ELEKTRYKA z. 15

ZYGMUNT J. NOWOMIEJSKI

P. 3348/63

MOC I ENERGIA ELEKTRYCZNA W UKŁADACH ELEKTRYCZNYCH O DOWOLNYCH USTALONYCH PRZERIEGACH

Rejestr 37 A
20 Lipca 1964

POLITECHNIKA ŚLĄSKA
ZESZYT NAUKOWY Nr 77 — GLIWICE 1963

SPIS TREŚCI

		str.
I.	Wstęp	1
	1. Funkcje ortonormalne	2
	2. Przestrzeń Hilberta	6
	3. Uogólniona funkcja symboliczna	7
II.	Układy jednofazowe	9
	1. Moc symboliczna, czynna i bierna w układach 1-fazowych	9
	2. Rozkład ortogonalny funkcji symbolicznej	10
	3. Splot i jego interpretacja	20
	4. Współczynniki mocy	24
	5. Kompensacja mocy biernej w układach 1-fazowych	27
III.	Układy wielofazowe i wieloprzewodowe	31
	1. Moc w układach wielofazowych i wieloprzewodowych	31
	2. Kompensacja mocy biernej w układach wielofazowych	35
	3. Współczynniki mocy	41
IV.	Zasada zachowania mocy	43
	1. Przestrzeń wektorialna	43
	2. Rozkład ortogonalny wektorów przestrzeni (W)n	46
	3. Zasada zachowania mocy	50
	4. Splot	55
V.	Spis literatury	57

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

ZESZYTY NAUKOWE

Nr 77

ZYGMUNT J. NOWOMIEJSKI

P. 3348/63

MOC I ENERGIA ELEKTRYCZNA W UKŁADACH ELEKTRYCZNYCH O DOWOLNYCH USTALONYCH PRZEBIEGACH

PRACA HABILITACYJNA Nr 2a
UZUPEŁNIONA

Data otwarcia przewodu habilitacyjnego 17. I. 1961 r.

GLIWICE 1963

REDAKTOR NACZELNY ZESZYTÓW NAUKOWYCH
POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Fryderyk Staub

Dział Nauki — Sekcja Wydawnictw Naukowych — Politechniki Śląskiej
Gliwice, ul. Konarskiego 23

Nakład 200+45 egz. Objętość ark. wyd. 2,75; ark. druk. 3 10/16
Papier offsetowy kl. V, 70x100, 70 g
Oddano do składania 11. III. 1963 r. Podpisano do druku 13. III. 1963 r.
Druk ukończono 25. III. 1963 r.
Zam. 318 16. III. 1963 r. D-21 Cena zł 3,50

Zakład Produkcji Pomocy Naukowych Politechniki Śląskiej w Gliwicach

I. Wstęp

W elektrotechnice teoretycznej jak i w praktyce energoelektrycznej brak dotychczas ustalonego poglądu co do tak podstawowych wielkości jak energia czynna i energia bierna układu. Istnieją różne interpretacje tych wielkości. W szczególności odnosi się to do energii biernej, co do której szereg autorów[1] uważa, iż samo pojęcie energii biernej nie ma fizykalnego znaczenia. Wiąże się to także z tym, iż ogólne rozważania na temat różnego typu mocy układu nie były wystarczająco przekonywujące i ogólnie przyjęte. Z tych względów w nawiązaniu do wcześniejszych prac autora ([11], [12]) zostanie poniżej przedstawiona nowa, ogólna teoria mocy odnosząca się tak do dwu- jak i wieloprzewodowych układów elektrycznych i dowolnych, okresowych przebiegów, z której to teorii między innymi uzyskuje się jednoznaczną interpretację energii czynnej i biernej pola elektromagnetycznego układu.

Obecnie przedstawiona praca różni się od poprzednio opublikowanych prac autora z tej dziedziny pod dwoma względami:

1) Wprowadzono częściowo inne oznaczenia oraz inne definicje niektórych mocy.
2) Ściśle powiązano zagadnienie różnego typu mocy z energią układu.

W tej pracy wyprowadzono po raz pierwszy konsekwentną teorię kompensacji mocy biernej Q dla dowolnych przebiegów i układów nierównomiernie obciążonych przy czym uzyskane wyniki mają podstawowe znaczenie praktyczne. Wprowadzono także szereg nowych wielkości i pojęć nie mających swych odpowiedników ani w poprzednio opublikowanych pracach autora ani też w teoriach mocy przedstawionych przez innych autorów. Do tych wielkości należą przede wszystkim funkcje mocy przebiegów. Okazuje się - jak zostanie wykazane - że mają one głębokie znaczenie energetyczne.

Podstawowym narzędziem analizy matematycznej użytym w tej pracy jest przestrzeń Hilberta i uogólniona funkcja symboliczna wprowadzona już wcześniej przez autora w pracy [12].

---

1) Por. prace: [1], [5] i [17]

1. Funkcje ortonormalne

Nieskończony ciąg funkcji rzeczywistych lub zespolonych zmiennej rzeczywistej t:

$$\varphi_1(t), \quad \varphi_2(t), \quad \ldots \quad \varphi_n(t), \quad \ldots \qquad \ldots \text{ I - 1.01}$$

w którym każda z funkcji w domkniętym przedziale [a,b] jest całkowalna wraz z kwadratem, nazywamy układem ortonormalnym w tym przedziale, jeżeli dla każdego m i n zachodzi:

$$\int_a^b \varphi_m^* \varphi_n \, dt = \delta_{mn}, \qquad \ldots \text{ I - 1.02}$$

gdzie $\varphi^*(t)$ oznacza funkcję sprzężoną do funkcji $\varphi(t)$ a δ_{mn} jest deltą Kroneckera.
Podstawowymi układami ortonormalnymi mającymi zastosowanie w elektrotechnice są:

$$\frac{1}{\sqrt{T}}, \quad \frac{\sin \omega t}{\sqrt{T/2}}, \quad \frac{\cos \omega t}{\sqrt{T/2}}; \quad \ldots \quad \frac{\sin n\omega t}{\sqrt{T/2}},$$

$$\frac{\cos n\omega t}{\sqrt{T/2}} \quad \ldots$$

oraz

$$\frac{1}{\sqrt{T}}, \quad \frac{e^{j\omega t}}{\sqrt{T}}, \quad \frac{e^{2j\omega t}}{\sqrt{T}}, \quad \ldots, \quad \frac{e^{nj\omega t}}{\sqrt{T}}, \quad \ldots$$

$$\ldots \text{ I - 1.03}$$

w przedziale: $0 < t < T$.

Gdy układ funkcji I - 1.01 jest ortogonalny lecz nie znormalizowany to zachodzi:

$$\int_a^b \varphi_m^* \varphi_n dt = \begin{cases} 0, & \text{gdy } n \neq m \\ N_m^2, & \text{gdy } n = m \end{cases} \qquad \ldots \text{ I - 1.04}$$

gdzie N_m nazywamy normą funkcji $\varphi_m(t)$.

Niech U(t) będzie dowolną funkcją całkowalną wraz z kwadratem w domkniętym przedziale [a,b].

Całki:

$$u_h = \int_a^b U(t)\ \varphi_h^*(t)\ dt, \quad (h = 1,2 \ldots) \ldots \text{ I - 1,05}$$

istnieją i nazywamy je współczynnikami Fouriera funkcji U(t). Układ ortonormalny I - 1.01 nazywamy układem zupełnym, jeżeli dla każdej funkcji U(t) całkowalnej wraz z kwadratem w przedziale [a,b] i dla każdego $\delta > 0$ możemy dobrać takie $N = N(\delta)$, iż zachodzi:

$$\int_a^b \left|U(t) - \sum_{h=1}^{h=n} u_h\ \varphi_h(t)\right|^2 dt < \delta \qquad \ldots \text{ I - 1.06}$$

gdy tylko $n > N(\delta)$.

Mówimy wtedy, że funkcja U(t) jest aproksymowalna przez szereg $\sum_h u_h\ \varphi_h(t)$ przeciętnie z kwadratem z dowolną dokładnością.

Gdy $n \to \infty$, otrzymamy:

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b \left|U(t) - \sum_{h=1}^{h=n} u_h\ \varphi_h(t)\right|^2 dt = 0 \qquad \ldots \text{ I - 1.07}$$

Mamy:

$$\int_a^b \left|U(t) - \sum_h u_h \varphi_h(t)\right|^2 dt = \int_a^b \left[U(t) - \sum_h u_h \varphi_h(t)\right]\left[U(t) - \right.$$

$$\left. - \sum u_h \varphi_h(t)\right]^* dt = \int_a^b |U(t)|^2 dt - \int_a^b [U(t)]^* \left[\sum u_h \varphi_h(t)\right] dt$$

$$-\int_a^b U(t)\left[\sum u_h^* \varphi_h^*(t)\right]dt+\int_a^b\left[\sum u_h \varphi_h(t)\right]\left[\sum u_h^* \varphi_h^*(t)\right]dt$$

$$=\int_a^b |U(t)|^2 dt-\sum_h u_h\int_a^b |U(t)|^2 \varphi_h(t)dt \sum u_h^*\int_a^b U(t)\, \varphi_h^*(t)dt+$$

$$+\sum_{h,r} u_h\, u_r^* \int_a^b \varphi_h(t)\, \varphi_r^*(t)\, dt =$$

$$=\int_a^b |U(t)|^2\, dt-\sum_h u_h\left[\int_a^b U(t)\, \varphi_h^*(t)\, dt\right]^*-$$

$$-\sum_h u_h^*\int_a^b U(t)\, \varphi_h^*(t)\, dt+\sum_{h,r} u_h\, u_r^*\, \delta_{hr}$$

$$=\int_a^b |U(t)|^2\, dt-\sum u_h\, u_h^*-\sum u_h\, u_h^*+\sum u_h u_h^*$$

Stąd:

$$\int_a^b |U(t)|^2\, dt-\sum |u_h|^2 = 0$$

czyli:

$$\int_a^b |U(t)|^2\, dt = \sum_{h=1}^{\infty} |u_h|^2 \qquad \ldots \text{ I - 1.08}$$

Szereg $\sum_h u_h\, \varphi_h(t)$ nazywamy szeregiem Fouriera funkcji $U(t)$ i mówimy, że jest on zbieżny przeciętnie z kwadratem do funkcji $U(t)$.

Piszemy:

$$U(t) \sim \sum_{h=1}^{\infty} u_h\, \varphi_h(t) \qquad \ldots \text{ I - 1.09}$$

Należy zauważyć, że zwykła zbieżność szeregu Fouriera do funkcji dla której został zbudowany, nie zawsze ma miejsce. nawet gdy układ funkcji $\{\varphi_h(t)\}$ jest zupełny. Zachodzi jednak zawsze dla układów zupełnych zbieżność przeciętna z kwadratem. W dalszym ciągu tej pracy przez układ funkcji $\{\varphi_h(t)\}$ będziemy stale rozumieli układ zupełny funkcji ortonormalnych.

Niech I(t) będzie funkcją całkowalną wraz z kwadratem w przedziale [a,b] dla której zachodzi:

$$I(t) \sim \sum_{h=1}^{\infty} i_h \varphi_h(t) \qquad \ldots \text{ I - 1.10}$$

Suma i różnica dwóch funkcji z których każda jest całkowalna wraz z kwadratem jest funkcją całkowalną wraz z kwadratem.
Stąd, na podstawie I - 1.08 zachodzi:

$$\sum_h \int_a^b [U(t) + I(t)]\, \varphi_h^*(t)\, dt \cdot \int_a^b [U(t) + I(t)]^*\, \varphi_h(t)\, dt =$$
$$= \int_a^b [U + I]\, [U + I]^* dt$$

oraz:

$$\sum_h \int_a^b [U(t) - I(t)]\, \varphi_h^*(t)\, dt \cdot \int_a^b [U(t) -$$
$$- I(t)]^*\, \varphi_h(t)\, dt = \int_a^b [U - I]\, [U - I]^*\, dt$$

Odejmując stronami, otrzymamy:

$$\sum_h \Big[\int_a^b U(t)\, \varphi_h^*(t)\, dt \int_a^b [I(t)]^*\, \varphi_h(t)\, dt +$$
$$+ \int_a^b [U(t)]^*\, \varphi_h(t)\, dt \cdot \int_a^b I(t)\, \varphi_h^*(t)\, dt\Big] =$$
$$= \int_a^b (U\, I^* + U^* I)\, dt$$

Wstawiając w miejsce U(t) funkcję jU(t), gdzie $j = \sqrt{-1}$, otrzymamy:

$$\sum_h \Big\{\int_a^b U(t)\, \varphi_h^*(t)\, dt \int_a^b [I(t)]^* \varphi_h(t)\, dt -$$
$$- \int_a^b [U(t)]^*\, \varphi_h(t)\, dt \cdot \int_a^b I(t)\, \varphi_h^*(t)\, dt\Big\} =$$
$$= \int_a^b (U\, I^* - U^* I)\, dt$$

Stąd, dodając stronami, otrzymamy:

$$\sum_{h=1}^{\infty}\int_a^b U(t)\ \varphi_h^*(t)\ dt \int_a^b [I(t)]^*\ \varphi_h(t)\ dt =$$

$$= \int_a^b U(t)\ I^*\ (t)\ dt$$

czyli:

$$\int_a^b U(t)\ I^*\ (t)\ dt = \sum_{h=1}^{\infty} u_h \cdot i_h^* \qquad \ldots\ I - 1.11$$

2. Przestrzeń Hilberta.

Gdy dany jest układ zupełny funkcji $\{\varphi_h(t)\}$ to rozwinięcie funkcji U(t) na szereg I - 1.09 jest jednoznaczne. Oznacza to, że każdą funkcję U(t) możemy przedstawić przez jeden i tylko jeden dla danego $\{\varphi_h(t)\}$ ciąg współczynników u_h danych przez zależność I - 1.05. Ciąg ten nazwiemy przedstawicielem[1] funkcji U(t) i oznaczymy symbolem $\overline{U}$.

