



1/2

TEORJA PRĄDÓW ZMIENNYCH



KOMISJA WYDAWNICZA
TOW. BRATNIEJ POMOCY STUDENTÓW POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

DR. INŻ. LEON STANIEWICZ
PROFESOR POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

TEORJA PRĄDÓW ZMIENNYCH



Staniewicz

WARSZAWA

1935

WYDANO WESPÓŁ Z KOŁEM ELEKTRYKÓW STUDENTÓW
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ



131927

Q197/11

PRZEDMOWA.

Książka niniejsza powstała z wykładów, które wygłaszałem w ciągu kilkunastu lat z katedry elektrotechniki teoretycznej na Wydziale Elektrycznym Politechniki Warszawskiej, a które były wydane w swoim czasie w postaci skryptów litografowanych.

Zachęcony przez kolegów oraz swych byłych słuchaczy, zdecydowałem się na wydanie tych wykładów drukiem, po gruntownem ich przejrzeniu i uzupełnieniu; tembardziej, że w języku polskim książka tego rodzaju ukazuje się w druku poraz pierwszy.

Teorja prądów zmiennych stanowi dziś główną podstawę do wszelkich zagadnień, wchodzących w zakres Elektrotechniki prądów silnych, jako też Teletechniki i Radjotechniki; w ostatniem dziesięcioleciu literatura z tej dziedziny wiedzy rozwinęła się tak znacznie, że nowsze dzieła w obcych językach, dotyczące teorji prądów zmiennych, obejmują już obszerne tomy, wydawnictwo polskie, ze względu na trudności wydawnicze, należało ograniczyć do możliwie skromnych rozmiarów.

Terminologia, stosowana w tej książce, jest zgodna ze słownictwem, opracowanem przez Centralną Komisję Słownictwa Elektrotechnicznego przy Stowarzyszeniu Elektryków Polskich; oznaczenia rozpatrywanych wielkości odpowiadają znakownictwu, ustalonemu przez Międzynarodową Komisję Elektrotechniczną lub też zaleconemu w swoim czasie przez Polski Komitet Elektrotechniczny.

Rękopis mój łaskawie przeczytał i poczynił szereg cennych uwag i wskazówek profesor Mieczysław Pożaryski; za tę Jego ofiarną pracę składam Mu gorące podziękowanie.

Dziękuję również Komisji Wydawniczej Towarzystwa Bratniej Pomocy i Kołu Elektryków Studentów Politechniki Warszawskiej, że w trudnych warunkach, wspólnym wysiłkiem, umożliwiły wydanie niniejszej książki.

L. STANIEWICZ.

LITERATURA

w alfabetycznym porządku.

Dzieła treści ogólnej, dotyczące Teorii Prądów Zmiennych,
albo wyłącznie, albo częściowo.

- Agger*. Alternating Currents. 1935.
Arnold - La Cour - Bragstadt. Theorie der Wechselströme. 1920.
Bedell and Crehore. Alternating Currents. 1893.
Benischke. Die Grundgesetze der Wechselstromtechnik. 1912.
Benischke. Die wissenschaftlichen Grundlagen der Elektrotechnik. 1922.
Bryant and Correll. Alternating currents circuits. 1925.
Clayton. Alternating Currents. 1935.
Colebrook. Alternating currents and transients. 1925.
Czerdanczew. Teorja pieremiennych tokow. 1927.
Drysdale. The foundations of Alternate Current Theory. 1910.
Fraenckel. Theorie der Wechselströme. 1930.
Fryze. Elektrotechnika ogólna. T. III, cz. 1-a. 1933 (litogr.).
Görges. Grundzüge der Elektrotechnik. 1913.
Janet. Leçons d'Electrotechnique générale. T. II. 1926.
Katantarow. Teorja pieremiennych tokow. 1935.
Kittler. Allgemeine Elektrotechnik. 1909.
Krug. Osnowy Elektrotechniki. 1932.
Küpfmüller. Einführung in die theoretische Elektrotechnik. 1932.
Lawrence. Principles of Alternating Currents. 1922.
Linker. Grundlagen der Wechselstromtechnik. 1928.
Loewe. Theorie des Wechselstromes. 1926.
Lombardi. Principii scietifici di elettrotechnica. 1928.
Magnusson. Alternating currents. 1926.
Michalke. Allgemeine Grundlagen der Elektrotechnik. 1925.
Piernet. Theorie générale sur les courants alternatifs. 1923.
Požaryski. Naukowe Podstawy Elektrotechniki. 1927.
Steinmetz. Theory and Calculation of Alternating Currents Phenomena.
Tłom. niemieckie. 1900.
Vidmar. Vorlesungen über die wissenschaftlichen Grundlagen der Elek-
trotechnik. 1928.

Dzieła specjalne, obejmujące niektóre tylko działy
Teorii Prądów Zmiennych.

- Baerwald*. Die Eigenschaften symmetrischer Vierpole. 1931.
Bartlett. The theory of Electrical Artificial Lines and Filters. 1930.

VIII

- Biermanns*. Ueberströme in Hochspannungsanlagen. 1926.
- Biermanns und Mayr*. Hochspannungsforschung und Hochspannungspraxis. 1931.
- Bloch*. Die Ortskurven der graphischen Wechselstromtechnik. 1917.
- Brainerd*. High Frequency Alternating Currents. 1931.
- Breisig*. Theoretische Telegraphie. 1924.
- Breitfeld*. Analysis von Grundproblemen der theoretischen Wechselstromtechnik. 1927.
- Breitfeld*. Berechnung von Wechselstrom - Fernleitungen. 1912.
- Buch*. Hochspannungs — Anlagen. 1922.
- Budeanu*. Puissances réactives et fictives. 1927.
- Burger*. Berechnung von Drehstrom—Kraftübertragungen. 1927.
- Carson*. Elektrische Ausgleichvorgänge und Operatorenrechnung. 1929.
- Casper*. Einführung in die komplexe Behandlung von Wechselstromaufgaben. 1929.
- Cauer*. Siebschaltungen. 1931.
- Cohen*. Heaviside's electrical circuit theory. 1928.
- David*. Les filtres électriques. 1926.
- Drewnowski*. Podstawy techniki wysokich napięć. 1933 (litogr.).
- Drewnowski*. Przepięcia i urządzenia przeciwprzepięciowe. 1922.
- Eichelberger*. Kettenleiter und Sperrkreise. 1925.
- Gans*. Vektoranalysis. 1929.
- Groszkowski*. Lampy katodowe. 1925.
- Grünholz*. Theorie der Wechselstromübertragungen. 1928.
- Günther*. Beitrag zur allgemeinen Theorie der el. statischen und el. magnetischen Kopplung. 1928.
- Günther — Schultze*. Elektrische Gleichrichter und Ventile. 1924.
- Hauffe*. Ortskurven der Starkstromtechnik. 1932.
- Heaviside*. Electromagnetic Theory. 1893.
- Hensel*. Elektrotechnika w zadaniach. Prąd zmienny. 2 części. 1929.
- Holler and Schrodt*. Theory and performance of Rectifiers. 1924.
- Jahnke—Emde*. Funktionentafeln. 1928.
- Kafka*. Die ebene Vektorrechnung. 1926.
- Kennelly*. Chart Atlas. 1924.
- Kennelly*. Electric lines and Nets. 1928.
- Kennelly*. Tables of complex hyperbolic and circular functions. 1921.
- Kennelly*. The application of hyperbolic functions to Electrical Engineering Problems. 1925.
- Malli*. Electric circuit analysis. 1930.
- Merczyng*. Teorja prądu elektrycznego. 1905.
- Mościcki i Altenberg*. O stratach dielektrycznych w kondensatorach. 1904.
- Natalis*. Die Berechnung von Gleich—und Wechselstromsystemen. 1924.
- Ollendorf*. Die Grundlagen der Hochfrequenztechnik. 1926.
- Orlich*. Aufnahme und Analyse von Wechselstromkurven. 1906.
- Orlich*. Kapazität und Induktivität. 1926.
- Perekalin*. Sbornik zadacz po teoreticzeskoj elektrotechnike. 1926.
- Pierce*. Electric oscillations and electric waves. 1920.
- Pożaryski*. Maszyny elektryczne i prostowniki. 1930.
- Pożaryski*. Technika prądów szybkozmiennych. 1931 (litogr.).
- Ring*. Die symbolische Methode zur Lösung von Wechselstromaufgaben. 1928.

IX

- Roessler.* Die Fernleitung von Wechselströmen. 1925.
- Roth.* Hochspannungstechnik. 1927.
- Rüdenberg.* Aussendung und Empfang elektrischer Wellen. 1926.
- Rüdenberg.* Elektrische Schaltvorgänge. 1926.
- Rüdenberg.* Kurzschlussströme beim Betrieb von Grosskraftwerken. 1925.
- Rziha und Seidener.* Starkstromtechnik. Taschenbuch für Elektrotechniker.
T. I. 1930. T. II. 1931.
- Schilling.* Die Umbildung der Wellenform. 1931.
- Schwaiger.* Hochspannungsleitungen. 1931.
- Shea.* Transmission Networks and Wave Filters. 1930.
- Steinmetz.* Théorie et Calcul des phénomènes électriques de transition et des oscillations. 1912.
- Strecker.* Hilfsbuch für die Elektrotechnik. Starkstromausgabe. 1925.
Schwachstromausgabe. 1928.
- Trechciński.* Obwody niyustalone. 1930.
- Trechciński.* Obwody niestacjonarne. 1927.
- Valensi.* La théorie de la transmission téléphonique. 1935.
- Veaux.* Les filtres électriques. 1927.
- Wagner.* Die wissenschaftlichen Grundlagen des Rundfunkempfangs. 1927.
- Wagner.* Elektromagnetische Ausgleichsvorgänge in Freileitungen und Kabeln. 1908.
- Wallot.* Einführung in die Theorie der Schwachstromtechnik. 1932.
- Wysocki — Odrowąż.* Obliczanie przewodów elektrycznych. 1925.

OZNACZENIA.

<i>A</i>	Uplywność		
<i>B</i>	Indukcja magnetyczna		
<i>B</i>	Przewodność urojona		
<i>C</i>	Pojemność elektryczna		
<i>D</i>	Indukcja elektryczna		
<i>d</i>	Średnica		
<i>E</i>	Siła elektromotoryczna — wartość skuteczna		
<i>E_m</i>	"	"	" maksymalna
<i>e</i>	"	"	" chwilowa
<i>e</i>	Podstawa logarytmów naturalnych		
ϵ	Stała dielektryczna		
<i>f</i>	Częstotliwość prądu zmiennego		
Φ	Strumień magnetyczny (indukcji magnetycznej)		
Φ_m	"	"	— wartość maksymalna
Φ_t	"	"	" chwilowa
φ	Kąt przesunięcia fazy między napięciem i natężeniem prądu		
<i>G</i>	Przewodność rzeczywista		
γ	"	właściwa	
<i>H</i>	Natężenie pola magnetycznego		
<i>h</i>	Wysokość		
<i>I</i>	Natężenie prądu — wartość skuteczna		
<i>I_m</i>	"	"	" maksymalna
<i>i</i>	"	"	" chwilowa
<i>i_u</i>	"	"	" w stanie ustalonym
<i>i_p</i>	"	"	" przejściowa
<i>j</i>	$\sqrt{-1}$		
<i>K</i>	Natężenie pola elektrycznego		
<i>L</i>	Indukcyjność własna		
<i>l</i>	Długość, odległość		
λ	Długość fali		
<i>M</i>	Indukcyjność wzajemna		
μ	Przenikalność magnetyczna		

ω	Pulsacja
P	Moc
Q	Ładunek elektryczny
R	Oporność rzeczywista
r	Promień
ρ	Oporność właściwa
S	Spółczynnik linjowy
s	Pole, pole przekroju
σ	Gęstość ładunku elektrycznego
T	Okres
t	Czas
U	Napięcie — wartość skuteczna
U_m	„ „ maksymalna
u	„ „ chwilowa
u_u	„ „ „ w stanie ustalonym
u_p	„ „ „ przejściowa
V	Potencjał
v	Objętość
W	Energja
X	Oporność urojona
X_L	„ indukcyjna
X_c	„ pojemnościowa
Y	Przewodność pozorna
Z	Oporność pozorna, Oporność falowa
z	Liczba zwojów

Daszek nad literą np. \hat{E} , \hat{U} , \hat{I} , \hat{Z} oznacza symboliczne ujęcie rozpatrywanych wielkości.

SPIS RZECZY.

ROZDZIAŁ I.

Prąd zmienny sinusoidalny.

	<i>Str.</i>
§ 1. Określenie prądu zmiennego. Prąd sinusoidalny	1
§ 2. Okres. Częstotliwość. Pulsacja	5
§ 3. Faza. Przesunięcie fazy	6
§ 4. Wartość średnia i wartość skuteczna	8
§ 5. Moc prądu zmiennego. Spółczynnik mocy	12
§ 6. Dodawanie funkcji sinusoidalnych.	15

ROZDZIAŁ II.

Obwody prądu zmiennego ze skupionymi opornościami.

§ 7. Obwód z opornością rzeczywistą	17
§ 8. Obwód z opornością rzeczywistą i indukcyjnością w szeregowym połączeniu	19
§ 9. Obwód z opornością rzeczywistą i pojemnością w szeregowym połączeniu	25
§ 10. Obwód z opornością rzeczywistą, indukcyjnością i pojemnością.	30
§ 11. Rezonans napięć	35
§ 12. Zależność oporności pozornej od częstotliwości	37

ROZDZIAŁ III.

Metody rozważania prądów zmiennych.

§ 13. Metoda wykreślna.	39
§ 14. Metoda symboliczna	46
§ 15. Metoda inwersji	58
§ 16. Napięcia i oporności pozorne w szeregowym połączeniu	61
§ 17. Spadek napięcia i strata napięcia w obwodach prądu zmiennego.	64
§ 18. Prawa Kirchhoffa w zastosowaniu do prądów zmiennych	66
§ 19. Oporności pozorne połączone równolegle	69
§ 20. Rezonans prądów	73
§ 21. Przykłady na równoległe połączenie oporności pozornych	75

ROZDZIAŁ IV.

Prądy wielofazowe.

§ 22.	Określenie i powstawanie prądu wielofazowego.	83
§ 23.	Twierdzenie matematyczne o sumie wartości chwilowych wielkości układu wielofazowego symetrycznego	85
§ 24.	Układy wielofazowe	86
§ 25.	Moc prądów wielofazowych	92
§ 26.	Prąd trójfazowy	93
§ 27.	Rozkład układów niesymetrycznych na układy symetryczne prądu trójfazowego	96
§ 28.	Moc prądu trójfazowego	100
§ 29.	Wyznaczenie prądów w układach prądu trójfazowego	105
§ 30.	Prąd dwufazowy	110
§ 31.	Względy ekonomiczne, które wpłynęły na rozwój prądów zmiennych wielofazowych	113
§ 32.	Pola wirujące	117

ROZDZIAŁ V.

Zjawiska magnetyczne przy prądach zmiennych.

§ 33.	Histeresa magnetyczna.	123
§ 34.	Prądy wirowe.	129
§ 35.	Obwody magnetycznie sprzężone. Transformator powietrzny.	135
§ 36.	Transformator z rdzeniem żelaznym	138
§ 37.	Praktyczne znaczenie transformatorów	143
§ 38.	Układ Scotta	144

ROZDZIAŁ VI.

Zjawiska zachodzące w przewodach i w dielektrykach przy prądzie zmiennym.

§ 39.	Zjawisko naskórkowości	146
§ 40.	Straty w dielektrykach	157

ROZDZIAŁ VII.

Prostowniki.

§ 41.	Prostownik rtęciowy	162
§ 42.	Prostownik elektrolityczny	165
§ 43.	Prostownik katodowy	166
§ 44.	Prostownik tlenkowy	167

ROZDZIAŁ VIII.

Prądy odkształcone.

§ 45.	Szereg Fourier'a	168
§ 46.	Przypadki szczególne	171

XIV

	<i>Str.</i>
§ 47. Przykłady	174
§ 48. Analiza krzywych	189
§ 49. Nakładanie się prądów odkształconych	192
§ 50. Spółczynnik kształtu i współczynnik szczytu	195
§ 51. Wartość skuteczna prądu odkształconego	198
§ 52. Obwód prądu odkształconego	200
§ 53. Moc prądu odkształconego	203
§ 54. Wpływ prądu odkształconego przy pomiarach indukcyjności i pojemności	206
§ 55. Trójfazowe prądy odkształcone	208

ROZDZIAŁ IX.

Równania i wykresy obwodów prądu zmiennego, oparte na badaniach w stanie jałowym i w stanie zwarcia.

§ 56. Równania zasadnicze	211
§ 57. Obwód symetryczny	217
§ 58. Określenie wielkości stałych za pomocą pomiarów	218
§ 59. Warunki osiągnięcia największej mocy prądu na odbiorniku.	222
§ 60. Wykres pracy obwodu prądu zmiennego	227

ROZDZIAŁ X.

Obliczanie pojemności i indukcyjności w liniach elektrycznych.

§ 61. Rozkład potencjału w polu elektrycznym	240
§ 62. Pojemność kabla jednożyłowego obołowionego	244
§ 63. Pojemność kabla jednożyłowego opancerzonego	245
§ 64. Rozkład napięć na okładzinach metalowych kabla opancerzonego.	247
§ 65. Pojemność kabla dwużyłowego koncentrycznego	248
§ 66. Pojemność kabla dwużyłowego skręconego	250
§ 67. Pojemność kabla trzyżyłowego skręconego	254
§ 68. Pojemność przewodu napowietrznego pojedynczego (drugi przewód ziemia)	260
§ 69. Pojemność dwóch równoległych do siebie przewodów napowietrznych	261
§ 70. Pojemność trzech równoległych, symetrycznie ułożonych przewodów napowietrznych prądu trójfazowego	264
§ 71. Pojemność cząstkowa i pojemność robocza w liniach elektrycznych	265
§ 72. Indukcyjność	269
§ 73. Indukcyjność linii dwuprzewodowej	269
§ 74. Indukcyjność linii jedнопrzewodowej (drugi przewód ziemia).	272
§ 75. Indukcyjność linii trzyprzewodowej prądu trójfazowego	273
§ 76. Indukcyjność kabla dwużyłowego koncentrycznego	274

ROZDZIAŁ XI.

Przewody długie.

§ 77.	Wielkości charakterystyczne	278
§ 78.	Równania zasadnicze	279
§ 79.	Rozwiązanie metodą symboliczną	280
§ 80.	Stale całkowania	283
§ 81.	Fale napięcia i prądu	285
§ 82.	Linja bez strat	289
§ 83.	Linja bez strat w stanie jałowym i w stanie zwarcia	295
§ 84.	Linja nieodkształcająca	298
§ 85.	Przypadek ogólny	307
§ 86.	Obliczenie stałych linii na podstawie pomiarów, dokonanych w stanie jałowym i w stanie zwarcia	309
§ 87.	Wzory dla napięć i prądów, oparte na własnościach linii w stanie jałowym i w stanie zwarcia. Spółczynnik linjowy	313

ROZDZIAŁ XII.

Sztuczne linje elektryczne.

§ 88.	Układy, zastępujące długą linję	320
§ 89.	Linje łańcuchowe	324
§ 90.	Filtry elektryczne	339
§ 91.	Łańcuch izolatorów wiszących	357

ROZDZIAŁ XIII.

Stany nieustalone w obwodach ze skupionymi opornością rzeczywistą, indukcyjnością i pojemnością.

§ 92.	Stany ustalone i nieustalone	362
§ 93.	Powstawanie i zanikanie prądu stałego w obwodzie z opornością rzeczywistą i indukcyjnością	364
§ 94.	Zmiana oporności w obwodzie prądu stałego	367
§ 95.	Powstawanie i zanikanie prądu zmiennego w obwodzie z opornością rzeczywistą i indukcyjnością	369
§ 96.	Przerywanie obwodu z uwzględnieniem zmiany oporności na wyłączniku	374
§ 97.	Ładowanie kondensatora prądem stałym przez oporność rzeczywistą	379
§ 98.	Powstawanie prądu zmiennego w obwodzie z opornością rzeczywistą i pojemnością	382
§ 99.	Wyladowanie kondensatora przez oporność rzeczywistą	386
§ 100.	Obwód z opornością rzeczywistą, indukcyjnością i pojemnością	387
§ 101.	Wyladowanie kondensatora aperiodyczne	390
§ 102.	Wyladowanie kondensatora oscylacyjne. Wzór Thomsona	396
§ 103.	Ładowanie kondensatora prądem stałym przez oporność rzeczywistą i indukcyjność	403

XVI

	Str.
§ 104. Powstawanie prądu zmiennego w obwodzie z opornością rzeczywistą, indukcyjnością i pojemnością	410
§ 105. Przerzwanie obwodu, w którym indukcyjność i pojemność są połączone równolegle	419

ROZDZIAŁ XIV.

Obwody sprzężone magnetycznie.

§ 106. Wyladowanie kondensatora w jednym z dwóch obwodów sprzężonych magnetycznie	422
§ 107. Wyladowanie kondensatora w przypadku, gdy oba obwody są ze sobą w rezonansie	428

ROZDZIAŁ XV.

Przewody długie z równomiernie rozłożonemi opornością rzeczywistą, indukcyjnością, upływnością i pojemnością.

§ 108. Równania różniczkowe dla wartości chwilowych napięć i prądów. Całki ogólne tych równań	433
§ 109. Przyłączanie linji w końcu otwartej do źródła prądu stałego.	441
§ 110. Przyłączanie linji w końcu zwartej do źródła prądu stałego	447
§ 111. Przyłączanie linji w końcu otwartej do źródła prądu zmiennego.	447
§ 112. Przyłączanie linji w końcu zwartej do źródła prądu zmiennego.	449
§ 113. Linja nieodkształcająca. Wyrażenie wartości chwilowych napięć i prądów w postaci dwóch fal	450
§ 114. Przyłączanie linji nieodkształcającej do oporności rzeczywistej.	454
§ 115. Przyłączanie linji nieodkształcającej do oporności pozornej.	458
Skorowidz alfabetyczny	460

ROZDZIAŁ I.

PRĄD ZMIENNY SINUSOIDALNY.

§ 1. Określenie prądu zmiennego. Prąd sinusoidalny.

Prądem zmiennym nazywamy prąd elektryczny, którego wielkości charakterystyczne: napięcie, natężenie i t. p. zmieniają z biegiem czasu swe wartości oraz kierunki. W elektrotechnice mamy do czynienia przeważnie z prądami zmieniającymi się okresowo, czyli z takimi prądami, które po upływie określonego czasu przybierają te same wartości i te same kierunki. Najbardziej prawidłową postacią prądu zmiennego jest prąd o przebiegu sinusoidalnym, który będziemy w skróceniu nazywali prądem sinusoidalnym.

Przebieg sinusoidalny określamy funkcją

$$y = A \sin x$$

Dla tej funkcji na wykresie (rys. 1) otrzymujemy krzywą, zwaną sinusoidą.

$$\begin{array}{ll} \text{Dla } x=0 & y=0; \\ \text{„ } x=\frac{\pi}{2} & y=A. \end{array}$$

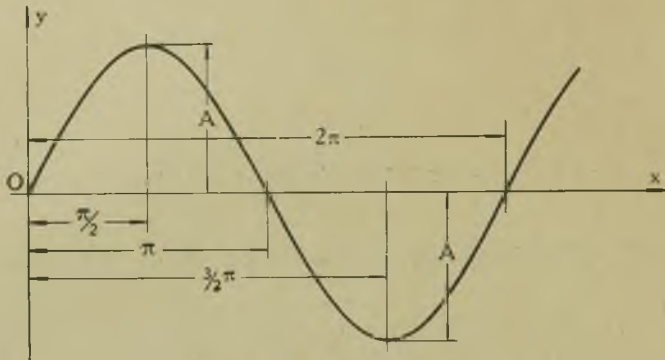
A stanowi wartość szczytową lub maksymalną albo amplitudę sinusoidy, zaś x jej argument.

$$\begin{array}{ll} \text{Dla } x=\pi & y=0 \\ \text{„ } x=\frac{3}{2}\pi & y=-A \end{array}$$

wreszcie $\text{„ } x=2\pi \quad y=0$

Całkowity przebieg sinusoidy dla wartości x od 0 do 2π będziemy nazywali falą sinusoidy.

Prąd sinusoidalny może powstać, gdy istnieje siła elektromotoryczna o przebiegu sinusoidalnym. Siłę elektromotoryczną będziemy nadal pisali w skróceniu przez *SEM*.



Rys. 1.

Gdy przewodnik porusza się w polu magnetycznym, przecinając strumień magnetyczny, powstaje w tym przewodniku *SEM* indukcji, której wartość e w chwili t otrzymujemy ze wzoru

$$e = -\frac{d\Phi_t}{dt} \text{ jedn. CGS}$$

lub

$$e = -\frac{d\Phi_t}{dt} 10^{-8} \text{ woltów,}$$

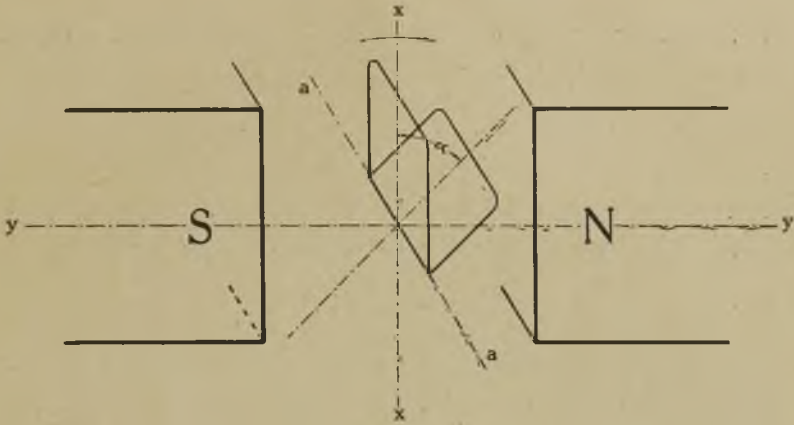
gdzie Φ_t oznacza wartość strumienia magnetycznego przez powierzchnię, ograniczoną przewodnikiem.

Najprostszy przypadek mamy, gdy przewodnik obraca się z jednakową szybkością w jednostajnym polu magnetycznym, gdzie natężenie pola ma wartość stałą. Przypuśćmy, że mamy takie pole między dwoma biegunami *N* i *S* magnesu lub elektromagnesu (rys. 2); rozpatrzmy przewodnik np. w postaci prostokątnej ramki z drutu, która może się obracać naokoło osi $a - a$. Gdy ramka znajduje się w położeniu $x - x$ strumień magnetyczny przez powierzchnię ograniczoną ramką będzie miał największą wartość i kierunek prostopadły do powierzchni. Jeżeli oznaczymy przez B indukcję

magnetyczną w rozpatrywanem polu, zaś przez s pole powierzchni ograniczonej ramką, wówczas strumień Φ_m , objęty ramką w położeniu $x-x$ będzie równy

$$\Phi_m = B s .$$

Gdy ramka obróci się o kąt $\frac{\pi}{2}$ i zajmie położenie $y-y$, wtedy objęty przez nią strumień magnetyczny będzie równy 0. W po-



Rys. 2.

łożeniu pośrednim, gdy ramka tworzy z osią $x-x$ kąt α (rys. 2 lub rys. 3), strumień objęty przez ramkę będzie równy

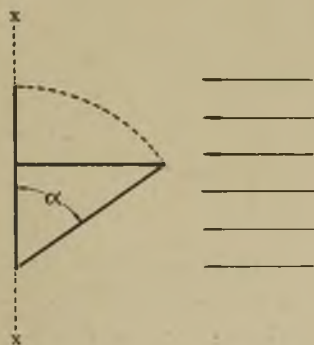
$$B s \cos \alpha = \Phi_m \cos \alpha .$$

Załóżmy, że ramka, obracając się ze stałą prędkością kątową ω , obróciła się o kąt α po upływie czasu t , tak iż $\alpha = \omega t$, wówczas powyższy wzór możemy przepisać w sposób następujący

$$B s \cos \alpha = \Phi_m \cos \omega t .$$

Widzimy stąd, że strumień magnetyczny, objęty przez ramkę, jest funkcją czasu okresowo zmienną. Rozpoczynając liczenie czasu od chwili, gdy strumień ma swoją największą wartość, będziemy mieli dla wartości strumienia w chwili t wzór

$$\Phi_t = \Phi_m \cos \omega t . \quad (1)$$



Rys. 3.

Badając ten wzór widzimy, że

$$\left. \begin{array}{ll} \text{dla } \omega t = 0 & \Phi_t = \Phi_m \\ \text{„ } \omega t = \frac{\pi}{2} & \Phi_t = 0 \\ \text{„ } \omega t = \pi & \Phi_t = \Phi_m \\ \text{„ } \omega t = \frac{3}{2}\pi & \Phi_t = 0 \end{array} \right\} \quad (2)$$

Przechodząc następnie od strumienia do *SEM*, otrzymamy dla rozpatrywanego przykładu

$$e = - \frac{d\Phi_t}{dt} = - \Phi_m \cdot (-\omega \sin \omega t) = \Phi_m \omega \sin \omega t.$$

Jak widać z tego wzoru *SEM* określona jest funkcją sinusoidalną. Oznaczając iloczyn $\Phi_m \omega$ przez E_m , otrzymamy

$$e = E_m \sin \omega t. \quad (3)$$

Otrzymaliśmy w ten sposób w obwodzie *SEM* sinusoidalną. Widzimy, że jest ona wynikiem obracania się przewodnika z prędkością stałą w jednostajnym polu magnetycznym. E_m ma wartość stałą i nazywa się wartością szczytową albo maksymalną lub też amplitudą *SEM*; e jest funkcją czasu i nazywa się wartością chwilową *SEM*.

Badając wzór (3) widzimy, że

$$\left. \begin{array}{ll} \text{dla } \omega t = 0 & e = 0 \\ \text{„ } \omega t = \frac{\pi}{2} & e = E_m \\ \text{„ } \omega t = \pi & e = 0 \\ \text{„ } \omega t = \frac{3}{2}\pi & e = -E_m \end{array} \right\} \quad (4)$$

Porównywając ze sobą wyniki (2) i (4) widzimy, że strumień magnetyczny i *SEM* zmieniają się w ten sposób, że gdy strumień przechodzi przez swą wartość największą, *SEM* przechodzi przez wartość 0 i naodwrot.

Analogicznie do przebiegu sinusoidalnego *SEM* możemy rozpatrywać sinusoidalny przebieg natężenia prądu według wzoru

$$i = I_m \sin \omega t, \quad (5)$$

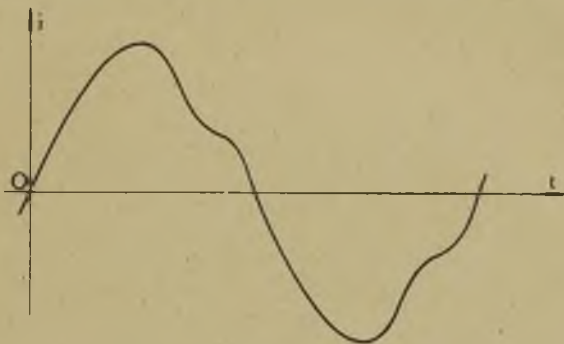
gdzie i oznacza wartość chwilową, zaś I_m wartość szczytową lub maksymalną natężenia prądu.

Tak samo otrzymamy wzór dla napięcia sinusoidalnego

$$u = U_m \sin \omega t \quad (6)$$

Wzory (3), (5) i (6) wyrażają przebiegi rozpatrywanych wielkości w obwodzie elektrycznym, w którym pewien kierunek został przyjęty jako kierunek dodatni.

Prądy zmienne, które nie mają przebiegu sinusoidalnego nazywamy prądami odkształconymi, jak np. na (rys. 4).



Rys. 4.

W dalszych rozważaniach będziemy rozpatrywali najpierw prądy sinusoidalne.

§ 2. Okres. Częstotliwość. Pulsacja.

W rozpatrywanych przebiegach sinusoidalnych wartości funkcji czasu powtarzają się dla argumentów, różniących się o $2k\pi$, gdzie k — liczba całkowita. Oznaczając przez T najkrótszy czas, po upływie którego następuje powtórzenie wartości funkcji, będziemy mieli

$$\omega T = 2\pi$$

skąd
$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (7)$$

Czas T nazywamy czasem okresu lub w skróceniu okresem prądu zmiennego. W ciągu jednego okresu T funkcja przybiera wszelkie wartości fali. Przebieg zmian wartości rozpatrywanej wielkości okresowej w ciągu jednego jej okresu nazywają również cyklem. Po upływie czasu T rozpoczyna się druga fala i t. d.

Liczba okresów na sekundę stanowi wielkość zwaną częstotliwością prądu zmiennego; oznaczamy ją literą f ; mamy więc

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}. \quad (8)$$

Częstotliwości nie należy mieszać z liczbą zmian kierunku prądu na sekundę; ta liczba zmian jest dwa razy większa od częstotliwości.

Częstotliwość ma wymiar odwrotności czasu; wyrażamy ją w okresach na sekundę; na terenie międzynarodowym jest tendencja do nadania jednostce częstotliwości czyli jednemu okresowi na sekundę nazwy „herc“.

Ze wzorów (7) i (8) możemy napisać

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad (9)$$

lub

$$\omega = 2\pi f \quad (10)$$

Wielkość ω , która w poprzednich wzorach stanowiła prędkość kątową podczas obrotu ramki w polu magnetycznym, nazywamy pulsacją prądu zmiennego.

W zależności od tego, którą z trzech wielkości: pulsację, okres lub częstotliwość chcemy wprowadzić do wzorów na wartości chwilowe funkcji sinusoidalnych czasu, możemy wzory te przepisać w trzech równoznacznych postaciach, korzystając z zależności (9) i (10), np. wzór (3)

$$e = E_m \sin \omega t;$$

$$e = E_m \sin \frac{2\pi}{T} t;$$

$$e = E_m \sin 2\pi f t.$$

W urządzeniach prądu silnego dla siły i światła częstotliwość wynosi najczęściej 50 okresów na sekundę: $f = 50$, $T = \frac{1}{50}$; w urządzeniach prądu słabego, np. w urządzeniach telefonicznych, częstotliwość dochodzi do kilkunastu tysięcy okresów na sekundę, zaś w radjotechnice mamy nawet miliony okresów na sekundę.

§ 3. Faza. Prześnięcie fazy.

Argument funkcji sinusoidalnej wzrasta w miarę wzrostu zmiennej niezależnej. Wartość argumentu, zawartą w granicach

jednego okresu czyli pomiędzy 0 i 2π lub $-\pi$ i $+\pi$, nazywamy fazą tej funkcji. Rozpatrując funkcję sinusoidalną czasu, powiemy, że faza jej w pewnej chwili wynosi α , gdy w tej chwili $\omega t = \alpha$, przy czym $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ lub $-\pi \leq \alpha \leq +\pi$. Gdyby wartość argumentu ωt przekraczała podane granice, należy dla otrzymania fazy odjąć lub dodać wielokrotność okresu 2π , tak aby rezultat był zawarty w wyżej przytoczonych granicach.

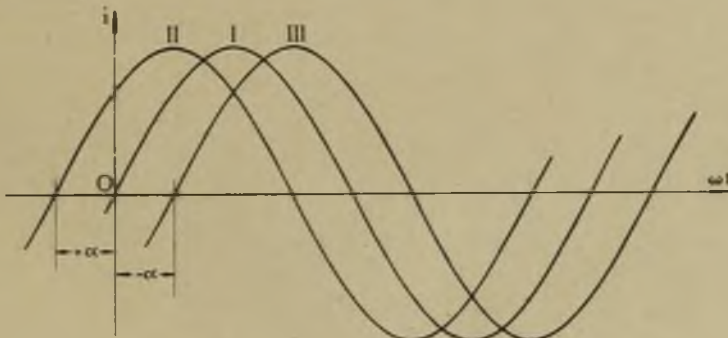
Gdy piszemy wzór na wartość chwilową np. natężenia prądu w postaci

$$i = I_m \sin \omega t,$$

widzimy, że w tym przypadku w chwili, gdy rozpoczynamy liczenie czasu, prąd przechodzi przez fazę 0. Jeżeli rozpoczynamy liczenie czasu w chwili, gdy sinusoida posiada inną fazę, wtedy do argumentu ωt musimy dodać lub odjąć odpowiedni kąt fazowy.

Sinusoidę, która w chwili $t=0$ przechodzi przez fazę 0 będziemy nazywali sinusoidą normalną.

Zestawmy 3 sinusoidy (rys. 5): I normalną, której równanie jest $i = I_m \sin \omega t$ oraz II i III o tej samej amplitudzie, lecz przesunięte



Rys. 5.

względem sinusoidy normalnej w lewo i w prawo o kąt α . Rozpatrując sinusoidę II, widzimy, że w chwili $t=0$ przechodzi ona przez fazę $+\alpha$; jej równanie będzie

$$i = I_m \sin (\omega t + \alpha).$$

Rozumując analogicznie, napiszemy dla sinusoidy III równanie

$$i = I_m \sin (\omega t - \alpha).$$

Porównyując obie te sinusoidy z normalną, widzimy, że sinusoida II wyprzedza ją ze swoją fazą, a więc wcześniej przechodzi przez wartość maksymalną i 0. Z tego samego względu sinusoida

III jest opóźniona pod względem fazy w stosunku do sinusoidy I — normalnej. Możemy dla tych sinusoid napisać ogólne równanie

$$i = I_m \sin(\omega t + \alpha),$$

jeżeli kątowni α będziemy nadawali znaki $+$ lub $-$ w zależności od tego, czy rozpatrywana sinusoida będzie wyprzedzona czy też opóźniona w fazie względem sinusoidy normalnej.

Dla $\alpha = 0$ otrzymamy sinusoidę normalną. Kąt α nazywamy kątem przesunięcia fazy.

§ 4. Wartość średnia i wartość skuteczna.

Wartością średnią funkcji sinusoidalnej nazywamy średnią arytmetyczną wszystkich wartości bezwzględnych tej funkcji w ciągu jednego jej okresu. Rozpatrując funkcję sinusoidalną czasu

$$y = Y_m \sin \omega t = Y_m \sin \frac{2\pi}{T} t. \quad (11)$$

będziemy mieli, na podstawie powyższego określenia, dla wartości średniej tej funkcji wzór

$$Y_{sr} = \frac{1}{T} \int_0^T |Y| dt,$$

gdzie $|Y|$ stanowi wartość bezwzględną rozpatrywanej funkcji. Ponieważ wartości bezwzględne funkcji sinusoidalnej w drugiej połowie okresu są zupełnie takie same jak w pierwszej połowie, przeto dla takiej funkcji możemy dla obliczenia średniej wartości ograniczyć się do połowy okresu i napisać

$$Y_{sr} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} y dt. \quad (12)$$

Podstawiając wartość y z (11) i wykonywając całkowanie, otrzymamy

$$Y_{sr} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} Y_m \sin \frac{2\pi}{T} t dt = \frac{2Y_m}{T} \cdot \frac{T}{2\pi} \left| -\cos \frac{2\pi}{T} t \right|_0^{T/2} = \frac{2}{\pi} Y_m. \quad (13)$$

Wyraz $\frac{2}{\pi}$ w przybliżeniu równa się 0,64, możemy więc napisać przybliżony wzór

$$Y_{sr} \cong 0,64 Y_m$$

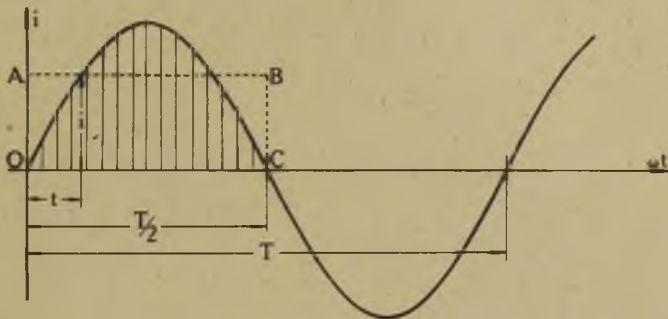
Rozpatrując, na przykład, przebieg natężenia prądu, przedstawiony na rys. 6, określony wzorem

$$i = I_m \sin \omega t,$$

otrzymamy dla wartości średniej tego prądu

$$I_{sr} = \frac{2}{\pi} I_m \cong 0,64 I_m;$$

wartość ta na rysunku odpowiada rzędnej OA .



Rys. 6.

