ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Nr 52 ELEKTRYKA z.12 1962

KAROL LUBELSKI

Katedra Elektrotechniki Ogólnej B

PRZYCZYNEK DO WYKRESÓW KOŁOWYCH

Streszczenie. Przez wprowadzenie tzw. współczynnika proporcjonalności μ równania okręgu na płaszczyźnie Gaussa można w prosty sposób wyznaczyć położenie okręgu odwróconego oraz przeprowadzić analizę równania okręgu. Podano wnioski wynikające z tej analizy oraz przykłady liczbowe w zastosowaniu do czwórników.

1. Wstęp

Z teorii krzywych wskazowych wiadomo, że równanie

$$\hat{V}(p) = \frac{\hat{A} + p\,\hat{B}}{\hat{C} + p\,\hat{D}} \tag{1}$$

w ogólnym przypadku przedstawia na płaszczyźnie Gaussa okrąg nie przechodzący przez początek układu.

Położenie okręgu (1) można wyznaczyć, obliczając wektor środka $\hat{S}$ oraz promień r przy pomocy znanych wzorów

$$S = \frac{\hat{A} \cdot \check{D} - \hat{B} \cdot \check{C}}{\hat{C} \cdot \check{D} - \hat{D} \cdot \check{C}} \tag{2}$$

$$r = \left| - \frac{\hat{A} \cdot \hat{D} - \hat{B} \cdot \hat{C}}{\hat{C} \cdot \check{D} - \hat{D} \cdot \check{C}} \right| \tag{3}$$

Przy badaniu obwodów elektrycznych prądu zmiennego często występuje zagadnienie kreślenia krzywej wskazowej o równaniu będącym odwrotnością równania (1), tj.

$$\hat{V}^*(p) = \frac{1}{\hat{V}(p)} = \frac{\hat{C} + p\,\hat{D}}{\hat{A} + p\,\hat{B}} \tag{4}$$

Równanie (4) przedstawia ogólnie biorąc okrąg nie przechodzący przez początek układu, a jego położenie można wyznaczyć przez obliczenie wektora środka $\hat{S}^*$ oraz promienia r^* wg wzorów

$$\hat{S}^* = \frac{\hat{C} \cdot \check{B} \cdot \hat{D} \cdot \check{A}}{\hat{A} \cdot \check{B} - \hat{B} \cdot \check{A}} \tag{5}$$

$$r^* = \left| - \frac{\hat{C} \cdot \hat{B} - \hat{D} \cdot \hat{A}}{\hat{A} \cdot \check{B} - \hat{B} \cdot \check{A}} \right| \tag{6}$$

Przez wprowadzenie pewnego współczynnika μ można określić położenie okręgu (4) z danego równania (1) przy pomocy wzorów prostszych niż (5) i (6).

Okazuje się przy tym, że środki okręgów (1) i (4) mogą leżeć po przeciwnych stronach osi liczb rzeczywistych lub osi liczb urojonych, w zależności od znaku μ

2. Współczynnik proporcjonalności równania okręgu

Załóżmy, że w ogólnym przypadku współczynniki $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ i $\hat{D}$ równania (1) są liczbami zespolonymi w postaci

$$\left.\begin{aligned} \hat{A} &= A_1 + j\,A_2 \\ \hat{B} &= B_1 + j\,B_2 \\ \hat{C} &= C_1 + j\,C_2 \\ \hat{D} &= D_1 + j\,D_2 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Po podstawieniu (7) do (2) i prostych przekształceniach otrzymujemy

$$\hat{S} = S_1 + j\,S_2 \tag{8}$$

gdzie

$$S_1 = \frac{A_2 D_1 + B_1 C_2 - A_1 D_2 - B_2 C_1}{2 \cdot (D_1 C_2 - C_1 D_2)} \tag{9}$$

$$S_2 = \frac{B_1 C_1 + B_2 C_2 - A_1 D_1 - A_2 D_2}{2 \cdot (D_1 C_2 - C_1 D_2)} \tag{10}$$

Podobnie podstawiając (7) do (5) otrzymujemy

$$\hat{S}^* = S_1^* + j\, S_2^* \tag{11}$$

gdzie

$$S_1^* = \frac{A_2\, D_1 + B_1\, C_2 - A_1\, D_2 - B_2\, C_1}{2 \cdot (A_2\, B_1 - A_1\, B_2)} \tag{12}$$

$$S_2^* = \frac{A_1\, D_1 + A_2\, D_2 - B_1\, C_1 - B_2 C_2}{2 \cdot (A_2\, B_1 - A_1\, B_2)} \tag{13}$$