Zachodzi twierdzenie (Fischer-Riesza) powiadające, że jeżeli dany jest dowolny nieskończony ciąg liczb zespolonych $\{u_h\}$, którego suma kwadratów modułów jest zbieżna, to istnieje taka funkcja U(t) dla której ciąg liczbowy $\{u_h\}$ stanowi zespół współczynników Fouriera, czyli:

$$\sum_{h=1}^{\infty} u_h\ \varphi_h(t) \sim U(t) \qquad \ldots\ I - 2.01$$

Zbiór wszystkich ciągów liczb zespolonych $\{u_h\}$ takich, że szereg $\sum_h |u_h|^2$ jest zbieżny, nazywamy przestrzenią Hilberta (H).

W przestrzeni H moduł przedstawiciela jest określony przez relację I - 1.08 a iloczyn skalarny dwóch przedstawicieli przez relację I - 1.11.

1) W. Rubinowicz - Kwantowa teoria atomu, PWN 1954, str. 209 i następne.

Mamy:

$$U(t) \mathrel{\hat{=}}^{1)} \bar{U} \overset{df}{=} \begin{Vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{Vmatrix} \qquad \ldots \text{ I - 2.02}$$

$$|\bar{U}|^2 \overset{df}{=} \int_a^b |U(t)|^2 \, dt = \sum_{h=1}^{\infty} |u_h|^2 \qquad \ldots \text{ I - 2.03}$$

$$\bar{U} \cdot \bar{J} \overset{df}{=} \int_a^b U(t) \, I^*(t) \, dt = \sum_{h=1}^{\infty} u_h \, i_h^* \qquad \ldots \text{ I - 2.04}$$

3. <u>Uogólnione funkcja symboliczna</u>.

Niech F(t) jest funkcją rzeczywistą i okresową, całkowalną wraz z kwadratem w domkniętym przedziale [0,T], gdzie T jest okresem tej funkcji.

Zachodzi:

$$F(t) \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}_h e^{jh\omega t} = f_0 + \sum_{h=1}^{+\infty} \hat{f}_h e^{jh\omega t} + \sum_{h=1}^{+\infty} \check{f}_h e^{-jh\omega t} \qquad \ldots \text{ I - 3.01}$$

gdzie:

$$\hat{f}_h = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) \, e^{-jh\omega t} \, dt; \quad h = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad \ldots \text{ I - 3.02}$$

oraz:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}_h|^2 = f_0^2 + 2 \sum_{1}^{+\infty} |\hat{f}_h|^2 < \infty \qquad \ldots \text{ I - 3.03}$$

Kładziemy

$$f_0 + \sqrt{2} \sum_{h=1}^{+\infty} \hat{f}_h e^{jh\omega t} \sim \hat{F}(t) \qquad \ldots \text{ I - 3.04}$$

---

1) Znak $\hat{=}$ znaczy: odpowiada.

Na podstawie I - 3.03 oraz twierdzenia Fischer-Riesza (por. str. 6) funkcja $\hat{F}(t)$ jest funkcją zespoloną zmiennej rzeczywistej t, okresową o okresie T i całkowalną wraz z kwadratem w domkniętym przedziale [0,T]. Nazwiemy ją funkcją symboliczną stowarzyszoną z funkcją rzeczywistą F(t) (por. [12]).

Kładziemy:

$$F_o = f_o \; ; \; \hat{F}_h = \sqrt{2} \; \hat{f}_h \qquad \ldots \text{ I - 3.05}$$

Stąd:

$$\hat{F}(t) \sim F_o + \sum_{h=1}^{\infty} \hat{F}_h \; e^{jh\omega t} \qquad \ldots \text{ I - 3.06}$$

Łatwo wykazać, iż:

$$\frac{1}{T} \int_0^T |\hat{F}(t)|^2 \; dt = \frac{1}{T} \int_0^T [F(t)]^2 \; dt \qquad \ldots \text{ I - 3.07}$$

tzn., że wartości skuteczne (normy)- funkcji rzeczywistej i stowarzyszonej z nią funkcji symbolicznej są sobie równe.

II. Układy jednofazowe

1. Moc symboliczna, czynna i bierna w układach jednofazowych

Niech dane są dwie funkcje rzeczywiste, okresowe $U(t)$ i $J(t)$ całkowalne wraz z kwadratem w wspólnym domkniętym przedziale $[0,T]$ reprezentujące odpowiednio przebieg napięcia i prądu w układzie 1-fazowym.
Zachodzi:

$$U(t) \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}_h e^{jh\omega t}; \quad J(t) \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} \hat{i}_h e^{jh\omega t} \qquad \text{... II - 1.01}$$

Kładziemy:

$$V_o = u_o; \quad \hat{V}_h = \sqrt{2}\,\hat{u}_h = V_h\, e^{j\beta h}$$
$$I_o = i_o; \quad \hat{I}_h = \sqrt{2}\,\hat{i}_h = I_h\, e^{j\alpha h} \qquad \text{... II - 1.02}$$

Stąd na podstawie I-1.11 oraz I-3.04, otrzymamy:

$$\frac{1}{T}\int_0^T \hat{U}(t)\,\check{J}(t)\,dt = V_o I_o + \sum_{h=1}^{\infty} \hat{V}_h \check{I}_h \qquad \text{... II - 1.03}$$
$$= V_o I_o + \sum_{h=1}^{\infty} V_h I_h\, e^{j\psi h}$$

gdzie:

$\psi_h = \beta_h - \alpha_h$, a $\check{I}_h$ jest wielkością sprzężoną do wielkości $\hat{I}_h$.

Moc:

$$\hat{P}_i \overset{df}{=} \frac{1}{T}\int_0^T \hat{U}(t)\,\check{J}(t)\,dt \qquad \text{... II - 1.04}$$

nazwiemy u o g ó l n i o n ą m o c ą s y m b o l i c z n ą.

Zachodzi:

$$P = \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{T}\int_0^T \hat{U}(t)\ \check{J}(t)\ dt\right\} \qquad \ldots \text{ II - 1.05}$$

$$= V_o I_o + \sum_{h=1}^{\infty} V_h I_h \cos\psi_h$$

$$Q = \mathrm{Jm}\left\{\frac{1}{T}\int_0^T \hat{U}(t)\ \check{J}(t)\ dt\right\} \qquad \ldots \text{ II - 1.06}$$

$$= \sum_{h=1}^{\infty} V_h I_h \sin\psi_h$$ [1)]

gdzie P jest mocą czynną a Q jest mocą bierną układu. Tak jak dla przebiegów sinusoidalnych, otrzymamy:

$$\hat{P}_i = P + jQ; \quad P_i = \sqrt{P^2 + Q^2} \qquad \ldots \text{ II - 1.07}$$

Kładziemy:

$$P_m = U \cdot J \qquad \ldots \text{ II - 1.08}$$

Moc P_m nazwiemy mocą modułową. W układach 1-fazowych jest ona równa mocy pozornej tradycyjnie oznaczanej literą S.

2. Rozkład ortogonalny funkcji symbolicznej

Kładziemy:

$$\hat{J}(t) \overset{df}{=} \hat{J}_i(t) + \hat{J}_\psi(t)$$

$$\hat{J}_i(t) \overset{dt}{=} \frac{\check{P}_i}{U^2} \cdot \hat{U}(t) \qquad \ldots \text{ II - 2.01}$$

---

1) Por. pracę C.I.Budeanu [3] oraz str. 24 tej pracy.

Stąd:

$$\frac{1}{T}\int_0^T \hat{J}_i(t)\ \check{J}_\psi(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\check{P}_i}{U^2}\ \hat{U}(t)\left[\check{J}(t) - \frac{\hat{P}_i}{U^2}\ \check{U}(t)\right]dt$$

$$= \frac{\check{P}_i}{U^2}\left[\frac{1}{T}\int_0^T \hat{U}(t)\ \check{J}(t)dt - \frac{\hat{P}_i}{U^2}\cdot\frac{1}{T}\int_0^T \left|\hat{U}(t)\right|^2 dt\right]$$

$$= \frac{\check{P}_i}{U^2}\left[\hat{P}_i - \hat{P}_i\right] = 0$$

Z powyższego wynika, że funkcja $\hat{J}_\psi(t)$ jest ortogonalna do funkcji $\hat{J}_i(t)$ i dlatego rozkład II-2.01 funkcji $\hat{J}(t)$ jest rozkładem ortogonalnym tej funkcji. Funkcję $\hat{J}_\psi(t)$ nazwiemy symboliczną funkcją p r ą d u d e f o r m a c j i.
Zachodzi:

$$\frac{1}{T}\int_0^T \hat{J}(t)\ \check{J}_\psi(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T \hat{J}(t)\left[\check{J}(t) - \check{J}_i(t)\right]dt$$

$$= J^2 - \frac{P^2 + Q^2}{U^2}$$

Z drugiej strony otrzymamy:

$$\frac{1}{T}\int_0^T \hat{J}(t)\ \check{J}_\psi(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T \left[J_i(t) + \hat{J}_\psi(t)\right]\ \check{J}_\psi(t)dt = J_\psi^2$$

Stąd:

$$J_\psi^2 = J^2 - \frac{P^2 + Q^2}{U^2}$$

Kładziemy:

$$K \overset{df}{=} U \cdot J_\psi \qquad \text{... II - 2.02}$$

i otrzymujemy:

$$P_m^2 = P^2 + Q^2 + K^2 \qquad \text{... II - 2.03}$$

Moc K nazwiemy m o c ą d e f o r m a c j i.
Na podstawie rozkładu ortogonalnego możemy napisać:

$$g = \frac{P}{U^2}; \quad b = \frac{Q}{U^2}; \quad \hat{y} = g - jb \qquad \text{... II - 2.04}$$

Wielkości g i b są rzeczywiste i posiadają wymiar w simensach. Nazwiemy je odpowiednio: przewodnością czynną i przewodnością bierną układu 1-fazowego (dwójnika). $\hat{y}$ jest symboliczną admitancją tego układu. Na podstawie II-2.04 mamy:

$$\hat{J}_i(t) = \hat{y}\,\hat{U}(t)$$

$$\hat{J}_\psi(t) = \hat{J}(t) - \hat{y}\,\hat{U}(t) \qquad \text{... II - 2.05}$$

Związki II-2.05 pozwalają na sprecyzowanie pojęcia deformacji. D e f i n i c j a: Funkcję symboliczną $\hat{J}(t)$ nazwiemy funkcją zdeformowaną od funkcji symbolicznej $\hat{U}(t)$, jeśli ma miejsce nierówność:

$$\frac{1}{T}\int_0^T |\hat{J}(t) - \hat{y}\,\hat{U}(t)|^2\, dt > 0 \qquad \text{... II - 2.06}$$

Z powyższej definicji wynika, że wartość skuteczna J_ψ jest miarą deformacji funkcji symbolicznej przebiegu prądu J(t) a moc K jest miarą dodatkowego obciążenia układu wynikłego z deformacji[1] przebiegu prądu względem

---

[1] W układach 1-fazowych występuje jedynie deformacja kształtu przebiegu tj. dystorsja. W układach wielofazowych obok dystorsji może równocześnie wystąpić deformacja symetrii czyli asymetria w obciążeniu poszczególnych faz układu (por. str.38).

przebiegu napięcia. Pełniejszą interpretacją mocy K zajmiemy się później.
Kładziemy:

$$\hat{J}_w(t) \stackrel{df}{=} g\,\hat{U}(t)$$
$$\hat{J}_q(t) \stackrel{df}{=} b\,\hat{U}(t) \qquad \text{... II - 2.07}$$

Funkcję $\hat{J}_w(t)$ nazwiemy symboliczną funkcją p r ą d u c z y n n e g o a funkcję $\hat{J}_q(t)$ symboliczną funkcją p r ą d u b i e r n e g o rozpatrywanego układu. Ponieważ przewodność g i b są zależne odpowiednio od mocy P i Q, stąd wyprowadzone funkcje symboliczne prądów $\hat{J}_w(t)$ oraz $\hat{J}_q(t)$ są także zależne od odpowiednich mocy i dadzą się przy ich pomocy wyrazić. Istotnie, na podstawie II-2.04 otrzymamy:

$$\hat{J}_w(t) = J_w \cdot \left[\frac{\hat{U}(t)}{U}\right]; \quad \hat{J}_q(t) = J_q \left[\frac{\hat{U}(t)}{U}\right] \qquad \text{II - 2.09}$$

gdzie:

$$J_w \stackrel{df}{=} \frac{P}{U}; \quad J_q \stackrel{df}{=} \frac{Q}{U} \qquad \text{... II - 2.10}$$

Zachodzi:

$$\boxed{\hat{J}(t) = \hat{J}_w(t) - j\hat{J}_q(t) + \hat{J}_\psi(t)} \qquad \text{... II - 2.11}$$

Należy zauważyć, że w układzie 1-fazowym o przebiegach sinusoidalnych zachodzi: $\hat{J}_\psi(t) \equiv 0$ i że dla tych układów relacja II-2.11 przyjmuje postać:

$$\hat{J}(t) = \hat{J}_w(t) - j\,\hat{J}_q(t) \qquad \text{... II - 2.12}$$

Kładziemy:

$$\hat{P}_i(t) \overset{df}{=} \hat{U}(t)\,\check{J}(t) \qquad \text{... II - 2.13}$$

oraz

$$P(t) \overset{df}{=} \mathrm{Re}\left\{\hat{P}_i(t)\right\}$$

$$Q(t) \overset{df}{=} \mathrm{Jm}\left\{\hat{P}_i(t)\right\} \qquad \text{... II - 2.14}$$

Stąd:

$$P(t) = \frac{1}{2}\left\{\hat{P}_i(t) + \check{P}_i(t)\right\}$$

$$Q(t) = \frac{1}{2j}\left\{\hat{P}_i(t) - \check{P}_i(t)\right\} \qquad \text{... II - 2.15}$$

Zachodzi:

$$\boxed{\begin{aligned} P &= \frac{1}{T}\int_0^T P(t)\,dt \\ Q &= \frac{1}{T}\int_0^T Q(t)\,dt \end{aligned}} \qquad \text{... II - 2.16}$$

Funkcję P(t) nazwiemy f u n k c j ą m o c y c z y n n e j a funkcję Q(t) nazwiemy f u n k c j ą m o c y b i e r n e j. Definicje funkcji P(t) i Q(t) różnią się od definicji, które autor zaproponował w poprzedniej pracy (por. [19] str.12). Podstawowa i najbardziej istotna różnica polega na tym, że obecne definicje nie są zależne od sposobu rozkładu ortogonalnego funkcji przebiegów a są zależne jedynie od samych przebiegów napięcia i natężenia prądu. Obie wprowadzone funkcje mocy

są wielkościami zachowawczymi[1] a relacje II-2.16 można by przyjąć za definicje mocy czynnej P i mocy biernej Q. Między dowolną funkcją przebiegu F(t) a stowarzyszoną z nią funkcją symboliczną $\hat{F}(t)$ (por. str.7) zachodzi relacja:

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\hat{F}(t) + \check{F}(t)\right] + a\,F_o \qquad \ldots \text{ II - 2.17}$$

gdzie

$$a = 1 - \sqrt{2}$$

Stąd:

$$\begin{aligned} U(t)\,J(t) = {} & \frac{1}{2}\left[\hat{U}(t)\,\check{J}(t) + \check{U}(t)\,\hat{J}(t)\right] + \\ & + \frac{1}{2}\left[\hat{U}(t)\,\hat{J}(t) + \check{U}(t)\,\check{J}(t)\right] + \\ & + \frac{a\,I_o}{\sqrt{2}}\left[\hat{U}(t) + \check{U}(t)\right] + \frac{a\,V_o}{\sqrt{2}}\left[\hat{J}(t) + \check{J}(t)\right] + \\ & + a^2\,V_o I_o \end{aligned}$$

czyli:

$$\begin{aligned} p(t) &= U(t)\,.\,J(t) \\ &= P(t) + A(t) \end{aligned} \qquad \ldots \text{ II - 2.18}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} A(t) = {} & \frac{1}{2}\left[\hat{U}(t)\,\hat{J}(t) + \check{U}(t)\,\check{J}(t)\right] + \frac{a\,I_o}{\sqrt{2}}\left[\hat{U}(t) + \check{U}(t)\right] + \\ & + \frac{a\,V_o}{\sqrt{2}}\left[\hat{J}(t) + \check{J}(t)\right] + a^2\,V_o\,I_o \end{aligned}$$

---

[1] Przez wielkości zachowawcze należy rozumieć te wielkości, które spełniają tzw. zasadę zachowania mocy. Por.rozdz.IV.