Obliczmy ilość elektryczności Q , która przepływa przez obwód z rozpatrywanym prądem w ciągu połowy okresu. W pewnej chwili t natężenie prądu ma wartość i ; w ciągu nieskończenie małego czasu dt ilość elektryczności, przepływająca w obwodzie, będzie

$$dq = i dt.$$

Ilość elektryczności, jaka przepłynie przez obwód w ciągu połowy okresu, wyrazi się wzorem

$$Q = \int_0^{T/2} i dt.$$

Całka ta stanowi pole, ograniczone połową fali sinusoidy i osią odciętych, z drugiej strony pole to jest równe polu prostokąta $OABC$, którego jeden bok stanowi połowę okresu, zaś drugi bok równy jest wartości średniej natężenia prądu, czyli

$$Q = I_{sr} \frac{T}{2}.$$

Możemy więc określić wartość średnią natężenia prądu zmiennego jako natężenie takiego prądu stałego, przy którym ilość elektryczności, przepływająca w ciągu połowy okresu, będzie ta sama, co i przy rozpatrywanym prądzie zmiennym. Na rysunku pole $OABC$ odpowiada wartości Q .

Wartością skuteczną funkcji sinusoidalnej nazywamy pierwiastek kwadratowy ze średniej arytmetycznej kwadratów jej wartości, obliczonej dla całego okresu. Dla funkcji, przedstawionej wzorem (11), wartość skuteczna Y będzie określona wzorem

$$Y = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T y^2 dt} \quad (14)$$

lub, po podstawieniu wartości y ,

$$Y = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T Y_m^2 \sin^2 \frac{2\pi}{T} t dt} = Y_m \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 \frac{2\pi}{T} t dt}.$$

Całka, stojąca pod pierwiastkiem, którą możemy łatwo rozwiązać, zakładając $\sin^2 \frac{2\pi}{T} t = \frac{1 - \cos \frac{4\pi}{T} t}{2}$, równa się $\frac{T}{2}$; wobec tego otrzymujemy

$$Y = \frac{1}{\sqrt{2}} Y_m. \quad (15)$$

Wyraz $\frac{1}{\sqrt{2}}$ w przybliżeniu równa się 0,707, więc dla wartości skutecznej możemy napisać przybliżony wzór

$$Y \cong 0,707 Y_m.$$

Wartości skutecznej natężenia prądu możemy nadać pewne znaczenie fizyczne, rozumując w sposób następujący. Rozpatrując obwód elektryczny, przez który przepływa prąd stały o natężeniu I , wyrazimy energię W_s , przetwarzającą się na ciepło w ciągu czasu T , wzorem

$$W_s = I^2 R T, \quad (16)$$

gdzie R oznacza oporność obwodu. Gdy przez ten sam obwód przepływać będzie prąd zmienny, energię W_z , w ciągu okresu T ,

obliczymy, rozpatrując nieskończenie mały przeciąg czasu dt po chwili t , gdy natężenie prądu ma wartość i ; w tym czasie energia dW wyrazi się wzorem

$$dW = i^2 R dt;$$

całkując w granicach od 0 do T , znajdziemy wartość energii W_s ; więc

$$W_s = \int_0^T i^2 R dt. \quad (17)$$

Dobierzmy teraz taką wartość natężenia prądu stałego I , któryby w okresie T dał energję taką samą co i rozpatrywany prąd zmienny; w tym celu przyrównamy do siebie wzory (16) i (17), wtedy

$$I^2 R T = \int_0^T i^2 R dt.$$

W przypadku, gdy oporność R obwodu pozostaje taką samą, jak przy prądzie stałym, możemy podzielić obie strony ostatniej równości przez R , wtedy

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}.$$

Wyraz, stojący z prawej strony, stanowi wartość skuteczną natężenia prądu zmiennego, możemy więc dać następujące określenie: wartość skuteczna natężenia prądu zmiennego jest to taki umyślony prąd stały, który, płynąc w obwodzie ze stałą opornością, wytworzyłby w ciągu okresu T taką samą energję, co w rzeczywistości wytwarza w tym samym czasie prąd zmienny.

Wartości skuteczne mają wielkie znaczenie przy rozważaniu prądów zmiennych. Zwykle, gdy podajemy wartości natężenia lub napięcia prądu zmiennego, mamy na myśli wartości skuteczne tych wielkości. Przyrządy pomiarowe, używane w technice do mierzenia napięć i natężeń prądu zmiennego, wskazują najczęściej wartości skuteczne.

Wartości skuteczne przyjęto oznaczać dużemi literami bez wskaźników, piszemy więc, uwzględniając wzór (15),

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}; \quad U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}; \quad E = \frac{E_m}{\sqrt{2}} \text{ i t. d.}$$

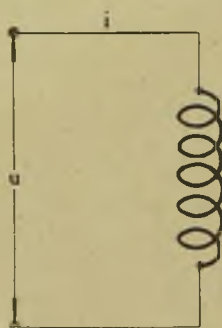
Wprowadzając do wzorów na wartości chwilowe, zamiast wartości szczytowych czyli maksymalnych, wartości skuteczne, możemy napisać

$$i = I\sqrt{2} \sin \omega t; \quad u = U\sqrt{2} \sin \omega t; \quad e = E\sqrt{2} \sin \omega t \quad \text{i t. d.}$$

§ 5. Moc prądu zmiennego. Spółczynnik mocy.

Rozpatrzmy część obwodu elektrycznego (rys. 7), na końcówkach którego działa napięcie o wartości chwilowej

$$u = U_m \sin \omega t \quad (18)$$



Rys. 7.

i przepływa prąd o wartości chwilowej i . W obwodach prądu zmiennego, jak o tem niejednokrotnie się przekonamy, natężenie prądu naogół nie jest w fazie z napięciem; pomiędzy temi wielkościami zachodzi przesunięcie fazy; oznaczając kąt przesunięcia fazy pomiędzy natężeniem i napięciem prądu przez φ , przyczem φ może mieć znak zarówno dodatni jak i ujemny, otrzymamy dla wartości chwilowej natężenia prądu wzór

$$i = I_m \sin (\omega t + \varphi). \quad (19)$$

Przy prądzie stałym moc, pobierana w rozpatrywanej części obwodu, byłaby określona iloczynem napięcia przez natężenie prądu i miałyby wartość stałą w ciągu czasu, gdy napięcie i natężenie prądu pozostają bez zmiany. Przy prądzie zmiennym iloczyn wartości chwilowych napięcia i natężenia prądu daje nam wartość mocy w określonej chwili; oznaczając wartość chwilową mocy przez p , możemy napisać

$$p = u i;$$

podstawiając na miejsce u oraz i wartości ich ze wzorów (18) i (19), otrzymamy

$$p = U_m I_m \sin \omega t \sin (\omega t + \varphi).$$

Iloczyn sinusów możemy przekształcić na zasadzie wzoru trygonometrycznego:

$$\sin m \sin n = \frac{1}{2} [\cos (m - n) - \cos (m + n)],$$

wtedy

$$p = \frac{1}{2} U_m I_m [\cos \varphi - \cos (2\omega t + \varphi)]. \quad (20)$$

Jak widać z tego wzoru, wartość chwilowa mocy składa się z dwóch części, z których pierwsza

$$\frac{1}{2} U_m I_m \cos \varphi$$

jest wielkością stałą w czasie, natomiast druga część

$$-\frac{1}{2} U_m I_m \cos (2\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} U_m I_m \sin \left(2\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2} \right)$$

stanowi funkcję sinusoidalną czasu z pulsacją, a więc i z częstotliwością dwa razy większą od tej, jaką mają napięcie i natężenie prądu. Okres tej funkcji jest dwa razy mniejszy od okresu napięcia lub natężenia prądu, czyli wynosi $T/2$. Znak wartości chwilowej mocy może być naogół dodatni lub ujemny, co oznacza, że w pierwszym przypadku moc jest pobierana, w drugim zaś oddawana przez rozpatrywaną część obwodu. W szczególnym przypadku, gdy $\cos \varphi = 1$, $\varphi = 0$, to znaczy, gdy prąd jest w fazie z napięciem, wartość chwilowa mocy stale jest dodatnia, czyli stale jest pobierana.

W praktyce chodzi nam zwykle o wartość średnią mocy, obliczoną dla całego okresu przebiegu mocy czyli dla czasu $\frac{T}{2}$; tę

średnią moc nazywamy mocą rzeczywistą lub czynną; pospolicie często się mówi wprost moc prądu zmiennego, rozumiejąc pod tem moc czynną.

Oznaczając moc czynną przez P , napiszemy na podstawie powyższego określenia następujący wzór

$$P = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} p dt;$$

podstawiając wartość p ze wzoru (20), otrzymamy

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} U_m I_m \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} [\cos \varphi - \cos (2\omega t + \varphi)] dt = \\ &= \frac{1}{2} U_m I_m \frac{2}{T} \left[\frac{T}{2} \cos \varphi - \frac{1}{2\omega} [\sin (\omega T + \varphi) - \sin \varphi] \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} U_m I_m \cos \varphi$$

a ponieważ $\omega T = 2\pi$,

$$P = \frac{1}{2} U_m I_m \cos \varphi;$$

wprowadzając wartości skuteczne napięcia i prądu, czyli zakładając $U_m = U\sqrt{2}$, $I_m = I\sqrt{2}$, otrzymamy ostatecznie

$$P = UI \cos \varphi. \quad (21)$$

$\cos \varphi$ nazywamy współczynnikiem mocy prądu zmiennego.

Gdy $\varphi = 0$, $\cos \varphi = 1$, czyli gdy prąd jest w fazie z napięciem, moc czynna prądu zmiennego jest taką, jak gdybyśmy mieli prąd stały o napięciu U i natężeniu I . Gdy natężenie prądu jest przesunięte w fazie względem napięcia o kąt prosty, czyli $\varphi = \frac{\pi}{2}$, współczynnik mocy staje się równym zeru i moc czynna będzie równa zeru.

Iloczyn napięcia przez natężenie prądu zmiennego nazywamy mocą pozorną; oznaczając ją przez P_p , mamy

$$P_p = UI. \quad (22)$$

Współczynnik mocy $\cos \varphi$ możemy określić jako stosunek mocy czynnej do mocy pozornej

$$\cos \varphi = \frac{P}{P_p} = \frac{P}{UI}. \quad (23)$$

Oprócz tego wprowadzamy pojęcie mocy urojonej lub biernej, określając ją jako pierwiastek kwadratowy z różnicy kwadratów mocy pozornej i mocy czynnej. Oznaczając moc bierną przez P_b , napiszemy

$$P_b = \sqrt{P_p^2 - P^2} = P_p \sqrt{1 - \left(\frac{P}{P_p}\right)^2}. \quad (24)$$

Uwzględniając (23) będziemy mieli

$$P_b = P_p \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = P_p \sin \varphi = UI \sin \varphi. \quad (25)$$

Dla odróżnienia rozpatrywanych mocy przyjęto wyrażać moc czynną w watach, moc pozorną w wolt-amperech, zaś moc bierną w warach (volt-ampere-reactif). Tak na przykład, gdy

w części obwodu działa napięcie prądu zmiennego o wartości skutecznej 120 woltów i płynie prąd o natężeniu 10 amperów, zaś współczynnik mocy $\cos \varphi = 0,8$ ($\sin \varphi = 0,6$), będziemy mieli

$$\text{moc czynną } P = 120 \cdot 10 \cdot 0,8 = 960 \text{ watów,}$$

$$\text{moc pozorną } P_p = 120 \cdot 10 = 1200 \text{ woltoamperów,}$$

$$\text{moc bierną } P_b = 120 \cdot 10 \cdot 0,6 = 720 \text{ warów.}$$

§ 6. Dodawanie funkcji sinusoidalnych.

Przy badaniu prądów zmiennych często będziemy się powoływać na następujące twierdzenie: jeżeli mamy szereg funkcji sinusoidalnych czasu o jednakowej częstotliwości, np.

$$y_1 = A_1 \sin(\omega t + \alpha_1),$$

$$y_2 = A_2 \sin(\omega t + \alpha_2),$$

$$\dots$$

$$y_n = A_n \sin(\omega t + \alpha_n),$$

wtedy algebraiczna suma tych funkcji będzie również funkcją sinusoidalną o tej samej częstotliwości; więc

$$y_1 + y_2 + \dots + y_n = A \sin(\omega t + \alpha).$$

Aby to dowieść, przepisujemy dane funkcje w sposób następujący:

$$\begin{aligned} & A_1 \cos \alpha_1 \sin \omega t + A_1 \sin \alpha_1 \cos \omega t + \\ & + A_2 \cos \alpha_2 \sin \omega t + A_2 \sin \alpha_2 \cos \omega t + \dots + \\ & + A_n \cos \alpha_n \sin \omega t + A_n \sin \alpha_n \cos \omega t \end{aligned} = A \cos \alpha \sin \omega t + A \sin \alpha \cos \omega t.$$

Wyrażenia te muszą stanowić tożsamość, wobec czego współczynniki przy $\sin \omega t$ i przy $\cos \omega t$ z lewej i z prawej strony muszą być sobie równe.

Mamy więc:

$$A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2 + \dots + A_n \cos \alpha_n = A \cos \alpha$$

$$A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2 + \dots + A_n \sin \alpha_n = A \sin \alpha$$

Podnosząc oba równania do kwadratu i dodając, otrzymamy

$$A = \sqrt{(A_1 \cos \alpha_1 + \dots + A_n \cos \alpha_n)^2 + (A_1 \sin \alpha_1 + \dots + A_n \sin \alpha_n)^2} \quad (26)$$

zaś dzieląc drugie równanie przez pierwsze, będziemy mieli

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2 + \dots + A_n \sin \alpha_n}{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2 + \dots + A_n \cos \alpha_n} \quad (27)$$

W ten sposób zagadnienie nasze zostało rozwiązane.

W szczególności, gdy mamy dwie funkcje sinusoidalne przesunięte o kąt prosty czyli

$$y_1 = A_1 \sin \omega t,$$

$$y_2 = A_2 \cos \omega t,$$

wówczas suma tych funkcji może być przedstawiona w postaci

$$y_1 + y_2 = A \sin(\omega t + \alpha),$$

to znaczy

$$A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t = A \sin(\omega t + \alpha). \quad (28)$$

W myśl rozumowań powyższych winno być

$$A \cos \alpha = A_1,$$

$$A \sin \alpha = A_2,$$

skąd wyznaczamy

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}, \quad (29)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{A_2}{A_1}. \quad (30)$$

Co do znaków A_1 i A_2 to mogą one być jednakowe lub różne; w pierwszym przypadku kąt α jest dodatni, czyli wypadkowa sinusoida wyprzedza sinusoidę normalną o kąt α ; jeżeli zaś znaki A_1 i A_2 są różne, wówczas α ma wartość ujemną, co wskazuje, że sinusoida wypadkowa opóźnia się o kąt α względem sinusoidy normalnej.

ROZDZIAŁ II.

OBWODY PRĄDU ZMIENNEGO ZE SKUPIONEMI OPORNOŚCIAMI.

§ 7. Obwód z opornością rzeczywistą.

Każde ciało posiada własność przeciwstawiania się przepływowi elektryczności w większym lub mniejszym stopniu, przyczem w ciebie zachodzi przemiana energii elektrycznej w ciepło. Własność tę nazywamy oporem elektrycznym. Wielkość fizyczną, charakteryzującą tę własność będziemy nazywali opornością; jest ona zależna od oporności właściwej rozpatrywanego ciała oraz od jego kształtu i rozmiarów.

Przy prądzie stałym oporność stanowi iloraz różnicy potencjałów pomiędzy końcami przewodnika przez natężenie prądu, gdy w tym przewodniku nie występuje siła elektromotoryczna; wynika to bezpośrednio z prawa Ohma.

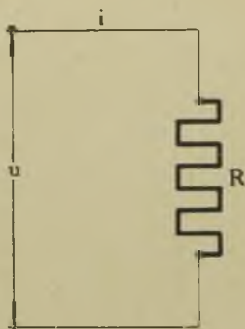
Moc P prądu I , wydzielana w postaci ciepła w części obwodu z opornością R , wyraża się wzorem

$$P = I^2 R;$$

wobec tego oporność można określić jako iloraz mocy, wydzielonej w postaci ciepła przez kwadrat natężenia prądu, przepływającego przez rozpatrywaną część obwodu.

Przy prądzie zmiennym, w samym przewodniku, o czym później będzie mowa, zachodzi zjawisko naskórkowości, powodujące pozorne zwiększenie oporności. Wobec tego iloraz mocy, wydzielonej w postaci ciepła w samym przewodniku przez kwadrat natężenia prądu jest naogół większy przy prądzie zmiennym niż przy prądzie stałym. Nazwijmy tego rodzaju oporność przy prądzie zmiennym opornością rzeczywistą.

Pozatem przy prądzie zmiennym zachodzą jeszcze zjawiska w otoczeniu przewodnika (w izolacji, w masach żelaznych), o których również później będzie mowa, a które powodują wytwarzanie się ciepła w tem otoczeniu; w tych warunkach ogólna ilość wytworzonego przez prąd ciepła jest większa, niż ilość ciepła, wytworzonego w samym przewodniku. Nazwijmy iloraz mocy wydzielonej w postaci ciepła, z uwzględnieniem wszystkich zjawisk, przez kwadrat natężenia prądu, opornością czynną.



Rys. 8.

W przypadku, gdy w przewodniku zjawisko naskórkowości wpływa bardzo mało na zwiększenie oporności, możemy oporność rzeczywistą założyć równą oporności, którą mielibyśmy przy prądzie stałym; wówczas oporność rzeczywistą nazywają jeszcze opornością o m o w ą.

Rozpatrzmy część obwodu z opornością rzeczywistą o stałej wartości R (rys. 8). Niech napięcie działające na tę oporność będzie

$$u = U_m \sin \omega t.$$

Wartość natężenia prądu w każdej chwili na zasadzie prawa Ohma będzie

$$i = \frac{u}{R} = \frac{U_m}{R} \sin \omega t,$$

a więc w danym przypadku prąd i ma również przebieg sinusoidalny i jest w fazie z napięciem. Jak widać z ostatniego wzoru

$$\frac{U_m}{R} = I_m,$$

czyli

$$i = I_m \sin \omega t;$$

wartość skuteczna natężenia prądu będzie

$$I = \frac{U}{R},$$

taka sama, jak gdybyśmy mieli prąd stały.

§ 8. Obwód z opornością rzeczywistą i indukcyjnością w szeregowym połączeniu.

Prąd, płynący w obwodzie, powoduje powstanie pola magnetycznego, a więc i strumienia magnetycznego. Strumień ten zależy od natężenia prądu, płynącego w obwodzie i zmienia się jednocześnie ze zmianą prądu.

Gdy strumień magnetyczny, objęty przez obwód, podlega zmianom, powstaje w obwodzie siła elektromotoryczna indukcji, którą możemy określić z ogólnego wzoru

$$e_t = - \frac{d\Phi_t}{dt},$$

gdzie e_t oznacza wartość siły elektromotorycznej w chwili t , Φ_t — wartość strumienia magnetycznego w tejże chwili; gdy obwód zawiera wiele zwojów, tworząc cewkę o z zwojach, należy we wzorze powyższym pomnożyć strumień magnetyczny przez liczbę zwojów.

Stosunek strumienia magnetycznego Φ , objętego przez obwód, do natężenia prądu i , płynącego w obwodzie i wytwarzającego ten strumień, stanowi indukcyjność własną danego obwodu. W ten sposób indukcyjność własna L , określona jest wzorem

$$L = \frac{\Phi}{i},$$

skąd

$$\Phi = Li.$$

Wartość indukcyjności zależy od kształtu i rozmiarów geometrycznych obwodu; dla środowiska magnetycznie obojętnego ma ona wartość stałą, zaś w przypadku, gdy środowisko ma zmienną przenikalność magnetyczną, indukcyjność będzie funkcją prądu i .

Podstawiając wartość Φ do wzoru na siłę elektromotoryczną indukcji, otrzymamy

$$e_t = - \frac{d(Li)}{dt};$$

w przypadku szczególnym, gdy mamy środowisko o stałej przenikalności magnetycznej, a więc praktycznie i dla powietrza

$$e_t = - L \frac{di}{dt}.$$

Rozpatrzmy obwód, w którym oprócz siły elektromotorycznej o wartości chwilowej e , powstaje siła elektromotoryczna indukcji o wartości chwilowej e_i . Oznaczając przez R oporność tego obwodu, otrzymamy, według prawa Ohma, dla wartości chwilowej prądu i , płynącego w obwodzie

$$i = \frac{e + e_i}{R},$$

lub na podstawie poprzedniego wzoru

$$i = \frac{e - L \frac{di}{dt}}{R},$$

skąd

$$e = Ri + L \frac{di}{dt}.$$

Iloczyn Ri stanowi napięcie potrzebne na pokonanie oporności rzeczywistej lub omowej, nazywamy go zwykle napięciem omowym. Drugi wyraz $L \frac{di}{dt}$ stanowi wartość siły elektromotorycznej indukcji, wziętą ze znakiem przeciwnym, można go więc traktować jako napięcie, idące na przeciwdziałanie czyli pokonanie siły elektromotorycznej indukcji; nazywamy ten wyraz napięciem indukcyjnym. Oznaczając to ostatnie napięcie przez u_i i rozpatrując prąd o przebiegu sinusoidalnym

$$i = I_m \sin \omega t,$$

otrzymamy

$$u_i = L \frac{di}{dt} = \omega L I_m \cos \omega t = \omega L I_m \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right).$$

Z tego wzoru widać, że napięcie indukcyjne wyprzedza w fazie natężenie prądu o kąt $\frac{\pi}{2}$; odwrotnie, możemy powiedzieć, że prąd opóźnia się w fazie względem napięcia indukcyjnego o kąt $\frac{\pi}{2}$. Wartość skuteczna tego napięcia będzie

$$U_i = \omega L I.$$

Jak łatwo zauważyć, ωL , stanowiące stosunek napięcia do natężenia prądu, ma wymiar oporności, a więc może być wyrażone w omach; wyraz ten nazywamy opornością indukcyjną.

Oporność indukcyjna $\omega L = 2\pi fL$ zależy, jak widzimy, od częstotliwości prądu zmiennego i jest proporcjonalna do częstotliwości.

Rozpatrzmy teraz obwód, zawierający oprócz oporności rzeczywistej jeszcze indukcyjność np. w postaci cewki w szeregowym połączeniu.

Schemat takiego obwodu mamy na rys. 9. Działa napięcie

$$u = U_m \sin \omega t.$$

W każdej chwili powinno być

$$u = Ri + L \frac{di}{dt}$$

czyli

$$Ri + L \frac{di}{dt} = U_m \sin \omega t. \quad (1)$$

Jest to równanie różniczkowe liniowe o współczynnikach stałych.

Rozwiązujemy najpierw równanie uproszczone:

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0;$$

rozdzielamy zmienne

$$\frac{di}{i} = -\frac{R}{L} dt;$$

po scałkowaniu, oznaczając przez A stałą dowolną, którą możemy napisać również w postaci $lg A$, otrzymamy

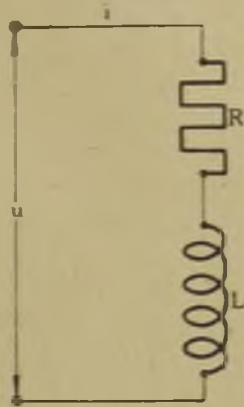
$$lgi = \frac{R}{L} t + lg A \quad \text{lub} \quad lg \frac{i}{A} = -\frac{R}{L} t,$$

skąd

$$i = Ae^{-\frac{R}{L} t} \quad (2)$$

Aby otrzymać całkę ogólną rozpatrywanego równania (1) musimy do znalezionej wartości i dodać całkę szczególną równania. Szukamy jej w postaci ogólnej $i = M \sin \omega t + N \cos \omega t$ lub, zamieniając sumę tych dwóch funkcji jedną funkcją na podstawie wzoru (28) z § 6,

$$i = P \sin(\omega t + \alpha), \quad (3)$$



Rys. 9.

gdzie P i α są stałe do znalezienia. Wtedy

$$\frac{di}{dt} = P \omega \cos(\omega t + \alpha).$$

Po podstawieniu tych wartości do równania (1) otrzymujemy

$$PR \sin(\omega t + \alpha) + P \omega L \cos(\omega t + \alpha) = U_m \sin \omega t.$$

Rozkładając $\sin(\omega t + \alpha)$ i $\cos(\omega t + \alpha)$, otrzymujemy po zgrupowaniu i przyrównaniu współczynników przy $\sin \omega t$ i $\cos \omega t$ z lewej i z prawej strony

$$PR \cos \alpha - P \omega L \sin \alpha = U_m,$$

$$PR \sin \alpha + P \omega L \cos \alpha = 0.$$

Podnosząc oba równania do kwadratu i dodając, otrzymujemy

$$P = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}},$$

zaś z drugiego równania mamy

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\omega L}{R}.$$

Wyraz $\frac{\omega L}{R}$ zawsze jest większy od 0, $\operatorname{tg} \alpha$ jest mniejszy od 0, wobec tego $\alpha < 0$. Załóżmy $\varphi = -\alpha$, tak iż

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{R}.$$

Podstawiając wartość P do równania (3) oraz zamieniając α na φ otrzymujemy

$$i = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin(\omega t - \varphi),$$

zaś całka ogólna równania naszego będzie miała postać

$$i = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin(\omega t - \varphi) + A e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (4)$$

Zbadajmy wyraz

$$A e^{-\frac{R}{L}t}.$$

W miarę wzrastania czasu funkcja ta maleje, dążąc do 0. Teoretycznie staje się ona równą 0 przy $\frac{R}{L} t = \infty$; może to być:

- 1) przy $R = \infty$ (przerwa w obwodzie), lecz wtedy znika prąd i ,
- 2) przy $L = 0$ — przypadek ten już rozpatrywaliśmy w § 7, wreszcie przy $t = \infty$. W rzeczywistości, po upływie bardzo krótkiego czasu wyraz $A e^{-\frac{R}{L} t}$ otrzymuje zwykle wartość bardzo małą, czyli praktycznie równą zeru. Mamy wtedy tak zwany stan ustalony prądu. Obecnie będziemy rozpatrywali wyłącznie stany ustalone. W tym przypadku wzór (4) upraszcza się, mianowicie

$$i = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin(\omega t - \varphi). \quad (5)$$

Porównyując ten wzór ze wzorem na napięcie i mając na względzie, że $\varphi > 0$, widzimy, że natężenie prądu jest opóźnione w fazie względem napięcia, przyczem

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{R}. \quad (6)$$

Wartość maksymalna tego natężenia prądu wynosi

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}.$$

Wobec tego wartość skuteczną będzie

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}. \quad (7)$$

Przy prądzie stałym mielibyśmy według prawa Ohma

$$I = \frac{U}{R},$$

gdyż nie występowałoby zjawisko samoindukcji.

Chcąc zastosować prawo Ohma do prądu zmiennego, musimy zamiast oporności R wprowadzić wyraz

$$\sqrt{R^2 + (\omega L)^2} > R.$$

Wyraz ten nazywamy opornością pozorną i oznaczamy przez Z ,

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}. \quad (8)$$

W ten sposób możemy napisać

$$I = \frac{U}{Z}. \quad (9)$$

Oporność pozorną ma wymiar oporności, mierzymy więc ją w omach.

Ze wzoru

$$i = I_m \sin(\omega t - \varphi)$$

mamy

$$i = I_m \cos \varphi \sin \omega t - I_m \sin \varphi \cos \omega t.$$

Ponieważ

$$\cos \omega t = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \omega t\right),$$

$$-\cos \omega t = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \omega t\right) = \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right),$$

możemy napisać

$$i = I_m \cos \varphi \sin \omega t + I_m \sin \varphi \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right);$$

otrzymaliśmy wartość chwilową prądu w postaci dwu funkcji sinusoidalnych. Załóżmy

$$I_m \cos \varphi \sin \omega t = i_1,$$

$$I_m \sin \varphi \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = i_2,$$

czyli

$$i = i_1 + i_2,$$

następnie, oznaczając

$$I_m \cos \varphi = I_{1m}, \quad I_m \sin \varphi = I_{2m},$$

otrzymamy

$$i_1 = I_{1m} \sin \omega t,$$

$$i_2 = I_{2m} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Pierwszy z tych prądów jest w fazie z napięciem, drugi zaś opóźniony względem napięcia o kąt $\frac{\pi}{2}$.

Wartość skuteczna prądu pierwszego wynosi

$$I_1 = I \cos \varphi,$$

zaś prądu drugiego

$$I_2 = I \sin \varphi.$$

Moc czynna rozpatrywanego prądu zmiennego równa jest

$$P = UI \cos \varphi.$$

Tę właśnie moc daje prąd pierwszy, gdyż jest on w fazie z napięciem i moc jego równa się

$$UI_1 = UI \cos \varphi.$$

Moc prądu drugiego, wobec przesunięcia jego fazy względem fazy napięcia o kąt $\frac{\pi}{2}$, będzie

$$UI_2 \cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

Z tego powodu nazywamy pierwszy prąd o wartości skutecznej $I \cos \varphi$ prądem mocnym lub czynnym, zaś prąd drugi o wartości skutecznej $I \sin \varphi$ prądem bezmocnym lub biernym. Dawniej były w użyciu jeszcze terminy: prąd watowy i prąd bezwatowy.

§ 9. Obwód z opornością rzeczywistą i pojemnością w szeregowym połączeniu.

Każdy przewodnik posiada pewną pojemność elektryczną, określoną stosunkiem ładunku elektrycznego, znajdującego się na przewodniku, do potencjału tego przewodnika. Oznaczając pojemność przez C , ładunek przez Q i potencjał przez V , mamy

$$C = \frac{Q}{V}.$$

Większe skupienie ładunków elektrycznych otrzymujemy w kondensatorach elektrycznych, których pojemność określamy jako stosunek ładunku do napięcia, istniejącego między okładzinami kondensatora, czyli

$$C = \frac{Q}{U_c},$$

gdzie przez U_c oznaczyliśmy to napięcie.

Gdy kondensator w pewnej chwili t włączymy do napięcia prądu zmiennego

$$u = U_m \sin \omega t,$$

otrzyma on w ciągu nieskończenie małego czasu dt ładunek

$$dq = i dt,$$

gdzie i oznacza wartość natężenia prądu w rozpatrywanej chwili, idącego na ładowanie kondensatora; ten ładunek dq spowoduje powstanie napięcia du_c pomiędzy odkładzinami kondensatora, przyczem

$$C = \frac{dq}{du_c} = \frac{idt}{du_c},$$

skąd

$$\frac{du_c}{dt} = \frac{i}{C}, \quad (10)$$

lub

$$i = C \frac{du_c}{dt}.$$

Napięcie na kondensatorze, spowodowane napięciem z zewnątrz przyłożonem, ma przebieg również sinusoidalny czyli

$$u_c = U_{cm} \sin \omega t,$$

wobec czego

$$i = C\omega U_{cm} \cos \omega t = \omega C U_{cm} \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right).$$

Z tego wzoru widać, że prąd, ładujący kondensator, wyprzedza napięcie na kondensatorze w fazie o kąt $\frac{\pi}{2}$. Wartość skuteczna tego prądu wynosi

$$I = \omega C U_{cm},$$

skąd

$$\frac{U_c}{I} = \frac{1}{\omega C}.$$

Ostatni wyraz, jako stosunek napięcia do natężenia prądu, ma wymiar oporności, nazywamy go opornością pojemnościową.

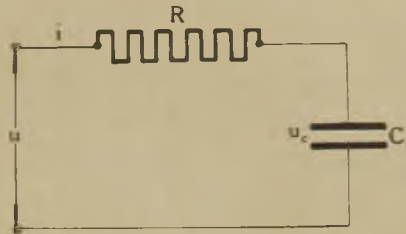
Oporność pojemnościowa $\frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C}$ jest odwrotnie proporcjonalna do częstotliwości prądu zmiennego, a więc maleje przy wzroście częstotliwości.

Rozpatrzmy teraz obwód, zawierający oporność rzeczywistą i pojemność w postaci kondensatora w szeregowym połączeniu.

Schemat takiego obwodu mamy na rys. 10, gdzie C oznacza pojemność włączonego kondensatora.

Przy prądzie stałym prąd płynąłby w obwodzie tylko do chwili, gdy kondensator zostanie naładowany, co zwykle następuje bardzo prędko po zamknięciu obwodu.

Przy prądzie zmiennym kondensator podlega ciągłym ładowaniom i wyładowaniom, powstaje prąd przesunięcia, wobec czego prąd stale będzie płynął w takim obwodzie. W każdej chwili napięcie, przyłożone z zewnątrz, równać się musi sumie napięć, powstałych w rozpatrywanym obwodzie. Napięć tych mamy w danym przypadku dwa: jedno na oporności R równe Ri , napięcie zaś drugie — na kondensatorze, zmienne w czasie; oznaczamy to napięcie przez u_c .



Rys. 10.

Wtedy

$$Ri + u_c = u \quad (11)$$

Biorąc w równaniu (11) pochodne względem czasu i uwzględniając wzór (10), otrzymujemy

$$R \frac{di}{dt} + \frac{du_c}{dt} = \frac{du}{dt};$$

ponieważ

$$u = U_m \sin \omega t,$$

otrzymamy

$$R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = U_m \omega \cos \omega t. \quad (12)$$

Stosując przy całkowaniu tego równania tę samą metodę, co w § 8, znajdujemy najpierw całkę ogólną równania uproszczonego w postaci

$$i = A e^{-\frac{1}{RC} t}$$

gdzie A stała dowolna.

Całkę szczególną szukamy w postaci

$$i = P \sin (\omega t + \alpha),$$

gdzie P i α są stałe, które należy znaleźć.

Różniczkując ostatnią funkcję, będziemy mieli

$$\frac{di}{dt} = P\omega \cos (\omega t + \alpha);$$

po podstawieniu tych wartości do (12) będziemy mieli

$$\omega R P \cos (\omega t + \alpha) + \frac{P}{C} \sin (\omega t + \alpha) = U_m \omega \cos \omega t.$$

Rozkładając $\cos(\omega t + \alpha)$ i $\sin(\omega t + \alpha)$ i przyrównywając następnie współczynniki przy $\cos \omega t$ i $\sin \omega t$ z lewej i z prawej strony, otrzymujemy dwa następujące równania

$$\omega R P \cos \alpha + \frac{P}{C} \sin \alpha = U_m \omega,$$

$$-\omega R P \sin \alpha + \frac{P}{C} \cos \alpha = 0.$$

Podnosząc oba równania do kwadratu i dodając, otrzymujemy

$$R^2 P^2 + \frac{P^2}{(\omega C)^2} = U_m^2,$$

stąd

$$P = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}};$$

następnie z drugiego równania

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\omega C R}.$$

Wprowadzając jak i poprzednio $\varphi = -\alpha$, czyli $\operatorname{tg} \varphi = -\frac{1}{\omega C R}$,

otrzymamy dla całki ogólnej równania (12)

$$i = A e^{-\frac{1}{RC}t} + \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} \sin (\omega t - \varphi).$$

Funkcja $A e^{-\frac{1}{RC}t}$ maleje ze wzrostem czasu i zwykle po upływie bardzo krótkiego czasu staje się praktycznie równą zero. Dla stanu ustalonego natężenie prądu ma wartość

$$i = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} \sin(\omega t - \varphi), \quad (13)$$

przyczem

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{1}{\omega C R}. \quad (14)$$

Widzimy, że natężenie prądu jest przesunięte w fazie względem napięcia. Ponieważ we wzorze (13) kąt φ wchodzi ze znakiem ujemnym, zaś, jak widać we wzorze (14), $\varphi < 0$, przeto przed bezwzględną wartością kąta φ we wzorze (13) będzie stał znak $+$, a więc natężenie prądu wyprzedza napięcie w fazie.

Wartość skuteczna natężenia prądu wynosi

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \quad (15)$$

Mianownik $\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$ stanowi oporność pozorną rozpatrywanego obwodu.

Ze wzoru

$$i = I_m \sin(\omega t - \varphi),$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} i &= I_m \cos \varphi \sin \omega t - I_m \sin \varphi \cos \omega t = \\ &= I_m \cos \varphi \sin \omega t - I_m \sin \varphi \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

W ten sposób prąd i rozłożyliśmy na dwa prądy sinusoidalne o amplitudach $I_m \cos \varphi$ oraz $I_m \sin \varphi$. Pierwszy, o wartości skutecznej $I \cos \varphi$, jest w fazie z napięciem, a więc jest to prąd mocny lub czynny; drugi przyspieszony jest względem napięcia w fazie o kąt $\frac{\pi}{2}$, jest to więc prąd, który czynnej mocy nie daje, czyli prąd bezmocny lub bierny.

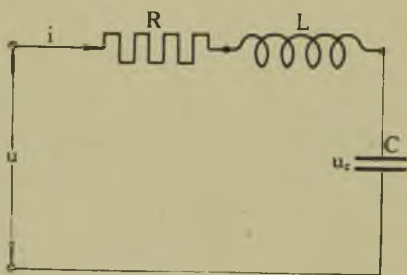
§ 10. Obwód z opornością rzeczywistą, indukcyjnością i pojemnością.

Na rys. 11 podany jest schemat obwodu, zawierającego w szeregowym połączeniu oporność czynną R , indukcyjność L oraz pojemność C . Oznaczając przez u napięcie przyłożone z zewnątrz do rozpatrywanej części obwodu, zaś przez u_c napięcie na pojemności C , powstające przy prądzie i , będziemy mieli w każdej chwili

$$Ri + L \frac{di}{dt} + u_c = u = U_m \sin \omega t. \quad (16)$$

Biorąc pochodną względem t i zamieniając na podstawie wzoru (10) $\frac{du_c}{dt}$ przez $\frac{i}{C}$, otrzymamy

$$L \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \omega U_m \cos \omega t. \quad (17)$$



Rys. 11.

Całka ogólna tego równania stanowi sumę całki ogólnej równania uproszczonego

$$L \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0$$

oraz całki szczególnej rozpatrywanego równania (17). Pierwsza całka zawiera funkcje wykładnicze zmiennej niezależnej t z ujem-

nym wykładnikiem potęgi, a więc funkcje malejące z biegiem czasu. Rozpatrując stan ustalony prądu, który następuje zwykle po upływie bardzo krótkiego czasu, odrzucimy te funkcje, czyli całkę ogólną równania uproszczonego. Pozostaje więc do znalezienia całka szczególna danego równania; szukamy jej, jak i w poprzednich przypadkach, w postaci

$$i = P \sin(\omega t + \alpha), \quad (18)$$

gdzie P i α są stałe do znalezienia.

Wtedy

$$\frac{di}{dt} = \omega P \cos(\omega t + \alpha),$$

$$\frac{d^2i}{dt^2} = -\omega^2 P \sin(\omega t + \alpha).$$

Podstawiając te wartości do równania (17), będziemy mieli

$$\begin{aligned}
 - \omega^2 L P \sin (\omega t + \alpha) + \omega R P \cos (\omega t + \alpha) + \frac{P}{C} \sin (\omega t + \alpha) &= \\
 &= \omega U_m \cos \omega t.
 \end{aligned}$$

Dzieląc obie strony przez ω i grupując odpowiednie wyrazy, otrzymamy

$$P \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L \right) \sin (\omega t + \alpha) + P R \cos (\omega t + \alpha) = U_m \cos \omega t;$$

$$P \cos \alpha \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L \right) \sin \omega t + P \sin \alpha \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L \right) \cos \omega t -$$

$$- P \sin \alpha R \sin \omega t + P \cos \alpha R \cos \omega t = U_m \cos \omega t,$$

skąd

$$P \left[\left(\frac{1}{\omega C} - \omega L \right) \cos \alpha - R \sin \alpha \right] = 0,$$

$$P \left[\left(\frac{1}{\omega C} - \omega L \right) \sin \alpha + R \cos \alpha \right] = U_m.$$

Podnosząc oba równania do kwadratu i dodając, znajdziemy

$$P^2 \left[\left(\frac{1}{\omega C} - \omega L \right)^2 + R^2 \right] = U_m^2,$$

skąd

$$P = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}.$$

Z pierwszego z powyższych równań bezpośrednio, po skróceniu przez P , otrzymujemy

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{1}{\omega C} - \omega L}{R}.$$

Załóżmy $\varphi = -\alpha$, wtedy

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \tag{19}$$

W ten sposób dla wartości chwilowej natężenia prądu, w stanie ustalonym, otrzymujemy

$$i = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \sin(\omega t - \varphi), \quad (20)$$

skąd wartość skuteczna I natężenia prądu będzie określona wzorem

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \quad (21)$$

Wyraz stojący w mianowniku we wzorze (21) stanowi oporność pozorną obwodu, którą przyjęto oznaczać przez Z , więc

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}. \quad (22)$$

Różnicę oporności indukcyjnej i pojemnościowej nazywamy opornością urojoną lub bierną i oznaczamy literą X . W skróceniu przyjęto oznaczać oporność indukcyjną przez X_L oraz oporność pojemnościową przez X_C ; w ten sposób

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C} \quad (23)$$

lub

$$X = X_L - X_C. \quad (24)$$

Ze względu na terminy międzynarodowe, czasami spotykamy jeszcze w literaturze polskiej następujące terminy, odpowiadające terminom polskim:

oporność pozorną	— impedancja,
„ rzeczywista	— rezystancja,
„ urojona	— reaktancja,
„ indukcyjna	— indukcyjność lub reaktancja indukcyjna,
„ pojemnościowa	— pojemność lub reaktancja pojemnościowa.

