ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Nr 38 ELEKTRYKA 11 1961

ZYGMUNT KUCZEWSKI

Katedra Elektryfikacji Zakładów Przemysłowych
Politechniki Śląskiej

SZCZEGÓLNE KRZYWE NA PŁASZCZYŹNIE GAUSSA

Streszczenie: Przedstawiono sposób matematycznej analizy krzywych drugiego i czwartego stopnia na płaszczyźnie Gauss'a oraz zachodzące związki pomiędzy tymi krzywymi. Niektóre krzywe tego typu występują jako miejsca geometryczne prądów silników asynchronicznych przy połączeniach kaskadowych w układach regulacyjnych.

1. Określenie stopnia krzywej

Ogólne równanie krzywej na płaszczyźnie Gaussa:

$$\hat{V} = \frac{\hat{A} + \hat{B}v + \hat{C}v^2 + \ldots + \hat{M}v^m}{\hat{D} + \hat{E}v + \hat{F}v^2 + \ldots + \hat{N}v^n} \qquad (1)$$

gdzie:

$\hat{A}$, $\hat{B}$, ..., $\hat{M}$, $\hat{N}$ - współczynniki stałe

v - parametr zmienny

Równanie (1) można napisać:

$$\hat{V} = \frac{\alpha_1 (v)^{(m)} + j\alpha_2 (v)^{(m)}}{\beta_1 (v)^{(n)} + j\beta_2 (v)^{(n)}} \qquad (2)$$

Po przekształceniu zależność (2) przyjmie postać:

$$\hat{V} = \frac{\gamma_1 (v)^{(m+n)} + j\gamma_2 (v)^{(m+n)}}{\delta (v)^{(2n)}} \qquad (3)$$

Równanie prostej nieprzechodzącej przez początek układu:

$$\hat{P} = \hat{S} + \hat{T}x$$

Po przesunięciu układu współrzędnych o wartość $\hat{S}$:

$$\hat{P}' = \hat{P} = \hat{S} = \hat{T}x$$

$$\hat{V}' = \hat{V} - \hat{S} = \frac{\left[\gamma_1 (v)^{(m+n)} - s_1 \delta (v)^{(2n)}\right] + j\left[\gamma_2 (v)^{(m+n)} - s_2 \delta (v)^{(2n)}\right]}{\delta (v)^{(2n)}}$$

gdzie $\hat{S}$ $s_1 + js_2$

Oznaczając $\hat{T} = t_1 + jt_2$ punkty przecięcia prostej $\hat{P}'$ i krzywej $\hat{V}'$ będą posiadały kierunek prostej $\hat{T}$

$$tg\xi = \frac{t_2}{t_1} = \frac{\gamma_2 (v)^{(m+n)} - s_2 \delta (v)^{(2n)}}{\gamma_1 (v)^{(m+n)} - s_1 \delta (v)^{(2n)}} \qquad (4)$$

Zależność (4) można przedstawić:

$$(\gamma_2 t_1 - \gamma_1 t_2)(v)^{(m+n)} + \delta(s_1 t_2 - s_2 t_1)(v)^{(2n)} = 0$$

Liczba przecięć prostej $\hat{P}'$ z krzywą $\hat{V}'$ określa stopień równania krzywej $\hat{V}'$. Jeżeli $m \geqslant n$ równanie (1) jest równaniem stopnia (m+n) - tego, jeśli $m \leqslant n$ wówczas równanie jest stopnia 2n.

W wypadku, gdy mianownik równania (1) posiada współczynniki rzeczywiste, lub gdy współczynniki są zespolone ale o tym samym kierunku, równanie takie jest stopnia m-tego jeśli $m > n$, lub stopnia n-tego jeśli $n > m$.

