ADAM MACIURA

TEORIA OBWODÓW

OBWODY PRĄDU ZMIENNEGO

Część I

WYDAWNICTWO POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

SKRYPT 2007

ADAM MACURA

TEORIA OBWODÓW
OBWODY PRĄDU ZMIENNEGO
Część I

WYDAWNICTWO POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ
GLIWICE 1997

Wydano za zgodą
Rektora Politechniki Śląskiej

PL ISSN 0434-0825

Wydawnictwo Politechniki Śląskiej
ul. Kujawska 3, 44-100 Gliwice

Nakł. 750+55 Ark. wyd. 10,5 Ark. druk. 10,75 Papier offset. kl. III 70x100, 80 g
Oddano do druku 30.12.96 Podpis. do druku 30.12.96 Druk ukończ. w styczniu 1997 r.
Zam.437/96

Fotokopie, druk i oprawę
wykonano w Zakładzie Graficznym Politechniki Śląskiej w Gliwicach

SPIS TREŚCI

Przedmowa

Teoria obwodów. Obwody prądu zmiennego, część I, to drugi tom z serii Teoria obwodów, przeznaczony dla studentów kierunków elektronika, informatyka i telekomunikacja. Zakłada się, że Czytelnik posiada już podstawowe wiadomości z dziedziny obwodów prądu stałego oraz matematyki i fizyki w zakresie wykładanym na pierwszym roku studiów wyższych. W szczególności wymagana jest znajomość podstaw rachunku różniczkowego i całkowego oraz elementarne wiadomości z zakresu rachunku operatorowego (przekształcenia Laplace'a).

W podręczniku specjalną uwagę zwrócono na interpretację fizyczną zjawisk zachodzących w obwodach prądu zmiennego, na związki między rzeczywistym układem a jego modelem oraz skutki nadmiernej idealizacji przy przejściu z rzeczywistego obwodu do jego schematu zastępczego, na podstawie którego układa się równania obwodu oraz praktyczne zastosowania niektórych zjawisk występujących w obwodach prądu zmiennego.

W rozdziale 1 wprowadzono podstawowe pojęcia obwodów prądu zmiennego, omówiono podstawowe kształty przebiegów czasowych prądów i napięć oraz wielkości charakterystyczne dla tych przebiegów, takie jak: wartość chwilowa, średnia, maksymalna i skuteczna, które umożliwiają porównanie otrzymanych na drodze teoretycznej przebiegów z wynikami pomiarów. Wyprowadzono zależności między prądem a napięciem dla elementów obwodu oraz prawa Kirchhoffa dla obwodów prądu zmiennego. Na przykładzie przedstawiono klasyczną metodę rozwiązywania obwodów prądu zmiennego za pomocą równań różnicz- kowych.

W rozdziale 2 przedstawiono podstawy rachunku operatorowego w zastosowaniu do analizy obwodów prądu zmiennego. Wyprowadzono operatorową postać równań elementów oraz obu praw Kirchhoffa. Zwrócono uwagę na izomorfizm podstawowych praw obwodu prądu stałego i prądu zmiennego w postaci operatorowej. Pozwala to na korzystanie z wyprowadzeń różnych metod stosowanych w teorii obwodów prądu stałego również w rachunku operatorowym. Przedstawiono rozwiązywanie obwodów z zerowymi warunkami początkowymi oraz sposoby otrzymywania rozwiązania w postaci czasowej (wzór Heaviside'a). Wprowadzając zastępcze schematy elementów z niezerowymi warunkami początkowymi przedstawiono sposoby rozwiązywania obwodów z niezerowymi warunkami początkowymi. Przedstawiono sposoby rozwiązywania obwodów w przypadku zmiany struktury układu oraz przy załączaniu sił wymuszających na obwody z niezerowymi warunkami początkowymi. Omówiono sposoby rozwiązywania obwodów załączanych na zmienne siły wymuszające.

W rozdziale 3 wprowadzono metodę operatorowo-symboliczną do analizy obwodów załączanych na sinusoidalne siły wymuszające.

W rozdziale 4 przedstawiono rozwiązanie obwodów załączonych na sinusoidalne siły wymuszające w stanie ustalonym. Wprowadzono podstawy metody symbolicznej. Omówiono zagadnienia mocy i energii w obwodach przy przebiegach zmiennych, a w szczególności przy przebiegach sinusoidalnych.

Pozostałe zagadnienia z zakresu teorii obwodów prądu zmiennego będą przedstawione w drugiej części podręcznika.

Autor pragnie podziękować prof. dr. Michałowi Tadeusiewiczowi za wnikliwą recenzję oraz cenne uwagi, dzięki którym usunięto wiele usterek. Dziękuję też kolegom z Zakładu Teorii Obwodów i Sygnałów Instytutu Elektroniki, a w szczególności dr. inż. Lucjanowi Karwanowi.

Autor

Rozdział 1

OBWODY PRĄDU ZMIENNEGO

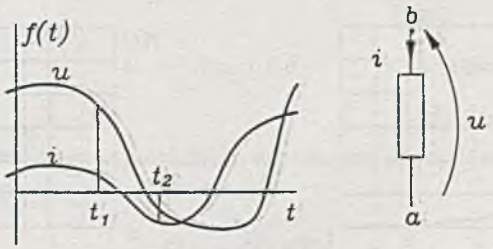
1.1. Podstawowe pojęcia obwodów prądu zmiennego

1.1.1. Prądy i napięcia zmienne w czasie

Wprowadzimy najpierw pewne konwencje dotyczące sposobu oznaczania wielkości zmiennych w czasie. Wielkości te będziemy oznaczać na ogół małymi literami, np. *u, i, e* - ogólnie *f*, rozumiejąc, że chodzi tu o funkcje czasu, a więc $u = u(t)$, $i = i(t)$, $e = e(t)$, ogólnie $f = f(t)$. Jeżeli będziemy chcieli zaznaczyć, że chodzi o wartość funkcji w konkretnej chwili czasu t_1, stosować będziemy zapis $f(t_1)$.

Tak jak w przypadku obwodów prądu stałego wprowadzimy strzałki dla określenia kierunku prądu i napięcia:

Strzałka prądu wskazuje kierunek przepływu prądu, jeżeli wartość liczbowa prądu w danej chwili jest dodatnia, a więc wtedy, gdy $i(t) > 0$. Jeżeli $i(t) < 0$, to prąd płynie w kierunku przeciwnym do strzałki.



Rys. 1.1.1

I tak w chwili $t = t_1$ (rys. 1.1.1) prąd płynie w kierunku strzałki prądu, natomiast w chwili $t = t_2$ wartość chwilowa prądu jest ujemna, to znaczy, że prąd w tej chwili płynie w kierunku przeciwnym do strzałki.

Podobnie dla napięcia:

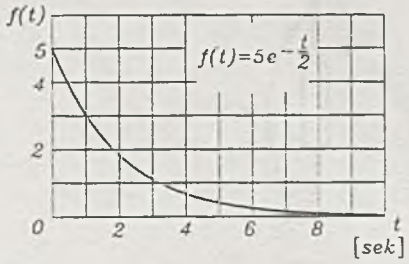
Strzałka napięcia łączy punkty, pomiędzy którymi istnieje napięcie, przy czym grot strzałki wskazuje punkt posiadający wyższy potencjał, jeżeli wartość liczbowa napięcia w danej chwili jest dodatnia, a więc $u(t) > 0$. Jeżeli $u(t) < 0$, to grot strzałki wskazuje punkt o niższym potencjale.

I tak w chwili $t = t_1$ (rys. 1.1.1) punkt *b* posiada wyższy potencjał, natomiast w chwili $t = t_2$ wartość chwilowa napięcia jest ujemna, a więc punkt *b* posiada potencjał niższy od punktu *a*.

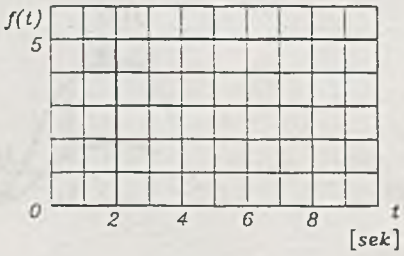
Można zatem w jednoznaczny sposób określić kierunek prądu i napięcie w każdej chwili czasu.

1.1.2. Kształty przebiegów zmiennych w czasie oraz charakterystyczne wielkości opisujące te przebiegi

Najbardziej pełny opis wielkości zmiennych w czasie można uzyskać przez podanie funkcji *f(t)* w postaci analitycznej lub w postaci graficznej, np. przez jej zarejestrowanie za pomocą przyrządu rejestrującego (np. oscylografu). Przykłady najprostszych kształtów wielkości zmiennych, nieokresowych, wraz z ich opisem analitycznym, przedstawione są na rys. 1.1.2-rys. 1.1.5. Rysunek 1.1.2 przedstawia tzw. funkcję wykładniczą. Charakteryzuje się ona monotonicznym opadaniem jej wartości i jest jedną z najczęściej spotykanych funkcji przy analizie stanów nieustalonych w obwodach elektrycznych. Rysunek 1.1.3 przedstawia

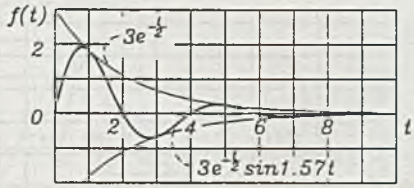


Rys. 1.1.2



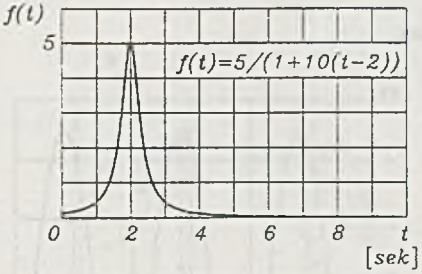
Rys. 1.1.3

tzw. funkcję skokową. Jej dokładną definicję podamy w następnym rozdziale. Ten rodzaj przebiegu odpowiada załączaniu np. sił elektromotorycznych itp. Przedstawiona na rys. 1.1.4 funkcja reprezentuje często spotykany przypadek oscylacyjnego zanikania wielkości fizycznej do zera. Jest to tzw. sinusoida tłumiona.



Rys. 1.1.4

Rysunek 1.1.5 przedstawia przykład tzw. funkcji impulsowej, charakteryzującej się szybkim narastaniem od zera do pewnej wartości, a następnie równie szybkim opadaniem do zera. Jest więc przebiegiem o krótkim czasie trwania. Przedstawione przebiegi nieokresowe stanowią jedynie najprostsze przykłady funkcji czasu spotykanych w praktyce. W dalszym ciągu zobaczymy, że wiele praktycznie spotykanych przebiegów można przedstawić jako sumę tych właśnie prostych funkcji - funkcji skokowej, wykładniczej i sinusoidalnej tłumionej. Poznamy też bliżej podstawowe własności tych funkcji.



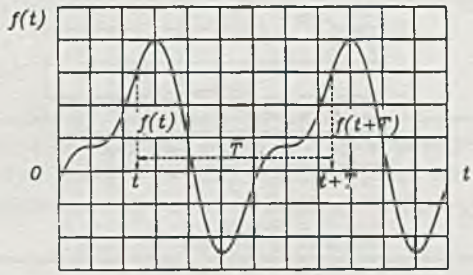
Rys. 1.1.5

Drugą klasą przebiegów, często spotykanych w praktyce, są przebiegi opisane przez funkcje okresowe, a więc funkcje spełniające warunek:

$$f(t) = f(t+T),$$

gdzie T oznacza tzw. okres funkcji. Kształt funkcji powtarza się zatem co T s (rys. 1.1.6). Oprócz okresu funkcji tę samą cechę funkcji okresowej można jeszcze opisać za pomocą częstotliwości f albo pulsacji ω, przy czym zachodzi następujący związek między tymi wielkościami:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

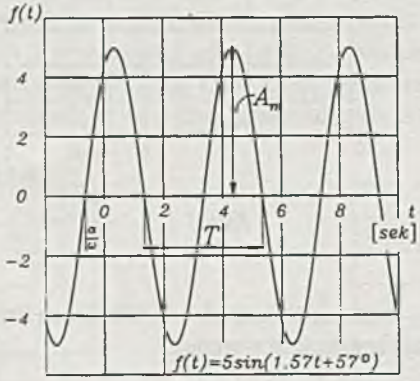


Rys. 1.1.6

Wśród funkcji okresowych jedną z najbardziej znanych, a równocześnie jedną z najważniejszych w praktyce jest funkcja sinusoidalna (rys.1.1.7).

$$f(t) = A_m \sin(\omega t + \alpha),$$

gdzie: A_m - amplituda funkcji,
$(\omega t + \alpha)$ - faza,
α - faza początkowa.

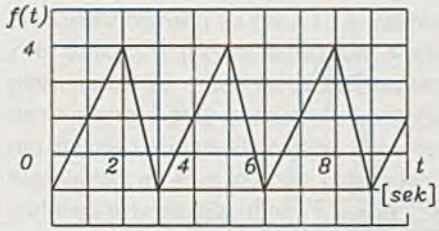


Rys. 1.1.7

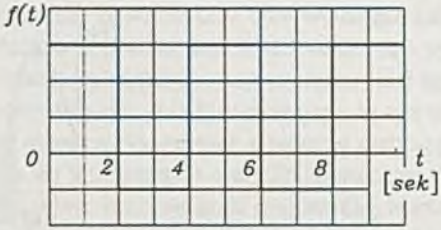
Funkcja sinusoidalna jest zatem scharakteryzowana przez trzy parametry: amplitudę A_m, pulsację ω (lub częstotliwość f lub okres T) oraz fazę początkową α.

Na dalszych rysunkach przedstawione są inne przykłady często spotykanych funkcji okresowych - na rys.1.1.8 tzw. funkcja piłokształtna, a na rys. 1.1.9 funkcja prostokątna.

Jeżeli mamy do czynienia z przebiegami okresowymi, to często wystarczy znajomość pewnych wielkości charakterystycznych dla tych przebiegów, by scharakteryzować je pod



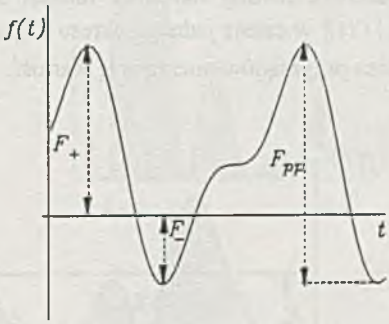
Rys. 1.1.8



Rys. 1.1.9

pewnymi względami. Pożądane byłoby też, aby te wielkości były dostępne do pomiaru tak, aby umożliwiło to porównanie wyników doświadczeń z wynikami analizy teoretycznej. Podamy dalej kilka takich wielkości.

- Wartość szczytowa przebiegu. Na rys. 1.1.10 przedstawiono kilka możliwości pomiaru takiej wartości. F_+ przedstawia wartość szczytową mierzoną od poziomu zerowego w kierunku dodatnim. F_- wartość szczytową mierzoną w kierunku ujemnym, a F_{pp} tzw. wartość międzyszczytową. Możliwe jest też mierzenie wartości szczytowych od tzw. wartości średniej.

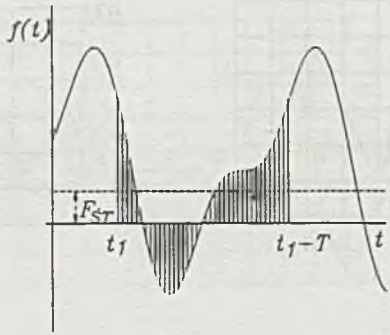


Rys. 1.1.10

- Wartość średnia przebiegu. Z definicji jest nią

$$\boxed{F_{sr} = \frac{1}{T}\int_{t}^{t+T} f(t)dt}$$

Można ją zinterpretować jako wysokość F_{sr} prostokąta o podstawie T, o powierzchni równej powierzchni pod krzywą $f(t)$ w czasie jednego okresu T,(powierzchnia zakreskowana na rys.1.1.11). Istnieją przyrządy mierzące tę wartość.

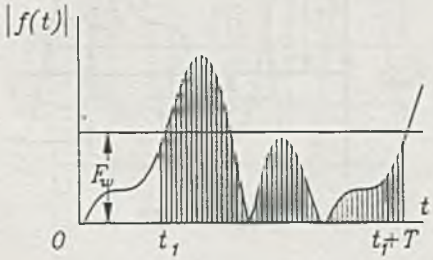


Rys. 1.1.11

- Wartość średnia wyprostowana. Z definicji jest nią

$$\boxed{F_w = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} |f(t)|dt}$$

Na rys. 1.1.12 przedstawiona jest graficzna interpretacja tej wartości. Jest nią wysokość prostokąta o podstawie równej okresowi funkcji T a powierzchni równej powierzchni pod funkcją $|f(t)|$ w czasie jednego okresu T (powierzchnia zakreskowana na rys. 1.1.12). Istnieje klasa przyrządów mierząca tę wartość.

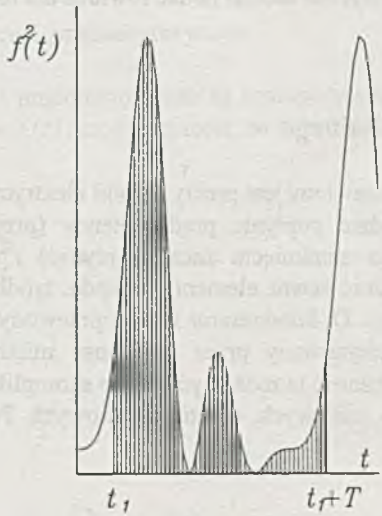


Rys. 1.1.12

- Wartość skuteczna przebiegu. Z definicji jest to:

$$\boxed{F = \sqrt{\frac{1}{T}\int_t^{t+T} f^2(t)dt}}$$

Jest nią zatem pierwiastek ze średniej wartości kwadratu funkcji. Przebieg funkcji $f^2(t)$ przedstawiony jest na rys.1.1.13. Zakreskowano na nim powierzchnię odpowiadająca całce z tej funkcji.W języku angielskim wartość skuteczna nazywana jest RMS value: R - root pierwiastek, M- mean średnia, S- square pierwiastek kwadratowy. Jest to najczęściej używana wartość przy pomiarach przebiegów okresowych. Przyrządy wskazujące tę wartość można podzielić na dwie klasy. Pierwsza mierzy rzeczywistą wartość skuteczną przebiegu, niezależnie od jego kształtu i może być używana do wyznaczania wartości skutecznej dowolnych przebiegów, druga klasa to przyrządy mierzące inne wartości (najczęściej wartość średnią wyprostowaną lub maksymalną), ale wyskalowane w wartościach skutecznych dla przebiegów sinusoidalnych, dla których $F = \frac{1}{\sqrt{2}} F_m$. Takie przyrządy wskazują wartość skuteczną poprawnie tylko dla przebiegów sinusoidalnych.



Rys. 1.1.13

Dla wartości skutecznych można podać pewną interpretację fizyczną ułatwiającą zrozumienie jej znaczenia. Na przykład dla prądu można wykazać, że wartość skuteczna prądu jest to taka *wartość prądu stałego,* która wykona na rezystancji tę samą pracę jak dany prąd okresowy (tj. wydzieli na rezystancji w czasie T taką samą energię).

Dla prądu stałego praca wykonana na rezystancji R w czasie T wynosi:

$$A = RI^2T,$$

praca wykonana przez prąd zmienny w elementarnym czasie dt wyniesie:

$$dA = Ri^2 dt,$$

a w czasie jednego okresu:

$$A = \int_t^{t+T} Ri^2 dt$$

Przyrównując te prace do siebie

$$A = RI^2 T = \int_t^{t+T} Ri^2 T dt,$$

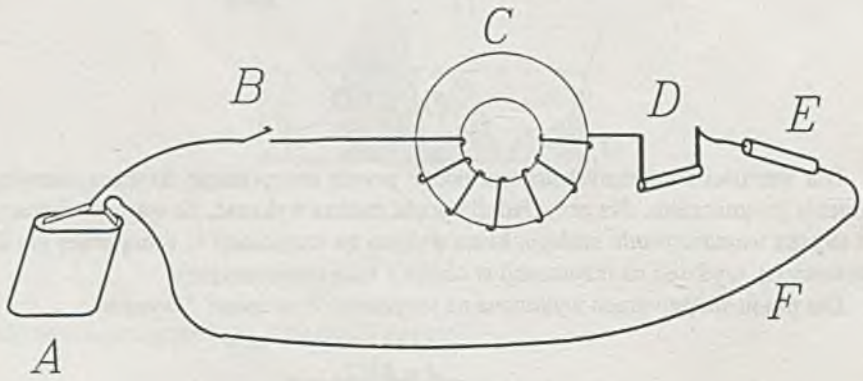
otrzymamy stąd:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_t^{t+T} i^2 dt}$$

Podobne interpretacje fizyczne można podać również dla innych wielkości.

1.2. Obwód prądu zmiennego

Na rys. 1.2.1 przedstawiony jest prosty obwód elektryczny prądu zmiennego. Po załączeniu klucza B w obwodzie popłynie prąd zmienny (przed zamknięciem klucza prąd w obwodzie nie płynął, po zamknięciu zaczyna płynąć) i pojawią się napięcia zmienne w czasie. Możemy tu wyróżnić pewne elementy obwodu: źródło energii elektrycznej A, klucz B, cewkę indukcyjną C, opór D, kondensator E oraz przewody łączące F. Każdy element obwodu może być scharakteryzowany przez zależność między jego prądem i napięciem. W realnych elementach zależność ta może być bardzo skomplikowana i przyjąć postać układu równań różniczkowych lub całkowych, często nieliniowych. Pokażemy później, że elementy



Rys. 1.2.1

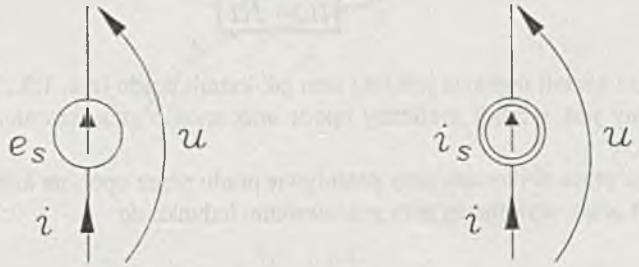
te można zastąpić układami zastępczymi składającymi się z tzw. elementów idealnych. Będą nimi elementy, dla których w szczególności zależności między prądem i napięciem są liniowe. Elementami idealnymi będą siły elektromotoryczne e i prądomotoryczne i (również sterowane), opór R, indukcyjność L, pojemność C oraz indukcyjność wzajemna M.

Na początku zajmiemy się tzw. elementami skupionymi. Będą to elementy, w których można pominąć wpływ ograniczonej prędkości rozchodzenia się fal elektromagnetycznych. W odniesieniu do tych elementów oznacza to, że prąd na początku elementu ma ten sam kształt czasowy co prąd na jego końcu, nie jest więc funkcją miejsca (nie jest opóźniony w czasie).

1.3. Elementy obwodu

1.3.1. Siły elektromotoryczne i prądomotoryczne

Siły elektromotoryczne i prądomotoryczne są funkcjami czasu. I tak np.. dla sił elektromotorycznych $u = u(t) = e_s = e_s(t)$, czyli napięcie na sile elektromotorycznej jest równe tej



Rys. 1.3.1

sile niezależnie od prądu płynącego przez nią. Podobnie dla siły prądomotorycznej prąd płynący przez nią jest równy tej sile niezależnie od napięcia panującego na niej $i = i(t) = i_s = i_s(t)$. Na rys. 1.3.1 przedstawione są symbole tych elementów.

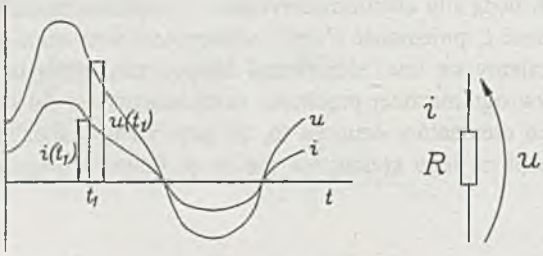
Również sterowane siły elektromotoryczne i prądomotoryczne są funkcjami czasu. Ich kształt jest identyczny z kształtem ich wielkości sterujących. Dla sił sterowanych napięciem u_x mamy odpowiednio:

$$e_s(t) = k_{ue} u_x(t) \qquad \text{albo} \qquad i_s(t) = k_{ui} u_x(t)$$

Dla sił sterowanych prądem i_x:

$$e_s(t) = k_{ie} i_x(t) \qquad \text{albo} \qquad i_s(t) = k_{ii} i_x(t)$$

1.3.2. Opór



Rys. 1.3.2

Najprostszym elementem idealnym jest opór liniowy, w dalszym ciągu nazywany krótko oporem. Charakterystyczną cechą oporu jest to, że w każdej chwili czasu t napięcie jest proporcjonalne do prądu:

$$u(t) = Ri(t)$$

$$\boxed{u = Ri} \tag{1.3.1}$$

Znaczy to, że kształt napięcia jest taki sam jak kształt prądu (rys. 1.3.2). Na tymże rysunku przedstawiony jest symbol graficzny oporu oraz sposób strzałkowania napięcia i prądu (odbiornikowy).

Elementarna praca wykonana przy przepływie prądu przez opór, na którym istnieje napięcie u, równa jest pracy wykonanej przy przeniesieniu ładunku dq

$$dA = udq = uidt = Ri^2dt = \frac{1}{R}u^2dt$$

Zatem praca wykonana w czasie od $t=0$ *do* t wyniesie:

$$A = \int_0^t uidt = R\int_0^t i^2dt = \frac{1}{R}\int_0^t u^2dt$$

Praca ta w całości zamieni się na ciepło. Warto zwrócić uwagę na to, że zależy ona od kwadratu prądu lub napięcia.

1.3.3. Indukcyjność

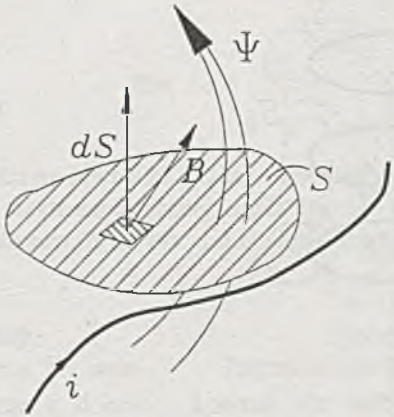
Wokół jakiegokolwiek przewodnika, przez który płynie prąd elektryczny, powstaje pole magnetyczne, które można scharakteryzować przez wektor natężenia pola magnetycznego H, który jest zależny od kształtu i wymiarów geometrycznych obwodu oraz liniowo zależny od

natężenia prądu i. W ogólnym przypadku indukcja magnetyczna B jest nieliniowo zależna od natężenia pola magnetycznego H

$$B = \mathrm{B}(H), \qquad (1.3.2)$$

a strumień indukcji przez dowolną powierzchnię S (rys. 1.3.3)

$$\psi = \int_S B\mathrm{d}S, \qquad (1.3.3)$$



Rys. 1.3.3

Wynika stąd, że strumień indukcji przez daną powierzchnię S jest nieliniowo zależny od prądu, który go wywołuje.

$$\psi = \psi(i) \qquad (1.3.4)$$

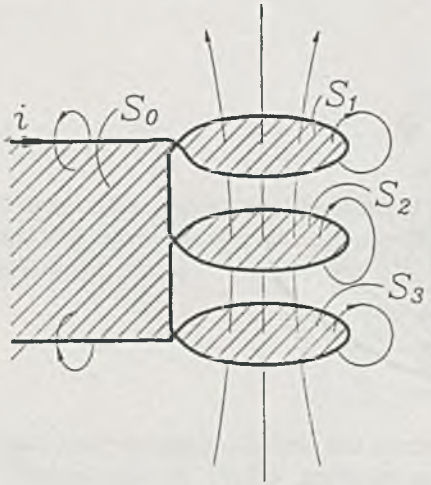
Jeżeli ośrodek magnetyczny, w którym to pole powstaje, jest liniowy, to znaczy indukcja magnetyczna jest proporcjonalna do natężenia pola równanie (1.3.2) przybierze postać:

$$B = \mu\mu_0 H, \qquad (1.3.5)$$

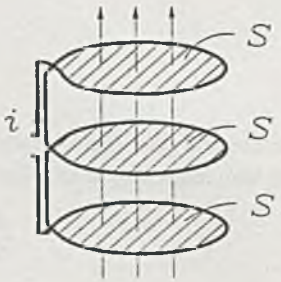
a zależność strumienia skojarzonego z prądem od prądu staje się liniowa. Jeżeli dotyczy to zamkniętego obwodu, np. cewki (rys. 1.3.4), to strumień skojarzony z tym obwodem będzie proporcjonalny do prądu który wywołuje ten strumień. Jeżeli strumień wywołany jest przez prąd własny obwodu, to:

$$\boxed{\psi = Li} \qquad (1.3.6)$$

Współczynnik proporcjonalności L występujący w powyższym równaniu to tzw. **indukcyjność** albo **współczynnik indukcji własnej** obwodu. Obliczanie indukcyjności L obwodu można przeprowadzić na podstawie powyższego równania, wyznaczając dla danej konfiguracji obwodu strumień Ψ skojarzony z tym obwodem, a wywołany przez prąd i.



Rys. 1.3.4



Rys. 1.3.5

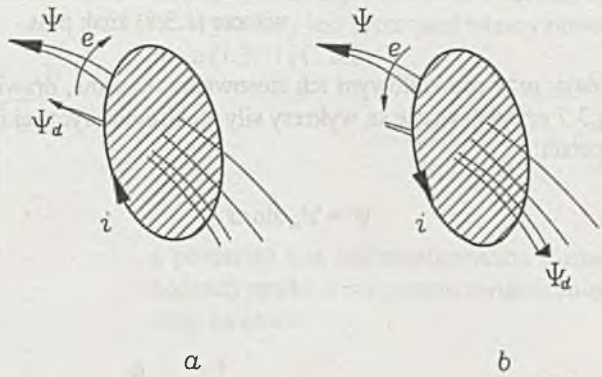
Pojęcie strumienia skojarzonego z obwodem wyjaśnimy na dwóch przykładach. Na rys.1.3.4 przedstawiona jest cewka składająca się z trzech zwojów. Strumień skojarzony z tą cewką to strumień przenikający przez powierzchnie S_0, S_1, S_2 i S_3.Oznaczymy te strumienie odpowiednio przez ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2 i ϕ_3. Wtedy $\psi = \phi_0 + \phi_1 + \phi_2 + \phi_3$.

Jeżeli przez każdy zwój cewki przepływa taki sam strumień (rys. 1.3.5), to

$$\boxed{\psi = z\phi = Li} \qquad (1.3.7)$$

Zgodnie z prawem indukcji elektromagnetycznej (prawem *Faradaya*) siła elektromotoryczna indukcji wywołana jest zmianami w czasie strumienia skojarzonego z obwodem:

$$e = \pm\frac{d\psi}{dt} \qquad (1.3.8)$$



Rys. 1.3.6

Wyjaśnimy znak w powyższym równaniu. Zależy on od przyjętego sposobu strzałkowania (kierunku) indukowanej siły elektromotorycznej *e*. Na rys. 1.3.6a przedstawiony jest tzw. prawoskrętny system strzałkowania, a na rys. 1.3.6b lewoskrętny. Wyjaśnimy poniżej oba systemy:

System prawoskrętny

Patrząc w kierunku strumienia ψ, indukowana siła elektromotoryczna *e* skierowana jest na prawo (zgodnie z ruchem prawoskrętnego korkociągu). Jeżeli w czasie $dt > 0$ wzrośnie strumień ψ o $d\psi > 0$, to zgodnie z regułą Lenza powstała siła elektromotoryczna indukcji powinna wywołać prąd, który przez powstanie dodatkowego strumienia ψ_d będzie przeciwdziałać temu wzrostowi. Aby tak było, siła elektromotoryczna *e* musiałaby mieć wartość ujemną,

$$e = -\frac{d\psi}{dt}$$

wtedy i prąd *i* byłby ujemny (miał przeciwny kierunek do strzałki), dodatkowy strumień ψ_d miałby również przeciwny kierunek do strzałki i spowodowałby zmniejszenie strumienia. Byłoby to zgodne z regułą Lenza. Zatem przy prawoskrętnym

System lewoskrętny

Patrząc w kierunku strumienia ψ, indukowana siła elektromotoryczna *e* skierowana jest na lewo (zgodnie z ruchem lewoskrętnego korkociągu). Jeżeli w czasie $dt > 0$ wzrośnie strumień ψ o $d\psi > 0$, to zgodnie z regułą Lenza powstała siła elektromotoryczna indukcji powinna wywołać prąd, który przez powstanie dodatkowego strumienia ψ_d będzie przeciwdziałać temu wzrostowi. Aby tak było, siła elektromotoryczna *e* musiałaby mieć wartość dodatnią,

$$e = +\frac{d\psi}{dt}$$

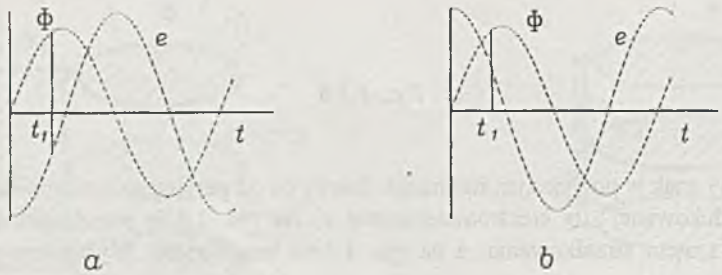
wtedy i prąd *i* miałby wartość dodatnią (zgodny ze strzałką kierunek), powstały strumień dodatkowy ψ_d byłby również dodatni i przeciwdziałałby zatem przyczynie która go wywołała, a więc wzrostowi strumienia ψ, zgodnie z regułą Lenza. Przy le-

strzałkowaniu obowiązuje we wzorze (1.3.8) znak minus.

woskrętnym strzałkowaniu obowiązuje we wzorze (1.3.8) znak plus.

Oba systemy dają, przy prawidłowym ich stosowaniu, te same, prawidłowe wyniki. Dla przykładu na rys. 1.3.7 przedstawione są wykresy siły elektromotorycznej indukcji wywołanej przez strumień o postaci:

$$\psi = \Psi_m \sin \omega t$$



Rys. 1.3.7

Przedstawimy równania dla siły elektromotorycznej indukcji oraz strumienia skojarzonego z obwodem dla obu systemów strzałkowania:

$$e = -\frac{d\psi}{dt} = -\omega \Psi_m \cos \omega t$$

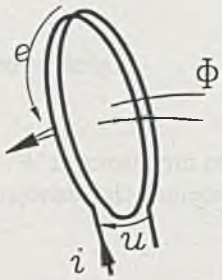
Dla chwili t_1 wartość chwilowa siły elektromotorycznej jest ujemna, zatem prąd i skierowany jest przeciwnie do strzałki (rys. 1.3.6.a), strumień indukcji ψ_d skierowany jest również przeciwnie do strzałki, zmniejsza zatem strumień ψ, co jest zgodne z regułą Lenza.

$$e = \frac{d\psi}{dt} = \omega \Psi_m \cos \omega t$$

Dla chwili t_1 wartość chwilowa siły elektromotorycznej jest dodatnia, zatem prąd i skierowany jest zgodnie z jej strzałką, (rys. 1.3.6b), strumień indukcji ψ_d skierowany jest również zgodnie ze strzałką, zmniejsza zatem strumień ψ, co jest zgodne z regułą Lenza.

Prawoskrętny system strzałkowania stosowany jest w teorii pola.

W dalszym ciągu stosować będziemy lewoskrętny system strzałkowania, który w teorii obwodów jest wygodniejszy.



Rys. 1.3.8

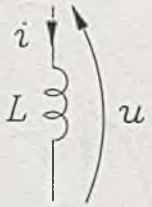
Na rys. 1.3.8 przedstawiono obwód, w którym strumień Ψ wywołany jest przez prąd własny obwodu i, zatem zgodnie z (1.3.7) i (1.3.8):

$$e = \frac{d\psi}{dt} = \frac{d(Li)}{dt} = L\frac{di}{dt},$$

a ponieważ siła elektromotoryczna e równa jest napięciu na końcach cewki $u = e$, zatem związek między prądem i napięciem na cewce:

$$\boxed{u = L\frac{di}{dt}} \qquad (1.3.9)$$

Napięcie na cewce jest proporcjonalne do pochodnej prądu w czasie.



Rys. 1.3.9

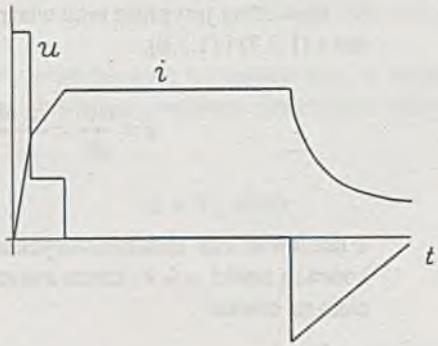
Na rys. 1.3.9 przedstawiony jest graficzny symbol indukcyjności. Zgodnie z rys. 1.3.8 strzałkowanie napięcia i prądu jest odbiornikowe.

Przykładowy przebieg prądu i oraz indukowanego na cewce napięcia u przedstawiony jest na rys. 1.3.10 . Napięcie, jak widać, zależy od pochodnej prądu, a więc od szybkości zmian prądu a nie od samej jego wartości. Nawet duży prąd będzie powodował niewielkie napięcie, jeżeli mała będzie szybkość jego zmian.

Wzór (1.3.9) pozwala obliczyć przebieg napięcia, jeżeli znany jest przebieg prądu. Jeśli natomiast znany jest przebieg czasowy napięcia, to z tego wzoru można otrzymać przez całkowanie:

$$\boxed{i = \frac{1}{L}\int_0^t u\,d\tau + i(0)} \qquad (1.3.10)$$

Wartość prądu w chwili t zależy zatem od jego wartości w chwili t=0 oraz od całki z przebiegu napięcia od chwili t=0 do chwili t.



Rys. 1.3.10

Wokół cewki powstaje w wyniku przepływu prądu pole magnetyczne, do utworzenia którego konieczne jest wykonanie pewnej pracy, która jest zmagazynowana w tym polu. Pracę tę musi wykonać prąd *i*. Elementarna praca *dA* wykonana przez źródło zasilające cewkę musi być równa przyrostowi energii pola magnetycznego *dW*:

$$dW = dA = udq = uidt = Lidi\,,$$

zatem całkowita energia pola magnetycznego obwodu, przez który płynie prąd *i*, wyniesie:

$$W = \int_0^i Lidi = \frac{Li^2}{2}$$

$$\boxed{W = \frac{Li^2}{2}} \qquad (1.3.11)$$

Energia pola magnetycznego zależy od kwadratu chwilowej wartości prądu.

1.3.4. Pojemność

Jeżeli między dwoma przewodnikami istnieje napięcie *u* (różnica potencjałów), to gromadzi się na nich ładunek elektryczny *q*. Typowym przykładem takiego układu przewodników jest kondensator. Wartość tego ładunku zależy od napięcia. Jeżeli założymy, że wartość ładunku w danej chwili *t* zależy jedynie od wartości napięcia w tejże chwili, to:

$$q(t) = q[u(t)]$$

albo prościej

$$q = q(u)$$

W najprostszym przypadku zależność ta jest liniowa. Wtedy ładunek q jest wprost proporcjonalny do napięcia:

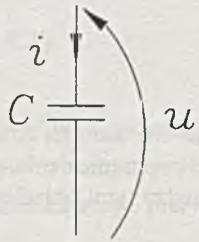
$$q = Cu,$$

skąd po zróżniczkowaniu otrzymamy:

$$i = \frac{dq}{dt} = C\frac{du}{dt}$$

$$\boxed{i = C\frac{du}{dt}} \qquad (1.3.12)$$

Prąd w kondensatorze jest proporcjonalny do pochodnej napięcia.



Rys. 1.3.11

Na rys. 1.3.11 przedstawiony jest graficzny symbol kondensatora. Również i tu obowiązuje odbiornikowy system strzałkowania.

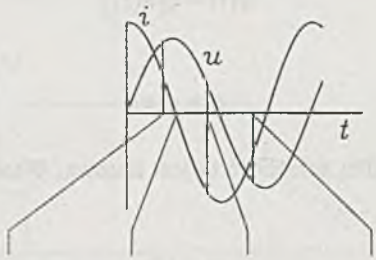
Wyjaśnimy na przykładzie sam proces ładowania i rozładowania kondensatora. Załóżmy sinusoidalny przebieg napięcia na kondensatorze:

$$u = U_m \sin\omega t$$

Wtedy prąd w kondensatorze przyjmie postać

$$i = C\omega U_m \cos\omega t$$

Na rys. 1.3.12 przedstawiono przebiegi prądu i napięcia w kondensatorze.



Kondensator:	ładuje się,	naładowany,	rozładowuje się,	ładuje w przeciwnym kierunku
Napięcie:	wzrasta ,	równe zero,	maleje,	ujemne

Rys. 1.3.12

W pierwszej ćwiartce okresu prąd ma wartość dodatnią, płynie zatem zgodnie ze strzałką prądu na rys. 1.3.11, a więc napięcie na kondensatorze rośnie. Z chwilą gdy prąd osiągnie wartość zero, napięcie na kondensatorze osiągnie swą największą wartość. Od tej chwili prąd przybiera wartości ujemne, zatem ładunki dodatnie płyną w kierunku przeciwnym do strzałki prądu, kondensator się rozładowuje - napięcie maleje. W chwili, w której prąd osiąga wartość zero, kondensator naładowany jest w przeciwnym kierunku, napięcie jest ujemne. Jak widać, odbiornikowy system strzałkowania i wzór (1.3.12) poprawnie opisują przebiegi prądu i napięcia na kondensatorze.

Jeżeli znamy przebieg prądu w kondensatorze, a interesuje nas napięcie na nim, to ze wzoru (1.3.12) przez całkowanie można uzyskać:

$$\boxed{u = \frac{1}{C}\int_0^t i\,d\tau + u(0)} \qquad (1.3.13)$$

W kondensatorze powstaje pole elektryczne, w którym magazynuje się energia, równa pracy, jaka została wykonana przez źródło zasilające kondensator. W celu przeniesienia elementarnego ładunku dq z jednej okładki kondensatora na drugą, jeżeli między tymi okładkami panuje napięcie u, konieczna jest elementarna praca

$$dA = u\,dq$$

Zatem do pełnego naładowania kondensatora do napięcia u konieczna jest praca A, która będzie równa energii pola elektrycznego kondensatora W.