Rozpatrując oporność bierną: $X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$, widzimy, że gdy

$$\omega L > \frac{1}{\omega C}, \quad \text{tg } \varphi > 0, \quad \varphi > 0;$$

ponieważ we wzorze (15) przed φ pozostanie wtedy znak $-$, będziemy mieli opóźnienie natężenia prądu względem napięcia; gdy

$$\omega L < \frac{1}{\omega C}, \quad \varphi < 0,$$

otrzymamy we wzorze na natężenie prądu przed φ znak $+$, czyli przyspieszenie natężenia prądu względem napięcia.

Wreszcie, gdy

$$\omega L = \frac{1}{\omega C},$$

$$I = \frac{U}{R}, \quad \operatorname{tg} \varphi = 0, \quad \varphi = 0.$$

W tym przypadku natężenie prądu jest w fazie z napięciem, zaś wartość skuteczna natężenia prądu będzie taka sama, jak i przy prądzie stałym.

Ze wzorów (19) i (21) możemy wyprowadzić wszystkie już poprzednio otrzymane wzory, dotyczące poszczególnych obwodów. Więć, gdy obwód zawiera tylko oporność rzeczywistą, wtedy

$$L = 0, \quad \omega L = 0,$$

oraz

$$C^*) = \infty, \quad \frac{1}{\omega C} = 0.$$

Podstawiając powyższe wartości L i C do wzoru (21) otrzymamy

$$I = \frac{U}{R};$$

*) UWAGA. Brak pojemności w obwodzie zamkniętym w szeregowym połączeniu odpowiada $C = \infty$; prąd nie napotyka przeszkód ze strony kondensatora, oporność pojemnościowa staje się równą zero. Możemy to łatwo udowodnić matematycznie, rozpatrując np. kondensator płaski, dla którego

$$C = \frac{\epsilon s}{4 \pi d}$$

gdzie s pole powierzchni każdej okładziny, ϵ — stała dielektryczna, d — odległość pomiędzy okładzinami. Jeżeli będziemy zbliżali okładziny do siebie, wtedy d będzie malało, C będzie wzrastało i dla $d = 0$, t. j. wtedy gdy kondensator przestaje odgrywać swoją rolę, stając się wprost przewodnikiem, C równa się ∞ .

Jeżeli obwód zawiera tylko indukcyjność, wtedy

$$R = 0;$$

$$C = \infty, \quad \frac{1}{\omega C} = 0;$$

wzór powyższy daje

$$I = \frac{U}{\omega L};$$

wreszcie, gdy obwód zawiera tylko pojemność,

$$R = 0;$$

$$L = 0, \quad \omega L = 0;$$

otrzymujemy

$$I = U \omega C.$$

Co się tyczy kąta przesunięcia fazy φ , to ze wzoru (19) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \text{dla } L = 0 & \left\{ \varphi = 0; \right. \\ \text{„ } C = \infty & \left. \right. \\ \text{„ } R = 0 & \left\{ \varphi = \frac{\pi}{2}, \right. \\ \text{„ } C = 0 & \left. \right. \\ \text{„ } R = 0 & \left\{ \varphi = -\frac{\pi}{2}. \right. \\ \text{„ } L = 0 & \left. \right. \end{aligned}$$

Ponieważ kąt φ wzięty jest we wzorze (20) ze znakiem ujemnym, więc w pierwszym przypadku prąd jest w fazie z napięciem, w drugim — prąd jest opóźniony o kąt 90° , w trzecim przypadku zaś przyśpieszony o kąt 90° względem napięcia.

Naodwrot, jeżeli określamy napięcie, mając wartość natężenia prądu oraz odpowiednie oporności, będziemy mieli dla wyżej rozpatrzonych przypadków: napięcie na oporności rzeczywistej

$$U_R = I R, \tag{25}$$

jest ono w fazie z natężeniem prądu; napięcie indukcyjne

$$U_L = I \omega L, \tag{26}$$

jest ono przyśpieszone w fazie o kąt 90° względem natężenia prądu; napięcie na kondensatorze

$$U_C = I \frac{1}{\omega C}, \quad (27)$$

jest ono opóźnione w fazie o kąt 90° względem natężenia prądu.

Jak widzimy, dla otrzymania napięcia musimy natężenie prądu pomnożyć przez odpowiednią oporność bądź czynną, bądź bierną.

§ 11. Rezonans napięć.

Rozpatrując obwód z opornością czynną R , indukcyjnością L i pojemnością C , połączonych w szereg, wyprowadziliśmy wzory (21) i (19), które nam dają wartość skuteczną natężenia prądu oraz kąt przesunięcia fazy natężenia prądu względem napięcia. Z tych wzorów widzimy, że w przypadku szczególnym, gdy oporność indukcyjna ma taką samą wartość co i oporność pojemnościowa, czyli gdy

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}, \quad (28)$$

otrzymujemy w obwodzie prąd

$$I = \frac{U}{R}, \quad (29)$$

przyczem $\varphi = 0$.

W tym przypadku, jak to można zauważyć ze wzorów (26) i (27),

$$U_L = U_C,$$

czyli napięcie indukcyjne staje się równe napięciu na kondensatorze. Zjawisko takie nazywamy rezonansem napięć.

Każde z tych napięć może w znacznym stopniu przekroczyć z zewnątrz przyłożone napięcie U .

Rzeczywiście, według tychże wzorów z uwzględnieniem (29), otrzymamy

$$U_L = U_C = I \omega L = U \frac{\omega L}{R} = U \frac{1}{R C \omega};$$

w przypadku więc rezonansu napięć, napięcie indukcyjne oraz równe mu napięcie na kondensatorze będzie tyle razy większe od napięcia z zewnątrz przyłożonego, ile razy oporność indukcyjna lub oporność pojemnościowa większą jest od oporności czynnej.

Warunek, przy którym powstaje rezonans napięć ujęty we wzorze (28), możemy wyrazić jeszcze w sposób następujący:

$$\begin{aligned}\omega^2 &= \frac{1}{LC}; \\ \omega &= \frac{1}{\sqrt{LC}}.\end{aligned}\tag{30}$$

Ponieważ $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$, więc przy rezonansie napięć

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}},\tag{31}$$

$$T = 2\pi\sqrt{LC}.\tag{32}$$

Przykład. Obwód zawierający cewkę o oporności $R = 20$ omów oraz indukcyjności $L = 0,7$ henra jest przyłączony do sieci prądu zmiennego o napięciu $U = 120$ woltów oraz częstotliwości $f = 50$.

Wówczas

$$\omega = 2\pi f = 314,$$

$$\omega L = 314 \cdot 0,7 \cong 220 \text{ omów.}$$

Podstawiając wartości te do wzoru (7) otrzymujemy

$$I = \frac{120}{\sqrt{400 + 48400}} = \frac{120}{220} \cong 0,5 \text{ ampera.}$$

Jeżeli w obwód ten włączymy jeszcze w szereg kondensator o pojemności C , czyniącej zadość warunkowi rezonansu napięć, czyli

$$\frac{1}{\omega C} = \omega L,$$

będziemy mieli

$$\frac{1}{\omega C} = \omega L = 220 \text{ omów,}$$

skąd

$$C = \frac{1}{314 \cdot 220} \cong 14 \text{ mikrofaradów.}$$

Po podstawieniu tych wartości do wzoru (29) otrzymujemy

$$I = \frac{120}{20} = 6 \text{ amperów.}$$

Napięcie na kondensatorze lub na cewce będzie w tym przypadku

$$U_C = U_L = 6 \cdot 220 = 1320 \text{ woltów.}$$

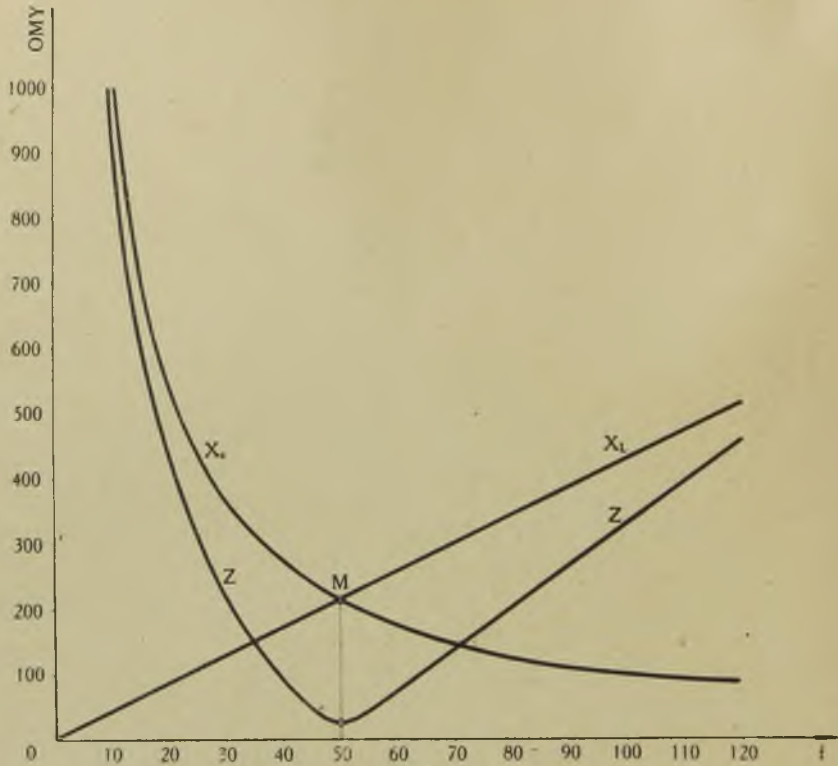
§ 12. Zależność oporności pozornej od częstotliwości.

W poprzednich paragrafach wprowadziliśmy określenia nowych pojęć, dotyczących różnego rodzaju oporności. Mamy więc oprócz oporności rzeczywistej, względnie czynnej, oporność pozorną i oporność urojoną lub bierną; ta ostatnia składa się naogół z oporności indukcyjnej i oporności pojemnościowej, stanowiąc ich różnicę. Rozpatrując poszczególne oporności, widzimy, że z wyjątkiem oporności rzeczywistej, którą zakładaliśmy w poprzednich rozważaniach, jako wielkość stałą, wszystkie inne oporności są zależne od częstotliwości prądu zmiennego; we wzorach na te oporności wchodzi pulsacja ω , która, jak wiadomo, jest proporcjonalna do częstotliwości, gdyż $\omega = 2\pi f$.

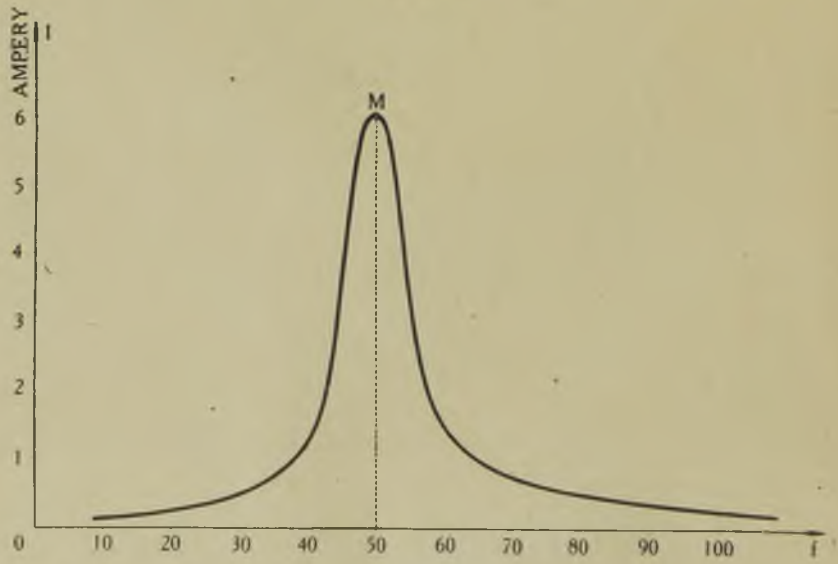
W urządzeniach prądu silnego, dla siły i światła, pobieranego z elektrowni, częstotliwość prądu zmiennego stanowi wielkość stałą, wobec czego i omawiane wyżej oporności nie podlegają zmianom, natomiast w urządzeniach telekomunikacyjnych, a więc telefonicznych lub radiowych, częstotliwość podlega znacznym wahaniom, o czym już wspominaliśmy w § 2; w tych urządzeniach, oporności bierne i pozorne zmieniają się bardzo znacznie w zależności od częstotliwości. Należy tu zaznaczyć, że przy wielkich częstotliwościach, czyli przy prądach szybkozmiennych, występują jeszcze inne zjawiska, które powodują zmianę wartości indukcyjności i pojemności, a także wpływają na wartość oporności rzeczywistej i czynnej. O tych zjawiskach będzie mowa później; narazie ograniczamy się do rozpatrzenia takich urządzeń, w których R , L i C możemy założyć jako wielkości stałe, niezależne od częstotliwości.

Na rys. 12 podane są wykresy oporności indukcyjnej $X_L = \omega L$, oporności pojemnościowej $X_C = \frac{1}{\omega C}$ oraz oporności pozornej $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$ w zależności od częstotliwości; liczby są wzięte z przykładu, rozpatrzonego w § 11.

Na rys. 13 podany jest wykres natężenia prądu w zależności od częstotliwości. Punkt M na tych wykresach odpowiada zjawisku rezonansu napięć.



Rys. 12.



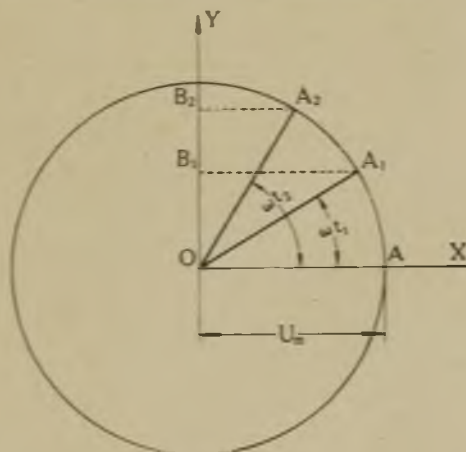
Rys. 13.

ROZDZIAŁ III.

METODY ROZWAŻANIA PRĄDÓW ZMIENNYCH.

§ 13. Metoda wykreślna.

Przebieg każdej funkcji sinusoidalnej czasu możemy przedstawić na rysunku w postaci sinusoidy wykreślonej we właściwej skali w układzie spólrzędnych prostokątnych. Mając taki wykres, znajdujemy wartości chwilowe tej funkcji, odkładając na osi odciętych wartość czasu i odmierzając odpowiednią rzędną. Te same wartości chwilowe możemy otrzymać łatwiej, przeprowadzając



Rys. 14.

z początku osi spólrzędnych O (rys. 14), jako ze środka, koło o promieniu OA , równym wartości maksymalnej rozpatrywanej funkcji sinusoidalnej, np. napięcia U_m . Wyobraźmy sobie, że promień OA od kierunku osi x obraca się w płaszczyźnie XY równomiernie naokoło punktu O w kierunku odwrotnym do ruchu wskazówki zegara z prędkością kątową ω . Po upływie czasu t_1, t_2 .

promień będzie w położeniach OA_1, OA_2, \dots . Łatwo zauważyć, że rzuty promienia w tych położeniach na oś Y : OB_1, OB_2, \dots będą odpowiednio równe:

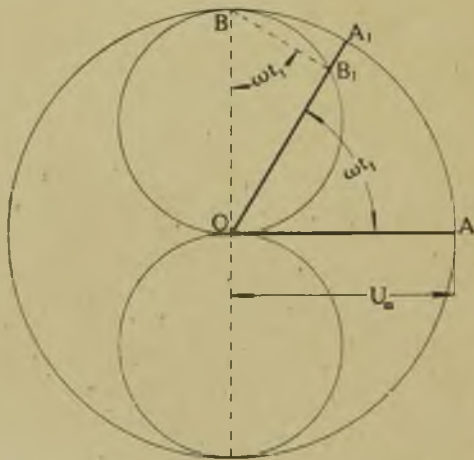
$$OB_1 = OA_1 \sin \omega t_1,$$

$$OB_2 = OA_2 \sin \omega t_2 \text{ i t. d.}$$

Ponieważ $OA_1 = OA_2 = OA = U_m$, więc rzuty te wyrażać będą wartości chwilowe funkcji

$$U = U_m \sin \omega t.$$

Innego rodzaju wykres jest następujący: kreślimy koło o promieniu równym amplitudzie (rys. 15) danej sinusoidy np. $OA = U_m$ i przez środek tego koła prowadzimy dwa koła o średnicach rów-



Rys. 15.

nych jego promieniowi. Prowadząc promień OA_1 pod danym kątem ωt_1 , otrzymujemy punkt B_1 przecięcia się OA_1 z kołem górnym. Wielkość $OB_1 = OA \sin \omega t_1 = U_m \sin \omega t_1$. W ten sposób możemy znaleźć wartości chwilowe funkcji $U = U_m \sin \omega t$ dla dowolnej wartości t . Górne koło służy dla wartości ωt zawartych w pierwszej połowie okresu, czyli od 0 do π , drugie koło dla wartości ωt od π do 2π .

Mając dane funkcje sinusoidalne przesunięte względem siebie w fazie o kąt φ , np.

napięcie

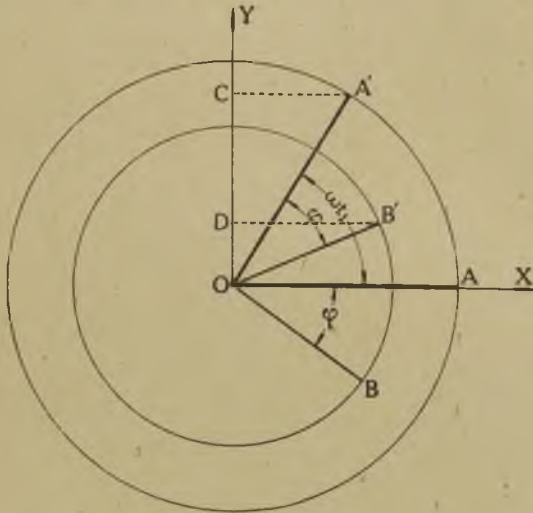
$$u = U_m \sin \omega t$$

i prąd

$$i = I_m \sin (\omega t - \varphi),$$

musielibyśmy, stosując powyższe wykresy, przeprowadzić dla każ-

dej z tych funkcji koło o promieniu równym odpowiednio U_m i I_m . Ponieważ w chwili $t=0$, gdy napięcie przechodzi przez wartość 0, prąd przechodzi przez fazę φ , więc na wykresie musimy promień prądu przesunąć względem promienia napięcia o odpowiedni kąt φ . Na rys. 16 mamy przypadek, gdy prąd opóźnia się względem napięcia. $OA = U_m$, $OB = I_m$.

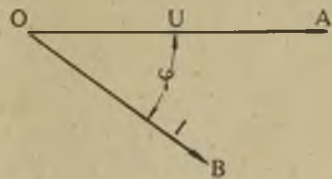


Rys. 16.

Obracając oba promienie z tą samą prędkością kątową ω w płaszczyźnie XY i rozpatrując rzuty tych promieni na oś Y , określimy odpowiednie wartości chwilowe napięcia i prądu, np. $OC = U_m \sin \omega t_1$; $OD = I_m \sin (\omega t_1 - \varphi)$.

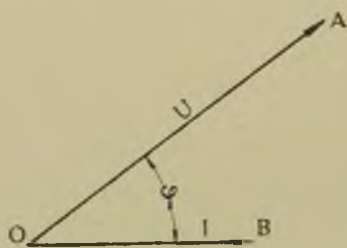
W praktyce elektrotechnicznej rzadko kiedy potrzebujemy rozpatrywać wartości chwilowe napięć i prądów, przeważnie mamy do czynienia z wartościami skutecznymi. W tym przypadku możemy się ograniczyć do przeprowadzenia na wykresie samych tylko promieni o długości, odpowiadającej wartościom skutecznym rozpatrywanych wielkości, np. napięcia i prądu, z uwzględnieniem jednakże kątów przesunięcia fazy, więc, zamiast rys. 16 będziemy mieli rys. 17, gdzie w odpowiednich skalach napięcia i natężenia prądu $OA = U$, $OB = I$.

W ten sam sposób moglibyśmy rozpatrywać jednocześnie dowolną ilość wielkości, stanowiących sinusoidalne funkcje czasu o tej samej pulsacji, czyli



Rys. 17.

o tej samej częstotliwości. Każdą taką wielkość oznaczylibyśmy na wykresie odcinkiem prostej, przeprowadzonej z określonego punktu jako początku; długość odcinka w przyjętej skali odpowiadałaby wartości, np. skutecznej, rozpatrywanej wielkości; kierunek odcinka byłby zależny od kąta przesunięcia fazy omawianej wielkości względem innej, dla której obieramy dowolny kierunek najczęściej poziomy lub pionowy jako początkowy. W wykresie na



Rys. 18.

rys. 17 za początkowy kierunek wzięty jest kierunek napięcia; moglibyśmy również wziąć za początkowy kierunek, kierunek natężenia prądu, jak np. na rys. 18.

Jeżeli jeden z dwóch krańców odcinka obieramy jako jego początek, zaś drugi jako jego koniec, to otrzymamy twór, który w geometrii nazywają wektorem, a kierunek pro-

wadzący od obranego początku do obranego końca — kierunkiem wektora.

Z tego powodu przyjęto w elektrotechnice nazywać wektorami wielkości, stanowiące sinusoidalne funkcje czasu, które na wykresie przedstawiamy odcinkiem prostej określonej długości i określonego kierunku; mówimy więc wektor napięcia, wektor natężenia prądu it. d., zaś wykres, na którym mamy takie wektory, nazywamy wykresem wektorowym.

Oczywiście, tego rodzaju wektory matematyczne należy odróżniać od wielkości fizycznych, posiadających określony kierunek w przestrzeni i stanowiących wektory właściwe.

Na wykresie wektorowym kąty dodatnie odkładamy w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówki zegara; w tym też kierunku wyobrażamy sobie ruch wektorów; jeżeli więc jakiś wektor jest przeprowadzony na wykresie pod kątem dodatnim względem wektora początkowego, to oznacza, że ten pierwszy wektor wyprzedza wektor początkowy w fazie i odwrotnie, gdy jakiś wektor jest odłożony pod kątem ujemnym (w kierunku ruchu wskazówki zegara), wówczas wektor ten opóźnia się w fazie względem wektora początkowego.

Na rys. 17 i 18 widać, że wektor $OB = I$ jest cofnięty względem wektora $OA = U$, czyli, że natężenie prądu jest opóźnione w fazie względem napięcia. Nie jest jednakże rzeczą obojętną, od

jakiego z dwóch wektorów odmierzając kąt przesunięcia fazy φ , od tego bowiem zależy znak tego kąta. Jeżeli w rozpatrywanym przypadku (rys. 17 lub 18) będziemy odmierzali kąt φ od wektora napięcia, wówczas powiemy, że kąt jest ujemny; natomiast jeżeli tenże sam kąt będziemy odmierzali od wektora natężenia prądu, wówczas kąt φ wypadnie dodatni.

Jeżeli mamy kilka prądów do rozpatrzenia i bierzemy pod uwagę przesunięcia fazowe tych prądów względem określonego napięcia, wówczas wektor napięcia bierzemy jako wektor początkowy, wektory zaś natężeń poszczególnych prądów przeprowadzamy pod właściwymi kątami. Tak np. na rys. 19 widzimy, że prąd I_0 jest w fazie z napięciem U , prąd I_1 wyprzedza napięcie, wreszcie prąd I_2 opóźnia się w fazie względem napięcia.

Wykresy wektorowe są bardzo dogodne i znacznie ułatwiają orjentowanie się w zawiłych często zjawiskach, zachodzących w obwodach prądów zmiennych. Za pomocą takich wykresów możemy również często znacznie prędzej uskutecznić obliczenia, zwłaszcza gdy nie chodzi nam o większą ścisłość rachunków.

Pokażemy to na przykładach.

Przykłady. Rozpatrzmy wykresy znanych już nam obwodów. Jeżeli obwód dany posiada oporność rzeczywistą R i indukcyjność L , wówczas napięcie na oporności R

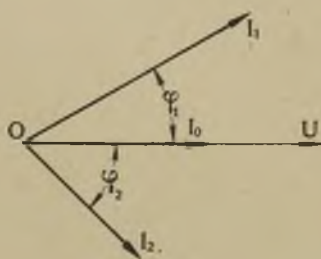
$$U_R = IR$$

jest w fazie z prądem I ; napięcie zaś indukcyjne

$$U_L = I\omega L,$$

jest przyspieszone o kąt $\frac{\pi}{2}$ względem prądu. Zróbmy wykres wektorowy; jako początkowy wektor weźmiemy wektor prądu I (rys. 20); na tym wektorze odmierzamy odcinek OA , jako wektor IR . Od punktu A odkładamy pod kątem $\frac{\pi}{2}$ dodatnim odcinek AB jako wektor $I\omega L$. Napięcie U z zewnątrz przyłożone jest sumą wektorów U_R i U_L , otrzymamy go, dodając geometrycznie te wektory, jako odcinek OB . Z trójkąta OAB otrzymujemy

$$U^2 = I^2 R^2 + I^2 (\omega L)^2,$$



Rys. 19.

stąd

$$I^2 = \frac{U^2}{R^2 + (\omega L)^2}$$

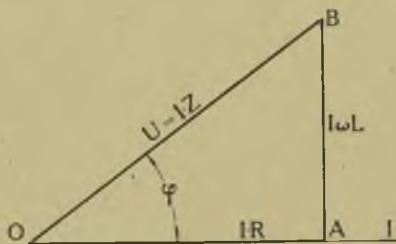
wreszcie

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

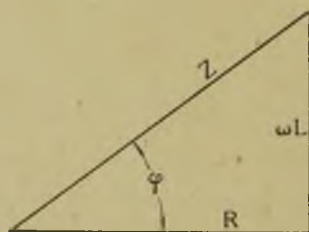
oraz

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{R}$$

Widzimy, że w sposób znacznie prostszy doszliśmy do otrzymanych już inną drogą wyników. Trójkąt OAB nazywamy trójkątem napięcie. Dzieląc każdy bok tego trójkąta przez I , otrzymamy tak zwany trójkąt oporności (rys. 21).

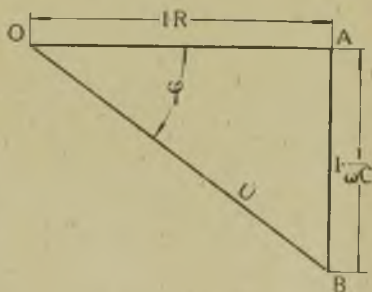


Rys. 20.



Rys. 21.

Jeżeli obwód zawiera oporność rzeczywistą R i pojemność C , wtedy, postępując analogicznie, możemy również zbudować trójkąt napięcie; odcinek AB (rys. 22), oznaczający napięcie na kondensatorze $I \frac{1}{\omega C}$, należy odłożyć nadół, ponieważ w danym przypadku



Rys. 22.

mamy napięcie opóźnione względem prądu o kąt prosty. Wektor zamykający OB wyraża napięcie U , przyłożone z zewnątrz.

W przypadku, gdy obwód zawiera oporność R , indukcyjność L i pojemność C , postępujemy tak: na linii OA odkładamy wektor równy napięciu na oporności rzeczywistej IR (rys. 23). Następnie od punktu A odkładamy w górę wektor

$AB = I \omega L$ i od punktu B nadół wektor BC , wyobrażający napięcie $I \frac{1}{\omega C}$ na kondensatorze. Tu, zależnie od wartości napięcia pojemnościowego, możemy otrzymać punkty C_1 , C_2 lub C_3 :

$$C_1 \text{ w przypadku, gdy } \frac{1}{\omega C} < \omega L;$$

$$C_2 \text{ „ „ „ } \frac{1}{\omega C} = \omega L;$$

$$C_3 \text{ „ „ „ } \frac{1}{\omega C} > \omega L.$$

Biorąc np. przypadek pierwszy, gdy przewagę ma oporność indukcyjna nad opornością pojemnościową, łączymy punkt O z punktem C_1 . Wektor $OC_1 = U$ wyobraża napięcie z zewnątrz przyłożone. Odcinek $AC_1 = IX$, gdzie

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

stanowi oporność bierną.

Dzieląc bok trójkąta przez I otrzymamy w odpowiedniej skali trójkąt oporności danego obwodu (rys. 24)

z bokami R , X i Z ; z tego trójkąta otrzymujemy znane już wzory:

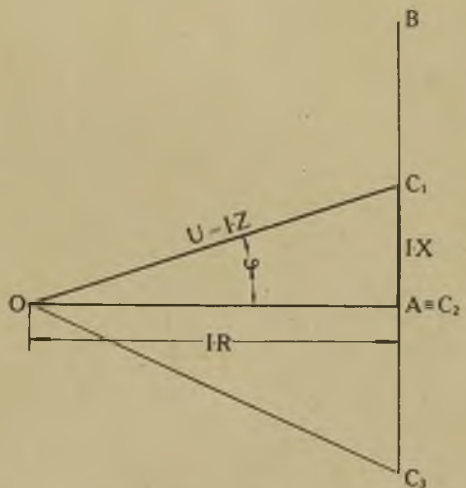
$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{X}{R}.$$

Z trójkąta OAC_1 (rys. 23) otrzymujemy

$$U \cos \varphi = IR,$$

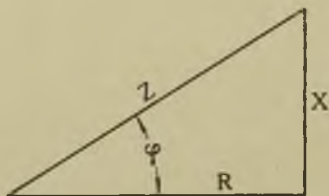
$$U \sin \varphi = IX.$$

Każde zatem napięcie w obwodzie prądu zmiennego można rozłożyć na 2 składowe. Przez analogję do składowych prądu możemy nazwać napięcie $U \cos \varphi$ napięciem mocnym lub czynnym, napięcie zaś $U \sin \varphi$ bezmocnym lub biernym.

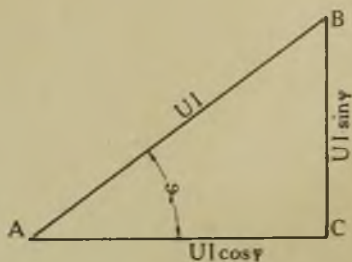


Rys. 23.

Rozpatrując moc pozorną prądu zmiennego UI , jako wektor, możemy zbudować trójkąt mocy ABC (rys. 25), w którym $AB = UI$ będzie mocą pozorną. $AC = UI \cos \varphi$ stanowi moc czynną, zaś $BC = UI \sin \varphi$ moc bierną.



Rys. 24.

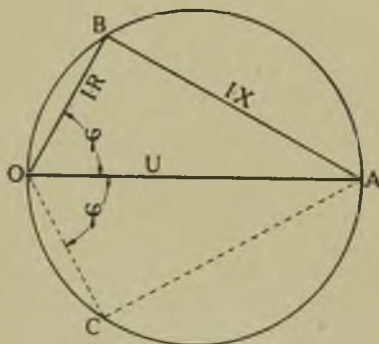


Rys. 25.

Jeżeli oprócz wielkości R i X wiadome jest napięcie U i trzeba znaleźć prąd I , wówczas zadanie takie można rozwiązać wykreślnie w sposób następujący: na dowolnej linii prostej odkładamy odcinek $OA = U$ (rys. 26); na tym odcinku, jako na średnicy, przeprowadzamy koło. Z punktu O odmieramy względem odcinka OA kąt φ , obliczony ze wzoru

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X}{R}$$

i przeprowadzamy pod tym kątem prostą do przecięcia z kołem w punkcie B .



Rys. 26.

Wtedy $OB = IR$, $BA = IX$; mierząc więc odcinek OB w skali

napięcie i dzieląc przez R , otrzymamy I .

Odcinek OB został przeprowadzony pod kątem φ naprzód, czyli w przypuszczeniu, że $X < O$ (przewaga pojemności); gdyby przeważała indukcyjność, otrzymalibyśmy trójkąt OAC .

§ 14. Metoda symboliczna.

Położenie dowolnego punktu M (rys. 27) na płaszczyźnie możemy określić w układzie współrzędnych za pomocą promienia wodzącego $OM = r$ i kąta biegunowego α , odmierzonych od osi biegunowej OX z początkiem O .

Oznaczając spólrzędne punktu M w układzie prostokątnym osi X i Y , czyli rzuty promienia wodzącego r na te osi przez a i b , będziemy mieli

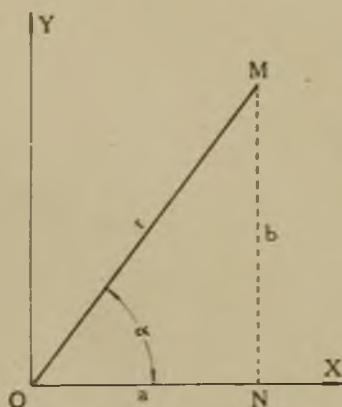
$$a = r \cos \alpha, \quad (1)$$

$$b = r \sin \alpha, \quad (2)$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad (3)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}. \quad (4)$$

Rozpatrując na płaszczyźnie odcinek prostej, któremu nadajemy pewien kierunek, np. OM , możemy go w zupełności określić w sposób dwójaki: albo podając długość tego odcinka r i kąt α pomiędzy tym odcinkiem i obraną osią, przechodzącą przez jego początek, albo za pomocą rzutów tego odcinka a i b na dwie prostopadłe do siebie osie, przechodzące przez jego początek. Odcinek OM stanowi geometryczną sumę rzutów a i b . Z matematyki wiadomo, że taką geometryczną sumę można przedstawić w postaci



Rys. 27.

liczby zespolonej $a + jb$, gdzie $j = \sqrt{-1}$, a jest rzutem na oś rzeczywistą, zaś b rzutem na oś urojoną. Moglibyśmy więc napisać $OM = a + jb$, ale wtedy nie widzielibyśmy różnicy pomiędzy odcinkiem, mającym określony kierunek, a długością tego odcinka. Aby zaznaczyć, że w rozpatrywanym odcinku uwzględniamy nie tylko jego długość, lecz również i jego kierunek, będziemy stawiali u góry daszek; więc pisać będziemy $\vec{OM} = a + jb$ lub

$$\vec{r} = a + jb. \quad (5)$$

Wprowadzając zamiast rzutów a i b ich wartości ze wzorów (1) i (2), możemy napisać

$$\vec{r} = r (\cos \alpha + j \sin \alpha); \quad (6)$$

r nazywamy modulem, zaś α argumentem liczby zespolonej, stanowiącej symbol \vec{r} .

Gdy argument $\alpha = 0$, to znaczy, gdy rozpatrywany odcinek znajduje się na obranej osi, wówczas

$$\hat{r} = r,$$

czyli zamiast liczby zespolonej otrzymujemy dla naszego odcinka liczbę rzeczywistą.

Przy rozważaniu prądów zmiennych, jak to już widzieliśmy, mamy do czynienia z wielkościami, które na wykresie przedstawiamy jako odcinki prostej z uwzględnieniem ich kierunków. Każdą więc taką wielkość możemy wyrazić symbolicznie jako liczbę zespoloną za pomocą modułu i argumentu lub też za pomocą rzutów na osie rzeczywistą i urojoną. Wprowadzenie takich symboli i działania nad nimi nazwano metodą symboliczną.

Metoda ta znalazła szerokie zastosowanie w elektrotechnice prądów zmiennych, gdyż w znacznym stopniu upraszcza matematyczne działania nad rozpatrywanymi wielkościami; daje ona możliwość przeprowadzania ścisłych obliczeń, często w bardzo zawiłych zagadnieniach. Możemy ją zastosować zarówno do wielkości sinusoidalnie zmiennych w czasie, jak np. napięcie i natężenie prądu, czyli do tak zwanych wektorów, jako też do wielkości niestanowiących funkcji czasu, jak np. oporności

Przy stosowaniu metody symbolicznej będziemy się spotykali z zagadnieniem przesuwania wektorów naprzód lub wstecz o kąt prosty; działanie takie sprowadza się do mnożenia lub dzielenia przez $\sqrt{-1}$, który w skrótce oznaczamy przez j . Rzeczywiście, niech OM_1 (rys. 28) oznacza wektor r_1 z rzutami a i b , czyli

$$\hat{r}_1 = a + jb, \quad (7)$$

gdy obrócimy ten wektor w kierunku dodatnim, czyli przesuniemy go naprzód, o kąt $\frac{\pi}{2}$, otrzymamy nowy wektor $OM_2 = r_2$, przy czem

$$\hat{r}_2 = -b + ja, \quad (8)$$

przesuwając następnie ten wektor naprzód o kąt $\frac{\pi}{2}$, otrzymamy wektor $OM_3 = r_3$, przy czem

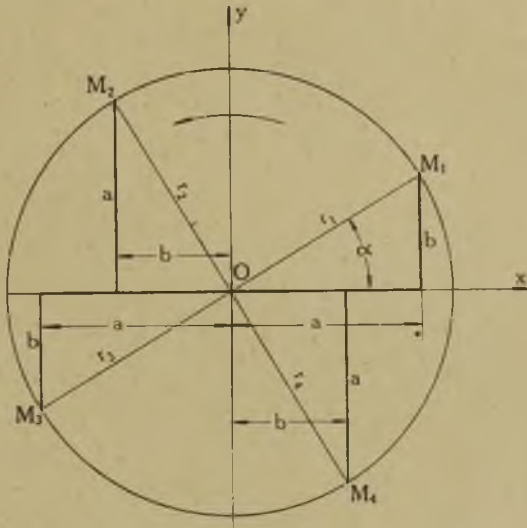
$$\hat{r}_3 = -a - jb, \quad (9)$$

wreszcie przesuwając ostatni wektor o kąt $\frac{\pi}{2}$, otrzymamy wektor $OM_4 = r_4$, dla którego

$$\hat{r}_4 = b - ja \quad (10)$$

Łatwo jest sprawdzić, że mnożąc wzór (7) przez j otrzymamy wzór (8), mnożąc wzór (8) przez j otrzymamy wzór (9), wreszcie mnożąc wzór (9) przez j otrzymamy wzór (10), czyli

$$\begin{aligned}\hat{r}_2 &= j \hat{r}_1 \\ \hat{r}_3 &= j \hat{r}_2 = j^2 \hat{r}_1 = -\hat{r}_1 \\ \hat{r}_4 &= j \hat{r}_3 = j^3 \hat{r}_1 = -j \hat{r}_1;\end{aligned}$$



Rys. 28.

odwrotnie, możemy napisać

$$\begin{aligned}\hat{r}_1 &= \frac{\hat{r}_2}{j} = -j \hat{r}_2 \\ \hat{r}_2 &= \frac{\hat{r}_3}{j} = -j \hat{r}_3 \\ \hat{r}_3 &= \frac{\hat{r}_4}{j} = -j \hat{r}_4 \\ \hat{r}_4 &= -j \hat{r}_1.\end{aligned}$$

Z zestawienia tego wynika, że pomnożenie wektora przez j daje w rezultacie wektor przesunięty naprzód o kąt prosty, natomiast podzielenie przez j , lub, co jest jedno i to samo pomnożenie przez $-j$, daje nam wektor przesunięty o kąt prosty wstecz.