Zachodzi:

$$\frac{1}{T}\int_0^T A(t)dt = 0 \qquad \text{... II - 2.19}$$

Dla przebiegów przemiennych, otrzymamy:

$$A(t) = \frac{1}{2}\left[\hat{U}(t)\ \hat{J}(t) + \check{U}(t)\ \check{J}(t)\right] \qquad \text{... II - 2.20}$$

Funkcja $p(t)$ jest mocą chwilową układu. Zależność II-2.18 określa związek zachodzący między mocą chwilową a funkcją mocy czynnej.
Z definicji II-2.14 mamy:

$$\hat{P}_i(t) = P(t) + j\ Q(t) \qquad \text{... II - 2.21}$$

Stąd:

$$P_i^2(t) = P^2(t) + Q^2(t) \qquad \text{... II - 2.22}$$

Dla układów o przebiegach sinusoidalnych relacja II-2.22 sprowadza się do zależności II-1.07 i jest uogólnieniem tak zwanego "trójkąta mocy" mającego zastosowanie w tych układach. Naturalnie, relację II-2.21 da się w analogiczny sposób jak dla przebiegów sinusoidalnych odwzorować na płaszczyźnie Gaussa z tym, że odpowiednie trójkąty mocy uzyskamy dla wartości chwilowych funkcji $P(t)$ i $Q(t)$.
Kładziemy:

$$U_o(t) = |\hat{U}(t)| \ ; \quad J_o(t) = |\hat{J}(t)|$$

$$e^{jb(t)} \overset{df}{=} \frac{\hat{U}(t)}{U_o(t)}, \quad e^{ja(t)} \overset{df}{=} \frac{\hat{J}(t)}{J_o(t)} \qquad \text{... II - 2.23}$$

$$\beta(t) \overset{df}{=} b(t) - \omega t; \quad \alpha(t) \overset{df}{=} a(t) - \omega t;$$

$$\varphi(t) \overset{df}{=} \beta(t) - \alpha(t) \qquad \text{... II - 2.24}$$

Wszystkie nowo wprowadzone funkcje są w sposób jednoznaczny określone i zależne wyłącznie od przebiegów.
Otrzymamy:

$$P_i(t) = U_o(t)\, J_o(t)$$

$$\hat{P}_i(t) = P_i(t)\, e^{j\varphi(t)} \qquad \text{... II - 2.25}$$

$$P(t) = P_i(t) \cos\varphi(t)$$

$$Q(t) = P_i(t) \sin\varphi(t) \qquad \text{... II - 2.26}$$

Dla przebiegów przemiennych (na podstawie II-2.20), otrzymamy:

$$A(t) = U_o(t)\, J_o(t) \cos\left[2\omega t + \alpha(t) + \beta(t)\right] \qquad \text{II - 2.27}$$

Stąd:

$$p(t) = U_o(t)\, J_o(t) \left\{ \cos\varphi(t) + \right.$$

$$\left. + \cos\left[2\omega t + \alpha(t) + \beta(t)\right] \right\} \qquad \text{... II - 2.28}$$

Jak widać, relacja II-2.28 jest uogólnieniem znanej relacji dla mocy chwilowej ważnej dla przebiegów sinusoidalnych. Alternatywnie, relację II-2.28 można uzyskać bezpośrednio wychodząc z związków zachodzących między funkcjami przebiegów $U(t)$ i $J(t)$ a wyprowadzonymi funkcjami $U_o(t)$ i $J_o(t)$.

Istotnie, na podstawie II-2.17 oraz II-2.23 dla przebiegów przemiennych otrzymamy:

$$U(t) = \sqrt{2}\, U_o(t) \cos\left[\omega t + \beta(t)\right]$$

$$J(t) = \sqrt{2}\, J_o(t) \cos\left[\omega t + \alpha(t)\right] \qquad \text{... II - 2.29}$$

Stąd:

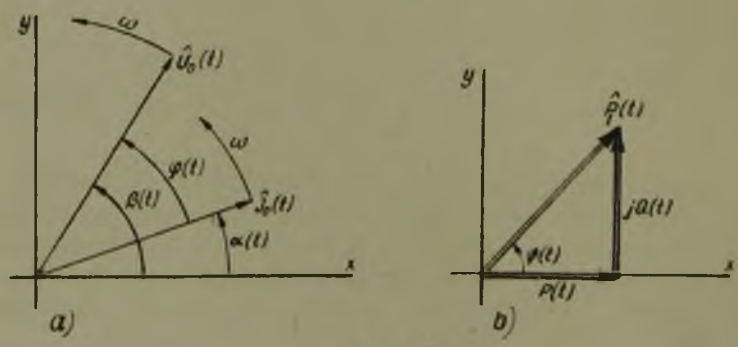
$$U(t)\, J(t) = 2\, U_o(t)\, J_o(t) \cos\left[\omega t + \beta(t)\right] \cos\left[\omega t + \alpha(t)\right] \qquad \text{... II - 2.30}$$

Wyrażenie II-2.30 po elementarnym przekształceniu sprowadza się do zależności II-2.28.
Kładziemy:

$$\dot{U}_o(t) \stackrel{df}{=} U_o(t)\, e^{j\beta(t)}; \quad \dot{J}_o(t) \stackrel{df}{=} J_o(t)\, e^{j\alpha(t)} \qquad \text{... II - 2.31}$$

Stąd:

$$\dot{U}(t) = \hat{U}_o(t)\, e^{j\omega t}; \quad \hat{J}(t) = \hat{J}_o(t)\, e^{j\omega t} \qquad \text{... II - 2.32}$$



Rys.1

Rys.1a przedstawia odwzorowanie symbolicznych funkcji przebiegów, a rys.1b odwzorowanie funkcji mocy na płaszczyźnie Gaussa. Strzałki "ω" oznaczają, że "kompleksory" odwzorujące funkcje $U_o(t)$ i $J_o(t)$ "wirują" na płaszczyźnie Gaussa z prędkością kątową "ω" w kierunku matematycznie dodatnim.
Ze względu na formalną stronę teorii mocy opartej na metodzie symbolicznej wydaje się, że warto obok już wyprowadzonych funkcji mocy wprowadzić jeszcze jedną funkcję analogiczną w pewnym sensie do funkcji $p(t)$. W tym celu rozważmy wyrażenie:

$$\hat{m}(t) \stackrel{df}{=} \hat{U}(t)\,\check{J}(t) + \check{U}(t)\,\hat{J}(t) \qquad \text{... II - 2.33}$$

otrzymamy:

$$\hat{m}(t) = \hat{P}_i(t) + \hat{U}_o(t)\,\hat{J}_o(t)\,e^{j2\omega t} \qquad \text{... II - 2.34}$$

Dla przebiegów przemiennych powyższe wyrażenie da się zapisać w postaci:

$$\hat{m}(t) = p(t) + jq(t) \qquad \text{... II - 2.35}$$

gdzie:

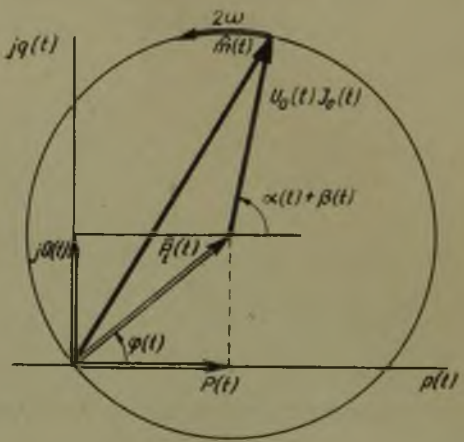
$$q(t) = U_o(t)\,J_o(t)\,\cdot$$

$$\cdot\,\left\{\sin\varphi(t) + \sin\left[2\omega t + \alpha(t) + \beta(t)\right]\right\} \qquad \text{II - 2.36}$$

Na rys.1c podane jest odwzorowanie funkcji $\hat{m}(t)$ na płaszczyźnie Gaussa. Odcięte tej funkcji odpowiadają wartościom chwilowym funkcji $p(t)$, a rzędne odpowiadają wartościom chwilowym funkcji $q(t)$. Dla przebiegów sinusoidalnych otrzymamy: $\hat{P}_i(t) = P_i$ = constans, oraz $U_o(t)$ $J_o(t) = UJ$ = const. Stąd, dla przebiegów sinusoidalnych odwzorowaniem funkcji $\hat{m}(t)$ na płaszczyźnie Gaussa jest okrąg przechodzący przez początek układu po którym poru-

sza się grot kompleksora $\hat{m}(t)$ z prędkością kątową (względem środka tego okręgu) równą $2,\omega$. Niezależnie od rodzaju przebiegów (okresowych), otrzymamy:

$$\frac{1}{T}\int_0^T q(t)dt = Q \qquad \text{... II - 2.37}$$



Rys.1c

3. Splot i jego interpretacja

Kładziemy:

$$\hat{S}(t) \overset{df}{=} \frac{1}{T}\int_0^T \hat{U}(t+\tau)\ \check{J}(\tau)dt \qquad \text{... II - 3.01}$$

Prawa strona relacji II-3.01 jest splotem dwóch funkcji okresowych (o wspólnym okresie T), zespolonych i całkowalnych wraz z kwadratem w domkniętym przedziale [0,T]. Splot dla dowolnych dwóch funkcji tak określonych zawsze istnieje i jest funkcją okresową o okresie T, całkowalną wraz z kwadratem w przedziale [0,T].
Łatwo wykazać, że:

$$\hat{S}(t) = \sum_{h=0}^{\infty} \hat{V}_h\ \check{I}_h\ e^{jh\omega t} \qquad \text{... II - 3.02}$$

Wielkość $\hat{S}(t)$ nazwiemy mocą korelacji układu. Aby wyjaśnić jej znaczenie fizykalne rozważmy złożony, l i n i o w y obwód elektryczny składający się z elementów R, L, M i C. Stosując metodę prądów oczkowych Maxwella do takiego układu[1], otrzymamy:

$$\sum_{k=1}^{m}\left(R_{ik}\, I_k(t) + L_{ik}\frac{dI_k(t)}{dt} + \frac{1}{C_{ik}}\int I_k(t)dt\right) = E_i(t);$$

$$(i = 1, 2, \ldots m) \qquad \ldots \text{ II - 3.03}$$

W tej zależności:

m = ilość oczek niezależnych obwodu

$I_k(t)$ = prąd oczkowy w k-tym oczku

$E_i(t)$ = wypadkowa SEM działająca w i-tym oczku

R_{ik}, L_{ik}, $\frac{1}{C_{ik}}$ są odpowiednio równe zastępczej oporności oczkowej, zastępczej indukcyjności oczkowej oraz odwrotności zastępczej pojemności oczkowej.

Przechodząc do metody symbolicznej, otrzymamy:

$$\hat{E}_i(t) = \sum_{k=1}^{m}\left\{R_{ik}\,\hat{I}_k(t) + L_{ik}\frac{d\hat{I}_k(t)}{dt} + \frac{1}{C_{ik}}\hat{Q}_{ek}(t)\right\}$$

$$\ldots \text{ II - 3.04}$$

gdzie:

$\hat{Q}_{ek}(t)$ jest symboliczną funkcją naboju elektrycznego rozmieszczającego się na okładce kondensatora o pojemności C_{ik}.

---

[1] Poniżej przedstawione rozumowanie jest powtórzeniem wywodów autora przedstawionych w pracy: "Stan ustalony w układach elektrycznych liniowych o przebiegach odkształconych", która zostanie opublikowana w nr 12 "Elektryka" Politechniki Śląskiej.