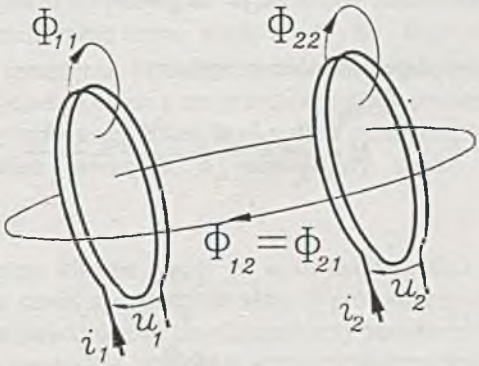
$$A = W = \int_0^q u\,dq = \int_0^u Cu\,du = \frac{Cu^2}{2}$$

$$\boxed{W = \frac{Cu^2}{2}} \qquad (1.3.14)$$

Energia kondensatora jest proporcjonalna do kwadratu chwilowej wartości napięcia.

1.3.5. Indukcyjność wzajemna

Rozpatrzmy dwa obwody przedstawione na rys. 1.3.13. W wyniku przepływu prądu i_1 i i_2 powstaje wokół nich pole magnetyczne. W liniowych ośrodkach magnetycznych pole wypadkowe będzie sumą pól wytworzonych przez każdy prąd z osobna, zatem i strumienie indukcji magnetycznej przenikające daną powierzchnię będą sumą strumieni wywołanych przez każdy



Rys. 1.3.13

z prądów z osobna. Strumień skojarzony z pierwszym obwodem Ψ_1 składa się ze strumienia wytworzonego przez pierwszy prąd, przenikający pierwszy obwód Ψ_{11} oraz ze strumienia przenikającego pierwszy obwód, a wytworzonego przez drugi prąd Ψ_{12}:

$$\Psi_1 = \Psi_{11} \pm \Psi_{12} \qquad (1.3.15)$$

Podobnie strumień przenikający drugi obwód składa się ze strumienia przenikającego drugi obwód, wytworzony przez drugi prąd oraz ze strumienia przenikającego drugi obwód, a wytworzonego przez pierwszy prąd

$$\Psi_2 = \Psi_{22} \pm \Psi_{21} \qquad (1.3.16)$$

Znak $\pm$ w powyższych równaniach wyjaśnimy dalej.
Każdy z tych strumieni składowych jest w liniowym ośrodku proporcjonalny do prądu, który go wytworzył, zatem

$$\begin{aligned} \Psi_{11} &= L_1 i_1 \\ \Psi_{12} &= M_{12} i_2 \\ \Psi_{22} &= L_2 i_2 \\ \Psi_{21} &= M_{21} i_1 \end{aligned} \qquad (1.3.17)$$

Współczynniki proporcjonalności L_1 oraz L_2 są to znane już współczynniki indukcji własnej.

Z tzw. Zasady Wzajemności wynika (w liniowych ośrodkach magnetycznych), że jeżeli prąd i płynący w pierwszym obwodzie wywoła w drugim strumień Ψ, to ten sam prąd płynący w obwodzie drugim wywoła w obwodzie pierwszym taki sam strumień, stąd

$$M_{12} = M_{21} = M$$

Uwzględniając powyższe zależności otrzymamy:

$$M = \frac{\Psi_{12}}{i_2} = \frac{z_1 \Phi_{12}}{i_2} = \frac{\Psi_{21}}{i_1} = \frac{z_2 \Phi_{21}}{i_1},$$

a ponieważ

$$L_1 = \frac{z_1 \Phi_{11}}{i_1}$$

$$L_2 = \frac{z_2 \Phi_{22}}{i_2},$$

stąd

$$M^2 = \frac{\Phi_{12}\Phi_{21}}{\Phi_{11}\Phi_{22}} L_1 L_2$$

Oznaczając

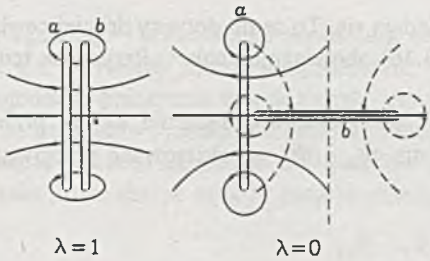
$$\lambda = \sqrt{\frac{\Phi_{12}\Phi_{21}}{\Phi_{11}\Phi_{22}}},$$

przy czym $0 \le \lambda \le 1$

jest to tzw. **współczynnik sprzężenia magnetycznego**, otrzymamy ostatecznie:

$$\boxed{M = \lambda\sqrt{L_1 L_2}} \qquad (1.3.18)$$

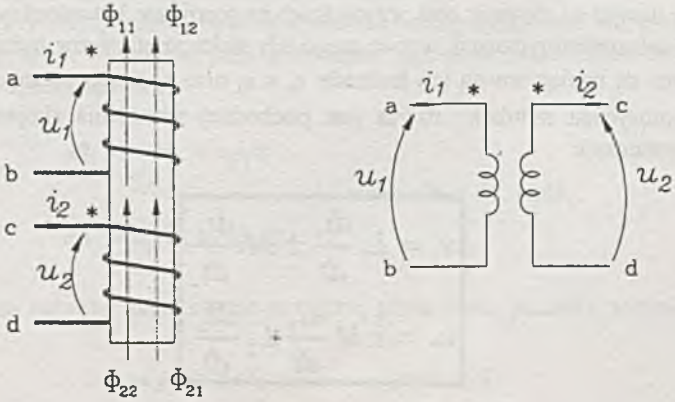
Współczynnik indukcji magnetycznej jest zatem proporcjonalny do pierwiastka z iloczynu obu indukcyjności. Może on przyjmować wartości dodatnie, jeżeli oba strumienie składowe



Rys. 1.3.14

się dodają, lub wartość ujemną, jeżeli są przeciwnie skierowane (odejmują się). Stopień sprzężenia obu obwodów scharakteryzowany przez M lub (zależy od wzajemnego usytuowania obu obwodów. Im większa część strumienia wytworzonego przez jeden obwód przenika drugi, tym większy jest stopień sprzężenia. Na rys. 1.3.14 przedstawiono dwa skrajne przypadki. W pierwszym przypadku obie cewki a i b są bardzo blisko siebie tak, że prawie cały strumień jednej cewki przenika także drugą. Wtedy $\lambda \approx 1$, bo $\Phi_{12} \approx \Phi_{21} \approx \Phi_{11} = \Phi_{22}$ jest to przypadek bardzo silnego sprzężenia. W drugim przypadku (z prawej strony rysunku) żadna linia indukcji pola magnetycznego cewki a nie przechodzi przez powierzchnię cewki b, zatem żadna część strumienia wytworzonego przez cewkę a nie przenika przez cewkę b. Również strumień wytworzony przez cewkę b, a przenikający cewkę a, jest równy zero $\lambda \approx 0$ bo $\Phi_{12} \approx \Phi_{21} \approx 0$.

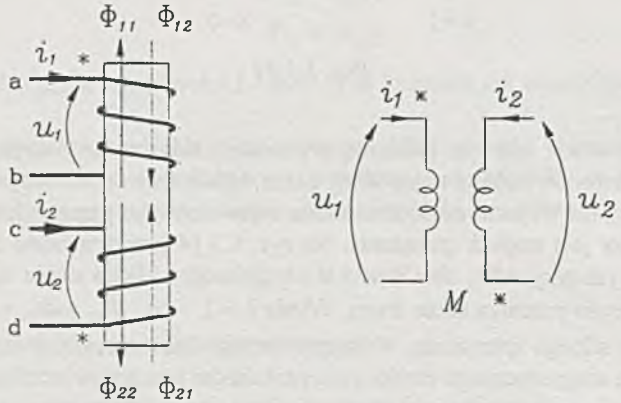
Do wyjaśnienia pozostaje kwestia znaku $\pm$ w równaniach (1.3.15 i (1.3.16). Na rys. 1.3.15 przedstawiono dwie cewki sprzężone ze sobą. Wprowadzimy najpierw pojęcie zacisków jednoimiennych. Dwa zaciski dwóch cewek nazwiemy zaciskami jednoimiennymi, jeżeli prąd dopływający do nich spowoduje powstanie strumieni skierowanych w tym samym kierunku. Na wspomnianym rysunku będą to zaciski a i c (lub b i d). Zaciski jednoimienne oznaczymy gwiazdkami. W przedstawionym na rysunku układzie strumień własny cewki pierwszej Φ_{11}, oraz strumień przenikający pierwszą cewkę, a wytworzony przez drugą cewkę Φ_{12}, mają



Rys. 1.3.15

te same kierunki, a więc dodają się. To samo dotyczy drugiej cewki. W tym zatem przypadku we wzorach (1.3.15) i (1.3.16) obowiązuje znak +. Przypadek ten nazwiemy zgodnym połączeniem cewek.

Drugi przypadek tzw. niezgodnego połączenia cewek przedstawiono na rys. 1.3.16. W tym przypadku strumienie Φ_{11} i Φ_{12} są skierowane przeciwnie (odejmują się), to samo



Rys. 1.3.16

dotyczy strumieni Φ_{22} i Φ_{21}, zatem we wzorach (1.3.15) i (1.3.16) obowiązuje znak - (minus).

Uwzględniając powyższe wzory oraz zależności między poszczególnymi składowymi strumieni od prądów (1.3.17) otrzymamy:

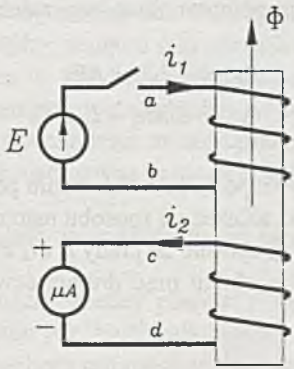
$$\Psi_1 = L_1 i_1 \pm M i_2$$
$$\Psi_2 = \pm M i_1 + L_2 i_2$$

Zwróćmy uwagę na to, że w obu przypadkach zastosowano lewoskrętny system strzałkowania dla sił elektromotorycznych, wobec czego siły elektromotoryczne indukujące się w obu cewkach równe są napięciom na ich końcach $e_1 = u_1$ oraz $e_2 = u_2$, zatem uwzględniając, że siła elektromotoryczna indukcji równa jest pochodnej strumienia skojarzonego z cewką, otrzymamy ostatecznie

$$\boxed{\begin{aligned} u_1 &= L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt} \\ u_2 &= \pm M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{aligned}} \qquad (1.3.19)$$

Symbole graficzne dla zgodnego i przeciwnego połączenia cewek przedstawiono odpowiednio na rys. 1.3.15 i rys. 1.3.16. Należy jeszcze raz podkreślić, że w powyższym równaniu znak plus obowiązuje dla zgodnego połączenia cewek a znak - (minus) dla przeciwnego połączenia, zaś system strzałkowania prądów i napięć jest zawsze odbiornikowy.

W praktyce zachodzi często potrzeba określenia, które zaciski układu cewek sprzężonych są jednoimienne. Do tego celu może służyć między innymi układ pomiarowy przedstawiony na rys. 1.3.17.



Rys. 1.3.17

Po zamknięciu klucza zacznie płynąć prąd i_1 w kierunku zaznaczonym strzałką, wywoła on strumień Φ skierowany do góry zgodnie z zaznaczoną strzałką. Zgodnie z regułą Lenza musi w drugiej cewce powstać strumień przeciwnie skierowany, tak by przeciwdziałać istniejącemu strumieniowi Φ, dlatego prąd w drugiej cewce musi być zgodny z zaznaczoną strzałką. Wtedy przyrząd załączony na drugą cewkę powinien wychylić się w kierunku dodatnim. Z tego wynika, że zaciski a i c są jednoimienne, gdyż prądy dopływające do tych zacisków powodują powstanie strumieni w tym samym kierunku.

W polu magnetycznym układu obwodów (cewek) zmagazynowana jest energia W, która musi być równa pracy A wykonanej przy utworzeniu tego pola. Elementarne prace wykonane przez zewnętrzne źródła są równe:

$$\left.\begin{aligned} dA_1 &= u_1 dq_1 = u_1 i_1 dt \\ dA_2 &= u_2 dq_2 = u_2 i_2 dt \end{aligned}\right\rangle \quad dA = dW = dA_1 + dA_2$$

Ze wzorów na napięcie indukowane w cewce, przez którą przenika strumień ψ, otrzymamy:

$$d\psi_1 = u_1 dt, \qquad d\psi_2 = u_2 dt,$$

zatem elementarna energia układu wyniesie:

$$dW = i_1 d\psi_1 + i_2 d\psi_2,$$

zaś całkowita energia układu:

$$W = \int_0^{\psi_1} i_1 d\psi_1 + \int_0^{\psi_2} i_2 d\psi_2$$

Strumienie skojarzone z poszczególnymi obwodami zależą od obu prądów:

$$\psi_1 = L_1 i_1 \pm M i_2$$
$$\psi_2 = \pm M i_1 + L_2 i_2$$

Zależności te uniemożliwiają bezpośrednie obliczenie powyższych całek. Można jednak zauważyć, że energia pola nie może zależeć od sposobu jego ustanowienia. Dlatego założymy, że pole magnetyczne powstało w ten sposób, że prądy i_1 i i_2 zwiększane zostały od zera do ich końcowej wartości tak, by w każdej chwili prąd drugiej cewki był proporcjonalny do prądu pierwszej cewki:

$$i_2 = \alpha i_1$$

Wtedy

$$d\psi_1 = (L_1 \pm \alpha M) di_1$$
$$d\psi_2 = \left(L_2 \pm \frac{M}{\alpha}\right) di_2,$$

a całkowita energia pola wyniesie:

$$W = \int_0^{i_1} i_1 (L_1 \pm \alpha M) di_1 + \int_0^{i_1} i_2 \left(L_2 \pm \frac{M}{\alpha}\right) di_2,$$

ostatecznie zaś

$$W = \frac{L_1 i_1^2}{2} \pm \frac{\alpha M i_1^2}{2} + \frac{L_2 i_2^2}{2} \pm \frac{M i_2^2}{\alpha 2},$$

a ponieważ $\alpha i_1 = i_2$ i $\frac{i_2}{\alpha} = i_1$,

ostatecznie otrzymamy:

$$\boxed{W = \frac{L_1 i_1^2}{2} \pm M i_1 i_2 + \frac{L_2 i_2^2}{2}} \qquad (1.3.20)$$

Jak należało się spodziewać, energia nie zależy od współczynnika proporcjonalności α.

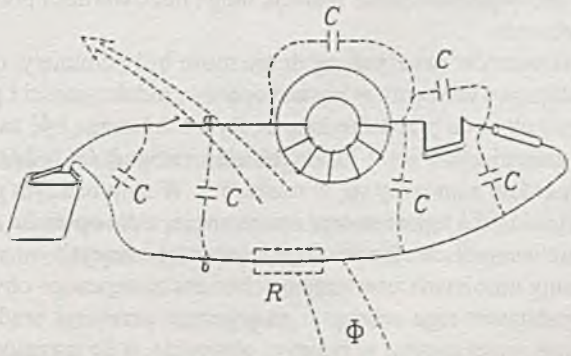
W celu interpretacji tego wzoru przypuśćmy, że oba obwody były na początku od siebie nieskończenie daleko (odosobnione). Wtedy pierwszy składnik w powyższym równaniu, to energia odosobnionego pierwszego obwodu, ostatni składnik to energia odosobnionego drugiego obwodu. Jeżeli teraz będziemy zbliżali oba obwody do siebie, to będziemy musieli wykonać dodatkową pracę, gdyż między prądami obu obwodów wystąpią działania dynamiczne (wystąpią siły), których pokonanie w przypadku odpychania się obwodów wymaga wykonania dodatkowej pracy; praca ta zmagazynowana będzie w polu. Pracę tę reprezentuje środkowy składnik, jest to zatem energia pochodząca ze zbliżenia obu cewek. Jeżeli zaś oba obwody się przyciągają, to pole musi wykonać pewną pracę, a energia pola ulegnie wtedy zmniejszeniu (znak minus).

Powyższe wzory łatwo uogólnić na większą liczbę obwodów sprzężonych ze sobą magnetycznie.

Wyprowadzone powyżej związki między prądem i napięciem dla elementów obwodu mają charakter równań różniczkowych, bądź całkowych; zależności te są liniowe. Są one pewną idealizacją związków, jakie będą opisywać realne elementy obwodu. Wykażemy dalej, że z tych idealnych elementów będzie można tworzyć układy zastępcze realnych elementów obwodów.

1.4. Elementy pasożytnicze

Realny obwód elektryczny przedstawiony na rys. 1.2.1 zawiera w istocie również pewne elementy niewidoczne na pierwszy rzut oka. Rozpatrzymy niektóre wpływy tych tzw. elementów pasożytniczych na przebiegi prądów i napięć w obwodzie.



Rys. 1.4.1

- Między odcinkami przewodów *a* i *b* istnieje różnica potencjałów (napięcie), wobec czego mogą gromadzić się tam ładunki elektryczne, co można w pierwszym przybliżeniu uwzględnić przez wprowadzenie pewnej pojemności (rys. 1.4.1). Jest to oczywiście pewne przybliżenie, bo pojemności te mają charakter pojemności rozłożonych wokół obwodu. Wpływ tych pojemności na przebiegi prądu i napięcia w zasadniczym obwodzie zależą od wartości prądów, które przez nie popłyną (te zależą od wartości pojemności oraz od szybkości zmian napięcia, bo dla pojemności $i = C\frac{du}{dt}$). Jeżeli prądy te są duże, w porównaniu z prądem głównego obwodu, to nie można ich pominąć. Jeżeli jednak będziemy mieli do czynienia z wolnozmiennymi przebiegami prądów i napięć, to często będzie można pominąć ich wpływ.
- Same przewody łączące poszczególne elementy obwodu mogą posiadać pewien opór. Jeżeli wartość tego oporu jest mała w porównaniu z oporami elementów głównych obwodu, to można będzie pominąć wpływ oporu przewodów.
- Przewody łączące wraz z elementami tworzą zamknięty obwód. Jeżeli przez powierzchnię tego obwodu przenika zmienny w czasie strumień Φ, to zgodnie z prawem indukcji elektromagnetycznej pojawi się w obwodzie dodatkowa siła elektromotoryczna indukcji, której wartość zależy od szybkości zmian tego strumienia. Jeżeli strumień ten wywołany jest przez własny prąd obwodu, to jego działanie będzie równoważne istnieniu w obwodzie dodatkowej indukcyjności. Jeżeli indukcyjność jest mała w porównaniu z indukcyjnościami elementów obwodu, to będzie można ją pominąć. Jeżeli jednak w obwodzie nie ma innych elementów o charakterze indukcyjności, to pominięcie jej może prowadzić do znacznej zmiany charakteru przebiegów prądów i napięć w obwodzie. Jeżeli strumień spowodowany jest przez zewnętrzne pole magnetyczne, to należy jego wpływ uwzględnić przez włącznie w szereg z obwodem dodatkowej siły elektromotorycznej o wartości $e_d = \frac{d\Phi}{dt}$. Wpływ ten można będzie pominąć, gdy wartość tej siły jest mała w porównaniu z napięciami na pozostałych elementach obwodu. Istotna jest tu nie sama wartość strumienia, co jego szybkość zmian. Przy wolnozmiennych zewnętrznych polach magnetycznych będzie można często pomijać ich wpływ.
- Niedostateczna izolacja przewodów i elementów może mieć w niektórych przypadkach wpływ na przebiegi prądów i napięć. Występuje to w szczególności przy wysokich napięciach. Wtedy prądy płynące przez izolację mogą mieć wartości porównywalne z prądami głównego obwodu.

Jeżeli wpływ elementów pasożytniczych nie może być pominięty, to należy wprowadzić do obwodu dodatkowe elementy w postaci oporów, indukcyjności i pojemności.

Realne elementy obwodu przedstawione na Rys. 1.2.1 mogą być zastąpione ich układami zastępczymi, składającymi się z idealnych elementów *R,L,C i M*. Układami zastępczymi realnych elementów zajmiemy się w rozdz. 5.5. W najprostszym przypadku będą to dla cewki - indukcyjność, dla kondensatora - pojemność, a dla opornika - opór.

Uwzględnienie wszystkich zjawisk fizycznych zachodzących w realnym obwodzie przez idealne elementy umożliwia utworzenie schematu zastępczego obwodu elektrycznego. Obliczone na podstawie tego schematu zastępczego przebiegi prądów i napięć będą zgodne z rzeczywiście zmierzonymi w realnym obwodzie, o ile uwzględniono w schemacie zastępczym te elementy pasożytnicze i schematy zastępcze realnych elementów obwodu, które mają istotny wpływ na przebiegi w obwodzie.

1.5. Prawa Kirchhoffa

1.5.1. I prawo Kirchhoffa dla obwodów prądu zmiennego

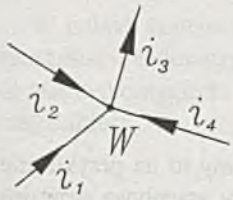
Rozważmy dowolny węzeł w obwodzie (W na Rys. 1.5.1). Podobnie jak w obwodach prądu stałego algebraiczna suma prądów dopływających do węzła w każdej chwili czasu musi być równa 0.

$$\boxed{\sum_{\bullet} i(t) = 0} \qquad (1.5.1)$$

W każdej chwili czasu *t* algebraiczna suma prądów dopływających do węzła musi być równa zero

Podobnie jak w teorii prądów stałych można to prawo uogólnić na dowolną wyodrębnioną część obwodu (odcięcie).

W każdej chwili *t* czasu algebraiczna suma prądów dopływających do wyodrębnionej części obwodu (odcięcie) musi być równa zero



Rys. 1.5.1

Pamiętając o przyjętej konwencji zapisu $i = i(t)$ można to prawo zapisać w skróconej postaci

$$\boxed{\sum_{\bullet} i = 0}$$

1.5.2. Napięcie w obwodach prądu zmiennego

Pojęcie napięcia w obwodach prądu zmiennego wymaga kilku wyjaśnień. W obwodach prądu stałego pole elektryczne jest polem potencjalnym

$$\oint K \cdot dl = 0,$$

w wyniku czego napięcie między dwoma punktami tego pola

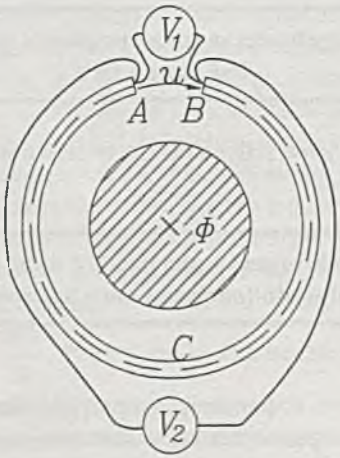
$$u = \int_A^B K \cdot dl$$

jest niezależne od drogi całkowania.

W polach zmiennych w czasie jednak

$$\oint K(t) \cdot dl = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} \qquad (1.5.2)$$

Tu całka okrężna wektora natężenia pola równa jest ujemnej wartości (prawoskrętne strzałkowanie) pochodnej strumienia magnetycznego przenikającego przez powierzchnię ograniczoną drogą całkowania. Stąd wynika, że napięcie między dwoma punktami A i



Rys. 1.5.2

B zależy od drogi, po której przeprowadzono całkowanie. Wyjaśnimy to na przykładzie rys. 1.5.2. Przedstawia on rdzeń (zakreskowany obszar), przez który przepływa strumień Φ. Wokół rdzenia istnieje przecięty pierścień. Między punkty A i B załączono dwa woltomierze V_1 i V_2 , oba mierzą wobec tego to samo napięcie u. Ich wskazania będą jednak różne. Zwróćmy uwagę na to, że wewnątrz pierścienia (zakładamy, że jest wykonany z idealnego przewodnika) natężenie pola $K(t)$=0, zatem $\int_{BCA} K(t) \cdot dl = 0$. Całka okrężna wzdłuż drogi AV_1BCA wyniesie:

$$\oint_{AV_1BCA} \mathrm{K}(t)dl = \underbrace{\int_{AV_1B} \mathrm{K}(t)dl}_{=u(t)} + \underbrace{\int_{BCA} \mathrm{K}(t)dl}_{=0} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

zatem woltomierz V_1 zmierzy

$$u(t) = -\frac{\partial \Phi}{\partial t},$$

natomiast całka okrężna wzdłuż drogi AV_2BCA wyniesie:

$$\oint_{AV_2BCA} \mathbf{K}(t)d\mathbf{l} = \underbrace{\int_{AV_2B} \mathbf{K}(t)d\mathbf{l}}_{=u(t)} + \underbrace{\int_{BCA} \mathbf{K}(t)d\mathbf{l}}_{=0} = 0,$$

bo przez powierzchnię ograniczoną drogą całkowania w tym przypadku nie przechodzi strumień $|\Phi|$. Woltomierz V_2 zmierzy zatem

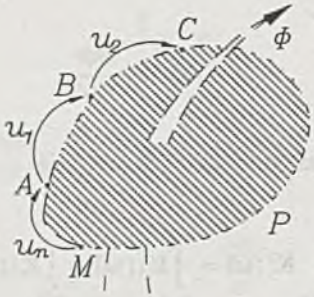
$$u(t) = 0$$

Przykład ten jasno wskazuje, że napięcie między dwoma punktami nie jest tak jednoznaczną wielkością jak w przypadku obwodów prądu stałego. Jeżeli jednak nie ma strumienia Φ lub prędkość zmiany strumienia w czasie $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ jest mała w porównaniu z napięciem mierzonym, to można pominąć zależność napięcia od drogi całkowania, co w dalszym ciągu będziemy zakładać.

1.5.3. II Prawo Kirchhoffa w obwodach prądu zmiennego

W polach zmiennych w czasie obowiązuje równanie (1.5.2). Jeżeli całkować będziemy wzdłuż zamkniętego obwodu, np. nieruchomego wobec ewentualnych zewnętrznych pól magnetycznych, to całkę okrężną wektora natężenia pola można przedstawić w postaci sumy napięć:

$$\oint K(t)dl = \underbrace{\int_A^B K(t)dl}_{=u_1} + \underbrace{\int_B^C K(t)dl}_{=u_2} + \ldots\ldots + \underbrace{\int_M^A K(t)dl}_{=u_n} + = \sum_o u(t) = \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$



Rys. 1.5.3

Suma ta równa jest ujemnej wartości pochodnej strumienia przenikającego przez powierzchnię ograniczoną drogą całkowania (rys.1.5.3). Jeżeli ta wartość jest mała w porównaniu z napięciami występującymi po lewej stronie równania, to można przyjąć, że prawa strona równania
jest równa zero. Alternatywnie można uwzględnić wpływ zmiany w czasie strumienia przez wprowadzenie po lewej stronie równania, a więc w szereg z elementami obwodu, siły elektromotorycznej o wartości $e_\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial t}$. Również wpływ ruchu obwodu względem zewnętrznych pól magnetycznych można uwzględnić przez wprowadzenie siły elektromotorycznej. Wtedy

$$\sum_o u(t) = 0$$

Drugie prawo Kirchhoffa można zatem przedstawić w postaci:

$$\boxed{\sum_o u = 0} \qquad (1.5.3)$$

W każdej chwili czasu *t*, w zamkniętym obwodzie, algebraiczna suma napięć jest równa zero.

Warunkami, przy których II prawo Kirchhoffa jest ważne, są zatem:

- Pomijalność wpływu zmian strumienia w czasie przenikającego obwód
- Pomijalność wpływu ruchu obwodu względem zewnętrznych pól magnetycznych.
- Ewentualne siły elektromotoryczne działające w obwodzie uwzględniane są przez napięcia na ich zaciskach.

Drugie prawo Kirchhoffa można również uogólnić na dowolną zamkniętą drogę w przestrzeni:

W każdej chwili czasu *t*, wzdłuż dowolnej zamkniętej drogi, algebraiczna suma napięć jest równa zero

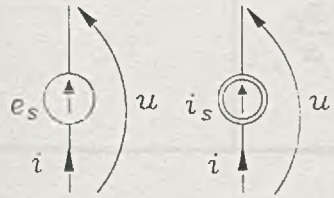
1.6. Podstawowe prawa obwodów prądu zmiennego

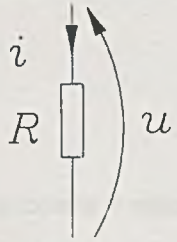
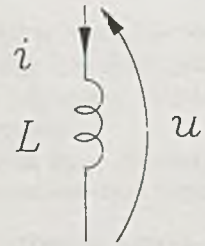
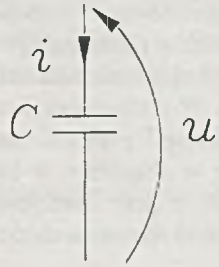
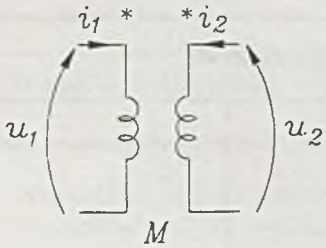
Przedstawimy obecnie podstawowe prawa obwodu prądu zmiennego w postaci czasowej. Są nimi:

- I Prawo Kirchhoffa $\boxed{\sum_{\bullet} i = 0}$

- II Prawo Kirchhoffa $\boxed{\sum_{o} u = 0}$

- Struktura obu praw Kirchhoffa dla obwodów prądu zmiennego oraz sposób układania równań są takie same jak struktura i sposób układania dla obwodów prądu stałego. Stąd wynika możliwość wykorzystania wprowadzonych w [1] metod układania niezależnych równań obu praw oraz związki macierzowe (rozdział 4 w [1]). W szczególności można napisać w-1 równań według I prawa Kirchhoffa oraz g-w+1 według II prawa Kirchhoffa (w obwodzie o g gałęziach oraz w węzłach). W takim razie w obwodzie, w którym mamy g niewiadomych prądów oraz g niewiadomych napięć, otrzymujemy $w-1+g-w+1=g$ niezależnych równań. Pozostałe g równań to równania elementów podane w poniższej tabeli.

Element	Równania opisujące element	
	$e_s = k_{ue} u_x$ $i_s = k_{ui} u_x$	$e_s = k_{ie} i_x$ $i_s = k_{ii} i_x$

Element	Równania opisujące element	
	$u = Ri$	$i = \frac{1}{R}u$
	$u = L\frac{di}{dt}$	$i = \frac{1}{L}\int_0^t u d\tau + i(0)$
	$u = \frac{1}{C}\int_0^t i d\tau + u(0)$	$i = C\frac{du}{dt}$
	$u_1 = L_1\frac{di_1}{dt} \pm M\frac{di_2}{dt}$ $u_2 = \pm M\frac{di_1}{dt} + L_2\frac{di_2}{dt}$	

W sumie mamy więc $2g$ równań o $2g$ niewiadomych prądach i napięciach. W odróżnieniu od obwodów prądu stałego, gdzie wszystkie równania były algebraiczne, tu mamy

do czynienia z układem równań, których część to równania algebraiczne a część równania różniczkowe i całkowe. Równania te można zawsze sprowadzić do układu równań różniczkowych, zatem obliczanie obwodów prądu zmiennego w dziedzinie czasu, a więc obliczanie przebiegów napięć i prądów, sprowadzać się będzie do rozwiązywania układów równań różniczkowych. Będą to, w przypadku obwodów liniowych, równania różniczkowe liniowe, zwyczajne o stałych współczynnikach. W następnym rozdziale przedstawimy przykład takiego postępowania.

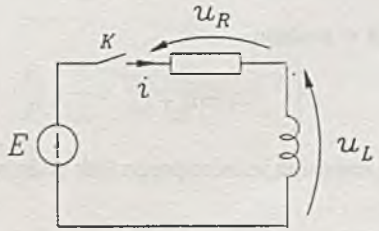
1.7. Klasyczna metoda

1.7.1. Przykład zastosowania metody klasycznej

Na rys 1.7.1 przedstawiono załączanie szeregowego obwodu składającego się z indukcyjności L oraz oporu R na stałą siłę elektromotoryczną E. Układ taki może być modelem dla załączania realnej cewki na napięcie stałe. Przed dokładną analizą układu postaramy się przedstawić fizykalną interpretację zjawisk zachodzących przy tym.

Przed zamknięciem klucza dla czasu $t<0$ prąd w cewce był równy zeru, zatem wokół cewki nie było żadnego pola magnetycznego (energia tego pola była równa zeru). W pierwszej chwili po zamknięciu klucza (dla $t=0_+$) cewka w myśl zasady Lenza nie pozwala na nagłą zmianę wartości prądu (energia pola magnetyczna cewki nie może się skokiem zmienić), zatem w tej chwili napięcie na oporze jest również zerowe, a z drugiego prawa Kirchhoffa wynika wtedy, że napięcie na indukcyjności musi być równe sile elektromotorycznej E. Stąd

$$u_L(0_+) = L\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0_+} = E \quad \text{skąd} \quad \left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0_+} = \frac{E}{L}$$



Rys. 1.7.1

Zatem prędkość narastania prądu w pierwszej chwili jest znaczna - prąd narasta od wartości zero. W następnych chwilach powstaje już napięcie na oporze - napięcie na cew-

ce zatem zmaleje. W chwili $t_1 : u_L(t_1) = L\left.\frac{di}{dt}\right|_{t_1} = E - u_R(t_1)$ zatem prędkość zmiany prądu będzie już mniejsza - prąd będzie już wolniej narastał. Po dostatecznie długim czasie (teoretycznie dla $t = \infty$) prędkość zmiany będzie praktycznie równa zeru. Wtedy napięcie na indukcyjności będzie równe zeru, napięcie na oporze będzie równe sile elektromotorycznej, a prąd będzie równy $i(\infty) = \frac{E}{R}$. Będzie to tzw. stan ustalony. Taki sposób rozumowania, pozwalający na jakościowe określenie przebiegów prądu i napięć w obwodzie, możliwy jest i w bardziej złożonych obwodach.

Rozpatrzymy teraz klasyczny sposób rozwiązania tego problemu. Przedstawimy to w kilku punktach:

1. **Równania obwodu**

Dla powyższego obwodu można napisać następujący zestaw równań:

II prawo Kirchhoffa: $u_L + u_R = E$

Równania elementów $u_R = Ri$

$$u_L = L\frac{di}{dt}$$

2. **Sprowadzenie do jednego równania różniczkowego:**

Podstawiając równania elementów do równania II prawa Kirchhoffa otrzymamy jedno równanie różniczkowe zwyczajne, niejednorodne o stałych współczynnikach:

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E$$

3. **Rozwiązanie równania różniczkowego**

Poszukujemy rozwiązania w postaci:

$$i = i_u + i_z,$$

gdzie i_z jest całką ogólną równania jednorodnego (jak później pokażemy jest to tzw. prąd zaburzeniowy):

$$L\frac{di}{dt} + Ri = 0$$

a i_u jest całką szczególną równania różniczkowego (będzie to tzw. prąd ustalony) .

4. **Rozwiązanie równania różniczkowego jednorodnego**

Dla równań różniczkowych zwyczajnych o stałych współczynnikach:

$$i_z = Ae^{-\frac{R}{L}t},$$

gdzie A jest stałą całkowania, którą wyznaczymy dalej a $-\frac{R}{L}$ jest pierwiastkiem tzw. równania charakterystycznego.

5. **Całka szczególna równania niejednorodnego**

Zależy ona od funkcji znajdującej się po prawej stronie równania niejednorodnego. W tym przypadku, jak łatwo sprawdzić, jest nią

$$i_u = \frac{E}{R}$$

6. **Rozwiązanie równania różniczkowego**

$$i = i_u + i_z = \frac{E}{R} + Ae^{-\frac{R}{L}t}$$

7. **Wyznaczenie stałej całkowania A**

Dla wyznaczenia stałej całkowania konieczna jest znajomość wartości prądu w chwili t=0. Z rozważań fizycznych wynika, że $i(0)$=0, zatem

$$0 = \frac{E}{R} + A, \quad \text{skąd} \qquad A = -\frac{E}{R}$$

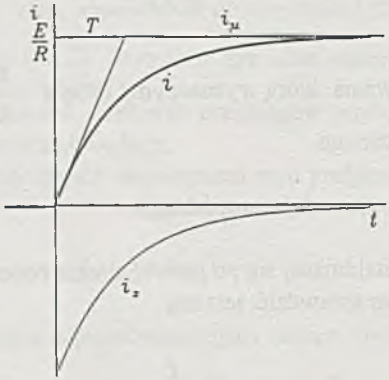
8. **Rozwiązanie**

$$i = \frac{E}{R} - \frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right).$$

9. **Dyskusja wyników**

Przebieg prądu przedstawiono na rys. 1.7.2. Jak widać, prąd posiada dwie składowe. Pierwsza to tzw. prąd ustalony i_u. Ma on stałą wartość $i_u = \frac{E}{R}$. Druga składowa, prąd zaburzeniowy $i_z = -\frac{E}{R}e^{-\frac{t}{T}}$, zanika z upływem czasu do zera. Całkowity prąd i narasta

mono tonicznie od zera do swej wartości ustalonej i_u. Prędkość narastania prądu zależy od tzw.. *stałej czasowej* obwodu $T = \frac{L}{R}$. Im większa stała czasowa obwodu, tym wolniej narasta prąd.



Rys. 1.7.2

1.7.2. Uogólnienia

Przedstawiony powyżej na przykładzie sposób może być uogólniony. W złożonym obwodzie w równaniach obwodu (1) mogą również wystąpić równania całkowe (np. zależność napięcia na kondensatorze od prądu). Przez różniczkowanie łatwo zamienić je na równania różniczkowe. W związku z tym przy sprowadzeniu układu równań (2) do jednego równania różniczkowego otrzymamy dla wybranej wielkości równanie różniczkowe zwyczajne o stałych współczynnikach wyższego rzędu (na ogół rząd równania n jest równy sumie liczby indukcyjności i pojemności*)). Również i takie równanie posiada rozwiązanie w postaci sumy dwóch całek (3). W całce równania jednorodnego (4) wystąpi suma n członów typu $A_i e^{x_i t}$, gdzie A_i - to stałe całkowania, a x_i to pierwiastki równania charakterystycznego równania różniczkowego. Całka szczególna równania niejednorodnego (5) zależy od funkcji występujących po prawej stronie równania. Wyznaczenie stałych całkowania (7) wymaga znajomości wartości funkcji i jej pochodnych w chwili t=0.

Sprowadzanie układu równań różniczkowych do jednego równania (2) jest procedurą dosyć uciążliwą. To samo dotyczy wyznaczania stałych całkowania (7). W praktycznym obliczaniu obwodów liniowych prostsze będzie zastosowanie przekształcenia Laplace'a, powoduje ono bowiem algebraizację wszystkich równań oraz nie wymaga specjalnej procedury wyznaczania stałych całkowania. W dalszym ciągu do analizy liniowych obwodów posługiwać się będziemy tym przekształceniem stosowanym w tzw. *rachunku operatorowym*.

---

*) Sprawa rzędu równania opisującego układ rozpatrzona będzie w drugiej części podręcznika.

Rozdział 2

STAN NIEUSTALONY W OBWODACH PRĄDU ZMIENNEGO

2.1. Podstawy rachunku operatorowego

2.1.1. Podstawowe własności transformacji Laplace'a

Rachunek operatorowy stosowany w analizie obwodów elektrycznych opiera się na tzw. przekształceniu (transformacji) *Laplace'a* :

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \qquad (2.1.1)$$

Polega ono na przyporządkowaniu funkcji $F(s)$ zmiennej zespolonej s funkcji czasu $f(t)$, co oznaczać będziemy:

$$F(s) \triangleq f(t)$$

W dalszym ciągu będziemy zakładać, że dla funkcji $f(t)$ spełnione są warunki istnienia przekształcenia Laplace'a [2].

Przyjmiemy następującą konwencję dotyczącą oznaczeń funkcji czasowych i operatorowych:

funkcje czasowe oznaczamy małymi literami $f(t)$
funkcje operatorowe oznaczamy dużymi literami $F(s)$

(Należy zwrócić uwagę na to, że np. $f(0)$ oznacza zupełnie coś innego niż $F(0)$!!)

Jeżeli znana jest funkcja operatorowa $F(s)$, to odpowiadającą jej funkcję czasową można uzyskać przez odwrotne przekształcenie Laplace'a:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} ds \qquad (2.1.2)$$

W prostszych przypadkach, w szczególności wtedy, gdy funkcja $F(s)$ jest funkcją wymierną, można będzie ominąć stosowanie powyższego wzoru przy przekształceniu odwrotnym (patrz rozdział 2.2.4.3).

Podamy kilka najważniejszych własności przekształcenia Laplace'a:

1. Twierdzenie o pomnożeniu przez wartość stałą

$$af(t) \doteq aF(s) \qquad (2.1.3)$$

Pomnożeniu funkcji czasu przez wartość stałą odpowiada pomnożeniu funkcji operatorowej przez tą samą wartość.

2. Twierdzenie o liniowości przekształcenia

$$af_1(t) + bf_2(t) \doteq aF_1(s) + bF_2(s) \qquad (2.1.4)$$

Sumie funkcji czasowych odpowiada suma funkcji operatorowych.

3. Twierdzenie o różniczkowaniu

$$f'(t) \doteq sF(s) - f(0) \qquad (2.1.5)$$

pochodnej funkcji czasu odpowiada pomnożenie funkcji operatorowej przez s oraz odjęcie wartości funkcji czasowej w chwili t=0 (rys. 2.1.1).

Rys. 2.1.1

4. Twierdzenie o całkowaniu

$$\int_0^t f(t)d\tau \doteq \frac{1}{s}F(s) \qquad (2.1.6)$$

Całce oznaczonej z funkcji czasu odpowiada podzielenie funkcji operatorowej przez s.

Te trzy twierdzenia wystarczą na początku dla wprowadzenia metody operatorowej do analizy obwodów elektrycznych. W dodatku A umieszczono kilka dalszych użytecznych twierdzeń dotyczących metody operatorowej.

2.1.2. Transformaty niektórych prostych funkcji

Przedstawimy obecnie kilka najprostszych transformat.