Na zasadzie znanego wzoru Eulera

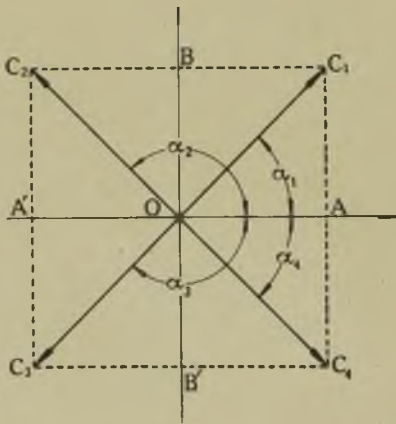
$$e^{\pm j\alpha} = \cos \alpha \pm j \sin \alpha,$$

gdzie e jest podstawą logarytmów naturalnych, możemy wzór (6) przepisać w postaci

$$\hat{r} = r e^{j\alpha} \quad (11)$$

Argument α stanowi pewien kąt, który należy odłożyć od obranej osi początkowej, by na wykresie otrzymać kierunek odcinka, wyobrażającego symbol \hat{r} . Kąty dodatnie odkładamy w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówki zegara; mogą się one naogół zmieniać w granicach od 0° do 360° , czyli od 0 do 2π ; jednakże w elektrotechnice prądów zmiennych dogodniej jest odmierzać kąty w dwóch kierunkach: jako dodatnie i jako ujemne; wówczas kąty te będą miały wartości w granicach od -180° do $+180^\circ$; każdy kąt ponad $+180^\circ$, może być rozpatrywany jako kąt ujemny, stanowiący dopełnienie do 360° , jak również każdy kąt ujemny mniejszy od -180° , będzie stanowił kąt dodatni, stanowiący dopełnienie wartości bezwzględnej tego kąta do 360° .

Jak widzieliśmy (wzór 4) argument α w zależności od liczby zespolonej określa się wzorem $\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}$, jeżeli symbol $\hat{r} = a + jb$;



Rys. 29.

ale znaki przy liczbach a i b mogą być zarówno dodatnie, jak i ujemne, wobec tego i znak $\operatorname{tg} \alpha$ może wypaść dwójaki. Rozpatrzmy możliwe przypadki

$$1) \hat{r} = a + jb, \quad \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{b}{a}$$

$$2) \hat{r} = -a + jb, \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = -\frac{b}{a}$$

$$3) \hat{r} = -a - jb, \quad \operatorname{tg} \alpha_3 = \frac{b}{a}$$

$$4) \hat{r} = a - jb, \quad \operatorname{tg} \alpha_4 = -\frac{b}{a}$$

Na wykresie (29), $OA = a$, $OA' = -a$, $OB = b$, $OB' = -b$, rozpatrywane symbole będą przedstawione odcinkami $OC_1 = \hat{r}_1$, $OC_2 = \hat{r}_2$, $OC_3 = \hat{r}_3$, $OC_4 = \hat{r}_4$.

Gdybyśmy określali argumenty $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, tylko na podstawie wartości ich tangensów, mielibyśmy dwoistość, gdyż, jak łatwo zauważyć, $\operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} \alpha_3 = \frac{b}{a}$; $\operatorname{tg} \alpha_2 = \operatorname{tg} \alpha_4 = -\frac{b}{a}$.

Dla określenia więc kąta α musimy wiedzieć w jakiej ćwiartce się on powinien znajdować, a to możemy stwierdzić tylko na podstawie znaków, stojących przed a i przed b , przyczem, stosownie do umowy, kąty w 1-ej i 2-ej ćwiartce α_1 i α_2 będą dodatnie, zaś kąty w 3-ej i 4-ej ćwiartce α_3 i α_4 będą ujemne i ich bezwzględne wartości nie przekraczają 180° .

Działania nad symbolami sprowadza się do działań nad liczbami zespolonemi; tak np. mając dwa symbole

$$\begin{aligned}\hat{r}_1 &= a_1 + j b_1 = r_1 (\cos \alpha_1 + j \sin \alpha_1) = r_1 e^{j\alpha_1} \\ \hat{r}_2 &= a_2 + j b_2 = r_2 (\cos \alpha_2 + j \sin \alpha_2) = r_2 e^{j\alpha_2}\end{aligned}$$

i dodając je, czyli określając ich sumę geometryczną r , otrzymamy

$$\hat{r} = \hat{r}_1 + \hat{r}_2 = a_1 + a_2 + j (b_1 + b_2) = r (\cos \alpha + j \sin \alpha),$$

gdzie

$$r = \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2}; \quad tg \alpha = \frac{b_1 + b_2}{a_1 + a_2}.$$

W celu otrzymania iloczynu symboli napiszemy

$$\begin{aligned}\hat{r}_1 \hat{r}_2 &= r_1 e^{j\alpha_1} \cdot r_2 e^{j\alpha_2} = r_1 r_2 e^{j(\alpha_1 + \alpha_2)} = \\ &= r_1 r_2 [\cos (\alpha_1 + \alpha_2) + j \sin (\alpha_1 + \alpha_2)],\end{aligned}$$

skąd widać, że moduł iloczynu symboli równa się iloczynowi modułów, zaś argument równa się sumie argumentów mnożonych symboli.

Przy dzieleniu symboli będziemy mieli

$$\frac{\hat{r}_1}{\hat{r}_2} = \frac{r_1 e^{j\alpha_1}}{r_2 e^{j\alpha_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\alpha_1 - \alpha_2)} = \frac{r_1}{r_2} \left[\cos (\alpha_1 - \alpha_2) + j \sin (\alpha_1 - \alpha_2) \right],$$

czyli moduły się dzielą, argumenty się odejmują.

Przy podnoszeniu do potęgi symbolu

$$\hat{r} = r (\cos \alpha + j \sin \alpha) = r e^{j\alpha}$$

będziemy mieli

$$\hat{r}^n = r^n e^{jn\alpha} = r^n (\cos n\alpha + j \sin n\alpha),$$

moduł jest podniesiony do potęgi, zaś argument jest pomnożony przez wykładnik potęgi; przy wyciąganiu pierwiastka

$$\sqrt[n]{\hat{r}} = \sqrt[n]{r e^{j\frac{\alpha}{n}}} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\alpha}{n} + j \sin \frac{\alpha}{n} \right)$$

należy wyciągnąć pierwiastek z modułu, zaś argument podzielić przez wykładnik pierwiastka.

Łatwo też jest zauważyć, że mnożenie wektora przedstawionego liczbą zespoloną przez $e^{j\varphi}$ powoduje obrót tego wektora o kąt φ . Np. gdy rozpatrujemy wektor $r = r(\cos \alpha + j \sin \alpha) = re^{j\alpha}$ i pomnożymy go przez $e^{j\varphi}$, czyli przez $\cos \varphi + j \sin \varphi$, otrzymamy nowy wektor $r_1 = re^{j\alpha} e^{j\varphi} = re^{j(\alpha+\varphi)} = r[\cos(\alpha+\varphi) + j \sin(\alpha+\varphi)]$, którego moduł jest ten sam, lecz argument jest zwiększony o kąt φ ; inaczej mówiąc nowy wektor jest obrócony względem poprzedniego o kąt φ .

Mnożenie wektora przez $e^{j\omega t}$, przy zmianie czasu t , daje obrót z prędkością kątową ω .

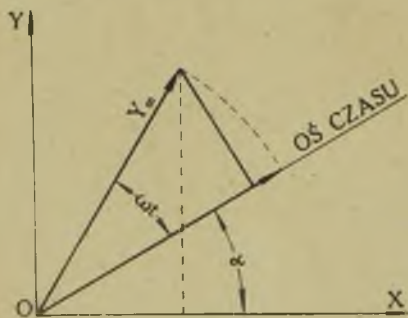
Na tej podstawie możemy symbolicznie ująć również wartości chwilowe funkcji sinusoidalnej czasu; rozpatrzmy np. funkcję

$$y = Y_m \sin \omega t.$$

W § 13 widzieliśmy, że wartości chwilowe rozpatrywanej funkcji możemy otrzymać, obracając z prędkością kątową ω promień, odpowiadający największej wartości Y_m tej funkcji, i biorąc rzuty na oś OY . Gdybyśmy brali rzuty na oś OX , otrzymalibyśmy również wartości chwilowe w postaci

$$y = Y_m \cos \omega t,$$

z tą tylko różnicą, że moment, od którego rozpoczynamy liczenie czasu ($t=0$), w tym drugim przypadku odpowiadałby przejściu



Rys. 30.

danej funkcji przez wartość największą, nie zaś przez wartość 0 jak to ma miejsce w pierwszym przypadku. Oczywiście wartości chwilowe można otrzymywać, biorąc rzuty na dowolnie przeprowadzoną oś; nazwijmy tę oś — osią czasu. Tak np., gdy oś czasu jest przeprowadzona pod kątem α do osi OX (rys. 30) i rozpoczniemy obrót Y_m od tej osi czasu, wówczas wartości chwilowe możemy otrzy-

mać jako rzuty na tę oś w postaci $Y_m \cos \omega t$, albo też jako rzuty na osi OX lub OY w postaci $Y_m \cos(\omega t + \alpha)$ lub $Y_m \sin(\omega t + \alpha)$. Często dogodniej jest brać za oś czasu jedną z osi współrzędnych.

W założeniu, że wartości chwilowe będziemy traktować jako rzuty, na określoną stałą oś, promienia, obracającego się z prędkością kątową ω i odpowiadającego największej wartości rozpatrywanej funkcji sinusoidalnej czasu, możemy pisać symbolicznie

$$\hat{y} = Y_m e^{j\omega t} = Y_m (\cos \omega t + j \sin \omega t)$$

lub ogólniej

$$\hat{y} = Y_m e^{j(\omega t + \alpha)} = Y_m [\cos(\omega t + \alpha) + j \sin(\omega t + \alpha)].$$

Czasami zachodzi potrzeba rozpatrywania pochodnej lub całki wektora względem czasu. W ogólnym przypadku będziemy mieli

$$\frac{d\hat{y}}{dt} = j\omega Y_m e^{j(\omega t + \alpha)} = j\omega \hat{y};$$

widzimy więc, że pochodna wektora względem czasu stanowi nowy wektor, którego moduł jest zwiększony ω razy i który jest przesunięty o kąt prosty naprzód względem poprzedniego.

Następnie

$$\int \hat{y} dt = \int Y_m e^{j(\omega t + \alpha)} dt = \frac{Y_m e^{j(\omega t + \alpha)}}{j\omega} + C,$$

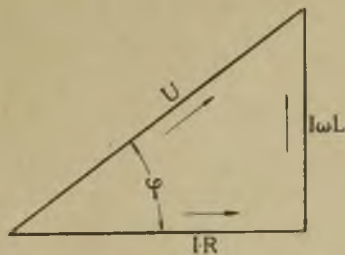
gdzie C stała dowolna, czyli

$$\int \hat{y} dt = \frac{\hat{Y}}{j\omega} + C;$$

znaczy to, że pomijając stałą dowolną, która w zależności od warunków granicznych może mieć taką lub inną wartość, otrzymujemy po scałkowaniu nowy wektor z modułem zmniejszonym ω razy, przesunięty o kąt prosty wstecz względem poprzedniego.

Rozpatrzmy teraz kilka przykładów zastosowania metody symbolicznej do rozpatrzonych już poprzednio obwodów prądu.

Jeżeli mamy oporność rzeczywistą i indukcyjność (rys. 31), wówczas biorąc wektor natężenia prądu jako podstawowy, będziemy mieli



Rys. 31.

$$\hat{U} = IR + j I\omega L = I(R + j\omega L),$$

zaś przy dowolnej osi podstawowej

$$\hat{U} = \hat{I}(R + j\omega L);$$

$$IR = U \cos \varphi; \quad I\omega L = U \sin \varphi; \quad \hat{U} = U(\cos \varphi + j \sin \varphi).$$

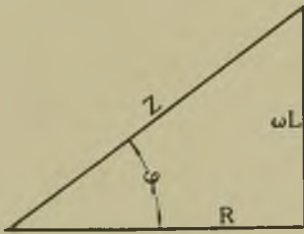
Jeżeli zamiast trójkąta napięć weźmiemy trójkąt oporności (rys. 32), wówczas

$$\hat{Z} = R + j\omega L,$$

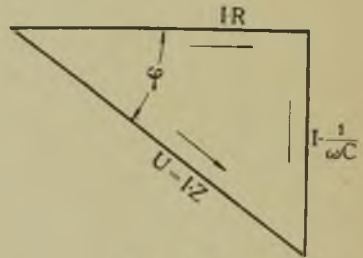
$$R = Z \cos \varphi; \quad \omega L = Z \sin \varphi;$$

$$\hat{Z} = Z(\cos \varphi + j \sin \varphi).$$

Jeżeli w obwodzie mamy oprócz oporności rzeczywistej kondensator (rys. 33), wówczas



Ry. 32.



Ry. 33.

$$\hat{U} = IR - jI \frac{1}{\omega C} = I \left(R - j \frac{1}{\omega C} \right),$$

$$IR = U \cos \varphi; \quad I \frac{1}{\omega C} = U \sin \varphi; \quad \hat{U} = U(\cos \varphi - j \sin \varphi);$$

$$\hat{Z} = R - j \frac{1}{\omega C},$$

W przypadku zaś najogólniejszym, gdy obwód zawiera R , L i C w szeregowym połączeniu, będziemy mieli przy dowolnej osi podstawowej

$$\hat{U} = \hat{I}(R + jX), \tag{12}$$

gdzie

$$X = X_L - X_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

może mieć znak dodatni lub ujemny.

Ponieważ znak $\operatorname{tg} \varphi = \frac{X}{R}$ zależny jest wyłącznie od znaku X , gdyż R zawsze jest > 0 , przeto kąt φ może się zmieniać tylko w granicach

$$-90^\circ \leq \varphi \leq +90^\circ,$$

przyczem skrajne wartości φ otrzymujemy teoretycznie dla $R = 0$, praktycznie dla bardzo małych wartości oporności rzeczywistej.

Następnie mamy

$$\hat{Z} = R + jX \quad (13)$$

$$R = Z \cos \varphi \quad (14)$$

$$X = Z \sin \varphi \quad (15)$$

$$\hat{U} = \hat{I} \hat{Z} \quad (16)$$

Moc prądu zmiennego w symbolicznem ujęciu naogół nie otrzymamy przez pomnożenie wektorów napięcia i natężenia prądu. Jeżeli bowiem napięcie jest przesunięte w fazie względem dowolnie wybranego kierunku podstawowego o kąt α , zaś prąd względem napięcia o kąt φ będziemy mieli

$$\hat{U} = U e^{j\alpha}, \quad \hat{I} = I e^{j(\alpha + \varphi)},$$

$$\hat{U} \hat{I} = UI e^{j(2\alpha + \varphi)} = UI \cos(2\alpha + \varphi) + j UI \sin(2\alpha + \varphi).$$

Dla otrzymania właściwego wzoru mocy, musimy wziąć albo jeden z dwu wektorów napięcia lub prądu za podstawowy, wtedy bowiem $\alpha = 0$ lub $\alpha = -\varphi$, albo też jeden z tych wektorów — w postaci liczby zespolonej sprzężonej, czyli $\hat{U}_s = U e^{-j\alpha}$ lub $\hat{I}_s = I e^{-j(\alpha + \varphi)}$.

W pierwszym przypadku

$$\hat{U} \hat{I} = UI \cos \varphi \pm j UI \sin \varphi,$$

w drugim przypadku

$$\hat{U}_s \hat{I} = UI \cos \varphi + j UI \sin \varphi,$$

$$\hat{U} \hat{I}_s = UI \cos \varphi - j UI \sin \varphi.$$

Część rzeczywista odpowiada mocy czynnej, zaś część urojona mocy biernej; ta ostatnia może mieć dwa znaki w zależności od znaku kąta φ . Z powyższych wzorów wynika, że moc pozorna równa się sumie geometrycznej mocy czynnej i mocy biernej.

Zamiast oporności dogodniej jest czasami posługiwać się przewodnością. Jeżeli Z oznacza oporność pozorną, wówczas

$$\frac{1}{Z} = Y$$

nazywamy przewodnością pozorną.

Zabierzmy jakie będą jej składowe. Stosując metodę symboliczną, otrzymujemy

$$\hat{Z} = R + jX, \quad \hat{Y} = \frac{1}{\hat{Z}} = \frac{1}{R + jX},$$

$$\frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2} = \frac{R - jX}{Z^2} = \frac{R}{Z^2} - j \frac{X}{Z^2},$$

$$\hat{Y} = \frac{R}{Z^2} - j \frac{X}{Z^2}, \quad (Z = \sqrt{R^2 + X^2}).$$

Biorąc pod uwagę, że $Z = \frac{U}{I}$, a także wzory (14) i (15) możemy napisać:

$$\frac{R}{Z^2} = \frac{1}{Z} \cdot \frac{R}{Z} = \frac{I \cos \varphi}{U},$$

$$\frac{X}{Z^2} = \frac{1}{Z} \cdot \frac{X}{Z} = \frac{I \sin \varphi}{U}.$$

Z prawej strony ostatnich wzorów mamy ilorazy prądu przez napięcie czyli pewne przewodności. Pierwsza z tych odpowiada prądowi mocnemu lub czynnemu, nazywamy ją przewodnością rzeczywistą lub czynną i oznaczamy literą G . Druga przewodność odpowiada prądowi bezmocnemu lub biernemu i nazywać ją będziemy przewodnością urojona albo bierną, oznaczając literą B ; w terminologii międzynarodowej, rzadko spotykanej w literaturze polskiej, przewodność rzeczywista nosi nazwę konduktancji, przewodność urojona — susceptancji, zaś przewodność pozorna — admitancji. W ten sposób:

$$G = \frac{R}{Z^2},$$

$$B = \frac{X}{Z^2},$$

$$\hat{Y} = G - jB,$$

skąd

$$Y = \sqrt{G^2 + B^2}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{B}{G}.$$

Znak B we wzorze symbolicznym na przewodność pozorną, jak widzimy, jest przeciwny do znaku X , jaki występuje w oporności pozornej, więc gdy przeważa oporność indukcyjna $X > 0$, $B < 0$; gdy przeważa oporność pojemnościowa $X < 0$, $B > 0$.

Zestawienie rozpatrzonych wielkości i najważniejszych wzorów.

Napięcie U

czynne (mocne) $U \cos \varphi = IR$

biernie (bezmocne) $U \sin \varphi = IX$

$$\hat{U} = \hat{I} \hat{Z}$$

Prąd I

czynny (mocny) $I \cos \varphi = UG$

bierny (bezmocny) $I \sin \varphi = UB$

$$\hat{I} = \frac{\hat{U}}{\hat{Z}} = \hat{U} \hat{Y}$$

Oporność

czynna (rzeczywista, omowa, rezystancja) $R = \frac{U \cos \varphi}{I}$

bierna (urojona, reaktancja) $X = \frac{U \sin \varphi}{I}$

indukcyjna (reaktancja indukcyjna, indukcyjność) $X_L = \omega L$

pojemnościowa (reaktancja pojemnościowa, pojemność) $X_C = \frac{1}{\omega C}$

$$X = X_L - X_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

pozorna (impedancja) $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$

$$\hat{Z} = R + jX; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{R}{X}$$

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z}; \quad \sin \varphi = \frac{X}{Z}.$$

Przewodność

czynna (rzeczywista, konduktancja) $G = \frac{R}{Z^2} = \frac{I \cos \varphi}{U}$

bierna (urojona, susceptancja) $B = \frac{X}{Z^2} = \frac{I \sin \varphi}{U}$

pozorna (admitancja) $Y = \frac{1}{Z}$

$$\hat{Y} = G - jB$$

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{B}{G}; \quad \cos \varphi = \frac{G}{Y}; \quad \sin \varphi = -\frac{B}{Y}.$$

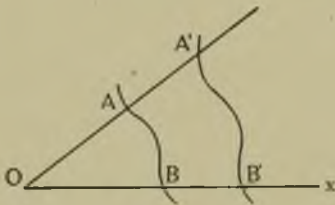
§ 15. Metoda inwersji.

Rozpatrzmy na płaszczyźnie dwie krzywe AB i $A'B'$ (rys. 34), które mają następujące własności: iloczyn promieni wodzących, przeprowadzonych do tych krzywych z początku O w tym samym kierunku, jest wielkością stałą, a więc

$$OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = \dots = k$$

lub

$$OA' = \frac{k}{OA}; \quad OB' = \frac{k}{OB};$$



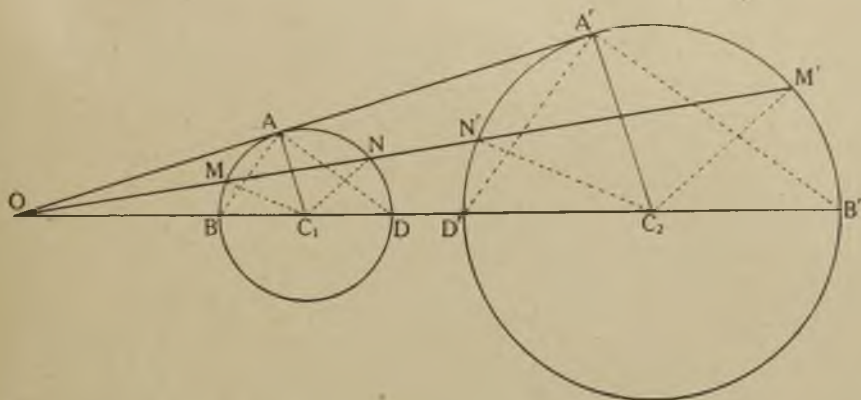
Rys. 34.

Znajdywanie jednej z tych krzywych, gdy druga jest dana, nazywamy inwersją lub przekształceniem przez promienie odwrotne. Punkt O nazywamy środkiem inwersji, zaś k stopniem inwersji lub współczynnikiem przekształcenia przez promienie odwrotne. Każdemu punktowi jednej krzywej np. punktowi A odpowiada punkt A' na drugiej krzywej lub odwrotnie.

Metoda inwersji przez promienie odwrotne ma zastosowanie wówczas, gdy mając wykres, przedstawiający przebieg pewnej wielkości, chcemy zrobić wykres dla innej wielkości, która jest odwrotnie proporcjonalną do pierwszej. W zagadnieniach prądu zmiennego, takimi wielkościami są np. oporność pozorna i przewodność pozorna; oporność pozorna i natężenie prądu przy stałym napięciu i t. p.

Najczęściej spotykamy się z wykresami kołowymi, gdy jedną krzywą stanowi koło i trzeba dla koła znaleźć krzywą przekształconą przez promienie odwrotne. Tu należy rozpatrzeć 2 przypadki, w zależności od tego, gdzie się znajduje środek inwersji: 1) poza danym kołem; 2) na danym kole.

W pierwszym przypadku, gdy środek inwersji O (rys. 35) znajduje się poza danym kołem ze środkiem C_1 , przeprowadzamy i przedłużamy prostą OC_1 oraz styczną OA ; następnie budujemy drugie koło podobne do danego ze środkiem C_2 na przedłużeniu



rys. 35

OC_1 ze wspólną styczną OAA' , tak aby $OA' = \frac{k}{OA}$, gdzie k stanowi stopień inwersji, czyli

$$OA \cdot OA' = k;$$

Z podobieństwa trójkątów

$$\triangle OAB \sim \triangle OA'D'$$

mamy

$$\frac{OB}{OD'} = \frac{OA}{OA'}$$

zaś z podobieństwa

$$\triangle OAD \sim \triangle OA'B'$$

$$\frac{OD}{OB'} = \frac{OA}{OA'}$$

z tych proporcji wynika, że

$$\frac{OB}{OD'} = \frac{OD}{OB'}$$

skąd

$$OB \cdot OB' = OD \cdot OD'$$

Ale

$$OB \cdot OD = OA^2$$

$$OD' \cdot OB' = OA'^2;$$

mnożąc stronami, otrzymamy

$$OB \cdot OB' \cdot OD \cdot OD' = OA^2 \cdot OA'^2 = k^2$$

i ostatecznie

$$OB \cdot OB' = OD \cdot OD' = k.$$

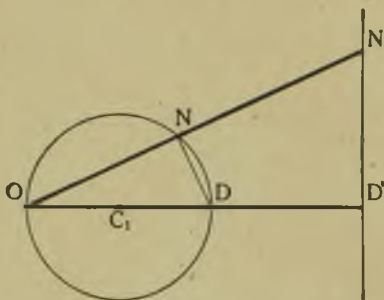
Przeprowadzając dowolny promień $OMNN'M'$, znajdziemy w sposób analogiczny, że

$$OM \cdot OM' = ON \cdot ON' = k.$$

W ten sposób dochodzimy do wniosku, że koło ze środkiem C_2 stanowi dla danego koła krzywą, przekształconą przez promienie odwrotne, czyli krzywą otrzymaną za pomocą inwersji. Przy konstrukcji tego koła prościej jest znaleźć na przedłużeniu prostej OC_1 , punkty D' i B' ze wzorów $OD' = \frac{k}{OD}$, $OB' = \frac{k}{OB}$, a następnie znaleźć środek koła C_2 , dzieląc odcinek $D'B'$ na połowę.

Łatwo zauważyć, że gdy na danym kole przechodzimy od jednego punktu do drugiego, idąc według ruchu wskazówki zegara np. od B do M , na kole przekształconym odpowiednie punkty otrzymamy idąc w kierunku przeciwnym: od B' do M' .

Gdy środek inwersji znajduje się na samym kole (rys. 36), wtedy w porównaniu do poprzedniego przypadku (rys. 35) $OB = 0$, wobec czego



Rys. 36.

$$OB' = \frac{k}{OB} = \infty; \quad OD' = \frac{k}{OD};$$

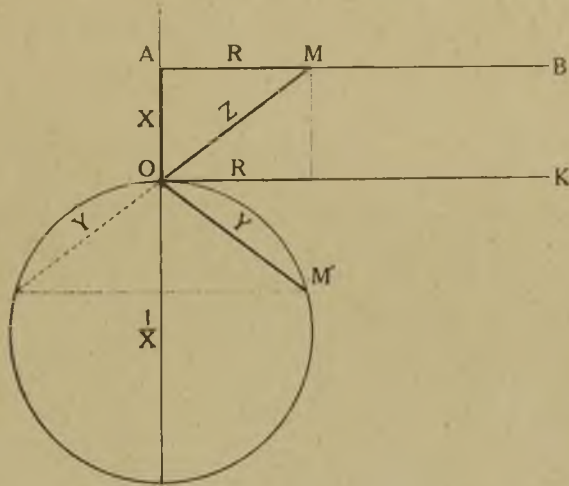
średnica drugiego koła $OB' - OD'$ staje się nieskończenie wielką; inaczej mówiąc, zamiast koła otrzymujemy prostą, przechodzącą przez punkt D' w odległości $\frac{k}{OD}$ od środka inwersji O , skierowaną prostopadle do średnicy danego koła OD . Z podobieństwa trójkątów OND i $ON'D'$ mamy

$$\frac{ON}{OD} = \frac{OD'}{ON'}, \text{ czyli}$$

$$ON \cdot ON' = OD \cdot OD' = k.$$

Oczywiście, odwrotnie, przez inwersję linii prostej, otrzymamy koło przechodzące przez środek inwersji.

Jako przykład rozpatrzmy obwód, w którym oporność bierna X jest stała, zmienia się natomiast oporność czynna R . Biorąc dowolną oś OK , jako podstawową (rys. 37) i odkładając stałą wartość $X = X_L - X_C$ w górę lub dół w zależności od znaku X (na rys. $X > 0$) otrzymamy dla zmiennej oporności pozornej OM wykres w postaci linii prostej AB równoległej do osi odciętych, przeprowadzonej w odległości X od tej osi.



Rys. 37.

Dla otrzymania wykresu przewodności pozornej $Y = \frac{1}{Z}$ stosujemy metodę inwersji. Środkiem inwersji będzie punkt O , stopień inwersji w tym przypadku będzie 1. Otrzymujemy dla Y (OM'), koło przechodzące przez środek inwersji średnica tego koła wynosi $\frac{1}{X}$.

Metodę inwersji można stosować również do wielkości, przedstawionych w postaci symbolicznej, odnosząc wszystkie punkty krzywych do dwóch osi: rzeczywistej i urojonej.

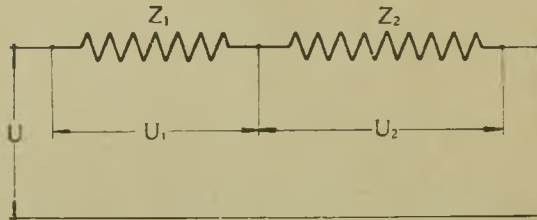
§ 16. Napięcia i oporności pozorne w szeregowym połączeniu.

Rozpatrzmy część obwodu, w której mamy dwie oporności pozorne Z_1 i Z_2 , połączone w szereg (rys. 38).

Gdy włączymy taki układ do napięcia o chwilowej wartości u , popłynie prąd o chwilowej wartości i .

Na opornościach Z_1 i Z_2 powstaną napięcia o chwilowych wartościach u_1 i u_2 , przy czym

$$u = u_1 + u_2$$



Rys. 38.

Przechodząc od wartości chwilowych napięć do wartości skutecznych, posiłkując się metodą symboliczną i mając na względzie,

$$\text{że } \hat{u} = U_m e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t}; \quad \hat{u}_1 = U_{1m} e^{j\varphi_1} e^{j\omega t}; \quad \hat{u}_2 = U_{2m} e^{j\varphi_2} \cdot e^{j\omega t},$$

gdzie φ , φ_1 i φ_2 oznaczają kąty przesunięcia faz napięć względem prądu i , otrzymamy po skróceniu przez $e^{j\omega t}$

$$U_m e^{j\varphi} = U_{1m} e^{j\varphi_1} + U_{2m} e^{j\varphi_2},$$

lub wprowadzając wartości skuteczne

$$U e^{j\varphi} = U_1 e^{j\varphi_1} + U_2 e^{j\varphi_2},$$

albo symbolicznie

$$\hat{U} = \hat{U}_1 + \hat{U}_2; \quad (17)$$

Czyli napięcie z zewnątrz przyłożone równa się sumie geometrycznej napięć w rozpatrywanej części obwodu.

Na rys. (39) $OA = U_1$, $AB = U_2$, $OB = U$.

Łatwo zauważyć, że naogół suma algebraiczna napięć poszczególnych części obwodu jest większa od napięcia z zewnątrz przyłożonego ($OA + AB > OB$). Wyjątek będziemy mieli w przypadku, gdy w obwodzie mamy do czynienia tylko z opornością rzeczywistą oraz gdy zachodzą rezonansy napięć, to znaczy gdy

$$\varphi = \varphi_1 = \varphi_2 = 0.$$

Dzieląc obie strony wzoru (17) przez wartość skuteczną I natężenia prądu, płynącego w rozpatrywanym obwodzie, będziemy mieli

$$\frac{\hat{U}}{\hat{I}} = \frac{\hat{U}_1}{\hat{I}} + \frac{\hat{U}_2}{\hat{I}},$$

ale

$$\frac{\hat{U}_1}{\hat{I}} = \hat{Z}_1, \quad \frac{\hat{U}_2}{\hat{I}} = \hat{Z}_2,$$

zaś iloraz $\frac{\hat{U}}{\hat{I}}$ stanowi oporność pozorną całej rozpatrywanej części obwodu, czyli oporność wypadkową, zastępującą dwie oporności pozorne Z_1 i Z_2 połączone szeregowo; oznaczając tę oporność pozorną przez Z , otrzymamy

$$\hat{Z} = \hat{Z}_1 + \hat{Z}_2;$$

a więc przy szeregowym łączeniu oporności pozornych należy je dodawać geometrycznie, aby otrzymać oporność pozorną wypadkową. Oczywiście, rozumowanie, które zastosowaliśmy do dwóch oporności pozornych i do dwóch napięć, możemy zastosować do dowolnej liczby tych wielkości, czyli ogólnie możemy napisać

$$\begin{aligned} \hat{U} &= \hat{U}_1 + \hat{U}_2 + \dots + \hat{U}_n; \\ \hat{Z} &= \hat{Z}_1 + \hat{Z}_2 + \dots + \hat{Z}_n; \\ \hat{I} &= \frac{\hat{U}}{\hat{Z}} = \frac{\hat{U}_1}{\hat{Z}_1} = \dots = \frac{\hat{U}_n}{\hat{Z}_n}. \end{aligned}$$

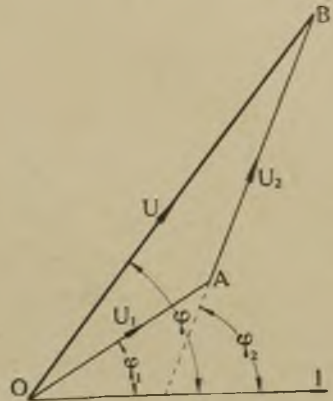
Stosując do oporności pozornych metodę symboliczną, będziemy mieli

$$\hat{Z}_1 = R_1 + jX_1,$$

$$\hat{Z}_2 = R_2 + jX_2,$$

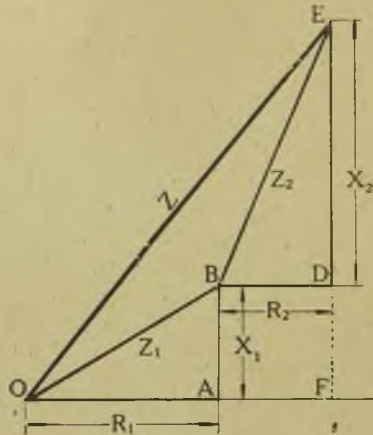
$$\hat{Z} = \hat{Z}_1 + \hat{Z}_2 = (R_1 + R_2) + j(X_1 + X_2).$$

$R_1 + R_2$ stanowi oporność rzeczywistą, $X_1 + X_2$ oporność urojoną wypadkowej oporności pozornej Z .



Rys. 39.

Na rys. 40 podane jest geometryczne zestawienie rozpatrywanych oporności, przyczem oporności X_1 i X_2 na tym wykresie



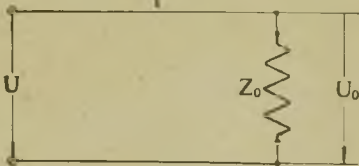
Rys. 40.

mają wartości dodatnie, to znaczy, że założona jest tutaj przewaga oporności indukcyjnej nad opornością pojemnościową.

§ 17. Spadek napięcia i strata napięcia w obwodach prądu zmiennego.

W poprzednim paragrafie wyjaśniliśmy, że przy prądzie zmiennym napięcie z zewnątrz przyłożone naogół jest równe sumie geometrycznej napięć w poszczególnych częściach obwodu. Rozpatrzmy obwód, składający się ze źródła prądu, na zaciskach którego mamy napięcie U , z odbiornika i przewodów łączących (rys. 41). Oznaczmy oporność pozorną odbiornika przez Z_o , zaś oporność pozorną obu przewodów łączących przez Z_p ; natężenie prądu, płynącego ze źródła przez odbiornik, niech będzie I ; wówczas

$$\hat{U} = \hat{I}(\hat{Z}_o + \hat{Z}_1) = \hat{I} \hat{Z}_o + \hat{I} \hat{Z}_1,$$



Rys. 41.

ale

$$\hat{I} \hat{Z}_o = \hat{U}_o, \text{ więc}$$

$$\hat{U} = \hat{U}_o + \hat{I} \hat{Z}_1.$$

Na wykresie (rys. 42), gdzie za początkową oś wzięty jest kierunek wektora natężenia prądu,

$$OA = IZ_o = U_o, AB = IZ_1, OB = U, OC = OB.$$

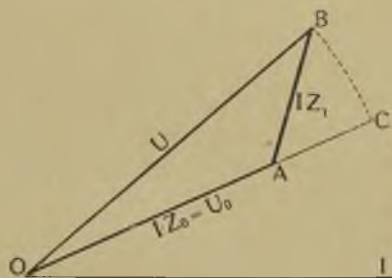
Różnicę geometryczną napięcia u źródła i napięcia na odbiorniku nazywamy spadkiem napięcia w przewodach, natomiast różnicę algebraiczną tych napięć nazywamy stratą napięcia. Tak więc spadek napięcia

$$\Delta \hat{U} = \hat{U} - \hat{U}_o,$$

zaś strata napięcia

$$\Delta U = U - U_o.$$

Na wykresie strata napięcia stanowi odcinek AC , zaś spadek napięcia odpowiada odcinkowi AB . Jak widać z wykresu $OA + AB > OB$, $OA + AC = OB$, czyli $AB > AC$, zatem spadek napięcia naogół jest większy od straty napięcia.



Rys. 42.

Jeżeli oporności czynne i bierne oznaczymy dla odbiornika przez R_o i X_o , zaś dla przewodów przez R_p i X_p , wówczas będziemy mieli

$$\hat{Z}_o = R_o + jX_o.$$

$$\hat{Z}_p = R_p + jX_p.$$

$$\hat{U}_o = I(R_o + jX_o)$$

$$\hat{U} = I[(R_o + R_p) + j(X_o + X_p)]$$

$$U_o = I\sqrt{R_o^2 + X_o^2}$$

$$U = I\sqrt{(R_o + R_p)^2 + (X_o + X_p)^2}$$

$$\Delta U = U - U_o = I[\sqrt{(R_o + R_p)^2 + (X_o + X_p)^2} - \sqrt{R_o^2 + X_o^2}]$$

$$\Delta \hat{U} = \hat{U} - \hat{U}_o = I(R_p + jX_p)$$

$$\text{mod. } \Delta \hat{U} = I\sqrt{R_p^2 + X_p^2}.$$

W szczególnym przypadku, gdy $X_o = X_p = 0$, $\Delta \hat{U} = \Delta U$.

§ 18. Prawa Kirchhoffa w zastosowaniu do prądów zmiennych.

Jak wiadomo, przy prądzie stałym stosujemy prawa Kirchhoffa, gdy zachodzi rozgałęzienie prądów. Przy prądzie zmiennym możemy również stosować prawa Kirchhoffa, wyrażone takimi samymi wzorami, gdy chodzi o wartości chwilowe; przytem należy zaznaczyć z góry, jakie kierunki na przewodach przyjmujemy za dodatnie. Więc w dowolnej chwili algebraiczna suma prądów powinna się równać zeru, jak również algebraiczna suma sił elektromotorycznych, działających w zamkniętym obwodzie, powinna się równać algebraicznej sumie iloczynów natężeń prądów przez odpowiednie oporności pozorne; czyli

$$\begin{aligned}\sum i_k &= 0, \\ \sum e_k &= \sum i_k z_k.\end{aligned}$$

W obwodach rozgałęzionych, każda gałąź posiada naogół inną oporność pozorną, wobec czego przesunięcia fazy prądu względem wspólnego wektora początkowego będą w każdej gałęzi inne. Oznaczając te kąty przesunięcia fazy odpowiednio przez $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$, będziemy mieli

$$\begin{aligned}i_1 &= I_{1m} \sin(\omega t + \varphi_1) \\ i_2 &= I_{2m} \sin(\omega t + \varphi_2) \\ &\dots \dots \dots \\ i_k &= I_{km} \sin(\omega t + \varphi_k).\end{aligned}$$

Przechodząc do wartości skutecznych tych prądów i biorąc za początkową oś kierunku wspólnego napięcia, będziemy mieli

$$\hat{I}_1 = I_1 e^{j\varphi_1}; \quad \hat{I}_2 = I_2 e^{j\varphi_2}; \quad \dots \quad \hat{I}_k = I_k e^{j\varphi_k}.$$

Jeżeli więc zechcemy stosować prawa Kirchhoffa do wartości skutecznych, musimy rozpatrywać omawiane wielkości symbolicznie, jako wektory. Wtedy warunkiem istnienia zależności wyżej podanych dla wartości chwilowych, będą następujące wzory dla wartości skutecznych

$$\sum \hat{I}_k = 0 \tag{18}$$

$$\sum \hat{E}_k = \sum \hat{I}_k \hat{Z}_k \tag{19}$$

czyli zamiast algebraicznych sum, mamy sumy geometryczne.

Przy stosowaniu tych wzorów należy ustalić jakie kierunki nadajemy chwilowym wartościom dodatnim sił elektromotorycznych oraz prądów, od tego bowiem zależeć będzie z jakim znakiem, dodatnim czy ujemnym, wejdzie każda z omawianych wielkości do równań układanych na podstawie rozszerzonych praw Kirchhoffa. Przy prądzie stałym działanie siły elektromotorycznej w obwodzie zewnętrznym przyjęto oznaczać w kierunku od bieguna dodatniego do bieguna ujemnego, czyli w kierunku ruchu dodatniej elektryczności; takiż sam kierunek dajemy prądowi. Przy rozważaniu wartości chwilowych prądów zmiennych, możemy również zastosować te same oznaczenia kierunków, odpowiadających biegunowości sił elektromotorycznych w pewnej określonej chwili.

W ten sposób przy prądzie zmiennym strzałki będą odpowiadały dodatnim wartościom chwilowym.