Stosunek składowych rzeczywistych (9) i (12) wynosi

$$\frac{S_1}{S_1^*} = \frac{A_2\, B_1 - A_1\, B_2}{D_1\, C_2 - C_1\, D_2} = \frac{\begin{vmatrix} A_1, & A_2 \\ B_1, & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} C_1, & C_2 \\ D_1, & D_2 \end{vmatrix}} = \mu \tag{14}$$

a stosunek składowych urojonych (10) i (13) daje

$$\frac{S_2}{S_2^*} = \frac{-(A_2\, B_1 - A_1\, B_2)}{D_1\, C_2 - C_1\, D_2} = -\frac{\begin{vmatrix} A_1, & A_2 \\ B_1, & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} C_1, & C_2 \\ D_1, & D_2 \end{vmatrix}} = -\mu \tag{15}$$

przy czym μ jest liczbą rzeczywistą, stałą dla danego okręgu. Wyrażenie

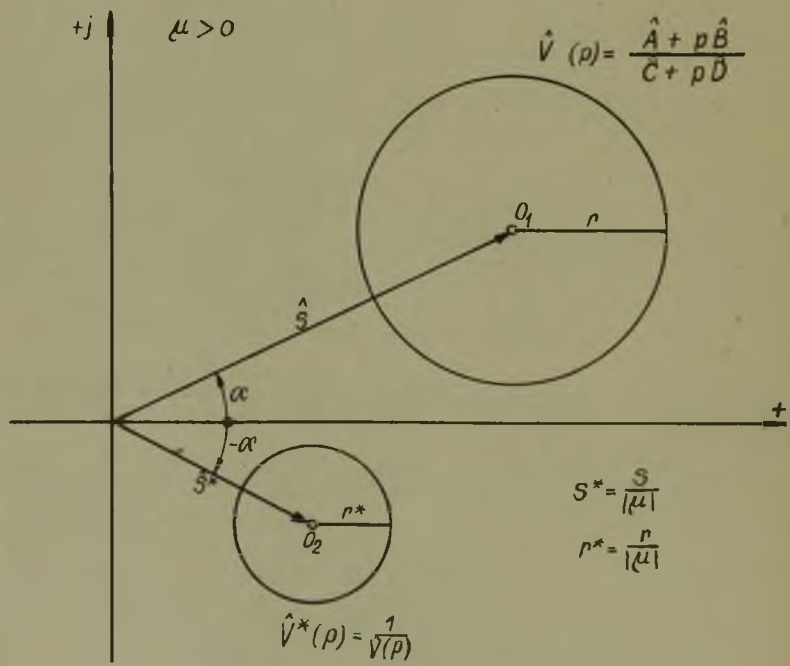
$$\mu = \frac{\begin{vmatrix} A_1, & A_2 \\ B_1, & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} C_1, & C_2 \\ D_1, & D_2 \end{vmatrix}} \tag{16}$$

nazywać będziemy współczynnikiem proporcjonalności równania okręgu (1) i zdefiniujemy go jako iloraz wyznaczników utworzonych ze współczynników licznika i mianownika równania okręgu.

Współczynnik ten może przybierać wartości dodatnie i ujemne (przypadki szczególne $\mu = 0$ i $\mu = \pm\infty$ oraz wnioski stąd wynikające, zostaną rozpatrzone w ustępie 4).
Z wyprowadzonych równań (14) i (15) wynika następujący wniosek ogólny:

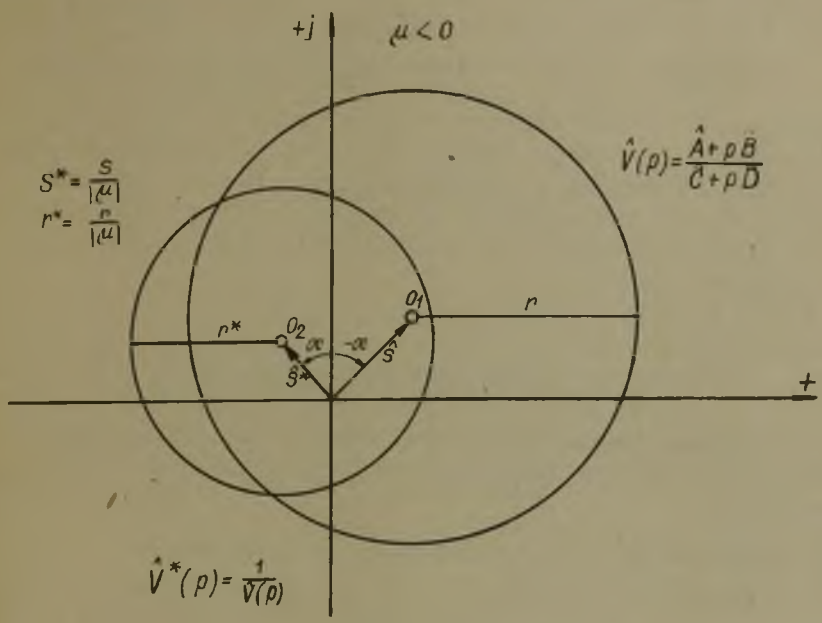
Wniosek 1

Jeżeli współczynnik proporcjonalności μ danego równania okręgu $\hat{V}(p) = \frac{\hat{A} + p\hat{B}}{\hat{C} + p\hat{D}}$ ma wartość dodatnią ($\mu > 0$), wtedy wektory środków okręgów danego $[V(p)]$ i odwróconego $[\hat{V}^*(p) = \frac{1}{\hat{V}(p)}]$ położone są symetrycznie względem osi rzeczywistej.



Rys.1. Konstrukcja okręgu $\hat{V}^*(p) = \frac{1}{\hat{V}(p)}$ z danego okręgu $\hat{V}(p) = \frac{\hat{A} + p\hat{B}}{\hat{C} +}$ dla $\mu > 0$

W przypadku, gdy $\mu < 0$ wektory środków tych okręgów położone są symetrycznie względem osi urojonej (rys.1 i 2).



Rys.2. Konstrukcja okręgu $\hat{V}^*(p) = \frac{1}{\hat{V}(p)}$ z danego okręgu

$$\hat{V}(p) = \frac{\hat{A} + p\,\hat{B}}{\hat{C} + p\,\hat{D}} \quad \text{dla } \mu < 0$$

3. Wyznaczenie położenia okręgu odwróconego

Między modułami S i S^* wyrażeń (8) i (11) oraz promieniami r i r^* okręgów (1) i (4), zachodzi na podstawie wzorów (14) i (15) związek

$$\frac{S}{S^*} = \frac{r}{r^*} = |\mu| \tag{17}$$

stąd

$$S^* = \frac{S}{|\mu|} \tag{18}$$

$$r^* = \frac{r}{|\mu|} \tag{19}$$

Wzory (18) i (19) w oparciu o wniosek 1 umożliwiają następującą konstrukcję okręgu odwróconego.

Jeżeli dany jest okrąg o równaniu $\hat{V}(p) = \frac{\hat{A} + p\hat{B}}{\hat{C} + p\hat{D}}$, to okrąg o równaniu $\hat{V}^*(p) = \frac{1}{\hat{V}(p)}$ znajdujemy w ten sposób, że odległość $S = |\hat{S}|$ środka od początku układu współrzędnych oraz promień r danego okręgu dzielimy przez bezwzględną wartość współczynnika proporcjonalności μ, a następnie kreślimy zwierciadlaną odbitkę otrzymanego okręgu względem osi rzeczywistej jeżeli $\mu > 0$, lub względem osi urojonej jeżeli $\mu < 0$ (rys.1 i 2).

4. Analiza równania okręgu

Przy pomocy współczynnika proporcjonalności μ można w prosty sposób przeprowadzić szczegółową analizę równania okręgu (1).

a) Zakładamy $\mu = 0$, co prowadzi do zależności

$$\begin{vmatrix} A_1, & A_2 \\ B_1, & B_2 \end{vmatrix} = 0 \tag{20}$$

Warunek (20) spełnia się dla następujących pięciu przypadków

1) $\hat{A} = 0$
2) $\hat{B} = 0$
3) $\hat{A} = A_1$ i $\hat{B} = B_1$
4) $\hat{A} = jA_2$ i $\hat{B} = jB_2$
5) $A_1 : A_2 = B_1 : B_2$