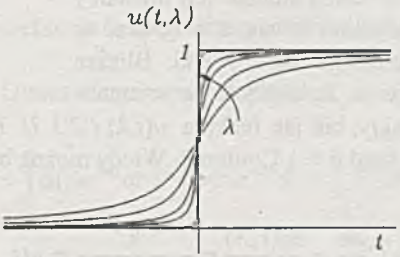
1. Funkcja jednostkowa (funkcja Heaviside'a)

W zastosowaniach praktycznych często występują funkcje, zmieniające się w bardzo krótkim czasie od wartości zero do ustalonej wartości. Za ustaloną wartość można przyjąć wartość 1. Na rys 2.1.2 przedstawiony jest przykład ciągu funkcji, zależnych od parametru λ

$$u(t,\lambda) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\lambda t \qquad (2.1.7)$$

W miarę zwiększania się λ rośnie prędkość narastania funkcji. W granicznym przypadku, gdy $\lambda \to \infty$, otrzymamy tzw. funkcję jednostkową albo funkcję Heaviside'a

$$I(t) = \lim_{\lambda\to\infty} u(t,\lambda) \qquad (2.1.8)$$



Rys. 2.1.2

Formalnie funkcję jednostkową można też określić jako:

$$I(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 0.5 & t = 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \qquad (2.1.9)$$

Dla tak określonej funkcji można łatwo obliczyć transformatę Laplace'a

$$I(t) \doteq \int_0^\infty I(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{-st}dt = -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^\infty = \frac{1}{s},$$

czyli

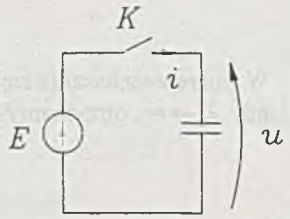
$$I(t) \doteq \frac{1}{s} \qquad (2.1.10)$$

Warto zwrócić uwagę na to, że mimo tego, że funkcja I(t) jest nieciągła w miejscu t=0, transformata jej może być obliczona bez trudności.

Funkcję jednostkową można zatem uważać za graniczny przypadek funkcji szybko zmieniających się od wartości zero do jedności.

2. Funkcja Diraca

W celu uzasadnienia wprowadzenia funkcji Diraca rozpatrzymy przykład załączania idealnej pojemności na idealne źródło napięciowe (rys. 2.1.3). Załóżmy, że na pojemności nie było żadnego ładunku, zatem przed zamknięciem klucza K napięcie na pojemności było równe zero. W chwili t=0 zamyka się klucz K, zatem teraz napięcie na pojemności powinno być równe sile elektromotorycznej E, ale to znaczyłoby, że teraz ładunek na pojemności powinien być równy q=CE. Ładunek ten musiałby dopłynąć w nieskończenie krótkim czasie, a więc prąd w chwili t=0 musiałby być nieskończenie wielki. Bliższe rzeczywistości byłoby założenie, że napięcie na pojemności zmienia się w sposób ciągły, tak jak funkcja $u(t,\lambda)$ *(2.1.7)*. Przyjmijmy dla uproszczenia C = 1 Farad oraz E =1 Volt skąd q = 1 Coulomb. Wtedy można by obliczyć prąd dopływający do pojemności jako:

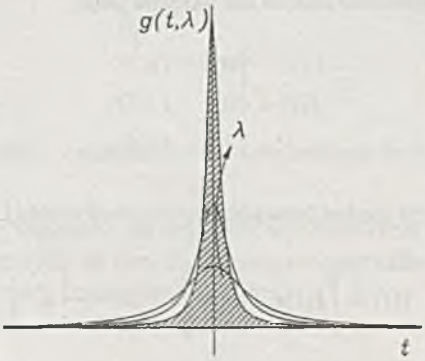


Rys. 2.1.3

$$i = C\frac{du}{dt} = \frac{du(t,\lambda)}{dt} = \frac{\lambda}{\pi(\lambda^2 t^2 + 1)} = g(t,\lambda)$$

Przebieg tej funkcji w zależności od parametru λ przedstawiony jest na rys. 2.1.4

W miarę wzrostu parametru λ czyli prąd i ładujący pojemność) przybierają w chwili t=0



Rys. 2.1.4

coraz to większe wartości (w granicy przy $\lambda \to \infty$ $g(0,\lambda) \to \infty$). Funkcje stają się przy tym coraz bardziej „smukłe". Równocześnie dla wszystkich funkcji, niezależnie od parametru λ, $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t,\lambda) = 1$, całka ta jest w rozpatrywanym przykładzie równa ładunkowi (q = 1 C), który dopłynął do pojemności. Taki opis zjawisk byłby zgodny z naszym wyobrażeniem o przebiegu zjawiska ładowania pojemności *). W granicznym przypadku, gdy $\lambda \to \infty$

$$\lim_{\lambda \to +\infty} g(t,\lambda) = \delta(t) \qquad (2.1.11)$$

Funkcja ta nosi nazwę funkcji Diraca. Formalnie można by zdefiniować tę funkcję w następujący sposób:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ \infty & \text{dla } t = 0 \\ 0 & \text{dla } t > 0 \end{cases} \qquad \text{oraz} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1 \qquad (2.1.12)$$

Ścisła matematycznie definicja funkcji Diraca możliwa jest na bazie tzw. teorii dystrybucji [2].

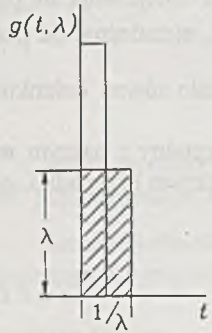
Transformatę funkcji Diraca otrzymamy z definicji:

$$\Delta(s) = \int_0^{\infty} \delta(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$

Ponieważ funkcja podcałkowa jest równa zero w przedziale $-\infty < t < 0$, można całkę w granicach $\int_0^{\infty}$ zastąpić całką w granicach $\int_{-\infty}^{+\infty}$. Funkcja podcałkowa jest różna od zera tylko w okolicach t=0, zaś w tych okolicach e^{-st}=1. Pozostaje więc do obliczenia tylko ostatnia całka, a ta z definicji funkcji Diraca jest równa 1. Zatem

$$\Delta(s) = 1 \doteq \delta(t) \qquad (2.1.13)$$

*) W następnych rozdziałach wykażemy, że w rzeczywistości należy uwzględnić w schemacie również pewne elementy pasożytnicze jak opór i indukcyjność.



Rys. 2.1.5

Można przedstawić również inne ciągi funkcji, dla których granicą będzie funkcja Diraca. Na rys 2.1.5 przedstawiono ciąg funkcji w postaci impulsów prostokątnych o zwiększającej się wysokości λ, a równocześnie zmniejszającym się czasie trwania impulsu $\frac{1}{\lambda}$ tak, że stała jest powierzchnia impulsu równa 1. Również i w tym przypadku w miarę wzrostu parametru λ, dochodzimy do impulsu coraz to wyższego, a równocześnie coraz to krótszego, zachowującego jednak swą powierzchnię równą jeden.

Funkcję Diraca można zatem uważać za graniczny przypadek funkcji impulsowej o bardzo krótkim czasie trwania i bardzo dużej wartości w chwili $t = 0$.

3. Funkcja wykładnicza

Dla funkcji wykładniczej otrzymamy jej transformatę jako

$$e^{-\alpha t} \doteq \frac{1}{s+\alpha} \qquad (2.1.14)$$

4. Funkcja wykładniczo-narastająca

Dla tej funkcji otrzymamy następującą transformatę:

$$1-e^{-\frac{t}{T}} \doteq \frac{1}{s(1+sT)} \qquad (2.1.14)$$

W dodatku A umieszczono podstawowy zbiór transformat Laplace'a. W literaturze istnieją całe „słowniki" transformat Laplace'a. Obszerny zbiór transformat można znaleźć w [2].

2.1.3. Celowość stosowania rachunku operatorowego

Zastosowanie rachunku operatorowego do analizy obwodów elektrycznych polega na przedstawieniu wszystkich praw obwodu (równań Kirchhoffa i równań elementów) w postaci operatorowej. Będą to już wyłącznie równania algebraiczne. Zamiast układania równań w postaci czasowej, będzie można układać odpowiednie równania operatorowe. Otrzymamy w ten sposób układ algebraicznych równań, który można rozwiązać znacznie łatwiej niż układy równań różniczkowo-całkowych klasycznej metody analizy. Ponadto okaże się, że z formalnego punktu widzenia układy równań operatorowych opisujących obwody prądu zmiennego mają identyczną strukturę jak układy równań opisujących obwody prądu stałego. Z tego wynika możliwość przejęcia wielu metod i twierdzeń stosowanych w analizie obwodów prądu

stałego do analizy obwodów prądu zmiennego.

Przedstawimy obecnie operatorowe postaci praw Kirchhoffa i równań elementów.

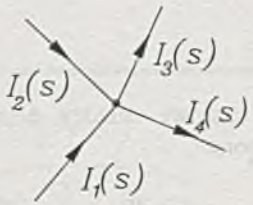
2.1.4. Operatorowa postać praw Kirchhoffa

2.1.4.1. Pierwsze prawo Kirchhoffa w postaci operatorowej

Pierwsze prawo Kirchhoffa w postaci czasowej

$$\sum_{\bullet} i(t) = 0$$

przedstawia sobą sumę funkcji czasowych. Zgodnie z twierdzeniem o liniowości przekształcenia Laplace'a otrzymamy:



Rys. 2.1.6

$$\boxed{\sum_{\bullet} I(s) = 0} \qquad (2.1.16)$$

Algebraiczna suma transformat natężeń prądu w węźle (lub odcięciu) jest równa zero

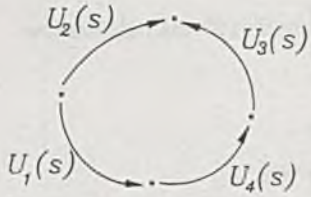
Zasady strzałkowania prądów są identyczne jak w przypadku prądów stałych.

2.1.4.2. Drugie prawo Kirchhoffa w postaci operatorowej

Drugie prawo Kirchhoffa w postaci czasowej

$$\sum_{o} u(t) = 0$$

będzie miało w postaci operatorowej następującą postać:



Rys. 2.1.7

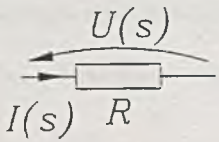
$$\boxed{\sum_o U(s) = 0} \qquad (2.1.17)$$

Algebraiczna suma transformat napięć wzdłuż dowolnej zamkniętej drogi jest równa zero.

Również i tu zasady strzałkowania napięć są takie same jak w przypadku obwodów prądu stałego.

2.1.5. Operatorowa postać równań elementów

2.1.5.1. Opór



$$U(s) = RI(s)$$

$$I(s) = \frac{1}{R}U(s) \qquad (2.1.18)$$

Związki czasowe między napięciem i prądem dla oporu:

$$u = Ri$$

$$i = \frac{1}{R}u$$

Po transformacji tych równań otrzymamy operatorową postać. Tej zależności między transformatami napięcia i prądu przyporządkujemy symbol graficzny schematu wraz z odpowiednio zastrzałkowanymi napięciem i prądem.

2.1.5.2. Indukcyjność

Związki czasowe między napięciem i prądem (rozdz. 1.3.3):

$$u = L\frac{di}{dt}$$

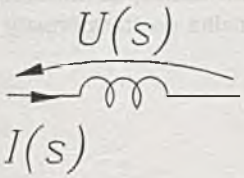
$$i = \frac{1}{L}\int_0^t u\,d\tau + i(0)$$

Po transformacji Laplace'a, uwzględniając twierdzenia o pochodnej i całce funkcji czasowej otrzymamy:

$$U(s) = sLI(s) - Li(0)$$
$$I(s) = \frac{1}{sL}U(s) + \frac{i(0)}{s} \qquad (2.1.19)$$

Występująca w tych równaniach wartość *i(0)* jest to wartość prądu (funkcji czasowej prądu) w chwili $t = 0$. Jest to tzw. warunek początkowy. Jak widać, są to równania algebraiczne ze względu na *I(s)* oraz *U(s)*. Jeżeli w chwili $t = 0$ prąd w cewce *i(0)* jest równy zero, co jest równoważne stwierdzeniu, że w połu magnetycznym cewki nie była zmagazynowana żadna energia, to zależności powyższe uproszczą się. Transformata napięcia równa jest transformacie prądu pomnożonej przez czynnik sL , zaś transformata prądu równa jest transformacie napięcia podzielonej przez ten sam czynnik. Można też powiedzieć, że transformata napięcia jest proporcjonalna do transformaty prądu, przy czym współczynnik proporcjonalności równy jest sL. Ostatecznie można to uogólniając zapisać w postaci:

$$U(s) = Z(s)I(s)$$
$$I(s) = Y(s)U(s)$$



$$U(s) = sLI(s)$$
$$I(s) = \frac{1}{sL}U(s) \qquad (2.1.20)$$

gdzie

$$Z(s) = sL$$
$$Y(s) = \frac{1}{sL}$$

Wielkość $Z(s)$ nazwiemy *impedancją operatorową*, a $Y(s)$ *admitancją operatorową* cewki. Należy tu zwrócić już uwagę na podobieństwo między znaczeniem impedancji w związku z prądem i napięciem a znaczeniem oporu R w prawie Ohma.

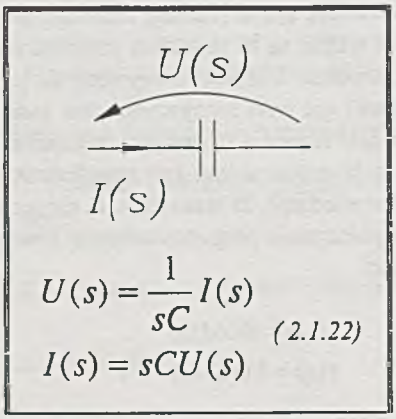
2.1.5.3. Pojemność

Czasowe związki między napięciem i prądem mają postać (rozdz. 1.3.4):

$$u = \frac{1}{C}\int_0^t i\,d\tau + u(0)$$
$$i = C\frac{du}{dt}$$

Po przekształceniu Laplace'a otrzymamy:

$$U(s) = \frac{1}{sC} I(s) + \frac{u(0)}{s} \qquad (2.1.21)$$
$$I(s) = sCU(s) - Cu(0)$$



Występująca w tych równaniach wartość $u(0)$, jest to wartość napięcia (funkcji czasowej napięcia) w chwili $t = 0$. Jest to tzw. warunek początkowy. Jak widać, są to równania algebraiczne ze względu na $I(s)$ oraz $U(s)$. Jeżeli w chwili $t = 0$ napięcie na pojemności $u(0)$ jest równe zero, co jest równoważne stwierdzeniu, że w polu elektrycznym pojemności nie jest zgromadzona żadna energia, to zależności te uproszczą się. Transformata napięcia równa jest transformacie prądu pomnożonej przez czynnik $\frac{1}{sC}$, zaś transformata prądu równa jest transformacie napięcia podzielonej przez ten sam czynnik. Można też powiedzieć, że transformata napięcia jest proporcjonalna do transformaty prądu, przy czym współczynnik proporcjonalności równy jest $\frac{1}{sC}$.

Ostatecznie można to, uogólniając, zapisać w postaci:

$$Z(s) = \frac{1}{sC}$$
$$Y(s) = sC$$

Jest to tzw. *impedancja operatorowa* lub *admitancja operatorowa* pojemności.

2.1.5.4. Indukcyjność wzajemna

Dla dwóch cewek sprzężonych ze sobą magnetycznie związki czasowe między napięciami i prądami mają postać (rozdz. 1.3.5):

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt}$$
$$u_2 = \pm M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}$$

Po przekształceniu tych równań otrzymamy:

$$U_1(s) = sL_1 I_1(s) \pm sMI_2(s) - L_1 i_1(0) \mp Mi_2(0) \qquad (2.1.23)$$
$$U_2(s) = \pm sMI_1(s) + sL_2 I_2(s) \mp Mi_1(0) - L_2 i_2(0)$$

Również i tu wartości $i_1(0)$ i $i_2(0)$ są to wartości prądów w chwili $t = 0$. Określają one energię pola magnetycznego obu cewek . Jeżeli w chwili $t = 0$ prądy te były równe zero (energia pola magnetycznego zespołu cewek była równa zero), to równania powyższe upraszczają się i przybierają postać przedstawioną równaniem (2.1.24).

Zależność tę można przedstawić w równoważnej postaci macierzowej

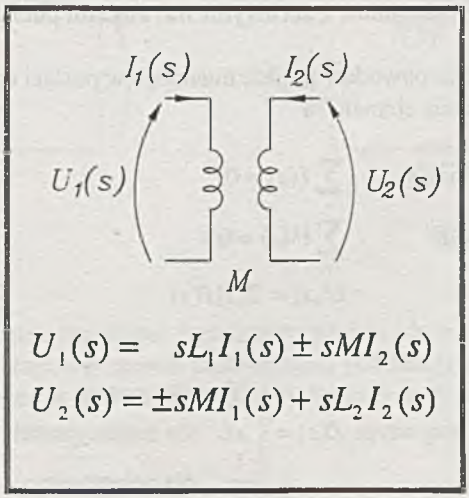
$$\begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sL_1 & \pm sM \\ \pm sM & sL_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} \qquad (2.1.24)$$

albo

$$\boxed{U(s) = Z(s)I(s)} \qquad (2.1.25)$$

gdzie

$$Z(s) = \begin{bmatrix} sL_1 & \pm sM \\ \pm sM & sL_2 \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} L_1 & \pm M \\ \pm M & L_2 \end{bmatrix} = sL$$



W macierzowej postaci można zatem również wprowadzić pojęcie impedancji (w tym przypadku jednak impedancja jest macierzą).

Jak wynika z powyższych rozważań, dla wszystkich elementów obwodu, w przypadku zerowych warunków początkowych, można przedstawić transformatę napięcia jako iloczyn impedancji i transformaty prądu, a więc w postaci (2.1.25). Należy zwrócić uwagę na to, że w postaci operatorowej zależność ta jest algebraiczna w odróżnieniu od czasowych związków między prądem i napięciem, które mają charakter równań różniczkowych lub całkowych. Jak się okaże, prowadzi to do znacznych ułatwień przy układaniu i rozwiązywaniu równań obwodów.

2.2. Obwody z zerowymi warunkami początkowymi

Rozpatrzymy najpierw tzw. obwody z zerowymi warunkami początkowymi, to znaczy, że w chwili $t = 0$ wszystkie prądy w cewkach i napięcia na kondensatorach są równe zero. Ponieważ energia pola magnetycznego cewki zależy od prądu $W_L = \frac{Li^2}{2}$, względnie $W_L = \frac{L_1 i^2}{2} \pm M i_1 i_2 + \frac{L_2 i^2}{2}$ dla dwóch cewek sprzężonych magnetycznie, a $W_C = \frac{Cu^2}{2}$ dla kondensatora, wynika stąd, że są to obwody w których w chwili $t = 0$ nie jest zmagazynowana żadna energia w polach magnetycznych cewek i w polach elektrycznych kondensatorów.

Powodem, dla którego rozpatrujemy najpierw obwody z zerowymi warunkami początkowymi jest to, że równania takich obwodów są znacznie prostsze a tym samym prostsze jest układanie równań i ich rozwiązywanie. Poza tym pokażemy dalej, że każdy obwód z niezerowymi warunkami początkowymi będzie można sprowadzić do równoważnego obwodu z zerowymi warunkami początkowymi.

2.2.1. Podstawowe prawa obwodów z zerowymi warunkami pocz ątkowymi

Podstawowymi prawami obwodów prądu zmiennego w postaci operatorowej będą równania Kirchhoffa, oraz równania elementów

Pierwsze prawo Kirchhoffa $\sum_{\bullet} I(s) = 0$

Drugie prawo Kirchhoffa $\sum_{o} U(s) = 0$

Równania elementów $U(s) = Z(s)I(s)$

$$\text{przy czym } Z(s) = \begin{cases} R & \text{dla oporów} \\ sL & \text{dla indukcyjności} \\ \frac{1}{sC} & \text{dla pojemności} \end{cases}$$

Zwróćmy uwagę na to, że ten układ równań jest izomorficzny z układem równań opisującym obwody prądu stałego, jeżeli zastąpimy

$$I \Leftrightarrow I(s)$$
$$U \Leftrightarrow U(s)$$
$$R \Leftrightarrow Z(s)$$

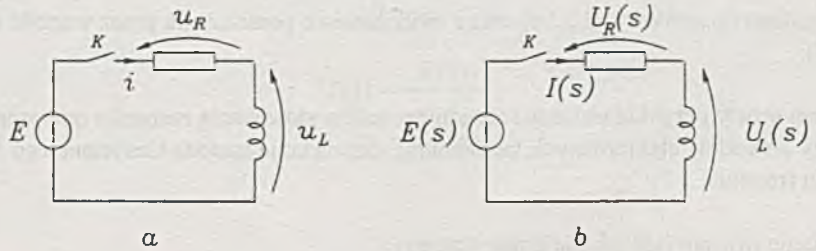
Dalsze wnioski z izomorficzności układu równań operatorowych opisujących obwody prądu zmiennego z układem równań opisującym obwody prądu stałego przedstawimy w rozdziale 2.2.3.

2.2.2. Proste obwody

Przedstawimy najpierw kilka prostych przykładów w celu pokazania sposobu rozwiązywania obwodów metodą operatorową.

2.2.2.1. Obwód RL

Na rys. 2.2.1 a przedstawiono ponownie przypadek załączania cewki przez opór na źródło



Rys. 2.2.1

napięcia stałego. Przypadek ten został rozwiązany metodą klasyczną w rozdziale 1.7. Przy stosowaniu metody operatorowej sposób postępowania jest następujący. Najpierw można narysować operatorowy schemat obwodu (rys. 2.2.1b). Na jego podstawie można już napisać :

1. Równania operatorowe obwodu

Równanie II prawa Kirchhoffa $\quad U_L(s) + U_R(s) = E(s)$

Równania elementów $\quad U_L(s) = sLI(s)$

$U_R(s) = RI(s)$

2. Rozwiązanie układu równań obwodu

Po podstawieniu równań elementów do równania II prawa Kirchhoffa otrzymamy:

$$sLI(s) + RI(s) = E(s),$$

skąd

$$I(s) = \frac{E(s)}{R + sL} \quad \leftarrow \text{ suma impedancji}$$

Ponieważ $E(s) = \frac{E}{s}$, to po prostych przekształceniach otrzymamy:

$$I(s) = \frac{E}{s(R + sL)} = \frac{E}{R}\frac{1}{s(1 + \frac{L}{R}s)} = \frac{E}{R}\frac{1}{s(1 + sT)}$$

Zwróćmy uwagę na to, że jest to rozwiązywanie układu równań algebraicznych względem transformat prądów i napięć. Ponadto, jak łatwo zauważyć, transformata prądu równa jest transformacie siły elektromotorycznej podzielonej przez sumę impedancji elementów tak samo, jakby to było w przypadku obwodu prądu stałego składającego się z szeregowego połączenia dwóch oporów i siły elektromotorycznej.

3. Przejście na postać czasową

Powyższej transformacie prądu odpowiada czasowa postać:

$$i = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{t}{T}})$$

Skorzystano tu ze wzoru (2.1.16) oraz z twierdzenia o pomnożeniu przez wartość stałą (2.1.4).

Już ten prosty przykład pokazuje zasadnicze zalety stosowania rachunku operatorowego do analizy obwodów elektrycznych, porównując rozwiązanie metodą klasyczną tego samego przykładu (rozdział 1.7):

1. Układanie równań (tak jak dla prądu stałego)
2. Rozwiązywanie równań (rozwiązywanie układu równań algebraicznych)
3. Warunki początkowe (są uwzględniane automatycznie)
4. Nie istnieje konieczność znajomości całek szczególnych równań różniczkowych.
   Pozostałe zalety rachunku operatorowego poznamy później.

2.2.2.2. Obwód RC

Na rys. 2.2.2a przedstawiono obwód składający się z oporu R i kondensatora C, załączany w chwili $t = 0$ na stałą siłę elektromotoryczną E. Do oporu R włączono ewentualne opory doprowadzeń i opór wewnętrzny źródła. Rozpatrzmy najpierw opisowo przebiegi prądu i napięcia na kondensatorze. Zakładamy, że na kodensatorze przed załączeniem klucza K nie było żadnego ładunku, zatem napięcie w chwili $t = 0$, $u_C(0)$ było równe zero (zerowe warunki

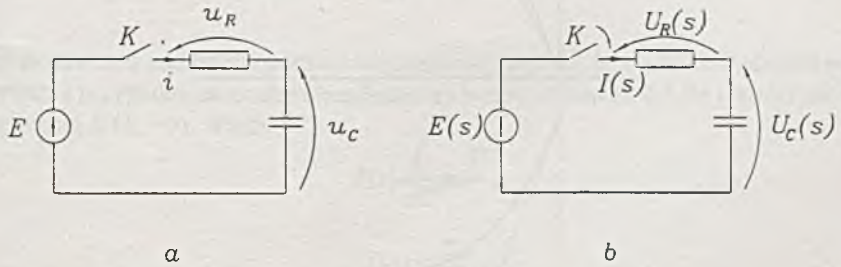
początkowe), prąd był także równy zero. Bezpośrednio po załączniu klucza, w chwili $t = 0_+$, napięcie na kondensatorze $u_C(0_+)$ też musi być równe zero. Aby napięcie na kondensatorze uległo zmianie, musiałby na nim pojawić się ładunek, a to wymaga, by prąd płynął przez jakiś czas (wykluczając tu nieskończenie wielkie natężenia prądu, które mogłyby naładować kondensator w nieskończenie krótkim czasie); napięcie na kondensatorze będzie zatem ciągłą funkcją czasu. W tejże chwili, jak wynika z II prawa Kirchhoffa, napięcie na oporze musi być równe sile elektromotorycznej $u_R(0_+) = E$, a stąd prąd musi przyjąć wartość $i(0_+) = \frac{E}{R}$. W chwili załączenia zatem prąd skacze od wartości 0 do tej wartości. Pod wpływem tej stosunkowo dużej wartości prądu kondensator zaczyna się szybko ładować (ponieważ prąd kondensatora $i(t) = C\frac{du_C(t)}{dt}$, prędkość narastania napięcia $\frac{du_C(t)}{dt} = \frac{i(t)}{C}$ jest proporcjonalna do wartości prądu). W miarę wzrostu prądu pojawia się napięcie na kondensatorze, które zmniejsza napięcie na oporze, a tym samym prąd, co prowadzi do zmniejszenia prędkości narastania napięcia na kondensatorze itd. Ostatecznie proces ładowania kondensatora zakończy się (teoretycznie po nieskończenie długim czasie), gdy prąd zaniknie, wtedy $u_R(\infty) = 0$, skąd $u_C(\infty) = E$. Dochodzimy zatem do wniosku, że prąd w chwili $t = 0$ skacze od wartości zero do E/R, po czym monotonicznie maleje do zera. Napięcie na kondensatorze wzrasta monotonicznie od zera do ustalonej wartości E, przy czym prędkość narastania napięcia maleje z upływem czasu. Taka analiza pozwala na jakościowe określenie przebiegów prądu i napięcia.

W celu uzyskania dokładnych przebiegów zastosujemy rachunek operatorowy. Z rys. 2.2.2b otrzymamy na podstawie II prawa Kirchhoffa

$$RI(s) + \frac{1}{sC}I(s) = E(s),$$

skąd

$$I(s) = \frac{E(s)}{R + \frac{1}{sC}}$$



Rys. 2.2.2

Ponieważ $E(s) = E/s$, to

$$I(s) = \frac{E}{s\left(R + \frac{1}{sC}\right)} = \frac{E}{R}\frac{1}{s + \frac{1}{RC}} = \frac{E}{R}\frac{1}{s + \frac{1}{T}},$$

a z (2.1.15) otrzymamy:

$$i = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{T}}$$

Obliczenie przebiegu napięcia na kondensatorze może być przeprowadzone dwoma sposobami:

1. Ponieważ znany jest już czasowy przebieg prądu napięcie na kondensatorze, można obliczyć czasowo jako

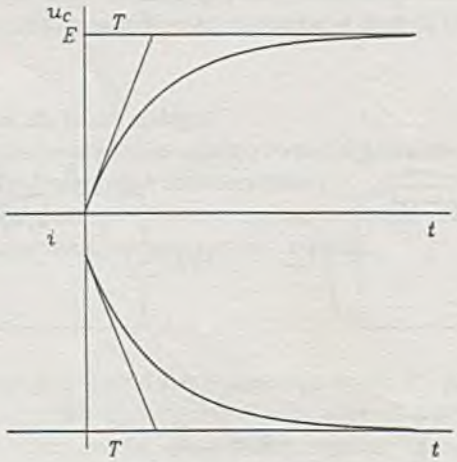
$$u_C = \frac{1}{C}\int_0^t i dt + u_C(0) = E(1 - e^{-\frac{t}{T}}) \quad (\text{tu } u_C(0) = 0).$$

2. Stosując rachunek operatorowy obliczymy:

$$U(s) = \frac{1}{sC} I(s) = \frac{1}{sC}\frac{E}{s(R + \frac{1}{sC})} \hat{=} E(1 - e^{-\frac{t}{T}})$$

Na rys. 2.2.3 przedstawiono przebiegi napięcia na kondensatorze u_C oraz prądu i. Zgodnie z przeprowadzoną uprzednio analizą jakościową:

- Prąd w chwili $t = 0$ skacze z wartości 0 do wartości E/R, a potem wykładniczo opada do



Rys. 2.2.3

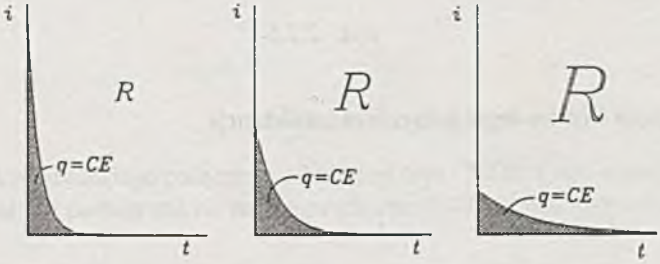
wartości zero. Prędkość opadania zależy od tzw. stałej czasowej obwodu $T = RC$. Im mniejsza stała czasowa obwodu, tym szybsze opadanie.

- Napięcie na kondensatorze w sposób ciągły wzrasta od wartości zero do ustalonej wartości E. Tu także prędkość narastania napięcia zależy od stałej czasowej T.
- Po upływie czasu równego stałej czasowej napięcie na kondensatorze osiąga wartość $u_C(T) = E(1 - e^{-\frac{T}{T}}) = 0.632E$, a więc 63.2% wartości ustalonej.

Przedstawimy poniżej zależność prądu ładowania kondensatora o stałej pojemności C od oporu R (rys. 2.2.4). Przy małej wartości oporu ładowanie kondensatora odbywa się dużym prądem w krótkim czasie (mała stała czasowa $T = RC$). Zwiększenie oporu R (środkowy wykres) powoduje ładowanie kondensatora mniejszym prądem, ale w dłuższym czasie (większa stała czasowa). Dla jeszcze większego oporu R (skrajny prawy wykres) ładowanie odbywa się małym prądem przez długi czas. Zwróćmy uwagę, że we wszystkich trzech przypadkach ładunek dostarczony do kondensatora (proporcjonalny do zakreskowanej powierzchni pod krzywą prądu) jest taki sam, bo

$$q = \int_0^{\infty} i dt = CE$$

Zależy on jedynie od pojemności kondensatora i wartości końcowego napięcia na kondensatorze, a to jest równe E.



Rys. 2.2.4

Przy stosowaniu rachunku operatorowego nie ma żadnych formalnych trudności podczas rozpatrywania przypadku załączania kondensatora bezpośrednio na źródło o stałej sile elektromotorycznej E ($R = 0$). Wtedy

$$I(s)\frac{1}{sC} = \frac{E}{s},$$

skąd

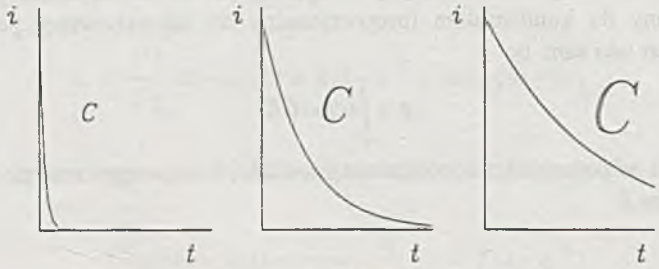
$$I(s) = EC,$$

a to odpowiada przebiegowi czasowemu

$$i = EC\delta(t),$$

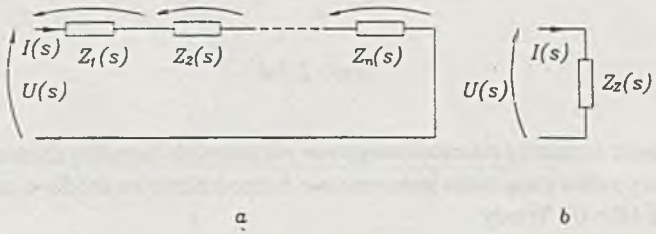
więc impulsowi o kształcie funkcji Diraca o powierzchni równej EC (ładunkowi kondensatora). Należy jednak zwrócić uwagę, że z praktycznego punktu widzenia taki model ładowania kondensatora jest zbyt uproszczony. Pominięto tu bowiem pewne elementy obwodu, obecne w każdym rzeczywistym obwodzie (w szczególności indukcyjność), które, choć małe, przy małej wartości oporu mogą istotnie wpływać na kształt przebiegu prądu .

Na rys. 2.2.5 przedstawiono przebiegi prądu ładowania i różnych kondensatorów przy stałej wartości E oraz przy tej samej wartości oporu R. Jak widać, dla małych pojemności prąd ma charakter krótkiego impulsu o amplitudzie zależnej od oporu R (mała stała czasowa T). Im większa pojemność, tym dłużej trwa ładowanie kondensatora.



Rys. 2.2.5

2.2.2.3. Szeregowe i równoległe połączenia impedancji

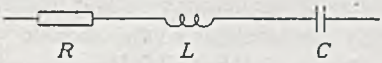


Rys. 2.2.6

W teorii obwodów prądu stałego wykazuje się, że szeregowe połączenie oporów można zastąpić jednym oporem zastępczym [1]. Stosując identyczne rozumowanie można wykazać, że również szeregowe połączenie impedancji można zastąpić jedną *impedancją zastępczą* (rys. 2.2.6), przy czym

$$Z_z(s) = \sum_{i=1}^{n} Z_i(s)$$

Impedancja zastępcza szeregowego połączenia impedancji jest równa sumie tych impedancji.

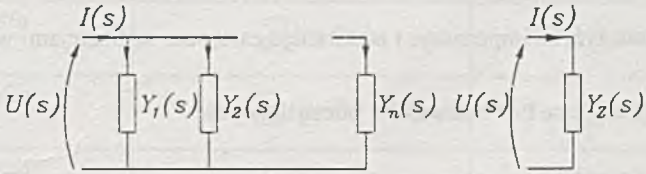


Rys. 2.2.7

Dla przykładu szeregowe połączenie oporu, indukcyjności i pojemności (rys. 2.2.7) można zastąpić jedną impedancją zastępczą

$$Z_z(s) = R + sL + \frac{1}{sC}$$

Jak widać, jest to pewna funkcja operatora s.



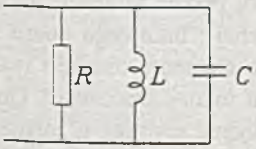
a b

Rys. 2.2.8

Podobnie dla równoległego połączenia admitancji (rys. 2.2.8) (przy równoległym połączeniu wygodniej jest posługiwać się pojęciem admitancji) otrzymamy dla *admitancji zastępczej*

$$Y_z(s) = \sum_{i=1}^{n} Y_i(s)$$

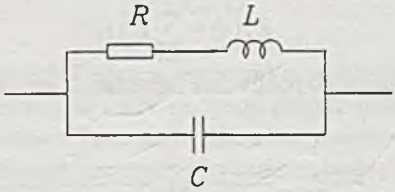
Admitancja zastępcza równoległego połączenia admitancji jest równa sumie tych admitancji.



Rys. 2.2.9

Na rys. 2.2.9 przedstawione jest równoległe połączenie przewodności indukcyjności i pojemności. Admitancja zastępcza tego połączenia

$$Y_z(s) = G + \frac{1}{sL} + sC$$



Rys. 2.2.10

Dla przykładu pokażemy jeszcze mieszane połączenie (rys. 2.2.10). Dla tego układu otrzymamy:

$$Z_z(s) = \frac{\frac{1}{sC}(R+sL)}{R+sL+\frac{1}{sC}} = \frac{R+sL}{s^2LC+sRC+1}$$

Można zauważyć, że impedancje i admitancje zastępcze są funkcjami wymiernymi od s.

2.2.3. Obwody złożone bez warunków początkowych

2.2.3.1. Etapy analizy obwodów

Proces analizy obwodu można podzielić na kilka etapów:

1. Idealizacja rzeczywistego obwodu do schematu zastępczego
2. Ułożenie równań operatorowych
3. Rozwiązanie układu równań operatorowych
4. Przejście na postać czasową
5. Interpretacja otrzymanych wyników.

Omówimy pokrótce powyższe etapy.

1. Idealizacja rzeczywistego obwodu do schematu zastępczego

W pierwszym rzędzie należy dobrać odpowiednie schematy zastępcze dla realnych elementów rzeczywistego obwodu. Należy więc dla rzeczywistego źródła energii elektrycznej znaleźć odpowiedni schemat zastępczy (w najprostszym przypadku będzie to schemat składający się z szeregowego połączenia idealnej siły elektromotorycznej i liniowego oporu lub odpowiedni równoległy schemat zastępczy). Również i pozostałe elementy obwodu realne indukcyjności i kondensatory posiadają swe schematy zastępcze o różnej złożoności. Omówimy je później. W schemacie zastępczym obwodu należy uwzględnić również te elementy pasożytnicze, które mogą mieć wpływ na przebiegi prądów i napięć w obwodzie. Mogą to być różnego rodzaju pojemności montażowe, rezystancje i indukcyjności ścieżek i przewodów.

Dobranie odpowiedniego schematu zastępczego realnego obwodu jest zagadnieniem dosyć trudnym, wymagającym dobrej znajomości zjawisk fizycznych, zachodzących w obwodzie. Uwzględnienie wszystkich możliwych elementów szczątkowych lub pasożytniczych prowadzi do nadmiernie rozbudowanego obwodu, którego analiza staje się trudna, pominięcie zaś istotnych elementów szczątkowych może doprowadzić do tego, że wyniki analiz teoretycznych rozminą się z przebiegami prądów i napięć realnego obwodu. Często zachodzi konieczność powtarzania analizy obwodu przy uwzględnianiu różnych elementów szczątkowych w celu określenia ich wpływu na przebiegi prądów i napięć.

2. Ułożenie równań operatorowych

Rachunek operatorowy umożliwia stosowanie do układania równań obwodu tych samych metod, jakie są znane w teorii obwodów prądu stałego. Korzystając z izomorficzności układu równań teorii obwodów prądu stałego z układem równań operatorowych teorii obwodów prądu zmiennego.

	Obwody prądu stałego	Obwody prądu zmiennego
I Prawo Kirchhoffa	$\sum_{\bullet} I = 0$	$\sum_{\bullet} I(s) = 0$
II Prawo Kirchhoffa	$\sum_{o} U = 0$	$\sum_{o} U(s) = 0$
Równania elementów	$U = RI$	$U(s) = Z(s)I(s)$

można zauważyć, że zachodzi tu odpowiedniość:

$$\begin{aligned} I &\hat{=} I(s) \\ U &\hat{=} U(s) \\ R &\hat{=} Z(s) \\ G &\hat{=} Y(s) \\ E &\hat{=} E(s) \\ J &\hat{=} J(s) \end{aligned} \qquad (2.2.1)$$

Jedynie moc $P = UI$ dla prądu stałego nie ma odpowiednika.

Stąd wynika, że można z tego układu równań operatorowych wyprowadzić podobne metody i zasady, jakie wyprowadzono dla obwodów prądu stałego. W szczególności macierzowa postać równań Kirchhoffa i wnioski, jakie z niej wynikały co do liczby niezależnych równań pierwszego i drugiego prawa Kirchhoffa i sposobu ich układania ([1] rozdział 4.1), są ważne dla transformat prądów i napięć. Wobec tego w obwodzie o g elementach połączonych w w węzłach można według pierwszego prawa Kirchhoffa napisać w -1 niezależnych równań, zaś według drugiego prawa Kirchhoffa $g - w + 1$ niezależnych równań operatorowych.

Na podstawie tej izomorficzności można też wnioskować, że te metody i zasady, które dla prądów stałych były wyprowadzone z powyższych podstawowych równań, będą miały, po

uwzględnieniu (2.2.1), taką samą postać. Dotyczy to w szczególności następujących metod i zasad:

1. macierzowej postaci praw Kirchhoffa,
2. metody obu praw Kirchhoffa,
3. metody prądów oczkowych,
4. metody potencjałów węzłowych,
5. zasad Thevenina i Nortona,
6. zasady superpozycji,
7. zasady wzajemności,
8. zasady wyodrębnienia.

Przedstawimy kilka przykładów w celu bliższego wyjaśnienia podobieństw i różnic zachodzących między obwodami prądu stałego a obwodami prądu zmiennego.

2.2.3.2. Macierzowa postać praw Kirchhoffa ([1], rozdział 4.2)

I prawo Kirchhoffa	$\mathrm{A}\mathrm{I}(s)=\mathbf{0}$	albo	$\mathrm{I}(s)=\mathrm{C}\mathrm{I}_{\mathrm{L}}(s)$
II prawo Kirchhoffa	$\mathrm{C}^{\mathrm{T}}\mathrm{U}(s)=\mathbf{0}$	albo	$\mathrm{U}(s)=\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{U}_{\mathrm{T}}(s)$

Zwróćmy uwagę na to, że macierze **A** i **C** są takie same jak w przypadku obwodu prądu stałego (występują w nich tylko 1, 0 i -1). Zależą one bowiem tylko od topologii obwodu.

