

JAN HARASIMOWICZ

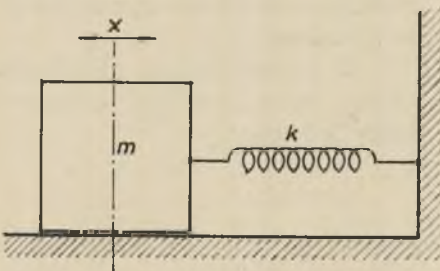
Katedra Teorii Regulacji

## DRGANIA W UKŁADZIE Z SUCHYM TARCIEM

**Streszczenie.** Praca omawia możliwość stworzenia elektrycznego modelu dla mechanicznego układu z suchym tarcie. Podano sposób przeprowadzenia matematycznej analizy tego rodzaju modelu.

1. Układ mechaniczny

Rozpatrzony zostanie nieliniowy układ mechaniczny o jednym stopniu swobody, przedstawiony na rys.1.



Rys.1. Układ mechaniczny z suchym tarcie

Czynnikiem wygaszającym drgania swobodne omawianego układu jest suche tarcie. Suche tarcie jest wielkością fizyczną posiadającą wymiar siły, stałą wartość liczbową oraz kierunek przeciwny do chwilowego kierunku prędkości  $\dot{x}$ , z jaką porusza się masa i ruchomy koniec sprężyny.

Suche tarcie wyraża się wzorem

$$F = -h \operatorname{sign} \dot{x}, \quad (1)$$

gdzie  $F$  jest siłą wygaszającą drgania swobodne omawianego układu,  $\dot{x}$  prędkością, a  $h$  stały współczynnik.

Obliczenie mechanicznego układu drgającego z suchym tarcie prowadzi się do rozwiązania następującego nieliniowego równania różniczkowego:

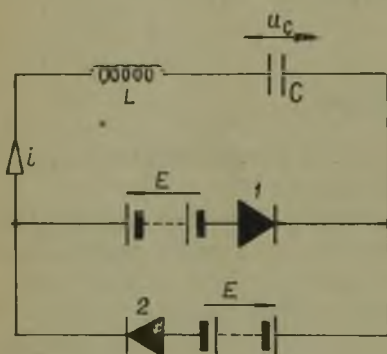
$$m\ddot{x} + kx = -h \operatorname{sign} \dot{x}, \quad (2)$$

gdzie  $m$  jest masą układu drgającego,  $k$  jego stałą sprężystości, zaś  $x$ ,  $\dot{x}$  i  $\ddot{x}$  odpowiednio przemieszczeniem, prędkością i przyspieszeniem tego układu.

## 2. Model elektryczny

Modelem elektrycznym nieliniowego układu mechanicznego, opisanego równaniem (2) jest obwód elektryczny przedstawiony na rys.2. Model ten opisuje równanie

$$L\ddot{Q} + \frac{1}{C} Q = -E \operatorname{sign} \dot{Q}, \quad (3)$$



Rys.2. Model elektryczny układu z rys.1

gdzie  $L$  jest indukcyjnością obwodu,  $C$  jego pojemnością,  $E$  siłą elektromotoryczną jednej z dwu przeciwnie skierowanych baterii ogniów elektrycznych, a  $Q$  nabojem elektrycznym kondensatora. Idealne elementy prostownikowe 1 i 2 zapewniają spełnienie warunków wyrażonego równaniem (1).

Po odpowiednim przekształceniu równania (3) otrzymamy równanie

$$\ddot{Q} + \omega_0^2 Q + \omega_0^2 CE \operatorname{sign} \dot{Q} = 0 \quad (4)$$

gdzie  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  jest pulsacją drgań własnych obwodu elektrycznego. Podstawiając do równania (4)

$$Q + CE \operatorname{sign} \dot{Q} = u \quad (5)$$

otrzymamy

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = 0 \quad (6)$$

Równania (3) i (4) opisują zachowanie się modelu elektrycznego w całym przedziale  $t \geq 0$ . Natomiast równanie (6), ze względu na podstawienie (5), opisuje zachowanie się tegoż modelu w poszczególnych przedziałach czasu, dla których  $\dot{Q}$  nie zmienia znaku.