2. Krzywe przekrojów stożkowych

Jeżeli w równaniu (1) przyjmiemy $m = n = 2$ oraz współczynniki mianownika przyjmą wartości rzeczywiste, wówczas otrzymamy:

$$\hat{V} = \frac{\hat{A} + \hat{B}v + \hat{C}v^2}{d + ev + fv^2} \tag{5}$$

Jest to równanie drugiego stopnia i reprezentuje krzywe przekrojów stożkowych.
Przesuwając układ współrzędnych o wartość $\frac{\hat{C}}{f}$ otrzymamy:

$$\hat{V}' = \hat{V} - \frac{\hat{C}}{f} = \frac{\hat{H} + \hat{K}v}{d + ev + fv^2} \tag{6}$$

Dla $v = \infty$ krzywa (6) przechodzi przez początek układu $\hat{V}' = \infty$ jeżeli: $d + ev + fv^2 = 0$ co zachodzi, gdy:

$$V_1 = \frac{-e + \sqrt{e^2 - 4df}}{2f}, \qquad v_2 = \frac{-e - \sqrt{e^2 - 4df}}{2f}$$

Oznaczając $\Delta = e^2 - 4df$ możemy mieć trzy przypadki:

a) jeżeli $\Delta = 0$, obydwa pierwiastki równania są rzeczywiste i jednakowe,

b) jeżeli $\Delta > 0$, obydwa pierwiastki są rzeczywiste i różne,

c) jeżeli $\Delta < 0$, obydwa pierwiastki są zespolone i sprzężone.

Ad a) Dla $\Delta = 0$, $v_1 = v_2 = w$, a zatem równanie (6) można napisać:

$$\hat{V}' = \frac{\hat{K}v + \hat{H}}{f(v - w)^2} = \frac{\hat{K}}{f(v - w)} + \frac{\hat{K}w + \hat{H}}{f(v - w)^2}$$

Podstawiając $\hat{K}_1 = \frac{\hat{K}}{f}$; $\hat{H}_1 = \frac{\hat{K}w + \hat{H}}{f}$; $\frac{1}{v - w} = p$ otrzymamy:

$$\hat{V}' = \hat{K}_1 p + \hat{H}_1 p^2 \tag{7}$$

Równanie (7) jest równaniem paraboli.

ad b) Dla $\Delta > 0$, $v_1 = w_1$; $v_2 = w_2$ i równanie (6) przyjmie postać:

$$\hat{V}' = \frac{\hat{K}v + \hat{H}}{f(v - w_1)(v - w_2)} = \frac{\hat{R}_1}{v - w_1} + \frac{\hat{R}_2}{v - w_2} \tag{8}$$

gdzie

$$\hat{R}_1 = \frac{\hat{K}w_1 + \hat{H}}{f(w_1 - w_2)}; \qquad \hat{R}_2 = -\frac{\hat{K}w_2 + \hat{H}}{f(w_1 - w_2)}$$

Z zależności (8) można otrzymać równania dwóch prostych

$$\hat{A}_1 = \frac{\hat{R}_2}{w_1 - w_2} + \frac{\hat{R}_1}{v - w_1}; \quad \hat{A}_2 = \frac{\hat{R}_1}{w_2 - w_1} + \frac{\hat{R}_2}{v - w_2} \tag{9}$$

Można wyznaczyć punkt przecięcia się obu prostych $\hat{A}_1$ i $\hat{A}_2$

$$\hat{M} = \frac{\hat{R}_2}{w_1 - w_2} + \frac{\hat{R}_1}{w_2 - w_1} = \frac{\hat{R}_2 - \hat{R}_1}{w_1 - w_2}$$

Przesuwając układ współrzędnych o wartość $\hat{M}$ równanie (8) przyjmie postać:

$$\hat{V}'' = \hat{V}' - \hat{M} = \hat{H}_1 p + \hat{H}_2 \frac{1}{p} \tag{10}$$

gdzie

$$\hat{H}_1 = \frac{\hat{R}_1}{w_1 - w_2}, \quad \hat{H}_2 = \frac{\hat{R}_2}{w_1 - w_2}, \quad p = \frac{v - w_2}{v - w_1}$$

Zależność (10) jest równaniem hiperboli, zaś proste $\hat{A}_1$ i $\hat{A}_2$ są równaniami asymptot.

ad c) Dla $\Delta < 0$ $\hat{w}_1 = \nu + j\eta$, $\hat{w}_2 = \nu - j\eta$, gdzie $\hat{w}_2 = \check{w}_1$