Przypadki powyższe prowadzą do następujących równań

1) $$\hat{V}(p) = \frac{p\hat{B}}{\hat{C} + p\hat{D}} \tag{21}$$

2) $$\hat{V}(p) = \frac{\hat{A}}{\hat{C} + p\hat{D}} \tag{22}$$

$$3)\quad \hat{V}(p) = \frac{A_1 + p\,B_1}{\hat{C} + p\,\hat{D}} \tag{23}$$

$$4)\quad \hat{V}(p) = \frac{jA_2 + p\,jB_2}{\hat{C} + p\,\hat{D}} \tag{24}$$

$$5)\quad \hat{V}(p) = \frac{A_1 + jA_2 + p\cdot(B_1 + jB_2)}{\hat{C} + p\,\hat{D}} \tag{25}$$

Równania (21) do (25) przedstawiają na płaszczyźnie Gaussa okręgi przechodzące przez początek układu, ponieważ dla wszystkich tych przypadków jest spełniony warunek $S = r$. Wyniki powyższe można sformułować następująco:

równanie typu $$\hat{V}(p) = \frac{\hat{A} + p\,\hat{B}}{\hat{C} + p\,\hat{D}}$$

przy założeniu $\hat{C} \neq 0$ i $\hat{D} \neq 0$ przedstawia okrąg przechodzący przez początek układu jeżeli:

a) jeden ze współczynników licznika jest równy zeru ($\hat{A} = 0$ lub $\hat{B} = 0$)

b) oba współczynniki licznika są liczbami tylko rzeczywistymi ($\hat{A} = A_1$ i $\hat{B} = B_1$) lub tylko urojonymi ($\hat{A} = jA_2$ i $\hat{B} = jB_2$)

c) oba współczynniki licznika są liczbami zespolonymi, a ich składowe rzeczywiste i urojone spełniają zależność $A_1 : A_2 = B_1 : B_2$.

b) Założenie $\mu = \pm\infty$ prowadzi do zależności

$$\begin{vmatrix} C_1, & C_2 \\ D_1, & D_2 \end{vmatrix} = 0 \tag{26}$$

Warunek (26) spełnia się dla następujących pięciu przypadków

1) $\hat{C} = 0$

2) $\hat{D} = 0$

3) $\hat{C} = C_1$ i $\hat{D} = D_1$

4) $\hat{C} = jC_2$ i $\hat{D} = jD_2$

5) $C_1 : C_2 = D_1 : D_2$

Przypadki powyższe prowadzą do następujących równań

$$1)\ \hat{V}(p) = \frac{\hat{A} + p\,\hat{B}}{p\,D} = \hat{E} + \frac{1}{p} \cdot \hat{F} \tag{27}$$

$$2)\ \hat{V}(p) = \frac{\hat{A} + p\,\hat{B}}{\hat{C}} = \hat{M} + p\,\hat{N} \tag{28}$$

$$3)\ \hat{V}(p) = \frac{\hat{A} + p\,\hat{B}}{C_1 + p\,D_1} \tag{29}$$

$$4)\ \hat{V}(p) = \frac{\hat{A} + p\,\hat{B}}{jC_2 + p\,jD_2} \tag{30}$$

$$5)\ V(p) = \frac{\hat{A} + p\,\hat{B}}{C_1 + jC_2 + p \cdot (D_1 + jD_2)} \tag{31}$$

Równania (27) do (31) przedstawiają na płaszczyźnie Gaussa proste, ponieważ dla wszystkich tych przypadków S i r są nieskończenie wielkie, a więc jest to graniczny przypadek okręgu o nieograniczeniu wielkim promieniu. Wyniki powyższe można sformułować w następujący sposób: równanie typu $\hat{V}(p) = \frac{\hat{A} + p\,\hat{B}}{\hat{C} + p\,\hat{D}}$ przy założeniu $\hat{A} \neq 0$ i $\hat{B} \neq 0$ przedstawia prostą nie przechodzącą przez początek układu jeżeli:

a) jeden ze współczynników mianownika jest równy zeru ($\hat{C} = 0$ lub $\hat{D} = 0$),

b) oba współczynniki mianownika są liczbami tylko rzeczywistymi ($\hat{C} = C_1$ i $\hat{D} = D_1$) lub tylko urojonymi ($\hat{C} = jC_2$ i $\hat{D} = jD_2$)

c) oba współczynniki mianownika są liczbami zespolonymi, a ich składowe rzeczywiste i urojone spełniają zależności $C_1 : C_2 = D_1 : D_2$.