2.2.3.3. Metoda prądów oczkowych

Na rys. 2.2.1 przedstawiono dwuoczkowy obwód elektryczny. Stosując metodę prądów oczkowych i uwzględniając odpowiednio (2.2.11) :

$$R \doteq Z(s) \begin{cases} R \\ sL \\ \dfrac{1}{sC} \end{cases}$$

otrzymamy:

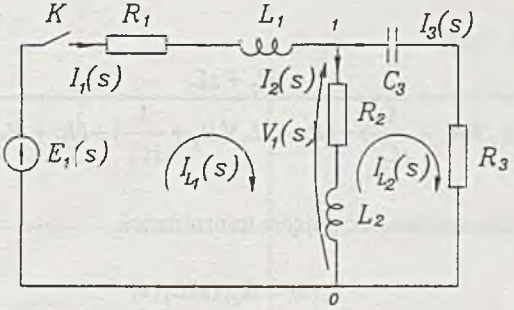
$$(R_1 + sL_1 + R_2 + sL_2)I_{L1}(s) \; - \; (R_2 + sL_2)I_{L2}(s) = E_1(s)$$

$$-(R_2 + sL_2)I_{L1}(s) + (R_2 + sL_2 + R_3 + \frac{1}{sC_3})I_{L2}(s) = 0$$

Jest to układ równań algebraicznych liniowych, w których zmiennymi są transformaty prądów, a współczynniki są funkcjami zmiennej zespolonej s . W ogólnym przypadku metoda

prądów oczkowych ma postać:

$$\mathbf{Z}(s)\mathbf{I}_L(s) = \mathbf{U}_Z(s)$$



Rys. 2.2.11

Rozwiązując powyższy układ względem $I_{L2}(s)$ otrzymamy:

$$I_{L2}(s) = \frac{\begin{vmatrix} (R_1 + sL_1 + R_2 + sL_2) & E_1(s) \\ -(R_2 + sL_2) & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (R_1 + sL_1 + R_2 + sL_2) & -(R_2 + sL_2) \\ -(R_2 + sL_2) & (R_2 + sL_2 + R_3 + \frac{1}{sC_3}) \end{vmatrix}}$$

$$I_{L2} = \frac{(R_2 + sL_2)}{(R_1 + sL_1 + R_2 + sL_2)(R_2 + sL_2 + R_3 + \frac{1}{sC_3}) - (R_2 + sL_2)^2} E_1(s)$$

Również tu można wprowadzić pojęcie transmitancji

$$I_{L2}(s) = K_{EI}(s)E_1(s)$$

2.2.3.4. Metoda potencjałów węzłowych ([1] rozdział 4.5)

Stosując do obwodu z rys. 2.2.11 metodę potencjałów węzłowych, otrzymamy tu tylko jedno równanie:

$$\left(\frac{1}{R_1+sL_1}+\frac{1}{R_2+sL_2}+\frac{1}{R_3+\frac{1}{sC_3}}\right)V_1(s)=\frac{E_1(s)}{R_1+sL_1},$$

a stąd

$$I_3(s)=\frac{R_2+sL_2}{(R_2+sL_2)(R_3+\frac{1}{sC_3})+(R_1+sL_1)(R_3+\frac{1}{sC_3})+(R_1+sL_1)(R_2+sL_2)}E_1(s)$$

Również i tu można wprowadzić pojęcie transmitancji

$$I_3(s)=K_{EI}(s)E_1(s)$$

Uogólniając powyższe rozważania można przedstawić dla obwodów z jedną siłą wymuszającą cztery przypadki (tabela 2.2.1). Wielkością wymuszającą (albo wejściową) może być siła elektromotoryczna (napięcie) lub siła prądomotoryczna (prąd), zaś wielkością wymuszaną (albo wyjściową) napięcie lub prąd. Wszystkie mają wspólną postać - transformata wielkości wymuszanej jest równa pewnej funkcji od s, pomnożonej przez transformatę wielkości wymuszającej. Oznaczając przez :

$K(s)$ - transmitancja układu,
$F(s)$ - transformata wielkości wymuszanej,
$W(s)$ -transformata wielkości wymuszającej,

otrzymamy ogólną postać zależności między tymi wielkościami

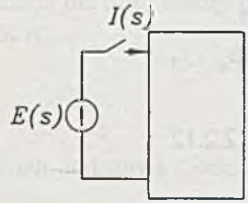
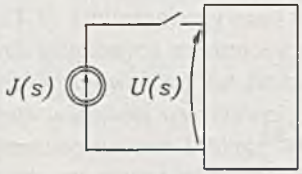
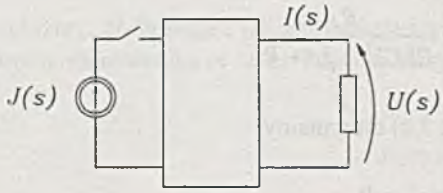
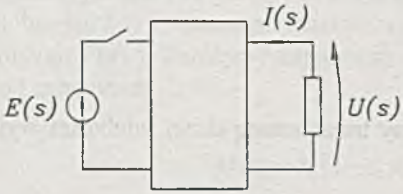
$$\boxed{F(s)=K(s)W(s)} \qquad (2.2.2)$$

Transmitancję można zatem określić jako iloraz transformat wielkości wyjściowej i wejściowej

$$\boxed{K(s)=\frac{F(s)}{W(s)}} \qquad (2.2.3)$$

Transmitancja jest wielkością charakteryzującą dany układ dla jednej wielkości wejściowej i jednej wielkości wyjściowej, przy zerowych warunkach początkowych.

Tabela 2.2.1

	$I(s) = Y(s)E(s)$
	$I(s) = K_{EI}(s)E(s)$ $U(s) = K_{EU}(s)E(s)$
	$I(s) = K_{JI}(s)J(s)$ $U(s) = K_{JU}(s)J(s)$
	$I(s) = K_{EI}(s)E(s)$ $U(s) = K_{EU}(s)E(s)$

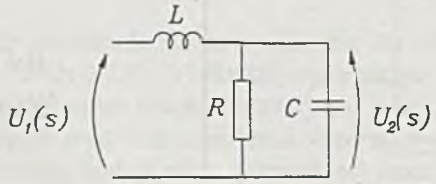
Z przedstawionych przykładów wynika, że transmitancja ma charakter funkcji wymiernej

od s . Można udowodnić, że w przypadku układów składających się wyłącznie z elementów skupionych (R, L, C, M oraz źródeł sterowanych), transmitancja jest zawsze funkcją wymierną od s

$$K(s) = \frac{a_0 s^l + a_1 s^{l-1} + \ldots\ldots\ldots a_{l-1} s + a_l}{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots b_{m-1} s + b_m} \qquad (2.2.4)$$

Dla przykładu przedstawimy transmitancję dla układu z rys. 2.2.12.
Stosując np. metodę potencjałów węzłowych

$$\left(\frac{1}{sL} + \frac{1}{R} + sC\right) U_2(s) = \frac{1}{sL} U_1(s),$$



Rys. 2.2.12

otrzymamy:

$$K(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{R}{RLCs^2 + Ls + R}$$

Porównując powyższy wzór ze wzorem (2.2.4) otrzymamy:

$$l = 0 \qquad a_0 = R$$
$$m = 2 \qquad b_0 = RLC$$
$$b_1 = L$$
$$b_2 = R$$

2.2.4. Przejście na postać czasową

Po rozwiązaniu układu równań otrzymujemy transformatę danej wielkości wyjściowej. Czasową postać tej wielkości można otrzymać:

1. metodą „słownikową"
2. za pomocą transformacji odwrotnej
3. za pomocą I wzoru Heaviside'a.

Omówimy pokrótce powyższe sposoby.

2.2.4.1. Metoda „słownikowa"

Istnieją już duże zbiory funkcji czasowych i odpowiadających im transformat, np.[2] oraz dodatek A:

$$f(t) \triangleq F(s)$$

Na ich podstawie można dla danej funkcji operatorowej znaleźć odpowiadającą jej funkcję czasową.

2.2.4.2. Transformacja odwrotna Laplace'a

Jest to najbardziej ogólna metoda. Opiera się ona na definicji transformacji Laplace'a (2.1.3). Obliczanie tej całki dokonuje się metodą residuów [2]. W przypadku obwodów o stałych skupionych transmitancje są funkcjami wymiernymi. Jeżeli ponadto transformata wielkości wejściowej też jest funkcją wymierną (co jest najczęstszym przypadkiem), to i transformata wielkości wyjściowej (2.2.2) będzie funkcją wymierną. Jednakże w przypadkach, gdy transformata jest funkcją wymierną, można przedstawić prostsze metody, pozwalające na ominięcie trudności związanych ze stosowaniem teorii funkcji zmiennej zespolonej; umożliwia to stosowanie tzw. *I wzoru Heaviside'a.*

2.2.4.3. I wzór Heaviside'a

Załóżmy, że funkcja $F(s)$ jest funkcją wymierną od s, stopień jej licznika l jest mniejszy od stopnia mianownika m : $l<m$. Przedstawimy tę funkcję w postaci:

$$F(s) = \frac{N(s)}{sM(s)}, \qquad (2.2.5)$$

gdzie : $N(s)$ jest wielomianem od s o stopniu l,
$M(s)$ jest wielomianem od s o stopniu m, przy czym $l<m$.

Do takiej postaci zawsze można doprowadzić dowolną funkcję wymierną od s.

Wielomian $M(s)$ posiada pierwiastki s_k , dla których $M(s_k)=0$ (są one równocześnie biegunami funkcji $F(s)$). Założymy najprostszy przypadek gdy pierwiastki te są pojedyńcze oraz różne od zera, wtedy

$$M(s) = b_0(s-s_1)(s-s_2).....(s-s_k).....(s-s_m) \qquad (2.2.6)$$

Można wtedy rozłożyć funkcję $F(s)$ na ułamki proste:

$$F(s)=\frac{N(s)}{sM(s)}=\frac{A_0}{s}+\sum_{k=1}^{m}\frac{A_k}{s-s_k} \qquad (2.2.7)$$

W celu wyznaczenia współczynnika rozkładu A_0 mnożymy (2.2.7) obustronnie przez s i przechodzimy do granicy zdążając z s do zera

$$\lim_{s\to 0}\frac{N(s)}{M(s)}=A_0+\underbrace{\lim_{s\to 0}\sum_{k=0}^{m}\frac{A_k s}{s-s_k}}_{\to 0},$$

skąd

$$A_0=\frac{N(0)}{M(0)} \qquad (2.2.8)$$

Wyznaczanie współczynników A_i można przeprowadzić mnożąc (2.2.7) przez $(s-s_i)$, a następnie przechodząc do granicy zdążając z s do s_i

$$\lim_{s\to s_i}\frac{N(s)}{sM(s)}(s-s_i)=\underbrace{\lim_{s\to s_i}\frac{A_0}{s}(s-s_i)}_{\to 0}+\underbrace{\lim_{s\to s_i}\sum_{k=1}^{m}\frac{A_k}{s-s_k}(s-s_i)}_{=A_i}$$

Po przejściu do granicy pierwszy wyraz po prawej stronie równania będzie równy zero. W drugim wyrazie znikną wszystkie człony dla $k\neq i$, pozostaje tylko A_i. Zatem

$$A_i=\lim_{s\to s_i}\frac{N(s)}{sM(s)}(s-s_i)=\lim_{s\to s_i}\frac{N(s)}{sb_0(s-s_1)(s-s_2)\ldots(s-s_i)\ldots(s-s_m)}(s-s_i),$$

a to po uproszczeniu można przekształcić w :

$$A_i=\frac{N(s_i)}{s_i M'(s_i)}, \qquad (2.2.9)$$

gdzie $M'(s_i)=\left.\frac{dM(s)}{ds}\right|_{s=s_i}$.

Po podstawieniu do wzoru (2.2.7) otrzymamy:

$$F(s)=\frac{N(0)}{M(0)}\frac{1}{s}+\sum_{i=1}^{m}\frac{N(s_i)}{s_i M'(s_i)}\frac{1}{s-s_i}$$

We wzorze tym wyrażenia $N(0)$, $M(0)$, s_i, $N(s_i)$ oraz $M(s_i)$ są liczbami rzeczywistymi lub zespolonymi , zaś funkcjami s są tylko wyrażenia:

$$\frac{1}{s} \hat{=} 1 \qquad \text{oraz} \qquad \frac{1}{s-s_i} \hat{=} e^{s_i t}$$

Otrzymamy ostatecznie tzw. *Pierwszy wzór Heaviside'a*

$$\boxed{f(t) = \frac{N(0)}{M(0)} + \sum_{i=1}^{m} \frac{N(s_i)}{s_i M'(s_i)} e^{s_i t}} \qquad (2.2.10)$$

Przykład: Niech $F(s) = \frac{1}{s(1+sT)} = \frac{N(s)}{sM(s)}$, wtedy $N(s)=1$, $M(s)=1+sT$, pierwiastkiem $M(s)=0$ (biegunem funkcji $F(s)$) jest $s_1=-1/T$, zatem

$$f(t) = 1 + \frac{1}{-\frac{1}{T}T} e^{-\frac{t}{T}} = 1 - e^{-\frac{t}{T}}$$

Przedstawimy poniżej kilka uwag dotyczących I wzoru Heaviside'a.

- Pierwiastki wielomianu $M(s)$ - s_i mogą być albo rzeczywiste, albo zespolone (wtedy występują parami jako para pierwiastków zespolonych sprzężonych). Wynika to z faktu, że współczynniki wielomianu są liczbami rzeczywistymi.

- W najbardziej interesujących nas przypadkach tzw. stabilnych obwodów pierwiastki te mają ujemne części rzeczywiste (leżą na lewej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej s), zatem mamy do czynienia z przypadkami:
  $s_i = -\delta_i$ dla pierwiastków rzeczywistych,
  $s_{i,i+1} = -\delta_i \pm j\omega_i \qquad j = \sqrt{-1}$ dla pierwiastków zespolonych sprzężonych.

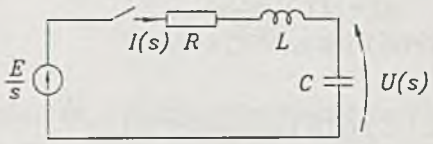
- Ze względu na ujemne wartości części rzeczywistych pierwiastków funkcje $e^{-s_i t} = e^{(-\delta \pm j\omega t)} = e^{-\delta t} e^{\pm j\omega t}$ zanikają z czasem t do zera. Zatem drugi człon po prawej stronie wyrażenia zanika, pierwszy człon reprezentuje więc tzw. stan ustalony, czyli wartość $f(\infty)$. Drugi człon to tzw. zaburzenie.

- Jeżeli stopień licznika $l \geq m$, to można najpierw podzielić wielomian $N(s)$ przez $M(s)$, a do reszty z dzielenia zastosować I wzór Heaviside'a. Jest to jednak przypadek rzadki i nie występuje przy analizie realnych obwodów.

- W przypadku pierwiastków wielokrotnych można wyprowadzić podobny wzór [2]. Jest to jednak również rzadki przypadek i nie będzie tu omawiany.

2.2.5. Obwód szeregowy RLC

Na rys. 2.2.13 przedstawiono obwód składający się z szeregowego połączenia oporu, indukcyjności i pojemności, załączany na stałą siłę elektromotoryczną. Do takiego modelu sprowadza się też problem ładowania kondensatora przez opór i indukcyjność. Rozpatrzmy najpierw zjawiska fizyczne towarzyszące ładowaniu kondensatora. Przed zamknięciem klucza kondensator był nienaładowany, napięcie na nim było równe zeru, prąd był również równy zeru - obwód w tej chwili nie zawierał energii. Bezpośrednio po zamknięciu klucza w chwili $t=0_+$, napięcie na kondensatorze dalej będzie równe zeru (ciągłość napięcia na kondensatorze,



Rys. 2.2.13

patrz rozdział 1.3.4), bo nie dopłynął na kondensator jeszcze żaden ładunek. Odmiennie niż w przypadku rozpatrywanym w p. 2.2.2.2 prąd nie może tu nagle zmienić swojej wartości, bowiem płynie on przez indukcyjność (ciągłość prądu w cewce, patrz rozdział 1.3.3). Zatem w tejże chwili napięcie na oporze też jest równe zero, a napięcie na indukcyjności będzie równe $u_L\big|_{t=0_+} = E = L\frac{di}{dt}\Big|_{t=0_+}$, co spowoduje szybkie narastanie prądu. Prąd ten z jednej strony spowoduje pojawienie się napięcia na oporze, a z drugiej strony pojawienie się napięcia na kondensatorze. Zmniejszy to napięcie na indukcyjności, a tym samym zmniejszy prędkość narastania prądu. Mogą tu zajść dwa przypadki. Jeżeli opór będzie duży, to napięcie na nim też będzie duże, a napięcie na indukcyjności będzie mniejsze, prąd będzie narastał, ale stosunkowo wolniej. Napięcie na kondensatorze nie przekroczy wartości siły elektromotorycznej, będzie się ono asymptotycznie do niej zbliżać. Jeżeli opór będzie mały, to i napięcie na nim będzie małe, a napięcie na indukcyjności stosunkowo duże. Spowoduje to szybkie narastanie prądu. Wtedy napięcie na kondensatorze może przekroczyć wartość siły elektromotorycznej nim prąd osiągnie wartość zero, w wyniku czego, jak zobaczymy dalej, nastąpi oscylacyjny przebieg ładowania .

Stosując rachunek operatorowy, można w tym przypadku (szeregowe połączenie impedancji) obliczyć prąd w obwodzie i przekształcić do postaci umożliwiającej stosowanie I wzoru Heaviside'a

$$I(s)=\frac{E(s)}{Z(s)}=\frac{\frac{E}{s}}{(R+sL+\frac{1}{sC})}=\frac{\frac{E}{L}s}{s(s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC})}=\frac{N(s)}{sM(s)}$$

W tym przypadku

$$N(s)=\frac{E}{L}s$$

$$M(s)=s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}=(s-s_1)(s-s_2)$$

Obliczmy pierwiastki równania $M(s)=0$ (bieguny funkcji $I(s)$)

$$s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}=0$$

Pierwiastkami tymi będą:

$$s_{1,2}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}}=-\delta\pm\beta$$

Analizując powyższy wzór można wyróżnić tu trzy przypadki:

1) $\frac{R^2}{4L^2}>\frac{1}{LC} \Rightarrow R>2\sqrt{\frac{L}{C}}$ dwa pierwiastki rzeczywiste,

2) $\frac{R^2}{4L^2}<\frac{1}{LC} \Rightarrow R<2\sqrt{\frac{L}{C}}$ dwa pierwiastki zespolone,

3) $\frac{R^2}{4L^2}=\frac{1}{LC} \Rightarrow R=2\sqrt{\frac{L}{C}}$ pierwiastek podwójny.

Pierwszy przypadek dotyczy obwodu silnie tłumionego (nazwy uzasadnimy później). Drugi, to przypadek obwodu słabo tłumionego, trzeci, to obwód tłumiony krytycznie. Omówimy poniżej te przypadki.

1. Obwód silnie tłumiony

Jest to przypadek ładowania kondensatora przez stosunkowo duży opór. Występują tu dwa pierwiastki rzeczywiste:

$$s_1 = -\delta + \beta = -\frac{1}{T_1}$$

$$s_2 = -\delta - \beta = -\frac{1}{T_2} \qquad T_2 < T_1$$

Stosując I wzór Heaviside'a otrzymamy:

$$i(t) = 0 + \frac{\frac{E}{L}s_1}{s_1(s_1 - s_2)} e^{s_1 t} + \frac{\frac{E}{L}s_2}{s_2(s_2 - s_1)} e^{s_2 t} = \frac{E}{2L\beta}(e^{s_1 t} - e^{s_2 t}) \qquad (2.2.11)$$

$$i(t) = \frac{E}{2L\beta}(e^{-\frac{t}{T_1}} - e^{-\frac{t}{T_2}}) \qquad (2.2.12)$$

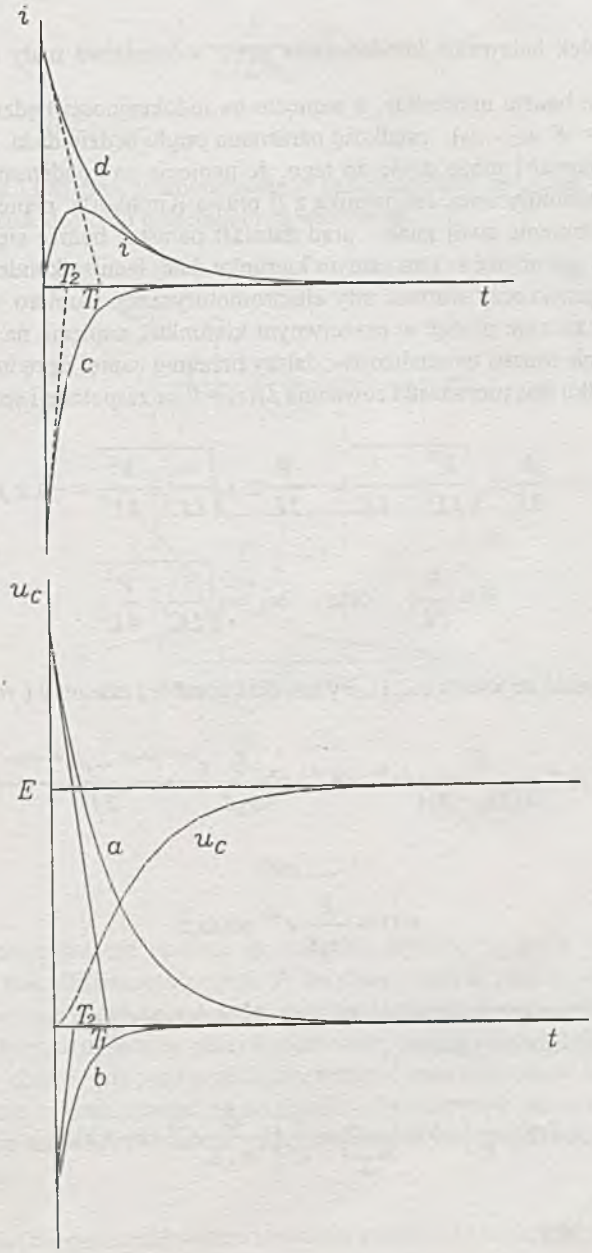
Ponieważ znamy czasowy przebieg prądu, można stąd obliczyć napięcie jako:

$$u_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt + \underbrace{u_C(0)}_{=0} = \frac{E}{2LC\beta}\int_0^t (e^{-\frac{t}{T_1}} - e^{-\frac{t}{T_2}})dt \quad .$$

$$u_C(t) = E\left(1 + \frac{T_2}{T_1 - T_2}e^{-\frac{t}{T_2}} - \frac{T_1}{T_1 - T_2}e^{-\frac{t}{T_1}}\right) \qquad (2.2.13)$$

Na rys. 2.2.14 przedstawiono przebiegi czasowe prądu ładowania kondensatora i napięcie na nim w funkcji czasu.

1. Przebieg prądu składa się z dwóch składowych *c* i *d*. Obie są funkcjami wykładniczymi. Pierwsza posiada mniejszą stałą czasową T_2, druga większą T_1. Obie mają taką samą amplitudę ale przeciwne znaki. Suma obu składowych daje nam przebieg prądu, który zaczyna się od zera, najpierw narasta szybko (za co odpowiada pierwsza składowa i T_1), osiąga swoje maksimum i wolniej (za co odpowiada druga składowa i T_2) opada asymptotycznie do zera. Ponieważ przez cały czas prąd $i > 0$, ładunek na kodensatorze stale rośnie.
2. Napięcie na kondensatorze monotonicznie rośnie od zera do ustalonej wartości, jaką jest wartość siły elektromotorycznej *E*. Napięcie narasta z początku powoli, potem przyśpiesza, osiągając największą prędkość narastania wtedy, gdy prąd osiąga swoje maksimum (prąd *i* jest pochodną napięcia na kondensatorze), a następnie, już wolniej, dochodzi do swej ustalonej wartości. Przebieg napięcia składa się z trzech składowych - dwóch funkcji wykładniczych *a* i *b* oraz składowej stałej o wartości *E*. Suma tych trzech składowych daje pokazany na rysunku przebieg.



Rys. 2.2.14

2. Obwód słabo tłumiony

Jest to przypadek ładowania kondensatora przez stosunkowo mały opór $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$.

Napięcie na oporze będzie niewielkie, a napięcie na indukcyjności będzie wtedy stosunkowo większe ($u_L = E - u_C - u_R$), prędkość narastania prądu będzie duża, kondensator będzie się szybko ładował i może dojść do tego, że napięcie na kondensatorze przekroczy wartość siły elektromotorycznej. Jak wynika z II prawa Kirchhoffa, napięcie na indukcyjności musi wtedy zmienić swój znak - prąd zamiast narastać będzie się zmniejszał, ale może w dalszym ciągu płynąć w tym samym kierunku dalej ładując kondensator. Napięcie na kondensatorze przekroczy wartość siły elektromotorycznej. Dopiero wtedy, gdy prąd zmieni swój znak (zacznie płynąć w przeciwnym kierunku), napięcie na nim zacznie się zmniejszać. Podobnie można by analizować dalszy przebieg napięć i prądu w obwodzie.

W tym przypadku oba pierwiastki równania $M(s) = 0$ są zespolone i sprzężone

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} = -\frac{R}{2L} \pm j\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = -\delta \pm j\omega_0,$$

gdzie

$$\delta = \frac{R}{2L} \quad \text{oraz} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

Możemy skorzystać ze wzoru 2.2.11, by uzyskać przebieg czasowy ($j\omega_0 = \beta$)

$$i(t) = \frac{E}{2L(s_1 - s_2)}(e^{s_1 t} - e^{s_2 t}) = \frac{E}{\omega_0 L}\frac{e^{(-\delta + j\omega_0)t} - e^{(-\delta - j\omega_0)t}}{2j},$$

skąd

$$i(t) = \frac{E}{\omega_0 L} e^{-\delta t} \sin \omega_0 t$$

Napięcie na kondensatorze możemy obliczyć dwoma sposobami:

1. znając już przebieg czasowy prądu

$$u_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i dt + \underbrace{u_C(0)}_{=0} = \frac{1}{C}\int_0^t (\frac{E}{\omega_0 L} e^{-\delta t} \sin \omega_0 t) dt$$

2. albo operatorowo jako

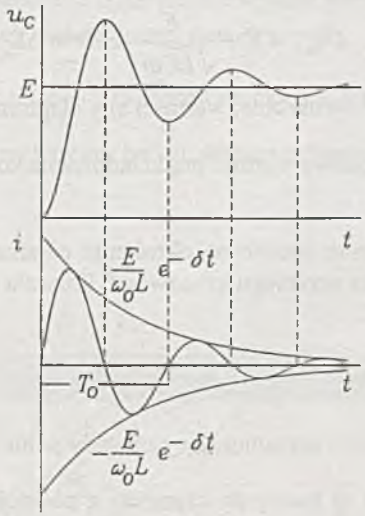
$$U_C(s) = \frac{1}{sC} I(s)$$

W obu przypadkach dochodzimy do czasowego przebiegu w postaci:

$$u_C(t) = E - \frac{E}{\sqrt{LC}\omega_0} e^{-\delta t} \cos(\omega_0 t - \gamma),$$

gdzie $\gamma = \operatorname{arctg}\frac{\delta}{\omega_0}$ $\quad 0 \le \gamma \le \frac{\pi}{2}$.

Przebiegi prądu i napięcia na kondensatorze przedstawione są na rys. 2.2.15. Analizując te przebiegi można dojść do następujących wniosków:



Rys. 2.2.15

- Napięcie na kondensatorze wzrasta stosunkowo szybko, osiągając w pewnej chwili wartość równą sile elektromotorycznej. W tej chwili jednak prąd ma dużą wartość i ze względu na obecność indukcyjności nie może nagle zmienić swej wartości, musi płynąć w tym samym kierunku, ładując dalej kondensator, na którym napięcie dalej się zwiększa. Dopiero w chwili, gdy prąd przekroczy wartość zero zmieniając kierunek, napięcie na kondensatorze zacznie opadać aż do chwili, gdy ponownie zmieni kierunek. Wtedy napięcie zacznie znowu wzrastać itd. Otrzymujemy w ten sposób oscylacyjny przebieg prądu i napięcia.

- Pulsacja własna (częstotliwość własna) obwodu zależy od indukcyjności L, pojemności C oraz stałej tłumienia δ.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \delta^2} = 2\pi f_0$$

Dla obwodu bardzo słabo tłumionego $\delta^2 << \frac{1}{LC}$, wtedy $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ zależy ona przede wszystkim od L i C. Ze wzrostem tłumienia pulsacja własna (częstotliwość własna) obwodu maleje, okres T_0 rośnie.

- Tłumienie obwodu zależy od stosunku oporu R do indukcyjności L - $\delta = \frac{R}{2L}$; im większy opór, tym silniejsze tłumienie.
- Maksymalne napięcie na kondensatorze wystąpi, gdy $\delta \to 0$, wtedy $\omega_0 \to \frac{1}{\sqrt{LC}}$ oraz gdy $\cos(\omega_0 t_m - \gamma) = -1$, a więc

$$U_{max} = E + \frac{E}{\sqrt{LC}\omega_0} e^{-0t_m} = 2E$$

nie może więc przekroczyć dwukrotnej wartości siły elektromotorycznej. Podobnie można określić maksymalną możliwą wartość prądu ładowania kondensatora $I_{max} = E\sqrt{\frac{C}{L}}$.

W dodatku B przedstawiono sposób na określenie parametrów sinusoidy tłumionej na podstawie zarejestrowanego jej przebiegu czasowego. Pozwala to na doświadczalne określenie parametrów obwodu R,L,C.

3. Obwód krytycznie tłumiony

Jest to przypadek graniczny rozgraniczający obwody silnie tłumione od obwodów słabo tłumionych. Jeżeli $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, to mamy do czynienia z podwójnym pierwiastkiem równania $M(s)=0$

$$s_1 = s_2 = -\frac{R}{2L} = -\delta \qquad \beta = 0$$

Nie można wtedy stosować I wzoru Heaviside'a wyprowadzonego dla pierwiastków pojedyńczych. Aby uniknąć konieczności stosowania wzoru Heaviside'a dla pierwiastków wielokrotnych, można postąpić w następujący sposób. Wychodząc z przypadku dwóch różnych pierwiastków (wzór 2.2.11), w którym $s_{1,2} = -\delta \pm \beta$, otrzymamy:

$$i(t) = \frac{E}{2L\beta}\left(e^{s_1 t} - e^{s_2 t}\right) = \frac{E}{2L}\frac{e^{(-\delta+\beta)t} - e^{(-\delta-\beta)t}}{\beta} = \frac{E}{L}e^{-\delta t}\frac{e^{\beta t} - e^{-\beta t}}{2\beta}$$

Zdążając z $\beta \to 0$ otrzymamy $s_1 = s_2$, a uwzględniając regułę de l'Hospitala

$$i(t) = \lim_{\beta\to 0}\frac{E}{L}e^{-\delta t}\frac{e^{\beta t} - e^{-\beta t}}{2\beta} = \frac{E}{L}e^{-\delta t}\lim_{\beta\to 0}\frac{te^{\beta t} + te^{-\beta t}}{2}$$

$$i(t) = \frac{E}{L} t e^{-\delta t},$$

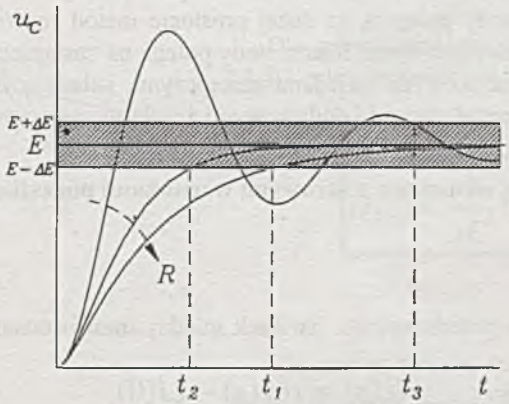
a dla napięcia na kondensatorze

$$u_C(t) = E - E e^{-\delta t}(1 + \delta t)$$

Jakościowo przebiegi prądu i napięcia nie różnią się od przebiegów dla obwodu silnie tłumionego.

Rozpatrzmy teraz przypadek ładowania kondensatora o stałej pojemności C przez stałą indukcyjność L przy różnych wartościach oporu R, aby stwierdzić, kiedy można naładować kondensator w najkrótszym czasie. Uznamy kondensator za praktycznie naładowany, jeżeli napięcie na nim osiągnie wartość $E \pm \Delta E$ i już nie wyjdzie poza zakreskowany obszar na rys. 2.2.16. Wartość ΔE można oczywiście dobrać dowolnie małą.

- Jeżeli opór R jest duży, $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, to mamy do czynienia z obwodem silnie tłumionym. Napięcie powoli narasta, kondensator będzie więc naładowany po czasie t_1 (rys. 2.2.16).



Rys. 2.2.16

- Jeżeli wartość oporu osiągnie wartość $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, to mamy do czynienia z obwodem krytycznie tłumionym. Wtedy następuje najszybsze naładowanie kondensatora (czas t_2).
- Jeżeli opór R jest mały, to $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$. Mamy więc do czynienia z obwodem słabo tłumionym. Przebieg napięcia jest wtedy oscylacyjny o pulsacji bliskiej $\omega_0 \approx \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Jak widać z rysunku, napięcie wprawdzie szybko narasta osiągając szybko wartość równą sile elektro-

motorycznej, ale następnie wychodzi poza zakreskowany obszar tak, że czas ładowania się kondensatora będzie równy t_3. Dalsze zmniejszanie oporu R powoduje zmniejszenie tłumienia $\delta = \frac{R}{2L}$ oraz zwiększenie pulsacji , a tym samym zmniejszenie okresu drgań T_0, co wydłuży czas ładowania.

Jak można zauważyć, dopuszczając tłumienie nieco mniejsze od tłumienia krytycznego, można by, przy dopuszczeniu lekkiej oscylacji, zawierającej się jednak w zakresie zakreskowanym, osiągnąć nieco mniejszy czas ładowania. Tym niemniej przy $\Delta E \to 0$ najszybsze ładowanie nastąpi przy tłumieniu krytycznym. Z powyższego wynika znaczenie tzw. tłumienia krytycznego obwodu jako przypadku, w którym następuje najszybsze naładowanie kondensatora.

2.3. Obwody z niezerowymi warunkami początkowymi

Przedstawimy metodę umożliwiającą sprowadzenie obwodów z niezerowymi warunkami początkowymi do obwodów z zerowymi warunkami początkowymi. Korzyści wynikające ze stosowawnia takiej metody polegają na dużej prostocie metod rozwiązywania obwodów z zerowymi warunkami początkowymi. Idea metody polega na zastąpieniu elementów z niezerowymi warunkami początkowymi układami zastępczymi, składającymi się z elementów z zerowymi warunkami początkowymi i dodatkowymi źródłami napięciowymi i prądowymi.

2.3.1. Układy zastępcze elementów z zerowymi warunkami początkowymi

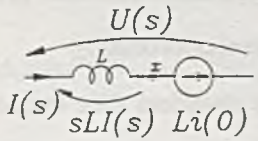
2.3.1.1. Indukcyjność

W rozdziale 2.1.5.3 przedstawiono związek między transformatami prądu i napięcia w postaci:

$$U(s) = sLI(s) - Li(0)$$

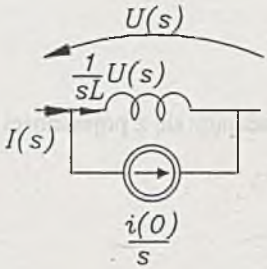
Traktując powyższe równanie jako równanie II prawa Kirchhoffa, można łatwo znaleźć układ zastępczy rys. 2.3.1, składający się z indukcyjności bez warunku początkowego (na której napięcie będzie równe $sLI(s)$) oraz siły elektromotorycznej o wartości $Li(0)$. Czasowo odpowiada to sile elektromotorycznej o kształcie funkcji Diraca i powierzchni $Li(0)$, bowiem

$$Li(0) \doteq Li(0)\delta(t)$$



Rys. 2.3.1

Wynika stąd, że indukcyjność z warunkiem początkowym $i(0)$ można zastąpić powyższym układem zastępczym.



Rys. 2.3.2

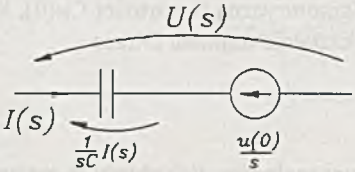
Równoważny układ zastępczy można uzyskać rozpatrując równanie wyrażające prąd przez napięcie

$$I(s) = \frac{1}{sL}U(s) + \frac{i(0)}{s}$$

W tym przypadku można, rozpatrując powyższe równanie jako równanie I prawa Kirchhoffa dla pewnego węzła, dojść do układu zastępczego (rys. 2.3.2), składającego się z indukcyjności bez warunku początkowego, na której panuje napięcie $U(s)$, połączonej równolegle z siłą prądomotoryczną stałą $i(0)$, bowiem $\frac{i(0)}{s} \triangleq i(0)$.

Oba układy zastępcze są równoważne.

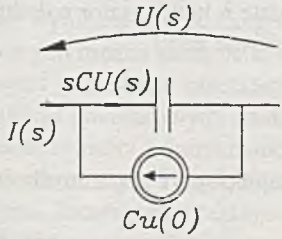
2.3.1.2. Pojemność



Rys. 2.3.3

Dla pojemności wyprowadzono w rozdziale 2.1.5.3 zależność napięcia od prądu w postaci:

$$\boxed{U(s) = \frac{1}{sC}I(s) + \frac{u(0)}{s}}$$



Rys. 2.3.4

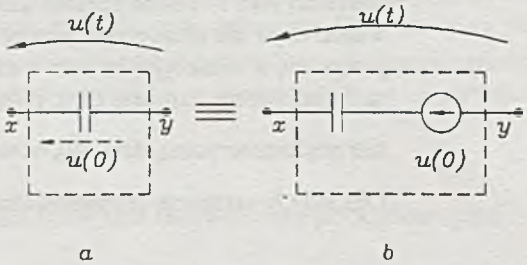
Dla tego równania, potraktowanego jako równanie II prawa Kirchhoffa, można wprowadzić układ zastępczy, składający się z pojemności bez warunku początkowego, na której napięcie wynosi $\frac{1}{sC}I(s)$, szeregowo połączonej z siłą elektromotoryczną $\frac{u(0)}{s}$, której czasowo odpowiada stała siła elektromotoryczna $u(0)$, bowiem

$$\frac{u(0)}{s} \triangleq u(0)$$

Dla prądu wyrażonego przez napięcie

$$\boxed{I(s) = sCU(s) - Cu(0)}$$

można otrzymać układ zastępczy przedstawiony na rys. 2.3.4, składający się z pojemności bez



Rys. 2.3.5

warunku początkowego, połączonej równolegle z siłą prądomotoryczną o wartości $Cu(0)$, której w dziedzinie czasu odpowiada siła prądomotoryczna o kształcie impulsu Diraca

$$Cu(0) \doteq Cu(0)\delta(t)$$

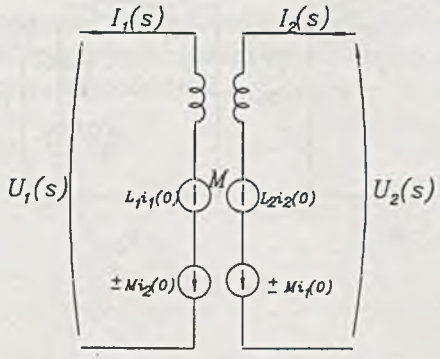
Powyższe układy zastępcze nie są pozbawione fizycznej realności. Pokażemy to na przykładzie szeregowego układu zastępczego pojemności. Kondensator naładowany do napięcia $u(0)$, układ z rys. 2.3.5a , jest nie do odróżnienia przez pomiary z zewnątrz od układu z rys. 2.3.5b. Mierząc napięcie na zaciskach obu układów (idealnym woltomierzem) otrzymamy tę samą wartość $u = u(0)$. Po zwarciu obu układów również otrzymamy te same wyniki $u = 0$. (Po zwarciu kondensator w układzie *a* rozładuje się, a w układzie *b* kondensator naładuje się do wartości $u(0)$ tak, że napięcie między punktami x i y będzie równe zeru).

2.3.1.3. Indukcyjność wzajemna

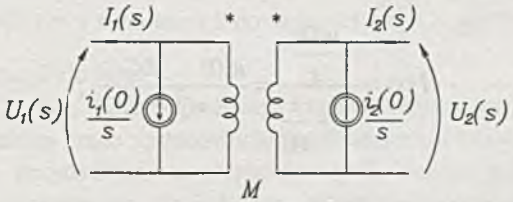
W rozdziale 2.1.5.4 wyprowadzono związki między napięciami i prądami dla indukcyjności wzajemnej.

$$\boxed{\begin{aligned} U_1(s) &= sL_1I_1(s) \pm sMI_2(s) - L_1i_1(0) \mp Mi_2(0) \\ U_2(s) &= \pm sMI_1(s) + sL_2I_2(s) \mp Mi_1(0) - L_2i_2(0) \end{aligned}}$$

Traktując te równania jako równania I prawa Kirchhoffa można wprowadzić układ zastępczy przedstawiony na rys. 2.3.6 . Można również wprowadzić drugi, równoważny układ zastępczy. Dla zgodnego połączenia cewek przedstawiony jest on na rys. 2.3.7.



Rys. 2.3.6



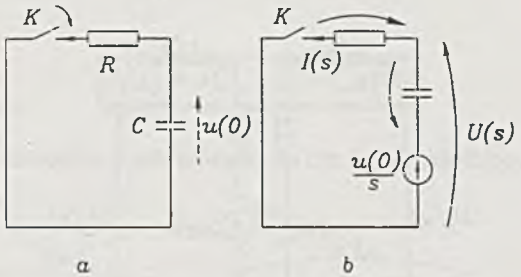
Rys. 2.3.7

2.3.2. Podstawy metody analizy obwodów z niezerowymi warunkami początkowymi

Jak wynika z poprzedniego rozdziału, wszystkie elementy z niezerowymi warunkami początkowymi można zastąpić układami zastępczymi, w których występują już tylko elementy z zerowymi warunkami początkowymi. W ten sposób można dowolny obwód z niezerowymi warunkami początkowymi zastąpić równoważnym obwodem, w którym wszystkie pojemności, indukcyjności i indukcyjności wzajemne mają zerowe warunki początkowe, a warunki początkowe zostały uwzględnione przez wprowadzenie dodatkowych sił elektro- i prądomotorycznych. Rozwiązanie takiego obwodu jest już łatwe. Przedstawimy najpierw kilka prostych przykładów.

