dominujący implicent quasi-niezłożony warunek bezhazardowości statycznej spełniony jest automatycznie. Zachodzi bowiem zależność następująca:

$$ {}^{0}I_{dq} \cap {}^{0}I_{d} = 0 $$

gdzie:

${}^{0}I_{dq}$ - zbiór zer funkcji Boole'a reprezentowanych przez dominujący implicent quasi-niezłożony.

${}^{0}I_{d}$ - zbiór zer funkcji Boole'a reprezentowanych przez dowolny dopuszczalny implicent główny tej funkcji.

Jak widać z podanej zależności nie ma zer funkcji opisanych stanami sąsiednimi w stosunku do stanów opisujących zera funkcji reprezentowane przez dominujący implicent quasi-niezłożony i dlatego dla tych zer nie trzeba określać implicentów Q-E.

Algorytm syntezy minimalnej, bezhazardowej, 3-poziomowej sieci NOR

1. Określenie zbioru implicentów głównych zadanej funkcji.
2. Określenie zbioru implicentów Q-E dla czynników zera niepokrytych przez dominujący implicent quasi-niezłożony.
3. Utworzenie zmodyfikowanej tablicy CC (odpowiednik zmodyfikowanej tablicy McCluskey'a) i rozwiązanie jej.

Przykład

Rozwiąże się tu przykład podany w części 1 niniejszej pracy. Podano tam już zbiór implicentów głównych, zatem pierwszego kroku algorytmu nie będzie się tu powtarzać. Uzyskano tam implicenty:

$$I_1 = A + B + C; \quad I_2 = A + C + D; \quad I_3 = C + D + \bar{B};$$

oraz dominujący quasi-niezłożony

$$I_4 = \overline{AB} + \bar{C} + \bar{D};$$

2. Określenie implicentów Q-E:

czynniki zera niepokryte przez I_4: $A + B + C + D$

$A + B + C + \bar{D}$

$A + \bar{B} + C + D$

$\bar{A} + \bar{B} + C + D$

implicenty Q-E: $A + B + C$

$A + C + D$

$\bar{B} + C + D$

3. Zmodyfikowana tablica CC:

tablica ta została pokazana na rys. 5. Z rysunku wynika, że wszystkie wiersze tablicy są jądrowe. Dla pokrycia kolumn zamknięcia tablicy używa się tu tylko podstawowych form członów zawierających zanegowane zmienne zadanej funkcji, bowiem rozwijanie ich prowadzi do powstania zjawiska hazardu w obwodach jedynkowych sieci. Rozwiązaniem tablicy jest zatem zbiór implicentów: $\{(A + B + C); (A + C + D); (C + D + \bar{B}); (\overline{AB} + \bar{C} + \bar{D});\}$

ZMODYFIKOWANA TABLICA CC		$A+B+C$	$A+C+D$	$\bar{B}+C+D$	$\bar{B}$	$\bar{A}\bar{B}$	$\bar{C}$	$\bar{D}$
1	$A+B+C$	×						
2	$A+C+D$		×					
3	$C+D+\bar{B}$			×	•			
4	$\bar{A}\bar{B}+\bar{C}+\bar{D}$					•	•	•
5	$\bar{B}$				×			
6	$\bar{A}\bar{B}$					×		
7	$\bar{C}$						×	
8	$\bar{D}$							×

Rys. 5

4. Uwagi końcowe

Opisana w części 1 metoda syntezy minimalnej, 3-poziomowej sieci NOR została zaprogramowana na maszynę cyfrową "Odra 1204". Dane wejściowe do obliczeń wprowadzane są jako alternatywne wyrażenie funkcji. Obliczenia przeprowadzić można dla ilości zmiennych $n < 23$.

LITERATURA

[1] J. Frąckowiak - „Metody faktoryzacji funkcji logicznych realizowanych siecią NOR", Praca doktorska, Pol. Sl. 1970, niepubl.

[2] J.F. Gimpel - The Minimization of TANT Networks, IEEE Trans. on Electronic Computers, vol. EC-16, February 1967.

[3] J. Siwiński - Układy przełączające w automatyce, WNT W-wa 1968.

D O D A T E K

Twierdzenie 2.1

Jeżeli dla zbioru implikantów I będącego pokryciem funkcji F zachodzi

$$\forall s \in S;\ \exists I_i \subseteq I;\quad I_i = I_{is};$$

gdzie:

s - składnik jedynki funkcji F;

S - zbiór wszystkich składników jedynki funkcji F;

I_{is} - bezhazardowy zbiór elementarny przypisany stanowi s;

to zbiór I stanowi bezhazardowe pokrycie funkcji F.

Dowód: ponieważ w zbiorze I istnieje bezhazardowy zbiór elementarny dla każdego składnika jedynki funkcji F, więc dowolnemu przejściu z dowolnego stanu s do stanu sąsiedniego o tej samej wartości funkcji F można w zbiorze I przypisać implikant będący pokryciem składnika jedynki s i nie zawierający zmiennej hazardowej odpowiadającej temu przejściu. Implikant taki wchodzący do normalnego alternatywnego wyrażenia funkcji F zapewnia wartość 1 funkcji niezależnie od zmiany wartości argumentu hazardowego.

Zatem zbiór implikantów I stanowi bezhazardowe pokrycie funkcji F

c.b.d.o.

THE DESIGN OF HAZARDLESS LOGICAL NETWORKS WITH NOR-GATES

S u m m a r y

The paper presents an algorithm for the synthesis of minimal, hazardless, three-level NOR-network. In Section 1 a method for the synthesis of minimal three-level NOR-network, described in [1], is discussed. In Section 2 a method for the synthesis of minimal, hazardless (without static hazard) logical circuits has been proposed. Section 3

of the present paper discusses a method of the synthesis of minimal, hazardless, three-level NOR-network. For logical functions with a greater number of variables a computer programme has been worked out.

ПРОЕКТИРОВАНИЕ БЕЗРИСКОВНЫХ, ЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЭЛЕМЕНТАМИ НЕ-ИЛИ

Р е з ю м е

В статье описан метод синтеза минимальной, безрисковной, 3-степенной системы НЕ-ИЛИ. В частии I коротко описан метод синтеза минимальной,3-степенной системы НЕ-ИЛИ, разработанный в [1]. В частии 2 предложен метод синтеза минимальных, безрисковных (без статического риска) логических систем В 3 частии описан метод синтеза минимальной, безрисковной, 3-степенной логической системы НЕ-ИЛИ. В заключении содержатся некоторые сведения о программировании метода на ЭВМ.