W tym wypadku równanie (6) przyjmie postać:

$$\hat{V}' = \frac{\hat{K}v + \hat{H}}{f(v - \hat{w}_1)(v - \hat{w}_2)} = \frac{\hat{T}_1}{(v - \hat{w}_1)} + \frac{\hat{T}_2}{(v - \hat{w}_2)} \qquad (11)$$

gdzie:

$$\hat{T}_1 = \frac{\hat{K}(\nu + j\eta) + \hat{H}}{2jf\eta}; \quad \hat{T}_2 = -\frac{\hat{K}(\nu - j\eta) + \hat{H}}{2jf\eta}$$

Równanie (11) można napisać:

$$\hat{V}' = \frac{\hat{T}_1}{p - j\eta} + \frac{\hat{T}_2}{p + j\eta} \qquad (12)$$

gdzie: $p = v - \nu$

Zależność (12) przedstawia sumę dwóch kół, których środki są określone zależnościami:

$$\hat{M}_{k1} = \frac{\hat{T}_1}{-2j\eta}; \qquad \hat{M}_{k2} = \frac{\hat{T}_2}{2j\eta}$$

Środek krzywej (12) będzie określony: $\hat{M} = \hat{M}_{k1} + \hat{M}_{k2}$

Przesuwając układ współrzędnych o wartość $\hat{M}$ równanie (12) przyjmie postać:

$$\hat{V}'' = \hat{V}' - \hat{M} = \hat{R}_1 e^{j\alpha} - \hat{R}_2 e^{-j\alpha} \qquad (13)$$

gdzie:

$$\hat{R}_1 = \frac{\hat{T}_1}{2j\eta}; \quad \hat{R}_2 = \frac{\hat{T}_2}{2j\eta}; \quad e^{j\alpha} = \frac{v - \nu + j\eta}{v - \nu - j\eta}$$

Zależność (13) jest równaniem elipsy.

Jeżeli zaistnieje przypadek, że albo $\hat{R}_1 = 0$, albo $\hat{R}_2 = 0$, wówczas równanie (13) staje się równaniem koła.

3. Cyrkularność krzywej

Krzywa wyrażona równaniem $\hat{V} = \frac{\hat{A} + \hat{B}v + \hat{C}v^2}{\hat{D} + \hat{E}v + \hat{F}v^2}$ przechodzi przez nieskończoność jeśli: $\hat{D} + \hat{E}v + \hat{F}v^2 = 0$

$$\hat{V} = \infty \qquad \text{dla} \quad \hat{w}_1 = \frac{-\hat{E} + \sqrt{\hat{E}^2 - 4\hat{D}\hat{F}}}{2\hat{F}}$$

$$\hat{w}_2 = \frac{-\hat{E} - \sqrt{\hat{E}^2 - 4\hat{D}\hat{F}}}{2\hat{F}}$$

A zatem warunek ten jest spełniony dla dwóch różnych pierwiastków zespolonych.

Jeżeli krzywa przechodzi dwa razy przez nieskończoność przy dwóch różnych pierwiastkach zespolonych ale nie sprzężonych, mówimy, że jest ona bicyrkularna.

Krzywa wyrażona równaniem $\hat{V} = \frac{\hat{A} + \hat{B}v + \hat{C}v^2}{\hat{D} + \hat{E}v}$ przechodzi tylko jeden raz przez nieskończoność jeżeli $\hat{w} = -\frac{\hat{D}}{\hat{E}}$. Taka krzywa jest krzywą monocyrkularną.

Krzywa $\hat{V} = \frac{\hat{A} + \hat{B}v + \hat{C}v^2}{d + ev + fv^2}$ określająca krzywe przekrojów stożkowych przechodzi przez nieskończoność jeśli

$$w_{1,2} = \frac{-e + \sqrt{e^2 - 4df}}{2f}.$$

Jeżeli w_1 i w_2 są wartościami rzeczywistymi krzywa nie jest cyrkularna, jeżeli obydwa pierwiastki są zespolone i sprzężone krzywa jest monocyrkularna. A zatem parabole i hiperbole są krzywymi niecyrkularnymi, zaś elipsa i jej szczególny przypadek - koło, są krzywymi monocyrkularnymi.