2.3.3. Rozładowanie kondensatora przez opór

Na rys. 2.3.8a przedstawiono przypadek rozładowania kondensatora przez opór. Po zastąpieniu naładowanego do napięcia $u(0)$ kondensatora jego układem zastępczym otrzymujemy obwód z rys. 2.3.8b, który jest obwodem bez warunków początkowych. Dla niego można napisać II prawo Kirchhoffa w postaci:



Rys. 2.3.8

$$RI(s)+\frac{1}{sC}I(s)=\frac{u(0)}{s},$$

skąd otrzymujemy transformatę prądu

$$I(s)=\frac{\frac{u(0)}{s}}{R+\frac{1}{sC}}=\frac{u(0)}{R}\frac{RC}{(1+sRC)},$$

której odpowiada czasowy przebieg prądu

$$i=\frac{u(0)}{R}e^{-\frac{t}{T}},$$

gdzie $T = RC$ jest stałą czasową obwodu. Napięcie na kondensatorze $U(s)$ można obliczyć zauważając, że jest to również napięcie na oporze R

$$u = Ri = u(0)e^{-\frac{t}{T}}$$

Można również zauważyć, że napięcie na kondensatorze naładowanym jest to napięcie na układzie zastępczym a nie na samej pojemności układu zastępczego

$$U(s)=\frac{u(0)}{s}-I(s)\frac{1}{sC}$$

Otrzymamy zatem:

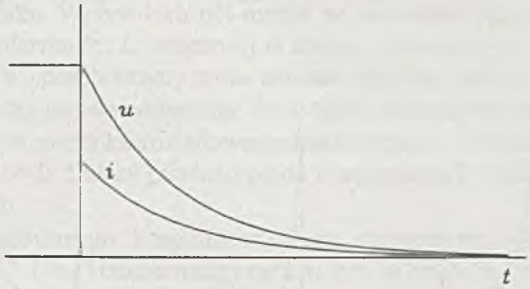
$$U(s)=u(0)\frac{RC}{1+sRC},$$

skąd

$$u=u(0)e^{-\frac{t}{T}}$$

Na podstawie otrzymanych wzorów na napięcie i prąd oraz z wykresów można stwierdzić:

- Napięcie opada monotonicznie z wartości $u(0)$ do zera. Szybkość rozładowania zależy od stałej czasowej $T = RC$ (po upływie czterech stałych czasowych napięcie spada do około 2% wartości początkowej , patrz dodatek B).

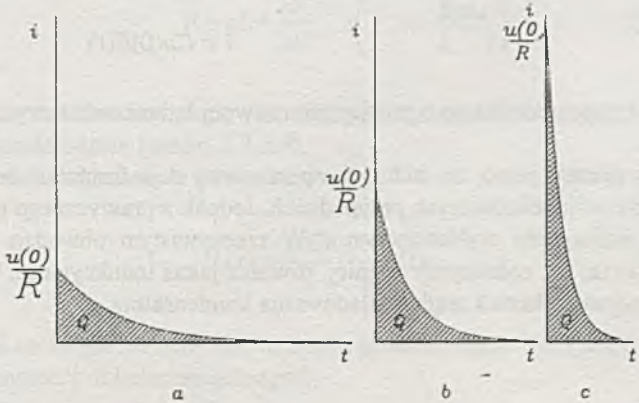


Rys. 2.3.9

- Prąd skacze w chwili $t = 0$ z wartości 0 do wartości $\frac{u(0)}{R}$, a potem zanika wykładniczo z tą samą stałą czasową T do zera.
- Im większy opór R, tym wolniej przebiega rozładowanie kondensatora. Na rys. 2.3.10 przedstawiono przebieg prądu rozładowania kondensatora w zależności od wartości oporu R. We wszystkich przypadkach powierzchnia pod krzywą prądu jest jednakowa, bowiem jest ona proporcjonalna do ładunku, który był zgromadzony na kondensatorze

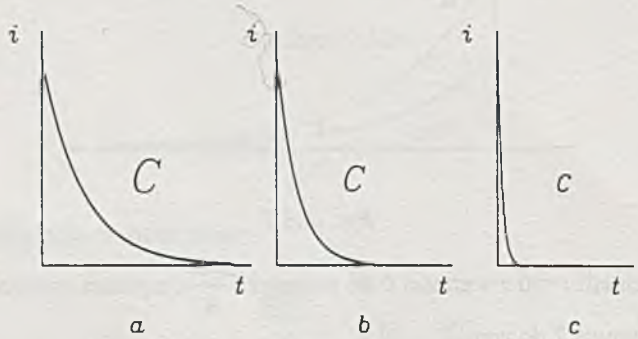
$$Q = Cu(0) = \int_0^{\infty} i dt$$

- Im mniejsza jest pojemność C rozładowywana przez ten sam opór R (rys. 2.3.11), tym krótszy jest impuls prądu (tym mniejsza stała czasowa obwodu $T = RC$), ale jego wysokość jest stała, zależy ona bowiem tylko od napięcia początkowego $u(0)$ oraz wartości oporu R.
- Praktycznie można zastosować rozładowania kondensatora przez opór przy spawaniu cien-

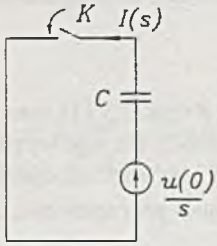


Rys. 2.3.10

kich drutów. Wtedy można, przez dobór wielkości pojemności oraz wartości napięcia $u(0)$, dokładnie dozować energię potrzebną do spawania. Można również zastosować rozładowanie kondensatora przez opór do generacji krótkich impulsów prądu o dużym natężeniu. Z drugiej strony zjawiska występujące przy zwieraniu kondensatora przez styki przekaźników mogą doprowadzić do powstania dużych natężeń prądu, a w przypadku istnienia dostatecznie dużej energii na kondensatorze do tzw. sklejania styków.



Rys. 2.3.11



Rys. 2.3.12

Jeżeli $R \to 0$, to dochodzimy do układu z rys. 2.3.12 . Stosowanie rachunku operatorowego pozwala na formalne rozwiązanie tego problemu. Transformata prądu w tym przypadku

$$I(s) = \frac{\frac{u(0)}{s}}{\frac{1}{sC}} = Cu(0),$$

skąd

$$i = Cu(0)\delta(t)$$

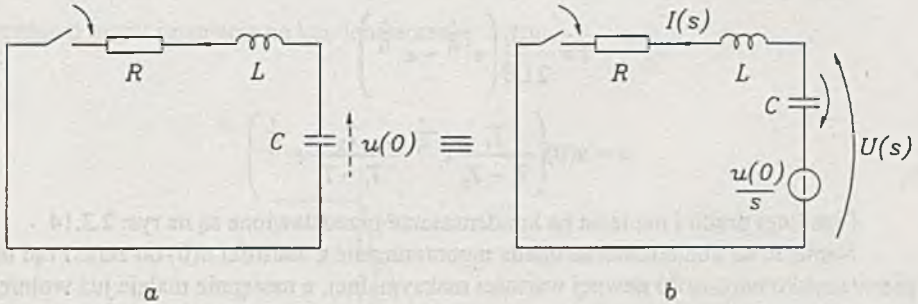
Prąd jest zatem impulsem Diraca o powierzchni równej ładunkowi, który znajdował się na kondensatorze.

Przykład ten wskazuje jasno, że rachunek operatorowy daje formalnie poprawne wyniki nawet w tak skrajnie wyidealizowanych przypadkach. Jednak z praktycznego punktu widzenia przykład ten jest nadmiernie wyidealizowany. W rzeczywistym obwodzie zawsze będzie obecny jakiś opór oraz, jak zobaczymy później, również jakaś indukcyjność. Te parametry w znaczny sposób wpłyną na kształt prądu rozładowania kondensatora.

2.3.4. Rozładowanie kondensatora przez opór i indukcyjność

Rozpatrzymy obecnie przypadek rozładowania kondensatora przez opór i indukcyjność. Uwzględnienie indukcyjności można uzasadnić tym, że w realnym obwodzie wokół przewodów, przez które płynie prąd, powstaje pole magnetyczne. Również sam kondensator przedstawia układ przewodników, wokół których powstaje pole magnetyczne. To samo można powiedzieć o samym oporniku. Wpływ tych pól można w pierwszym przybliżeniu uwzględnić przez wprowadzenie indukcyjności L, włączonej w szereg z oporem (rys. 2.3.13a). Wprowadzenie tej indukcyjności w sposób istotny może zmienić charakter przebiegów prądu i napięcia w obwodzie. Zauważmy przede wszystkim, że w takim układzie nie jest już możliwy nagły skok wartości prądu na początku rozładowania kondensatora - indukcyjność wymusza tu ciągłośc prądu w chwili $t = 0$. Dalszy przebieg prądu i napięcia na kondensatorze otrzymamy w wyniku analizy obwodu.

Po zastąpieniu naładowanego kondensatora jego szeregowym układem zastępczym otrzymamy układ z rys.2.3.13b. Transformatę prądu w tym układzie można otrzymać dzieląc



Rys. 2.3.13

transformatę siły elektromotorycznej przez impedancję obwodu:

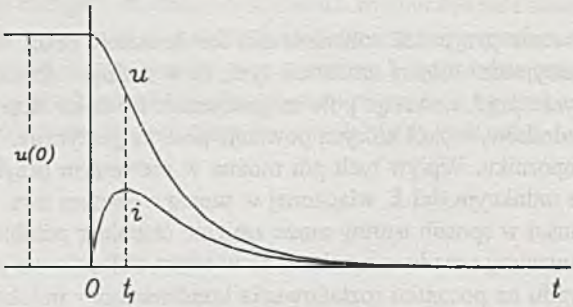
$$I(s) = \frac{\frac{u(0)}{s}}{R + sL + \frac{1}{sC}} = \frac{\frac{u(0)}{L}s}{s\left(s^2 + s\frac{R}{L} + \frac{1}{LC}\right)}$$

Wyrażenie dla transformaty prądu jest identyczne z wyrażeniem dla transformaty prądu przy ładowaniu kondensatora (rozdz. 2.2.4.4).

Dla napięcia na kondensatorze otrzymamy:

$$U(s) = \frac{u(0)}{s} - \frac{1}{sC}I(s)$$

(Uwaga: napięcie na kondensatorze jest to napięcie na układzie zastępczym kondensatora, a nie na samej pojemności układu zastępczego!).



Rys. 2.3.14

Stąd łatwo już otrzymać przebiegi czasowe dla trzech możliwych przypadków.

1. $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ obwód silnie tłumiony

$$i = \frac{u(0)}{2L\beta}\left(e^{-\frac{t}{T_1}} - e^{-\frac{t}{T_2}}\right)$$

$$u = u(0)\left(\frac{T_1}{T_1 - T_2}e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{T_2}{T_1 - T_2}e^{-\frac{t}{T_2}}\right)$$

Przebiegi prądu i napięcia na kondensatorze przedstawione są na rys. 2.3.14

Napięcie na kondensatorze opada monotonicznie z wartości $u(0)$ do zera. Prąd najpierw szybko narasta do pewnej wartości maksymalnej, a następnie maleje już wolniej do zera. Obecność indukcyjności w tym przypadku powoduje ciągłą postać prądu. Jeżeli $L \to 0$, to szybkość narastania prądu na początku wzrasta (rys. 2.3.15 przebieg *a*). W granicy otrzymamy przebieg prądu (przebieg *b*) identyczny z przypadkiem rozładowania kondensatora przez opór (rys. 2.3.15 przebieg b).

2. $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ obwód słabo tłumiony

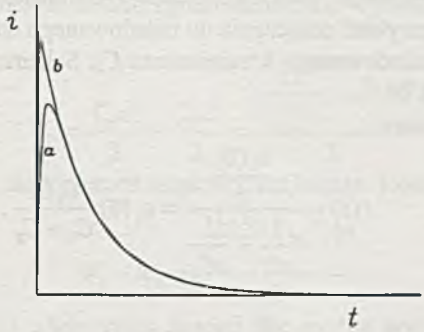
W tym przypadku otrzymamy następujące przebiegi prądu rozładowania i napięcia na kondensatorze:

$$i = \frac{u(0)}{\omega_0 L}e^{-\delta t}\sin\omega_0 t$$

$$u = \frac{u(0)}{\omega_0\sqrt{LC}}e^{-\delta t}\sin(\omega_0 t - \gamma),$$

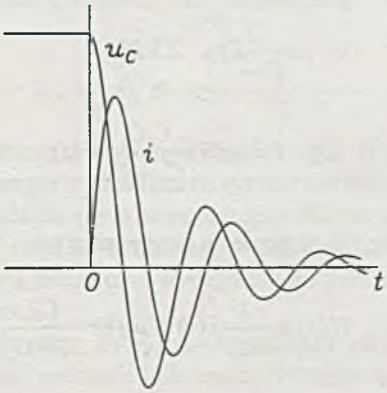
gdzie $\gamma = \operatorname{arctg}\frac{\delta}{\omega_0}$.

Rozładowanie kondensatora ma charakter oscylacyjny. Na rys. 2.3.16 przedstawiono



Rys. 2.3.15

przebiegi prądu i napięcia na kondensatorze.



Rys. 2.3.16

Częstotliwość drgań własnych obwodu $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$,

tłumienie drgań zależy od $\delta = \frac{R}{2L}$.

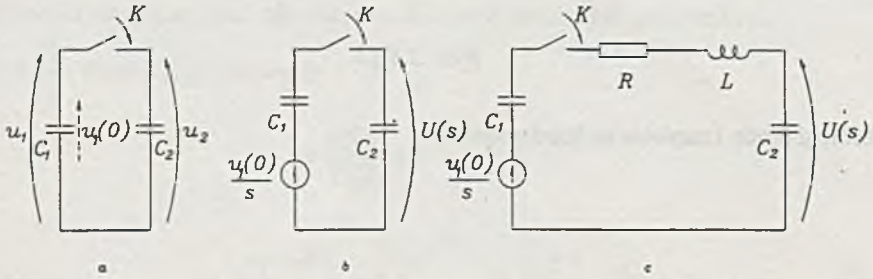
3. $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ jest to przypadek krytycznego tłumienia obwodu. W tym przypadku następuje najszybsze rozładowanie kondensatora.

2.3.5. Załączenie nienaładowanego kondensatora na kondensator naładowany

Na przykładzie rozładowania kondensatora można pokazać, jak nadmierne upraszczanie realnego obwodu przez pomijanie pewnych szczątkowych elementów może doprowadzić do sprzeczności. Rozważmy przykład dołączenia do naładowanego do napięcia $u_1(0)$ kondensatora C_1 (rys. 2.3.17a) nienaładowanego kondensatora C_2. Schemat zastępczy dla tego układu przedstawiono na rys. 2.3.17b.

Dla tego układu otrzymamy:

$$I(s) = \frac{\dfrac{u_1(0)}{s}}{\dfrac{1}{sC_1} + \dfrac{1}{sC_2}} = u_1(0)\frac{C_1C_2}{C_1 + C_2},$$



Rys. 2.3.17

skąd

$$i = u_1(0)\frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}\delta(t)$$

ma kształt impulsu Diraca, zaś napięcie na kondensatorach

$$U(s) = \frac{1}{sC_2}I(s) = u_1(0)\frac{C_1}{C_1 + C_2}\frac{1}{s}$$

w postaci czasowej

$$u = u_1(0)\frac{C_1}{C_1 + C_2}$$

ma wartość stałą, to znaczy, że napięcie na pierwszym kondensatorze maleje w chwili $t = 0$ z wartości $u_1(0)$ do powyższej wartości, zaś napięcie na drugim kondensatorze skokiem zmienia swą wartość z zera do tejże wartości. Wynik ten należałoby uznać za prawidłowy. Rzeczywiście ładunek na kondensatorze pierwszym $q = C_1u_1(0)$ po zamknięciu klucza znajdzie się na równoległym połączeniu dwóch kondensatorów (C_1 i C_2), zatem

$$u = \frac{q}{C_1 + C_2} = u_1(0)\frac{C_1}{C_1 + C_2}$$

Obliczmy jednak energię układu przed i po zamknięciu klucza. Przed zamknięciem klu-

cza cała energia zgromadzona jest w polu elektrycznym pierwszego kondensatora.

$$W_o = \frac{C_1 u_1(0)^2}{2}$$

Po zamknięciu klucza energia układu zgromadzona jest w polach elektrycznych obu kondensatorów

$$W_p = \frac{C_1 u^2}{2} + \frac{C_2 u^2}{2} = \frac{\frac{C_1^2}{C_1 + C_2} u_1^2(0)}{2}$$

Jest ona różna od energii układu przed zamknięciem klucza. Różnica energii wyniesie:

$$W_o - W_p = \frac{\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} u_1^2(0)}{2}$$

Tej sprzeczności z zasadą zachowania energii nie można wytłumaczyć przyjmując taki schemat zastępczy obwodu. Sprawa wyjaśnia się natychmiast, jeżeli w obwodzie zastępczym uwzględnimy opór R (rys. 2.3.17c). Możemy wtedy łatwo obliczyć prąd

$$i = \frac{u_1(0)}{R} e^{-\frac{t}{T}},$$

gdzie $T = R\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$,

a obliczając energię wydzieloną na tym oporze otrzymujemy:

$$W_R = \int_0^\infty R i^2 dt = \frac{\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} u_1^2(0)}{2}$$

i stwierdzamy, że jest to właśnie ta brakująca część energii. W powyższym wzorze nie występuje wartość oporu R, energia wydzielana na oporze nie jest więc zależna od jego wartości, zatem i dla $R \to 0$ wydzieli się ta sama energia. Można by się tego spodziewać i po tym, że w przypadku $R = 0$ prąd ma kształt impulsu Diraca, a więc w chwili $t = 0$ ma nieskończenie wielką wartość, a zatem moc wydzielona na nieskończenie małym oporze mogłaby mieć skończoną wartość.

Jeszcze bardziej realistyczne byłoby uwzględnienie również pewnej indukcyjności (rys. 2.3.17c) uwzględniającej obecność pola magnetycznego wokół obwodu.

2.3.6. Rozładowanie cewki przez opór

Na rys. 2.3.18a przedstawiono przypadek odłączenia cewki od źródła napięcia stałego. Przed odłączeniem przez cewkę płynął prąd

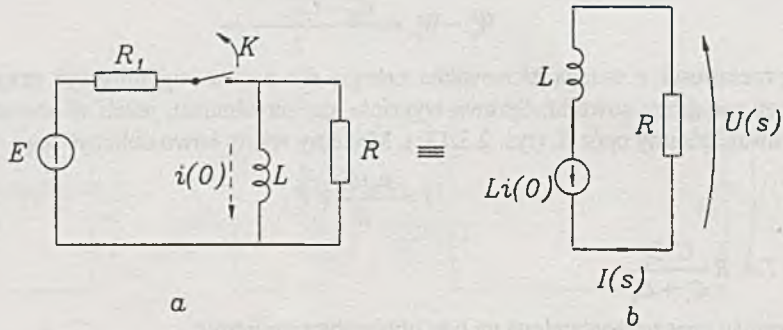
$$i(0) = \frac{E}{R_1},$$

zatem mamy tu przypadek obwodu z niezerowym warunkiem początkowym. Zgodnie z przedstawioną w rozdziale 2.3.2 metodą zastąpimy cewkę z warunkiem początkowym układem zastępczym, w wyniku czego otrzymamy obwód z rys. 2.3.18b. Prąd cewki

$$I(s)=\frac{Li(0)}{R+sL}=i(0)\frac{\frac{L}{R}}{1+s\frac{L}{R}}=i(0)\frac{1}{s+\frac{1}{T}},$$

skąd otrzymamy przebieg czasowy prądu

$$i=i(0)e^{-\frac{t}{T}},$$



Rys. 2.3.18

natomiast napięcie na cewce równe jest napięciu na oporze R (uwaga, na oporze strzałkowanie wydajnikowe, stąd znak minus)

$$U(s)=-RI(s)=-Ri(0)\frac{1}{s+\frac{1}{T}},$$

a więc

$$u=-E\frac{R}{R_1}e^{-\frac{t}{T}}$$

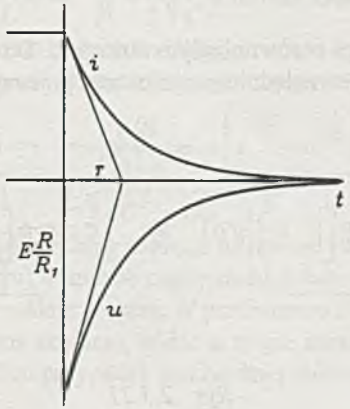
Stała czasowa obwodu wynosi $T=\frac{L}{R}$.

Przebiegi napięcia na cewce i prądu cewki przedstawione są na rys. 2.3.19.

- Prąd opada w sposób wykładniczy od wartości $i(0)$ do zera ze stałą czasową T.
- Napięcie na cewce skacze w chwili $t = 0_+$ od wartości 0 do wartości $u(0_+)=-E\frac{R}{R_1}$, a następnie wykładniczo maleje z tą samą stałą czasową T. Napięcie to może przyjmować duże wartości.

Występowanie dużych napięć na cewkach przy przełączaniach cewek może mieć szkodliwe następstwa. Na rys. 2.3.20 przedstawiono układ, w którym mierzy się napięcie na cewce

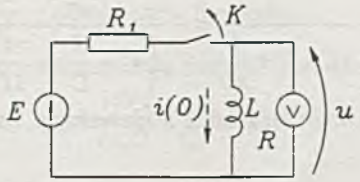
woltomierzem prądu stałego. Niech R będzie oporem wewnętrznym woltomierza. Załóżmy, że mamy woltomierz o zakresie 10 V i oporze wewnętrznym 10 kΩ/V, to opór R = 100 kΩ,



Rys. 2.3.19

zaś cewka załączona jest na źródło SEM E =10 V przez opór R_1 = 10 Ω . Po otworzeniu klucza otrzymamy układ identyczny z układem z rys. 2.3.18b, w którym

$$u(0_+) = -10\frac{100000}{10} = -100kV\ !!$$

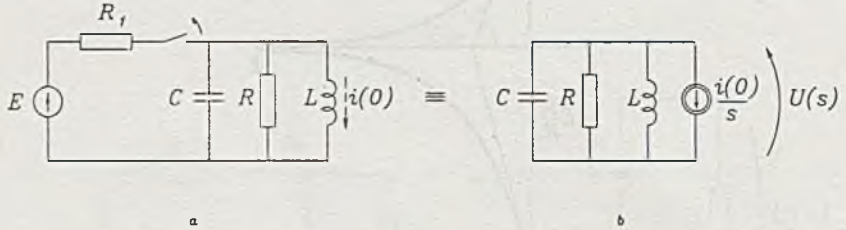


Rys. 2.3.20

Jeżeli w cewce była zmagazynowana dostatecznie duża energia, to wydzielając się na oporze wewnętrznym woltomierza może ona spalić cewkę woltomierza a działania dynamiczne mogą uszkodzić system ruchomy woltomierza.

2.3.7. Rozładowanie cewki przez opór i pojemność

Na rys. 2.3.21 przedstawiono obwód, w którym w chwili $t = 0$ zostanie otwarty klucz. W cewce istnieje warunek początkowy - prąd $i(0) = \frac{E}{R_1}$. Jest to przypadek rozładowania się cewki z warunku początkowego w równoległym obwodzie. Do takiego schematu prowadzi też układ z rys. 2.3.18a, jeżeli uwzględnimy w nim tzw. pojemność międzyzwojową cewki *).



Rys. 2.3.21

Wprowadzenie pojemności w sposób istotny zmieni kształt przebiegów prądów i napięć w obwodzie. Prąd płynący do chwili $t = 0$ przez cewkę może teraz po otwarciu klucza popłynąć nie tylko przez opór R, ale może również płynąć do pojemności C ładując ją. W związku z tym napięcie na cewce nie będzie się już skokowo zmieniać w chwili $t = 0$, ale będzie narastało w sposób ciągły. Rozpatrując obwód z rys. 2.3.21b można zauważyć, że najlepiej zastosować tu można metodę potencjałów węzłowych w celu obliczenia transformaty napięcia $U(s)$ na cewce

$$U(s)\left(sC + G + \frac{1}{sL}\right) = -\frac{i(0)}{s},$$

skąd

$$U(s) = -\frac{\frac{i(0)}{s}}{sC + G + \frac{1}{sL}} = -\frac{\frac{i(0)}{C}s}{s\left(s^2 + \frac{G}{C}s + \frac{1}{LC}\right)} = \frac{N(s)}{sM(s)}$$

Można teraz zastosować I wzór Heaviside'a zauważając, że

$$N(s) = -\frac{i(0)}{C}s$$

$$M(s) = s^2 + \frac{G}{C}s + \frac{1}{LC},$$

a pierwiastkami równania $M(s) = 0$ (biegunami funkcji $U(s)$) są:

$$s_{1,2} = -\frac{G}{2C} \pm \sqrt{\frac{G^2}{4C^2} - \frac{1}{LC}}$$

---

*) Pomiędzy poszczególnymi zwojami cewki istnieje różnica potencjałów, powstaje tam pole elektryczne, wobec tego mogą się na przewodnikach gromadzić ładunki elektryczne, co można w pierwszym przybliżeniu uwzględnić wprowadzając pojemność międzyzwojową cewki.

Podobnie jak w przypadku załączenia obwodu szeregowego *RLC* na napięcie stałe (rozdział 2.2.4.4) mamy tu do rozpatrzenia trzy przypadki.

1. $\frac{G^2}{4C^2} > \frac{1}{LC} \quad \Rightarrow \quad G > 2\sqrt{\frac{C}{L}} \quad \Rightarrow \quad R < \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}$ - obwód silnie tłumiony

Występuje on przy stosunkowo małych wartościach oporu *R*.W tym przypadku mamy dwa pierwiastki rzeczywiste, ujemne. Po zastosowaniu I. wzoru Heaviside'a otrzymamy:

$$u = -\frac{i(0)}{2C\sqrt{\frac{G^2}{4C^2} - \frac{1}{LC}}}\left(e^{-\frac{t}{T_1}} - e^{-\frac{t}{T_2}}\right)$$

Na rys. 2.3.22 przedstawiono przebieg napięcia na cewce. Po otwarciu klucza napięcie na cewce (które było równe zeru) w sposób ciągły stosunkowo szybko narasta, osiąga swoje maksimum, a potem wolno maleje do zera. W porównaniu z obwodem z rys. 2.3.18b, w którym napięcie zmieniało się skokiem, widać tu ciągłe narastanie napięcia spowodowane obecnością pojemności *C*. Ten przypadek jest bardziej zbliżony do rzeczywistości.

Rys. 2.3.22

2. $\frac{G^2}{4C^2} < \frac{1}{LC} \quad \Rightarrow \quad R > \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}$ - obwód słabo tłumiony

Ten przypadek występuje przy stosunkowo dużych wartościach oporu *R*. Wtedy

$$u = -\frac{i(0)}{\omega_0 C} e^{-\delta t} \sin \omega_0 t ,$$

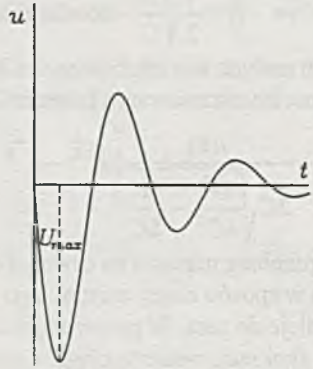
gdzie:

$$\delta = \frac{G}{2C}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{G^2}{4C^2}}$$

Na rys. 2.3.23 przedstawiono przebieg napięcia na cewce

Przebieg napięcia na cewce ma charakter oscylacyjny. Częstotliwość oscylacji $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{G^2}{4C^2}}$. Tłumienie oscylacji zależy od $\delta = \frac{G}{2C} = \frac{1}{2RC}$ - im większy opór *R*, tym mniejsze jest tłumienie drgań.

Maksymalne napięcie na cewce, w najbardziej niesprzyjających warunkach, wystąpi,



Rys. 2.3.23

gdy $R \to \infty$. Wtedy $\omega_0 \approx \frac{1}{\sqrt{LC}}$

$$U_{max} = \frac{E}{R_1 \omega_0 C} \approx \frac{E}{R_1 \sqrt{\frac{C}{L}}} = \frac{E}{R_1}\sqrt{\frac{L}{C}} = i(0)\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Zależy ono od stosunku L/C oraz prądu w cewce $i(0)$. Napięcie to może osiągać duże wartości. Na przykład dla $i(0) = 100$ mA , L = 50 mH oraz $C = 200$ pF otrzymamy:

$$U_m = 0.1\sqrt{\frac{50 \cdot 10^{-3}}{200 \cdot 10^{-12}}} = 1580\,\text{V}$$

Przerywanie prądu w cewce można zastosować do otrzymywania wysokich napięć Na tej zasadzie działają niektóre generatory wysokich napięć, a także zapłon iskrowy w silnikach spalinowych. Z drugiej strony każde przerwanie prądu w cewce powoduje powstanie dużych napięć na stykach wyłączników .

3. $\frac{G^2}{4C^2} = \frac{1}{LC} \Rightarrow R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}$ - obwód krytycznie tłumiony

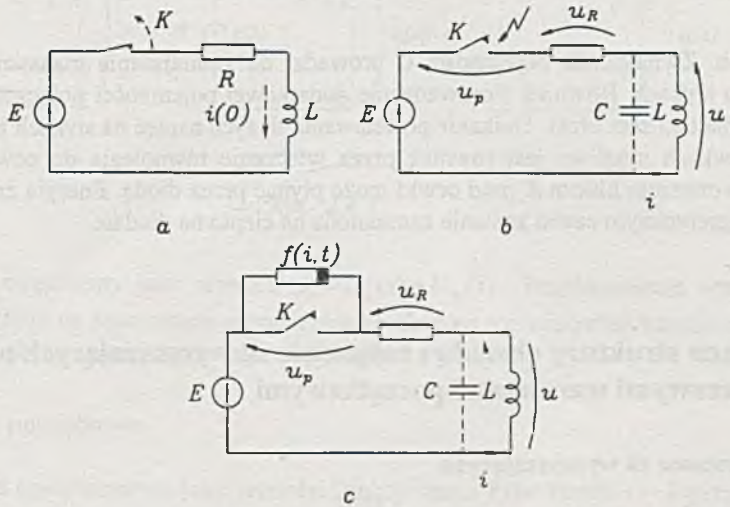
Jest to przypadek najszybszego rozładowania kondensatora (podobny do przypadku najszybszego ładowania kondensatora, rozdział 2.2.4.4, punkt 3). Kształt przebiegu napięcia nie różni się od kształtu w przypadku obwodu silnie tłumionego.

Rozpatrzmy teraz dokładniej zjawiska zachodzące przy przerywaniu prądu w cewce. Na rys. 2.3.24a przedstawiono obwód, w którym w chwili $t = 0$ otwiera się klucz K. Przed otwar-

ciem klucza przez cewkę płynął prąd $i(0) = \frac{E}{R}$. Jak wynika z poprzednich rozważań, w obwodzie tym należy uwzględnić pojemność międzyzwojową C (rys. 2.3.24b). Zwrócimy szczególną uwagę na napięcie na stykach klucza u_p

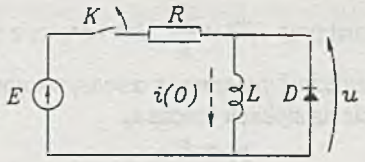
$$u_p = E - u_R - u$$

Zakładamy, że w chwili $t = 0$ styki klucza zaczynają się oddalać od siebie z określoną



Rys. 2.3.24

prędkością. Bezpośrednio po utracie kontaktu styków (rys. 2.3.24b). prąd cewki, który dotychczas płynął ze źródła E przez opór R, popłynie teraz do kondensatora C ładując go. Napięcie na kondensatorze, równe napięciu na cewce u, zacznie narastać, a tym samym narastać będzie napięcie na stykach klucza (teraz $u_p = E - u$, bo $u_R = 0$). W pewnej chwili, w wyniku narastania napięcia na stykach i związanego z tym narastania natężenia pola elektrycznego między stykami, może dojść do przebicia przerwy powietrznej między stykami, co spowoduje powstanie wyładowania iskrowego lub łukowego a w wyniku tego przepływ prądu przez przerwę między stykami. Od tej chwili mamy już do czynienia z obwodem z rys. 2.3.24c, w którym wprowadzono element nieliniowy, który dodatkowo zależny jest od czasu, bo rozwierające się dalej styki zmieniają swoją odległość. Rozpatrując te zjawiska od strony energetycznej możemy stwierdzić, że energia początkowo zmagazynowana w polu magnetycznym cewki zamienia się stopniowo na energię pola elektrycznego kondensatora i ulega zamianie na ciepło na oporze R oraz oporze nieliniowym $f(i,t)$. Styki klucza w dalszym ciągu oddalają się od siebie. W pewnej chwili napięcie na stykach zmaleje do tego stopnia, że wyładowanie łukowe (bądź iskrowe) nie będzie już podtrzymane, prąd przez styki przestanie płynąć - dalszy przebieg napięcia odbywać się będzie znów zgodnie z rys. 2.3.24b. Ścisła analiza matematyczna tego przypadku jest bardzo trudna, mamy bowiem do czynienia z obwodem nieliniowym, w którym dodatkowo występuje element zależny od czasu. Oczywiście, do wyładowania łukowego lub iskrowego może nie dojść w wyniku bardzo dużej prędkości otwierania styków bądź wolnego narastania napięcia na stykach. Wtedy cały proces odbywa się zgodnie z obwodem z



Rys. 2.3.25

rys. 2.3.24b. Zwiększanie pojemności C prowadzi do zmniejszania maksymalnej wartości napięcia na stykach. Również wprowadzenie dodatkowej pojemności połączonej równolegle do klucza ma taki sam efekt. Unikanie powstawania dużych napięć na stykach przerywających prąd w cewkach możliwe jest również przez włączenie równolegle do cewki diody (rys. 2.3.25). Po otwarciu klucza K prąd cewki może płynąć przez diodę. Energia zmagazynowana w polu magnetycznym cewki zostanie zamieniona na ciepło na diodzie.

2.4. Zmiana struktury obwodu i załączanie sił wymuszających na obwody z niezerowymi warunkami początkowymi

2.4.1. Załączanie sił wymuszających

Załóżmy, że mamy do czynienia z obwodem, w którym istnieją niezerowe warunki początkowe, załączanym na zewnętrzne siły wymuszające. W wyniku zastąpienia wszystkich elementów L, C i M z niezerowymi warunkami początkowymi przez układy zastępcze, składające się z elementów bez warunków początkowych i sił elektro- i prądomotorycznych, reprezentujących te warunki początkowe, powstaje obwód z zerowymi warunkami początkowymi z większą liczbą sił wymuszających. Siły te można podzielić na dwie grupy:

1. Siły wymuszające „zewnętrzne" (załączane na obwód)
2. Siły wymuszające „wewnętrzne" (reprezentujące warunki początkowe).

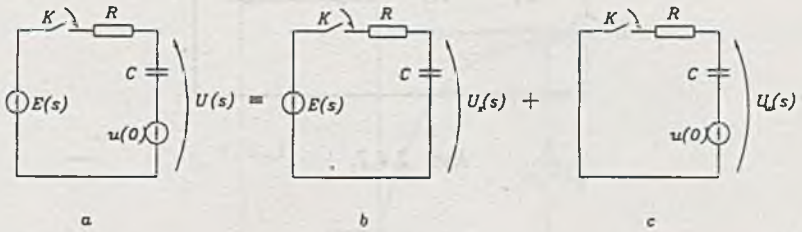
W myśl zasady superpozycji można rozpatrywać każdy prąd lub napięcie obwodu jako sumę dwóch składowych - jedną spowodowaną przez siły zewnętrzne działające na obwód z zerowymi warunkami początkowymi oraz drugą, spowodowaną przez warunki początkowe.

Można zatem każde zagadnienie sprowadzić do dwóch części:

1. Obliczanie stanu nieustalonego w obwodzie z zerowymi warunkami początkowymi
2. Obliczanie stanu nieustalonego spowodowanego wyładowaniem się warunków początkowych.

Dla przykładu rozpatrzmy załączanie siły elektromotorycznej e na obwód RC z warunkiem początkowym (kondensator naładowany do napięcia $u(0)$). Po zastąpieniu naładowanego kondensatora jego układem zastępczym otrzymamy układ z rys. 2.4.1a. Według zasady superpozycji można osobno obliczyć składową napięcia na kondensatorze,pochodzącą od zewnętrznej

siły elektromotorycznej $E(s)$ - $U_z(s)$ (rys. 2.4.1b) oraz składową pochodzącą od rozładowania kondensatora z jego warunku początkowego - $U_w(s)$ (rys. 2.4.1c).



Rys. 2.4.1

Ostatecznie otrzymamy jako wynik $U(s) = U_z(s) + U_w(s)$. Przedstawienie wyniku jako sumy reakcji układu na zewnętrzne wymuszenie i reakcji na rozładowanie warunków początkowych ułatwia obliczenia i interpretację otrzymanych wyników.

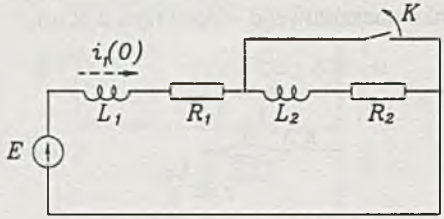
2.4.2. Warunki początkowe

W rachunku operatorowym jako wartości funkcji czasu $f(t)$ w chwili $t = 0$ przyjmuje się wartość dla $t = 0_+$, czyli wartość $f(0_+)$ [2]. Ponieważ chodzi tu zazwyczaj o wartości napięć na kondensatorach i wartości prądu w cewkach, to w realnych obwodach wartości te dla $t = 0_-$ oraz $t = 0_+$ są sobie równe (nie może być skokowych zmian wartości napięć na kondensatorach i skokowych zmian wartości prądów w cewkach). Jednakże przy zbytniej idealizacji obwodu takie przypadki mogą zaistnieć. Jeżeli to nastąpi, oznacza to, że obwód został nadmiernie uproszczony. Mimo to rachunek operatorowy pozwala i w tym przypadku uzyskać formalnie poprawne wyniki. Wiąże się to jednak z powstaniem napięć na cewkach oraz prądów w kondensatorach o kształcie funkcji Diraca, a więc fizycznie nierealnych. W takim przypadku staje się konieczne uwzględnienie dodatkowych elementów obwodu (elementów pasożytniczych). Z takim przypadkiem mieliśmy już do czynienia w rozdziale 2.3.3. W następnym rozdziale pokażemy inny przykład.

2.4.3. Zmiana struktury obwodu

Na rys. 2.4.2 przedstawiono przypadek w którym w chwili $t = 0$ został otwarty klucz K, a tym samym zmieniła się struktura obwodu. Łatwo zauważyć, że w tym przypadku przed otwarciem klucza prąd płynął tylko przez cewkę L_1, przez cewkę L_2 nie płynął żaden prąd. Po otwarciu klucza „K" przez obie cewki musi popłynąć ten sam prąd. W tym przypadku musi dojść do skokowej zmiany prądu w obu cewkach. W chwili $t = 0_-$ - mamy bowiem

$$i_1(0_-) = \frac{E}{R_1} \qquad i_2(0_-) = 0,$$

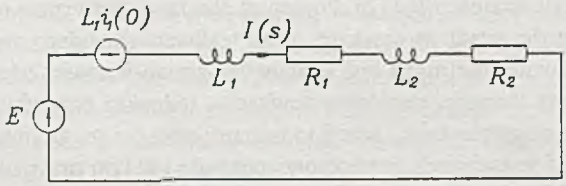


Rys. 2.4.2

a w stanie ustalonym :

$$i(\infty) = \frac{E}{R_1 + R_2}$$

Stosując rachunek operatorowy, można formalnie obliczyć przebiegi prądu i napięć na cewkach. Zastępując cewkę z warunkiem początkowym jej układem zastępczym, otrzymamy obwód przedstawiony na rys. 2.4.3. Taki obwód łatwo już rozwiązać.



Rys. 2.4.3

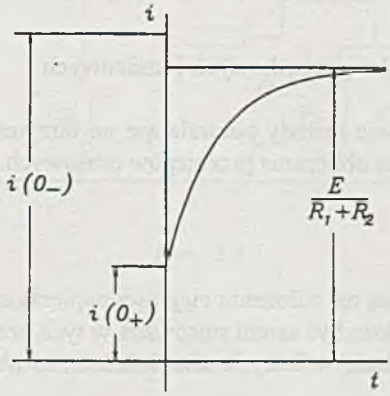
Prąd po otwarciu klucza

$$I(s) = \frac{\frac{E}{s} + L_1 i_1(0)}{R_1 + R_2 + s(L_1 + L_2)},$$

skąd otrzymamy :

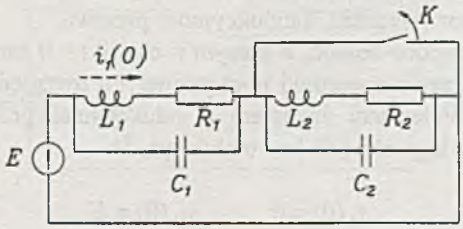
$$i = \frac{E}{R_1 + R_2} - \left(\frac{E}{R_1 + R_2} - \frac{L_1}{L_1 + L_2} i_1(0_-) \right) e^{-\frac{t}{T}}$$

Przebieg czasowy prądu przedstawiony jest na rys. 2.4.4.



Rys. 2.4.4

Widać stąd, że w pierwszej cewce prąd w chwili $t = 0$ skokiem zmienia swoją wartość z $i(0_-) = \frac{E}{R_1}$ do wartości $i(0_+) = \frac{L_1}{L_1 + L_2} i(0_-)$, a następnie wykładniczo narasta do wartości $i(\infty) = \frac{E}{R_1 + R_2}$. Natomiast prąd w drugiej cewce skacze z wartości 0 do wartości $i(0_+)$, a następnie narasta do wartości $i(\infty)$. Takie skoki prądu w cewkach prowadzą do powstania impulsów napięcia na obu cewkach w kształcie funkcji Diraca, co łatwo sprawdzić. Ten formalnie poprawny wynik jest jednak z praktycznego punktu widzenia bezużyteczny. Przy tak dużych impulsach napięcia na cewkach nawet bardzo małe pojemności (pojemności międzyzwojowe cewek) będą miały duży wpływ na przebiegi. Bardziej realistyczny będzie zatem schemat zastępczy powyższego obwodu w postaci przedstawionej na rys. 2.4.5, gdzie uwzględniono pojemności międzyzwojowe cewek



Rys. 2.4.5

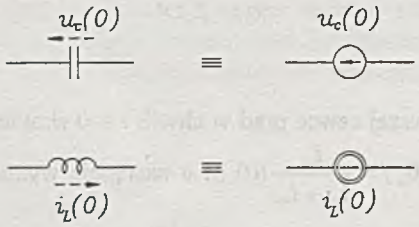
W takim obwodzie po otwarciu klucza K prąd $i_1(0)$ może popłynąć do kondensatorów C_1 i C_2 ładując je. Nie wystąpią tu skoki wartości prądu w cewkach, nie powstaną też nieskończenie duże napięcia na indukcyjnościach. Obliczenie napięć i prądów w tym obwodzie nie stanowi większych trudności.