Tak np. na rys. (43) strzałki wskazują kierunek prądów i_1 oraz i_2 w chwili, gdy prądy te mają wartości dodatnie; według 1-go prawa Kirchhoffa

$$i = i_1 + i_2;$$



Rys. 43.



Rys. 44.

przechodząc zaś do wartości skutecznych, będziemy mieli (rys. 44)

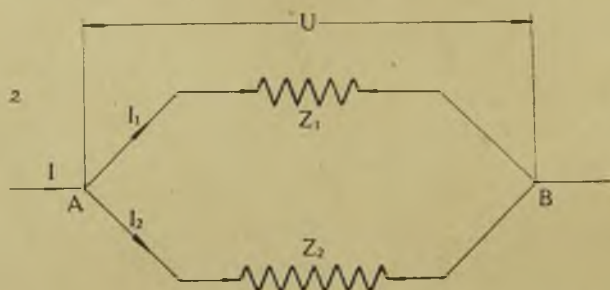
$$\hat{I} = \hat{I}_1 + \hat{I}_2,$$

przyczem znaki przy wektorach I , I_1 i I_2 bierzemy według dodatnich kierunków, założonych dla wartości chwilowych.

Poza tem dla wszystkich sił elektromotorycznych i prądów, przy wypisywaniu równań, wynikających z 2-go prawa Kirchhoffa, należy przyjąć jednakowy znak dodatni, idąc wzdłuż zamkniętego obwodu w kierunku ruchu wskazówki zegara lub odwrotnie.

Prof. S. Fryze wprowadza obok strzałek kierunkowych, wskazujących kierunek wartości chwilowych, strzałki kierunkowości. Dla zrozumienia tego terminu zwróćmy uwagę, że dla funkcji okresowo zmiennej w czasie, wartości chwilowe mają znak dodatni w ciągu części okresu, w szczególności, dla funkcji sinusoidalnej znak pozostaje bez zmiany w ciągu połowy okresu. Strzałki kierunkowości, niezależne od czasu, wskazują kierunek działania lub przebiegu w obwodzie rozpatrywanych wielkości dla dodatnich wartości chwilowych tych wielkości.

Rozpatrzmy dwie gałęzie (rys. 45) między węzłami *A* i *B*. Strzałki odpowiadają kierunkowi dodatnich wielkości chwilowych; oznaczając przez *U* napięcie między temi węzłami, będziemy mieli

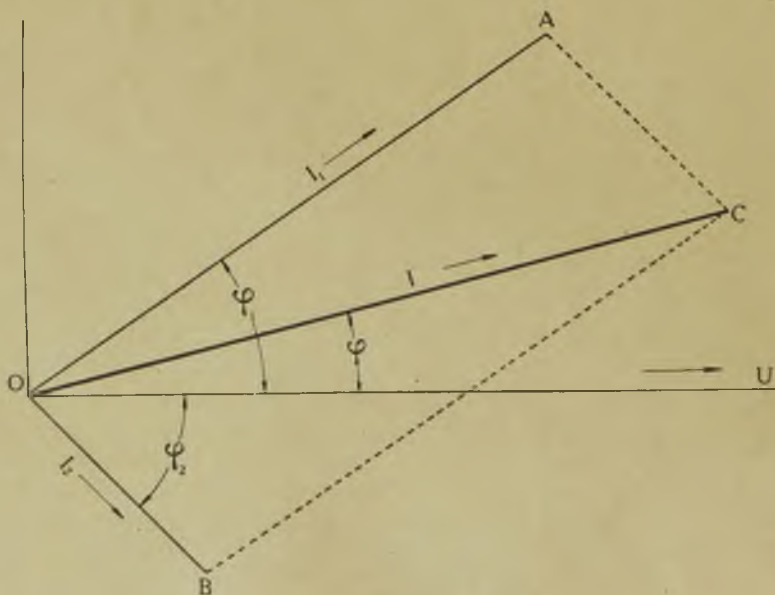


Rys. 45.

$$\hat{I} = \hat{I}_1 + \hat{I}_2; \quad \hat{I}_1 \hat{Z}_1 - \hat{I}_2 \hat{Z}_2 = 0 \quad \text{lub} \quad \hat{I}_1 \hat{Z}_1 = \hat{I}_2 \hat{Z}_2 = \hat{U}.$$

Na wykresie (rys. 46), gdzie φ , φ_1 i φ_2 oznaczają kąty przesunięcia faz względem napięcia *U* prądów *I*, *I*₁ i *I*₂,

$$OA = I_1, \quad OB = AC = I_2, \quad OC = I.$$



Rys. 46.

Biorąc rzuty prądów na początkową oś OU oraz na oś do niej prostopadłą, otrzymamy

$$I \cos \varphi = I_1 \cos \varphi_1 + I_2 \cos \varphi_2$$

$$I \sin \varphi = I_1 \sin \varphi_1 + I_2 \sin \varphi_2$$

co oznacza, że prądy czynne i prądy bierne dodają się do siebie algebraicznie. Podnosząc ostatnie wzory stronami do kwadratu i dodając do siebie, otrzymamy

$$I^2 = I_1^2 + I_2^2 + 2 I_1 I_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2),$$

skąd

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + 2 I_1 I_2 \cos (\varphi_1 - \varphi_2)}; \quad (20)$$

następnie dzieląc stronami drugi wzór przez pierwszy, będziemy mieli

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{I_1 \sin \varphi_1 + I_2 \sin \varphi_2}{I_1 \cos \varphi_1 + I_2 \cos \varphi_2} \quad (21)$$

§ 19. Oporności pozorne połączone równolegle.

Rozpatrzmy najpierw dwie oporności pozorne Z_1 i Z_2 , połączone równolegle jak na rys. 45. Jak widać z tego rysunku

$$\hat{I}_1 = \frac{\hat{U}}{\hat{Z}_1}, \quad \hat{I}_2 = \frac{\hat{U}}{\hat{Z}_2};$$

ponieważ

$$\hat{I} = \hat{I}_1 + \hat{I}_2,$$

przeto

$$\hat{I} = \hat{U} \left(\frac{1}{\hat{Z}_1} + \frac{1}{\hat{Z}_2} \right); \quad \frac{\hat{U}}{\hat{I}} = \frac{1}{\frac{1}{\hat{Z}_1} + \frac{1}{\hat{Z}_2}} = \frac{\hat{Z}_1 \hat{Z}_2}{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2}.$$

Stosunek $\frac{\hat{U}}{\hat{I}}$ stanowi pewną oporność pozorną, którą możemy rozpatrywać jako oporność równoważną dwóm danym opornościom; oznaczając tę równoważną oporność przez Z , będziemy mieli

$$\hat{Z} = \frac{\hat{Z}_1 \hat{Z}_2}{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2} \quad (22)$$

lub

$$\frac{1}{\hat{Z}} = \frac{1}{\hat{Z}_1} + \frac{1}{\hat{Z}_2} \quad (23)$$

Przy dowolnej ilości równolegle połączonych oporności pozornych $\hat{Z}_1, \hat{Z}_2, \dots, \hat{Z}_k$, otrzymalibyśmy dla oporności \hat{Z} , równoważnej danym, wzór

$$\frac{1}{\hat{Z}} = \frac{1}{\hat{Z}_1} + \frac{1}{\hat{Z}_2} + \dots + \frac{1}{\hat{Z}_k}$$

Odwrotności oporności pozornych stanowią przewodności pozorne; oznaczając przewodności pozorne poszczególnych gałęzi przez Y_1, Y_2, \dots, Y_k , zaś równoważną przewodność pozorną przez Y , otrzymamy

$$\hat{Y} = \hat{Y}_1 + \hat{Y}_2 + \dots + \hat{Y}_k$$

Widzimy stąd, że przy równoległym połączeniu oporności pozornych równoważna przewodność pozorna równa się geometrycznej sumie przewodności pozornych poszczególnych gałęzi.

Zbadajmy bardziej szczegółowo dwie równolegle połączone oporności pozorne; każda z nich składa się z oporności czynnej i oporności biernej; równoważna oporność pozorna będzie też zawierała obie te oporności: czynną i bierną. Podstawiając do wzoru (22) zamiast \hat{Z}, \hat{Z}_1 i \hat{Z}_2 ich wartości $R + jX, R_1 + jX_1, R_2 + jX_2$, będziemy mieli

$$\begin{aligned} R + jX &= \frac{(R_1 + jX_1)(R_2 + jX_2)}{(R_1 + R_2) + j(X_1 + X_2)} = \\ &= \frac{[R_1 R_2 - X_1 X_2 + j(R_1 X_2 + R_2 X_1)] [(R_1 + R_2) - j(X_1 + X_2)]}{(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2} = \\ &= \frac{R_1^2 R_2 + R_1 R_2^2 - R_1 X_1 X_2 - R_2 X_1 X_2 + R_1 X_1 X_2 + R_2 X_1 X_2 + R_1 X_2^2 + R_2 X_1^2}{(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2} + \\ &+ j \frac{R_1^2 X_2 + R_2^2 X_1 + R_1 R_2 X_1 + R_1 R_2 X_2 - R_1 R_2 X_1 - R_1 R_2 X_2 + X_1^2 X_2 + X_2^2 X_1}{(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2} = \\ &= \frac{R_1 Z_2^2 + R_2 Z_1^2}{(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2} + j \frac{X_1 Z_2^2 + X_2 Z_1^2}{(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2}, \end{aligned}$$

skąd

$$R = \frac{R_1 Z_2^2 + R_2 Z_1^2}{(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2} \quad (24)$$

$$X = \frac{X_1 Z_2^2 + X_2 Z_1^2}{(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2} \quad (25)$$

Równoważną oporność pozorną \hat{Z} znajdziemy ze wzoru $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$, co po podstawieniu wartości R i X i odpowiednich skrótach, daje

$$Z = \sqrt{\frac{(R_1^2 + X_1^2)(R_2^2 + X_2^2)}{(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2}} = \frac{Z_1 Z_2}{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2}}; \quad (26)$$

argument równoważnej oporności pozornej czyli kąt φ przesunięcia fazy prądu I względem napięcia U znajdujemy, dzieląc wzory (24) przez (25):

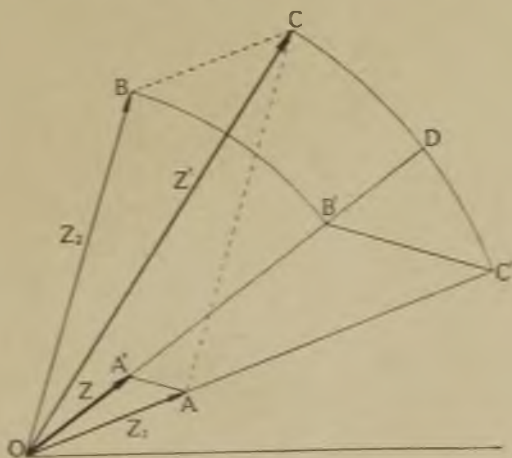
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X}{R} = \frac{X_1 Z_2^2 + X_2 Z_1^2}{R_1 Z_2^2 + R_2 Z_1^2} \quad (27)$$

W wyrażeniu tem mianownik zawsze jest większy od zera, w liczniku zaś mamy oporności bierne, które mogą mieć znaki dodatnie lub ujemne, w szczególności równać się zeru.

Równoważną oporność pozorną Z dla dwóch równolegle połączonych oporności pozornych Z_1 i Z_2 można znaleźć również wykresnie. W tym celu, biorąc dowolną oś OX , jako początkową, przeprowadzamy odcinki, wyrażające oporności pozorne $Z_1 = OA$ i $Z_2 = OB$ (rys. 47). Dodając je geometrycznie, otrzymamy $OC = Z'$.

Wzór (22) możemy przepisać w sposób następujący:

$$\frac{\hat{Z}}{Z_2} = \frac{\hat{Z}_1}{Z'}$$



Rys. 47.

Oznaczając kąty, które tworzą z osią OX oporności pozorne Z , Z_1 , Z_2 i Z' odpowiednio przez α , α_1 , α_2 i α' , możemy ostatni wzór napisać w postaci

$$\frac{Z e^{j\alpha}}{Z_2 e^{j\alpha_2}} = \frac{Z_1 e^{j\alpha_1}}{Z' e^{j\alpha'}}$$

lub

$$\frac{Z}{Z_2} e^{j(\alpha - \alpha_2)} = \frac{Z_1}{Z'} e^{j(\alpha_1 - \alpha')},$$

skąd

$$\frac{Z}{Z_2} = \frac{Z_1}{Z'},$$

$$\alpha - \alpha_2 = \alpha_1 - \alpha'.$$

Widzimy stąd, że \hat{Z} musi tworzyć z \hat{Z}_2 taki sam kąt, jaki \hat{Z}_1 tworzy z \hat{Z}' . Wobec tego odkładamy od OB wstecz (ponieważ \hat{Z}_1 przesunięte jest wstecz względem \hat{Z}') kąt BOD równy kątowi COA ; szukana oporność \hat{Z} powinna leżeć na prostej OD , znamy więc jej argument. W celu znalezienia jej modułu budujemy $\triangle OAA'$ podobny $\triangle OBC$, np. z punktu O łukiem koła o promieniu OC odcinamy na przedłużeniu prostej OA odcinek OC' ; w podobny sposób łukiem OB odcinamy na prostej OD odcinek OB' , mamy zatem:

$$OC' = OC = Z',$$

$$OB' = OB = Z_2;$$

łączymy następnie punkty B' i C' i z punktu A prowadzimy prostą równoległą do prostej $B'C'$ aż do przecięcia się z prostą OD w punkcie A' . Z podobieństwa trójkątów widzimy, że

$$\frac{OA'}{OB'} = \frac{OA}{OC'};$$

Podstawiając tu wartości powyższe, otrzymujemy

$$\frac{OA'}{Z_2} = \frac{Z_1}{Z'}.$$

Porównyując proporcję tę z poprzednią, widzimy, że odcinek $OA' = \hat{Z}$.

§ 20. Rezonans prądów.

Rozpatrując dwie oporności równoległe połączone, stwierdzi-
liśmy (wzór 27), że kąt przesunięcia fazy prądu I , dopływającego
do węzła, względem napięcia U między węzłami, może się równać
zeru czyli, że prąd I będzie w fazie z tem napięciem.

Jak widać z tego wzoru ten szczególny przypadek będzie
miał miejsce wówczas, gdy

$$X_1 Z_2^2 + X_2 Z_1^2 = 0$$

czyli inaczej, gdy

$$\frac{X_1}{Z_1^2} = - \frac{X_2}{Z_2^2} \quad (28)$$

Wyrazy, stojące po obu stronach ostatniego wzoru, stanowią
przewodności bierne; oznaczając je dla pierwszej gałęzi przez B_1 ,
zaś dla drugiej przez B_2 , będziemy mieli warunek

$$B_1 = - B_2.$$

Znaki przeciwne tych przewodności biernych wskazują, że
w jednej gałęzi powinna przeważać oporność indukcyjna, w dru-
giej zaś oporność pojemnościowa.

Mnożąc obie strony ostatniej równości przez wspólne obu
gałęziom napięcie U , otrzymamy

$$UB_1 = - UB_2;$$

wyrazy te stanowią bierne prądy, płynące w rozpatrywanych gałę-
ziach, czyli

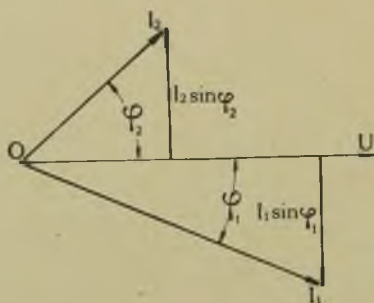
$$I_1 \sin \varphi_1 = - I_2 \sin \varphi_2. \quad (29)$$

A więc prąd dopływający do rozgałęzienia bę-
dzie w fazie z napięciem, istniejącem między wę-
złami rozgałęzienia, gdy prądy bierne, płynące
w obu gałęziach, będą sobie równe, lecz będą miały
znaki przeciwne; zjawisko to nazywamy rezonan-
sem prądów.

Na rys. 48 przedstawiony jest przypadek rezonansu prądów.
Prądy bierne $I_1 \sin \varphi_1$ i $I_2 \sin \varphi_2$ są sobie równe, lecz mają zna-
ki przeciwne.

Rozpatrzmy bardziej szczegółowo warunki możliwości pow-
stawania rezonansu prądów. Przypuśćmy, że w pierwszej gałęzi

mamy przewagę oporności indukcyjnej: $\omega L_1 > \frac{1}{\omega C_1}$, zaś w drugiej $\omega L_2 < \frac{1}{\omega C_2}$ mamy przewagę oporności pojemnościowej czyli, że w pierwszej gałęzi oporność bierna jest dodatnia, a w drugiej ujemna; wtedy, oznaczając



Rys. 48.

$$X_1 = \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} = X_L,$$

$$X_2 = \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} = -X_C,$$

możemy warunek rezonansu prądów na podstawie wzoru (28) przepisać w sposób następujący :

$$\frac{X_L}{R_1^2 + X_L^2} = \frac{X_C}{R_2^2 + X_C^2},$$

stąd

$$X_L (R_2^2 + X_C^2) - X_C (R_1^2 + X_L^2) = 0;$$

$$X_L^2 - \frac{R_2^2 + X_C^2}{X_C} X_L + R_1^2 = 0;$$

rozwiązując równanie względem X_L , otrzymamy

$$X_L = \frac{R_2^2 + X_C^2 \pm \sqrt{R_2^4 + 2R_2^2 X_C^2 + X_C^4 - 4R_1^2 X_C^2}}{2X_C}. \quad (30)$$

Jak widać z tego wzoru, nie zawsze można dobrać oporność X_L zależnie od X_C lub odwrotnie; możliwem to będzie w przypadku

$$(R_2^2 + X_C^2)^2 \geq 4R_1^2 X_C^2$$

czyli

$$R_2^2 + X_C^2 \geq 2R_1 X_C.$$

Jako przypadek szczególny rozpatrzmy dwie gałęzie, w których oporności rzeczywiste są jednakowe, a więc w jednej mamy dane wielkości R i L , w drugiej zaś R i C ; wtedy ze wzoru (30) będziemy mieli

$$X_L = \frac{(R^2 + X_C^2) \pm \sqrt{R^4 - X_C^2}}{2X_C},$$

skąd

$$1) \quad X_L = X_C,$$

$$2) \quad X_L = \frac{R^2}{X_C} \text{ lub } R = \sqrt{X_L X_C}.$$

Pierwsza równość odpowiada warunkowi rezonansu napięć gdy oporność indukcyjna i oporność pojemnościowa są sobie równe. Druga równość wskazuje, że oporność rzeczywista stanowi średnią geometryczną oporności indukcyjnej i pojemnościowej. W pierwszym przypadku

$$Z = \sqrt{\frac{(R^2 + X_L^2) \cdot (R^2 + X_L^2)}{4 R^2}} = \frac{R^2 + X_L^2}{2 R},$$

wobec czego

$$I = \frac{2 R}{R^2 + X_L^2} \cdot U;$$

W drugim przypadku

$$Z = \sqrt{\frac{\left(R^2 + \frac{R^4}{X_C^2}\right) (R^2 + X_C^2)}{4 R^2 + \left(X_C - \frac{R^2}{X_C}\right)^2}} = \sqrt{\frac{(R^2 X_C^2 + R^4) (R^2 + X_C^2)}{(X_C^2 + R^2)^2}} = R,$$

$$I = \frac{U}{R}$$

czyli prąd jest taki, jak gdybyśmy mieli prąd stały z opornością R .

§ 21. Przykłady na równoległe połączenie oporności pozornych.

I. R i L połączone równoległe.

$$\text{Mamy} \quad \hat{Z}_1 = Z_1 = R,$$

$$\hat{Z}_2 = j \omega L.$$

Równoważna oporność pozorna będzie

$$\begin{aligned} \hat{Z} &= \frac{\hat{Z}_1 \hat{Z}_2}{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2} = \frac{j R \omega L}{R + j \omega L} = \frac{j R \omega L (R - j \omega L)}{R^2 + (\omega L)^2} = \\ &= \frac{R (\omega L)^2 + j R^2 \omega L}{R^2 + (\omega L)^2}, \end{aligned}$$

skąd

$$Z = \frac{R \omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}},$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{R}{\omega L}.$$

II. R i C połączone równolegle.

Mamy $\hat{Z}_1 = Z_1 = R,$

$$\hat{Z}_2 = -j \frac{1}{\omega C},$$

$$\begin{aligned} \hat{Z} &= \frac{-j \frac{R}{\omega C}}{R - j \frac{1}{\omega C}} = \frac{-j R}{R \omega C - j} = \frac{-j R (R \omega C + j)}{(R \omega C)^2 + 1} = \\ &= \frac{R - j R^2 \omega C}{(R \omega C)^2 + 1}, \end{aligned}$$

skąd

$$Z = \frac{R}{\sqrt{(R \omega C)^2 + 1}},$$

$$\operatorname{tg} \varphi = -R \omega C.$$

III. L i C połączone równolegle.

Mamy $\hat{Z}_1 = j \omega L,$

$$\hat{Z}_2 = -j \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{j \omega C},$$

$$\hat{Z} = \frac{\frac{L}{C}}{j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)} = -j \frac{\frac{L}{C}}{\omega L - \frac{1}{\omega C}} = j \frac{\frac{L}{C}}{\frac{1}{\omega C} - \omega L};$$

gdym

$$\omega L > \frac{1}{\omega C}, Z = \frac{\frac{L}{C}}{\omega L - \frac{1}{\omega C}},$$

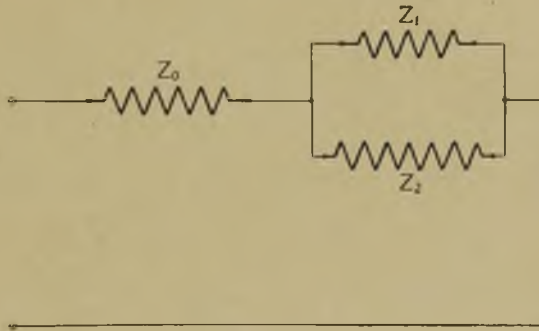
$$\operatorname{tg} \varphi = -\infty, \varphi = -\frac{\pi}{2};$$

gdy

$$\omega L < \frac{1}{\omega C}, \quad Z = \frac{\frac{L}{C}}{\frac{1}{\omega C} - \omega L},$$

$$\operatorname{tg} \varphi = +\infty, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

IV. Dwie oporności pozorne Z_1 i Z_2 są połączone równolegle, trzecia oporność pozorna Z_0 jest połączona w szereg do pierwszych dwóch (rys. 49). Jaka powinna być zależność pomiędzy temi opornościami przy spełnieniu następującego warunku: prąd, przepływający przez taki układ, powinien zachować swoją wartość, gdy jedna z dwóch równoległych gałęzi np. z opornością Z_1 zostanie przerwana? Tego rodzaju przypadek mamy np. wtedy, gdy



Rys. 49.

przy prądzie zmiennym łączymy szeregowo żarówki i gdy, w razie przepalenia się jednej z żarówek, chcemy, aby inne żarówki nie zgasły i aby natężenie prądu przy tem nie uległo zmianie. W tem zagadnieniu chodzi o to, by wartość oporności pozornej układu, zawierającego Z_1 , Z_2 i Z_0 , pozostała bez zmiany, gdy zostaną tylko oporności Z_2 i Z_0 . W pierwszym przypadku całkowita oporność wynosi $\hat{Z}_0 + \hat{Z}$, gdzie \hat{Z} stanowi oporność równoważną opornościom Z_1 i Z_2 połączonym równolegle; w drugim przypadku całkowita oporność wyniesie $\hat{Z}_0 + \hat{Z}_2$. Aby natężenie prądu w obu przypadkach pozostało bez zmiany (napięcie zzewnątrz przyłożone przyjmujemy jako stałe), trzeba, żeby moduły tych całkowitych oporności pozornych były równe sobie; argumenty w tem zagadnieniu roli nie odgrywają.

Wobec tego otrzymujemy warunek

$$\text{mod} (\hat{Z}_0 + \hat{Z}) = \text{mod} (\hat{Z}_0 + \hat{Z}_2). \quad (31)$$

Niech

$$\hat{Z}_0 = R_0 + j X_0$$

$$\hat{Z}_1 = R_1 + j X_1$$

$$\hat{Z}_2 = R_2 + j X_2,$$

wtedy, na podstawie wzorów (24) i (25), równoważna oporność \hat{Z} będzie się równała

$$\hat{Z} = \frac{R_1 Z_2^2 + R_2 Z_1^2}{(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2} + j \frac{X_1 Z_2^2 + X_2 Z_1^2}{(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2},$$

gdzie $Z_1 = \sqrt{R_1^2 + X_1^2}$, $Z_2 = \sqrt{R_2^2 + X_2^2}$.

Podstawiając symboliczne wartości \hat{Z}_0 , \hat{Z} i \hat{Z}_2 do wyżej podanego warunku (31), będziemy mieli

$$\text{mod} \left\{ R_0 + \frac{R_1 Z_2^2 + R_2 Z_1^2}{(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2} + j \left[X_0 + \frac{X_1 Z_2^2 + X_2 Z_1^2}{(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2} \right] \right\} =$$

$$= \text{mod} [R_0 + R_2 + j(X_0 + X_2)],$$

skąd

$$\left[R_0 + \frac{R_1 Z_2^2 + R_2 Z_1^2}{(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2} \right]^2 + \left[X_0 + \frac{X_1 Z_2^2 + X_2 Z_1^2}{(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2} \right]^2 = (R_0 + R_2)^2 + (X_0 + X_2)^2. \quad (32)$$

Taka więc powinna być zależność pomiędzy trzema rozpatrywanymi opornościami. Jeżeli wiadome są dwie oporności pozorne, dla znalezienia trzeciej będziemy mieli równanie nieokreślone, gdyż każda oporność pozorna ma dwie składowe, więc otrzymamy w rezultacie równanie z dwoma niewiadomymi, czyli nieskończoną ilość rozwiązań. Zwykle, z góry się zakłada, jaki ma być stosunek oporności biernej do oporności czynnej w poszukiwanej oporności pozornej i wtedy otrzymuje się równanie z jedną niewiadomą. Najłatwiej rozwiązuje się takie zagadnienie, gdy wiadome są oporności Z_1 i Z_2 , szukamy zaś oporności Z_0 z jej składowymi

R_0 i X_0 ; zakładając z góry $\frac{X_0}{R_0} = k$ i oznaczając we wzorze (32)

w skróceniu

$$\frac{R_1 Z_2^2 + R_2 Z_1^2}{(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2} = M,$$

$$\frac{X_1 Z_2^2 + X_2 Z_1^2}{(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2} = N,$$

przyczem M i N obliczają się na podstawie danych wielkości, otrzymamy z tego wzoru

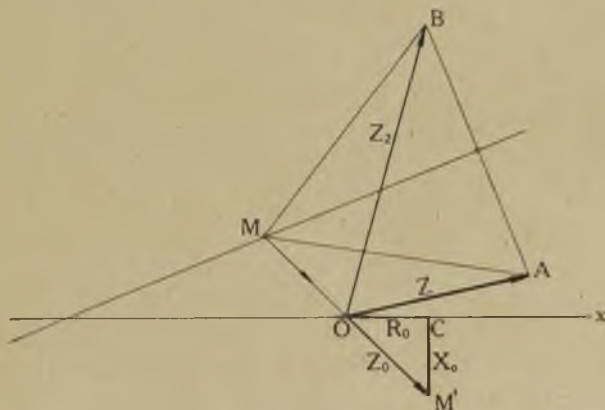
$$(R_0 + M)^2 + (k R_0 + N)^2 = (R_0 + R_2)^2 + (k R_0 + X_2)^2,$$

skąd po odpowiednich skrótach pozostanie równanie pierwszego stopnia, z którego ostatecznie znajdujemy

$$R_0 = \frac{R_2^2 + X_2^2 - M^2 - N^2}{2(M + kN - R_2 - kX_2)}.$$

Ponieważ sens mają tylko dodatnie wartości R_0 , przeto w razie otrzymania $R_0 < 0$, należy zmienić założoną z góry wartość k i dobrać ją tak, aby R_0 wypadło dodatnie.

Ostatnie zagadnienie łatwo można rozwiązać wykreślnie. W tym celu najpierw znajdujemy wykreślnie równoważną oporność pozorną Z sposobem, wskazanym w § 19 i podanym na rys. 47. Po znalezieniu Z wykreślamy względem dowolnej osi $O X$ (rys. 50) oporności pozorne Z i Z_2 ; na rysunku $OA = Z$, $OB = Z_2$.



Rys. 50.

Łączymy A z B i ze środka odcinka AB przeprowadzamy prostopadłą do tego odcinka. Rozpatrzmy dowolny punkt M na tej prostopadłej i połączmy go z początkiem O . Łatwo jest zauważyć, dodając geometrycznie, że

$$\vec{MO} + \vec{OA} = \vec{MA}$$

$$\vec{MO} + \vec{OB} = \vec{MB}$$

albo

$$\vec{MO} + \hat{Z} = \vec{MA}$$

$$\vec{MO} + \hat{Z}_2 = \vec{MB};$$

ale wartości MA i MB są równe sobie, więc

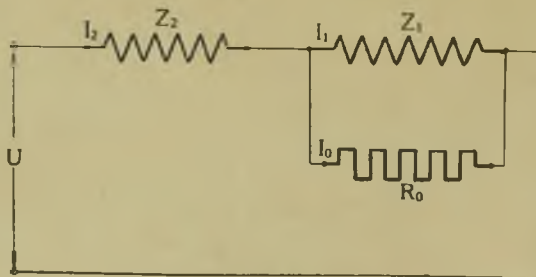
$$\text{mod}(\vec{MO} + \hat{Z}) = \text{mod}(\vec{MO} + \hat{Z}_2);$$

porównyując otrzymany rezultat ze wzorem (31) stwierdzamy, że $MO = Z_0$.

Składowe MO , czyli co jedno i to samo składowe OM' będą $R_0 = OC$ i $X_0 = CM'$. Otrzymujemy więc nieskończoną ilość punktów M czyli rozwiązań, ale te tylko będą miały sens, które dają dodatnią składową R_0 .

V. Otrzymywanie przesunięcia fazy o kąt prosty pomiędzy prądem i napięciem.

Nieraz zachodzi potrzeba otrzymania w pewnej części obwodu prądu, który względem napięcia z zewnątrz przyłożonego przesunięty jest w fazie o kąt prosty. Można to osiągnąć, włączając równolegle do tej części obwodu pewną oporność czynną. Na rys. 51 mamy dwie oporności pozorne Z_1 i Z_2 szeregowo połączone; rów-



Rys. 51.

nolegle do oporności Z_1 przyłączona jest oporność rzeczywista R_0 . Postaramy się określić R_0 tak, aby prąd I_1 , płynący przez część obwodu z opornością Z_1 był przesunięty w fazie o kąt prosty względem napięcia U z zewnątrz przyłożonego. Oznaczając przez I_2

prąd, płynący przez Z_2 , oraz przez I_0 prąd, płynący przez R_0 , będziemy mieli

$$\begin{aligned}\hat{I}_2 &= \hat{I}_1 + \hat{I}_0 \\ \hat{I}_1 \hat{Z}_1 &= \hat{I}_0 R_0 \\ \hat{U} &= \hat{I}_2 \hat{Z}_2 + \hat{I}_1 \hat{Z}_1;\end{aligned}$$

z drugiego wzoru określamy

$$\hat{I}_0 = \frac{\hat{I}_1 \hat{Z}_1}{R_0}$$

i podstawiamy do pierwszego, wtedy

$$\hat{I}_2 = \hat{I}_1 + \frac{\hat{I}_1 \hat{Z}_1}{R_0} = \hat{I}_1 \left(\frac{R_0 + \hat{Z}_1}{R_0} \right).$$

Podstawiając to do wartości \hat{U} , otrzymujemy

$$\begin{aligned}\hat{U} &= \hat{I}_1 \left(\frac{R_0 \hat{Z}_2 + \hat{Z}_1 \hat{Z}_2}{R_0} \right) + \hat{I}_1 \hat{Z}_1 = \\ &= \hat{I}_1 \left\{ \frac{R_0 \hat{Z}_1 + R_0 \hat{Z}_2 + \hat{Z}_1 \hat{Z}_2}{R_0} \right\}.\end{aligned}$$

Każdą z oporności \hat{Z}_1 i \hat{Z}_2 możemy wyrazić tak

$$\begin{aligned}\hat{Z}_1 &= R_1 + j X_1, \\ \hat{Z}_2 &= R_2 + j X_2.\end{aligned}$$

Podstawiając wartości te do wzoru poprzedniego, otrzymamy

$$\begin{aligned}\hat{U} &= \frac{\hat{I}_1}{R_0} \left\{ R_0 R_1 + j R_0 X_1 + R_0 R_2 + j R_0 X_2 + R_1 R_2 - X_1 X_2 + \right. \\ &\quad \left. + j R_1 X_2 + j R_2 X_1 \right\}.\end{aligned}$$

Grupując w tym wzorze części rzeczywiste i urojone, otrzymamy

$$\begin{aligned}\hat{U} &= \hat{I}_1 \left\{ \frac{R_0 R_1 + R_0 R_2 + R_1 R_2 - X_1 X_2}{R_0} + \right. \\ &\quad \left. + j \frac{R_1 X_2 + R_2 X_1 + R_0 X_2 + R_0 X_1}{R_0} \right\}.\end{aligned}$$

Jeżeli wzór ten napiszemy pod postacią

$$\hat{U} = \hat{I}_1 (R + j X),$$

wtedy przesunięcie fazy pomiędzy prądem I_1 i napięciem U otrzymamy ze wzoru

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X}{R},$$

gdzie φ oznacza kąt przesunięcia fazy prądu I_1 względem napięcia U .

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \text{ dla } R = 0.$$

Warunek zagadnienia będzie więc spełniony, jeżeli

$$\frac{R_0 R_1 + R_0 R_2 + R_1 R_2 - X_1 X_2}{R_0} = 0,$$

czyli

$$R_0 R_1 + R_0 R_2 + R_1 R_2 - X_1 X_2 = 0,$$

skąd

$$R_0 = \frac{X_1 X_2 - R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Oczywiście, że tylko wtedy można znaleźć realną wartość na R_0 , gdy $X_1 X_2 > R_1 R_2$.

ROZDZIAŁ IV.

PRĄDY WIELOFAZOWE.

§ 22. Określenie i powstawanie prądu wielofazowego.

W § 1 rozpatrzyliśmy powstawanie siły elektromotorycznej o przebiegu sinusoidalnym w czasie; ma to miejsce, gdy przewodnik np. w postaci ramki z drutu obraca się z jednakową prędkością w jednostajnym polu magnetycznym, przecinając przy tem strumień magnetyczny. Jeżeli zamiast jednego przewodnika będziemy w taki sam sposób obracali dowolną ich ilość, powstanie wówczas szereg sił elektromotorycznych o przebiegach sinusoidalnych w czasie, które, w zależności od rozmieszczenia przewodników, będą się różniły ze sobą w fazie. Układ, w którym działają siły elektromotoryczne, różniące się ze sobą w fazie nazywamy układem wielofazowym.

Jeżeli przewodniki tworzą układ taki, że są rozmieszczone symetrycznie naokoło osi i układ ten obraca się w polu magnetycznym, wówczas taki układ wielofazowy nazywamy symetrycznym.

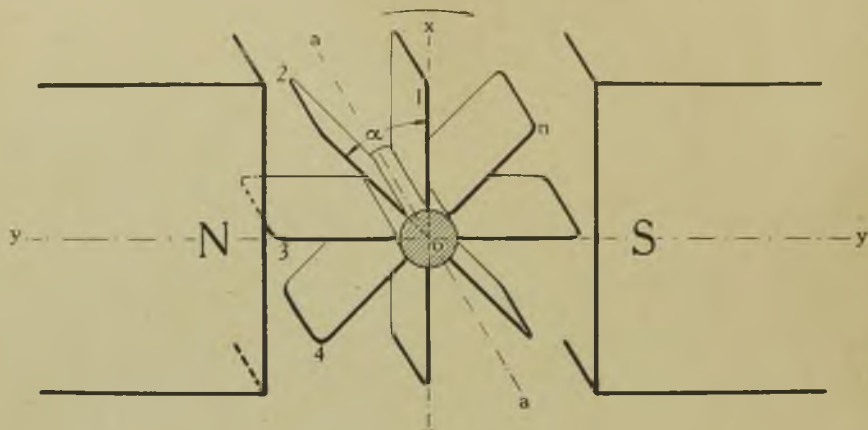
Na rys. 52 mamy symetryczny układ n przewodników np. w postaci ramek, rozmieszczonych naokoło osi w jednakowych odstępach. Kąt pomiędzy dwiema sąsiednimi ramkami będzie miał wartość

$$\alpha = \frac{2\pi}{n}.$$

Załóżmy, że cały ten układ obraca się z jednakową prędkością kątową w jednostajnym polu magnetycznym w kierunku wskazanym przez strzałkę i że rozpoczynamy liczenie czasu, gdy układ znajduje się w położeniu podanem na rysunku. W chwili $t = 0$, siła elektromotoryczna w 1-ej ramce będzie $= 0$, jej wartość chwilowa e_1 w chwili t będzie wyrażona wzorem

$$e_1 = E_m \sin \omega t.$$

Łatwo zauważyć, że siły elektromotoryczne, powstające w następujących kolejnych ramkach, będą opóźnione w fazie względem pierwszej odpowiednio o kąty α , 2α $(n - 1)\alpha$; zakładając, że wszystkie przewodniki (ramki) są jednakowe i że wobec



Rys. 52.

tego największe wartości powstających w nich sił elektromotorycznych będą również jednakowe, otrzymamy dla wartości chwilowych następujące wzory:

$$\begin{aligned}
 e_1 &= E_m \sin \omega t, \\
 e_2 &= E_m \sin (\omega t - \alpha), \\
 e_3 &= E_m \sin (\omega t - 2\alpha), \\
 &\dots \dots \dots \\
 e_n &= E_m \sin [\omega t - (n - 1)\alpha].
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Gdybyśmy obracali nasz układ w przeciwnym kierunku, mielibyśmy nie opóźnienia, lecz przyspieszenia w fazie wszystkich następujących sił elektromotorycznych i w naszych wzorach musielibyśmy postawić przed α , 2α i t. d. znak $+$.

Taki sam rezultat otrzymalibyśmy niezależnie od rodzaju przewodników; np. gdyby to były całe uzwojenia. Poszczególne przewodniki lub uzwojenia w takim układzie przyjęto nazywać w skróceniu fazami. Mówimy więc: siła elektromotoryczna, napięcie, natężenie prądu pierwszej, drugiej i t. d. fazy, odnosząc te terminy nie tylko do źródła prądu, lecz również i do odbiorników, połączonych z poszczególnymi uzwojeniami prądnicy, dającej prądy wielofazowe.

§ 23. Twierdzenie matematyczne o sumie wartości chwilowych wielkości układu wielofazowego symetrycznego.

W dalszych rozważaniach powoływać się będziemy często na twierdzenie następujące: jeżeli $\alpha = \frac{2\pi}{n}$, gdzie n jest liczbą całkowitą > 1 , wtedy

$$\sin x + \sin(x \pm \alpha) + \sin(x \pm 2\alpha) + \dots + \sin[x \pm (n-1)\alpha] = 0.$$

Opierając się na wzorach Eulera, możemy napisać

$$\sin z = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j}$$

oraz

$$\cos z = \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2},$$

gdzie

$$j = \sqrt{-1}.$$

Powyzszą sumę możemy wobec tego przepisać tak:

$$\frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} + \frac{e^{j(x+\alpha)} - e^{-j(x+\alpha)}}{2j} + \dots +$$

$$+ \frac{e^{j[x+(n-1)\alpha]} - e^{-j[x+(n-1)\alpha]}}{2j}.$$

Po uporządkowaniu wyrazów otrzymamy

$$\left\{ \frac{e^{jx} + e^{j(x+\alpha)} + \dots + e^{j[x+(n-1)\alpha]}}{2j} \right\} -$$

$$- \left\{ \frac{e^{-jx} + e^{-j(x+\alpha)} + \dots + e^{-j[x+(n-1)\alpha]}}{2j} \right\}.$$

Widzimy, że wyrazy, stojące w licznikach, stanowią postępy geometryczne. Suma, stojąca w liczniku w pierwszym nawiasie,

$$S_1 = \frac{e^{j(x+n\alpha)} - e^{jx}}{e^{j\alpha} - 1},$$

zaś suma, stojąca w liczniku w drugim nawiasie,

$$S_2 = \frac{e^{-j(x+n\alpha)} - e^{-jx}}{e^{-j\alpha} - 1}.$$

Wobec tego rozpatrywany wzór po sprowadzeniu do wspólnego mianownika przyjmie postać

$$\frac{e^{j[x+(n-1)\alpha]} - e^{-(jx+n\alpha)} - e^{j(x-\alpha)} + e^{jx} - e^{-j[x+(n-1)\alpha]} + e^{-j(x+n\alpha)} + e^{-j(x-\alpha)} - e^{-jx}}{(2 - e^{j\alpha} - e^{-j\alpha})2j}$$

Grupując wyrazy w liczniku, otrzymamy

$$\frac{\sin[x+(n-1)\alpha] - \sin(x+n\alpha) - \sin(x-\alpha) + \sin x}{2 - 2\cos\alpha}$$

Biorąc pod uwagę, że $\alpha = \frac{2\pi}{n}$, $(n-1)\alpha = n\alpha - \alpha = 2\pi - \alpha$ i że wobec tego pierwszy wyraz licznika skraca się z trzecim, drugi skraca się z czwartym, otrzymujemy w rezultacie, że licznik = 0. Mianownik nie jest równy zeru dla $n > 1$, gdyż wtedy $0 < \alpha < \pi$; natomiast dla $n = 2$ otrzymuje się wyraz nieokreślony $\frac{0}{0}$; łatwo jednakże sprawdzić, że wtedy również

$$\sin x + \sin(x \pm \alpha) = \sin x + \sin(x \pm \pi) = 0.$$

Wobec tego rozpatrywana suma sinusów zawsze będzie równa zeru dla całkowitego $n > 1$.