Zachodzi:

$$\sum_k R_{ik}\,\hat{I}_k(t) = \sum_k R_{ik}\,\left(\sum_h \hat{I}_{hk}\,e^{jh\omega t}\right)$$

$$\sum_k L_{ik}\,\frac{d\hat{I}_k(t)}{dt} = j\sum_k \omega L_{ik}\,\left(\sum_h h\,\hat{I}_{hk}\,e^{jh\omega t}\right) \quad \ldots \text{ II - 3.05}$$

$$\sum_k \frac{1}{C_{ik}}\,\hat{Q}_{ek}(t) = \sum_k \frac{1}{C_{ik}}\,\left(\sum_h \hat{Q}_{ehk}\,e^{jh\omega t}\right)$$

Stąd:

$$\hat{S}_i(t) = \frac{1}{T}\int_0^T \hat{E}_i(t+\tau)\,\check{I}_i(\tau)\,d\tau$$

$$= \sum_k R_{ik}\left(\sum_h \hat{I}_{hk}\,\check{I}_{hl}\,e^{jh\omega t}\right) +$$

$$+ j\omega\left\{\sum_k L_{ik}\,\left(\sum_h h\,\hat{I}_{hk}\,\check{I}_{hi}\,e^{jh\omega t}\right) -\right.$$

$$\left. - \sum_k \frac{1}{C_{ik}}\,\left(\sum_h h\,\hat{Q}_{ehk}\,\check{Q}_{ehi}\,e^{jh\omega t}\right)\right\}$$

Całkowita moc korelacji układu:

$$\hat{S}(t) = \sum_i \hat{S}_i(t)^{1)} \quad \ldots \text{ II - 3.06}$$

Czyli:

$$\frac{1}{2}\,\hat{S}(t) = \sum_h e^{jh\omega t}\,\left(\frac{1}{2}\sum_{i,k} R_{ik}\,\hat{I}_{hk}\,\check{I}_{hi}\right) +$$

$$+ j\omega\left\{\sum h\,e^{jh\omega t}\,\left[\left(\frac{1}{2}\sum_{i,k} L_{ik}\,\hat{I}_{hk}\,\check{I}_{hi}\right) - \left(\frac{1}{2}\sum_{i,k}\frac{1}{C_{ik}}\,\hat{Q}_{ehk}\,\check{Q}_{ehi}\right)\right]\right\}$$

$$\ldots \text{ II - 3.07}$$

---

1) Wielkość $\hat{S}(t)$ jest wielkością zachowawczą. Por. rozdz. IV.

Kładziemy:

$$\hat{F}(t) \stackrel{df}{=} \sum_h e^{jh\omega t} \left(\frac{1}{2}\sum_{i,k} R_{ik}\, \hat{I}_{hk}\, \check{I}_{hi}\right) = \sum_h F_h\, e^{jh\omega t}$$

$$\hat{T}(t) \stackrel{df}{=} \sum_h e^{jh\omega t} \left(\frac{1}{2}\sum_{i,k} L_{ik}\, \hat{I}_{hk}\, \check{I}_{hi}\right) = \sum_h T_h\, e^{jh\omega t}$$

... II - 3.08

$$\hat{V}(t) \stackrel{df}{=} \sum_h e^{jh\omega t} \left(\frac{1}{2}\sum_{i,k} \frac{1}{C_{ik}}\, \hat{Q}_{ehk} \cdot \check{Q}_{ehi}\right) = \sum_h V_h\, e^{jh\omega t}$$

$$\hat{W}(t) \stackrel{df}{=} \hat{T}(t) - \hat{V}(t) = \sum_h (T_h - V_h)\, e^{jh\omega t} \quad \text{... II - 3.09}$$

(Należy zauważyć, że F_h, T_h i V_h są wielkościami rzeczywistymi).
Stąd:

$$\boxed{\hat{S}(t) = 2\hat{F}(t) + 2\,\frac{d\hat{W}(t)}{dt}} \quad \text{... II - 3.10}$$

Wielkość $\hat{F}(t)$ posiada wymiar mocy zaś wielkości $\hat{T}(t)$ i $\hat{V}(t)$ posiadają wymiar energii. Jak widać $W(0)$ jest różnicą energii pola magnetycznego i pola elektrycznego uśrednioną w czasie jednego okresu. Funkcja $\hat{W}(t)$ wskazuje na to, że przyjętej bazie $\{e^{jh\omega t}\}$ jest przyporządkowany ciąg liczbowy $\{W_h\}$, którego każdy element jest równy różnicy energii, pola magnetycznego i elektrycznego odpowiadający określonej harmonicznej przebiegów prądu i napięcia. To pozwala na rozpatrywanie ciągu $\{W_h\}$ jako rozkładu spektralnego energii $W(0)$ w zależności od zawartości harmonicznych w rozpatrywanych przebiegach. Ponieważ (na podstawie II-1.04 oraz II-3.01) $\hat{P}_i = \hat{S}(0)$, otrzymamy:

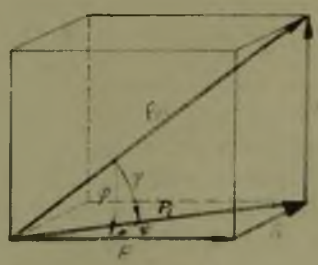
$$\boxed{Q = \frac{2}{j}\left[\frac{d\hat{W}(t)}{dt}\right]_{t=0}} \quad \text{... II - 3.11}$$

Relacja II-3.11 zawiera właściwe uzasadnienie definicji podanej dla mocy biernej Q. Istotnie, definicja podana

przez C.I.Budeanu ([3]) w postaci szeregu: $\sum_{h=1}^{\infty} V_h I_h \sin \psi_h$, jest tylko jedną z wielu możliwych definicji spełniających pewne związki formalne i korzystne do wprowadzenia pod wieloma różnymi względami. Dopiero z relacji II-3.11 widać, że przyjęta w tej pracy relacja dla mocy biernej Q (por.II-1.06) pokrywająca się z definicją podaną przez C.I.Budeanu, posiada i s t o t n y sens fizykalny.

4. Współczynniki mocy[1)]

Z przedstawionej teorii - a w szczególności z zależności II-2.03 - wynika, że związki zachodzące między poszczególnymi mocami dadzą się w prosty sposób przedstawić za pomocą prostopadłościanu (rys.2), który nazwiemy p r o s t o p a d ł o ś c i a n e m m o c y.



Rys.2

Kładziemy:

$$\cos\varphi = \frac{P}{P_m};\ \cos\psi = \frac{P}{P_i};\ \cos\gamma = \frac{P_i}{P_m} \qquad \text{... II - 4.01}$$

i otrzymujemy:

$$\cos\varphi = \cos\psi \cdot \cos\gamma \qquad \text{... II - 4.02}$$

---

1) Por. pracę [1], [3], [12], [13] oraz [16].

gdzie $\cos\psi$ nazwiemy współczynnikiem mocy czynnej układu o przebiegach odkształconych; $\cos\psi$ można by zaś nazwać w s p ó ł c z y n n i k i e m r e a k c j i o b c i ą ż e n i a.
Zachodzi:

$$\hat{J}_\psi(t) = \hat{J}(t) - \hat{y}\hat{U}(t)$$

Stąd:

$$\hat{J}_\psi(t) = I_o + \sum_{h=1}^{\infty} \hat{I}_h e^{jh\omega t} - \hat{y}(V_o + \sum_{h=1}^{\infty} \hat{V}_h e^{jh\omega t})$$

$$= (I_o - \hat{y}V_o) + \sum_{h=1}^{\infty} (\hat{I}_h - \hat{y}\hat{V}_h) e^{jh\omega t} \quad \ldots \text{ II - 4.03}$$

Kładziemy (rys.2(:

$$\cos\psi = \frac{P}{P_i}; \quad \sin\psi = \frac{Q}{P_i} \quad \ldots \text{ II - 4.04}$$

Stąd:

$$\hat{y} = y\, e^{-j\psi}, \quad \text{gdzie:} \quad y = |\hat{y}| \quad \ldots \text{ II - 4.05}$$

Mamy:

$$J_\psi^2 = \frac{1}{T}\int_0^T \hat{J}_\psi(t)\, \check{J}(t)dt$$

Przeto:

$$J_\psi^2 = (I_o - \hat{y}\, V_o) \cdot I_o + \sum_{h=1}^{\infty} (\hat{I}_h - \hat{y}\, \hat{V}_h)\, \check{I}_h$$

$$= J^2 - y\left[V_o\, I_o\, e^{-j\psi} + \sum_{h=1}^{\infty} V_h\, I_h\, e^{j(\psi_h - \psi)}\right] \quad \ldots \text{ II - 4.06}$$

Ponieważ lewa strona wyrażenia II-4.06 jest wielkością rzeczywistą, przeto otrzymujemy:

$$J_\psi^2 = J^2 - y\left[V_o\, I_o \cos\psi + \sum_{h=1}^{\infty} V_h\, I_h \cos(\psi_n - \psi)\right] \qquad \text{... II - 4.07}$$

oraz:

$$\sum_{h=0}^{\infty} V_h\, I_h \sin(\psi_h - \psi) = 0; \quad (\psi_o = 0) \qquad \text{... II - 4.08}$$

Z wzoru II-4.07 mamy:

$$K^2 = P_m^2 - P_i\left[V_o\, I_o \cos\psi + \sum_{h=1}^{\infty} V_h\, I_h \cos(\psi_n - \psi)\right]$$

Stąd

$$P_i = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sum_{h=0}^{\infty} V_h\, I_h \cos(\psi_h - \psi) \qquad \text{II - 4.09}$$

Związek II-4.08 może stać się podstawą do określenia dokładności z jaką została przeprowadzona analiza układu o przebiegach odkształconych w zależności od przyjętych w rachunku ilości wyższych harmonicznych zawartych w przebiegach. Według rys.2 otrzymujemy:

$$\cos\gamma = \frac{P_i}{P_m} = \frac{\sqrt{P^2 + Q^2}}{U.J} = \frac{\sum_{h=0}^{\infty} V_h\, I_h \cos(\psi_h - \psi)}{\sqrt{\sum_{h=0}^{\infty} V_h^2} \cdot \sqrt{\sum_{h=0}^{\infty} I_h^2}} \qquad \text{... II - 4.10}$$

Wielkość $\cos\gamma$ nazwiemy w s p ó ł c z y n n i k i e m d e f o r m a c j i.
Relacja II-4.10 pozwala na wyliczenie współczynnika deformacji w zależności od zawartości wyższych harmonicznych w przebiegach prądu i napięcia.

5. Kompensacja mocy biernej w układach 1-fazowych

W tym paragrafie zadanie, które sobie stawiamy polega na kompensacji mocy biernej Q i w związku z tym na wyjaśnieniu roli mocy deformacji K w układzie. Ponieważ samo zagadnienie kompensacji mocy Q w układach o przebiegach odkształconych ma duże znaczenie praktyczne rozumowanie ograniczymy do układów mających znaczenie praktyczne. Z praktyki wiemy, że moc Q pobierana przez układ ma charakter indukcyjny (tzn. że jest dodatnia) i że elementem kompensującym jest kondensator o odpowiednio dobranej pojemności.

Z powyżej przedstawionej teorii wynika, że wprowadzenie do układu kondensatora idealnego jest równoważne wprowadzeniu elementu pobierającego prąd $J_c(t)$, przy czym:

$$\hat{J}_c(t) = -j\,\hat{J}_{qc}(t) + \hat{J}_{\psi c}(t) \qquad \text{... II - 5.01}$$

Kompensacja mocy biernej Q polega na tym, aby dobrać tak pojemność C kondensatora kompensującego, aby zachodziło:

$$\hat{J}_{qc}(t) = -\,\hat{J}_q(t) \qquad \text{... II - 5.02}$$

Niech C jest pojemnością dowolnego (idealnego) kondensatora wprowadzonego do układu na napięcie U(t).
Na podstawie II-1.06 moc bierna Q_c pobierana przez ten kondensator wyniesie:

$$Q_c = -\,C\omega U^2 \cdot \lambda \qquad \text{... II - 5.03}$$

gdzie:

$$\lambda = \sum_{h=1}^{\infty} h\left(\frac{V_h}{U}\right)^2 \geqslant 1 \qquad \text{... II - 5.04}$$

Stąd:

$$\hat{J}_{qc}(t) = -\,C\omega\lambda\hat{U}(t) \qquad \text{... II - 5.05}$$

Korzystając z warunku II-5.02, otrzymamy:

$$\boxed{C = \frac{Q}{U^2 \omega \cdot \lambda}} \qquad \ldots \text{ II - 5.06}$$

W zależności tej moc bierna Q jest mocą bierną pobieraną przez układ kompensowany przed wprowadzeniem kondensatora. Tak obliczona pojemność wprowadzona równolegle do układu powoduje całkowitą kompensację mocy biernej. Gdy zależy nam na kompensacji nie całkowitej lecz częściowej układu np. takiej aby uzyskać współczynnik reakcji obciążenia $\cos\psi$ równy $\cos\psi'$ szukana pojemność C kondensatora kompensującego wyniesie (por. rys.2 oraz II-4.01):

$$C = \frac{P(tg\psi - tg\psi')}{U^2 \omega \cdot \lambda} \qquad \ldots \text{ II - 5.07}$$

Prąd $\hat{J}_{qc}(t)$ (II-5.05) jest prądem płynącym przez kondensator potrzebnym do całkowitej kompensacji mocy biernej Q. W rzeczywistości jednak przez kondensator płynie $\hat{J}_c(t)$, gdzie:

$$\hat{J}_c(t) = -j\,\hat{J}_{qc}(t) + \hat{J}_{\psi c}(t)$$

$$= C\,\frac{d\hat{U}(t)}{dt} = jC\omega \cdot \sum_{h=1}^{\infty} h\,\hat{V}_h\,e^{jh\omega t}$$

Stąd:

$$J_{\psi c} = UC\omega \cdot \sqrt{\sum_{h=1}^{\infty} (h - \lambda)^2 \left(\frac{V_h}{U}\right)^2} \qquad \ldots \text{ II - 5.08}$$

Prąd $J_{\psi c}$ jest prądem dodatkowo obciążającym kondensator. To dodatkowe obciążenie jest wynikiem wystąpienia wyższych harmonicznych w napięciu zasilania.

Moc deformacji K_c pobierana przez kondensator wynosi:

$$K_c = U^2 C\omega \cdot \sqrt{\sum_{h=1}^{\infty} (h - \lambda)^2 \left(\frac{V_h}{U}\right)^2} \qquad \ldots \text{ II - 5.09}$$

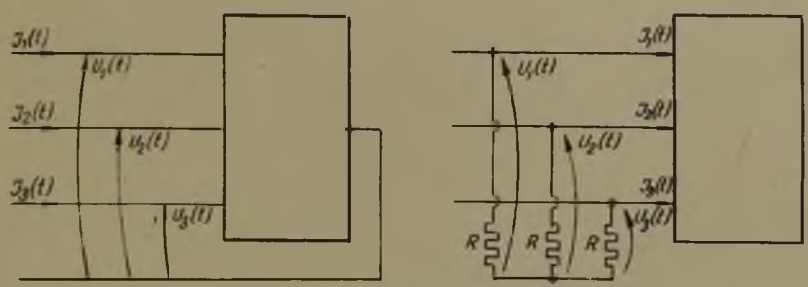
Moc K_c jest miarą dodatkowego obciążenia kondensatora i powoduje dodatkowe obciążenie sieci. Dlatego jej obliczenie jest konieczne. Z zależności II-5.09 wynika bowiem, że wyższe harmoniczne napięcia winny być eliminowane z obszaru zasilania kondensatora nawet w przypadku sztywnego napięcia zasilania, jeśli wpływ ich na moc K_c jest duży.
Jak wiadomo możemy to uzyskać przez zastosowanie cewek indukcyjnych o małej indukcyjności połączonych szeregowo z pojemnością C kondensatora kompensującego (por. [8] i [9]).