2.4.4. Wyznaczanie warunków początkowych i końcowych

Przedstawimy obecnie dwie metody pozwalające na otrzymanie wartości przebiegów w chwilach $t = 0_+$ oraz $t = \infty$ bez obliczania przebiegów czasowych.

2.4.4.1. Metoda „fizyczna"

Pierwsza metoda opiera się na założeniu ciągłości napięcia na kondensatorach i ciągłości prądu w indukcyjnościach. Może być zatem stosowana w tych przypadkach, w których jest to spełnione a zatem w obwodach, w których uwzględniono niezbędne elementy szczątkowe (pasożytnicze).



Rys. 2.4.6

W obwodach z niezerowymi warunkami początkowymi, w chwili $t = 0_+$, napięcia na kondensatorach równe są napięciom, jakie istniały na nich w chwili $t = 0_-$, zaś prądy w indukcyjnościach są równe prądom istniejącym w indukcyjnościach w chwili $t = 0_-$, zatem można w tejże chwili $t = 0_+$ każdy kondensator zastąpić siłą elektromotoryczną równą napięciu na tym kondensatorze $u_C(0)$, a każdą indukcyjność siłą prądomotoryczną o wartości $i_L(0)$, (rys. 2.4.6).

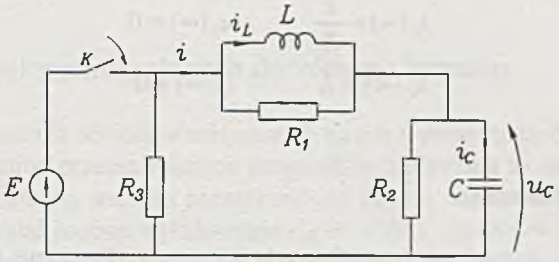
Dla obwodów z zerowymi warunkami początkowymi można zatem w pierwszej chwili zastąpić każdy kondensator zwarciem, a indukcyjność przerwą.

Na rys. 2.4.7 przedstawiono obwód, w którym w chwili $t = 0$ zamknięto klucz K.

W obwodzie istnieją zerowe warunki początkowe. Po uwzględnieniu faktu, że w chwili $t = 0$ można zastąpić kondensator zwarciem a indukcyjność przerwą, otrzymamy obwód z rys. 2.4.8. Na podstawie tego obwodu łatwo obliczyć, że

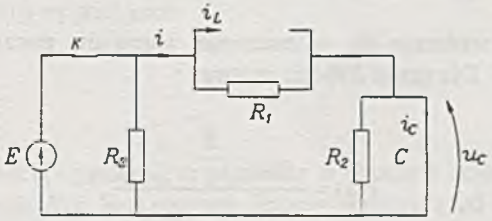
$$i_L(0) = 0 \qquad u_L(0) = E$$

$$u_C(0) = 0 \qquad i_C(0) = \frac{E}{R_1}$$



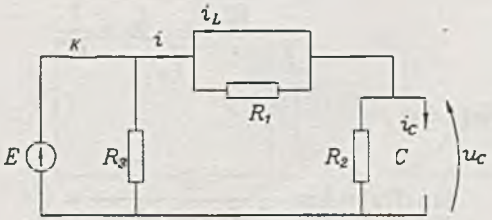
Rys. 2.4.7

Jeżeli w obwodzie działają wyłącznie stałe siły elektromotoryczne, to w stanie ustalonym



Rys. 2.4.8

($t = \infty$) wszystkie napięcia na indukcyjnościach oraz wszystkie prądy w kondensatorach muszą być równe zeru. Można zatem w stanie ustalonym zastąpić wszystkie indukcyjności zwarciami, a wszystkie kondensatory przerwami (rys. 2.4.9).



Rys. 2.4.9

W tym obwodzie

$$i_L(\infty) = \frac{E}{R_2} \qquad u_L(\infty) = 0$$

$$u_C(\infty) = E \qquad i_C(\infty) = 0$$

2.4.4.2. Metoda operatorowa

Do wyznaczania warunków początkowych i końcowych można też zastosować tzw. twierdzenia o wartościach skrajnych [2] :

$$\boxed{\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} f(t) &= \lim_{s\to 0} sF(s) \\ \lim_{t\to 0_+} f(t) &= \lim_{s\to\infty} sF(s) \end{aligned}}$$

o ile te granice istnieją.

Zastosujemy te twierdzenia do wyznaczenia warunków początkowych i końcowych w obwodzie z rys. 2.4.7. Dla prądu $I(s)$ otrzymamy:

$$I(s) = \frac{\dfrac{E}{s}}{\dfrac{R_1 sL}{R_1 + sL} + \dfrac{R_2 \dfrac{1}{sC}}{R_2 + \dfrac{1}{sC}}},$$

skąd dla warunku początkowego ($t = 0$) otrzymamy

$$i(0) = \lim_{s\to\infty} sI(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{E}{\dfrac{R_1 L}{\dfrac{R_1}{s} + L} + \dfrac{R_2 \dfrac{1}{sC}}{R_2 + \dfrac{1}{sC}}} = \frac{E}{R_1}$$

Dla warunku końcowego ($t = \infty$):

$$\lim_{s\to 0} sI(s) = \lim_{s\to 0} \frac{E}{\dfrac{R_1 sL}{R_1 + sL} + \dfrac{R_2}{1 + sR_2 C}} = \frac{E}{R_2}$$

2.5. Załączanie sił wymuszających dowolnego kształtu

Układanie równań dla obwodów załączanych na siły wymuszające dowolnego kształtu nie różni się od poprzednio przedstawianych przypadków załączania na stałe siły wymuszające. Jeżeli w obwodzie istnieją warunki początkowe, to zawsze można, korzystając z zasady superpozycji, rozpatrywać osobno wyładowanie się obwodu z warunków początkowych a osobno załączanie obwodu, już bez warunków początkowych, na siły dowolnego kształtu. Pokażemy kilka możliwych sposobów analizy obwodu załączanego na siły wymuszające dowolnego kształtu.

2.5.1. Metoda bezpośredniego korzystania z I wzoru Heaviside'a

Jeżeli w obwodzie z zerowymi warunkami początkowymi działa tylko jedna siła wumuszająca (elektromotoryczna $e(t)$ lub $i(t)$, ogólnie $w(t)$), to zawsze można dowolny prąd $i(t)$ lub napięcie $u(t)$ ogólnie $f(t)$) wyrazić jako:

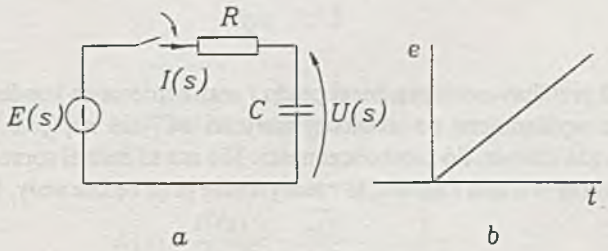
$$F(s) = K(s)W(s)$$

(patrz rozdział 2.2.3.4).

Jeżeli $W(s)$ jest funkcją wymierną, to ponieważ w układach składających się z elementów skupionych transmitancja $K(s)$ jest również funkcją wymierną od s, można zastosować do przejścia na formę czasową I wzór Heaviside'a, przedstawiając $F(s)$ w postaci:

$$F(s) = \frac{N(s)}{sM(s)}$$

Pokażemy to na przykładzie załączania liniowo wzrastającej siły elektromotorycznej $e(t) = at$ na obwód RC (rys. 2.5.1)



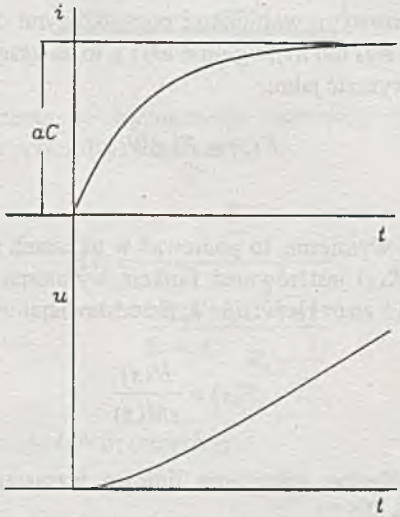
Rys. 2.5.1

W tym przypadku $E(s)=\frac{a}{s^2}$, a zatem transformata prądu

$$I(s)=\frac{E(s)}{R+\frac{1}{sC}}=\frac{\frac{a}{s^2}}{R+\frac{1}{sC}}=\frac{aC}{s(1+sRC)},$$

skąd po zastosowaniu I wzoru Heaviside'a (2.2.10) otrzymamy:

$$i=aC+\frac{aC}{-\frac{1}{T}}e^{-\frac{t}{T}}=aC\left(1-e^{-\frac{t}{T}}\right)$$



Rys. 2.5.2

Na rys. 2.5.2 przedstawiono przebiegi prądu *i* oraz napięcia na kondensatorze *u*.

Prąd narasta wykładniczo do ustalonej wartości *aC*, zaś napięcie wzrasta na początku wolno, w końcu zaś liniowo do nieskończoności. Nie ma tu żadnej sprzeczności. Jeżeli napięcie na kondensatorze wzrasta liniowo, to rzeczywiście prąd będzie stały, bowiem przy $u = at$

$$i=C\frac{du}{dt}=C\frac{d(at)}{t}=aC$$

2.5.2. Metoda splotu funkcji

W tej metodzie nie ma żadnych ograniczeń na kształt funkcji czasu (jej transformata może być funkcją niewymierną) ani na kształt transmitancji (może ona też być funkcją niewymierną). Ponieważ, tak jak w poprzednim rozdziale,

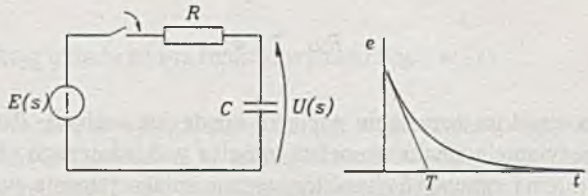
$$F(s) = K(s)W(s)$$

a więc $F(s)$ jest iloczynem dwóch transformat, można zatem skorzystać z twierdzenia o splocie w dziedzinie czasu (dodatek A), skąd

$$\boxed{\begin{aligned} f(t) &= \int_0^t k(\tau)w(t-\tau)d\tau \\ f(t) &= \int_0^t k(t-\tau)w(\tau)d\tau \end{aligned}}$$

Znając czasową postać transmitancji można więc obliczyć reakcję układu na dowolne wymuszenie.

Dla przykładu rozpatrzymy załączanie impulsu wykładniczego o stałej czasowej T na obwód RC (rys. 2.5.3). Obliczymy przebieg napięcia na kondensatorze u.



Rys. 2.5.3

W tym przypadku $e(t) = Ee^{-\frac{t}{T}}$, zaś transmitancja układu

$$K(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{1 + sT_1}$$

Rozpatrzymy tu przypadek szczególny, w którym stała czasowa funkcji wymuszającej T jest równa stałej czasowej obwodu $T_1 = T$. W tym szczególnym przypadku korzystanie ze

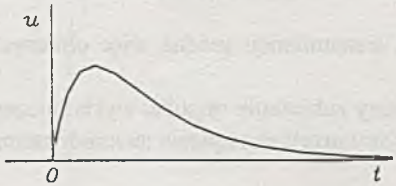
wzoru Heaviside'a jest niemożliwe, gdyż, jak łatwo sprawdzić, $M(s)$ ma pierwiastek podwójny w miejscu $s_{1,2} = -\frac{1}{T}$. Należałoby tu zastosować wersję wzoru Heaviside'a dla pierwiastków wielokrotnych. Stosując jednak metodę splotu funkcji, nie natrafiamy na trudności. Mamy bowiem

$$k(t) = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}}$$

(dla obliczenia czasowej formy transmitancji można by skorzystać ze wzoru Heaviside'a bądź ze słownika), zatem korzystając z twierdzenia o splocie otrzymamy:

$$u(t) = \int_0^t \frac{1}{T} e^{-\frac{\tau}{T}} E e^{-\frac{t-\tau}{T}} d\tau = \frac{E}{T} e^{-\frac{t}{T}} \int_0^t d\tau = \frac{E}{T} t e^{-\frac{t}{T}}$$

(Uwaga - całkujemy względem τ !). Przebieg napięcia przedstawiony jest na rys. 2.5.4.



Rys. 2.5.4

Po stosunkowo szybkim narastaniu napięcie opada już wolniej. Rozpatrując powyższy przypadek jako przesyłanie sygnału w postaci impulsu wykładniczego przez układ o powyższej transmitancji, można zauważyć charakterystyczne zniekształcenie sygnału przechodzącego przez taki układ.

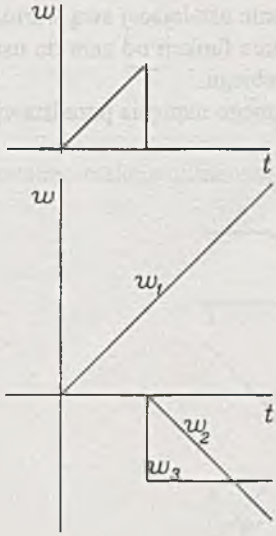
- Zamiast skoku w chwili $t = 0$ z wartości 0 do wartości E sygnał wyjściowy (napięcie na kondensatorze) narasta w sposób ciągły, nie osiągając pełnej wartości maksymalnej (E). Szybkość narastania zależy od stałej czasowej obwodu T.
- Kształt sygnału wyjściowego jest nieco „rozmyty"(wydłużony).

Zastosowanie metody splotu funkcji jest bardzo skutecznym sposobem obliczania reakcji układu na nawet skomplikowane kształty wymuszeń.

2.5.3. Metoda rozkładu funkcji wymuszającej na proste składowe

W przypadku złożonych funkcji wymuszających $w(t)$ można posłużyć się aproksymacją funkcji wymuszającej za pomocą prostszych funkcji. Najbardziej celowa okazuje się aproksymacja za pomocą sumy prostszych funkcji $w_i(t)$:

$$w(t) = \sum_{i=1}^{n} w_i(t)$$



Rys. 2.5.5

Pozwala to na skorzystanie z zasady superpozycji przy analizie układów. W myśl zasady superpozycji - w układach liniowych - reakcja układu na sumę funkcji wymuszających jest sumą reakcji układu na poszczególne funkcje wymuszające. Mamy bowiem:

$$W(s) = \sum_{i=1}^{n} W_i(s)$$

Reakcja układu na to wymuszenie zgodnie z 2.2.2 ma postać:

$$F(s) = K(s)W(s) = \sum_{i=1}^{n} K(s)W_i(s) = \sum_{i=1}^{n} F_i(s),$$

czyli

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t),$$

gdzie $f_i(t)$ jest reakcją układu na i-tą funkcję wymuszającą $w_i(t)$.

Zastosujemy tę metodę do aproksymacji funkcji wymuszającej linią łamaną. Na rys. 2.5.5 przedstawiono funkcję wymuszającą w postaci impulsu trójkątnego. Jak widać z rysunku, można taki impuls przedstawić jako sumę trzech prostych funkcji:

$w_1(t) = at\,1(t)$ - liniowo wzrastającej

$w_2(t) = -a(t-\tau)1(t-\tau)$ - liniowo opadającej

$w_3(t) = -a\tau 1(t-\tau)$ - skokowej opóźnionej

$$w(t) = w_1(t) + w_2(t) + w_3(t)$$

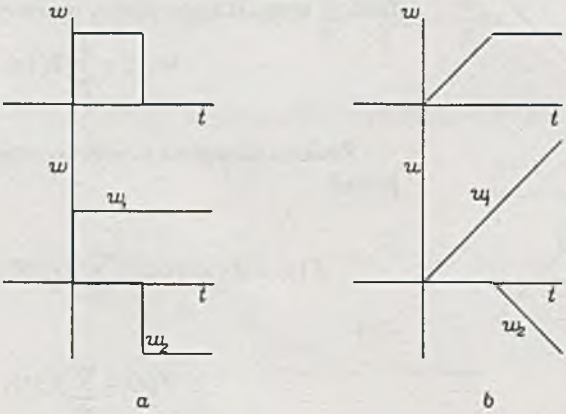
Wprowadzenie funkcji opóźniającej $1(t-\tau)$ jest konieczne w celu wyzerowania funkcji $w_i(t)$ dla $t < \tau$, bowiem

$$1(t-\tau)=\begin{cases}0 \text{ dla } t<\tau \\ 1 \text{ dla } t>\tau\end{cases}$$

W tym przypadku aproksymacja jest dokładna. Obliczanie reakcji układu na takie proste funkcje jest również proste.

Na rys. 2.5.6 przedstawione są rozkład impulsu prostokątnego na sumę dwóch funkcji skokowych oraz funkcji liniowo narastającej do chwili τ, a następnie ustalającej swą wartość. Ta ostatnia funkcja stanowi bardziej realistyczny przebieg narastania funkcji od zera do ustalonej wartości, uwzględnia bowiem skończony czas narastania przebiegu.

Dla przykładu przedstawimy przechodzenie impulsu prostokątnego napięcia przedstawio-



Rys. 2.5.6

nego na rys. 2.5.7c przez układ *RC* (rys. 2.5.7a). Układ ten równoważny jest układowi z rys 2.5.7b.

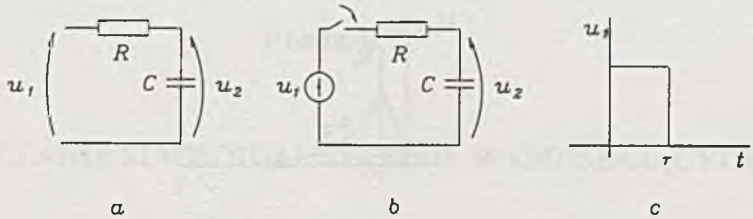
Rozkładając impuls prostokątny na dwie funkcje skokowe (rys. 2.5.6a)

$$u_1 = u_{11} + u_{12},$$

przy czym $u_{11} = E1(t)$, a $u_{12} = -E1(t-\tau)$, możemy osobno obliczyć reakcję układu na pierwszą składową

$$u_{21} = E(1-e^{-\frac{t}{T}})$$

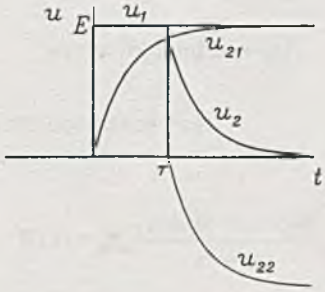
(patrz rys. 2.5.8)



Rys. 2.5.7

a osobno reakcję układu na drugą (opóźnioną) funkcję skokową

$$u_{22} = -E(1 - e^{\frac{t-\tau}{T}})1(t-\tau)$$



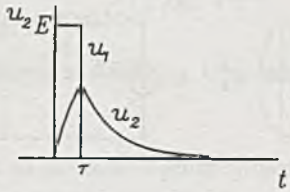
Rys. 2.5.8

(u_{22} dla $t<\tau$ jest równe zeru, dlatego konieczne jest uwzględnienie tu funkcji $1(t-\tau)$).

Całkowita reakcja układu jest zatem równa:

$$u_2 = u_{21} + u_{22} = E(1 - e^{\frac{t}{T}}) - E(1 - e^{\frac{t-\tau}{T}})1(t-\tau)$$

Jak widać, przy przechodzeniu impulsu prostokątnego przez taki układ następuje jego odkształcenie. Polega ono głównie na tym, że na wyjściu układu skończone są szybkości narastania i opadania napięcia u_2. Impuls wyjściowy jest wydłużony (rozmyty), jego wysokość jest obniżona. Jeżeli czas trwania impulsu τ jest mały w porównaniu ze stałą czasową układu T, rys. 2.5.9, to impuls wyjściowy staje się jeszcze mniejszy, przybierając kształt podobny do trójkąta.



Rys. 2.5.9

Aby zniekształcenie impulsu było możliwie małe, należy dobrać stałą czasową układu znacznie mniejszą od czasu trwania impulsu.

Aproksymacja sił wymuszających linią łamaną pozwala na stosunkowo łatwe obliczanie reakcji układu na siły wymuszające nawet barszo skomplikowanych kształtów. Jak widać z przytoczonych przykładów, obliczanie reakcji układu sprowadza się do obliczania reakcji układu na stosunkowo proste funkcje - funkcje skokowe i liniowo wzrastające.

Rozdział 3

ZAŁĄCZANIE SINUSOIDALNYCH SIŁ WYMUSZAJĄCYCH

Osobne rozpatrywanie załączania sinusoidalnych sił wymuszających ma swoje uzasadnienie ze względu na duże ich znaczenie w praktyce inżynierskiej. W szczególności tzw. stan ustalony sinusoidalny (przebiegi istniejące w obwodach po dostatecznie długim czasie od chwili załączenia sił wymuszających) będzie przedmiotem naszych zainteresowań. Będziemy rozpatrywać załączanie sił elektromotorycznych*)

$$e(t) = |E_m| \sin(\omega t + \psi)$$

lub sił prądomotorycznych

$$i(t) = |I_m| \sin(\omega t + \psi),$$

ogólnie

$$w(t) = |W_m| \sin(\omega t + \psi),$$

na obwody z zerowymi warunkami początkowymi.

Transformatą siły wymuszającej jest

$$W(s) = |W_m| \frac{s \sin\psi + \omega \cos\psi}{s^2 + \omega^2}$$

Można by zatem dowolny prąd lub napięcie obliczyć jako (wzór 2.2.2)

$$F(s) = K(s)W(s)$$

i dalej postępować tak, jak w poprzednim rozdziale, stosując albo I wzór Heaviside'a albo twierdzenie o splocie. Oba sposoby są jednak niewygodne, bo dosyć pracochłonne. Nie mają

---

*) Ze względu na to, że w dalszej części stosować będziemy dla tzw. amplitudy zespolonej liczby zespolone oznaczane symbolem W_m, to dla amplitudy jako liczby rzeczywistej będziemy stosować moduł liczby $|W_m|$.

one też bezpośredniego związku z obliczaniem stanów ustalonych sinusoidalnych za pomocą tzw. metody symbolicznej (metody amplitud zespolonych).

3.1. Metoda operatorowo -symboliczna

3.1.1. Podstawy metody

Rozpatrzmy równolegle dwa obwody o identycznej strukturze, identycznych elementach i tych samych wartościach parametrów obwodu. W pierwszym obwodzie (A) występuje siła wymuszająca (np. elektromotoryczna lub prądomotoryczna) sinusoidalna o amplitudzie $|W_m|$ i fazie początkowej ψ, w drugim (B) siła cosinusoidalna o tych samych parametrach. W drugim obwodzie wszystkie napięcia i prądy będą inne. Oznaczymy je kreskami.

Obwód A

$$w(t) = |W_m| \sin(\omega t + \psi) \qquad (3.1.1)$$

Transformatę oznaczymy przez $W(s)$. Dla tego obwodu podstawowe równania mają postać (rozdział 2.2.1):

$$\sum I(s) = 0$$

$$\sum_o U(s) = 0 \qquad (3.1.2)$$

$$U(s) = Z(s)I(s)$$

Z tego układu równań można obliczyć dowolne napięcie lub prąd w pierwszym obwodzie w postaci:

$$F(s) = K(s)W(s) \qquad (3.1.3)$$

Obwód B

$$w'(t) = |W_m| \cos(\omega t + \psi) \qquad (3.1.4)$$

Transformatę oznaczymy przez $W'(s)$. Dla tego .obwodu podstawowe równania mają postać (rozdział 2.2.1):

$$\sum I'(s) = 0$$

$$\sum_o U'(s) = 0 \qquad (3.1.5)$$

$$U'(s) = Z(s)I'(s)$$

Z tego układu równań można obliczyć dowolne napięcie lub prąd w drugim obwodzie w postaci:

$$F'(s) = K(s)W'(s) \qquad (3.1.6)$$

Zwróćmy uwagę na to, że w obu obwodach identyczne są wszystkie $Z(s)$ i $K(s)$, dlatego nie oznaczamy ich kreskami.

Pomnóżmy wszystkie równania (3.1.2) i (3.1.3) przez $j=\sqrt{-1}$ i dodajmy je odpowiednio do równań (3.1.5) i (3.1.6). Otrzymamy wtedy:

$$\begin{aligned} &\sum\left(I'(s)+jI(s)\right)=0 \\ &\sum_{o}\left(U'(s)+jU(s)\right)=0 \\ &U'(s)+jU(s)=Z(s)\left(I'(s)+jI(s)\right) \end{aligned} \qquad (3.1.7)$$

oraz

$$F'(s)+jF(s)=K(s)(W'(s)+jW(s)) \qquad (3.1.8)$$

Oznaczając w powyższych wzorach

$$\begin{aligned} \hat{I}(s)&=I'(s)+jI(s) \\ \hat{U}(s)&=U'(s)+jU(s) \\ \hat{F}(s)&=F'(s)+jF(s) \\ \hat{W}(s)&=W'(s)+jW(s) \end{aligned} \qquad (3.1.9)$$

otrzymamy:

$$\boxed{\begin{aligned} &\sum\hat{I}(s)=0 \\ &\sum_{o}\hat{U}(s)=0 \\ &\hat{U}(s)=Z(s)\hat{I}(s) \end{aligned}} \qquad (3.1.10)$$

$$\boxed{\hat{F}(s)=K(s)\hat{W}(s)} \qquad (3.1.11)$$

Równania (3.1.10) i (3.1.11) stanowią podstawę tzw. metody operatorowo-symbolicznej. Ponieważ są one izomorficzne z równaniami obwodu dla metody operatorowej (rozdział 2.2.3.1), wszystkie metody i zasady tam wyprowadzone są również ważne dla metody operatorowo-symbolicznej.

Podobnie mnożąc (3.1.1) przez j i dodając do (3.1.4) otrzymamy:

$$\hat{w}(t)=|W_m|\cos(\omega t+\psi)+j|W_m|\sin(\omega t+\psi)=|W_m|e^{j(\omega t+\psi)}, \qquad (3.1.12)$$

a wprowadzając tzw. amplitudę zespoloną

$$\boxed{W_m = |W_m| e^{j\psi}} \qquad (3.1.13)$$

można (3.1.12) przedstawić w postaci:

$$\hat{w}(t) = W_m e^{j\omega t}, \qquad (3.1.14)$$

zaś transformata tej wielkości

$$\hat{W}(s) = W_m \frac{1}{s - j\omega} \qquad (3.1.15)$$

Układ równań (3.1.10), łącznie z równaniem (3.1.11), można interpretować jako równania opisujące fikcyjny obwód „C" o strukturze identycznej ze strukturą obwodów A i B, w którym działa siła wymuszająca o kształcie (3.1.14). Rozwiązaniem takiego obwodu jest funkcja:

$$\hat{f}(t) \triangleq \hat{F}(s),$$

która daje równocześnie rozwiązanie obwodu „A", w którym działa sinusoidalna siła wymuszająca, bowiem (na podstawie (3.1.9))

$$F(s) = \operatorname{Im} \hat{F}(s), \qquad (3.1.16)$$

a stąd również

$$f(t) = \operatorname{Im} \hat{f}(t), \qquad (3.1.17)$$

czyli: Część urojona rozwiązania dla obwodu „C" jest równocześnie rozwiązaniem dla obwodu „A".

Podobnie można wykazać, że część rzeczywista rozwiązania dla obwodu „C" jest rozwiązaniem dla obwodu „B", w którym działa cosinusoidalna siła wymuszająca.

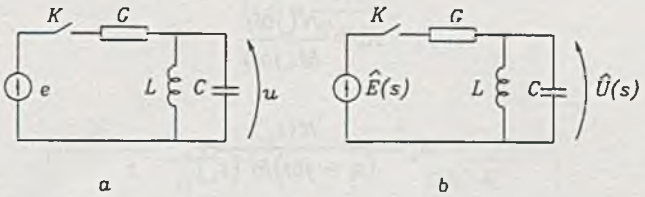
Jak pokażemy dalej, korzystanie z metody operatorowo-symbolicznej, a więc z obwodu „C" daje znacznie prostsze wzory i prowadzi do bezpośredniego związku tej metody z tzw. rachunkiem symbolicznym stosowanym do obliczania stanów ustalonych w obwodach, w których działają sinusoidalne siły wymuszające.

Jako przykład układania równań przy zastosowaniu metody operatorowo-symbolicznej przedstawimy układ z rys. 3.1.1a. W układzie tym działa siła elektromotoryczna $e(t) = |E_m| \sin(\omega t + \psi)$. Należy obliczyć napięcie na kondensatorze C. Odpowiedni schemat zastępczy dla metody operatorowo-symbolicznej przedstawiony jest na rys. 3.1.1b. Stosując metodę potencjałów węzłowych otrzymamy:

$$\hat{U}(s)\left(G+sC+\frac{1}{sL}\right)=\hat{E}(s)G,$$

a stąd

$$\hat{U}(s)=\frac{\hat{E}(s)G}{G+sC+\frac{1}{sL}}=\frac{\frac{G}{C}s}{s^2+s\frac{G}{C}+\frac{1}{LC}}\hat{E}(s)=K(s)\hat{E}(s)$$



Rys. 3.1.1

Układanie równań w metodzie operatorowo-symbolicznej i ich rozwiązywanie jest zatem takie samo, jak w rachunku operatorowym.

3.1.2. Drugi wzór Heaviside'a

Po ułożeniu równań w metodzie operatorowo-symbolicznej i ich rozwikłaniu względem danej wielkości $\hat{F}(s)$ należy znaleźć odpowiadającą jej funkcję czasową $\hat{f}(t)$. W tej metodzie funkcja wymuszająca ma postać (3.1.14), a jej transformata ma postać (3.1.15), zatem otrzymamy z (3.1.11):

$$\hat{F}(s)=K(s)\hat{W}(s)=K(s)\frac{W_m}{s-j\omega},$$

a uwzględniając, że $K(s)$ jest funkcją wymierną (patrz rozdział 2.2.3.4)

$$K(s)=\frac{N(s)}{M(s)},$$

otrzymamy:

$$\hat{F}(s)=W_m\frac{N(s)}{(s-j\omega)M(s)} \qquad (3.1.18)$$

Zakładamy, tak jak w przypadku I wzoru Heaviside'a (rozdział 2.2.4.3), że stopień licznika $N(s)$ - l jest mniejszy od stopnia mianownika $M(s)$ - m oraz że pierwiastki $M(s) = 0$ są pojedyńcze i różne od $j\omega$. Rozkładając powyższą funkcję na ułamki proste otrzymamy:

$$\hat{F}(s) = W_m \frac{N(s)}{(s - j\omega)M(s)} = W_m \frac{A_0}{s - j\omega} + \sum_{k=1}^{m} W_m \frac{A_k}{s - s_k}$$

Podobnie jak w przypadku I wzoru Heaviside'a (rozdział 2.2.4.3) można wyznaczyć:

$$A_0 = \frac{N(j\omega)}{M(j\omega)}$$

oraz

$$A_k = \frac{N(s_k)}{(s_k - j\omega)M'(s_k)},$$

zatem

$$\hat{F}(s) = W_m \frac{N(j\omega)}{M(j\omega)} \frac{1}{s - j\omega} + \sum_{k=1}^{m} W_m \frac{N(s_k)}{(s_k - j\omega)M'(s_k)} \frac{1}{s - s_k}$$

Zwróćmy uwagę na to, że dla konkretnego przykładu wielkości W_m, A_0 i A_k są konkretnymi liczbami (zespolonymi) i dlatego przy transformacji odwrotnej traktowane są jako wartości stałe, dlatego

$$\boxed{\hat{f}(t) = W_m \frac{N(j\omega)}{M(j\omega)} e^{j\omega t} + \sum_{k=1}^{m} W_m \frac{N(s_k)}{(s_k - j\omega)M'(s_k)} e^{s_k t}} \qquad (3.1.19)$$

Jest to tzw. **II wzór Heaviside'a.** Jak wynika z poprzednich rozważań, jest to rozwiązanie dla fikcyjnego obwodu „C", w którym działa siła wymuszająca $\hat{w}(t) = \hat{W}e^{j\omega t}$ (wzór (3.1.14)). Aby otrzymać rozwiązanie obwodu „A", w którym działa sinusoidalna siła wymuszająca, należy zgodnie z (3.1.17) wziąć część urojoną tego rozwiązania.

$$\boxed{f(t) = \operatorname{Im} \hat{f}(t)} \qquad (3.1.20)$$

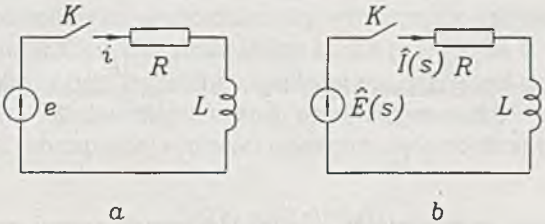
Praktyczne zastosowanie metody operatorowo-symbolicznej polega więc na rozpatrywaniu fikcyjnego obwodu „C" (dla niego wszystkie impedancje i transmitancje są takie same jak w normalnej metodzie operatorowej), wykorzystaniu II wzoru Heaviside'a (3.1.19), a następnie wzięciu części urojonej otrzymanego z II wzoru Heaviside'a wyniku (3.1.20).

3.1.3. Załączanie obwodu RL

Jako przykład zastosowania metody operatorowo-symbolicznej przedstawimy załączenie sinusoidalnej siły elektromotorycznej na obwód składający się z oporu R i indukcyjności L (rys. 3.1.2a). W obwodzie działa siła elektromotoryczna $e(t) = |E_m|\sin(\omega t + \psi)$ załączana w chwili $t = 0$. Równania obwodu układamy dla schematu z rys. 3.1.2b.

Otrzymamy dla prądu

$$\hat{I}(s) = \frac{\hat{E}(s)}{R + sL},$$



Rys. 3.1.2

gdzie $\hat{E}(s) = E_m \dfrac{1}{s - j\omega}$ oraz $E_m = |E_m| e^{j\psi}$,

zatem

$$\hat{I}(s) = E_m \frac{1}{(s - j\omega)(R + sL)}$$

Wzór ten ma postać wzoru (3.1.18), przy czym

$N(s) = 1, \qquad M(s) = R + sL, \qquad s_1 = -\dfrac{R}{L}$

Można więc skorzystać z II wzoru Heaviside'a (3.1.19)

$$\hat{i}(t) = \frac{E_m}{R + j\omega L} e^{j\omega t} + \frac{E_m}{\left(-\dfrac{R}{L} - j\omega\right)L} e^{-\frac{R}{L}t},$$

uwalniając się od zespolonych wartości w mianownikach i oznaczając $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\omega L}{R}$

$$\hat{i}(t)=\frac{|E_m|e^{j\psi}}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}\,e^{j\varphi}}e^{j\omega t}-\frac{|E_m|e^{j\psi}}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}\,e^{j\varphi}}e^{-\frac{R}{L}t}$$

oraz

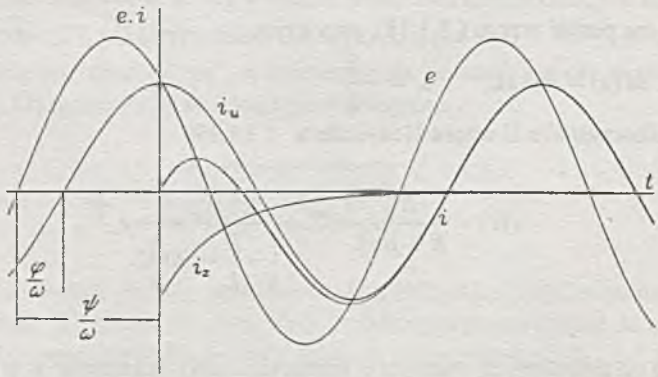
$$\hat{i}(t)=\frac{|E_m|}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}e^{j(\omega t+\psi-\varphi)}-\frac{|E_m|e^{j(\psi-\varphi)}}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}e^{-\frac{R}{L}t}$$

Uwzględniając, że $e^{jx}=\cos x+j\sin x$, obliczymy $i(t)$ jako część urojoną powyższego wyrażenia

$$i(t)=\operatorname{Im}\hat{i}(t)=\underbrace{\frac{|E_m|}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin(\omega t+\psi-\varphi)}_{i_u}-\underbrace{\frac{|E_m|}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin(\psi-\varphi)e^{-\frac{R}{L}t}}_{i_z}$$

Przebieg prądu oraz wymuszającej go siły elektromotorycznej przedstawiony jest na rys. 3.1.3. Analizując powyższe wyrażenie można stwierdzić:

- Pierwsza składowa w powyższym wyrażeniu - i_u - to tzw. prąd ustalony, druga - i_z - to tzw. prąd zaburzeniowy.
- Po dostatecznie długim czasie, zależnym od szybkości zanikania prądu zaburzeniowego (po upływie czterech stałych czasowych obwodu $T=\frac{L}{R}$, wartość prądu zaburzeniowego jest mniejsza od 2% wartości początkowej tego prądu) pozostaje tylko prąd ustalony.
- Prąd zaczyna się od wartości zero, ciągłość prądu w indukcyjności wymusza ten warunek.



Rys. 3.1.3

- Wartość prądu zaburzeniowego, a tym samym przebieg prądu po załączeniu siły elektromotorycznej zależy od chwili włączenia (od fazy siły elektromotorycznej):

  Największa wartość występuje wtedy, gdy $\sin(\psi - \varphi) = \pm 1 \Rightarrow \psi = \varphi \pm \frac{\pi}{2}$.

  Brak zaburzenia występuje wtedy, gdy $\sin(\psi - \varphi) = 0 \Rightarrow \psi = \varphi$;

  w tym przypadku nie ma stanu nieustalonego. Warto zwrócić uwagę na to, że przypadek ten występuje wtedy, gdy składowa ustalona prądu przechodzi w chwili $t = 0$ przez zero.

3.1.4. Stan ustalony sinusoidalny

W przykładzie załączania siły elektromotorycznej na obwód *R,L* okazało się, że po dostatecznie długim czasie w obwodzie ustala się prąd i kształcie sinusoidy. Pokażemy obecnie, że przy załączaniu obwodów na sinusoidalne siły wymuszające otrzymujemy, po zaniknięciu składowych zaburzających, również sinusoidalny kształt przebiegów w stanie ustalonym.

Załóżmy, że w obwodzie z zerowymi warunkami początkowymi działa jedna sinusoidalna siła wymuszająca $w(t)$. Wtedy stosując metodę operatorowo-symboliczną można wyrazić dowolną wielkość (prąd lub napięcie) w postaci operatorowo-symbolicznej jako:

$$\hat{F}(s) = K(s)\hat{W}(s),$$

a następnie obliczyć według II wzoru Heaviside'a funkcję czasową

$$\hat{f}(t) = W_m \frac{N(j\omega)}{M(j\omega)} e^{j\omega t} + \sum_{k=1}^{m} W_m \frac{N(s_k)}{(s_k - j\omega)M'(s_k)} e^{s_k t}, \qquad (3.1.21)$$

z której część urojona będzie rozwiązaniem problemu. Pierwiastki s_k równania $M(s) = 0$ mogą być zespolone

$$s_k = -\delta_k + j\omega_k \qquad (3.1.22)$$

(Dla pierwiastków rzeczywistych $\omega_k = 0$).

Oznaczmy dla uproszczenia

$$F_m = \frac{N(j\omega)}{M(j\omega)} W_m = K(j\omega)W_m, \qquad (3.1.23)$$

gdzie

$$F_m = |K(j\omega)|e^{j\varphi}|W_m|e^{j\alpha} = |K(j\omega)||W_m|e^{j(\alpha+\varphi)} = |F_m|e^{j(\alpha+\varphi)} \qquad (3.1.24)$$

oraz

$$A_k = |A_k|e^{j\alpha_k} = W_m \frac{N(s_k)}{(s_k - j\omega)M'(s_k)} \qquad (3.1.25)$$

Zarówno F_m jak i A_m są dla danego obwodu konkretnymi liczbami zespolonymi, zatem można (3.1.21) przedstawić w postaci:

$$\hat{f}(t) = F_m e^{j\omega t} + \sum_{k=1}^{m} A_k e^{s_k t}$$

oraz podstawiając za $s_k = -\delta_k + j\omega_k$ (wzór (3.1.22)) otrzymamy:

$$\hat{f}(t) = F_m e^{j\omega t} + \sum_{k=1}^{m} A_k e^{-\delta_k t} e^{j\omega_k t} \qquad (3.1.26)$$

W układach stabilnych, a tylko takimi będziemy się w dalszym ciągu zajmować, wszystkie pierwiastki leżą na lewej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej s, czyli mają ujemne części rzeczywiste

$$\operatorname{Re} s_k < 0 \quad \text{czyli} \quad \delta_k > 0$$

Zatem, jeżeli $t \to \infty$, to $e^{-\delta_k t} \to 0$, znika cały drugi człon wyrażenia (3.1.26), czyli zaburzenie i pozostaje w stanie ustalonym jedynie

$$\hat{f}(t) = F_m e^{j\omega t} \qquad (3.1.27)$$

Podstawiając do powyższego wzoru wzór (3.1.24) otrzymamy:

$$f(t) = \operatorname{Im} \hat{f}(t) = |F_m| \sin(\omega t + \alpha + \varphi), \qquad (3.1.28)$$

gdzie $\alpha + \varphi = \beta$ jest fazą początkową funkcji $f(t)$. Można zatem stwierdzić:

W obwodach liniowych z sinusoidalnymi siłami wymuszaj ącymi w stanie ustalonym wszystkie napięcia i prądy mają sinusoidalne przebiegi o częstotliwości równej częstotliwości siły wymuszającej. Przebiegi te są przesunięte w czasie względem siły wymuszającej.

Rozdział 4

STAN USTALONY W OBWODACH ZASILANYCH SINUSOIDALNYMI SIŁAMI WYMUSZAJĄCYMI

Jeżeli interesuje nas tylko stan ustalony, to stosowanie metody operatorowo-symbolicznej jest zbyt kłopotliwe. Niepotrzebnie liczy się w niej zaburzenie. W poprzednim rozdziale wykazano, że wszystkie prądy i napięcia będą miały kształt sinusoid o częstotliwości równej częstotliwości siły wymuszającej, będą one jedynie względem niej przesunięte w czasie

$$f(t) = |F_m| \sin(\omega t + \beta)$$

Jedynymi nieznanymi parametrami tych przebiegów będą

amplituda $|F_m|$

oraz faza początkowa β

Należałoby znaleźć metodę, która posługiwałaby się tylko tymi wielkościami. Zwróćmy uwagę na to, że w poprzednim rozdziale wprowadzono pojęcie tzw. amplitudy zespolonej (równanie 3.1.13), którą w tym przypadku możemy zapisać jako:

$$F_m = |F_m| e^{j\beta}$$

Znając tę wielkość (liczbę zespoloną), można łatwo odtworzyć przebieg czasowy mnożąc ją przez $e^{j\omega t}$

$$F_m e^{j\omega t} = |F_m| e^{j(\omega t + \beta)},$$

a następnie biorąc jej część urojoną otrzymujemy sinusoidalną funkcję czasu

$$f(t) = |F_m| \sin(\omega t + \beta)$$

Metoda, która posługuje się pojęciem amplitudy zespolonej i daje nam wszystkie informacje niezbędne do jednoznacznego określenia stanu ustalonego, nosi nazwę metody symbolicznej.