Z przeprowadzonej analizy równania (1) można wyciągnąć następujący ogólny wniosek:

Wniosek 2

Równanie $\hat{V}(p) = \frac{\hat{A} + p\hat{B}}{\hat{C} + p\hat{D}}$ w zależności od współczynnika proporcjonalności

$$\mu = \frac{\begin{vmatrix} A_1, & A_2 \\ B_1, & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} C_1, & C_2 \\ D_1, & D_2 \end{vmatrix}}$$ może przedstawiać na płaszczyźnie Gaussa

1) okrąg nie przechodzący przez początek układu współrzędnych, jeżeli $\mu \neq 0$, przy czym

   a) dla $\mu > 0$, początek układu współrzędnych leży zewnątrz okręgu $(S > r)$

   b) dla $\mu < 0$, początek układu współrzędnych leży wewnątrz okręgu $(S < r)$

2) okrąg przechodzący przez początek układu współrzędnych, jeżeli $\mu = 0$

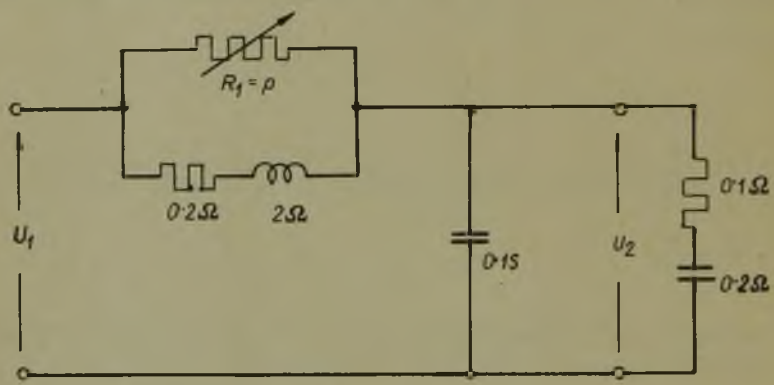
3) prostą nie przechodzącą przez początek układu współrzędnych jeżeli $\mu = \pm$

Na zakończenie podano dwa przykłady liczbowe w zastosowaniu do czwórników, dla których równania krzywych wskazowych spełniają warunek $\mu < 0$ (przykład 1) oraz $\mu = 0$ i $\mu = \infty$ (przykład 2).

5. Przykłady liczbowe

Przykład 1

Wyznaczyć krzywe wskazowe przekładni napięć $\hat{\nu}_u = \frac{\hat{U}_1}{\hat{U}_2}$ oraz współczynnika wzmocnienia napięciowego $\hat{K} = \frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1}$ czwórnika jak na rys.3, przy założeniu, że oporność $R_1 = p$ zmienia się w granicach od $p = 0$ do $p = \infty$



Rys.3. Czwórnik do przykładu 1

Równanie krzywej wskazowej przekładni napięć, jak łatwo obliczyć, przedstawia się następująco

$$\hat{\nu}_u(p) = \frac{\hat{U}_1}{U_2} = \frac{(0{\cdot}2 + j2) + p\,.\,(-6{\cdot}8 + j\,4{\cdot}82)}{(0{\cdot}2 + j2) + p} = \frac{\hat{A} + p\,\hat{B}}{\hat{C} + p\,\hat{D}}$$

Współczynnik proporcjonalności tego równania wynosi

$$\mu = \frac{\begin{vmatrix} 0{\cdot}2, & 2 \\ -6{\cdot}8. & 4{\cdot}82 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0{\cdot}2. & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}} = -\,7{\cdot}282 < 0$$

Wobec tego równanie $\hat{\mathcal{V}}_U(p)$ przedstawia okrąg nie przechodzący przez początek układu, przy czym wektor środka tego okręgu oraz jego promień wynoszą

$$\hat{S} = -3{,}14 + j\,2{,}02 = 3{,}74\,e^{j\,147^\circ 13'} = S \cdot e^{j\alpha}$$