Kompensacja mocy biernej nie rozwiązuje zagadnienia zwiększenia współczynnika mocy czynnej $\cos\varphi$ i nie rozwiązuje problemu, który można by określić jako kompensację układu do minimum mocy modułowej. Istotnie - jak to wynika z poprzedzającej teorii - wprowadzenie kondensatora o pojemności C obliczonej z relacji II-5.06 do układu, powoduje dodatkowe odkształcenie prądu przewodowego i pogarsza współczynnik deformacji $\cos\gamma$. Ujawnia się to w fakcie wzrostu prądu deformacji $\hat{J}_\psi(t)$. Tak więc obok kompensacji mocy biernej w celu polepszenia pracy układu charakteryzującej się poborem minimalnej mocy modułowej, konieczne jest zmniejszenie występującej w układzie mocy deformacji K. Zakładając, że kompensacja mocy biernej została przeprowadzona, zagadnienie minimum mocy modułowej sprowadza się do uzyskania w przewodzie doprowadzającym prąd możliwie nieznacznie odbiegający od prądu czynnego $J_w(t) = g\,U(t)$. Zagadnienie to zostało przez autora przeanalizowane i zostanie opublikowane w oddzielnej pracy ponieważ leży ono poza tematyką tej pracy.

III. Układy wielofazowe i wieloprzewodowe

1. Moc w układach wielofazowych i wieloprzewodowych

Dla k-tej fazy lub k-tego przewodu wprowadzamy oznaczenia (rys.3):



Rys.3

$\hat{P}_k(t)$ = symboliczna funkcja przebiegu napięcia zasadniczego[1].

$\hat{J}_k(t)$ = symboliczna funkcja przebiegu prądu zasadniczego.

Ogólnie: wskaźnik "k" odnosi się stale do k-tej fazy lub k-tego przewodu,

wskaźnik "h" odnosi się stale do h-tej harmonicznej.

Kładziemy:

$$\hat{P}_i \overset{df}{=} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{T} \int_0^T \hat{U}_k(t)\,\check{J}_k(t)\,dt$$

$$\hat{S}(t) \overset{df}{=} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{T} \int_0^T \hat{U}_k(t+\tau)\,\check{J}_k(\tau)\,d\tau \qquad \ldots \text{III - 1.01}$$

---

1) Por. pracę I.Rosenzweiga [13], str.7

Stąd:

$$P = \mathrm{Re}\left\{ \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{T} \int_0^T \hat{U}_k(t)\, \check{J}_k(t)\, dt \right\} \qquad \ldots \text{ III - 1.02}$$

$$Q = \mathrm{Jm}\left\{ \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{T} \int_0^T \hat{U}_k(t)\, \check{J}_k(t)\, dt \right\} \qquad \ldots \text{ III - 1.03}$$

Zachodzi:

$$\hat{P}_i = P + j\,Q; \quad P_i = \sqrt{P^2 + Q^2} \qquad \ldots \text{ III - 1.04}$$

Kładziemy:

$$U_m \overset{df}{=} \sqrt{\sum_{k=1}^{k=n} U_k^2}\,; \quad J_m \overset{df}{=} \sqrt{\sum_{k=1}^{k=n} J_k^2} \qquad \ldots \text{ III - 1.05}$$

oraz:

$$P_m \overset{df}{=} U_m \cdot J_m \qquad \ldots \text{ III - 1.06}$$

Wielkość P_m nazwaliśmy m o c ą m o d u ł o w ą układu[1]. Jest ona równa maksymalnej mocy czynnej, którą da się uzyskać z układu przy danych wartościach U_m i J_m.

Kładziemy:

$$\hat{Y} \overset{df}{=} \frac{P - jQ}{U_m^2}\,; \quad G \overset{df}{=} \frac{P}{U_m^2}\,; \quad B \overset{df}{=} \frac{Q}{U_m^2} \qquad \ldots \text{ III - 1.07}$$

Stąd:

$$\hat{Y} = G - jB \qquad \ldots \text{ III - 1.08}$$

G nazwiemy przewodnością czynną, B przewodnością bierną a $\hat{Y}$ symboliczną admitancją układu.

---

[1] por. [6], [13], [14] i [15].

Kładziemy:

$$\hat{J}_{ik}(t) \overset{df}{=} \hat{Y}\,\hat{U}_k(t)$$

$$\hat{J}_{\psi k}(t) \overset{df}{=} \hat{J}_k(t) - \hat{J}_{ik}(t), \quad k = 1,2, \ldots, n \qquad \ldots \text{ III - 1.9}$$

Zachodzi:

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{T} \int_0^T \hat{J}_{\psi k}(t)\,\check{J}_{ik}(t)dt = \check{Y} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{T} \int_0^T \hat{J}_{\psi k}(t)\,\check{U}_k(t)\,dt$$

$$= \check{Y} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{T} \int_0^T \left[\hat{J}_k(t) - \hat{Y}\,\hat{U}_k(t)\right] \check{U}_k(t)\,dt$$

$$= \check{Y} \left\{ \sum_{k=1}^{k=n} \check{P}_{ik} - \hat{Y} \sum_{k=1}^{k=n} U_k^2 \right\} = \check{Y}\,(\check{P}_i - \check{P}_i) = 0$$

Stąd:

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{T} \int_0^T \hat{J}_{\psi k}(t)\,\check{J}_k(t)dt = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{T} \int_0^T \hat{J}_{\psi k}(t) \cdot \left[\check{J}_{ik}(t) + J_{\psi k}(t)\right]dt$$

$$= \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{T} \int_0^T \hat{J}_{\psi k}(t) \cdot \check{J}_{\psi k}(t)dt = \sum_{k=1}^{k=n} J_{\psi k}^2$$

Kładziemy:

$$J_{\psi m} \overset{df}{=} \sqrt{\sum_{k=1}^{k=n} J_{\psi k}^2}$$

Stąd:

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{T} \int_0^T \hat{J}_{\psi k}(t)\,\check{J}_k(t)\,dt = J_{\psi m}^2$$

Z drugiej strony:

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{T} \int_0^T \hat{J}_{\psi k}(t)\,\check{J}_k(t)dt = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{T} \int_0^T \left[\hat{J}_k(t) - \hat{Y}\hat{U}_k(t)\right] \cdot \check{J}_k(t)dt$$

$$= \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{T} \int_0^T \left|\hat{J}_k(t)\right|^2 dt - \hat{Y} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{T} \int_0^T \hat{U}_k(t) \cdot \check{J}_k(t)dt$$

$$= J_m^2 - \hat{Y}\,\hat{P}_i$$

Czyli:

$$J_{\psi m}^2 = J_m^2 - \frac{P^2 + Q^2}{U_m^2}$$

Stąd:

$$P_m^2 = P^2 + Q^2 + K^2 \qquad \text{... III - 1.10}$$

gdzie:

$$K \overset{df}{=} U_m \cdot J_{\psi m} \qquad \text{... III - 1.11}$$

Moc K nazwaliśmy m o c ą d e f o r m a c j i. Jest ona zależna tak od zawartości wyższych harmonicznych w funkcjach przebiegów jak i od n i e r ó w n o m i e r n o ś c i poboru lub wydatku mocy czynnej i biernej przez poszczególne fazy. Bardziej szczegółowo jej znaczeniem zajmiemy się później.

Kładziemy:

$$J_{wm} \overset{df}{=} \pm \sqrt{\sum_{k=1}^{k=n} J_{wk}^2}\ ; \quad J_{qm} \overset{df}{=} \pm \sqrt{\sum_{k=1}^{k=n} J_{qk}^2} \qquad \text{... III - 1.12}$$

W definicjach III-1.12 znak "+" lub "-" obieramy w zależności od tego jaki znak mają moce P i Q[1].

Otrzymamy

$$P = U_m J_{wm}\ ; \quad Q = U_m J_{qm} \qquad \text{... III - 1.13}$$

Stąd, na podstawie III-1.10 zachodzi:

$$\boxed{J_m^2 = J_{wm}^2 + J_{qm}^2 + J_{\psi m}^2} \qquad \text{... III - 1.14}$$

---

1) Znak "+" obieramy dla dodatnich a znak "-" dla ujemnych wartości odpowiednio mocy P i Q.

W układach równomiernie obciążonych o przebiegach sinusoidalnych relacja III-1-14 redukuje się do zależności:

$$\boxed{J_m^2 = J_{wm}^2 + J_{qm}^2} \qquad \ldots \text{ III - 1.15}$$

Kładziemy:

$$\hat{P}_i(t) \stackrel{df}{=} \sum_{k=1}^{k=n} \hat{U}_k(t)\, \check{J}_k(t) \qquad \ldots \text{ III - 1.16}$$

Stąd:

$$P(t) = \mathrm{Re}\left\{\hat{P}_i\,(t)\right\} = \mathrm{Re}\left\{\sum_{k=1}^{k=n} \hat{U}_k\,(t)\,\check{J}_k\,(t)\right\}$$

$$\ldots \text{ III - 1.17}$$

$$Q(t) = \mathrm{Jm}\left\{\hat{P}_i\,(t)\right\} = \mathrm{Jm}\left\{\sum_{k=1}^{k=n} \hat{U}_k\,(t)\,\check{J}_k\,(t)\right\}$$

Zachodzi (na podstawie III-1.02 oraz III-1.03):

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)\,dt$$

$$\ldots \text{ III - 1.18}$$

$$Q = \frac{1}{T}\int_0^T Q(t)\,dt$$

Zależność III - 1.16 i III - 1.17 posiadają w rozpatrywanym układzie wielofazowym tę samą postać co odpowiadające im zależności obowiązujące w układach 1-fazowych i posiadają także tę samą interpretację fizykalną. Funkcje P(t) i Q(t) są odpowiednio funkcją mocy czynnej oraz funkcją mocy biernej a wielkość $\hat{P}_i(t)$ nazwiemy c h w i l o w ą m o c ą s y m b o l i c z n ą u k ł a d u.

2. Kompensacja mocy biernej w układach wielofazowych

Przez układ równomiernie obciążony rozumieć będziemy układ dla którego spełniona jest relacja: $\hat{Y}_k = \hat{Y}_l$ dla każdego k i l, gdzie k, l = 1, 2, ..., n. W takich układach zachodzi:

$$P_k = P_l\ ; \quad Q_k = Q_l\ ; \qquad \ldots \text{ III - 2.01}$$

Kompensacja mocy biernej w tych układach sprowadza się do zagadnienia tego samego typu co w układach 1-fazowych. Układ taki należy kompensować przy pomocy kondensatora (lub filtru) składającego się z identycznych elementów połączonych w gwiazdę i gdzie pojemność C jednej fazy tego kondensatora obliczamy przy pomocy wzoru II-5.06. W układach wielofazowych istotną rolę odgrywa jednak zjawisko n i e r ó w n o m i e r n o ś c i obciążenia.

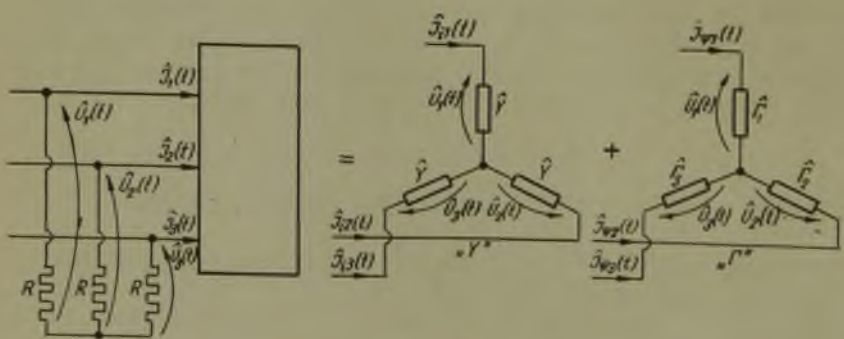
Aby uwypuklić wpływ nierównomierności obciążenia na rozkład mocy niezależnie od odkształcenia przebiegów rozpatrzymy najpierw dowolny n-fazowy układ o przebiegach sinusoidalnych. Do układów o przebiegach sinusoidalnych możemy zastosować bezpośrednio klasyczną metodę symboliczną i otrzymujemy:

$$\hat{P}_i = \sum_{k=1}^{k=n} \hat{U}_k \check{J}_k \qquad \text{... III - 2.02}$$

$$P = \mathrm{Re}\left\{\hat{P}_i\right\}; \qquad Q = \mathrm{Jm}\left\{\hat{P}_i\right\} \qquad \text{... III - 2.03}$$

$$\hat{J}_{ik} = \hat{Y}\,\hat{U}_k, \quad \hat{J}_{\psi k} = \hat{J}_k - \hat{J}_{ik}, \; k = 1,2\ldots,n \qquad \text{III - 2.04}$$

Z zależności III-2.04 widać, że każdy dowolny układ n-fazowy da się rozłożyć na dwa układy połączone w gwiazdę (rys.4).