4.1. Metoda symboliczna

W poprzednim rozdziale wykazano już związek między amplitudą zespoloną wielkości wymuszającej W_m a amplitudą zespoloną napięcia lub prądu F_m (wzór (3.1.22))

$$F_m = \frac{N(j\omega)}{M(j\omega)} W_m = K(j\omega) W_m \qquad (4.1.1)$$

Wprowadźmy tzw. wartość symboliczną przebiegu. Będzie to amplituda zespolona podzielona przez $\sqrt{2}$:

$$\boxed{F = \frac{F_m}{\sqrt{2}}} \qquad (4.1.2)$$

Uwzględniając (3.1.13) można stwierdzić, że

$$\boxed{F = |F| e^{j\beta}} \qquad (4.1.3)$$

Moduł wartości symbolicznej równy jest wartości skutecznej przebiegu, argument wartości symbolicznej równy jest fazie początkowej przebiegu

Dzieląc równanie (4.1.1) przez $\sqrt{2}$ otrzymamy związek między wartością symboliczną wielkości wymuszającej a wartością symboliczną wielkości wyjściowej

$$\boxed{F = K(j\omega) W} \qquad (4.1.4)$$

Znając więc wartość symboliczną wielkości wymuszającej oraz transmitancję obwodu, można obliczyć wartość symboliczną dowolnej wielkości wyjściowej. Jeżeli rozpatrujemy obwody tylko przy jednej konkretnej pulsacji ω (częstotliwości f), to można zapis tego równania dalej uprościć do postaci:

$$\boxed{F = KW} \qquad (4.1.5)$$

gdzie

$$\boxed{K = |K|e^{j\varphi} = K(j\omega) = K(s)\big|_{s=j\omega}} \qquad (4.1.6)$$

4.1.1. Prawa Kirchhoffa

W rozdziale 3.1.4 wykazano, że w obwodzie „C" w stanie ustalonym każda wielkość będzie miała postać równania (3.1.27), a więc $\hat{f}(t) = F_m e^{j\omega t}$, czyli każdy prąd będzie w postaci:

$$\hat{i}(t) = I_m e^{j\omega t},$$

a każde napięcie

$$\hat{u}(t) = U_m e^{j\omega t}$$

W tym obwodzie również ważne są prawa Kirchhoffa. Z pierwszego prawa Kirchhoffa otrzymamy:

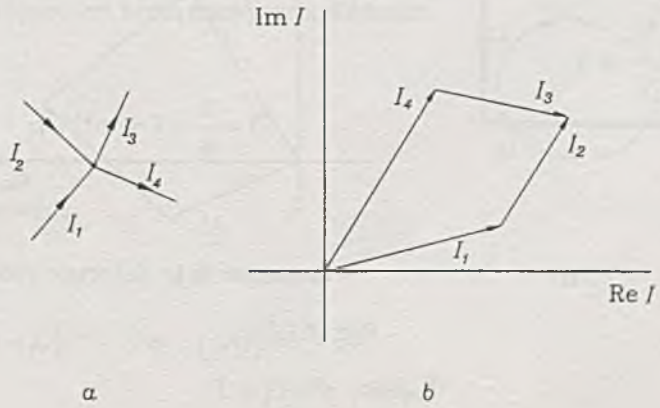
$$\sum \hat{i}(t) = \sum I_m e^{j\omega t} = e^{j\omega t} \sum I_m = \sqrt{2}\, e^{j\omega t} \sum I = 0$$

Równanie to musi być spełnione dla każdej chwili t, zatem otrzymamy:

$$\boxed{\sum I = 0} \qquad 4.1.7)$$

Suma algebraiczna symbolicznych wartości prądów dopływających do węzła obwodu jest równa zero

Dotyczy to oczywiście również dowolnego odcięcia (wyodrębnionej części obwodu). Na rys. 4.1.1 przedstawiony jest przykład zastosowania I prawa Kirchhoffa. Należy zwrócić uwa-



Rys. 4.1.1

gę na to, że mamy tu do czynienia z wartościami symbolicznymi, które są liczbami zespolonymi i dlatego dodawanie wartości symbolicznych jest dodawaniem wektorów odpowiadających tym liczbom.

Podobnie można wyprowadzić drugie prawo Kirchhoffa dla symbolicznych wartości napięć

$$\sum \hat{u}(t) = \sum U_m e^{j\omega t} = e^{j\omega t} \sum U_m = \sqrt{2}\, e^{j\omega t} \sum U = 0,$$

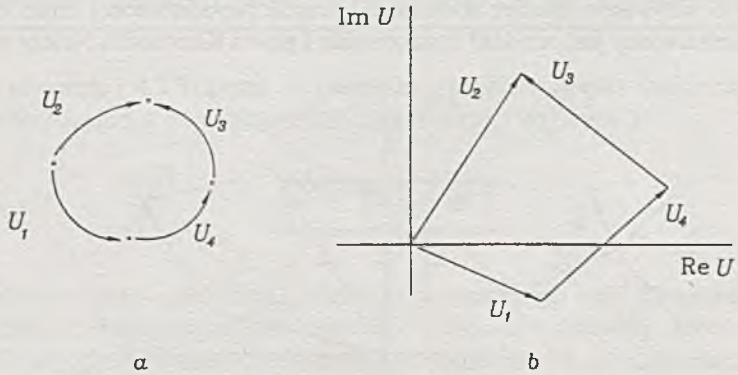
skąd

$$\boxed{\sum_o U = 0} \qquad (4.1.8)$$

Wzdłuż dowolnej, zamkniętej drogi algebraiczna suma symbolicznych wartości napięć jest równa zero.

Na rys. 4.1.2 przedstawiony jest przykład zastosowania II prawa Kirchhoffa. Również i tu dodawanie symbolicznych wartości napięć, to dodawanie wektorów.

Oba prawa Kirchhoffa mają formalnie postać identyczną jak przy obwodach prądu stałego, ale dotyczą wartości symbolicznych (a więc liczb zespolonych).



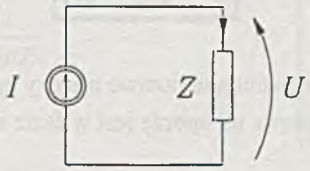
Rys. 4.1.2

4.1.2. Równania elementów obwodu w postaci symbolicznej

Równanie (4.1.5) można zastosować do wyznaczenia zależności między wartościami symbolicznymi prądu i napięcia na elementach obwodu. Traktując bowiem W jako siłę wymuszającą, np. siłę prądomotoryczną I (rys. 4.1.3), otrzymuje się dla napięcia U:

$$U = ZI$$

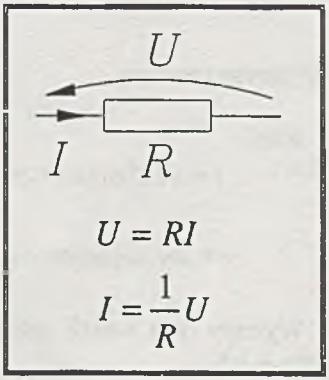
W tym przypadku bowiem $K(j\omega) = Z(j\omega) = Z$. Jest to impedancja (symboliczna) elementu.



Rys. 4.1.3

Impedancja może być liczbą zespoloną, zależeć będzie to od charakteru elementu. Rozważymy obecnie te zależności dla poszczególnych elementów.

4.1.2.1. Opór R



1. Równania symboliczne

W tym przypadku $Z(s) = R$, zatem

$$Z(j\omega) = Z = R$$

Impedancja oporu jest liczbą rzeczywistą. Również admitancja

$$Y(j\omega) = Y = \frac{1}{R} = G$$

jest liczbą rzeczywistą.

2. Związki między wartościami skutecznymi

Jeżeli $U = |U|e^{j\alpha_U}$ oraz $I = |I|e^{j\alpha_I}$, to

$$U = |U|e^{j\alpha_U} = R|I|e^{j\alpha_I},$$

skąd wynikają dwie równości dla modułów i faz

$$\boxed{|U| = R|I|} \quad \text{oraz} \quad \boxed{\alpha_U = \alpha_I}$$

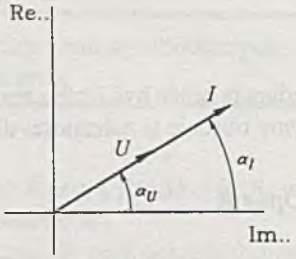
Wprowadzając pojęcie kąta przesunięcia fazowego między napięciem i prądem φ, mierzonego od prądu do napięcia

$$\boxed{\varphi = \alpha_U - \alpha_I} \qquad (4.1.9)$$

otrzymamy dla oporu $\varphi = 0$ - przesunięcie fazowe między prądem i napięciem na oporze jest równe zeru. Inaczej mówiąc, napięcie na oporze jest w fazie z prądem .

3. Wykres wektorowy

Wykres wektorowy przedstawiony jest na rys. 4.1.4. Wektor napięcia jest w fazie z prądem.



Rys. 4.1.4

4. Wykresy czasowe

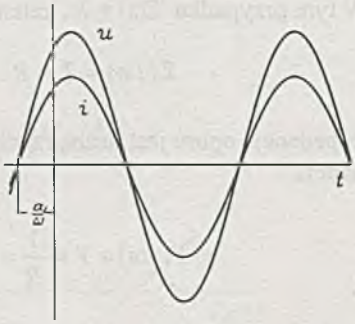
Jeżeli

$$i = \sqrt{2}|I|\sin(\omega t + \alpha_I)$$

to

$$u = R\sqrt{2}|I|\sin(\omega t + \alpha_I)$$

Wykresy tych funkcji przedstawione są na rys. 4.1.5.



Rys. 4.1.5

4.1.2.2. Indukcyjność L

1. Równania symboliczne

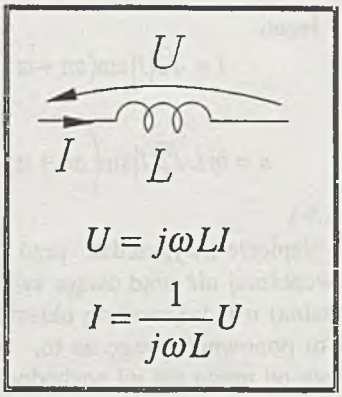
Dla indukcyjności $Z(s) = sL$, zatem

$$Z(j\omega) = Z = j\omega L$$

jest wielkością urojoną. Również admitancja

$$Y(j\omega) = Y = \frac{1}{j\omega L}$$

jest wielkością urojoną.



2. Związki między wartościami skutecznymi

$$U = |U|e^{j\alpha_U} = j\omega L|I|e^{j\alpha_I} = \omega L|I|e^{j\left(\alpha_I + \frac{\pi}{2}\right)}$$

Stąd wynikają związki między wartościami skutecznymi (modułami)

$$\boxed{|U| = \omega L|I| = X_L|I|}$$

gdzie wprowadzono tzw. *reaktancję indukcyjnościową*

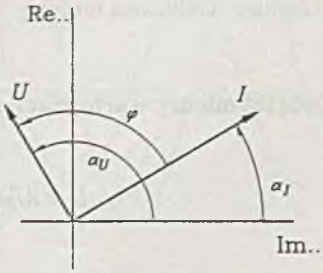
$$\boxed{X_L = \omega L} \qquad (4.1.10)$$

Dla przesunięć fazowych otrzymamy:

$$\varphi = \alpha_U - \alpha_I = \frac{\pi}{2}$$

3. Wykres wektorowy

Wykres wektorowy napięcia i prądu przedstawiony jest na rys. 4.1.6. Z wykresu łatwo można odczytać przesunięcie fazowe oraz wartości skuteczne. Mówimy, że napięcie wyprzedza prąd o $\frac{\pi}{2}$ albo 90^0.



Rys. 4.1.6

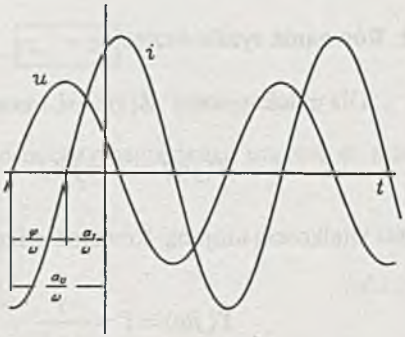
4. Wykresy czasowe

Jeżeli

$$i = \sqrt{2}|I|\sin(\omega t + \alpha_I),$$

to

$$u = \omega L\sqrt{2}|I|\sin\left(\omega t + \alpha_I + \frac{\pi}{2}\right)$$



Rys. 4.1.7

Napięcie „wyprzedza" prąd (w tym sensie, że wcześniej niż prąd osiąga swą wartość maksymalną) o jedną czwartą okresu. Warto zwrócić tu ponownie uwagę na to, że napięcie nie zależy od prądu ale od pochodnej prądu w czasie, a więc od szybkości zmian prądu. W związku z tym największe wartości osiąga wtedy, gdy szybkość zmian prądu jest największa, a więc wtedy, gdy prąd przechodzi przez zero.

4.1.2.3. Pojemność C

1. Równania symboliczne

Dla pojemności $Z(s) = \frac{1}{sC}$, zatem

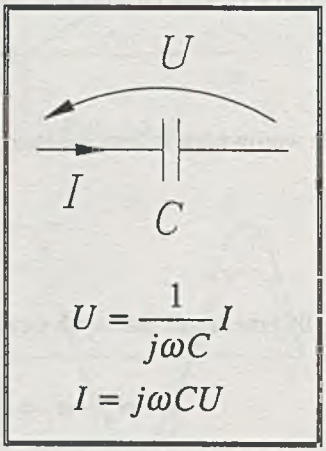
$$Z(j\omega) = Z = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C}$$

jest wielkością urojoną (ale ze znakiem minus).

Admitancja

$$Y(j\omega) = Y = j\omega C$$

jest również wielkością urojoną.



2. Związki między wartościami skutecznymi

$$U = |U|e^{j\alpha_U} = \frac{1}{j\omega C}|I|e^{j\alpha_I} = \frac{1}{\omega C}|I|e^{j\left(\alpha_I - \frac{\pi}{2}\right)}$$

Stąd wynikają związki między wartościami skutecznymi (modułami)

$$\boxed{|U| = \frac{1}{\omega C}|I| = X_C|I|}$$

gdzie wprowadzono tzw. *reaktancję pojemnościową*

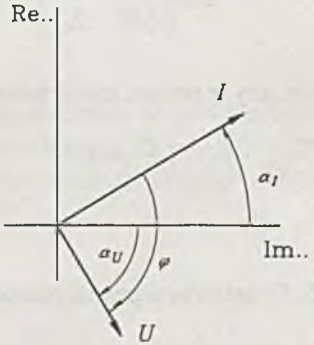
$$\boxed{X_C = \frac{1}{\omega C}} \qquad (4.1.11)$$

Przesunięcie fazowe między napięciem i prądem wynosi

$$\varphi = \alpha_U - \alpha_I = -\frac{\pi}{2}$$

3. Wykres wektorowy

Wykres wektorowy napięcia i prądu przedstawiony jest na rys. 4.1.8. Jak widać na rysunku przesunięcie fazowe między napięciem i prądem wynosi $-\frac{\pi}{2}$ albo -90^0.



Rys. 4.1.8

4. Wykresy czasowe

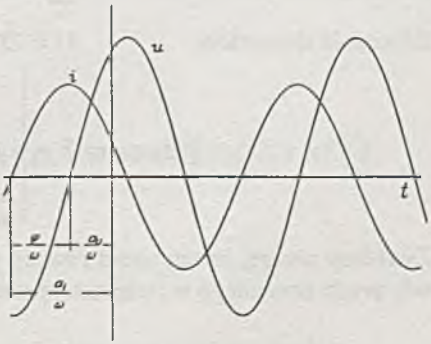
Jeżeli

$$i = \sqrt{2}|I|\sin(\omega t + \alpha_I),$$

to

$$u = \frac{1}{\omega C}\sqrt{2}|I|\sin\left(\omega t + \alpha_I - \frac{\pi}{2}\right)$$

Tu prąd „wyprzedza" napięcie (osiąga swą maksymalną wartość o jedną czwartą okresu wcześniej niż napięcie). Warto tu zwrócić uwagę, że napięcie na pojemności zależy od ładunku q (który znajduje się na pojemności) a nie od prądu.



Rys. 4.1.9

4.1.2.4. Indukcyjność wzajemna M

Dla indukcyjności wzajemnej otrzymamy:

$$Z = \begin{bmatrix} j\omega L_1 & \pm j\omega M \\ \pm j\omega M & j\omega L_2 \end{bmatrix}$$

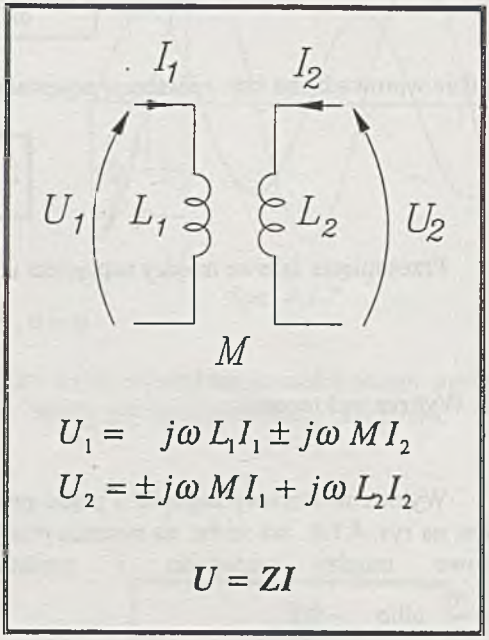
$$Z = j\omega \begin{bmatrix} L_1 & \pm M \\ \pm M & L_2 \end{bmatrix}$$

albo oznaczając

$$L = \begin{bmatrix} L_1 & \pm M \\ \pm M & L_2 \end{bmatrix}$$

otrzymamy w postaci macierzowej

$$Z = j\omega L$$



4.1.3. Podstawowe prawa obwodów w postaci symbolicznej

Podstawowymi prawami obwodów prądu zmiennego w postaci symbolicznej będą równania Kirchhoffa oraz równania elementów:

Pierwsze prawo Kirchhoffa $\sum_{\bullet} I = 0$

Drugie prawo Kirchhoffa $\sum_{o} U = 0$

Równania elementów $U = ZI$

$$\text{przy czym } Z = \begin{cases} R & \text{dla oporów} \\ j\omega L & \text{dla indukcyjności} \\ \dfrac{1}{j\omega C} & \text{dla pojemności} \end{cases}$$

Zwróćmy uwagę, że ten układ równań jest izomorficzny z układem równań opisującym obwody prądu zmiennego w rachunku operatorowym (rozdz. 2.2.1), jeżeli zastąpimy:

$$I \Leftrightarrow I(s)$$
$$U \Leftrightarrow U(s)$$
$$Z \Leftrightarrow Z(s)$$

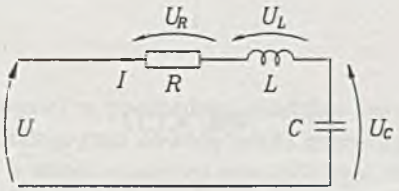
Stąd wynika, że wzory symboliczne na impedancje, transmitancje oraz transformaty prądów i napięć można otrzymać ze wzorów operatorowych przez proste podstawienie $s = j\omega$ w odpowiednie wzory operatorowe.

Powyższy układ jest również izomorficzny z układem równań opisującym obwody prądu stałego [1], który jest układem równań algebraicznych z wielkościami rzeczywistymi. Zamiast wartości prądów i napięć stałych występują tu symboliczne wartości prądów i napięć, które są liczbami zespolonymi. Zamiast oporu R występuje impedancja Z, która jest również liczbą zespoloną. Mamy więc tu do czynienia z układem równań algebraicznych z wielkościami zespolonymi.

Dalsze wnioski z izomorficzności układu równań operatorowych opisujących obwody prądu zmiennego z układem równań opisującym obwody prądu stałego i układem równań operatorowych, opisujących obwody prądu zmiennego, przedstawimy w rozdziale 4.2.

4.1.4. Przykład zastosowania metody symbolicznej

Przedstawimy obecnie przykład zastosowania metody symbolicznej w celu pokazania jej praktycznej przydatności w obliczaniu stanu ustalonego sinusoidalnego. Na rys. 4.1.10 przedstawiony jest obwód, w którym znane są parametry obwodu oraz przebieg prądu płynącego przez obwód.



Rys. 4.1.10

Dane:

$$R = 6\,\Omega, \qquad \omega L = 13{,}5\,\Omega, \qquad \frac{1}{\omega C} = 9\,\Omega, \qquad i = 10\sqrt{2}\sin\left(\omega t + 30^0\right) A$$

Należy obliczyć

1. wartości skuteczne napięć $|U_R|$, $|U_L|$, $|U_C|$, $|U|$,
2. przebiegi czasowe powyższych napięć.

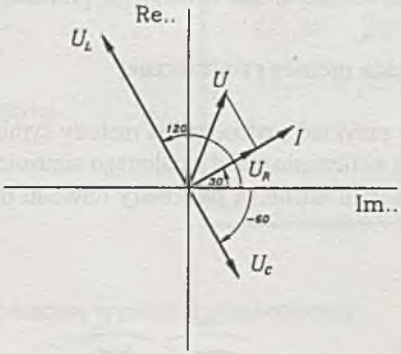
Na podstawie przebiegu czasowego obliczamy wartość symboliczną prądu

$$I = 10e^{j30^0}$$

Napięcia na elementach obwodu

$$U_R = RI = 6 \cdot 10e^{j30} = 60e^{j30}$$
$$U_L = j13{,}5 \cdot e^{j30} = 135e^{j120}$$
$$U_C = -j9 \cdot e^{j30} = 90e^{-j60}$$
$$U = U_R + U_L + U_C = 60e^{j30} + 135e^{j120} + 90e^{-j60}$$

Aby obliczyć U, należałoby przejść na postać algebraiczną, jednak celowe jest najpierw przedstawienie powyższych zależności na płaszczyźnie liczbowej Gaussa (rys. 4.1.11). Jak można łatwo zauważyć, dodając najpierw napięcia na indukcyjności i pojemności otrzymuje się $U_L + U_C = 45e^{j120}$, zatem



Rys. 4.1.11

$$U = 60e^{j30} + 45e^{j120} = 60(0.867 + j0{,}5) + 45(-0{,}5 + j0{,}867) = 29{,}5 + j69 = 75e^{j66^0 52'}$$

Wartości skuteczne poszczególnych napięć są to moduły ich symbolicznych wartości, zatem

$$|U_R| = 60V, \quad |U_L| = 135V, \quad |U_C| = 90V, \quad |U| = 75V$$

Znając wartości symboliczne przebiegów łatwo można wyznaczyć przebiegi czasowe, bowiem będą to przebiegi sinusoidalne, których amplitudy wyznaczymy mnożąc wartości sku-

teczne odpowiednich przebiegów przez $\sqrt{2}$, a których fazy początkowe równe są argumentom odpowiednich wartości symbolicznych. Zatem

$$u_R = 60\sqrt{2}\sin(\omega t + 30^0)$$
$$u_L = 135\sqrt{2}\sin(\omega t + 120^0)$$
$$u_C = 90\sqrt{2}\sin(\omega t - 60^0)$$
$$u = 75\sqrt{2}\sin(\omega t + 66^0 52')$$

W charakterze drugiego przykładu rozważmy tok obliczeń, jeżeli żądana jest tylko wartość skuteczna napięcia zasilającego. Wtedy obliczamy:

$$U = ZI$$

$$Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = 6 + j(13{,}5 - 9) = 6 + j4{,}5 = 7{,}5e^{j36^0 52'},$$

skąd

$$U = ZI = 7{,}5e^{j36^0 52'} \cdot 10e^{j30^0} = 75e^{j66^0 52'}$$

Wartość skuteczna napięcia zasilającego obwód wynosi zatem 75 *V*.
Powyższe przykłady wskazują jasno prostotę obliczeń jaką stwarza metoda symboliczna.

4.2. Obwody złożone

Korzystając z przedstawionej w poprzednim rozdziale izomorficzności układu równań opisujących obwody prądu stałego oraz obwody prądu zmiennego (w postaci operatorowej), można do analizy obwodów w stanie ustalonym sinusoidalnym stosować te same metody oraz zasady. Pokażemy poniżej tylko pewne, charakterystyczne dla metody symbolicznej różnice.

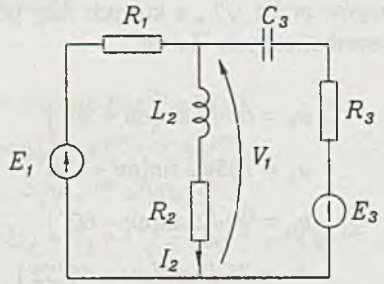
4.2.1. Metoda prądów oczkowych

Na rys. 4.2.1 przedstawiono dwuoczkowy układ, dla którego dane wynoszą:

$R_1 = 5\Omega$, $R_2 = 2\Omega$, $R_3 = 6\Omega$, $\omega L_2 = 5\Omega$, $\frac{1}{\omega C_3} = 3\Omega$,

$e_1 = 10\sqrt{2}\sin(\omega t + 30^0)$, $e_2 = 5\sqrt{2}\sin(\omega t + 150^0)$

Symboliczne wartości sił elektromotorycznych wynoszą: $E_1 = 10e^{j30^0}$, $E_2 = 5e^{j150^0}$.
Należy obliczyć I_2.



Rys. 4.2.1

Ogólna postać (macierzowa) równań prądów oczkowych

$$Z\,I_L = U_Z$$

Układamy równania dla prądów oczkowych tak, jak dla obwodów prądu stałego, stosując zamiast pojęcia oporu pojęcie impedancji

$$\begin{aligned}(5+2+j5)I_{L_1} \quad - \quad (2+j5)I_{L_2} &= 10e^{j30}\\ -(2+j5)I_{L_1}+(2+6+j5-j3)I_{L_2} &= -5e^{j150},\end{aligned}$$

zatem

$$\begin{aligned}(7+j5)I_{L_1}-(2+j5)I_{L_2} &= 10e^{j30}\\ -(2+j5)I_{L_1}+(8+j2)I_{L_2} &= -5e^{j150},\end{aligned}$$

skąd można już obliczyć

$$I_{L_1} \text{ oraz } I_{L_2} \text{ oraz } I_2 = I_{L_1} - I_{L_2}$$

Zagadnienie sprowadza się więc do układania algebraicznych równań zmiennych zespolonych (wartości symbolicznych) z zespolonymi współczynnikami oraz do rozwiązania takich układów.

4.2.2. Metoda potencjałów węzłowych

Obwód z rys. 4.2.1 rozwiążemy teraz metodą potencjałów węzłowych. Obwód posiada tylko dwa węzły, zatem dla węzła 1 otrzymamy równanie:

$$\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{2+j5}+\frac{1}{6-j3}\right)V_1 = \frac{10e^{j30}}{5}+\frac{5e^{j150}}{6-j3},$$

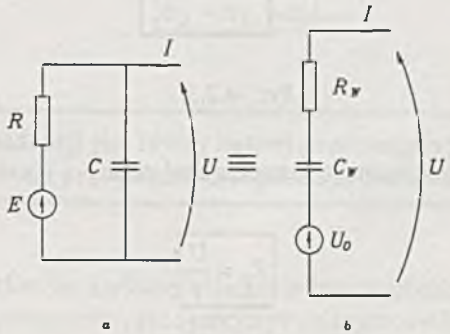
skąd po obliczeniu V_1 otrzymamy:

$$I_2 = \frac{V_1}{2 + j5}$$

4.2.3. Zasada Thevenina

Na rys. 4.2.2a przedstawiono dwójnik aktywny, dla którego należy znaleźć układ zastępczy Thevenina. Dane obwodu:

$R = 5\Omega$, $\frac{1}{\omega C} = 5\Omega$, $\omega = 100$, $E = 10e^{-j30}\,V$



Rys. 4.2.2

1. Obliczamy zastępczą siłę elektromotoryczną U_0:

$$U_0 = \frac{E}{R + \frac{1}{j\omega C}} \frac{1}{j\omega C} = \frac{10e^{-j30^0}}{5 - j5}(-j5) = 7{,}07e^{-j75^0}$$

2. Obliczamy zastępczą impedancję (Impedancja dwójnika z wyłączonym źródłem, E = 0):

$$Z_z = \frac{R\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{5(-j5)}{5 - j5} = 2{,}5 - j2{,}5$$

Taki wynik należy zinterpretować jako szeregowe połączenie oporu i pojemności

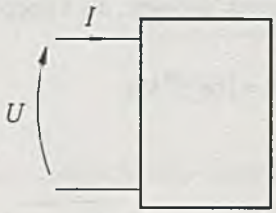
$$Z_z = R_z + \frac{1}{j\omega C_z} = R_z - j\frac{1}{\omega C_z},$$

skąd $R_z = 2{,}5\Omega$, $C_z = 400\mu F$. Układ zastępczy przedstawiony jest na rys. 4.2.2b.

4.2.4. Dwójnik pasywny

4.2.4.1. Określenie impedancji i admitancji

Na rys. 4.2.3 przedstawiony jest dwójnik pasywny składający się z elementów *R,L,C* i *M*.



Rys. 4.2.3

Zdefiniujemy najpierw impedancję zastępczą dwójnika.

$$\boxed{Z_z = \frac{U}{I}} \qquad (4.2.1)$$

gdzie $Z_z = Z_z(s)\big|_{s=j\omega}$.

Admitancja zastępcza dwójnika

$$\boxed{Y_z = \frac{I}{U} = \frac{1}{Z_z}} \qquad (4.2.2)$$

Impedancja jest liczbą zespoloną

$$Z_z = |Z_z| e^{j\varphi_z}$$

Znaczenie modułu i kąta fazowego impedancji: Jeżeli $U = |U| e^{j\alpha_U}$ oraz $I = |I| e^{j\alpha_I}$, to

$$Z_z = \frac{U}{I} = \frac{|U| e^{j\alpha_U}}{|I| e^{j\alpha_I}} = \frac{|U|}{|I|} e^{j(\alpha_U - \alpha_I)} = |Z_z| e^{j\varphi_z},$$

skąd porównując moduły otrzymamy:

$$\boxed{|Z_z| = \frac{|U|}{|I|}} \qquad (4.2.3)$$

Moduł impedancji jest równy ilorazowi wartości skutecznych napięcia i prądu.

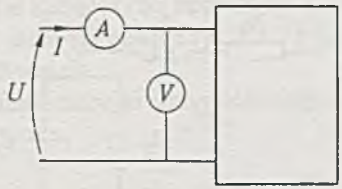
Porównując kąty fazowe otrzymamy:

$$\boxed{\varphi_z = \alpha_U - \alpha_I} \qquad (4.2.4)$$

Kąt fazowy impedancji jest równy kątowi przesunięcia fazowego między napięciem i prądem, mierzonym od prądu do napięcia.

Oba określenia umożliwiają zarówno obliczenie tych wielkości na podstawie schematu dwójnika i wartości jego parametrów, jak i otrzymywanie tych wielkości na podstawie pomiarów.

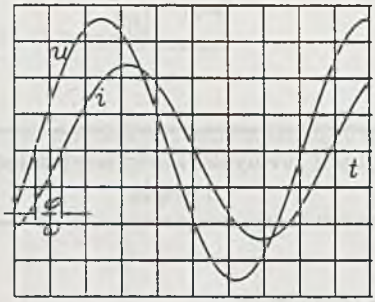
Na rys. 4.2.4 przedstawiony jest układ do pomiaru modułu impedancji. Woltomierz mierzy wartość skuteczną napięcia, zaś amperomierz wartość skuteczną prądu. Iloraz tych wartości to według (4.2.3) moduł impedancji.



Rys. 4.2.4

Kąt przesunięcia fazowego ϕ_z można wyznaczyć na podstawie obserwacji przebiegów prądu i napięcia na oscyloskopie (rys. 4.2.5).

Dokładniejsze pomiary modułu i kąta fazowego impedancji możliwe są za pomocą mostków do pomiaru impedancji.



Rys. 4.2.5

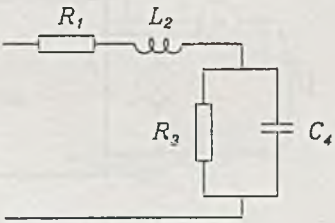
4.2.4.2. Szeregowe i równoległe połączenia impedancji

Podobnie jak w przypadku rachunku operatorowego (p. 2.2.2.3) oraz obwodów prądu stałego [1] można wprowadzić pojęcie impedancji zastępczej szeregowego połączenia *n* impedancji:

$$Z_Z = \sum_{i=1}^{n} Z_i$$

oraz równoległego połączenia *n* admitancji

$$Y_Z = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$



Rys. 4.2.6

Przedstawimy to na przykładzie rys. 4.2.6.

1. Rozpatrzmy ten przykład najpierw jako połączenie czterech impedancji bez określenia charakteru każdej z nich. Wtedy

$$Z_Z = Z_1 + Z_2 + \frac{Z_3 Z_4}{Z_3 + Z_4}$$

2. Jeżeli znany jest charakter każdej z impedancji, to można napisać:

$$Z_Z = R_1 + j\omega L_2 + \frac{R_3 \frac{1}{j\omega C_4}}{R_3 + \frac{1}{j\omega C_4}} = R_1 + \frac{R_3}{1+(\omega R_3 C_4)^2} + j\omega\left(L_2 - \frac{C_4 R_3^2}{1+(\omega R_3 C_4)^2}\right),$$

czyli

$$Z_Z = R_Z + jX_Z,$$

a więc w postaci rozkładu na część rzeczywistą i część urojoną. Zauważmy, że obie części zależą od parametrów R_1, L_2, R_3, C_4 oraz od pulsacji ω (a więc i od częstotliwości f).

3. Jeżeli znane są konkretne wartości parametrów, np.

$$R_1 = 5\Omega, \quad \omega L_2 = 3\Omega, \quad R_3 = 2{,}5\Omega, \quad \frac{1}{\omega C_4} = 5\Omega \text{ oraz } \omega = 100,$$

to

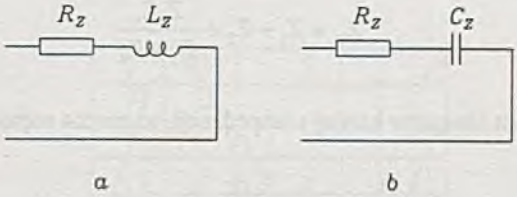
$$Z_Z = 5 + j3 + \frac{2{,}5(-j5)}{2{,}5 - j5} = 7 + j2$$

Zinterpretujemy ten wynik następująco: szeregowe połączenie oporu $R_Z = 7\Omega$ oraz indukcyjności $L_Z = 0.02H$ (rys. 4.2.7 a) dałoby taką samą impedancję Z_Z. Zatem dla danej pulsacji $\omega = 100$ jest to układ zastępczy tej impedancji. Znaczy to, że dla tej pulsacji układ z rys. 4.2.6 zachowuje się tak samo jak układ z rys. 4.2.7 a (jest nierozróżnialny przez pomiar z zewnątrz przy danej częstotliwości).

Gdyby R_3 był nieskończenie duży, to otrzymalibyśmy:

$$Z_Z = 5 - j2,$$

wtedy układ zastępczy przybrałby postać z rys. 4.2.7 b, przy czym $C_Z = 5\,\text{mF}$.



Rys. 4.2.7

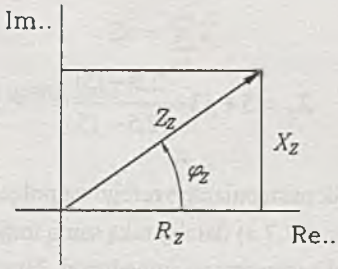
4.2.4.3. Rezystancja i reaktancja dwójnika

Impedancję, jako liczbę zespoloną, można przedstawić w postaci algebraicznej:

$$\boxed{Z_Z = R_Z + jX_Z} \qquad (4.2.5)$$

gdzie: R_Z to tzw. *rezystancja,*
X_Z to tzw. *reaktancja.*

Na płaszczyźnie liczbowej Gaussa (rys. 4.2.8) przedstawiono graficzną interpretację składowych impedancji.



Rys. 4.2.8

Dla każdej częstotliwości można daną impedancję zastąpić szeregowym połączeniem oporu równego jej rezystancji i indukcyjności albo pojemności (zależnie od znaku reaktancji, + dla indukcyjności a - dla pojemności), których reaktancja musi być równa X_Z

4.2.4.4. Admitancja dwójnika, konduktancja i susceptancja

Admitancja została zdefiniowana w (4.2.2), skąd:

$$\boxed{Y_Z = \frac{1}{Z_Z} = \frac{1}{|Z_Z|e^{j\varphi_Z}} = |Y_Z|e^{-j\varphi_Z}} \qquad (4.2.6)$$

Żeby nie wprowadzać kąta przesunięcia fazowego mierzonego od napięcia do prądu pozostawiamy tu kąt φ_z (mierzony od prądu do napięcia); dlatego w wykładniku znak -. Konsekwencją tego jest algebraiczna postać:

$$\boxed{Y_z = G_z - jB_z} \qquad (4.2.7)$$

gdzie: G_z to tzw. *konduktancja,*

B_z to tzw. *susceptancja.*

Wyprowadźmy związki między rezystancją i reaktancją a konduktancją i susceptancją:

$$Y_z = G_z - jB_z = \frac{1}{Z_z} = \frac{1}{R_z + jX_z} = \frac{R_z - jX_z}{R_z^2 + X_z^2},$$

skąd

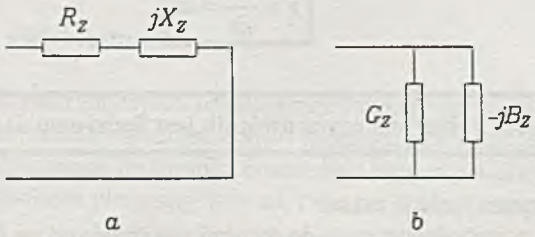
$$G_z = \frac{R_z}{R_z^2 + X_z^2}$$
$$B_z = \frac{X_z}{R_z^2 + X_z^2} \qquad (4.2.8)$$

Powyższe wzory pozwalają na obliczenie konduktancji i susceptancji, jeżeli znane są rezystancja i reaktancja.

Dla przykładu z rys. 4.2.6 otrzymamy:

$$G_z = \frac{7}{49+4} = 0{,}132[S]$$
$$B_z = \frac{2}{49+4} = 0{,}0378[S]$$

Dla danej częstotliwości każdy dwójnik można zastąpić albo szeregowym połączeniem rezystancji i reaktancji (to znaczy oporu i indukcyjności lub pojemności, połączonych szeregowo), rys. 4.2.9a, albo równoległym połączeniem konduktancji i susceptancji (to znaczy oporu i indukcyjności lub pojemności, połączonych równolegle), rys. 4.2.9b.



Rys. 4.2.9

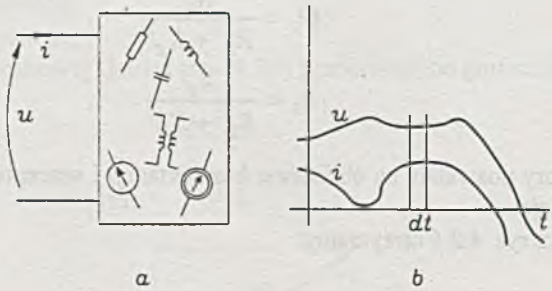
4.3. Moc i energia przy przebiegach zmiennych

Przy przepływie prądu w obwodach występują przemiany energetyczne. Na oporach obwodu wydziela się energia cieplna, w polu magnetycznym cewek oraz w polu elektrycznym kondensatorów gromadzi się energia (względnie pola te dostarczają energii do obwodu). Zjawiska te spróbujemy analizować najpierw dla dowolnych przebiegów prądów i napięć, a później dla przebiegów okresowych, a w szczególności dla przebiegów sinusoidalnych.

4.3.1. Moc chwilowa

4.3.1.1. Moc chwilowa dwójnika

Na rys. 4.3.1 a przedstawiony jest dwójnik aktywny zasilany z zewnątrz napięciem u.



Rys. 4.3.1

Określimy pracę, jaką zewnętrzne źródło o napięciu u musi wykonać, by przenieść ładunek q przez dwójnik

$$dA = udq = uidt\,,$$

skąd tzw. moc chwilowa, zwana też funkcją mocy

$$\boxed{p = \frac{dA}{dt} = ui} \qquad (4.3.1)$$

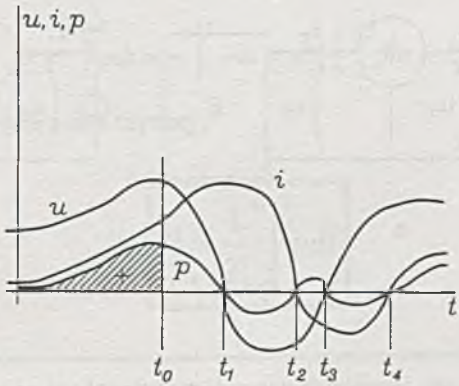
Moc chwilowa pobierana przez dwójnik jest iloczynem napięcia i prądu

Moc chwilowa jest zatem funkcją czasu.

Energia W, jaka została dostarczona do dwójnika w czasie od $t = 0$, do chwili t równa jest pracy wykonanej przez zewnętrzne źródło A.

$$\boxed{W = A = \int_0^t p\,dt = \int_0^t u i\,dt} \qquad (4.3.2)$$

Rozpatrzmy bliżej sposób, w jaki energia jest dostarczana do dwójnika. Na rys. 4.3.2 przedstawiono przebiegi napięcia, prądu i mocy chwilowej. Zgodnie z przyjętym systemem strzałkowania (tu strzałkowanie odbiornikowe), jeżeli moc chwilowa jest dodatnia, to energia



Rys. 4.3.1

jest dostarczana do dwójnika. Energia ta jest częściowo rozpraszana na oporach dwójnika, zamieniana na energię pola magnetycznego cewek, na energię pola elektrycznego kondensatorów oraz na inne rodzaje energii w zależności od struktury dwójnika. Jeżeli moc chwilowa jest ujemna, to dwójnik dostarcza energii do zewnętrznego źródła. Energia ta pochodzić może z energii pól magnetycznych cewek, energii pól elektrycznych kondensatorów, sił elektro- i prądomotorycznych dwójnika.