Zupełnie tak samo można dowieść, że

$$\cos x + \cos(x \pm \alpha) + \cos(x \pm 2\alpha) + \dots + \cos[x + (n-1)\alpha] = 0,$$

gdzie

$$\alpha = \frac{2\pi}{n}; \quad n > 1.$$

Rozpatrując wartości chwilowe sił elektromotorycznych w symetrycznym układzie wielofazowym, podane we wzorze (1), widzimy, że na podstawie dowiedzionego twierdzenia, ich suma równa się zeru.

§ 24. Układy wielofazowe.

Rozpatrując ogólny wzór (1) dla wartości chwilowych sił elektromotorycznych wielofazowego układu symetrycznego, widzimy, że dla $n = 1$ otrzymujemy zwykły prąd sinusoidalny jedno-

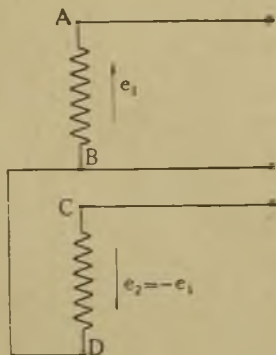
fazowy; dla $n=2$ otrzymamy dwie siły elektromotoryczne równe sobie, lecz znaków przeciwnych, czyli przeciwnie skierowane, gdyż

$$e_1 = E_m \sin \omega t,$$

$$e_2 = E_m \sin (\omega t - \pi) = -e_1.$$

Schematycznie układ taki mamy na rys. 53 w postaci dwóch uzwojeń — faz.

Gdybyśmy połączyli te uzwojenia w punktach B i C , to między punktami A i D nie mielibyśmy napięcia, gdyż obie siły elektromotoryczne wzajemnie się znośzą; natomiast, jeżeli połączymy uzwojenia w punktach D i B , jak na rysunku, wtedy oba uzwojenia stanowić będą jakby jedno, w którym powstaje siła elektromotoryczna równa $2e_1$, przyczem przesunięcia faz niema.



Rys. 53.

Tego rodzaju układ, jako dwufazowy (połączenie D z B), może być stosowany wówczas, gdy chcemy mieć w sieci dwa napięcia. Przeprowadzamy wówczas trzy przewody: od punktu A , od wspólnego punktu $B D$ i od punktu C ; odbiorniki, włączone między skrajnymi przewodami, będą pod działaniem siły elektromotorycznej równej $2e_1$, zaś odbiorniki, włączone pomiędzy jednym ze skrajnych przewodów i przewodem środkowym, będą pod działaniem siły elektromotorycznej równej e_1 .

Jest to układ jednofazowy trójprzewodowy.

Dla $n=3$ otrzymamy układ trójfazowy. Będziemy mieli w tym przypadku następujące wartości sił elektromotorycznych

$$e_1 = E_m \sin \omega t,$$

$$e_2 = E_m \sin \left(\omega t - \frac{2}{3} \pi \right),$$

$$e_3 = E_m \sin \left(\omega t - \frac{4}{3} \pi \right) = E_m \sin \left(\omega t + \frac{2}{3} \pi \right).$$

Schematycznie układ trójfazowy przedstawiony jest na rys. 54. Dla $n=4$ otrzymujemy układ czterofazowy. Dla sił elektro-

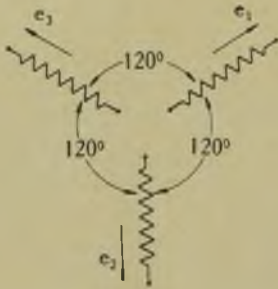
motorycznych w poszczególnych fazach wartości chwilowe będą następujące (rys. 55)

$$e_1 = E_m \sin \omega t,$$

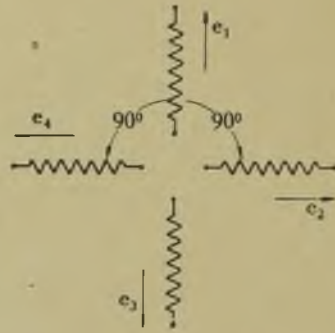
$$e_2 = E_m \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right),$$

$$e_3 = E_m \sin (\omega t - \pi) = -e_1$$

$$e_4 = E_m \sin \left(\omega t - \frac{3}{2} \pi \right) = -e_2.$$

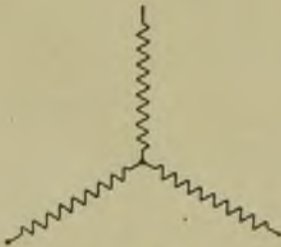


Rys. 54.

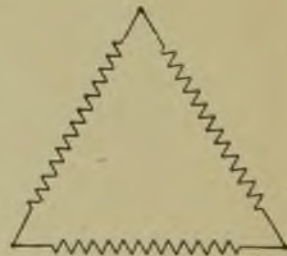


Rys. 55.

Układ, w którym fazy działają samodzielnie, nazywamy układem nieskojarzonym. W przeciwnym razie otrzymujemy układ skojarzony. Skojarzenia, czyli połączenia faz, bywają następujące:



Rys. 56.



Rys. 57.

1) w gwiazdę czyli g w i a z d o w e, kiedy początki wszystkich faz łączy w jednym punkcie (rys. 56); wielobokowe (rys. 57), kiedy początek 1-ej fazy łączy z końcem drugiej, początek drugiej z końcem trzeciej i t. d., wreszcie początek ostatniej

z końcem 1-ej. Ostatnie połączenie stanowi układ zamknięty, pierwsze — układ otwarty. Połączenia gwiazdowe i wielobokowe możemy dokonać nie tylko na uzwojeniach źródła prądu czyli prądnicy, lecz również na odbiornikach, do których doprowadzamy prądy, idące od poszczególnych faz prądnicy i które odpowiednio ze sobą łączymy.

Rozpatrując napięcia i prądy w układach wielofazowych, musimy odróżniać te wielkości w poszczególnych fazach oraz między fazami i w przewodach, łączących fazy źródła prądu z odbiornikami. Pierwsze nazywamy fazowemi, mówimy więc o napięciu fazowym i o prądzie fazowym; w drugim przypadku napięcie, które mamy między fazami, nazywamy napięciem międzyfazowym; w trzecim przypadku mówimy o napięciu międzyprzewodowym. Tak samo odróżniamy prądy fazowe i prądy przewodowe.

Napięcia na poszczególnych fazach układu wielofazowego zależne są z jednej strony od siły elektromotorycznej, działającej w rozpatrywanej fazie, z drugiej zaś strony od prądu, płynącego w tej fazie i od jej oporności. Jeżeli prąd nie jest pobierany, napięcie jest równe sile elektromotorycznej, w przeciwnym przypadku jest ono zmniejszone o iloczyn natężenia prądu przez oporność fazy. W prądnicach wielofazowych zwykle uzwojenia, stanowiące poszczególne fazy, są jednakowe, wobec czego i siły elektromotoryczne, powstające we wszystkich fazach, różnią się tylko kątami przesunięcia faz; natomiast napięcia na poszczególnych fazach będą miały jednakowe wartości i różniły się tylko kątami przesunięcia faz w dwóch przypadkach: albo, gdy prąd w żadnej fazie nie jest pobierany, albo, gdy we wszystkich fazach będą pobierane jednakowe prądy, czyli jak mówimy, wszystkie fazy będą jednakowo obciążone i gdy uzwojenia mają jednakowe oporności pozorne.

W następnych rozumowaniach będziemy mieli na względzie najpierw te przypadki, gdy napięcia na poszczególnych fazach mają te same wartości największe lub skuteczne, różnią się zaś tylko kątami przesunięcia faz.

Rozpatrzmy układ gwiazdowy np. prądu trójfazowego (rys. 58). Wartości chwilowe napięć w 3-ch fazach wynoszą u_1 , u_2 , u_3 . Między końcami faz 1-ej i 2-ej istnieje napięcie międzyfazowe

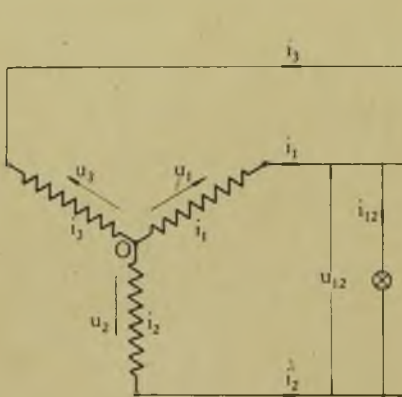
$$u_{12} = u_1 - u_2.$$

Przez odbiornik, włączony pomiędzy temi fazami, popłynie prąd i_{12} . W chwili, gdy $u_1 > u_2$, prąd płynie tak, jak wskazuje rysunek, zaś w chwili, gdy $u_2 > u_1$, prąd płynie w kierunku prze-

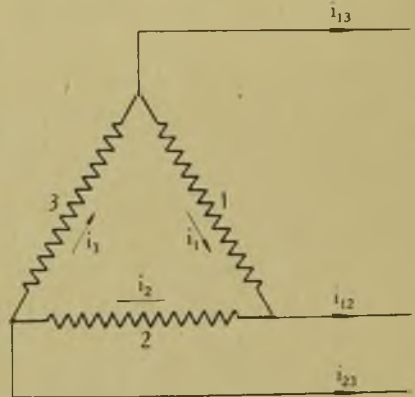
ciwnym. Natężenie prądu w obu fazach w tym przypadku będzie takie same jak i w odbiorniku:

$$i_{12} = i_1 = i_2.$$

Widzimy stąd, że w układzie gwiazdowym różnią się pomiędzy sobą tylko napięcia międzyfazowe i fazowe. Napięcia międzyfazowe nazywamy w tym przypadku skojarzonym.



Rys. 58.



Rys. 59.

Gdy mamy układ wielobokowy, w tym przypadku trójkątny (rys. 59), wówczas, jak to łatwo zauważyć, napięcie międzyfazowe równe jest napięciu fazowemu; natomiast prąd przewodowy równy jest różnicy odpowiednich prądów fazowych, np.

$$i_{12} = i_1 - i_2.$$

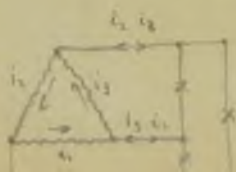
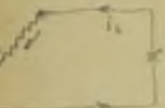
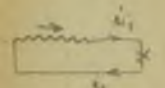
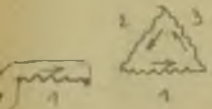
Rozpatrzmy wielofazowy układ symetryczny z napięciami na fazach, różniących się tylko kątami przesunięcia faz, a więc

$$u_1 = U_m \sin \omega t,$$

$$u_2 = U_m \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{n} \right),$$

.....

$$u_n = U_m \sin \left[\omega t - (n-1) \frac{2\pi}{n} \right].$$



$$i_{12} = i_1 - i_2$$

$$i_{23} = i_2 - i_3$$

$$i_{13} = i_3 - i_1$$

Wyprowadźmy ogólny wzór na napięcie skojarzone. Weźmy w tym celu dowolne dwie sąsiednie fazy k i $k+1$:

$$u_k = U_m \sin \left[\omega t - (k-1) \frac{2\pi}{n} \right],$$

$$u_{k+1} = U_m \sin \left[\omega t - k \frac{2\pi}{n} \right].$$

Odejmując stronami drugi wzór od pierwszego, otrzymamy dla napięcia skojarzonego, które oznaczymy przez u_p

$$u_p = u_k - u_{k+1} = U_m \left\{ \sin \left[\omega t - (k-1) \frac{2\pi}{n} \right] - \sin \left[\omega t - k \frac{2\pi}{n} \right] \right\}.$$

Przekształcając różnicę sinusów na zasadzie wzoru

$$\sin m - \sin n = 2 \sin \frac{m-n}{2} \cos \frac{m+n}{2},$$

otrzymamy

$$\begin{aligned} u_p &= 2 U_m \sin \frac{\pi}{n} \cos \left[\omega t - (2k-1) \frac{\pi}{n} \right] = \\ &= 2 U_m \sin \frac{\pi}{n} \sin \left[\omega t + \frac{\pi}{2} - (2k-1) \frac{\pi}{n} \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

Widzimy stąd, że napięcie u_p jest przesunięte w fazie względem napięć fazowych; wartość maksymalna tego napięcia wynosi

$$U_{pm} = 2 U_m \sin \frac{\pi}{n},$$

zaś wartość skuteczna

$$U_p = 2 U_f \sin \frac{\pi}{n}, \quad (3)$$

gdzie U_f stanowi napięcie fazowe.

Analogicznie możemy wyprowadzić wzór dla natężenia prądu skojarzonego w przypadku układu wielobokowego, gdy obciążenie faz jest jednakowe; otrzymamy wtedy

$$I_p = 2 I_f \sin \frac{\pi}{n}, \quad (4)$$

gdzie I_f , stanowi natężenie prądu, płynącego w dowolnej fazie.

§ 25. Moc prądów wielofazowych.

Rozpatrzmy układ symetryczny n fazowy z jednakowym obciążeniem wszystkich faz.

Wartości chwilowe napięć będą

$$u_1 = U_m \sin \omega t,$$

$$u_2 = U_m \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{n} \right),$$

.....

$$u_k = U_m \sin \left[\omega t - (k-1) \frac{2\pi}{n} \right],$$

.....

$$u_n = U_m \sin \left[\omega t - (n-1) \frac{2\pi}{n} \right].$$

Każdy prąd fazowy względem swego napięcia będzie przesunięty w fazie, np. o kąt φ wstecz, wtedy wartości chwilowe odpowiednich prądów będą

$$i_1 = I_m \sin (\omega t - \varphi),$$

$$i_2 = I_m \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{n} - \varphi \right),$$

.....

$$i_k = I_m \sin \left[\omega t - (k-1) \frac{2\pi}{n} - \varphi \right],$$

.....

$$i_n = I_m \sin \left[\omega t - (n-1) \frac{2\pi}{n} - \varphi \right].$$

Oznaczmy wartość chwilową mocy prądu w fazie k przez p_k . Wówczas możemy napisać

$$p_k = u_k i_k = U_m I_m \sin \left[\omega t - (k-1) \frac{2\pi}{n} \right] \sin \left[\omega t - (k-1) \frac{2\pi}{n} - \varphi \right].$$

Na podstawie wzoru

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} \left[\cos (x - y) - \cos (x + y) \right],$$

będziemy mieli

$$p_k = \frac{U_m I_m}{2} \left\{ \cos \varphi - \cos \left[2\omega t - 2(k-1) \frac{2\pi}{n} - \varphi \right] \right\}.$$

W układzie mamy n faz, a więc k zmienia się od 1 do n . Ponieważ dla $n > 1$, na podstawie twierdzenia z § 23,

$$\sum_{k=1}^{k=n} \cos \left[2\omega t - 2(k-1) \frac{2\pi}{n} - \varphi \right] = 0,$$

więc wartość chwilowa mocy prądu w całym układzie będzie

$$p = n \frac{U_m I_m}{2} \cos \varphi = n UI \cos \varphi.$$

Widzimy stąd, że wartość chwilowa mocy układu nie zmienia się z biegiem czasu, czyli ma wartość stałą. Układy, w których to ma miejsce, nazywamy układami wyrównanymi. Oczywiście, że w tym przypadku moc średnia P będzie miała taką samą wartość, co i moc chwilowa. Każdy układ wielofazowy symetryczny jest układem wyrównanym.

§ 26. Prąd trójfazowy.

Rozpatrzmy bardziej szczegółowo najwięcej rozpowszechniony w praktyce prąd trójfazowy.

Jeżeli mamy połączenie gwiazdowe, to ze wzorów (2), (3) i (4) wynika:

dla $k = 1$, czyli między 1-ą i 2-ą fazą

$$u_{12} = 2 U_m \sin \frac{\pi}{3} \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \right) = U_m \sqrt{3} \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{6} \right);$$

dla $k = 2$, czyli między 2-ą i 3-ą fazą

$$u_{23} = U_m \sqrt{3} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right);$$

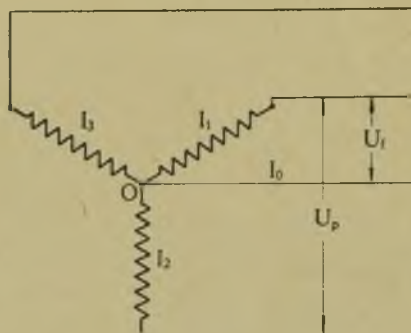
dla $k = 3$, czyli między 3-ą i 1-ą fazą

$$u_{31} = U_m \sqrt{3} \left(\omega t - \frac{7}{6} \pi \right) = U_m \sqrt{3} \sin \left(\omega t + \frac{5}{6} \pi \right);$$

$$U_p = U_f \sqrt{3}; \quad I_p = I_f.$$

Dla połączenia wielobokowego czyli trójkątnego będziemy mieli między fazami napięcie równe napięciu fazowemu, zaś prąd przewodowy będzie skojarzony i przy jednakowym obciążeniu trzech faz

$$I_p = I_f \sqrt{3}.$$



Rys. 60.

W układzie gwiazdowym wprowadzamy czasami oprócz trzech przewodów, idących od końców trzech faz, czyli przewodów fazowych, jeszcze czwarty przewód, idący od punktu łączącego początki wszystkich faz, czyli tak zwanego punktu zerowego, który często bywa uziemiony; przewód ten nazywamy przewodem zerowym (rys. 60). Włączając odbiornik między dowolnym przewodem

fazowym i przewodem zerowym, otrzymamy na nim napięcie fazowe, zaś, włączając odbiornik między dwa przewody fazowe, będziemy mieli na nim napięcie międzyprzewodowe — skojarzone.

Oznaczając przez I_1, I_2, I_3 wartości skuteczne prądów, płynących w poszczególnych fazach, zaś przez I_0 wartość skuteczną prądu, płynącego w przewodzie zerowym, będziemy mieli na zasadzie I-go prawa Kirchhoffa

$$\hat{I}_1 + \hat{I}_2 + \hat{I}_3 + \hat{I}_0 = 0$$

czyli

$$\hat{I}_0 = -\hat{I}_1 - \hat{I}_2 - \hat{I}_3.$$

W przypadku szczególnym, gdy wszystkie fazy są jednakowo obciążone i prądy będą się różniły tylko przesunięciem faz o $\pm 120^\circ$, będziemy mieli dla wartości chwilowych

$$i_1 = I_m \sin \omega t; \quad i_2 = I_m \sin (\omega t - 120^\circ); \quad i_3 = I_m \sin (\omega t + 120^\circ).$$

Na podstawie twierdzenia z § 23

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0,$$

a więc również

$$\tilde{I}_1 + \tilde{I}_2 + \tilde{I}_3 = 0;$$

w tym przypadku przez przewód zerowy żaden prąd nie będzie przepływał.

Jeżeli zaś obciążenie trzech faz nie jest jednakowe, wówczas

$$\tilde{I}_1 + \tilde{I}_2 + \tilde{I}_3 \neq 0; \quad \tilde{I}_0 \neq 0$$

i przez przewód zerowy będzie przepływał prąd naogół o mniejszym natężeniu, niż natężenia prądów fazowych.

Gdy mamy połączenie trójkątne (rys. 61),

$$\tilde{I}_{12} = \tilde{I}_1 - \tilde{I}_2,$$

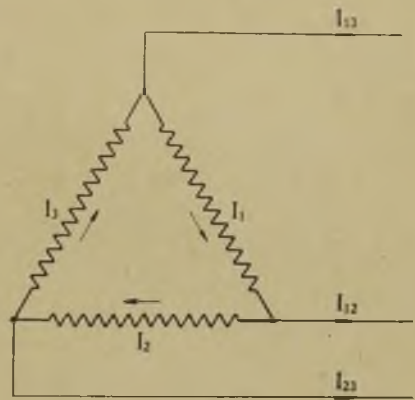
$$\tilde{I}_{31} = \tilde{I}_3 - \tilde{I}_1,$$

$$\tilde{I}_{23} = \tilde{I}_2 - \tilde{I}_3.$$

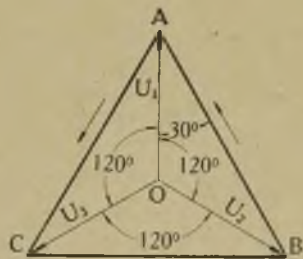
Wobec tego

$$\tilde{I}_{12} + \tilde{I}_{13} + \tilde{I}_{23} = 0.$$

Zależności pomiędzy napięciami fazowymi i międzyfazowymi, a także pomiędzy napięciami i prądami możemy przedstawić wykreslinie. Dla układu gwiazdowego z jednakowym obciążeniem faz odkładamy od dowolnego początku O (rys. 62) trzy promienie, wyrażające napięcia $OA = U_1$, $OB = U_2$ i $OC = U_3$; łącząc między sobą punkty A , B i C , otrzymamy równoboczny trójkąt, którego każdy bok stanowi odpowiednie napięcie międzyfazowe, a więc, między fazą 1-ą i 2-ą mamy napięcie BA , stanowiące geometryczną różnicę napięć U_1 i U_2 ; widzimy, że to napięcie jest przesunięte w fazie naprzód względem napięcia U_1 o kąt $30^\circ = \frac{\pi}{6}$; następnie



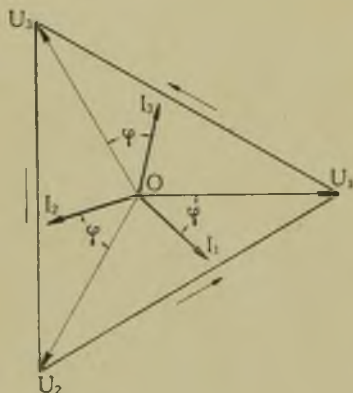
Rys. 61.



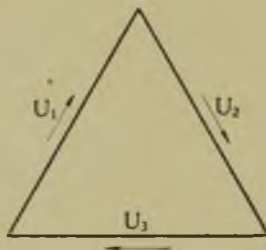
Rys. 62.

CB stanowi napięcie między fazami 2-gą i 3-cią, jako geometryczna różnica napięć U_2 i U_3 ; jak widać z wykresu, to napięcie międzyfazowe jest przesunięte wstecz względem napięcia U_1 o kąt prosty; wreszcie AO stanowi napięcie między fazami 3-cią i 1-ą, jako geometryczna różnica napięć U_3 i U_1 ; to międzyfazowe napięcie jest przesunięte naprzód względem napięcia U_1 o kąt 150° . Z równoramiennych trójkątów OAB , OBC lub OAC otrzymujemy wiadomą zależność pomiędzy napięciami międzyfazowymi — skojarzonymi i napięciami fazowymi $U_s = U_f \sqrt{3}$.

Na rys. 63 mamy zestawienie napięć i prądów w układzie gwiazdowym również w przypadku jednakowego obciążenia wszystkich faz. Wszystkie prądy są przesunięte względem swych napięć fazowych o ten sam kąt φ (na rysunku mamy opóźnienie prądów względem napięć).



Rys. 63.



Rys. 64.

W układzie trójkątnym napięcia fazowe i równe im napięcia międzyfazowe tworzą trójkąt zamknięty (rys. 64), natomiast prądy przewodowe będą skojarzone. Wykres dla prądów, w przypadku jednakowego obciążenia faz, otrzymamy taki sam jak dla napięć w układzie gwiazdowym (rys. 62).

§ 27. Rozkład układów niesymetrycznych na układy symetryczne prądu trójfazowego.

W symetrycznym układzie trójfazowym mamy trzy równe co do wartości wektory, przesunięte względem siebie o kąt 120° .

Mogą to być siły elektromotoryczne, lub przy jednakowym obciążeniu wszystkich faz, prądy albo napięcia. Oznaczmy te

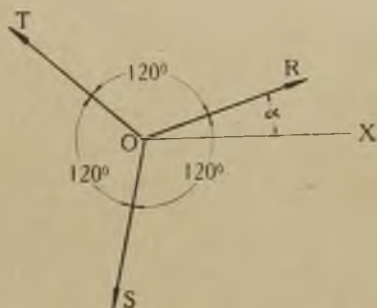
wektory przez R, S i T (rys. 65), ich wspólny moduł przez W . Niech wektor R tworzy z podstawową osią OX kąt α , wówczas

$$\begin{aligned}\hat{R} &= We^{j\alpha} \\ \hat{S} &= We^{j(\alpha - 120^\circ)} \\ \hat{T} &= We^{j(\alpha + 120^\circ)}\end{aligned}$$

albo

$$\begin{aligned}\hat{R} &= We^{j\alpha} \\ \hat{S} &= \hat{R} e^{-j120^\circ} \\ \hat{T} &= \hat{R} e^{j120^\circ}.\end{aligned}$$

Ponieważ



Rys. 65.

$$e^{j120^\circ} = \cos 120^\circ + j \sin 120^\circ = -\frac{1}{2} + j \frac{1}{2} \sqrt{3},$$

$$e^{-j120^\circ} = \cos 120^\circ - j \sin 120^\circ = -\frac{1}{2} - j \frac{1}{2} \sqrt{3},$$

więc oznaczając w skróceniu

$$a = -\frac{1}{2} + j \frac{1}{2} \sqrt{3},$$

skąd

$$a^2 = -\frac{1}{2} - j \frac{1}{2} \sqrt{3},$$

będziemy mogli rozpatrywać trzy omawiane wektory w postaci

$$\hat{R}, \hat{S} = a^2 \hat{R}, \quad \hat{T} = a \hat{R}.$$

Wektor T jest przesunięty względem wektora R naprzód o kąt 120° , wektor S względem wektora T — również naprzód o kąt 120° . Łatwo zauważyć, że a stanowi w rozpatrywanym zagadnieniu pewien czynnik, przez który mnożąc dowolny wektor przesuwamy go naprzód o kąt 120° .

Zwróćmy również uwagę, że

$$1 + a + a^2 = 0$$

$$a^3 = 1$$

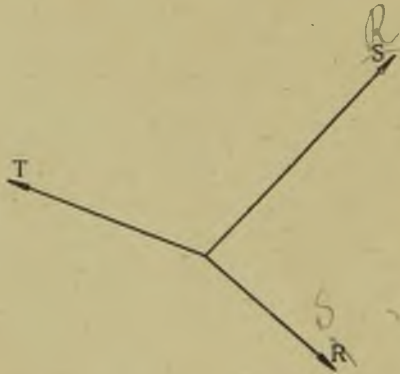
Rozpatrzmy teraz niesymetryczny układ R, S, T (rys. 66). Każdy z tych wektorów możemy zastąpić trzema składowymi, tak aby

$$\left. \begin{aligned} \hat{R} &= \hat{R}_0 + \hat{R}_1 + \hat{R}_2 \\ \hat{S} &= \hat{S}_0 + \hat{S}_1 + \hat{S}_2 \\ \hat{T} &= \hat{T}_0 + \hat{T}_1 + \hat{T}_2 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

przyczem dobieramy

$$\begin{aligned} \hat{S}_0 &= \hat{R}_0, & \hat{S}_1 &= a^2 \hat{R}_1, & \hat{S}_2 &= a \hat{R}_2. \\ \hat{T}_0 &= \hat{R}_0, & \hat{T}_1 &= a \hat{R}_1, & \hat{T}_2 &= a^2 \hat{R}_2. \end{aligned}$$

Otrzymujemy trzy grupy wektorów



- I $R_0, R_0, R_0,$
- II $R_1, a^2 R_1, a R_1,$
- III $R_2, a R_2, a^2 R_2.$

Każda z tych grup I, II i III przedstawia symetryczny układ; przy czem grupa I stanowi jeden wektor, grupa II odpowiada normalnemu symetrycznemu układowi trójfazowemu, zaś grupa III różni się od normalnego układu tylko tem, że wektory S i T mają zmienioną kolejność.

Rys. 66.

W ten sposób każdy niesymetryczny układ trójfazowy możemy przedstawić przez trzy symetryczne układy składowe.

Podstawiając wartości poszczególnych wektorów składowych do układu równań (5), będziemy mieli

$$\left. \begin{aligned} \hat{R} &= \hat{R}_0 + \hat{R}_1 + \hat{R}_2 \\ \hat{S} &= \hat{R}_0 + a^2 \hat{R}_1 + a \hat{R}_2 \\ \hat{T} &= \hat{R}_0 + a \hat{R}_1 + a^2 \hat{R}_2 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Dodając stronami i biorąc pod uwagę, że $1 + a + a^2 = 0$, znajdujemy

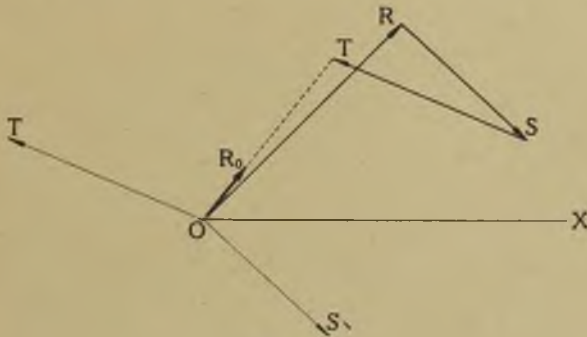
$$\hat{R}_0 = \frac{1}{3} (\hat{R} + \hat{S} + \hat{T}); \quad (7)$$

mnożąc drugie równanie przez a , trzecie przez a^2 i dodając stronami wszystkie równania, otrzymamy

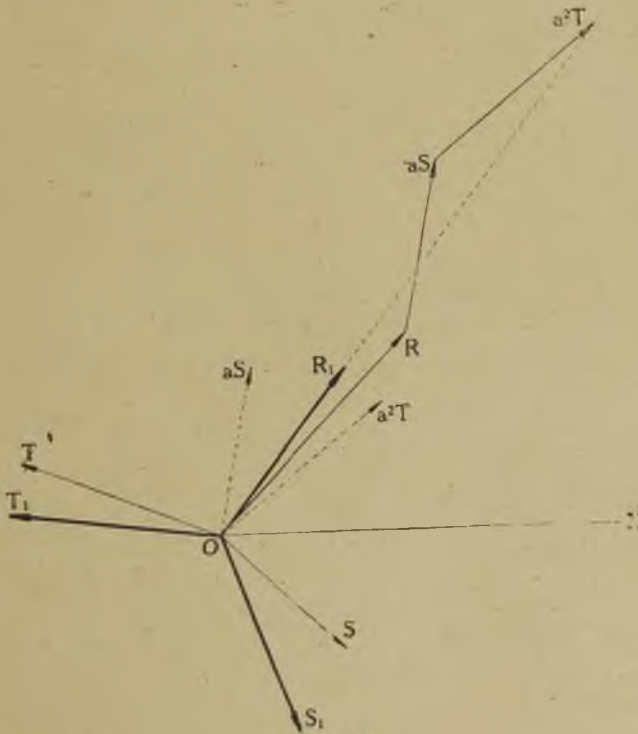
$$\hat{R} + a\hat{S} + a^2\hat{T} = 3\hat{R}_1,$$

skąd

$$\hat{R}_1 = \frac{1}{3} (\hat{R} + a\hat{S} + a^2\hat{T});$$



Rys. 67.



Rys. 68.

wreszcie, mnożąc drugie równanie przez a^2 , trzecie przez a i dodając stronami wszystkie równania, otrzymamy

$$\hat{R} + a^2 \hat{S} + a \hat{T} = 3 \hat{R}_2,$$

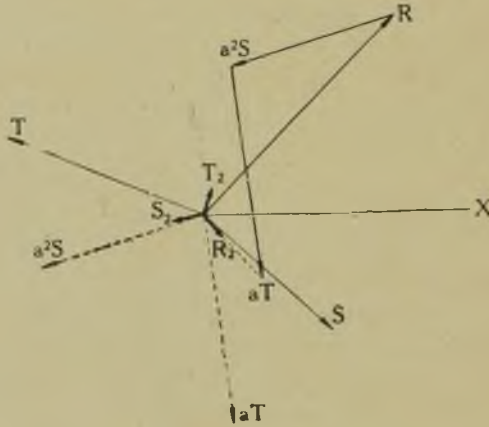
skąd

$$\hat{R}_2 = \frac{1}{3} (\hat{R} + a^2 \hat{S} + a \hat{T}).$$

Wielkości R_0 , R_1 i R_2 można znaleźć również wykreślnie w sposób następujący.

R_0 równa się $\frac{1}{3}$ geometrycznej sumy danych wektorów (rys. 67).

Dla znalezienia R_1 przeprowadzamy najpierw wektory aS i a^2T (rys. 68), następnie bierzemy $\frac{1}{3}$ geometrycznej sumy R , aS i a^2T .



Rys. 69.

Wreszcie analogicznie znajdujemy (rys. 69) R_2 jako $\frac{1}{3}$ geometrycznej sumy R , a^2S i aT .

§ 28. Moc prądu trójfazowego.

Rozpatrzmy, jak się wyraża moc prądu trójfazowego w najogólniejszym przypadku, gdy obciążenie poszczególnych faz jest różne, to znaczy, że i prądy płynące w przewodach i napięcia międzyprzewodowe nie są jednakowe.

Gdy odbiorniki ułożone są w gwiazdę z trzema przewodami (rys. 70), wartość chwilowa mocy, pobieranej przez odbiorniki wynosi

$$p = u_1 i_1 + u_2 i_2 + u_3 i_3,$$

gdzie u_1, u_2, u_3 , oznaczają wartości chwilowe napięć w poszczególnych fazach odbiorników, zaś i_1, i_2, i_3 , wartości chwilowe prądów, płynących w przewodach, oraz, w tym przypadku, przez poszczególne fazy odbiorników. Ponieważ

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0,$$

czyli $i_3 = -i_1 - i_2,$

możemy napisać

$$p = (u_1 - u_3) i_1 + (u_2 - u_3) i_2;$$

ale

$$u_1 - u_3 = u_{13}$$

stanowi napięcie między 1-ą i 3-cią fazą odbiorników, liczone w kierunku od końca 3-ciej do końca 1-ej fazy; tak samo

$$u_2 - u_3 = u_{23}$$

stanowi napięcie między 2-ą i 3-cią fazą, liczone w kierunku od końca 3-ciej do końca 2-ej fazy; w ten sposób

$$p = u_{13} i_1 + u_{23} i_2.$$

Przechodząc od wartości chwilowej mocy do wartości średniej, czyli do mocy czynnej P , wprowadzając wartości skuteczne napięć i prądów i oznaczając przez φ_1 różnicę faz prądu i_1 i napięcia u_{13} oraz przez φ_2 — różnicę faz prądu i_2 i napięcia u_{23} (rys. 71), otrzymamy

$$P = U_{13} I_1 \cos \varphi_1 + U_{23} I_2 \cos \varphi_2. \quad (8)$$

Gdy odbiorniki ułożone są w trójkąt (rys. 72), będziemy mieli dla wartości chwilowej mocy układu

$$p = u_{12} i_1 + u_{23} i_2 + u_{31} i_3,$$

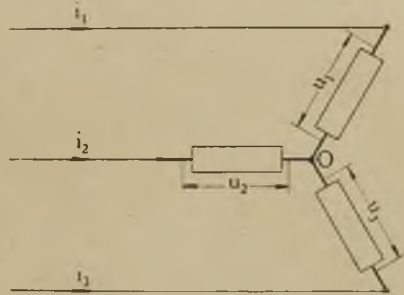
gdzie u_{12}, u_{23}, u_{31} , oznaczają wartości chwilowe napięć międzyfazowych, które w tym przypadku równe są napięciom fazowym. Kierunki tych napięć, zgodne z kierunkami prądów, które przyjęliśmy jako dodatnie, wskazane są na rys. 72.

Ponieważ w każdej chwili

$$u_{12} + u_{23} + u_{31} = 0,$$

czyli $u_{12} = -u_{31} - u_{23},$

zaś $u_{31} = -u_{13},$



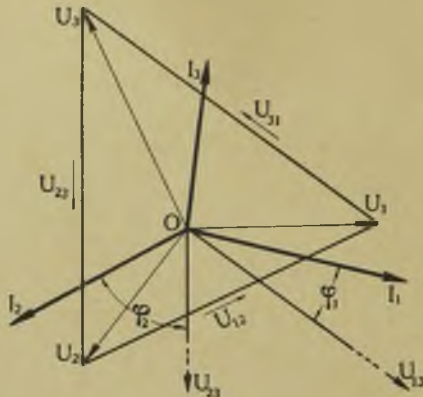
Rys. 70.

przeto możemy napisać

$$p = u_{13}(i_1 - i_3) + u_{23}(i_2 - i_1);$$

$$\text{ale } i_1 - i_3 = i_{1p}, \quad i_2 - i_1 = i_{2p},$$

gdzie i_{1p} oraz i_{2p} oznaczają prądy, płynące w pierwszym i drugim przewodzie.



Rys. 71.

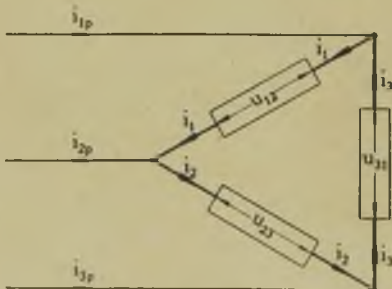
W ten sposób

$$p = u_{13} i_{1p} + u_{23} i_{2p}.$$

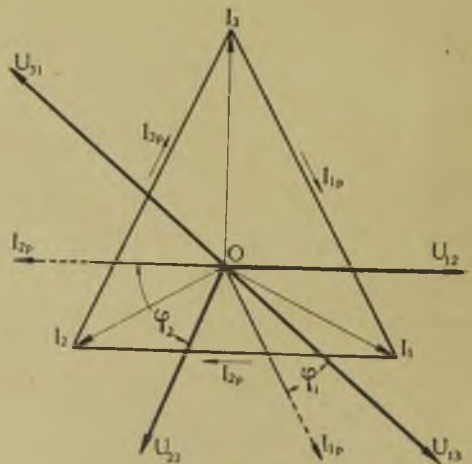
Jeżeli przez φ_1 i φ_2 oznaczymy różnice faz odpowiednio pomiędzy u_{13} i i_{1p} oraz u_{23} i i_{2p} i przejdziemy do wartości skutecznych napięć i prądów (rys. 73), otrzymamy dla mocy czynnej rozpatrywanego układu trójkątnego

$$P = U_{13} I_{1p} \cos \varphi_1 + U_{23} I_{2p} \cos \varphi_2 \quad (9)$$

wzór analogiczny do wzoru (8).



Rys. 72.

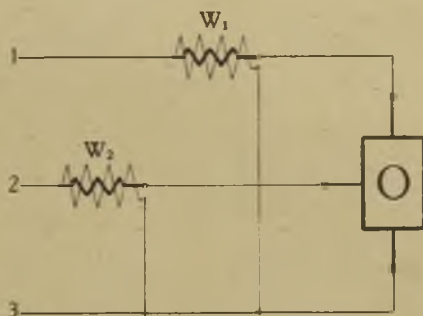


Rys. 73.

Widzimy więc, że zarówno w układzie gwiazdowym, jak i w układzie trójkątnym, moc pobierana przez odbiorniki wyraża się sumą dwóch składników, z których każdy oznacza pewną moc czynną.