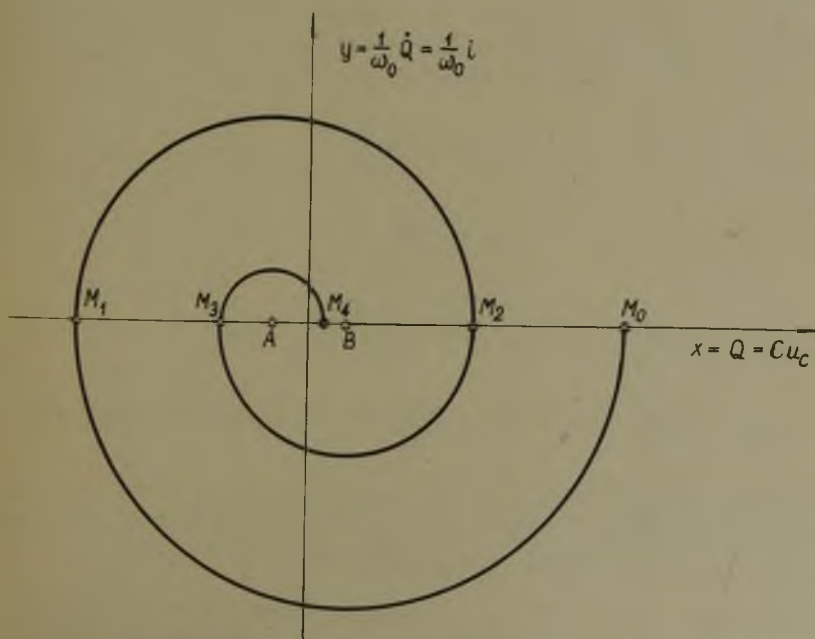
Trajektoriami punktów o współrzędnych  $u$  i  $y$ , gdzie  $u$  określone jest równaniem (6), a  $y = \frac{1}{\omega_0} \dot{u}$  będą koła, którego równanie ogólne ma postać:

$$u^2 + y^2 = K. \quad (7)$$

$K$  jest dowolną liczbą dodatnią.

Z równań (5) i (7) wynika, że trajektoria punktu  $M$  o współrzędnych  $x$  i  $y$ , gdzie  $x = Q$ , a  $y = \frac{1}{\omega_0} \dot{Q}$  składa się z szeregu łuków kołowych, których środki leżą odpowiednio w punktach:

$$\left. \begin{array}{l} A(x = CE, y = 0) \quad \text{dla } y < 0 \\ B(x = -CE, y = 0) \quad \text{dla } y > 0 \end{array} \right\} \quad (8)$$



Rys.3. Trajektoria punktu  $M(x = Q, y = \frac{1}{\omega_0} \dot{Q})$

Rysunek 3 przedstawia taką trajektorię dla obwodu przedstawionego na rys.2 przy następująco założonych warunkach początkowych:

$$\left. \begin{aligned} Q(0) &= CU_c(0) = Q_c \\ \dot{Q}(0) &= J(0) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Powstanie drgań w modelu elektrycznym jest możliwe jedynie wówczas, gdy  $|Q_0| > CE$ , gdy  $|Q_0| \leq CE$  drgania te w ogóle nie powstaną.

Trajektoria przedstawiona na rys.3 zaczyna się w punkcie  $M_0$  o współrzędnych określonych warunkami początkowymi (9), a kończy się w punkcie  $M_4$  położonym na odcinku AB. Odcięta punktu  $M_4$  przedstawia pewien remanent naboju elektrycznego na kondensatorze, dla którego spełnia się warunek:

$$Q_4 \leq CE. \quad (10)$$

Przebiegi  $x(t)$  oraz  $y(t)$  nie dadzą się wyrazić analitycznie dla całego zakresu istnienia tych funkcji. Można natomiast, znając warunki początkowe, wyrazić analitycznie  $x(t)$  oraz  $y(t)$  dla przedziału