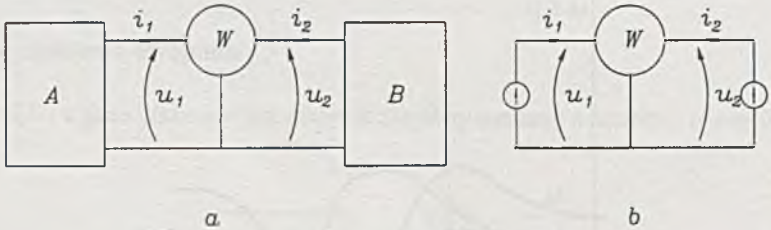
W czasie od $t = 0$ do t_0 energia dostarczona do dwójnika jest proporcjonalna do pola pod krzywą mocy chwilowej (zakreskowana część). Aż do chwili t_1 energia dostarczana jest do dwójnika. Od tej chwili aż do t_2 dwójnik oddaje energię do zewnętrznego obwodu. Od t_2 do t_3 dwójnik znowu pobiera energię itd.

4.3.1.2. Moc chwilowa wielobiegunnika

Dla uproszczenia rozpatrzymy tylko trójnik przedstawiony na rys. 4.3.3 a. Po wyodrębnieniu trójnika z układu (zasada wyodrębnienia [1]) otrzymamy układ z rys. 4.3.3b. W tym układzie jest już jasne, że energię do trójnika dostarczają dwie siły elektromotoryczne o wartościach u_1 i u_2 : moc chwilowa pierwszej $p_1 = u_1 i_1$, drugiej zaś $p_2 = u_2 i_2$. Zatem obie dostarczają łącznie do trójnika mocy chwilowej $p = u_1 i_1 + u_2 i_2$. Uogólniając ten wynik na wielobiegunniki otrzymamy dla n-biegunnika:

$$\boxed{p_w = \sum_{j=1}^{n-1} u_j i_j} \qquad (4.3.3)$$

Moc dostarczana do wielobiegunnika może być zatem obliczona jako suma iloczynów napięć mierzonych od bieguna odniesienia do pozostałych biegunów wielobiegunnika i prądów dopływających do tych biegunów.



Rys. 4.3.2

4.3.1.3. Prawo zachowania mocy chwilowej

Rozpatrzmy obwód składający się z m dwójników oraz l n-biegunników. Zastępując każdy wielobiegunnik w myśl zasady wyodrębnienia ([1], rozdział 4.10), otrzymamy obwód składający się z $g = m + l\,(n\text{-}1)$ dwójników. Zakładając dla każdego z nich odbiornikowe strzałkowanie dochodzimy, na podstawie zasady Tellegena (albo zachowania energii), do wniosku, że

$$\boxed{\sum_{k=1}^{g} u_k i_k = \sum_{k=1}^{g} p_k = 0} \qquad (4.3.4)$$

Suma mocy chwilowych wszystkich elementów obwodu jest w każdej chwili czasu równa zeru.

Jest to tzw. prawo zachowania mocy chwilowej.

4.3.2. Moc i energia przy przebiegach sinusoidalnych w stanie ustalonym

Wszystkie następne definicje postaramy się podać najpierw w postaci ważnej dla przebiegów okresowych w stanie ustalonym, a potem dopiero w postaci ważnej dla przebiegów sinusoidalnych.

4.3.2.1. Moc czynna

Energia pobrana przez dwójnik (rys. 14.3.1a) w czasie od t_1 do t_2

$$W = \int_{t_1}^{t_2} p dt ,$$

jeżeli $t_2 - t_1 = mT = t$ (czas jest równy wielokrotności okresu, a całka z funkcji okresowej w granicach wielokrotności okresu jest równa wielokrotności całki z jednego okresu)

$$W = \int_{t_1}^{t_1+mT} p dt = m \int_{t_1}^{t_1+T} p dt = \underbrace{mT}_{t} \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} p dt = Pt ,$$

gdzie wprowadzono pojęcie mocy czynnej P

$$\boxed{P = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} p dt} \qquad (4.3.5)$$

Moc czynna jest to średnia wartość mocy chwilowej okresowego przebiegu.

Moc czynną mierzy się w Watach.

Przy takiej definicji energia dostarczona do dwójnika w czasie t równym wielokrotności okresu wyniesie:

$$\boxed{W = Pt} \qquad (4.3.6)$$

Z zasady zachowania mocy chwilowej wynika też bezpośrednio zasada zachowania mocy czynnej

$$\boxed{\sum_{k=1}^{g} P_k = 0} \qquad (4.3.7)$$

Moc czynna pobrana przez obwód jest równa sumie mocy pobranej przez każdy z jego elementów.

4.3.2.2. Moc chwilowa przy przebiegach sinusoidalnych

Dla przebiegów sinusoidalnych

$$u = \sqrt{2}|U|\sin(\omega t + \alpha_U)$$

$$i = \sqrt{2}|I|\sin(\omega t + \alpha_I),$$

skąd otrzymamy:

$$p = ui = \sqrt{2}|U|\sin(\omega t + \alpha_U)\sqrt{2}|I|\sin(\omega t + \alpha_I),$$

a następnie

$$p = \underbrace{|U||I|\cos(\alpha_U - \alpha_I)}_{\text{składowa stała=mocy czynnej}} - \underbrace{|U||I|\cos(2\omega t + \alpha_U + \alpha_I)}_{\text{składowa zmienna=mocy falowej}}$$

Ponieważ $\alpha_U - \alpha_I = \varphi$, to pierwsza składowa równa jest mocy czynnej*).

$$\boxed{P = |U||I|\cos\varphi} \qquad (4.3.8)$$

W powyższym wzorze $\cos\varphi$ jest nazywany *współczynnikiem mocy*. Jego znaczenie omówimy później.

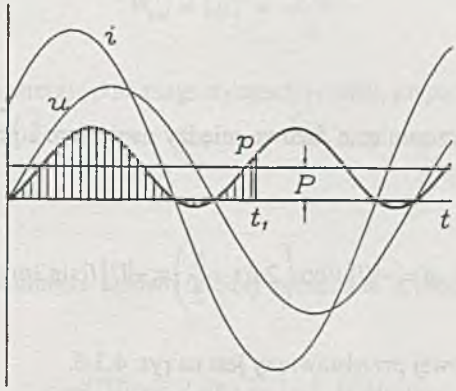
Moc czynna dla przebiegów sinusoidalnych jest iloczynem wartości skutecznych napięcia i prądu oraz tzw. współczynnika mocy.

Jeżeli dla uproszczenia, bez zmniejszania ogólności rozważań, założymy $\alpha_U = 0$, to

$$p = \underbrace{|U||I|\cos\varphi}_{\text{składowa stała=mocy czynnej}} - \underbrace{|U||I|\cos(2\omega t - \varphi)}_{\text{składowa zmienna=mocy falowej}} \qquad (4.3.9)$$

Na rys. 4.3.4 przedstawiono wykres mocy chwilowej. Jest to sinusoida o podwójnej częstotliwości, podniesiona o odcinek równy wartości mocy czynnej P. Z wykresu widać, że sposób dostarczania energii do dwójnika jest nierównomierny. W czasie dt do dwójnika dostarczana jest elementarna energia $dW = pdt$, zatem w chwilach, gdy wartość mocy chwilowej jest duża, duża jest też w tym czasie elementarna energia dostarczana do dwójnika. Jeżeli moc chwilowa jest ujemna, to dwójnik oddaje energię do zewnętrznego obwodu. W czasie od $t = 0$ do t_1 energia dostarczona do dwójnika jest proporcjonalna do zakreskowanej powierzchni pod krzywą mocy chwilowej.

*) Łatwo to sprawdzić, podstawiając p do wzoru definiującego moc czynną.



Rys. 4.3.3

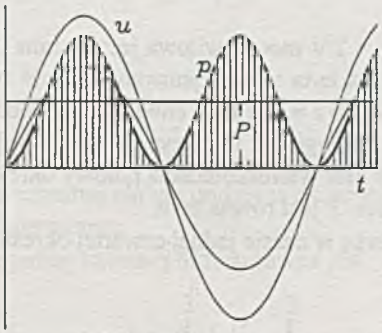
4.3.2.3. Przykłady

1. Opór

Dla oporu mamy przesunięcie fazowe między prądem i napięciem $\varphi = 0$. Wtedy

$$p = |U||I| - |U||I|\cos 2\omega t$$

Wykres czasowy mocy chwilowej na oporze przedstawiony jest na rys. 4.3.5.



Rys. 4.3.4

- Moc chwilowa jest zawsze dodatnia, to znaczy opór stale pobiera energię, aczkolwiek w sposób nierównomierny w czasie.

- Moc czynna dla oporu jest równa iloczynowi wartości skutecznych napięcia i prądu.

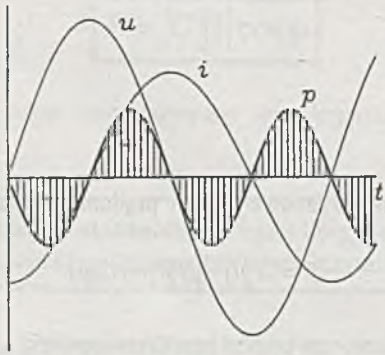
$$P = |U||I|$$

2. Indukcyjność

Dla indukcyjności przesunięcie fazowe między napięciem i prądem $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\cos\varphi = 0$, zatem

$$p = -|U||I|\cos\left(2\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = -|U||I|\sin 2\omega t$$

Wykres mocy chwilowej przedstawiony jest na rys. 4.3.6.



Rys. 4.3.5

- W czasie od $t = 0$ do $t = T/4$ moc chwilowa jest ujemna , cewka dostarcza do obwodu zewnętrznego energię, którą była zmagazynowana w polu magnetycznym. W następnym przedziale czasu od $t = T/4$ do $t = T/2$ moc chwilowa jest dodatnia, zewnętrzny obwód dostarcza energii do cewki, energia ta magazynuje się w polu magnetycznym cewki, itd. W przedziale czasu, który jest wielokrotnością połowy okresu , cewka średnio nie pobiera energii, dlatego moc czynna P jest równa zeru.
- Energia pobrana przez cewkę w czasie jednej czwartej okresu od $t = T/4$ do $t = T/2$

$$W_{T/4} = \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} p\,dt = -\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} |U||I|\sin 2\omega t\,dt = \frac{|U||I|}{\omega},$$

a ponieważ $|U| = \omega L|I|$, to

$$W_{T/4} = L|I|^2 = \frac{L|I_m|^2}{2}$$

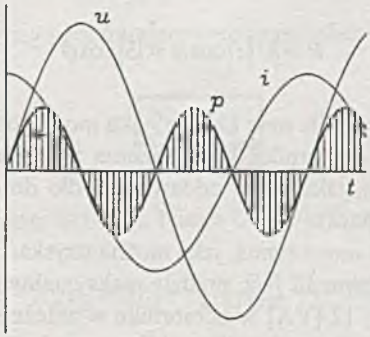
zgodnie ze wzorem na energię pola magnetycznego cewki, przez którą płynie w danej chwili prąd $i(T/4) = |I_m|$.

3. Pojemność

Dla pojemności przesunięcie fazowe między napięciem a prądem $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, $\cos\varphi = 0$, zatem

$$p = -|U||I|\cos\left(2\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = |U||I|\sin 2\omega t$$

Na rys. 4.3.7 przedstawiono wykres czasowy mocy chwilowej.



Rys. 4.3.6

- Kondensator w czasie od $t = 0$ do $t = T/4$ pobiera energię, gromadzi ją w polu elektrycznym, a w następnej jednej czwartej okresu oddaje ją do zewnętrznego obwodu. W związku z tym moc czynna P jest równa zeru.
- Energia pobrana w czasie jednej czwartej okresu równa jest

$$W_{T/4} = \frac{C|U_m|^2}{2}$$

zgodnie ze wzorem na energię pola elektrycznego kondensatora , na którym napięcie w danej chwili $u(T/4) = |U_m|$.

4.3.2.4. Moc pozorna

Wielkość

$$\boxed{|S| = |U||I|} \qquad (4.3.10)$$

nazywamy *mocą pozorną*.

Moc pozorna jest iloczynem wartości skutecznych napięcia i prądu

Definicja ta ważna jest dla dowolnych przebiegów okresowych niekoniecznie sinusoidalnych.

Jednostką mocy pozornej jest [VA] (Woltamper) *).

W celu bliższego wyjaśnienia znaczenia mocy pozornej rozpatrzmy przypadek generatora sinusoidalnego zasilającego odbiorniki o różnym przesunięciu między napięciem i prądem φ, a więc różnym $\cos\varphi$. Każde źródło (lub odbiornik) ma określone nominalne napięcie oraz maksymalny prąd, który między innymi ze względu na straty cieplne może dopuścić. Zatem iloczyn tych wielkości określa w pewnym stopniu źródło (lub odbiornik). Moc czynna oddawana przez takie źródło zależy od odbiornika, dla niego bowiem (4.3.8)

$$P = |U||I|\cos\varphi = |S|\cos\varphi$$

Przy danej mocy pozornej źródła moc czynna, jaką można otrzymać w odbiorniku, zależy więc od współczynnika mocy odbiornika. Moc pozorną źródła można również interpretować jako maksymalną moc czynną, jaką może oddawać źródło do odbiornika o współczynniku mocy równym jeden (np. do oporu).

W tab. 4.3.1 przedstawiono moc czynną, jaką można uzyskać z generatora o napięciu nominalnym 12 [V], prądzie maksymalnym 1 [A], a więc o mocy pozornej 12 [VA] w odbiorniku w zależności od współczynnika mocy odbiornika. W każdym przypadku przedstawionym w tej tabeli wartości napięcia i prądu są równe powyższym wartościom. Przez generator płynie więc maksymalny dopuszczalny prąd 1 [A]; straty energii w nim są maksymalne. Przy współczynniku mocy $\cos\varphi = 0$, generator nie wydaje żadnej mocy czynnej, ale nie można by podłączyć do niego żadnego dodatkowego odbiornika o tym samym charakterze.

Tabela 4.3.1

P [W]	$\cos\varphi$
12,0	1,0
9,6	0,8
6,0	0,5
0	0

*) Z formalnego punktu widzenia [A][V]=[W], przyjęło się jednak dla lepszego odróżnienia jednostki mocy czynnej [W] od jednostki mocy pozornej oznaczać jednostkę tej ostatniej jako [VA].

4.3.2.5. Moc bierna

Moc bierną definiuje się jako:

$$\boxed{Q = \sqrt{S^2 - P^2}} \qquad (4.3.11)$$

Jednostką mocy biernej jest [Var] (Volt Amper mocy reaktywnej).
Dla przebiegów sinusoidalnych otrzymamy:

$$\boxed{Q = |U||I|\sin\varphi} \qquad (4.3.12)$$

Dla dwójnika o charakterze indukcyjnym ($\varphi > 0$) moc bierna jest dodatnia $Q > 0$.
Dla dwójnika o charakterze pojemnościowym ($\varphi < 0$) moc bierna jest ujemna $Q < 0$.

4.3.2.6. Moc symboliczna

Dla rachunku symbolicznego zdefiniujemy *moc symboliczną* jako:

$$\boxed{S = UI^*} \qquad (4.3.13)$$

Uzasadnimy celowość takiej definicji. Niech $U = |U|e^{j\alpha_U}$ oraz $I = |I|e^{j\alpha_I}$, wtedy

$$S = UI^* = |U|e^{j\alpha_U}|I|e^{j\alpha_I} = |U||I|e^{j(\alpha_U - \alpha_I)} = |U||I|e^{j\varphi}$$

Przedstawiając to w postaci trygonometrycznej otrzymamy:

$$S = |U||I|\cos\varphi + j|U||I|\sin\varphi$$

a więc

$$\boxed{S = P + jQ} \qquad (4.3.14)$$

Częścią rzeczywistą mocy symbolicznej jest *moc czynna.*
Częścią urojoną mocy symbolicznej jest *moc bierna.*
Modułem mocy symbolicznej jest *moc pozorna.*

Rozpatrzmy dla przykładu dwójnik o impedancji $Z = 10e^{j30^\circ}$, zasilany napięciem $U = 100e^{j80^\circ}$. Przez dwójnik popłynie prąd:

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{100e^{j80^0}}{10e^{j30^0}} = 10e^{j50^0},$$

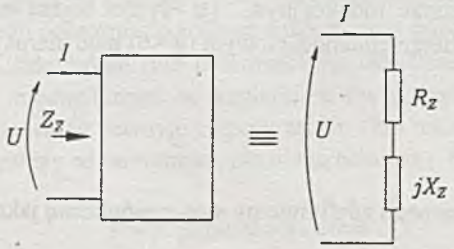
a moc symboliczna

$$S = UI^* = 100e^{j80^0}\,10e^{-j50^0} = 1000e^{i30^0} = 867 + j500$$

Dwójnik pobiera zatem 1000 [VA] mocy pozornej, 867 [W] mocy czynnej i 500 [Var] mocy biernej.

4.3.2.7. Moc wydzielana na dwójniku

Rozpatrzymy obecnie moce: pozorną, czynną i bierną wydzielane na dwójniku (rys. 4.3.8)



Rys. 4.3.7

Dwójnik ten można zastąpić szeregowym połączeniem rezystancji R_Z i reaktancji X_Z, zatem

$$U = Z_Z I = (R_Z + jX_Z)I,$$

skąd moc symboliczna

$$S = UI^* = (R_Z + jX_Z)I\,I^* = R_Z|I|^2 + jX_Z|I|^2 = P + jQ$$

- Moc czynną wydzielaną na dwójniku można obliczyć jako $P = R_Z|I|^2$. Jest ona niejako wydzielana na części rzeczywistej impedancji zastępczej dwójnika (na jego rezystancji).
- Z powyższego można wnioskować, że w dwójniku pasywnym musi być $R_Z > 0$.
- Moc bierną wydzielaną na dwójniku można obliczyć jako $Q = X_Z|I|^2$.

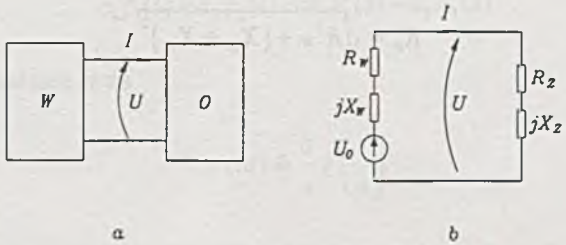
Podobnie można zinterpretować równoległy układ zastępczy dwójnika.

4.3.2.8. Warunek oddawania maksymalnej mocy czynnej do dwójnika

Na rys. 4.3.9a przedstawione są dwa dwójniki, wydajnik *W* oraz odbiornik *O*, połączone ze sobą. Parametry wydajnika są znane i ustalone. Określimy, jakie warunki musi spełniać odbiornik, by na nim wydzieliła się maksymalna moc czynna. Zgodnie z zasadą Thevenina można wydajnik zastąpić szeregowym połączeniem siły elektromotorycznej U_0, rezystancji

wewnętrznej wydajnika R_W oraz reaktancji wewnętrznej X_W (rys. 4.3.9b). Podobnie można zastąpić odbiornik, jako dwójnik pasywny, szeregowym połączeniem rezystancji R_Z oraz reaktancji X_Z . Załóżmy, że parametry wydajnika są ustalone. Należy tak dobrać parametry odbiornika, a więc R_Z oraz X_Z aby wydzieliła się w nim maksymalna moc czynna. W obwodzie z rys. 4.3.9b popłynie prąd

$$I = \frac{U_0}{R_Z + R_W + j(X_Z + X_W)},$$



Rys. 4.3.8

którego wartość skuteczna jest

$$|I| = \frac{|U_0|}{\sqrt{(R_Z + R_W)^2 + (X_Z + X_W)^2}}$$

Moc czynna wydzieli się na rezystancji odbiornika R_Z

$$P_Z = R_Z|I|^2 = \frac{R_Z U_0^{\,2}}{(R_Z + R_W)^2 + (X_Z + X_W)^2} = P_Z(R_Z, X_Z)$$

Jest ona funkcją dwóch zmiennych R_Z i X_Z. Zagadnienie sprowadza się więc do znalezienia maksimum funkcji dwóch zmiennych. Łatwo zauważyć, że zmieniając najpierw X_Z maksymalną wartość P_Z otrzymamy przy X_Z = -X_W (wyrażenie $(X_Z + X_W)^2$ jako kwadrat najmniejszą wartość - zero - przyjmuje przy X_Z = -X_W) . Wtedy

$$P_Z = \frac{R_Z U_0^{\,2}}{(R_Z + R_W)^2}$$

Przeprowadzając dalszą maksymalizację otrzymamy warunek $R_Z = R_W$. Ostatecznie otrzymamy tzw. *warunek dopasowania odbiornika do wydajnika*:

$$R_z = R_w$$
$$X_z = -X_w$$

Jak łatwo sprawdzić, w takim przypadku sprawność wynosi 50%.

Jeżeli poza parametrami wydajnika również reaktancja odbiornika jest wartością zadaną, to otrzymamy z warunku $\frac{dP_z}{dR_z} = 0$ warunek uzyskania maksymalnej mocy czynnej w odbiorniku jako:

$$R_z = \sqrt{R^2{}_w + (X_z + X_w)^2}$$

Dodatek A

A 1. Podstawowe własności przekształcenia Laplace'a

1. Twierdzenie o liniowości

Jeżeli $f_1(t) \triangleq F_1(s)$ oraz $f_2(t) \triangleq F_2(s)$, to

$$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \triangleq a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$$

2. Twierdzenie o zmianie skali

Dla $a>0$

$$f(at) \triangleq \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

3. Twierdzenie o przesunięciu w dziedzinie czasu

Dla $\tau>0$

$$f(t-\tau)1(t-\tau) \triangleq F(s)e^{-s\tau} \quad \text{dla} \quad \tau > 0$$

4. Twierdzenie o przesunięciu w dziedzinie częstotliwości

$$f(t)e^{s_0 t} \triangleq F(s-s_0)$$

5. Twierdzenie o różniczkowaniu

$$\frac{df(t)}{dt} \triangleq sF(s) - f(0)$$

6. Twierdzenie o całkowaniu

$$\int_0^t f(t)dt \triangleq \frac{1}{s} F(s)$$

7. Splot w dziedzinie czasu

$$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) \triangleq F_1(s) F_2(s)$$

8. Splot w dziedzinie częstotliwości

$$f_1(t) f_2(t) \triangleq \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F_1(\lambda) F_2(s-\lambda) d\lambda$$

A 2. Transformaty niektórych funkcji czasowych

Funkcja czasu	Transformata
$\delta(t)$	1
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s+\alpha}$
$1-e^{-\frac{t}{T}}$	$\frac{1}{s(1+sT)}$
$te^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(s+\alpha)^2}$
$\frac{e^{-\alpha t}-e^{-\beta t}}{\beta-\alpha}$	$\frac{1}{(s+\alpha)(s+\beta)}$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t+\psi)$	$\frac{s\sin\psi+\omega\cos\psi}{s^2+\omega^2}$
$\mathrm{sh}\alpha t$	$\frac{\alpha}{s^2-\alpha^2}$
$\mathrm{ch}\alpha t$	$\frac{s}{s^2+\alpha^2}$
$e^{-\alpha t}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$
$e^{-\alpha t}\cos\omega t$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$
$t\sin\omega t$	$\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$

Dodatek B

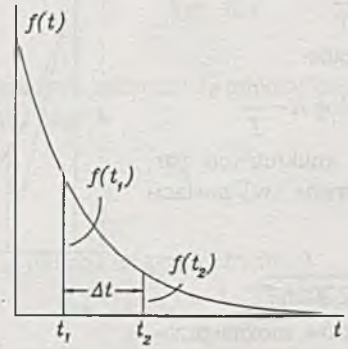
Własności funkcji wykładniczej

Jedną z bardzo często pojawiających się funkcji przy analizie liniowych obwodów jest tzw. funkcja wykładnicza

$$f(t) = Ae^{-\frac{t}{T}} \qquad (B.1)$$

Omówimy poniżej kilka podstawowych własności tej funkcji.

1. Stosunek dwóch kolejnych rzędnych odległych od siebie o odcinek czasu Δt zależy jedynie od tego czasu.



Rys. B.1

Jeżeli

$$f(t_1) = Ae^{-\frac{t_1}{T}},$$

wtedy

$$f(t_2) = f(t_1 + \Delta t) = Ae^{-\frac{t_1+\Delta t}{T}} = Ae^{-\frac{t_1}{T}}e^{-\frac{\Delta t}{T}} = f(t_1)e^{-\frac{\Delta t}{T}},$$

zatem

$$\frac{f(t_1 + \Delta t)}{f(t_1)} = \frac{f(t_1)e^{-\frac{\Delta t}{T}}}{f(t_1)} = e^{-\frac{\Delta t}{T}},$$

skąd jasno wynika, że stosunek ten zależy jedynie od Δt.

2. Po upływie stałej czasowej wartość funkcji spada do 36.8% wartości początkowej

$$\frac{f(t_1 + T)}{f(t_1)} = e^{-1} \cong 0.368$$

3. Po upływie czterech stałych czasowych wartość funkcji spada do około 2% wartości początkowej.

   Jeżeli $\Delta t = 4T$, to $e^{-\frac{4T}{T}} \cong 0.02$. Stąd jasno wynika, że stała czasowa T jest miarą szybkości zaniku funkcji wykładniczej.

4. Podstyczna krzywej jest stała i równa T.

Często zachodzi potrzeba wyznaczenia parametrów określających funkcję wykładniczą (T,A) na podstawie wyników pomiarowych. Przedstawimy poniżej jeden ze sposobów wyznaczania tych parametrów. Jeżeli wiadomo, że mierzony przebieg jest typu:

$$f(t) = Ae^{-\frac{t}{T}}$$

to

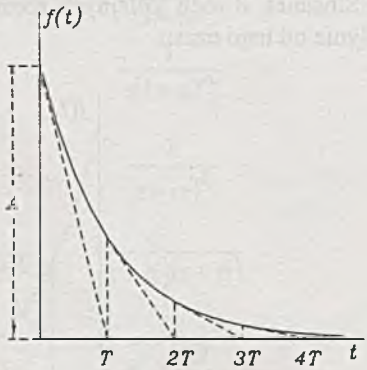
$$\ln f(t) = \ln A - \frac{t}{T}$$

przechodząc na logarytmy dziesiętne

$$2.3026 \log f(t) = 2.3026 \log A - \frac{t}{T}$$

Przedstawimy wyniki pomiaru konkretnych par wartości t_k i $f(t_k)$ na wykresie w postaci półlogarytmicznej (Rys. B.3)

$$y = \log f(t) = \log A - \frac{t}{2.3026T}$$



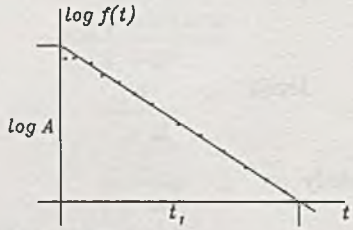
Rys. B.2

Przez otrzymany zbiór punktów można przeprowadzić prostą (np. metodą najmniejszych kwadratów), a za jej pomocą otrzymać:

$$\log A = \frac{t_1}{2.3026T}$$

oraz

$$T = \frac{t_1}{2.3026 \log A}$$



Rys. B.3

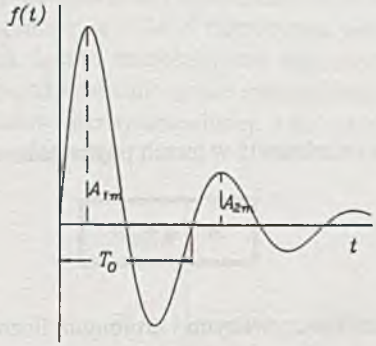
W podobny sposób można wyznaczać parametry krzywych typu $A(1-e^{-\frac{t}{T}})$, $A - Be^{-\frac{t}{T}}$.

Własności sinusoidy tłumionej

Drugą, często spotykaną funkcją jest tzw. sinusoida tłumiona:

$$f(t) = Ae^{-\delta t} \sin \omega_0 t$$

Wykres czasowy tej funkcji przedstawiono na rys. B.4. W celu wyznaczenia parametrów tej krzywej A, δ i ω_0 można postąpić następująco.



Rys. B.4

Okres drgań można wyznaczyć jako czas T_0 między kolejnymi przejściami funkcji przez zero (w tym samym kierunku) ,stąd

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

Pierwsze maksimum A_{1m} funkcja osiąga w chwili t_1

$$A_{1m} = f(t_1) = Ae^{-\delta t} \sin \omega_0 t_1,$$

drugie w chwili $t_1 + T_0$

$$A_{2m} = f(t_1 + T_0) = Ae^{-\delta(t_1+T_0)} \underbrace{\sin \omega_0 (t_1 + T_0)}_{\sin \omega_0 t_1},$$

zatem iloraz obu wartości

$$\frac{A_{1m}}{A_{2m}} = e^{\delta T_0},$$

skąd

$$\delta T_0 = \ln \frac{A_{1m}}{A_{2m}}$$

Jest to tzw. logarytmiczny dekrement drgań. Współczynnik tłumienia otrzymamy jako:

$$\delta = \frac{1}{T_0} \ln \frac{A_{1m}}{A_{2m}}$$

Amplitudę A można otrzymać z jednego pomiaru odpowiadających sobie wartości t_1 oraz $f(t_1)$.

Dodatek C

Liczby zespolone

1. Liczby zespolone

Liczby zespolone można przedstawić w trzech postaciach:
a) w postaci algebraicznej

$$\boxed{A = a + jb}$$

gdzie $j = \sqrt{-1}$,
a i b są odpowiednio częściami rzeczywistymi i urojonymi liczby zespolonej

$$a = \mathrm{Re}\, A$$
$$b = \mathrm{Im}\, A$$

b) w postaci trygonometrycznej

$$\boxed{A = |A|(\cos\alpha + j\sin\alpha)}$$

gdzie $|A|$ jest modułem liczby zespolonej, a α jest jej argumentem ;
c) w postaci wykładniczej

$$\boxed{A = |A|e^{j\alpha}}$$

2. Związki między postaciami liczb zespolonych

Z postaci trygonometrycznej lub wykładniczej można przejść na postać algebraiczną obliczając

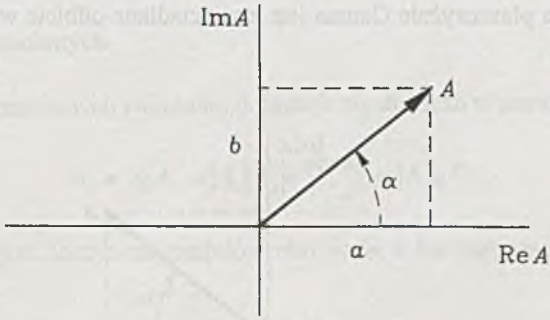
$$a = |A|\cos\alpha$$
$$b = |A|\sin\alpha$$

Z postaci algebraicznej można przejść na postać trygonometryczną lub wykładniczą obliczając:

$$|A| = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{b}{a}$$

3. Przedstawienie liczb zespolonych na płaszczyźnie Gaussa

Liczby zespolone można przedstawić na płaszczyźnie liczbowej Gaussa (rys. C.1). Część rzeczywista liczby zespolonej A - Re A odmierzana jest na osi odciętych, zaś część urojona Im A na osi rzędnych. Liczba zespolona jest więc reprezentowana przez wektor A, którego składowe odpowiadają odpowiednio części rzeczywistej i urojonej liczby zespolonej, jego długość równa jest modułowi liczby zespolonej, a kąt zawarty między osią odciętych a wektorem równy jest jej argumentowi α.



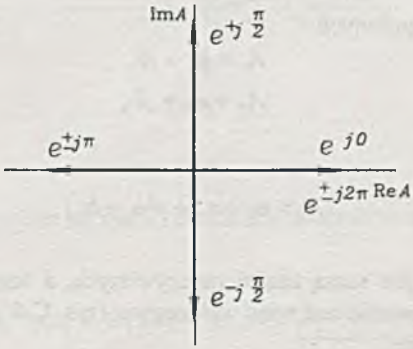
Rys. C.1

4. Liczba $e^{j\alpha}$

Często spotykana jest liczba zespolona o module równym 1. Dla niej

$$e^{j0} = 1 \qquad e^{\pm j\frac{\pi}{2}} = \pm j \qquad e^{\pm j\pi} = -1 \qquad e^{\pm j2\pi} = 1$$

Wartości te przedstawiono na rys. C.2.



Rys. C.2

5. Liczby zespolone sprzężone

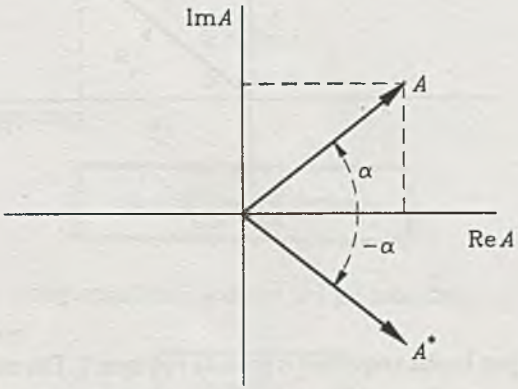
Jeżeli

$$A = a + jb = |A|e^{j\alpha},$$

to liczbą zespoloną sprzężoną nazywamy liczbę

$$A^* = a - jb = |A|e^{-j\alpha}$$

Jej obrazem na płaszczyźnie Gaussa jest zwierciadlane odbicie wektora reprezentującego liczbę A (rys. C.3).



Rys. C.3

6. Dodawanie liczb zespolonych

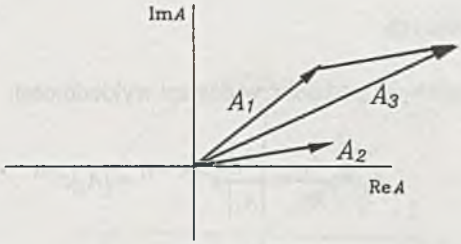
Sumą dwóch liczb zespolonych

$$A_1 = a_1 + jb_1$$
$$A_2 = a_2 + jb_2$$

jest liczba zespolona

$$A_3 = a_1 + a_2 + j(b_1 + b_2),$$

której część rzeczywista jest sumą części rzeczywistych, a część urojona jest sumą części urojonych obu liczb. Dodawanie jest więc wektorowe. (rys. C.4). Najłatwiej dokonuje się dla liczb w postaci algebraicznej.



Rys. C.4

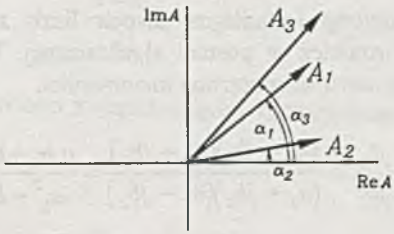
7. Mnożenie liczb zespolonych

Mnożenie liczb zespolonych najłatwiej dokonuje się dla liczb w postaci wykładniczej.

$$A_3 = A_1 A_2 = |A_1||A_2|e^{j(\alpha_1+\alpha_2)} = |A_3|e^{j\alpha_3}$$

Moduł iloczynu jest iloczynem modułów obu liczb, a kąt fazowy jest sumą kątów obu liczb.

$$|A_3| = |A_1||A_2|$$
$$\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$$



Rys. C.5

Iloczyn przedstawiony jest na rys. C.5. Liczby zespolone można też mnożyć w postaci algebraicznej:

$$A_3 = A_1 A_2 = (a_1 + jb_1)(a_2 + jb_2) = \underbrace{a_1 a_2 - b_1 b_2}_{a_3} + \underbrace{(b_1 a_2 + a_1 b_2)}_{b_3}$$

8. Dzielenie liczb zespolonych

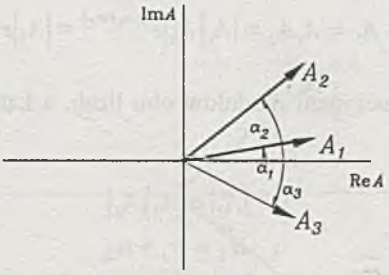
Liczby zespolone najłatwiej podzielić w postaci wykładniczej:

$$A_3 = \frac{A_1}{A_2} = \frac{|A_1|}{|A_2|} e^{j(\alpha_1 - \alpha_2)} = |A_3| e^{j\alpha_3}$$

Moduł ilorazu jest równy ilorazowi modułów, a kąt równy różnicy argumentów:

$$|A_3| = \frac{|A_1|}{|A_2|}$$

$$\alpha_3 = \alpha_1 - \alpha_2$$



Rys. C.6

Na rys. C.6 przedstawiony jest iloraz dwóch liczb zespolonych. Dzielenie liczb zespolonych jest możliwe również w postaci algebraicznej. W tym celu należy licznik i mianownik pomnożyć przez wartość sprzężoną mianownika:

$$A_3 = \frac{A_1}{A_2} = \frac{a_1 + jb_1}{a_2 + jb_2} = \frac{(a_1 + jb_1)(a_2 - jb_2)}{(a_2 + jb_2)(a_2 - jb_2)} = \frac{a_1 b_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + j\frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

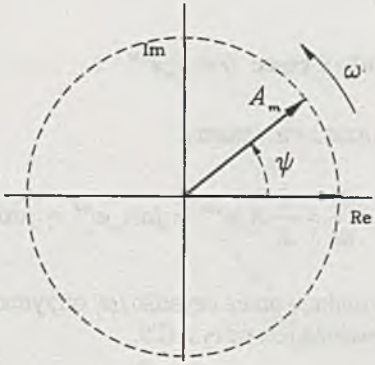
9. Zespolona funkcja czasu $A_m e^{j\omega t}$

Obrazem zespolonej funkcji czasu

$$\hat{a} = A_m e^{j\omega t}$$

$$\hat{a} = A_m e^{j\omega t} = |A_m| e^{j\psi} e^{j\omega t} = |A_m| e^{j(\omega t + \psi)}$$

jest wektor A_m, wirujący w kierunku matematycznie dodatnim z prędkością kątową ω (rys. C.7).



Rys. C.7

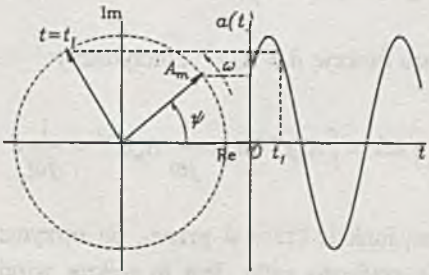
Części urojone i rzeczywiste tej funkcji :

$$\operatorname{Im}\hat{a} = |A_m|\sin(\omega t + \psi)$$
$$\operatorname{Re}\hat{a} = |A_m|\cos(\omega t + \psi),$$

a więc część urojona zespolonej funkcji $\hat{a} = A_m e^{j\omega t}$ to sinusoidalna funkcja czasu. Można ją również wyrazić jako::

$$\frac{\hat{a} - \hat{a}^*}{2j} = |A_m|\sin(\omega t + \psi)$$

Na rys. C.8 przedstawiono związek między tą zespoloną funkcją czasu a sinusoidalną funkcją czasu.



Rys. C.8

Rzut wektora A_m wirującego z prędkością kątową ω na oś urojoną jest sinusoidalną

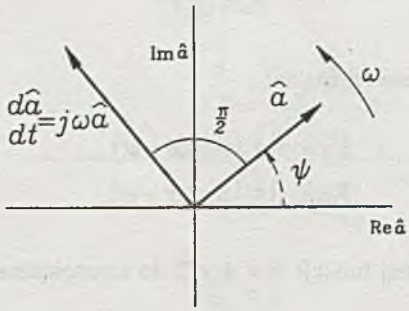
funkcją czasu. Z tego rysunku wynika również konstrukcja sinusoidy na podstawie wektora wirującego.

10. Pochodna zespolonej funkcji czasu $\hat{a} = A_m e^{j\omega t}$

Różniczkując względem czasu otrzymamy:

$$\frac{d\hat{a}}{dt} = \frac{d}{dt} A_m e^{j\omega t} = j\omega A_m e^{j\omega t} = j\omega\hat{a}$$

Mnożąc więc zespoloną funkcję przez czynnik $j\omega$ otrzymamy jej pochodną. Interpretacja graficzna pochodnej przedstawiona jest na rys. C.9.



Rys. C.9

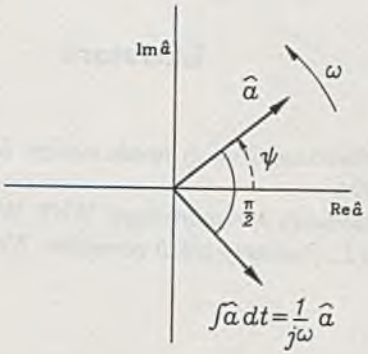
Jest to również wektor wirujący z tą samą prędkością kątową, ale „wyprzedzający" funkcję o kąt $\pi/2$. Długość wektora pochodnej jest ω - krotnie większa od długości wektora funkcji.

11. Całka zespolonej funkcji czasu $\hat{a} = A_m e^{j\omega t}$

Całkując względem czasu funkcję $\hat{a} = A_m e^{j\omega t}$, otrzymamy:

$$\int \hat{a}dt = \int A_m e^{j\omega t} dt = \frac{1}{j\omega} A_m e^{j\omega t} = \frac{1}{j\omega}\hat{a}$$

Dzieląc zatem zespoloną funkcję czasu $\hat{a}$ przez $j\omega$ otrzymamy jej całkę. Na rys. C.10 przedstawiono interpretację graficzną całki. Jest to wektor wirujący z tą samą prędkością kątową co funkcja, ale „opóźniający" się za funkcją o kąt $\pi/2$.



Rys. C.10

Literatura

[1] Macura A.:*Teoria Obwodów, Obwody prądu stałego.* Skrypt uczelniany Pol Śl nr 1789, Gliwice 1994.

[2] Osiowski J.: *Zarys rachunku operatorowego.* WNT, Warszawa 1981.

[3] Osiowski J. Szabatin J.: *Podstawy teorii obwodów.* WNT, Warszawa 1993.