Mierzenie mocy prądu dokonywamy za pomocą przyrządów, które nazywamy watomierzami; zawierają one dwie cewki: prądową i napięciową. W ogólnym przypadku, dla zmierzenia całkowitej mocy układu prądu trójfazowego musimy zmierzyć obie wyżej wyprowadzone moce składowe, czyli zastosować dwa watomierze.

W tym celu watomierze W_1 i W_2 (rys. 74) włączamy przed odbiornikami O , ułożonymi w gwiazdę lub trójkąt, w ten sposób, że przez cewki prądowe płyną prądy przewodów 1 i 2, zaś cewki napięciowe mierzą napięcia: pierwsza między 1 i 3 fazą — U_{13} , druga między 2 i 3 fazą — U_{23} .



Rys. 74.

Moce wskazywane przez te watomierze odpowiadają składowym mocy we wzorach (8) lub (9), przyczem przy odchyleniu wskazówek watomierzy w tym samym kierunku, należy te moce do siebie dodać, zaś przy odchyleniu w różne strony — odjąć.

Przy jednakowym obciążeniu trzech faz moc prądu trójfazowego wyrazi się wzorem

$$P = 3 U I \cos \varphi,$$

gdzie U i I oznaczają fazowe napięcia i prądy. Jeżeli wprowadzimy do powyższego wzoru wielkości międzyprzewodowe, to dla układu gwiazdowego $U = \frac{U_p}{\sqrt{3}}$, $I = I_p$, zaś dla trójkątnego $U = U_p$,

$I = \frac{I_p}{\sqrt{3}}$; wobec tego, po podstawieniu tych wartości do wzoru na moc, otrzymamy w obu przypadkach jeden i ten sam wzór

$$P = \sqrt{3} U_p I_p \cos \varphi.$$

Watomierze W_1 i W_2 w przypadku jednakowego obciążenia trzech faz wskażą naogół różne moce, ponieważ kąty przesunięcia

faz φ_1 i φ_2 we wzorach (8) i (9) naogół będą różne; tylko w przypadku, gdy prądy I_1, I_2, I_3 są w fazie ze swemi napięciami fazowymi, czyli gdy odbiorniki posiadają tylko oporność rzeczywistą, wskazywane przez oba watomierze moce będą sobie równe. Wtedy bowiem, jak łatwo sprawdzić na rys. (71) i na rys. (73)

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 30^\circ,$$

wobec czego ze wzorów (8) lub (9) otrzymamy

$$P = 2 U_p I_p \cos 30^\circ = \sqrt{3} U_p I_p,$$

$$\text{przyczem } \varphi = 0^\circ.$$

Przy dowolnym kącie φ pomiędzy fazowym napięciem i fazowym prądem zarówno w układzie gwiazdowym jak i w układzie trójkątnym

$$\varphi_1 = 30 - \varphi,$$

$$\varphi_2 = 30 + \varphi.$$

Wobec tego moce, które mierzą watomierze W_1 i W_2 będą określone następującymi wzorami

$$P_1 = UI \cos(30^\circ - \varphi),$$

$$P_2 = UI \cos(30^\circ + \varphi).$$

Stąd otrzymujemy

$$P_1 + P_2 = UI(\cos 30^\circ \cos \varphi + \sin 30^\circ \sin \varphi + \cos 30^\circ \cos \varphi - \sin 30^\circ \sin \varphi) =$$

$$= \sqrt{3} UI \cos \varphi,$$

$$P_1 - P_2 = UI \sin \varphi.$$

Dzieląc stronami ostatni wzór przez poprzedni, będziemy mieli

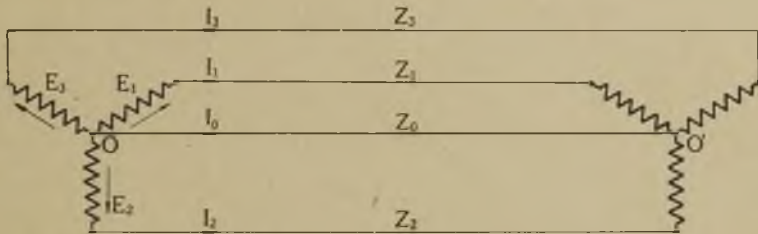
$$\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{3} \frac{P_1 - P_2}{P_1 + P_2}.$$

W zależności od wartości i od znaku φ poszczególne moce mogą wypaść dodatnie lub ujemne, więc gdy $30 - \varphi > \frac{\pi}{2}$, $P_1 < 0$, gdy $30 + \varphi > \frac{\pi}{2}$, $P_2 < 0$.

W ten sposób moc równa jest sumie algebraicznej mocy, wskazywanych przez oba watomierze.

§ 29. Wyznaczenie prądów w układach prądu trójfazowego.

Rozpatrzmy następujące zagadnienie. Mamy prądnicę prądu trójfazowego w połączeniu gwiazdowym (rys. 75), w każdej fazie działa siła elektromotoryczna o wartości skutecznej E ; od źródła są przeprowadzone 3 przewody fazowe i przewód zerowy do odbiorników, które są również połączone w gwiazdę. Dane są po-



Rys. 75.

zatem wszystkie oporności uzwojeń prądnicy, przewodów i odbiorników; trzeba wyznaczyć prądy I_1 , I_2 , I_3 i I_0 , które będą płynęły w odpowiednich przewodach fazowych i w przewodzie zerowym, w przypuszczeniu, że odbiorniki w poszczególnych fazach różnią się między sobą, czyli, że obciążenie faz nie jest jednakowe, a więc i w przewodzie zerowym będzie płynął pewien prąd. Oznaczmy oporność pozorną pomiędzy punktami O i O' , zawierającą oporność uzwojenia jednej fazy, oporność przewodu i oporność odbiorników, włączonych do tej fazy, odpowiednio przez Z_1 , Z_2 i Z_3 , zaś oporność przewodu zerowego między temiż punktami O i O' przez Z_0 ; następnie oznaczmy siły elektromotoryczne, działające w poszczególnych fazach, różniące się tylko kątami przesunięcia faz, odpowiednio przez E_1 , E_2 i E_3 .

Na podstawie praw Kirchhoffa będziemy mieli, przy założeniu dodatnich kierunków prądów chwilowych jak na rysunku,

$$\begin{aligned} \hat{I}_1 + \hat{I}_2 + \hat{I}_3 + \hat{I}_0 &= 0, \\ \hat{E}_1 &= \hat{I}_1 \hat{Z}_1 - \hat{I}_0 \hat{Z}_0, \\ \hat{E}_2 &= \hat{I}_2 \hat{Z}_2 - \hat{I}_0 \hat{Z}_0, \\ \hat{E}_3 &= \hat{I}_3 \hat{Z}_3 - \hat{I}_0 \hat{Z}_0. \end{aligned}$$

*l.p.u. kierunków, jakie
mają prądy w
fazach i w przewodzie
zerowym*

Wyrażając z ostatnich trzech równań prądy \hat{I}_1 , \hat{I}_2 i \hat{I}_3 i podstawiając ich wartości do pierwszego równania, otrzymamy

$$\frac{\hat{E}_1 + \hat{I}_0 \hat{Z}_0}{\hat{Z}_1} + \frac{\hat{E}_2 + \hat{I}_0 \hat{Z}_0}{\hat{Z}_2} + \frac{\hat{E}_3 + \hat{I}_0 \hat{Z}_0}{\hat{Z}_3} + \hat{I}_0 = 0,$$

skąd

$$\hat{I}_0 \hat{Z}_0 = - \frac{\frac{\hat{E}_1}{\hat{Z}_1} + \frac{\hat{E}_2}{\hat{Z}_2} + \frac{\hat{E}_3}{\hat{Z}_3}}{\frac{1}{\hat{Z}_1} + \frac{1}{\hat{Z}_2} + \frac{1}{\hat{Z}_3} + \frac{1}{\hat{Z}_0}} = - \frac{\hat{E}_1 \hat{Y}_1 + \hat{E}_2 \hat{Y}_2 + \hat{E}_3 \hat{Y}_3}{\hat{Y}_1 + \hat{Y}_2 + \hat{Y}_3 + \hat{Y}_0}, \quad (10)$$

gdzie Y_1, Y_2, Y_3 i Y_0 oznaczają przewodności pozorne odpowiednich części układu; stąd znajdujemy \hat{I}_0 ; podstawiając zaś otrzymane wartości $\hat{I}_0 \hat{Z}_0$ do powyższych równań, znajdziemy prądy \hat{I}_1, \hat{I}_2 i \hat{I}_3 . Należy zauważyć, że iloczyn $\hat{I}_0 \hat{Z}_0$ stanowi napięcie między punktami O i O' . Przy rozwiązywaniu zadania należy jedną z sił elektromotorycznych np. E_1 przyjąć jako wektor z kierunkiem początkowym, wówczas

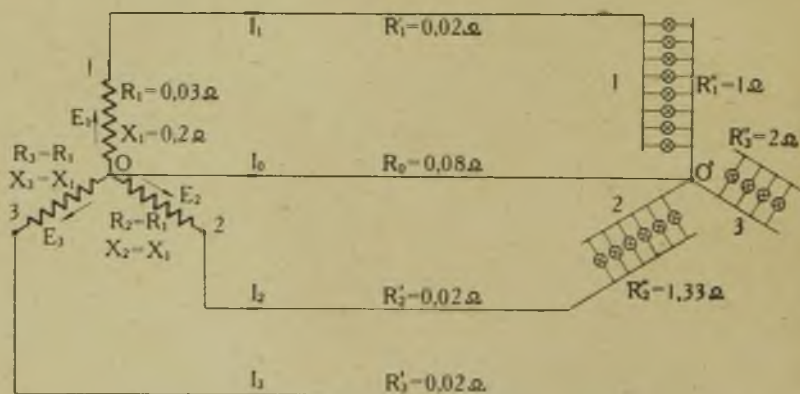
$$\hat{E}_1 = E,$$

$$\hat{E}_2 = E(\cos 120^\circ - j \sin 120^\circ) = E \left(-\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -\frac{E}{2} (1 + j\sqrt{3}),$$

$$\hat{E}_3 = E(\cos 120^\circ + j \sin 120^\circ) = E \left(-\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -\frac{E}{2} (1 - j\sqrt{3}).$$

Przykład (rys. 76).

Dane $E_1 = E_2 = E_3 = 120$ woltów oraz oporności poszczególnych części układu, wskazane na rysunku; trzeba znaleźć prądy I_1, I_2, I_3 i I_0 .



Rys. 76.

Mamy

$$\begin{aligned}\hat{Z}_1 &= 1,05 + j \cdot 0,2, & \text{stad} & \hat{Y}_1 = 0,919 - j 0,175, \\ \hat{Z}_2 &= 1,38 + j \cdot 0,2, & & \hat{Y}_2 = 0,710 - j 0,103, \\ \hat{Z}_3 &= 2,05 + j 0,2, & & \hat{Y}_3 = 0,483 - j 0,047, \\ Z_0 = R_0 &= 0,08, & & Y_0 = G_0 = 12,5.\end{aligned}$$

Biorąc kierunek \hat{E}_1 za początkowy i oznaczając przez ψ_1, ψ_2, ψ_3 i ψ_0 kąty przesunięcia faz poszukiwanych prądów względem \hat{E}_1 , będziemy mieli

$$\begin{aligned}\hat{E}_1 &= E_1 = 120 \text{ woltów}; \\ \hat{E}_2 &= -60(1 + j\sqrt{3}); \\ \hat{E}_3 &= -60(1 - j\sqrt{3}).\end{aligned}$$

Na zasadzie wzoru (10) otrzymujemy

$$\hat{I}_0 \hat{Z}_0 = 60 \frac{2(0,919 - j 0,175) - (1 + j\sqrt{3}) \cdot (0,710 - j 0,103) - (1 - j\sqrt{3}) \cdot (0,483 - j 0,047)}{(0,919 + 0,710 + 0,483 + 12,5) - j(0,175 + 0,103 + 0,047)}.$$

Po wykonaniu wskazanych działań i uczynieniu mianownika liczbą rzeczywistą, znajdujemy

$$\begin{aligned}\hat{I}_0 \hat{Z}_0 &= (-2,47 + j 2,39) \text{ woltów}; \\ I_0 Z_0 &= 3,4 \text{ woltów};\end{aligned}$$

skąd

$$\begin{aligned}\hat{I}_0 &= (-30,9 + j 29,9) \text{ amp.}, \\ I_0 &= 43,0 \text{ amp.},\end{aligned}$$

$$\text{tg } \psi_0 = -0,968, \quad \psi_0 = 136^\circ \text{ (bo w 2-ej ćwiartce).}$$

Następnie obliczamy

$$\hat{I}_1 = (\hat{E}_1 + \hat{I}_0 \hat{Z}_0) \hat{Y}_1 = (108,5 - j 18,4) \text{ amp.},$$

$$I_1 = 110,0 \text{ amp.}$$

$$\text{tg } \psi_1 = -0,170, \quad \psi_1 = -9^\circ 40' \text{ (bo w 4-ej ćwiartce).}$$

$$\hat{I}_2 = (-54,5 - j 65,7) \text{ amp.},$$

$$I_2 = 85,4 \text{ amp.},$$

$\operatorname{tg} \psi_2 = 1,205$, $\psi_2 = -129^\circ 40'$ (bo w 3-ej ćwiartce).

$$\hat{I}_3 = (-24,7 + j54,1) \text{ amp.}$$

$$I_3 = 59,5 \text{ amp. ,}$$

$\operatorname{tg} \psi_3 = -2,19$, $\psi_3 = 114^\circ 30'$ (bo w 2-ej ćwiartce).

Możemy teraz jeszcze znaleźć napięcia na poszczególnych fazach odbiornika.

Na I-ej fazie

$$\hat{U}_1 = \hat{I}_1 R_1'' = (108,5 - j18,4) \text{ woltów ,}$$

$$U_1 = 110 \text{ woltów .}$$

$$\hat{U}_2 = \hat{I}_2 R_2'' = (-54,5 - j65,7) 1,33 = (-72,5 - j87,4) \text{ woltów ,}$$

$$U_2 = 113,8 \text{ woltów .}$$

$$\hat{U}_3 = \hat{I}_3 R_3'' = (-24,7 + j54,1) 2 = (-49,4 + j108,2) \text{ woltów ,}$$

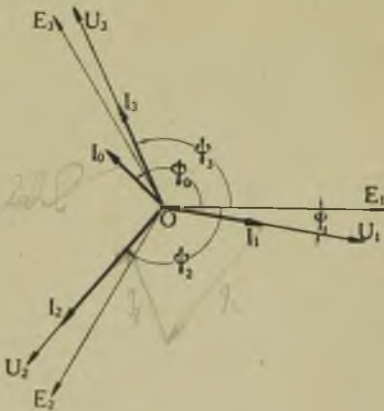
$$U_3 = 119 \text{ woltów .}$$

Kąty przesunięcia faz tych napięć względem \hat{E}_1 będą takie same, jak dla odpowiednich prądów czyli ψ_1 , ψ_2 i ψ_3 , ponieważ w rozpatrywanym przykładzie odbiorniki posiadają tylko oporność rzeczywistą.

Znalezione wielkości przedstawione są na wykresie (rys. 77),
 $OE_1 = E_1$, $OE_2 = E_2$, $OE_3 = E_3$,
 $OI_1 = I_1$, $OI_2 = I_2$, $OI_3 = I_3$,
 $OI_0 = I_0$, $OU_1 = U_1$, $OU_2 = U_2$,
 $OU_3 = U_3$.

Gdy odbiorniki są połączone w trójkąt stosujemy metodę, podaną przez Kenelly'ego, polegającą na przekształceniu trójkąta w równoważną gwiazdę. Nazywać będziemy gwiazdę (rys. 78)

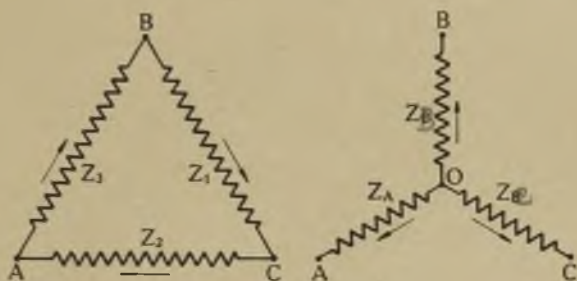
równoważną trójkątowi, jeżeli oporności pozorne między trzema punktami A , B i C gwiazdy będą takie same, jak pomiędzy odpowiednimi punktami trójkąta, które powinny być znane.



Rys. 77.

Oporność pozorna pomiędzy punktami A i B trójkąta składa się z oporności pozornych Z_3 oraz $\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2$, równolegle połączonych. Oznaczając tę oporność pozorną przez Z_{AB} , będziemy mieli

$$\hat{Z}_{AB} = \frac{\hat{Z}_3(\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2)}{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2 + \hat{Z}_3}$$



Rys. 78.

Oporność pozorna pomiędzy punktami A i B gwiazdy wynosi

$$\hat{Z}_{AB} = \hat{Z}_A + \hat{Z}_B.$$

Warunek równoważności będzie spełniony, jeżeli

$$\hat{Z}_A + \hat{Z}_B = \frac{\hat{Z}_3(\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2)}{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2 + \hat{Z}_3};$$

analogicznie

$$\hat{Z}_A + \hat{Z}_C = \frac{\hat{Z}_2(\hat{Z}_1 + \hat{Z}_3)}{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2 + \hat{Z}_3}.$$

oraz

$$\hat{Z}_B + \hat{Z}_C = \frac{\hat{Z}_1(\hat{Z}_2 + \hat{Z}_3)}{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2 + \hat{Z}_3}.$$

Z tych równań znajdujemy

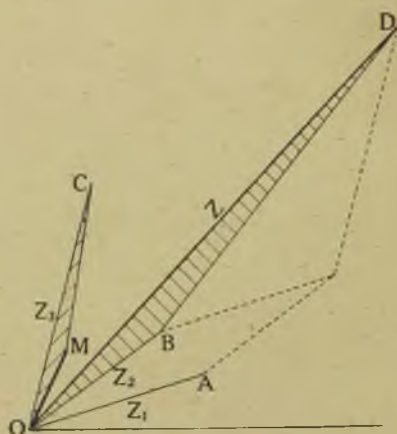
$$\hat{Z}_A = \frac{\hat{Z}_2 \hat{Z}_3}{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2 + \hat{Z}_3};$$

$$\hat{Z}_B = \frac{\hat{Z}_1 \hat{Z}_3}{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2 + \hat{Z}_3};$$

$$\hat{Z}_C = \frac{\hat{Z}_1 \hat{Z}_2}{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2 + \hat{Z}_3}.$$

Bardzo łatwo można znaleźć oporności pozorne równoważnej gwiazdy sposobem wykreślnym.

Na rys. 79.



Rys. 79.

$$OA = Z_1, \quad OB = Z_2, \quad OC = Z_3, \\ OD = \hat{Z} = \hat{Z}_1 + \hat{Z}_2 + \hat{Z}_3.$$

W celu znalezienia np. Z_A piszemy, na podstawie wyżej wprowadzonego wzoru, proporcję następującą

$$\frac{\hat{Z}_A}{\hat{Z}_3} = \frac{\hat{Z}_2}{\hat{Z}}$$

Musimy więc zbudować $\triangle OCM$ podobny $\triangle ODB$, w których $\angle COM = DOB$, $\angle OCM = \angle ODB$; wtedy powyższa proporcja będzie miała miejsce i oczywiście $OM = Z_A$.

proporcja będzie miała miejsce i oczywiście $OM = Z_A$.

§ 30. Prąd dwufazowy.

Układ dwufazowy symetryczny, jak o tem była mowa (str. 87) nie jest stosowany, natomiast spotykamy w praktyce prąd dwufazowy w układzie niesymetrycznym.

Jeżeli połączymy dwa jednakowe uzwojenia pod kątem prostym, jak na rysunku (80), otrzymamy układ dwufazowy niesymetryczny.

W każdym uzwojeniu powstają SEM: e_1 i e_2 , przesunięte względem siebie o kąt $\frac{\pi}{2}$, a mianowicie

$$e_1 = E_m \sin \omega t$$

oraz

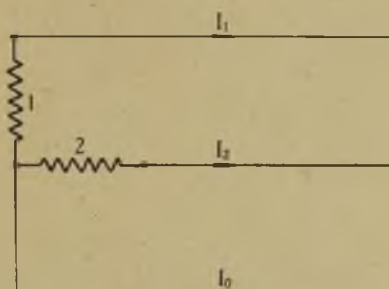
$$e_2 = E_m \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) = -E_m \cos \omega t.$$

W układzie tym korzystamy z trzech przewodów: dwóch fazowych, idących od końców faz i zerowego, idącego od punktu połączenia początków faz, tak zwanego punktu zerowego.

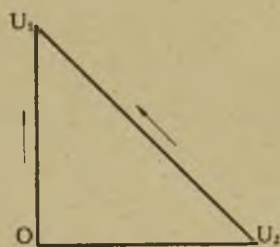
Napięcie międzyfazowe będzie napięciem skojarzonym; przy jednakowym obciążeniu obu faz, wartości chwilowe napięcia fazowego wynoszą odpowiednio

$$u_1 = U_m \sin \omega t,$$

$$u_2 = U_m \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) = -U_m \cos \omega t;$$



Rys. 80.



Rys. 81

wartość chwilowa napięcia międzyfazowego będzie

$$u_{12} = u_1 - u_2 = U_m (\sin \omega t + \cos \omega t) = U_m \sqrt{2} \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{4} \right).$$

Przechodząc do wartości skutecznych napięcia, będziemy mieli

$$\hat{U}_{12} = \hat{U}_1 - \hat{U}_2 = U e^{j0} - U e^{-j\frac{\pi}{2}} = U + jU = U(1 + j1),$$

gdzie U stanowi moduł napięcia fazowego.

Skąd

$$U_{12} = U\sqrt{2},$$

$$\operatorname{tg} \varphi (\hat{U}_1, \hat{U}_{12}) = 1,$$

$$\varphi (\hat{U}_1, \hat{U}_{12}) = \frac{\pi}{4}.$$

To samo otrzymalibyśmy z wykresu (rys. 81), gdzie $OU_1 = U_1$, $OU_2 = U_2$, $U_2 U_1 = U_{12}$.

Oznaczmy prąd, wychodzący z fazy pierwszej, przez I_1 , z drugiej zaś przez I_2 . Przez przewód zerowy niech płynie prąd I_0 . Wówczas na podstawie 1-go prawa Kirchhoffa

$$\tilde{I}_1 + \tilde{I}_2 + \tilde{I}_0 = 0$$

lub

$$\hat{I}_0 = -(\hat{I}_1 + \hat{I}_2).$$

Widzimy stąd, że przez przewód zerowy odpływa prąd o wartości równej sumie geometrycznej prądów obu faz; wobec tego przekrój przewodu zerowego powinien być większy od przekrojów przewodów fazowych. Przy jednakowym obciążeniu faz, gdy $I_1 = I_2 = I$, wartość skuteczna prądu w przewodzie zerowym wyrazi się tak:

$$I_0 = I\sqrt{2}.$$

Dla wyrażenia mocy rozpatrzonego układu dwufazowego przy jednakowym obciążeniu obu faz mamy

$$u_1 = U_m \sin \omega t,$$

$$u_2 = -U_m \cos \omega t$$

oraz wartości chwilowe prądów, pobieranych z obu faz np. przy obciążeniu indukcyjnym,

$$i_1 = I_m \sin(\omega t - \varphi),$$

$$i_2 = -I_m \cos(\omega t - \varphi).$$

W każdej chwili moc p takiego układu będzie

$$p = u_1 i_1 + u_2 i_2$$

Podstawiając do tego wzoru powyższe wartości, otrzymamy

$$p = U_m I_m \{ \sin \omega t \sin(\omega t - \varphi) + \cos \omega t \cos(\omega t - \varphi) \} = U_m I_m \cos \varphi.$$

Wprowadzając zaś wartości skuteczne napięcia i prądu,

$$p = 2 U I \cos \varphi.$$

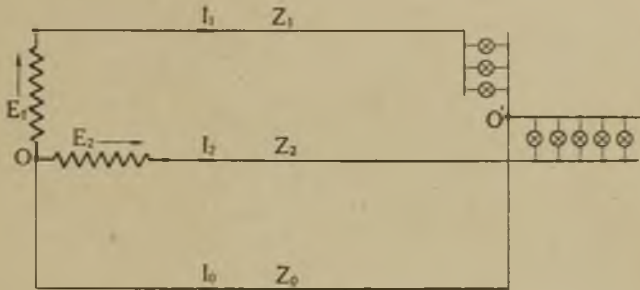
Wartość chwilowa mocy jest, jak widzimy, stała, nie zależy od czasu, czyli układ jest wyrównany. Średnia moc P wyrazi się tym samym wzorem

$$P = 2 U I \cos \varphi$$

lub, wprowadzając napięcie międzyfazowe $U_p = U\sqrt{2}$ i prąd przewodowy $I_p = I$,

$$P = U_p I_p \sqrt{2} \cos \varphi.$$

Obliczanie prądów w układzie dwufazowym uskuteczniamy tak samo, jak dla prądu trójfazowego (§ 29). Wprowadzając oznaczenia, jak na rys. 82, będziemy mieli:



Rys. 82.

$$\hat{I}_1 = \frac{\hat{E}_1 + \hat{I}_0 \hat{Z}_0}{\hat{Z}_1}, \quad \hat{I}_2 = \frac{\hat{E}_2 + \hat{I}_0 \hat{Z}_0}{\hat{Z}_2}, \quad \hat{I}_0 \hat{Z}_0 = - \frac{\hat{E}_1 \hat{Y}_1 + \hat{E}_2 \hat{Y}_2}{\hat{Y}_1 + \hat{Y}_2 + \hat{Y}_0}$$

§ 31. Względy ekonomiczne, które wpłynęły na rozwój prądów zmiennych wielofazowych.

Rozpatrzmy następujące zagadnienie: mamy przenieść moc P kW na odległość l km przy napięciu U . Porównajmy ilość metalu na przewodach, jaką należy zużyć przy przenoszeniu takiej samej mocy, przy tem samym napięciu, w rozmaitych układach prądu zmiennego, jednofazowym, trójfazowym i dwufazowym, tak, aby strata mocy w przewodach była ta sama. Przy zwykłym jednofazowym prądzie zmiennym

$$P = UI \cos \varphi, \quad (\text{I})$$

gdzie I oznacza natężenie przenieszonego prądu, zaś φ — kąt przesunięcia fazy tego prądu względem napięcia U .

Dla przeniesienia tej mocy potrzebujemy dwóch przewodów.

Oznaczmy oporność każdego przewodu przez R_1 , przekrój jego przez s_1 ; wówczas strata mocy w przewodach wyniesie

$$\Delta P = 2 l^2 R_1 \quad (\text{II}).$$

W tym przypadku, objętość metalu, użytego na przewody, wynosić będzie

$$v_1 = 2 s_1 l \quad (\text{III}).$$

Dla prądu trójfazowego moc obliczamy ze wzoru

$$P = \sqrt{3} U_p I_p \cos \varphi.$$

Przy połączeniu w trójkąt $U_p = U$ i wtedy

$$P = U (I_p \sqrt{3}) \cos \varphi.$$

Zestawiając ten wzór ze wzorem I, otrzymamy

$$U I \cos \varphi = U I_p \sqrt{3} \cos \varphi,$$

skąd

$$I_p = \frac{I}{\sqrt{3}}.$$

Widzimy stąd, że przy przenoszeniu jednej i tej samej mocy w postaci prądu trójfazowego, przez każdy przewód płynie prąd $\sqrt{3}$ razy mniejszy od prądu, który jest potrzebny przy zwykłym prądzie jednofazowym.

Dla rozpatrywanego prądu trójfazowego potrzebujemy 3-ch przewodów; oznaczmy oporność każdego z tych przewodów przez R_3 , przekrój zaś przez s_3 .

Strata mocy w przewodach wyniesie

$$\Delta P = 3 I_p^2 R_3 = I^2 R_3.$$

Zestawiając ten wzór ze wzorem II, otrzymamy

$$I^2 R_3 = 2 I^2 R_1; \quad R_3 = 2 R_1.$$

Widzimy stąd, że oporność przewodów dla otrzymania tej samej straty mocy w przypadku prądu trójfazowego musi być dwa razy większa od poprzedniej, czyli

$$s_3 = \frac{s_1}{2}.$$

Objętość metalu, użytego na przewody będzie w tym przypadku

$$v_3 = 3 s_3 l = \frac{3 s_1 l}{2}.$$

Biorąc stosunek tej objętości do v_1 ze wzoru (III), otrzymamy $3/4$ czyli 75%.

To oznacza, że przy układzie trójkątnym na przewody zużywamy 75% materiału potrzebnego w przypadku prądu jednofazowego, czyli uzyskujemy 25% ekonomii.

Rozpatrzmy teraz z kolei układ gwiazdowy prądu trójfazowego; zakładamy, że wszystkie fazy są jednakowo obciążone. Moc prądu będzie

$$P = \sqrt{3} U_p I_p \cos \varphi = 3 U I_p \cos \varphi.$$

Po zestawieniu tego wzoru ze wzorem (I) otrzymamy

$$3 I_p = I; \quad I_p = \frac{I}{3}.$$

Oznaczmy oporność każdego z trzech przewodów przez R'_3 , przekrój zaś przez s'_3 . Strata mocy będzie

$$\Delta P = 3 I_p^2 R'_3 = \frac{I^2}{3} R'_3.$$

Aby ta strata mocy była ta sama co w przypadku, gdy stosujemy prąd jednofazowy, musi być przez porównanie ze wzorem II

$$\frac{I^2}{3} R'_3 = 2 I^2 R_1, \quad \text{skąd} \quad R'_3 = 6 R_1.$$

Przekrój przewodu w danym przypadku stanowić będzie

$$s'_3 = \frac{s_1}{6}.$$

Objętość metalu użytego

$$v'_3 = 3 s'_3 l = \frac{1}{2} s_1 l.$$

Porównyując ten wzór ze wzorem (III), widzimy, że ilość materiału, zużytego na przewody w przypadku układu gwiazdowego z trzema przewodami, stanowi $\frac{1}{4}$ czyli 25% tego, co jest potrzebne przy prądzie jednofazowym; ekonomia wynosi 75%.

Rozpatrzmy teraz układ gwiazdowy z czwartym przewodem zerowym; załóżmy, jak to zwykle bywa, że przekrój tego przewodu będzie dwa razy mniejszy od przekroju przewodów pozostałych. Wówczas objętość zużytego na przewody materiału wyniesie

$$\left(3 s'_3 + \frac{s'_3}{2} \right) l = 3,5 s'_3 l \cong 0,58 s_1 l.$$

W porównaniu do objętości metalu przy zwykłym prądzie jednofazowym (wzór III) wynosi to około 29%.

Przy układzie dwufazowym niesymetrycznym z trzema przewodami: dwoma fazowymi i jednym zerowym, moc prądu wynosi

$$P = 2 UI_p \cos \varphi.$$

Porównując ten wzór ze wzorem (I), mamy

$$2 I_p = I; \quad I_p = \frac{I}{2}.$$

Ponieważ prąd płynący w przewodzie zerowym

$$I_0 = I_p \sqrt{2},$$

więc

$$I_0 = \frac{I \sqrt{2}}{2}.$$

Oznaczmy oporność przewodów fazowych przez R_2 , zaś oporność przewodu zerowego przez R'_2 ; przekroje zaś odpowiednio przez s_2 i s'_2 .

Strata mocy w przewodach wyniesie

$$\Delta P = 2 I_p^2 R_2 + I_0^2 R'_2.$$

Podstawiając tu na I_p i I_0 ich wartości, otrzymujemy

$$\Delta P = \frac{I^2}{2} (R_2 + R'_2).$$

Przez przewód zerowy płynie prąd $I_p \sqrt{2}$; aby spadek napięcia w tym przewodzie był ten sam co w innych przewodach, oporność jego musi być proporcjonalnie mniejszą, czyli

$$R'_2 = \frac{R_2}{\sqrt{2}},$$

zaś przekrój

$$s'_2 = s_2 \sqrt{2}.$$

Wobec tego strata mocy wynosi

$$\Delta P = \frac{I^2}{2} R_2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \cong 0,85 I^2 R_2.$$

Przyrównywając tę stratę do straty mocy przy prądzie jednofazowym (wzór II), otrzymamy

$$0,85 I^2 R_2 = 2 I^2 R_1,$$

skąd

$$R_2 = 2,3 R_1.$$

Z tego wynika, że przekrój przewodów powinien być w danym przypadku tyleż razy mniejszy, czyli

$$s_2 = \frac{s_1}{2,3} \cong 0,43 s_1.$$

Wobec tego

$$s'_2 = s_2 \sqrt{2} \cong 0,43 \sqrt{2} s_1 \cong 0,60 s_1.$$

Objętość materiału zużytego wyniesie

$$v_2 = (2 s_2 + s'_2) l \cong (0,85 + 0,60) s_1 l \cong 1,45 s_1 l.$$

W stosunku do objętości v_1 (wzór 3) otrzymamy

$$\frac{1,45}{2} \cong 73\%.$$

§ 32. Pola wirujące.

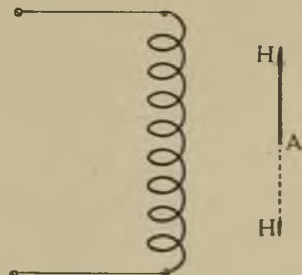
Osobliwością prądów zmiennych wielofazowych jest powstawanie tak zwanego wirującego pola magnetycznego.

Przypuśćmy, że mamy cewkę, przez którą płynie prąd zmienny, o wartości chwilowejj

$$i = I_m \sin(\omega t - \varphi).$$

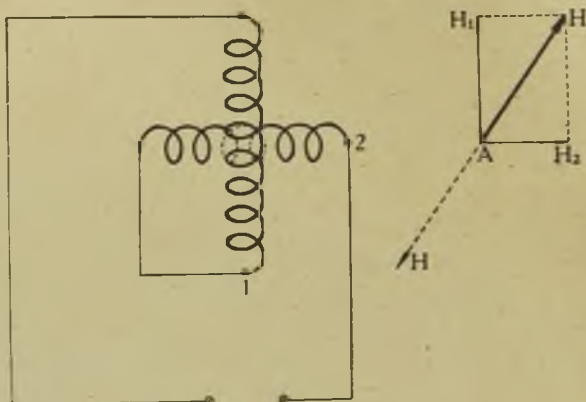
W dowolnym punkcie A przestrzeni prąd ten (rys. 83) wytwarza pole magnetyczne, którego wartość H zmienia się sinusoidalnie w czasie, zależnie od zmiany prądu w cewce.

Jeżeli mamy dwie połączone ze sobą cewki, ułożone pod kątem prostym, przez które przepływa jeden i ten sam prąd sinusoidalny, wówczas każda cewka, w dowolnym punkcie otoczenia wywołuje



Rys. 83.

będzie w sposób analogiczny natężenie pola o wartościach H_1 i H_2 . H_1 i H_2 , zmieniając się sinusoidalnie w czasie w sposób jednakowy, dają w każdej chwili wypadkową H , która będzie się również zmieniać sinusoidalnie, przyczem kierunek jej pozostawać będzie stały. (rys. 84).



Rys. 84

Zupełnie odmienne zjawisko otrzymamy przy prądach wielofazowych. Jeżeli, na przykład, mamy układ dwufazowy, wtedy przez uzwojenia będą płynąć prądy (przy jednakowym obciążeniu faz)

$$i_1 = I_m \sin(\omega t - \varphi)$$

oraz

$$i_2 = I_m \sin\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right);$$

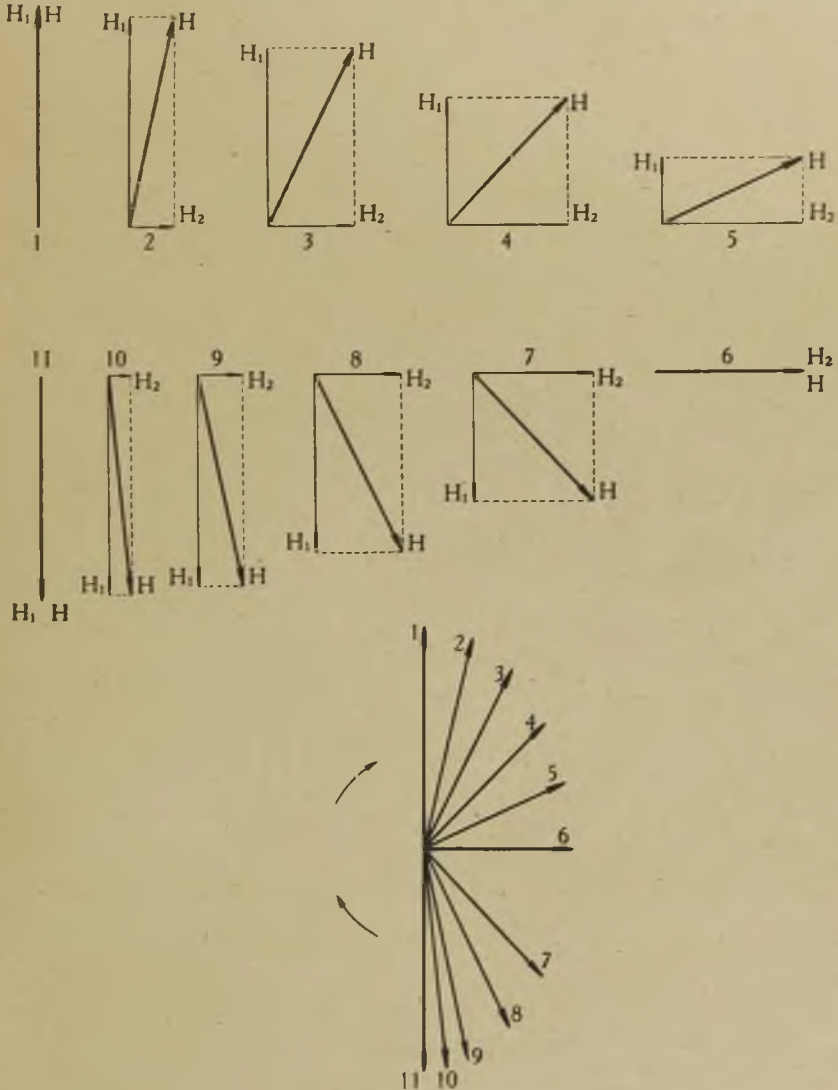
w dowolnym punkcie wytworzonego pola magnetycznego natężenie pola będzie wypadkową składowych H_1 i H_2 , wywołanych prądami i_1 i i_2 . Wartości tych składowych będą naogół różne (rys. 85). Rozpatrzmy chwilę, gdy H_1 przybrało wartość największą, wówczas $H_2 = 0$. Wypadkowe natężenie pola w takiej chwili będzie

$$H = H_1.$$

W chwili następnej wartość H_1 się zmieni, a mianowicie zmniejszy się, zaś wartość H_2 wzrośnie; wskutek tego wypadkowa H zmieni swój kierunek i t. d., obracając się o pewien kąt od położenia pierwotnego. Łatwo zauważyć, że wektor natężenia pola obraca się z szybkością częstotliwości prądu zmiennego.

Pole, w którym natężenie zmienia w ten sposób swój kierunek, nazywamy polem wirującym.

Analogicznie otrzymalibyśmy pole wirujące, rozpatrując trzy, przesunięte względem siebie w przestrzeni, uzwojenia prądu trój-

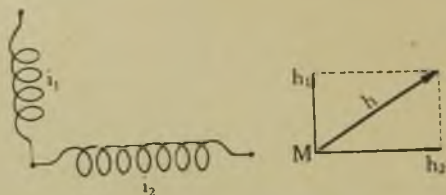


Fys. 85.

fazowego. Jak widzimy, warunkiem, koniecznym do powstania pola wirującego, jest obecność conajmniej dwóch składowych natężenia pola, przesuniętych względem siebie i w czasie i w przestrzeni.

Własności wirujących pól magnetycznych są wyzyskane w elektrotechnice w silnikach, licznikach indukcyjnych i t. d.