Każda krzywa na płaszczyźnie Gaussa określona jest stopniem i cyrkularnością.

4. Przykłady krzywych

a) $\hat{V} = \hat{A} + \hat{B}v$ - krzywa pierwszego stopnia niecyrkularna (prosta)

b) $\hat{V} = \dfrac{\hat{A} + \hat{B}v}{\hat{C} + \hat{D}v}$ - krzywa drugiego stopnia monocyrkularna (koło)

c) $\hat{V} = \dfrac{\hat{A} + \hat{B}v + \hat{C}v^2}{d + ev + fv^2}$ - krzywa drugiego stopnia,

jeśli $\Delta = e^2 - 4df \geqslant 0$ niecyrkularna

jeśli $\Delta = e^2 - 4df < 0$ monocyrkularna

d) $\hat{V} = \dfrac{\hat{A} + \hat{B}v + \hat{C}v^2}{\hat{D} + \hat{E}v}$ - krzywa trzeciego stopnia monocyrkularna (kubik monocyrkularny)

e) $\hat{V} = \dfrac{a + bv + cv^2}{\hat{D} + \hat{E}v}$ kubik monocyrkularny

f) $\hat{V} = \dfrac{\hat{A} + \hat{B}v + \hat{C}v^2}{\hat{D} + \hat{E}v + \hat{F}v^2}$ - krzywa czwartego stopnia bicyrkularna (kwartyka bicyrkularna)

g) $\hat{V} = \dfrac{a + bv + cv^2}{\hat{D} + \hat{E}v + \hat{F}v^2}$ - kwartyka bicyrkularna

5. Inwersja krzywej

Krzywą czwartego stopnia (kwartykę) bicyrkularną

$$\hat{V} = \frac{\hat{A} + \hat{B}v + \hat{C}v^2}{\hat{D} + \hat{E}v + \hat{F}v^2} \tag{14}$$

można przesunić o taką wartość $\hat{R}$

$$\hat{Q} = \hat{V} + \hat{R} = \frac{(\hat{A} + \hat{R}\hat{D}) + (\hat{B} + \hat{R}\hat{E})V + (\hat{C} + \hat{R}\hat{F})v^2}{\hat{D} + \hat{E}v + \hat{F}v^2}$$

aby został spełniony następujący warunek:

$$\begin{aligned} \hat{A} + \hat{R}\hat{D} &= \hat{K}a \\ \hat{B} + \hat{R}\hat{E} &= \hat{K}b \\ \hat{C} + \hat{R}\hat{F} &= \hat{K}c \end{aligned}$$

gdzie a,b,c - wartości rzeczywiste

$$\hat{Q} = \hat{K}\,\frac{a + bv + cv^2}{\hat{D} + \hat{E}v + \hat{F}v^2} \tag{15}$$

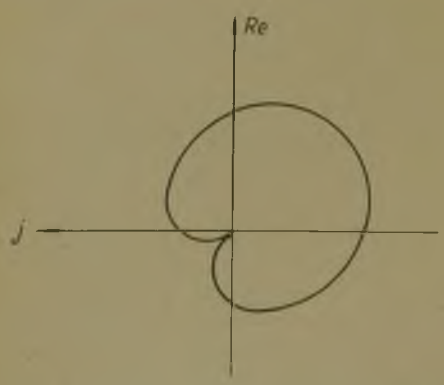
Inwersja krzywej (15):

$$\hat{S} = \frac{1}{\hat{Q}} = \frac{1}{\hat{K}}\,\frac{\hat{D} + \hat{E}v + \hat{F}v^2}{a + bv + cv^2} \tag{16}$$

jest równaniem drugiego stopnia i przedstawia krzywe przekroju stożka.

Jak podano w punkcie 2, w zależności od współczynników mianownika równanie (16) może być albo równaniem paraboli, albo hiperboli, albo elipsy.