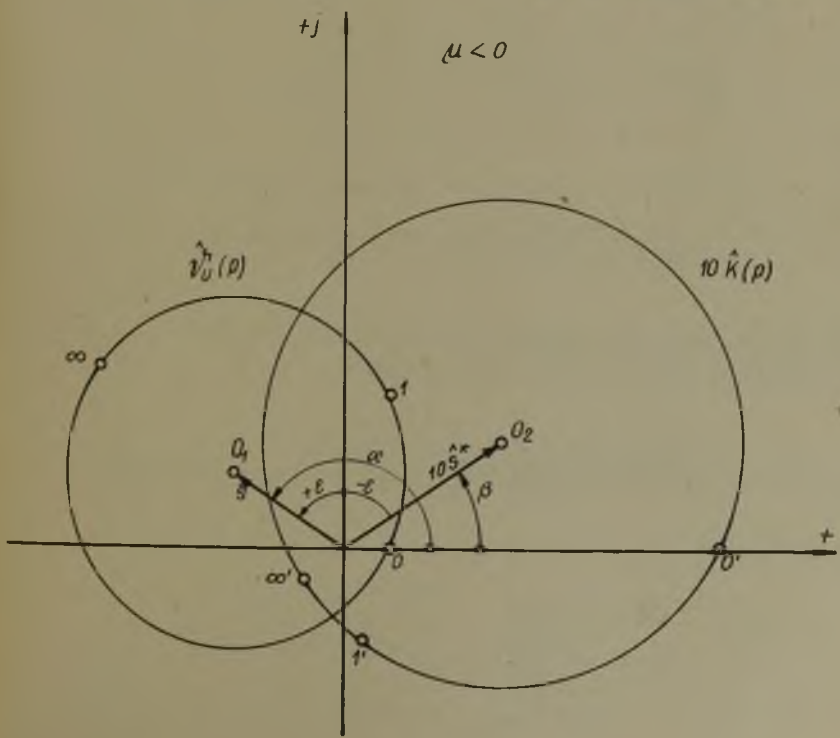
$$r = |-3{,}66 + j\,2{,}80| = 4{,}61$$

Równanie krzywej wskazowej współczynnika wzmocnienia napięciowego

$$\hat{K}(p) = \frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} = \frac{1}{\hat{\mathcal{V}}_U(p)} = \frac{(0{,}2 + j2) + p}{(0{,}2 + j2) + p \cdot (-6{,}8 + j\,4{,}82)}$$

Wektor środka oraz promień tego okręgu na podstawie wzorów (18) i (19) wynoszą

$$S^* = \frac{3{,}74}{7{,}282} = 0{,}513 \qquad r' = \frac{4{,}61}{7{,}282} = 0{,}633$$



Rys.4. Wykresy kołowe do przykładu 1

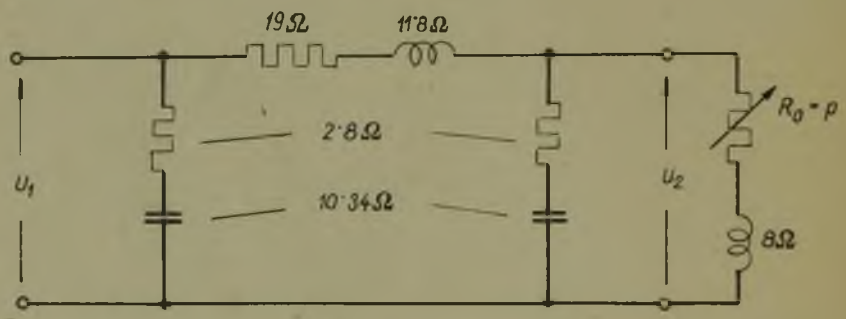
Ponieważ $\mu < 0$, więc środki obu okręgów leżą po przeciwnych stronach osi urojonej (rys.4), przy czym

$$\hat{S}^* = 0{\cdot}513 \,.\, e^{j\,(180^\circ - \alpha)} = 0{\cdot}513 \,.\, e^{j\,32^\circ 47'} = S^* \,.\, e^{j\beta}$$

a więc wskazy $\hat{S}$ i $\hat{S}^*$ są odchylone symetrycznie względem osi $+j$.

Przykład 2

Wyznaczyć krzywe wskazowe oporu wejściowego $\hat{Z}_{we}$ oraz przewodności wejściowej $\hat{Y}_{we}$ czwórnika symetrycznego typu π o zmieniającej się oporności na wyjściu $R_o = p$ w granicach od $p = 0$ do $p = \infty$ (rys.5).