Rys.4

Pierwszy z tych układów, który nazwiemy układem "Y" jest układem symetrycznym i pobiera w y ł ą c z n i e moc czynną P i moc bierną Q. Drugi układ, który nazwiemy układem "Γ" jest układem niesymetrycznym i pobiera wyłącznie moc deformacji K. Przewodność deformacji "Γ" obliczamy z relacji (por.rys.4):

$$\hat{\Gamma}_k = \frac{\hat{J}_{yk}}{\hat{U}_k} \qquad \text{... III - 2.05}$$

Jak widać, kompensowanie mocy biernej $Q = \sum_{k=1}^{k=n} Q_k$ uzyskamy poprzez kompensowanie układu "Y". Całkowity prąd bierny J_{qm} (por.III-1.12), który należy w układzie "Y". kompensować wynosi

$$J_{qm} = \frac{Q}{U_m} \qquad \text{... III - 2.06}$$

Dla symbolicznej wartości funkcji naboju elektrycznego rozmieszczającego się na okładkach kondensatorów w poszczególnych fazach baterii kompensującej, otrzymamy:

$$\hat{Q}_{ek} = \frac{1}{j\omega} \hat{J}_{qk}$$

$$Q_{ek}^2 = \left(\frac{1}{\omega}\right)^2 \cdot J_{qk}^2$$

Stąd:

$$\sum_{k=1}^{k=n} Q_{ek}^2 = \left(\frac{1}{\omega}\right)^2 \cdot \sum_{k=1}^{k=n} J_{qk}^2$$

Czyli:

$$J_{qm} = \omega Q_{em} \qquad \text{... III - 2.07}$$

gdzie:

$$Q_{em} = \sqrt{\sum_{k=1}^{k=n} Q_{ek}^2} \qquad \text{... III - 2.08}$$

Kładziemy:

$$C_m \overset{df}{=} \frac{Q_{em}}{U_m} \qquad \text{... III - 2.09}$$

Stąd (na podstawie relacji III-2.06 i III-2.7) s z u k a n a p o j e m n o ś ć j e d n e j f a z y s y m e t r y c z n e j b a t e r i i k o m p e n s u j ą c e j:

$$C_m = \frac{Q}{U_m^2 \omega} \qquad \text{... III - 2.10}$$

Naturalnie można było przyjąć relację III-2.10 jako definicję pojemności C_m co formalnie jest prostsze lecz nie daje wglądu w głębsze znaczenie fizykalne wprowadzonych wielkości.
Moc K_c pobierana przez symetryczną baterię kompensującą obliczona przy pomocy relacji III-2.10 jest równa zeru.
Czyli: że tak obliczona bateria nie pobiera przy przebiegach nieodkształconych mocy deformacji K, a równocześnie całkowicie kompensuje moc bierną Q pobieraną przez układ.
Przechodzimy do omówienia układów wielofazowych o przebiegach odkształconych.

Mamy:

$$\hat{P}_i = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{T} \int_0^T \hat{U}_k(t)\, \check{J}_k(t)\, dt$$

oraz:

$$\hat{J}_{ik}(t) = \hat{Y}\, \hat{U}_k(t) \; ; \qquad \hat{J}_{\gamma k}(t) = \hat{J}_k(t) - \hat{J}_{ik}(t)$$

gdzie admitancja symboliczna $\hat{Y}$ jest zdefiniowana przy pomocy relacji III-1.07.
Zauważmy, że tak samo jak poprzednio dany układ da się rozłożyć na dwa układy i to - na układ symetryczny "Y"

pobierający wyłącznie moc czynną P i moc bierną Q oraz na układ "Γ", który jest niesymetryczny i pobiera wyłącznie moc deformacji K. Z powyższego rozkładu wynika, że kompensacja mocy biernej Q polega na skompensowaniu układu "Y", tzn. na takim dobraniu baterii kompensującej, aby całkowity prąd bierny przez nią pobierany był równy $-J_{qm}$, gdzie:

$$J_{qm} = \frac{Q}{U_m}$$

Niech pojemność jednej fazy symetrycznej baterii kompensującej wynosi C_m. Moc bierna pobierana przez jedną fazę tej baterii wynosi (por.II-5.03)

$$Q_{ck} = - C_m \omega U_k^2 \cdot \lambda_k \qquad \text{... III - 2.11}$$

Stąd, całkowitą moc bierną Q_c pobieraną przez kompensator uzyskujemy z relacji:

$$Q_c = \sum_{k=1}^{k=n} Q_{ck} = - C_m \omega \sum_{k=1}^{k=n} U_k^2 \lambda_k \qquad \text{... III - 2.12}$$

Kładziemy:

$$\lambda_m \overset{df}{=} \sum_{k=1}^{k=n} \lambda_k \left(\frac{U_k}{U_m}\right)^2 \geqslant 1 \qquad \text{... III - 2.13}$$

Wprowadzając współczynnik λ_m do zależności III-2.12, otrzymamy:

$$Q_c = - C_m \omega U_m^2 \lambda_m \qquad \text{... III - 2.14}$$

Aby uzyskać całkowitą kompensację mocy biernej układu musi być spełniony warunek:

$$Q = - Q_c \qquad \text{... III - 2.15}$$

gdzie Q jest całkowitą mocą bierną pobieraną przez układ przed wprowadzeniem do układu kompensatora. Stąd:

$$C_m = \frac{Q}{U_m^2 \omega \lambda_m} \qquad \text{... III - 2.16}$$

Prąd $\hat{J}_{ck}(t)$ pobierany przez jedną fazę baterii kompensującej wynosi:

$$\hat{J}_{ck}(t) = -j\,\hat{J}_{qck}(t) + \hat{J}_{\psi ck}(t)$$
$$= C_m \frac{d\,\hat{U}_k(t)}{dt}$$

Ponieważ:

$$\hat{J}_{qck}(t) = \frac{Q_c}{U_m^2}\,\hat{U}_k(t)$$

otrzymamy:

$$\hat{J}_{\psi ck}(t) = j\omega C_m \cdot \sum_{h=1}^{\infty} (h - \lambda_m)\,\hat{V}_{hk} e^{jh\omega t}$$

Stąd:

$$J_{\psi cm} = \sqrt{\sum_{k=1}^{k=n} J_{\psi ck}^2} = C_m \omega \sqrt{\sum_{h=1}^{\infty} (h - \lambda_m)^2 \cdot \left(\sum_{k=1}^{k=n} V_{hk}^2\right)}$$

$$\text{... III - 2.17}$$

Kładziemy:

$$V_{hm}^2 \overset{df}{=} \sum_{k=1}^{k=n} V_{hk}^2 \qquad \text{... III - 2.18}$$

Wprowadzając zdefiniowaną wielkość V_{hm} do III-2.17 i przeprowadzając elementarne przekształcenie, otrzymamy:

$$J_{\psi cm} = U_m C_m \omega \cdot \sqrt{\sum_{h=1}^{\infty} (h - \lambda_m)^2 \left(\frac{V_{hm}}{U_m}\right)^2} \qquad \text{... III - 2.19}$$

Moc deformacji K_c pobierana przez baterię kompensującą wynosi: $U_m J_{\psi cm}$. Stąd:

$$K_c = U_m^2 C_m \omega . \sqrt{\sum_{h=1}^{\infty} (h - \lambda_m)^2 \left(\frac{V_{hm}}{U_m}\right)^2} \qquad \text{... III - 2.20}$$

3. Współczynniki mocy

Z przeprowadzonych rozważań wynika, że całość teorii mocy w układach wielofazowych lub wieloprzewodowych da się - podobnie jak dla układów 1-fazowych - przedstawić za pomocą prostopadłościanu podanego na rys.2. Wobec tego obowiązują również tutaj wzory II-4.01 oraz II-4.02. Podobnie jak uprzednio, dla układu jednofazowego, mamy:

$$\hat{J}_{\psi k} = \hat{J}_k (t) - \hat{Y}\, \hat{U}_k(t) = \hat{I}_{\psi ok} + \sum_{h=1}^{\infty} I_{\psi hk}$$

$$\hat{J}_{\psi k} = (I_{ok} - \hat{Y}\, V_{ok}) + \sum_{h=1}^{\infty} (\hat{I}_{hk} - \hat{Y}\, \hat{V}_{hk})\, e^{jh\omega t}$$

... III - 3.01

Stąd (por.II-4.07 i II-4.08):

$$J_{\psi k}^2 = J_k^2 - \left\{ Y_{ok}\, I_{ok} \cos\psi + \sum_{h=1}^{\infty} V_{hk}\, I_{hk} \cos(\psi_{hk} - \psi) \right\}$$

... III - 3.02

oraz:

$$\sum_{h=0}^{\infty} V_{hk}\, I_{hk} \sin(\psi_{hk} - \psi) = 0; \quad (\psi_{ok} = 0)$$

... III - 3.03

Na podstawie III-3.02, otrzymamy:

$$\sum_{k=1}^{k=n} J_{\psi k}^2 = \sum_{k=1}^{k=n} J_k^2 - \frac{P_i}{U_m^2} \left\{ \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{h=0}^{\infty} V_{hk}\, I_{hk} \cos(\psi_{hk} - \psi) \right\}$$

czyli:

$$P_i = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{h=0}^{\infty} V_{hk}\, I_{hk} \cos(\psi_{hk} - \psi)$$

... III - 3.04

Uwzględniając rys.2 otrzymujemy o g ó l n y w s p ó ł c z y n n i k d e f o r m a c j i:

$$\cos\gamma = \frac{\sum_{k=1}^{k=n}\sum_{h=0}^{\infty} V_{hk}\, I_{hk} \cos(\psi_{hk} - \psi)}{\sqrt{\sum_{k=1}^{k=n}\sum_{h=0}^{\infty} V_{hk}^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{k=n}\sum_{h=0}^{\infty} I_{hk}^2}} \quad \ldots \text{III} - 3.05$$

Wzór ten pozwala na obliczenie współczynnika deformacji mając dane poszczególne harmoniczne przebiegu.

IV. Zasada zachowania mocy

Nim przystąpimy do właściwego zagadnienia tj. do wykazania które z mocy są mocami zachowawczymi a które takimi nie są, zajmiemy się s y n t e t y c z n y m u j ę c i e m całości rozważań na temat mocy przedstawionej w tej pracy. W tym celu posłużymy się wektorialną przestrzenią Hilberta.

1. Przestrzeń wektorialna

Niech X oznacza jakiś zbiór niepusty. Przypuśćmy, że każdej parze uporządkowanej $\bar{x}$ i $\bar{y}$ elementów tego zbioru przyporządkowany jest pewien element $\bar{x} + \bar{y}$ należący do niego - nazywamy go sumą elementów $\bar{x}$ i $\bar{y}$; załóżmy dalej, że dla każdej liczby zespolonej λ oraz każdego elementu $\bar{x}$ zbioru X określony jest pewien element $\lambda\bar{x}$ tego zbioru, nazywamy go iloczynem liczby λ oraz elementu $\bar{x}$.
Niech dla tych działań spełnione są następujące warunki:

I. $\bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x}$

II. $\bar{x} + (\bar{y} + \bar{z}) = (\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z}$

III. $\bar{x} + \bar{y} = \bar{x} + \bar{z}$ pociąga: $\bar{x} = \bar{z}$

IV. $\lambda(\bar{x} + \bar{y}) = \bar{x} + \lambda\bar{y}$

V. $(\lambda + a)\,\bar{x} = \lambda\bar{x} + a\bar{x}$

VI. $\lambda(a\bar{x}) = (\lambda a)\,\bar{x}$

VII. $1\,\bar{x} = \bar{x}$

Przy tych założeniach powiadamy, że zbiór X stanowi przestrzeń wektorialną[x)].

---

x) A.Mostowski i M.Stark - Algebra Wyższa, tom I. PWN 1954 str.170.

W punkcie 2 (str.6) określona przestrzeń Hilberta jest przestrzenią wektorialną, zmetryzowaną (jej metryka jest metryką w sensie odległościowym). Przedstawiciel funkcji tej przestrzeni jest wektorem, którego moduł jest równy normie tej funkcji.
Oznaczmy przez $W(g)$ zbiór macierzy jednokolumnowych g-wymiarowych:

$$\mathfrak{W} \overset{df}{=} \begin{Vmatrix} \overline{W}_1 \\ \overline{W}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \overline{W}_g \end{Vmatrix} \qquad \ldots \text{ IV - 1.01}$$

których elementy należą do H(a,b) x)
Sumę dwóch elementów zbioru $W(g)$ określimy wzorem:

$$\begin{Vmatrix} \overline{W}_1 \\ \overline{W}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \overline{W}_g \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} \overline{V}_1 \\ \overline{V}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \overline{V}_g \end{Vmatrix} \overset{df}{=} \begin{Vmatrix} \overline{W}_1 + \overline{V}_1 \\ \overline{W}_2 + \overline{V}_2 \\ \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \\ \overline{W}_g + \overline{V}_g \end{Vmatrix} = \mathfrak{M} \qquad \ldots \text{ IV - 1.02}$$

Każdy element macierzy $\mathfrak{M}$ należy do H(a,b). A zatem, jeżeli
$\mathfrak{W} \in W(g)$ i $\mathfrak{V} \in W(g)$ to $(\mathfrak{M} = \mathfrak{W} + \mathfrak{V}) \in W(g)$
Iloczyn liczby zespolonej λ oraz elementu $\mathfrak{W}$ określimy wzorem:

$$\lambda \mathfrak{W} \overset{df}{=} \begin{Vmatrix} \lambda\overline{W}_1 \\ \lambda\overline{W}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda\overline{W}_g \end{Vmatrix} \qquad \ldots \text{ IV - 1.03}$$

---

x) H(a,b) oznacza, że każda funkcja $W_1(t), W_2(t), \ldots W_g(t)$ jest całkowalna wraz z kwadratem w przedziale [a,b].