Kwartyka bicyrkularna wyrażona równaniem (16) przechodzi przez początek układu współrzędnych $\hat{Q} = 0$ jeżeli: $a + bv + cv^2 = 0$. Jest to ten sam warunek co i dla krzywych przekrojów stożkowych, gdy przechodzą one przez nieskończoność.

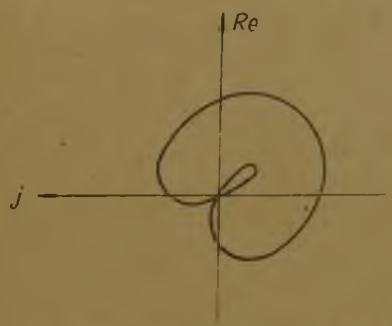


Rys. 1. Kwartyka bicyrkularna z punktem "wierzchołkowym" w początku układu

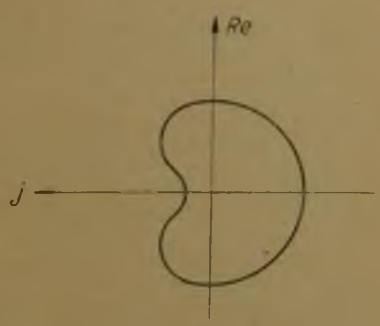
Kwartyka bicyrkularna (15) w początku układu może posiadać tylko jeden punkt, a mianowicie gdy $\Delta = b^2 - 4ac = 0$. Jest to punkt "wierzchołkowy" krzywej (rys.1).

Jeżeli $\Delta > 0$, wówczas krzywa posiada w początku układu współrzędnych dwa punkty rzeczywiste. Krzywa taka posiada pętlę. Początek pętli leży w początku układu (rys.2)

Jeżeli $\Delta < 0$, wówczas krzywa posiada w początku układu współrzędnych punkt nierzeczywisty. A zatem dla $\Delta < 0$ krzywa dla wartości v rzeczywistych nie przechodzi przez początek układu współrzędnych (rys.3).



Rys.2. Kwartyka bicyrkularna z pętlą w początku układu



Rys.3. Kwartyka bicyrkularna nie przechodząca przez początek układu

Porównując związki podane w punkcie 2 i podane wyżej, można powiedzieć, że:

a) inwersja paraboli daje kwartykę bicyrkularną z punktem wierzchołkowym w początku układu współrzędnych,

b) inwersja hiperboli daje kwartykę bicyrkularną posiadającą pętlę, która bierze swój początek w początku układu współrzędnych,

c) inwersja elipsy daje kwartykę bicyrkularną nieprzechodzącą przez początek układu współrzędnych.

6. Analiza kwartyki bicyrkularnej

Badając kwartykę bicyrkularną:

$$\hat{V} = \frac{\hat{A} + \hat{B}v + \hat{C}v^2}{\hat{D} + \hat{E}v + \hat{F}v^2} \tag{17}$$

dla bardzo małych wartości v, bliskich zeru, możemy przedstawić ją równaniem:

$$\hat{K}_{(o)} = \frac{\hat{A} + \hat{B}v}{\hat{D} + \hat{E}v} \tag{18}$$

Dla v = 0 krzywa $\hat{V} = f(v)$ i koło $\hat{K}_{(o)}$ przechodzą przez wspólny punkt.

Podobnie można napisać dla bardzo dużych wartości "v" bliskich nieskończoności

$$\hat{K}_{(\infty)} = \frac{\hat{B} + \hat{C}v}{\hat{E} + \hat{F}v} \tag{19}$$

Teraz dla $v = \infty$ krzywa $\hat{V} = f(v)$ i koło $\hat{K}_{(\infty)}$ przechodzą przez wspólny punkt.