Rys.5. Czwórnik do przykładu 2

Równanie krzywej wskazowej oporu wejściowego jak łatwo obliczyć przedstawia się następująco

$$\hat{Z}_{we}(p) = \frac{(3 + j\,15) + p \,.\, (0{\cdot}4 + j2)}{(-1 + j\,0{\cdot}832) + p \,.\, (-\,0{\cdot}146 + j\,0{\cdot}175)}$$

Ponieważ

$$\mu = \frac{\begin{vmatrix} 3, & 15 \\ 0{\cdot}4, & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\,1, & 0{\cdot}832 \\ -0{\cdot}146, & 0{\cdot}175 \end{vmatrix}} = 0$$

więc równanie to przedstawia okrąg przechodzący przez początek układu, przy czym

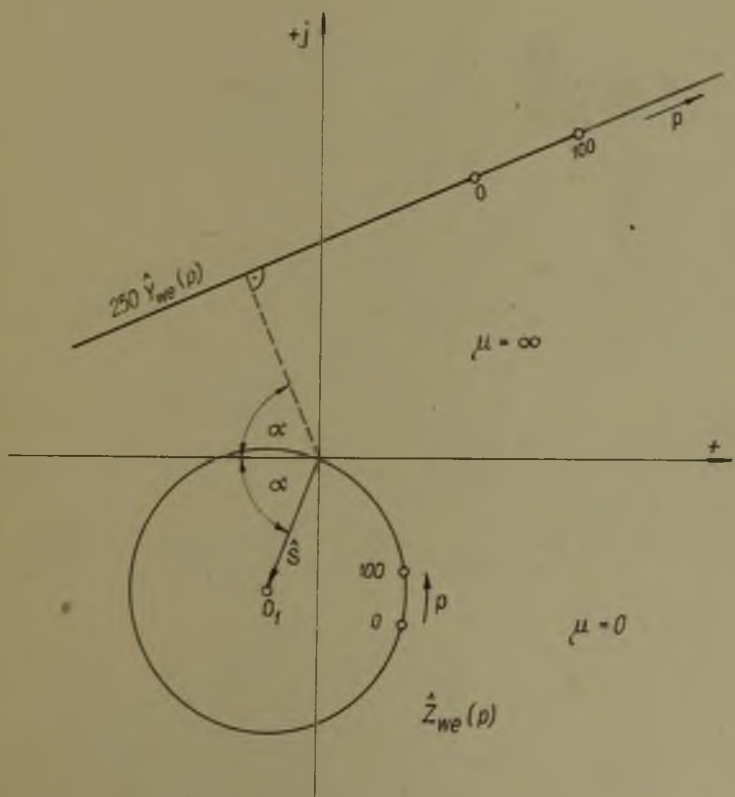
$$\hat{S} = -3{,}54 - j\,8{,}55 = 9{,}25 \cdot e^{-j\,112^{\circ}30'}$$

$$r = \left| -j\,\frac{1}{0{,}108} \right| = 9{,}25$$

Równanie krzywej wskazowej przewodności wejściowej

$$\hat{Y}_{we}(p) = \frac{1}{\hat{Z}_{we}(p)} = \frac{(-1 + j\,0{,}832) + p \cdot (-0{,}146 + j\,0{,}175)}{(3 + j\,15) + p \cdot (0{,}4 + j\,2)}$$

Ponieważ dla tego równania jest $\mu = \infty$, więc przedstawia ono prostą nie przechodzącą przez początek układu (rys.6).



Rys.6. Wykresy do przykładu 2

В КАЧЕСТВЕ ПРИЛОЖЕНИЯ К ТЕОРИИ КРУГОВЫХ ДИАГРАММ

В работе вводится коэффициент пропорциональности в уравнения круга на Гауссовой плоскости и получается простой метод обозначения инверсированного круга и анализ уравнений. Даны заключения и численные примеры по четырехполюсникам.

CONTRIBUTION AUX DIAGRAMMES CIRCULAIRES

L'auteur introduit un coefficient de proportion dans les équations du cercle sur le plan Gauss et il obtient un simple procédé d'établir la position du cercle et de l'analyse de l'équation. Il donne les conclusions de cette analyse et les examples numériques pour les quadrupôles.