Każdy element macierzy $\|\lambda\overline{w}_i\|$ należy do $H(a,b)$. Stąd $\lambda\mathfrak{W}$ jest elementem zbioru $W(g)$. Łatwo zauważyć, że postulaty I - VII są wypełnione dla zbioru $W(g)$. Wynika stąd, że zbiór $W(g)$ stanowi przestrzeń wektorialną.
Kładziemy:

$$\mathfrak{W}' \overset{df}{=} \|\overline{w}'_1, \overline{w}'_2, \ldots, \overline{w}'_g\| \qquad \ldots \text{ IV - 1.04}$$

gdzie: $$\overline{w}'_i \overset{df}{=} \|u_{1i}\ u_{2i} \ldots, u_{hi} \ldots\| \qquad \ldots \text{ IV - 1.05}$$

<u>Definicja</u>: Iloczyn skalarny dwóch wektorów $\mathfrak{W}$ i $\mathfrak{V}$ określimy wzorem

$$\mathfrak{W}' \cdot \mathfrak{V}^* \overset{df}{=} \|\overline{w}'_1, \overline{w}'_2, \ldots, \overline{w}'_g\| \begin{Vmatrix} \overline{V}^*_1 \\ \overline{V}^*_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \overline{V}^*_g \end{Vmatrix} \qquad \ldots \text{ IV - 1.06}$$

$$= \sum_{k=1}^{k=g} \overline{w}'_k \cdot \overline{V}^*_k \qquad \ldots \text{ IV - 1.07}$$

$$\mathfrak{W}' \cdot \mathfrak{V}^* = \sum_{k=1}^{k=g} \sum_{j=1}^{\infty} w_{jk}\ v^*_{jk}$$

$$= \sum_{k=1}^{k=g} \int_a^b w_k(t)\ V^*_k(t)dt \qquad \ldots \text{ IV - 1.08}$$

W myśl tej relacji kwadrat modułu wektora $\mathfrak{W}$ definiujemy przez zależność

$$|\mathfrak{W}|^2 \overset{df}{=} \sum_{k=1}^{k=g} \overline{w}'_k \cdot \overline{w}^*_k$$

$$= \sum_{k=1}^{k=g} \sum_{j=1}^{\infty} |w_{jk}|^2 = \sum_{k=1}^{k=g} \int_a^b |w_k(t)|^2\, dt \qquad \text{IV - 1.09}$$

Przestrzeń $W(g)$ z przyjętą definicją iloczynu skalarnego (IV-1.06) jest przestrzenią metryczną wyposażoną

w metrykę odległościową. Dla dwóch wektorów tej przestrzeni zachodzi nierówność:

$$|\mathfrak{U}|\,|\mathfrak{I}| > |\mathfrak{U}'.\mathfrak{I}^*| \qquad \ldots \text{ IV - 1.10}$$

Istotnie zachodzi:

$$\left\{\sum_{k=1}^{k=g}\int_a^b |U_k(t)|^2\,dt\right\}\left\{\sum_{k=1}^{k=g}\int_a^b |I_k(t)|^2\,dt\right\} >$$

$$> \left|\sum_{k=1}^{k=g}\int_a^b U_k(t)\;\; I_k^*(t)\,dt\right|^2 \qquad \ldots \text{ IV - 1.11}$$

2. <u>Rozkład ortogonalny wektorów przestrzeni W(n)</u>

Kładziemy:[x)]

$$\hat{\hat{U}}_k \overset{df}{=} \left\|\begin{matrix} V_{ok} \\ \hat{V}_{1k} \\ \hat{V}_{2k} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix}\right\| ; \quad \hat{\hat{U}}_k \overset{df}{=} \| V_{ok}, \hat{V}_{1k}, \hat{V}_{2k} \cdots \|$$

$$\ldots \text{ IV - 2.01}$$

$$\hat{\hat{J}}_k \overset{df}{=} \left\|\begin{matrix} I_{ok} \\ \hat{I}_{1k} \\ \hat{I}_{2k} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix}\right\| ; \quad \hat{\hat{J}}_k \overset{df}{=} \| I_{ok}, \hat{I}_{1k}, \hat{I}_{2k} \cdots \|$$

---

x) Por. rozdział I.

oraz analogiczne definicje dla wektorów sprzężonych $\check{\dot{U}}_k$, $\check{\dot{U}}'_k$, $\check{\dot{J}}_k$ i $\check{\dot{J}}'_k$.

$$\hat{\mathfrak{U}} \overset{df}{=} \begin{Vmatrix} \hat{\dot{U}}_1 \\ \hat{\dot{U}}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{\dot{U}}_n \end{Vmatrix} ; \quad \hat{\mathfrak{U}}' \overset{df}{=} \left| \hat{\dot{U}}'_1, \hat{\dot{U}}'_2, \ldots \hat{\dot{U}}'_n \right|$$

... IV - 2.02

$$\hat{\mathfrak{J}} \overset{df}{=} \begin{Vmatrix} \hat{\dot{J}}_1 \\ \hat{\dot{J}}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{\dot{J}}_n \end{Vmatrix} ; \quad \hat{\mathfrak{J}}' \overset{df}{=} \left| \hat{\dot{J}}'_1, \hat{\dot{J}}'_2, \ldots \hat{\dot{J}}'_m \right|$$

oraz analogiczne definicje dla wekorów $\check{\mathfrak{U}}, \check{\mathfrak{U}}', \check{\mathfrak{J}}$ i $\check{\mathfrak{J}}'$

Zachodzi:

$$\hat{\mathfrak{U}}' . \check{\mathfrak{J}} = \sum_{k=1}^{k=n} \hat{\dot{U}}'_k \cdot \check{\dot{J}}_k$$

$$= \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{T} \int_0^T \hat{U}_k(t) \, \check{J}_k(t) \, dt$$

Stąd:

$$\boxed{\hat{P}_i = \hat{\mathfrak{U}}' . \check{\mathfrak{J}}} \qquad \text{... IV - 2.03}$$

W myśl definicji III-1,02 i III-1,03 otrzymamy:

$$\boxed{\begin{aligned} P &= \mathrm{Re}\left\{\hat{\mathfrak{U}}' . \check{\mathfrak{J}}\right\} \\ Q &= \mathrm{Jm}\left\{\hat{\mathfrak{U}}' . \check{\mathfrak{J}}\right\} \end{aligned}} \qquad \text{... IV - 2.04}$$

oraz

$$\hat{P}_i = P + j\,Q \qquad \text{... IV - 2.03}$$

Na podstawie twierdzenia o rzucie prostopadłym[x)], kładziemy:

$$\hat{\mathfrak{J}} \overset{df}{=} \hat{\mathfrak{J}}_i + \hat{\mathfrak{J}}_\varphi$$

$$\hat{\mathfrak{J}}_i \overset{df}{=} \hat{Y}\,\hat{\mathfrak{U}}\,,$$ (gdzie $\hat{Y}$ jest liczbą dobraną tak, aby:)

$$\hat{\mathfrak{J}}_\varphi \overset{df}{\perp} \hat{\mathfrak{J}}_i \qquad \ldots \text{ IV - 2.06}$$

Otrzymamy:

$$\hat{\mathfrak{U}}'.\check{\mathfrak{J}} = \hat{\mathfrak{U}}'.(\check{\mathfrak{J}}_i + \check{\mathfrak{J}}_\varphi)$$

$$= \hat{\mathfrak{U}}'.\check{\mathfrak{J}}_i - \hat{\mathfrak{U}}'.\check{Y}\,\check{\mathfrak{U}}$$

$$= \check{Y}(\hat{\mathfrak{U}}'.\check{\mathfrak{U}})$$

Stąd:

$$\hat{P}_i = \check{Y}\,|\hat{\mathfrak{U}}|^2 \qquad \ldots \text{ IV - 2.07}$$

$$\check{Y} = \frac{P}{|\hat{\mathfrak{U}}|^2} = \frac{P + jQ}{|\hat{\mathfrak{U}}|^2}$$

$$\check{Y} = \frac{P}{|\hat{\mathfrak{U}}|^2} + j\,\frac{Q}{|\hat{\mathfrak{U}}|^2} \qquad \ldots \text{ IV - 2.08}$$

Kładziemy:

$$G \overset{df}{=} \frac{P}{|\hat{\mathfrak{U}}|^2}\,; \quad B \overset{df}{=} \frac{Q}{|\hat{\mathfrak{U}}|^2} \qquad \ldots \text{ IV - 2.09}$$

Czyli

$$\boxed{\hat{Y} = G - j\,B} \qquad \ldots \text{ IV - 2.10}$$

Zachodzi

$$\hat{\mathfrak{J}}_i = \hat{Y}\,\hat{\mathfrak{U}} = (G\hat{\mathfrak{U}} - jB\hat{\mathfrak{U}})$$

$$= G\hat{\mathfrak{U}} - jB\hat{\mathfrak{U}} \qquad \ldots \text{ IV - 2.11}$$

---

x) Teoria operatorów rzutowych i ich interpretacja jest świetnie przedstawiona w książce L.A.Lusternika i W.J.Sobolewa: Elementy Analizy Funkcjonalnej str.209 i nast. PWN 1959.

Kładziemy:

$$\hat{\mathfrak{J}}_w \overset{df}{=} G\,\hat{\mathfrak{U}}$$
$$\hat{\mathfrak{J}}_q \overset{df}{=} B\,\hat{\mathfrak{U}} \qquad \ldots \text{ IV - 2.12}$$

Stąd:

$$\hat{\mathfrak{J}}_i = \hat{\mathfrak{J}}_w - j\,\hat{\mathfrak{J}}_q \qquad \ldots \text{ IV - 2.13}$$

Zachodzi:

$$\hat{\mathfrak{J}}'.\check{\mathfrak{J}} = (\hat{\mathfrak{J}}'_i + \hat{\mathfrak{J}}'_\psi).(\check{\mathfrak{J}}_i + \check{\mathfrak{J}}_\psi)$$
$$= \hat{\mathfrak{J}}'_i.\check{\mathfrak{J}}_i + \hat{\mathfrak{J}}'_\psi.\check{\mathfrak{J}}_\psi \text{(na podstawie IV-2,06)}$$

Stąd:

$$|\hat{\mathfrak{J}}|^2 = |\hat{\mathfrak{J}}_i|^2 + |\hat{\mathfrak{J}}_\psi|^2 \qquad \ldots \text{ IV - 2.14}$$

Lecz:

$$|\hat{\mathfrak{J}}_i|^2 = \hat{\mathfrak{J}}'_i.\check{\mathfrak{J}}_i$$
$$= \hat{Y}\,\hat{\mathfrak{U}}'.\check{Y}\,\check{\mathfrak{U}} = |\hat{Y}|^2(\hat{\mathfrak{U}}'.\check{\mathfrak{U}})$$
$$|\hat{\mathfrak{J}}_i|^2 = |\hat{Y}|^2|\hat{\mathfrak{U}}|^2;\ |\hat{\mathfrak{J}}_i| = |\hat{Y}|\,|\hat{\mathfrak{U}}| \qquad \ldots \text{ IV - 2.15}$$
$$|\hat{Y}|^2 = \left|\frac{P - j\,Q}{|\hat{\mathfrak{U}}|^2}\right|^2 = \frac{P^2+Q^2}{|\hat{\mathfrak{U}}|^4} = \frac{P_i^2}{|\hat{\mathfrak{U}}|^4}$$

Stąd:

$$|\hat{\mathfrak{J}}_i|^2 = \frac{P^2+Q^2}{|\hat{\mathfrak{U}}|^2} = \frac{P_i^2}{|\hat{\mathfrak{U}}|^2} \qquad \ldots \text{ IV - 2.16}$$

Wstawiając do IV-2.14, otrzymamy:

$$|\mathfrak{U}|^2\ |\hat{\mathfrak{J}}|^2 = P^2 + Q^2 + |\hat{\mathfrak{U}}|^2|\hat{\mathfrak{J}}_\psi|^2$$

Na podstawie III-1.06:

$$|\hat{\mathfrak{U}}|\,|\hat{\mathfrak{J}}| = P_m$$

Stąd:

$$P_m^2 = P^2 + Q^2 + |\hat{\mathfrak{U}}|^2 \, |\hat{\mathfrak{I}}_\nu|^2 \quad \ldots \text{ IV - 2.17}$$

Kładziemy:

$$K \overset{df}{=} |\hat{\mathfrak{U}}| \, |\hat{\mathfrak{I}}_\nu| \quad \ldots \text{ IV - 2.18}$$

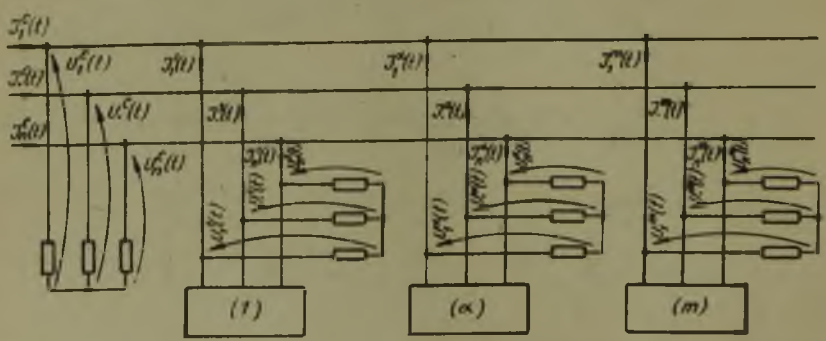
Stąd:

$$\boxed{P_m^2 = P^2 + Q^2 + K^2} \quad \ldots \text{ IV - 2.19}$$

Teoria przedstawiona w tym paragrafie, opierająca się na rozkładzie ortogonalnym wektorów w przestrzeni $\mathfrak{W}(n)$ nie wprowadza do uprzednio przedstawionej teorii nowej treści fizykalnej. Jej znaczenie polega na tym iż ujmuje ona syntetycznie całość zagadnienia a wprowadzone wektory mogą być bezpośrednio wprowadzone do syntetycznej analizy układów wieloprzewodowych o dowolnych ustalonych przebiegach.

3. Zasada zachowania mocy

Niech dana jest sieć n-fazowa zasilająca m n-fazowych odbiorów podłączonych równolegle (rys.5). Założymy że straty na przewodach łączących są pomijalnie małe.



Rys.5

Wskaźnikiem "c" oznaczać będziemy wielkości odnoszące się do zasilania całości. Stąd, na podstawie założeń otrzymamy:

$$\hat{U}_k^c(t) = \hat{U}_k^1(t) = \hat{U}_k^2(t) = \ldots = \hat{U}_k^\alpha(t) = \ldots \hat{U}_k^m(t)$$

$$\hat{J}_k^c(t) = \hat{J}_k^1(t) + \hat{J}_k^2(t) + \ldots + \hat{J}_k^\alpha(t) + \ldots + \hat{J}_k^m(t) \qquad \text{IV -3.01}$$

dla k = 1, 2, ..., n.