Jeżeli krzywa $\hat{V} = f(v)$ i koło $\hat{K}_{(o)}$ posiadają jeszcze drugi wspólny punkt, to można będzie go znaleźć z porównania obu równań:

$$\hat{V} = \hat{K}_{(o)} \quad \text{czyli} \quad \frac{\hat{A} + \hat{B}v + \hat{C}v^2}{\hat{D} + \hat{E}v + \hat{F}v^2} = \frac{\hat{A} + \hat{B}p}{\hat{D} + \hat{E}p}.$$

Podstawiając: $\hat{A}\hat{E} - \hat{E}\hat{D} = a_1 + ja_2$; $\hat{C}\hat{D} - \hat{A}\hat{F} = b_1 + jb_2$;

$$\hat{C}\hat{E} - \hat{B}\hat{F} = c_1 + jc_2$$

otrzymamy równanie:

$$\left[a_1(p-v) + b_1v^2 + c_1v^2p\right] + j\left[a_2(p-v) + b_2v^2 + c_2v^2p\right] = 0$$

Z powyższego równania otrzymuje się, że krzywa $\hat{V} = f(v)$ i koło $\hat{K}_{(o)}$ posiadają wspólny punkt jeżeli $v_1 = 0$ i $p_1 = 0$ oraz drugi punkt wspólny dla

$$p_2 = \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_2c_1 - a_1c_2}$$

$$v_2' = \frac{a_2c_1 - a_1c_2 + \sqrt{(a_1c_2 - a_2c_1)^2 - 4(b_2c_1 - b_1c_2)(a_1b_2 - a_2b_1)}}{2(b_2c_1 - b_1c_2}$$

$$v_2'' = \frac{a_2c_1 - a_1c_2 - \sqrt{(a_1c_2 - a_2c_1)^2 - 4(b_2c_1 - b_1c_2)(a_1b_2 - a_2b_1)}}{2(b_2c_1 - b_1c_2)}$$

Koło $\hat{K}_{(o)}$ posiada drugi wspólny punkt z krzywą $\hat{V}$, w punkcie podwójnym kwartyki.

Postępując podobnie dla koła $\hat{K}_{(\infty)}$ i krzywej $\hat{V}$ otrzymamy tak samo dwa wspólne punkty obu krzywych, gdzie drugim punktem wspólnym będzie również punkt podwójny kwartyki o tych samych współrzędnych.

Zakładając $v = x + v$, gdzie v' będzie nową zmienną, zaś x dowolną wartością rzeczywistą stałą i wprowadzając takie podstawienie do równania kwartyki bicykularnej, dochodzimy do ogólnego wniosku, że wszystkie koła styczne, których współczynniki stałe, zespolone są związane ze współczynnikami stałymi zespolonymi kwartyki, przechodzą przez punkt podwójny kwartyki.

Kwartyka bicyrkularna jest obwiednią rodziny kół przechodzących przez jej punkt podwójny.

Wprowadzając podstawienie $v = x + v$, jak również $p = x + p'$ ogólne równanie kół stycznych przyjmie postać:

$$\hat{K}'_{(o)} = \frac{\hat{A} + \hat{B}x + \hat{C}x^2 + (\hat{B} + 2\hat{C}x)p}{\hat{D} + \hat{E}x + \hat{F}x^2 + (\hat{F} + 2\hat{F}x)p}$$

Równanie krzywej, na której będą leżeć środki rodziny kół stycznych będzie miało postać:

$$\hat{M} = \frac{(\check{F}\hat{B} - \check{E}\hat{C})x^2 + 2(\check{F}\hat{A} - \check{D}\hat{C})x + (\check{E}\hat{A} - \check{D}\hat{B})}{(\hat{E}\check{F} - \check{E}\hat{F})x^2 + 2(\hat{D}\check{F} - \check{D}\hat{F})x + (\hat{D}\check{E} - \check{D}\hat{E})} \qquad (20)$$

Krzywa środków rodziny kół stycznych do kwartyki bicyrkularnej jest określona równaniem drugiego stopnia. W zależności od współczynników rzeczywistych mianownika, krzywa $\hat{M}$ może być albo parabolą, albo hiperbolą, albo elipsą.

Особые кривые по Гауссовым координатам

Представлен анализ кривых второй и четвертой степени и некоторые взаимоотношения в применении в особых схемах асинхронных машин.

Les courbes de deuxième et quatrième ordre sur le plan Gauss

L'auteur donne l'analyse mathématique des courbes de deuxième et quatrième ordre sur le plan Gausse, ayant en vue l'application pour les machines asynchrones.