$$0 \leq t \leq \frac{T}{2},$$

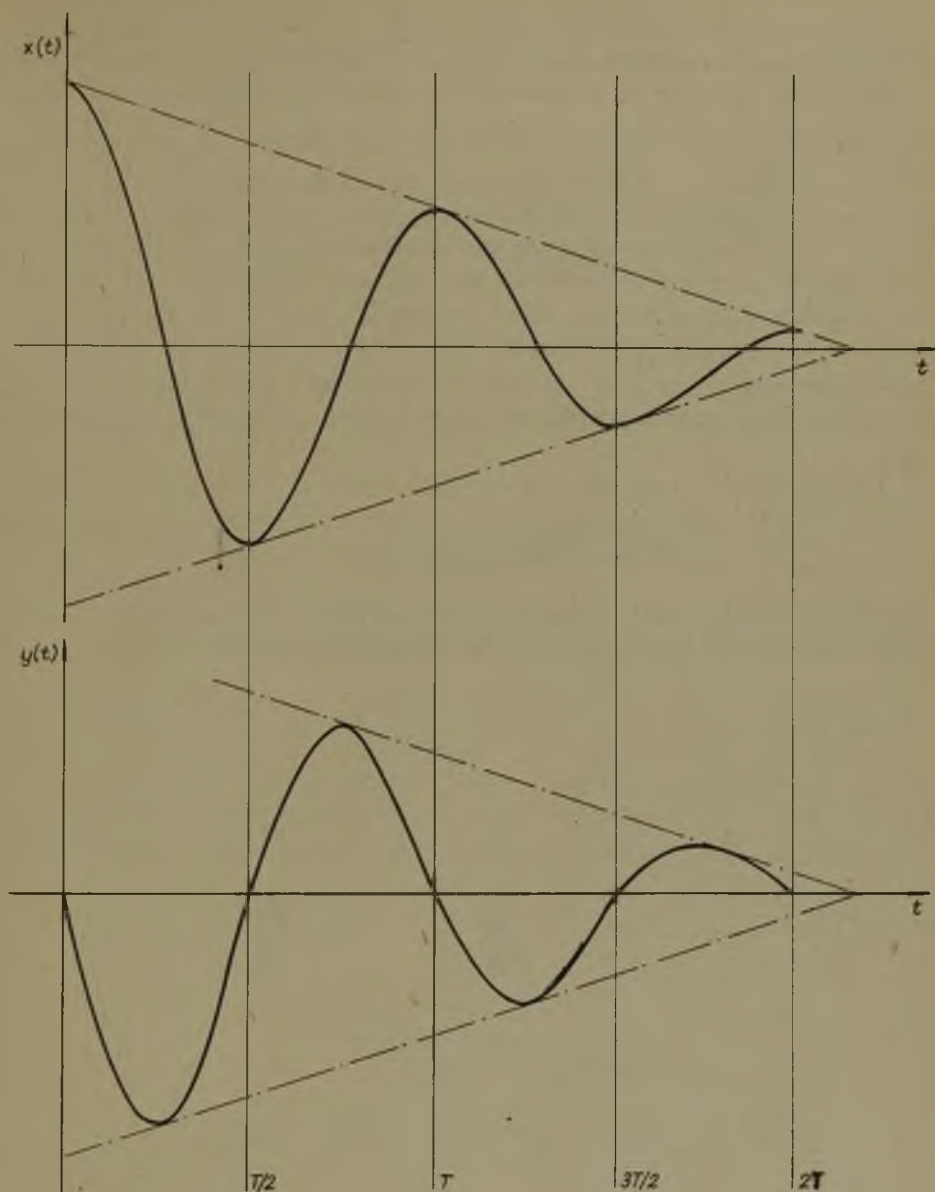
gdzie

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} :$$

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= Q(t) = CU_c(t) = CE + (Q_0 - CE) \cos \omega_0 t \\ y(t) &= \frac{1}{\omega_0} \dot{Q}(t) = \frac{1}{\omega_0} J(t) = - (Q_0 - CE) \sin \omega_0 t. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Istnieje również możliwość analitycznego wyrażenia przebiegów  $x(t)$  oraz  $y(t)$  dla przedziału  $\frac{T}{2} \leq t \leq T$  oraz następnym przedziałów o długości  $\frac{T}{2}$ .