Na podstawie definicji i własności wektorów $\hat{\mathfrak{U}}$ i $\hat{\mathfrak{J}}$ zachodzi:

$$\hat{\mathfrak{U}}^c = \hat{\mathfrak{U}}^1 = \hat{\mathfrak{U}}^2 = \ldots = \hat{\mathfrak{U}}^\alpha = \ldots = \hat{\mathfrak{U}}^m$$

$$\hat{\mathfrak{J}}^c = \hat{\mathfrak{J}}^1 + \hat{\mathfrak{J}}^2 + \ldots + \hat{\mathfrak{J}}^\alpha + \ldots + \hat{\mathfrak{J}}^m \qquad \ldots \text{IV - 3.02}$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} \check{\mathfrak{J}}^\alpha \qquad \ldots \text{IV - 3.03}$$

Zachodzi:

$$\hat{\mathfrak{U}}^{c'} \cdot \check{\mathfrak{J}}^c = \hat{\mathfrak{U}}^{c'} \cdot \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} \check{\mathfrak{J}}^\alpha$$

$$= \hat{\mathfrak{U}}^{1'} \cdot \check{\mathfrak{J}}^1 + \hat{\mathfrak{U}}^{2'} \cdot \check{\mathfrak{J}}^2 + \ldots + \hat{\mathfrak{U}}^{\alpha'} \cdot \check{\mathfrak{J}}^{\alpha'} + \ldots + \hat{\mathfrak{U}}^{m'} \cdot \check{\mathfrak{J}}^m$$

$$= \hat{P}_i^1 + \hat{P}_i^2 + \ldots + \hat{P}_i^\alpha + \ldots + P_i^m$$

Stąd:

$$\boxed{\hat{P}_i^c = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} P_i} \qquad \ldots \text{IV - 3.04}$$

Z relacji IV-3.04 <u>wynika</u> zasada zachowania mocy symbolicznej. Orzeka ona, że w układach bez strat suma mocy symbolicznych pobieranych przez poszczególne odbiory jest równa mocy symbolicznej dostarczonej do układu przez zasilanie całości takich układów.
Ponieważ:

$$\hat{P}_i^c = P^c + j\,Q^c$$

$$\hat{P}_i^\alpha = P^\alpha + j\,Q^\alpha$$

gdzie:

$$P^c = \mathrm{Re}\left\{\hat{\mathfrak{U}}^{c'}, \check{\mathfrak{J}}^c\right\} ; \quad Q^c = \mathrm{Jm}\left\{\hat{\mathfrak{U}}^{c'}. \mathfrak{J}^c\right\}$$

$$P^{c} = \mathrm{Re}\left\{\hat{\mathfrak{U}}^{\alpha'}. \check{\mathfrak{J}}^{\alpha}\right\} ; \quad Q = \mathrm{Jm}\left\{\hat{\mathfrak{U}}^{\alpha'}. \check{\mathfrak{J}}^{\alpha}\right\}$$

Otrzymamy:

$$\boxed{\begin{aligned} P^c &= \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} P^{\alpha} \\ Q^c &= \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} Q^{\alpha} \end{aligned}} \qquad \ldots \text{ IV - 3.05}$$

Z relacji IV-3.05 wynika zasada zachowania mocy czynnej i biernej. Jej słowne sformułowanie jest analogiczne do zasady odnoszącej się do mocy symbolicznej.
Przeprowadzimy rozkład ortogonalny wektora $\hat{\mathfrak{J}}^c$ względem wektora $\hat{\mathfrak{U}}^c$ przy pomocy znanego już schematu postępowania.
Kładziemy:

$$\hat{\mathfrak{J}}^c \overset{df}{=} \hat{\mathfrak{J}}^c_i + \hat{\mathfrak{J}}^c_{\psi}$$

$$\hat{\mathfrak{J}}^c_i \overset{df}{=} \hat{Y}^c \hat{\mathfrak{U}}^c \qquad \ldots \text{ IV - 3.06}$$

$$\hat{\mathfrak{J}}^c_{\psi} \overset{df}{\perp} \hat{\mathfrak{J}}^c_i$$

Stąd:

$$\hat{\mathfrak{U}}^{c'}. \check{\mathfrak{J}}^c = \hat{\mathfrak{U}}^{c'}. (\check{\mathfrak{J}}^c_i + \check{\mathfrak{J}}^c_{\psi}) = \hat{\mathfrak{U}}^{c'}. \check{\mathfrak{J}}^c_i + \hat{\mathfrak{U}}^{c'}. \check{\mathfrak{J}}^c_{\psi}$$

$$= \hat{\mathfrak{U}}^{c'}. \check{\mathfrak{J}}^c_i$$

czyli:

$$\hat{P}^c_i = \hat{\mathfrak{U}}^{c'}. \check{\mathfrak{J}}^c_i \qquad \ldots \text{ IV - 3.07}$$

$$= \hat{\mathfrak{U}}^{c'}. \check{Y}^c \hat{\mathfrak{U}}^c = \check{Y}^c (\hat{\mathfrak{U}}^{c'}. \hat{\mathfrak{U}}^c)$$

$$\hat{P}^c_i = \check{Y}^c |\hat{\mathfrak{U}}|^2 \qquad \ldots \text{ IV - 3.08}$$

$$\check{Y}^c = \frac{\hat{P}^c_i}{|\hat{\mathfrak{U}}^c|^2} = \frac{P^c + j\,Q^c}{|\hat{\mathfrak{U}}^c|^2}$$

$$\check{Y}^c = \frac{P^c}{|\hat{\mathfrak{U}}^c|^2} + j\,\frac{Q^c}{|\hat{\mathfrak{U}}^c|^2} \qquad \ldots \text{ IV - 3.09}$$

Stąd (na podstawie IV-2.09):

$$\boxed{\hat{Y}^c = G^c - j\,B^c} \qquad \ldots \text{ IV - 3.10}$$

Na podstawie IV-3.05 i IV-3.02 otrzymamy:

$$G^c = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} G^\alpha$$
$$B^c = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} B^\alpha \qquad \ldots \text{ IV - 3.11}$$

gdzie G^α i B^α są wielkościami rzeczywistymi.

Zachodzi:

$$\hat{\mathfrak{J}}_i^c = \hat{Y}^c\,\hat{\mathfrak{U}}^c = (G^c - j\,B^c)\,\hat{\mathfrak{U}}^c$$
$$= \left(\sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} G^\alpha - j\sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} B^\alpha\right)\hat{\mathfrak{U}}^c$$
$$= \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m}(G^\alpha - j\,B^\alpha)\,\hat{\mathfrak{U}}^\alpha$$

Stąd:

$$\hat{\mathfrak{J}}_i^c = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m}\hat{\mathfrak{J}}_i^\alpha \qquad \ldots \text{ IV - 3.12}$$

Oraz (na podstawie def. IV-2.12):

$$\hat{\mathfrak{J}}_w^c - j\hat{\mathfrak{J}}_q^c = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} G^\alpha\,\hat{\mathfrak{U}}^\alpha - j\sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} B^\alpha\,\hat{\mathfrak{U}}^\alpha$$

Stąd:

$$\hat{\mathfrak{J}}_w^c = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m}\hat{\mathfrak{J}}_w^\alpha$$
$$\hat{\mathfrak{J}}_q^c = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m}\hat{\mathfrak{J}}_q^\alpha \qquad \ldots \text{ IV - 3.13}$$

Podobnie:

$$\hat{\mathfrak{J}}_\psi = \hat{\mathfrak{J}}^c - \hat{\mathfrak{J}}_i^c$$
$$= \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m}(\hat{\mathfrak{J}}^\alpha - \hat{\mathfrak{J}}_i^\alpha)$$
$$\hat{\mathfrak{J}}_\psi^c = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m}\hat{\mathfrak{J}}_\psi^\alpha \qquad \ldots \text{ IV - 3.14}$$

Mamy:

$$\hat{\mathfrak{J}}^{c'}\cdot\check{\mathfrak{J}}^c = \hat{\mathfrak{J}}_i^{c'}\cdot\check{\mathfrak{J}}_i^c + \hat{\mathfrak{J}}_\psi^{c'}\cdot\check{\mathfrak{J}}_\psi^c \quad \text{(por. IV-2.14)}$$
$$|\hat{\mathfrak{J}}^c|^2 = |\hat{\mathfrak{J}}_i^c|^2 + |\hat{\mathfrak{J}}_\psi^c|^2 \qquad \ldots \text{ IV - 3.15}$$

gdzie:

$$|\hat{\mathfrak{J}}_i^c|^2 = \hat{\mathfrak{J}}_i^{c'} \cdot \check{\mathfrak{J}}_i^c = |\hat{\mathfrak{Y}}^c|^2 |\hat{\mathfrak{U}}^c|^2$$

$$= \frac{(P^c)^2 + (Q^c)^2}{|\hat{\mathfrak{U}}^c|^2} \qquad \text{... IV - 3.16}$$

Wstawiając do IV-3.15, otrzymamy

$$|\hat{\mathfrak{U}}^c||\hat{\mathfrak{J}}^c|^2 = (P^c)^2 + (Q^c)^2 + |\hat{\mathfrak{U}}^c|^2 |\hat{\mathfrak{J}}_\psi^c|^2$$

$$(P_m^c)^2 = (P^c)^2 + (Q^c)^2 + (K^c)^2 \qquad \text{... IV - 3.17}$$

gdzie:

$$K^c = |\hat{\mathfrak{U}}^c||\hat{\mathfrak{J}}_\psi^c| \qquad \text{... IV - 3.18}$$

na podstawie definicji IV-2.18.

Zachodzi:

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} K^\alpha = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} |\hat{\mathfrak{U}}^\alpha||\hat{\mathfrak{J}}_\psi^\alpha|$$

$$= |\hat{\mathfrak{U}}^c| \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} |\hat{\mathfrak{J}}_\psi^\alpha| \text{ (por.IV-3.01)} \qquad \text{... IV - 3.19}$$

Lecz:

$$\hat{\mathfrak{J}}_\psi^c = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} \hat{\mathfrak{J}}_\psi^\alpha$$

Stąd:

$$|\hat{\mathfrak{J}}_\psi^c| < \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} |\hat{\mathfrak{J}}_\psi^\alpha| \qquad \text{... IV - 3.20}$$

Porównując IV-3.18 z IV-3.19 widzimy więc, że

$$K^c < \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} K^\alpha \qquad \text{... IV - 3.21}$$

Z powyższej nierówności wynika, że moc K odmiennie od mocy P, Q i $\hat{P}_1$ nie jest mocą zachowawczą.

Podobnie łatwo wykazać, że:

$$P_m^c < \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} P_m^\alpha \qquad \text{... IV - 3.22}$$

4. Splot

Kładziemy:

$$\hat{\mathfrak{U}} \times \check{\mathfrak{J}} \stackrel{df}{=} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{T} \int_0^T \hat{U}_k(t+\tau) . \check{J}_k(\tau)\, d\tau \qquad \ldots \text{ IV - 4.01}$$

Czyli:

$$\hat{S}(t) = \hat{\mathfrak{U}} \times \check{\mathfrak{J}} \qquad \ldots \text{ IV - 4.02}$$

Stąd:

$$\hat{\mathfrak{U}}^c \times \check{\mathfrak{J}}^c = \hat{\mathfrak{U}}^c \times \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} \check{\mathfrak{J}}^\alpha$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} \hat{\mathfrak{U}}^\alpha \times \check{\mathfrak{J}}^\alpha \qquad \ldots \text{ IV - 4.03}$$

Czyli:

$$\hat{S}^c(t) = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} \hat{S}^\alpha(t) \qquad \ldots \text{ IV - 4.04}$$

Z zależności IV-4.04 wynika zachowawcza własność splotu, tzn., że suma mocy korelacji pobieranych przez poszczególne odbiory jest równa funkcji mocy korelacji dostarczonej do układu przez zasilanie całości.

V. Literatura

[1] Antoniu I.S. - Chestiuni speciale de electrotechnica, Bucuresti, 1956, str.46.

[2] Buchholz F. - Die Darstellung der Begriffe "Scheinleistung" und "Scheinarbeit" bei Mehrphasenstrom, Elektro-Journal (1921), September-Heft, str.15.

[3] Budeanu C.I. - Puissances réactives et fictives, Institut Roumain de l'Energie, 1927.

[4] Budeanu C.I. - Bulletin de Mathematiques et de Physique de l'École Polytechnique de Bukarest, VI-e Année, Nr 1,2,3.

[5] Budeanu C.I. - Quelques considérations sur les espaces superieus, Bull. École Polytechnique, Bukarest, 1936/37, str.38.

[6] Curtis H.L., Silsbee F.B. - Electro-Journal 54(1935) str.394.

[7] Fryze S. - Moc rzeczywista, urojona i pozorna w obwodach elektrycznych o przebiegach odkształconych prądu i napięcia. P.E.1931, Nr 7 i 8.

[8] Gosztowt W., Urbanowicz H. - Moc bierna i jej kompensacja w stacjach prostownikowych, Przegląd Elektr. 1959, Nr 10, str.405.

[9] Jasicki Z. - Zagadnienia kondensatorów energetycznych P.E. 1958, Nr 12, str.629.

[10] *Лурье Л.С. - Кажущаяся мощность трехфазной системы Электричество, 1/1951.*

[11] Nowomiejski Z.J. - Układy wielofazowe, Praca doktorska, Gliwice 1960.

[12] Nowomiejski Z.J. - Moc elektryczna w układach o przebiegach odkształconych.
Biuletyn Inst. Energetyki, 5/6 - 1960, (Energetyka Nr 8, 1960).

[13] Rosenzweig I. - Symboliczny wielowymiarowy rachunek wektorowy jako metoda analizy układów wielofazowych. P.E. Lwów 1939.

[14] Пухов Г.Е. - Теория мощности системы периодических многофазных токов. Электричество. 2/1953.

[15] Quade W. - Zusammensetzung der Wirk-Blind- und Scheinleistung bei Wechselströmen beliebiger Kurvenform und neue Leistungs definition für unsymetrische Mehrphasenströme beliebiger Kurvenform. ETZ Bd.58 (1937), str.1315, 1341.

[16] Quade W. - Neue Darstellung der Verzerrunsleistung eines Wechselstroms mit Hilfe des Funktionenraums. Arch.f.Elektr.Bd.23 (1939) Nr 5, str.277.

[17] Телешев Б.А. - Необходимое уточнение терминологии в вопросе измерения реактивной мощности. Электричество, 11/1952.

[18] Tröger P. - Energetische Darstellung von Blindstromvorgängen. ETZ-A, H.18 (1953), str.533.

[19] Nowomiejski Z. - Moc i energia elektryczna w układach elektrycznych o dowolnych ustalonych przebiegach. Pol.Sl.Zeszyty Naukowe, Nr 27/1961.