Przebiegi  $x(t)$  i  $y(t)$ , odpowiadające trajektorii przedstawionej na rys.3, przedstawia rys.4. Obydwa te przebiegi są bardzo silnie tłumione. Ich obwiedniami są linie proste przecinające się na osi czasu.

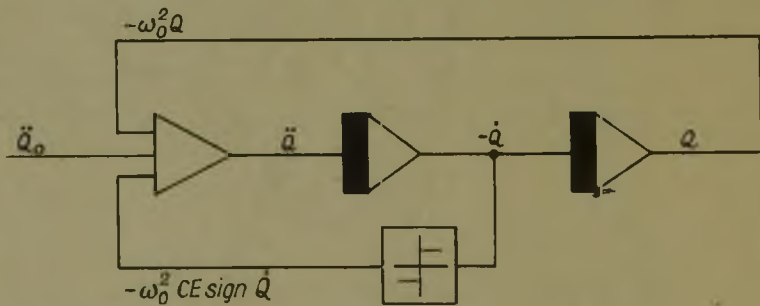


Rys.4. Przebiegi czasowe funkcji  $x(t) = Q(t)$  i  $y(t) = \frac{1}{\omega_0} \dot{Q}(t)$  odpowiadające trajektorii z rys.3

Tego rodzaju własności omawianego nieliniowego obwodu powodują wygasanie drgań swobodnych w skończonym czasie, wynoszącym kilka lub kilkanaście półokresów. Szybkość wygasania drgań swobodnych zależy od wartości stosunku:  $\frac{Q_0}{CE} = \frac{U_c(0)}{E}$  i przez odpowiedni dobór napięcia  $E$  może być dowolnie zmieniana. Wygaśnięcie drgań następuje wówczas, gdy wartość początkowa  $Q$  dla kolejnego cyklu stanie się nie większa co do modułu od  $CE$ , to znaczy gdy  $|Q_n| \leq EC$ , gdzie  $n$  jest liczbą naturalną określającą kolejność cykli, z których każdy, z wyjątkiem pierwszego, ma długość równą  $\frac{T}{2}$ . Długość pierwszego cyklu zależy od wyboru warunków początkowych (9); gdy punkt  $M_0$  nie leży na osi odciętych jest ona mniejsza od  $\frac{T}{2}$ .

### 3. Model analogowy

Modelem analogowym nieliniowego układu mechanicznego opisanego równaniem (2) jest obwód przedstawiony na rys.5.



Rys.5. Model analogowy układu z rys.1

Model ten składa się z elementu sumującego, dwu elementów całkujących oraz przekaźnika elektronowego. Na wejście pierwszego z elementów całkujących podaje się wielkość  $\ddot{Q}$  obliczoną z równania (4):

$$\ddot{Q} = -\omega_0^2 (Q + CE \text{ sign } \dot{Q}). \quad (12)$$

Na wyjściach szeregowo połączonych elementów całkujących otrzymuje się odpowiednio wartości  $-\dot{Q}$  dla pierwszego i  $Q$  dla drugiego elementu.

Po podaniu wartości  $-\dot{Q}$  na przekaźnik elektronowy otrzymuje się wartość  $-\omega_0^2 \text{CE} \sin Q$  na wyjściu tego przekaźnika. Wartość tę wraz z wartością  $-\omega_0^2 Q$  otrzymaną z  $Q$  po operacji odwrócenia znaku i przyporządkowaniu współczynnika  $\omega_0^2$  podajemy na element sumujący. Trzecią wielkością sumującą się z dwoma poprzednimi jest  $\ddot{Q}(0)$  reprezentująca stan początkowy.

## КОЛЕБАНИЯ В СИСТЕМЕ С СУХИМ ТРЕНИЕМ

Рассматривается возможность исполнения электрической модели механического устройства с сухим трением. Предложен способ математического анализа такой модели.

## OSCILLATIONS D'UN DISPOSITIF À FROTTEMENT SEC

L'auteur considère la possibilité de réaliser un modèle électrique du dispositif mécanique à frottement sec. Il présente une analyse mathématique concernant ce modèle.