Rozpatrzmy teraz jakie krzywe linje opisuje koniec wektora natężenia pola w dowolnym punkcie wirującego pola magnetycznego, w niektórych szczególnych przypadkach. Przy prądzie dwufazowym z jednakowym obciążeniem faz, będziemy mieli (rys. 86)



Rys. 86.

$$i_1 = I_m \sin(\omega t - \varphi),$$

$$i_2 = -I_m \cos(\omega t - \varphi).$$

Oznaczając wartości chwilowe natężenia pola, wywołanego temi prądami, w dowolnym punkcie M pola przez h_1 i h_2 , zaś ich wypadkową przez h , będziemy mieli

$$h_1 = H_m \sin(\omega t - \varphi),$$

$$h_2 = -H_m \cos(\omega t - \varphi).$$

Składowe te są prostopadłe do siebie. Biorąc osie współrzędnych w ten sposób, aby w punkcie M był początek, oś X była skierowana w prawo w kierunku składowej h_2 , zaś oś Y prostopadłe do góry w kierunku składowej h_1 , będziemy mieli dla końca wektora natężenia pola h następujące współrzędne

$$x = -H_m \cos(\omega t - \varphi),$$

$$y = H_m \sin(\omega t - \varphi).$$

Z tych równań otrzymujemy

$$x^2 + y^2 = H_m^2.$$

Jest to równanie koła ze środkiem w początku współrzędnych i z promieniem równym H_m . To znaczy, że koniec wektora, którego moduł wynosi H_m , opisuje koło z prędkością kątową ω .

Jeżeli przy prądzie dwufazowym obciążenia obu faz są różne, ale prądy płynące w fazach są jednakowo przesunięte w fazie względem swych sił elektromotorycznych, wówczas

$$i_1 = I_{1m} \sin(\omega t - \varphi),$$

$$i_2 = -I_{2m} \cos(\omega t - \varphi),$$

$$y = h_1 = H_{1m} \sin(\omega t - \varphi),$$

$$x = h_2 = -H_{2m} \cos(\omega t - \varphi),$$

skąd

$$\frac{x^2}{H_{2m}^2} + \frac{y^2}{H_{1m}^2} = 1.$$

Jest to równanie elipsy. Koniec wektora h opisuje więc z prędkością kątową ω elipsę, której półosie równe są H_{1m} i H_{2m} .

Przy prądzie trójfazowym, w układzie gwiazdowym z jednakowym obciążeniem wszystkich faz, mamy

$$i_1 = I_m \sin(\omega t - \varphi),$$

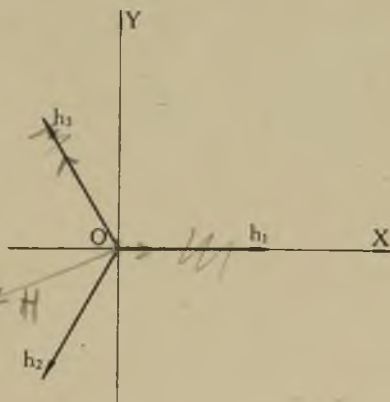
$$i_2 = I_m \sin\left(\omega t - \varphi - \frac{2}{3}\pi\right),$$

$$i_3 = I_m \sin\left(\omega t - \varphi + \frac{2}{3}\pi\right);$$

$$h_1 = H_m \sin(\omega t - \varphi),$$

$$h_2 = H_m \sin\left(\omega t - \varphi - \frac{2}{3}\pi\right),$$

$$h_3 = H_m \sin\left(\omega t - \varphi + \frac{2}{3}\pi\right).$$



Rys. 87.

Biorąc kierunek h_1 za oś X , zaś prostopadle do niej oś Y (rys. 87) i oznaczając rzuty wypadkowego wektora h na osi współrzędnych przez x i y , będziemy mieli

$$x = h_1 + h_2 \cos \frac{2}{3}\pi + h_3 \cos \frac{2}{3}\pi = h_1 - \frac{1}{2}(h_2 + h_3),$$

$$y = h_3 \cos \frac{\pi}{6} + h_2 \cos \frac{5}{6}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}(h_3 - h_2);$$

po podstawieniu wartości h_1 , h_2 i h_3 otrzymamy

$$\begin{aligned} x &= H_m \left\{ \sin(\omega t - \varphi) - \frac{1}{2} \left[\sin\left(\omega t - \varphi - \frac{2}{3}\pi\right) + \sin\left(\omega t - \varphi + \frac{2}{3}\pi\right) \right] \right\} = \\ &= H_m \left\{ \sin(\omega t - \varphi) - \frac{1}{2} \left[2 \sin(\omega t - \varphi) \cos \frac{2}{3}\pi \right] \right\} = \\ &= H_m \left\{ \sin(\omega t - \varphi) + \frac{1}{2} \sin(\omega t - \varphi) \right\} = \frac{3}{2} H_m \sin(\omega t - \varphi), \\ y &= \frac{\sqrt{3}}{2} H_m \left[\sin\left(\omega t - \varphi + \frac{2}{3}\pi\right) - \sin\left(\omega t - \varphi - \frac{2}{3}\pi\right) \right] = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} H_m \cdot 2 \sin \frac{2}{3}\pi \cos(\omega t - \varphi) = \frac{3}{2} H_m \cos(\omega t - \varphi), \end{aligned}$$

skąd

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{3}{2} H_m\right)^2;$$

koniec wektora h opisuje więc koło z prędkością kątową ω ; moduł tego wektora, czyli promień koła, wynosi $\frac{3}{2} H_m$.

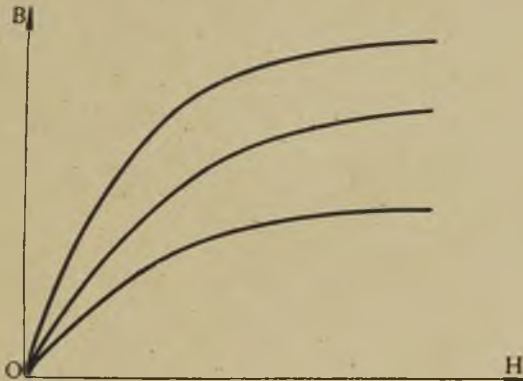
Przy obciążeniach niejednakowych koniec wektora h opisuje naogół złożone krzywe.

ROZDZIAŁ V.

ZJAWISKA MAGNETYCZNE PRZY PRĄDACH ZMIENNYCH.

§ 33. Histereza magnetyczna.

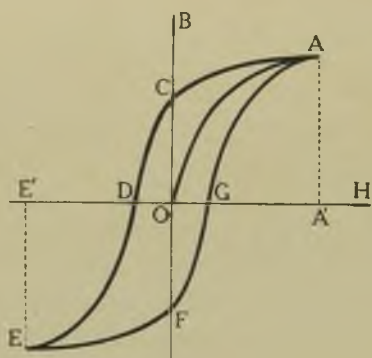
Gdy środowisko paramagnetyczne np. żelazo po raz pierwszy podlega magnesowaniu, indukcja B w tem środowisku wzrasta od zera do pewnej wartości, zależnie od natężenia pola magnetycznego H lub od wzbudzenia czyli liczby amperozwojów na cm. Przebieg indukcji w tym przypadku dają nam na wykresie charakterystyki magnesowania (rys. 88), kształt których zależy jest



Rys. 88.

od rodzaju środowiska paramagnetycznego. Jeżeli po namagnesowaniu środowiska zaczniemy zmniejszać indukcję przez zmniejszenie natężenia pola, wtedy indukcja nie będzie się zmieniała według tej samej krzywej, lecz z pewnym opóźnieniem. Na rys. 89 wskazany jest przebieg indukcji w przypadku magnesowania i rozmagnesowywania środowiska paramagnetycznego. Krzywa OA

jest to krzywa pierwotna, dająca przebieg indukcji w środowisku magniesowanym po raz pierwszy. Największa wartość indukcji AA' odpowiada wartości natężenia pola OA' . Gdy natężenie pola zacznie się zmniejszać, indukcja spada według krzywej AC , w ten sposób, że przy $H=0$, $B=OC$, to znaczy, że pomimo zniknięcia pola magnetycznego w środowisku pozostaje jeszcze tak zwany



Rys. 89.

magnetyzm szczątkowy, wobec czego indukcja magnetyczna nie staje się równa zero. Zmieniając następnie kierunek natężenia pola, zmieniamy indukcję według krzywej CDE w ten sposób, że w punkcie D , gdy $B=0$ natężenie pola H ma wartość ujemną OD . Taką wartość natężenia pola, która jest potrzebna dla sprowadzenia indukcji do zera, nazywamy natężeniem powściągającym (koercyjnym). Po doprowadzeniu indukcji B do wartości ujemnej EE' dla $H=OE'$, gdy za-

czniemy zmniejszać natężenie pola do zera, a następnie znów zmienimy kierunek na dodatni, wtedy indukcja będzie miała przebieg po krzywej $EFGA$. Rozpatrzone zjawisko, polegające na tem, że zmiana indukcji opóźnia się względem zmiany natężenia pola, nazywamy histerezą magnetyczną. Obie krzywe $ACDEFGA$ tworzą t. zw. obieg albo cykl histerezy. Obieg ten dla różnych środowisk ma różny kształt i zależy również od największej wartości B , do której doprowadzamy namagnesowanie.

Przy prądzie zmiennym powstaje pole magnetyczne o zmiennym natężeniu; liczba zmian odpowiada częstotliwości prądu zmiennego. Oczywiście, że w środowisku paramagnetycznym, znajdującym się w takim polu magnetycznym, zachodzi zjawisko histerezy magnetycznej. Dla przyrostu energii magnetycznej W_m , odniesionej do jednostki objętości obwodu magnetycznego, gdy indukcja zmienia się od O do B , mamy wzór znany z fizyki

$$W_m = \frac{1}{4\pi} \int_0^B H dB.$$

Łatwo jest zauważyć, że całka w tym wzorze odpowiada powierzchni OAM (rys. 90). Możemy więc powiedzieć, że energia magnetyczna przy zmianie indukcji od O do B jest proporcjo-

od materiału; tak, np. dla blachy twornikowej współczynnik ten wynosi od 0,001 do 0,002, dla stali od 0,01 do 0,02.

Drugi wzór, podany przez Richtera, ma postać

$$P_H = f \left[\alpha \left(\frac{B_m}{1000} \right) + \beta \left(\frac{B_m}{1000} \right)^2 \right] \text{ watów,}$$

gdzie P_H , f i B_m mają te same znaczenia, co i w poprzednim wzorze Steinmetza, zaś α i β stanowią współczynniki zależne od materiału.

Jak widać, w obu tych wzorach, strata mocy z histerezy jest proporcjonalna do częstotliwości indukcji magnetycznej.

Rozpatrzmy teraz jaki wpływ wywiera zjawisko histerezy magnetycznej na przebieg prądu zmiennego, powodującego zmienne pole magnetyczne. Jeżeli mamy np. cewkę, posiadającą z zwojów o bardzo małej oporności rzeczywistej, bez rdzenia żelaznego i przez tę cewkę przepuścimy prąd zmienny o przebiegu sinusoidalnym, wówczas indukcja magnetyczna w żelazie również będzie miała przebieg sinusoidalny; powstanie w żelazie strumień magnetyczny, którego wartość chwilową Φ_t możemy wyrazić wzorem

$$\Phi_t = \Phi_m \sin \omega t.$$

Pod wpływem tego zmiennego w czasie strumienia powstaje w cewce siła elektromotoryczna indukcji własnej, której wartość chwilową określamy ze znanego wzoru

$$e = -z \frac{d\Phi_t}{dt} = -\omega z \Phi_m \cos \omega t = \omega z \Phi_m \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right);$$

z tego wzoru widzimy, że największa wartość siły elektromotorycznej indukcji własnej wynosi $\omega z \Phi_m$ i że ta siła elektromotoryczna jest opóźniona w fazie względem wywołującego ją strumienia o kąt prosty. Jeżeli rozpatrywany strumień powoduje powstanie siły elektromotorycznej, to naodwrot dla otrzymania takiego strumienia musimy z zewnątrz dać napięcie, które w każdej chwili będzie

$$u = -e$$

czyli
$$u = -\omega z \Phi_m \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) = \omega z \Phi_m \cos \omega t =$$

$$= \omega z \Phi_m \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right).$$

Jak widzimy, napięcie z zewnątrz przyłożone jest przyśpieszone w fazie względem strumienia magnetycznego o kąt prosty, czyli strumień magnetyczny jest opóźniony w fazie o kąt prosty względem wywołującego go napięcia. W przypadku powstawania siły elektromotorycznej indukcji własnej, strumień magnetyczny jest przyczyną, zaś siła elektromotoryczna skutkiem, w drugim przypadku przyczyną jest napięcie, zaś skutkiem jest strumień magnetyczny; widzimy więc, że w rozpatrywanym zagadnieniu skutek jest opóźniony względem przyczyny o kąt prosty.

Z ostatniego wzoru wynika, że maksymalna wartość U_m napięcia z zewnątrz przyłożonego wynosi

$$U_m = \omega z \Phi_m = 2\pi f z \Phi_m; \quad (1)$$

wprowadzając wartość skuteczną U tegoż napięcia, będziemy mieli

$$U \sqrt{2} = 2\pi f z \Phi_m,$$

skąd

$$U = \sqrt{2} \pi f z \Phi_m,$$

ponieważ $\sqrt{2} \pi$ w przybliżeniu równa się 4,44, zaś dla wyrażenia napięcia w woltach należy prawą stronę ostatniego wzoru pomnożyć przez 10^{-8} , otrzymamy wzór praktyczny, w elektrotechnice używany,

$$U = 4,44 f z \Phi_m 10^{-8} \text{ woltów} \quad (2)$$

lub

$$\Phi_m = \frac{U \cdot 10^8}{4,44 f z} \text{ makswełów} \quad (3)$$

i tak samo dla siły elektromotorycznej indukcji, powstającej pod wpływem strumienia magnetycznego Φ , będziemy mieli w jednostkach bezwzględnych

$$E_m = 2\pi f z \Phi_m, \quad (4)$$

$$E = \sqrt{2} \pi f z \Phi_m,$$

zaś w woltach

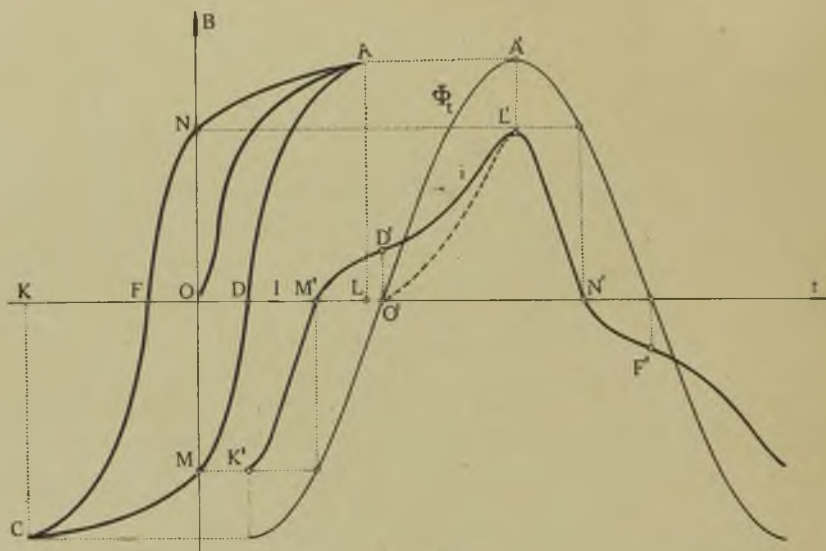
$$E = \sqrt{2} \pi f z \Phi_m 10^{-8} \cong 4,44 f z \Phi_m 10^{-8} \text{ woltów.} \quad (5)$$

Ponieważ strumień Φ_m opóźniony jest w fazie względem napięcia U o kąt prosty, tak samo jak i prąd przy oporności indukcyjnej, wnioskować możemy, że prąd I , przepływający przez cewkę

jest w fazie ze strumieniem Φ . Prąd ten I nazywamy prądem wzbudzającym lub magnesującym.

Rozpatrzmy, jaki jest przebieg prądu magnesującego w porównaniu z przebiegiem indukcji lub strumienia magnetycznego, gdy w cewce jest rdzeń żelazny, a więc w obecności zjawiska histerezy magnetycznej.

Strumień Φ_i z biegiem czasu ma przebieg sinusoidalny; prąd magnesujący $O'L'$ (rys. 92), odpowiadający krzywej pierwotnej indukcji OA , jest w fazie ze strumieniem, natomiast przy na-



Rys. 92.

stępem magnesowaniu skutek histerezy zachodzi przesunięcie fazy prądu względem strumienia, przyczem krzywa prądu staje się odkształcona.

Krzywa $K'M'D'L'$ odpowiada krzywej indukcji $CMDA$, zaś krzywa $L'N'F'$ — krzywej indukcji ANF , $O'D' = OD$, punktem M i N (prąd równy zero) odpowiadają punkty M' i N' na krzywej prądu i t. d. Widzimy, że wobec zjawiska histerezy krzywa prądu $K'D'L'N'$ jest odkształcona i przesunięta w fazie względem strumienia w ten sposób, że prąd wyprzedza w fazie strumień. Prąd ten możemy rozpatrywać jako sumę dwóch prądów: takiego, który idzie na magnesowanie, jest to prąd wzbudzający czyli magnesujący i_{mg} , oraz prądu, idącego na wytworzenie ciepła, wywołanego zjawiskiem histerezy, oznaczymy go przez i_h .

$$i = i_{mg} + i_h.$$

Dla przybliżonych rozważań wprowadzamy zamiast prądu odkształconego prąd zastępczy sinusoidalny, mający tę samą wartość skuteczną, co istniejący prąd i takie przesunięcie w fazie względem napięcia, aby moc czynna prądu sinusoidalnego była równą mocy, wytwarzającej ciepło histerezy; wówczas wartość skuteczną I takiego zastępczego prądu sinusoidalnego możemy rozłożyć na sumę geometryczną prądu magnesującego I_{mg} i prądu I_h , idącego na wytwarzanie ciepła histerezy, czyli

$$\bar{I} = \bar{I}_{mg} + \bar{I}_h.$$

Pierwszy prąd I_{mg} jest w fazie ze strumieniem, drugi zaś I_h (czynny) jest w fazie z napięciem

Oba te prądy i prąd wypadkowy przedstawione są na rys. 93.

Oznaczając kąt odchylenia prądu od strumienia z powodu histerezy przez α , widzimy, że

$$I_h = I \sin \alpha$$

oraz

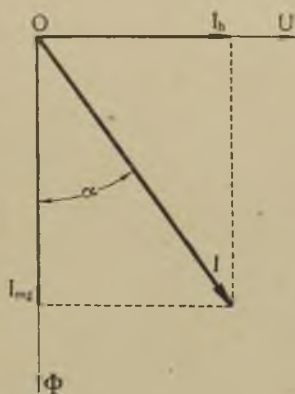
$$I_{mg} = I \cos \alpha;$$

kąt α nazywamy kątem histerezy. Jest on tem większy im większy jest wpływ histerezy. Mnożąc U przez I_h , otrzymamy moc prądu, straconego na histerezę P_h , czyli

$$P_h = U I_h = U I \sin \alpha.$$

§ 34. Prądy wirowe.

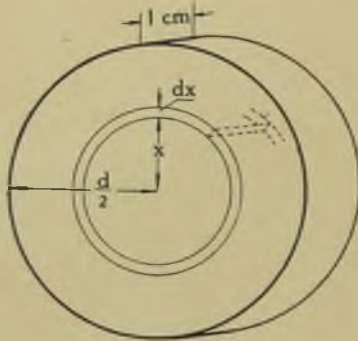
W masach metalowych, znajdujących się w zmiennem polu magnetycznem, powstają prądy indukcyjne, mające naogół różne kierunki i tworzące jakby wiry w tych masach. Prądy te, spostrzeżone przez fizyka Foucault, zwane są prądami wirowymi lub prądami Foucault'a; wytwarzają one ciepło i powodują w ten sposób stratę mocy. Straty te naogół można obliczyć tylko w przybliżeniu, zakładając, że mają one przebieg prawidłowy i że indukcja magnetyczna we wszystkich punktach rozpatrywanej masy ma jednakową wartość. W elektrotechnice musimy się liczyć prze-



Rys. 93.

ważnie ze stratami mocy, powstającymi w środowiskach paramagnetycznych, gdzie indukcja magnetyczna osiąga największe wartości, a więc głównie w masach żelaznych w postaci okrągłych drutów lub blachy. Ograniczymy się więc tylko do tych dwóch przypadków.

Rozpatrzmy kawałek okrągłego drutu o długości 1 cm. i grubości d cm., znajdującego się w zmiennym polu magnetycznym (rys. 94). Indukcja magnetyczna, a więc i strumień mają kierunek prostopadły do płaszczyzny przekroju poprzecznego i równoległy do osi czyli do długości tego drutu.



Rys. 94.

Podzielmy cały drut na nieskończenie wielką liczbę walców o ściankach nieskończenie małej grubości dx , mających jedną i tę samą oś. Rozpatrując jeden z takich walców w odległości x od osi, otrzymamy obwód zamknięty o długości $2\pi x$ cm i przekroju $dx \cdot 1 = dx$ cm². Pole, objęte tym

obwodem wynosi πx^2 . Zakładając, że pole magnetyczne, w którym się znajduje rozpatrywany kawałek drutu, jest jednostajne i oznaczając przez B_m maksymalną wartość indukcji w dowolnym punkcie, otrzymamy dla maksymalnej wartości strumienia, objętego rozpatrywanym obwodem, wzór

$$\Phi_{xm} = \pi x^2 B_m.$$

Oznaczając przez E_x wartość skuteczną siły elektromotorycznej indukcji, powstającej w obwodzie pod wpływem tego strumienia, będziemy mieli na podstawie wzoru (5)

$$E_x = 4,44 f \Phi_{xm} 10^{-8} \text{ woltów,}$$

albo

$$E_x = 4,44 f \pi x^2 B_m 10^{-8} \text{ woltów.}$$

Oporność rozpatrywanego obwodu wynosi

$$R_x = \rho \frac{2\pi x}{dx},$$

gdzie ρ oznacza oporność właściwą metalu drutu. Strata mocy w postaci ciepła wyniesie

$$dP_x = I^2_x R^2_x = \frac{E^2_x}{R_x} =$$

$$= \frac{(4,44)^2 f^2 \pi^2 x^4 B_m^2 10^{-16}}{\rho 2 \pi x} dx = \frac{10 \pi f^2 B_m^2 x^3 10^{-16}}{\rho} dx \text{ watów.}$$

Dla znalezienia strat w kawałku drutu o długości 1 cm wzór ten należy scałkować w granicach zmiany x , czyli od zera do $d/2$.
Otrzymamy

$$P_w = \frac{10 \pi f^2}{\rho} B_m^2 \left| \frac{x^4}{4} \right|_0^{d/2} 10^{-16} = \frac{5}{32} \frac{\pi f^2}{\rho} B_m^2 d^4 10^{-16} \text{ watów.}$$

Dla otrzymania straty mocy na 1 cm³ objętości żelaza, musimy ostatni wyraz podzielić przez $\frac{\pi d^2}{4}$; więc strata na 1 cm³ żelaza wynosi

$$P_m' = \frac{5}{8} \frac{f^2}{\rho} B_m^2 d^2 10^{-16} \text{ watów.}$$

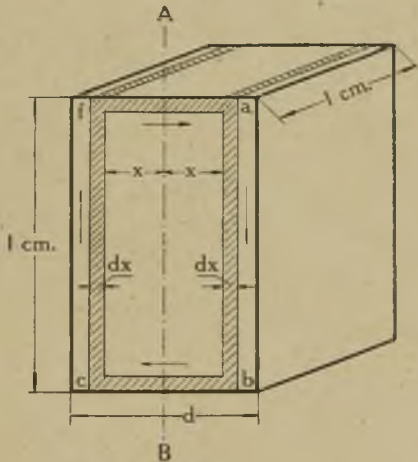
Dla określenia straty mocy, zachodzącej w blasze, rozpatrzmy kawałek blachy o długości 1 cm i o przekroju poprzecznym następujących wymiarów: grubość d cm i szerokość 1 cm (rys. 95). Indukcja magnetyczna ma kierunek prostopadły do płaszczyzny przekroju i wartość jednakową we wszystkich punktach.

Podzielmy rozpatrywany kawałek blachy na nieskończenie cienkie blaszki o grubości dx . Dwie takie blaszki, rozmieszczone symetrycznie po obu stronach linii środkowej AB w dowolnej odległości x , łącznie z bokami, możemy rozpatrywać jako obwód $abc f$ dla prądu, powstającego pod wpływem siły elektromotorycznej indukcji. Pole objęte tym obwodem wynosi $2x$ cm², więc odpowiedni strumień magnetyczny będzie

$$\Phi_{xm} = 2x B_m,$$

wobec tego siła elektromotoryczna indukcji, powstająca w tym obwodzie będzie

$$E_x = 4,44 f 2x B_m 10^{-8} \text{ woltów.}$$



Rys. 95.

Długość obwodu możemy w przybliżeniu przyjąć równą 2 cm, nie uwzględniając krótkich boków o długości 2x; przekrój obwodu prądowego wynosi $dx \cdot 1 = dx \text{ cm}^2$; wobec tego oporność będzie

$$R_x = \rho \frac{2}{dx}.$$

Strata mocy w rozpatrywanym obwodzie wynosi

$$dP_x = \frac{E_x^2}{R_x} \cong \frac{40 f^2 B_m^2 x^2 dx 10^{-16}}{\rho} \text{ watów.}$$

Stratę mocy dla całego kawałka blachy otrzymamy, całkując wzór ten w granicach na x od 0 do $d/2$, czyli

$$\begin{aligned} P_w &= \int_0^{d/2} \frac{40 f^2 B_m^2 x^2 dx}{\rho} 10^{-16} = \frac{40 f^2 B_m^2}{\rho} 10^{-16} \left| \frac{x^3}{3} \right|_0^{d/2} = \\ &= \frac{40 f^2 B_m^2 d^3}{\rho \cdot 24} 10^{-16} = \frac{5}{3} \frac{d^3 f^2 B_m^2}{\rho} 10^{-16} \text{ watów.} \end{aligned}$$

Dla określenia straty mocy na 1 cm^3 objętości blachy musimy podzielić powyższy wzór przez objętość rozpatrzonego kawałka czyli przez $d \times 1 \times 1 = d$; w ten sposób strata mocy na 1 cm^3 wyniesie

$$P'_w = \frac{5}{3} \frac{d^2}{\rho} f^2 B_m^2 10^{-16} \text{ watów.}$$

Z wyprowadzonych wzorów na stratę mocy z prądów wirowych widzimy, że straty te są proporcjonalne do kwadratu częstotliwości f oraz do kwadratu indukcji magnetycznej B_m i są odwrotnie proporcjonalne do oporności właściwej metalu, z którego sporządzone są drut lub blacha.

Przy dużych masach żelaza w zmiennym polu magnetycznym otrzymalibyśmy bardzo znaczne straty z prądów wirowych, szczególnie przy znacznej grubości drutu lub blachy. W celu zmniejszenia tych strat robimy zazwyczaj rdzeń żelazny nie z jednolitego kawałka, lecz z cienkich drutów lub też blach, przekładanych izolacją (np. dobrym suchym papierem lub lakierem). Również, w celu zmniejszenia strat z prądów wirowych, używamy zamiast czystego żelaza, stopów czyli aliaży np. żelaza z domieszką krzemu. Oporność właściwa takich stopów jest większa od oporności właściwej żelaza i przez to straty mocy na prądy wirowe są mniejsze.

Gatunki żelaza pod względem strat z histerezy i prądów wirowych często określamy za pomocą t. zw. stratności magnetycznej, rozumiejąc pod tą nazwą straty powyższe, wyrażone w watach na 1 kg żelaza, otrzymywane przy $B_m = 10000$ gausów, $f = 50$ okresów na sek., przy temperaturze 30° C. Dla żelaza czystego ta stratność wynosi od $2 - 4 \frac{W}{kg}$, dla aljaży od $1 - 2 \frac{W}{kg}$.

Oba zjawiska rozpatrzone: histereza i prądy wirowe powstają jednocześnie i nierozłącznie. Za pomocą pomiarów, możemy określić całkowitą stratę mocy. Dla obliczenia, jaka część strat przypada z prądów wirowych, jaka zaś z histerezy, rozumujemy w sposób następujący: ze wzoru (2)

$$\Phi_m = \frac{U 10^3}{4,44 f z};$$

widzimy, że dla osiągnięcia warunku, aby Φ_m lub, co na jedno wychodzi, B_m miały wartość stałą przy zmianie f , musimy dla stałej liczby zwojów z w jednakowym stosunku zmieniać napięcie U i częstotliwość f prądu, służącego do badań. Gdy $B = const$, straty z prądów wirowych i histerezy dla danego materiału będą zależne tylko od częstotliwości, a mianowicie

$$P_H = k_1 f \text{ oraz } P_w = k_2 f^2,$$

gdzie k_1 i k_2 stanowią w tym przypadku stałe współczynniki.

Całkowita zaś strata

$$P = P_H + P_w = k_1 f + k_2 f^2.$$

Strata, przypadająca na jeden okres prądu zmiennego, będzie

$$\frac{P}{f} = k_1 + k_2 f.$$

Mierząc całkowite straty w badanym materiale przy rozmaitych częstotliwościach, lecz przy stałej wartości indukcji magnetycznej i dzieląc te straty przez liczbę okresów, możemy rezultaty przedstawić na wykresie (rys. 96).

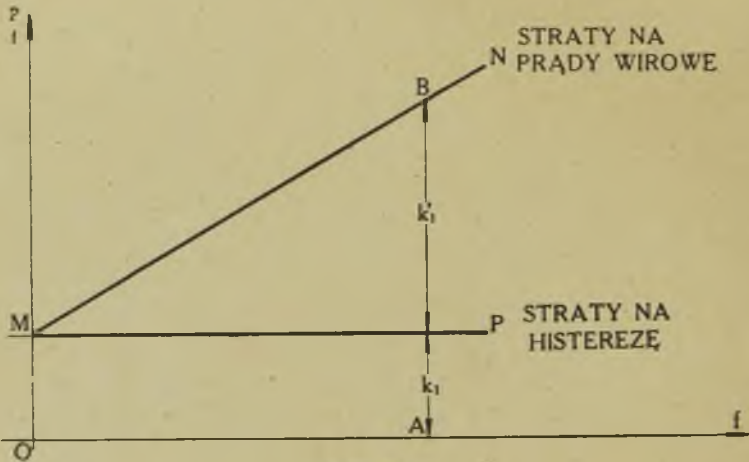
Na osi odciętych odkładamy wartości częstotliwości f — na osi rzędnych straty $\frac{P}{f} = k_1 + k_2 f$, otrzymamy wówczas prostą MN . Jasnym jest, że $OM = k_1$ i że prosta MP , przeprowadzona równoległe do osi odciętych, daje nam wartości strat z histerezy,

przypadające na jeden okres. Różnica rzędnych punktów, leżących na prostych MN i MP , daje nam straty z prądów wirowych, również obliczone na jeden okres.

Np.

$$AB = k_1 + k_1'$$

przedstawia stratę na jeden okres z prądów wirowych i histerezy, dla wartości $f = OA$; k_1 stanowi stratę z histerezy, zaś k_1' — z prądów wirowych.



Rys. 96.

Przytaczamy parę przykładów.

Dla blachy twornikowej przy $B_m = 10000$ gausów oraz częstotliwości $f = 50$ okresów na sek.

$$\text{straty } P_H = 2,25 \text{ W/kg}$$

$$P_w = 1,31 \text{ W/kg}$$

$$\text{razem } P = 3,56 \text{ W/kg};$$

dla blachy aljażowej przy tych samych wartościach B_m i f

$$P_H = 1,78 \text{ W/kg}$$

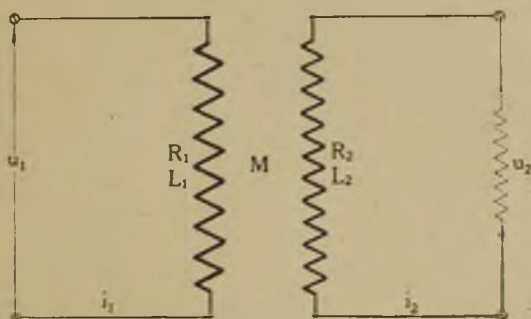
$$P_w = 0,18 \text{ W/kg}$$

$$P = 1,96 \text{ W/kg}.$$

§ 35. Obwody magnetycznie sprzężone. Transformator powietrzny.

Przypuśćmy, że mamy dwa obwody, zawierające uzwojenia (rys. 97), pierwotny i wtórny; przez obwód pierwotny płynie prąd i_1 , we wtórnym zaś powstaje prąd i_2 przez indukcję. Mówimy, że takie obwody są sprzężone magnetycznie. Obwody magnetycznie sprzężone dają możliwość zmiany napięcia i natężenia prądu za pomocą odpowiedniej zmiany liczby zwojów. Zespół uzwojeń tego rodzaju nazywamy naogół transformatorem, służy on do przetwarzania prądu zmiennego jednego napięcia na prąd o innym napięciu.

Transformatory bywają powietrzne lub z rdzeniem żelaznym, zależnie od tego, czy uzwojenia znajdują się w powietrzu, czy też zawierają w sobie masy żelazne. Rozpatrzmy najpierw transformator powietrzny.



Rys. 97.

Oznaczmy oporność pierwotnego uzwojenia przez R_1 , jego indukcyjność własną przez L_1 , całego zaś obwodu wtórnego przez R_2 oraz L_2 ; indukcyjność wzajemna obu obwodów niech będzie M .

Na zasadzie znanych wzorów, oznaczając przez u_1 wartość chwilową napięcia, z zewnątrz przyłożonego do uzwojenia pierwotnego, możemy napisać

$$u_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

oraz

$$0 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}.$$

Wprowadzając zamiast wartości chwilowych wartości skutecz-

ne, przepiszemy te wzory symbolicznie

$$\hat{U} = R_1 \hat{I}_1 + j \omega L_1 \hat{I}_1 + j \omega M \hat{I}_2 \quad (6)$$

oraz

$$0 = R_2 \hat{I}_2 + j \omega L_2 \hat{I}_2 + j \omega M \hat{I}_1. \quad (7)$$

Z ostatniego wzoru otrzymujemy

$$j \omega M \hat{I}_1 = - (R_2 + j \omega L_2) \hat{I}_2,$$

$$\begin{aligned} \frac{\hat{I}_1}{\hat{I}_2} &= - \frac{L_2}{M} - \frac{R_2}{j \omega M} = - \frac{L_2}{M} + \frac{j R_2}{\omega M} = \frac{j}{\omega M} (R_2 + j \omega L_2)_2 = \\ &= - \frac{\omega L_2}{\omega M} + j \frac{R_2}{\omega M}. \end{aligned}$$

Stąd znaleźć możemy od razu wartość (moduł) stosunku prądów I_1 i I_2 oraz kąt przesunięcia fazy δ pomiędzy nimi. Mianowicie

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{\omega M} \sqrt{R_2^2 + (\omega L_2)^2},$$

skąd

$$I_2 = \frac{\omega M}{\sqrt{R_2^2 + (\omega L_2)^2}} I_1,$$

zaś

$$\operatorname{tg} \delta = - \frac{R_2}{\omega L_2},$$

przyczem $90^\circ \leq \delta \leq 180^\circ$;

gdym

$$R_2 = 0, \quad \operatorname{tg} \delta = 0 \text{ i } \delta = 180^\circ;$$

czyli wektory, wyobrażające prądy I_1 i I_2 , byłyby w tym przypadku skierowane w kierunkach przeciwnych sobie.

Zobaczmy teraz, jaki jest stosunek prądu I_1 do napięcia U_1 . Podstawiając ze wzoru (7)

$$\hat{I}_2 = - \frac{j \omega M}{R_2 + j \omega L_2} \cdot \hat{I}_1$$

do wzoru (6), otrzymujemy

$$\begin{aligned} \hat{U}_1 &= R_1 \hat{I}_1 + j \omega L_1 \hat{I}_1 + \frac{\omega^2 M^2}{R_2 + j \omega L_2} \hat{I}_1 = \\ &= \hat{I}_1 \left\{ R_1 + j \omega L_1 + \frac{(R_2 - j \omega L_2) \omega^2 M^2}{R_2^2 + \omega^2 L_2^2} \right\}. \end{aligned}$$

Łącząc razem liczby rzeczywiste i urojone, otrzymamy

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_1 \left[R_1 + \frac{R_2 (\omega M)^2}{R_2^2 + (\omega L_2)^2} + j \left[\omega L_1 - \frac{(\omega L_2) (\omega M)^2}{R_2^2 + (\omega L_2)^2} \right] \right]$$

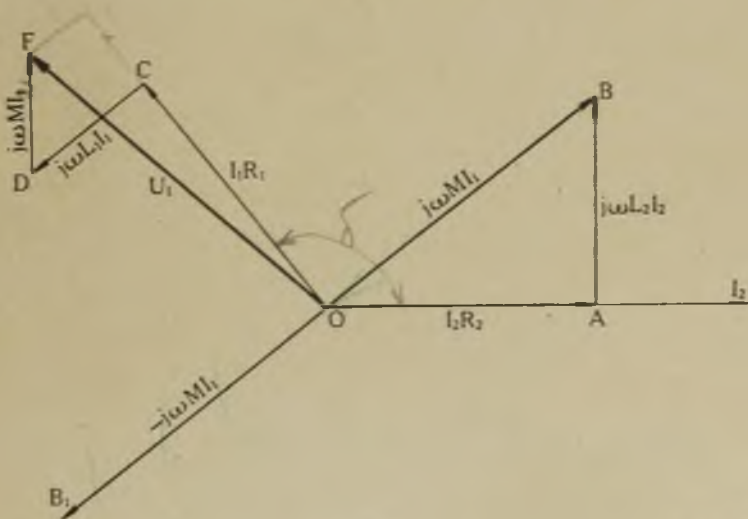
Z tego wzoru widzimy, że wyraz, stojący w głównych nawiasach, stanowi oporność pozorną obwodu pierwotnego z uwzględnieniem indukcyjnego wpływu obwodu wtórnego. Oporność rzeczywista jest tu zwiększona o

$$\frac{R_2^2 (\omega M)^2}{R_2^2 + (\omega L_2)^2}$$

zaś oporność urojona zmniejszona o

$$\frac{(\omega L_2) (\omega M)^2}{R_2^2 + (\omega L_2)^2}$$

To samo zagadnienie możemy rozpatrzyć na wykresie, przedstawiając najpierw wzór (7), następnie wzór (6). Wykres taki daje również możliwość obliczenia dwóch wielkości z trzech: U_1 , I_1 , I_2 , gdy jedna jest wiadoma.



Rys. 98.

Za oś początkową obieramy kierunek prądu wtórnego I_2 , zupełnie zresztą dowolny (rys. 98). Od punktu O odkładamy w tym kierunku odcinek $OA = I_2 R_2$. Do tego odcinka OA dodać

musimy geometrycznie pod kątem prostym naprzód odcinek $AB = j\omega L_2 I_2$. Wektor zamykający będzie

$$OB = -j\omega M I_1.$$

Wektor $OB_1 = j\omega M \bar{I}_1$ będzie miał wobec tego kierunek odwrotny; w ten sposób otrzymujemy wartość $\omega M I_1$, a więc i wartość I_1 . W celu wykreślenia wektora $OC = R_1 I_1$ cofamy się o kąt $\frac{\pi}{2}$ wstecz od OB_1 . Następnie od punktu C dodajemy do wektora OC pod kątem prostym naprzód odcinek $CD = j\omega L_1 I_1$. Od punktu D w kierunku równoległym do AB odkładamy wektor $DF = j\omega M I_2$. Wektor zamykający OF przedstawia napięcie U_1 z zewnątrz przyłożone.

Jeżeli w obwodzie nie uwzględniamy rozproszenia, wtedy

$$M^2 = L_1 L_2.$$

Jeżeli zaś rozproszenie uwzględniamy, wówczas

$$M = \frac{\sqrt{L_1 L_2}}{\sqrt{\sigma_1 \sigma_2}} = k \sqrt{L_1 L_2},$$

gdzie wielkości σ_1 i σ_2 oznaczają współczynniki rozproszenia Hopkinsona dla obwodów pierwotnego i wtórnego.

Spółczynnik

$$k = \frac{1}{\sqrt{\sigma_1 \sigma_2}}$$

nazywamy współczynnikiem sprzężenia magnetycznego.

W przypadku, gdy niema rozproszenia, $k = 1$; w dobrych transformatorach technicznych (z żelazem) k wynosi od 0,99 do 1 czyli 99 do 100%. W małych transformatorach powietrznych k wynosi niekiedy zaledwie 0,1%.

§ 36. Transformator z rdzeniem żelaznym.

Przypuśćmy, że mamy dwa uzwojenia na wspólnym rdzeniu żelaznym, czyli transformator z rdzeniem żelaznym; pierwsze uzwojenie niech ma z_1 , drugie z_2 zwojów. Jeżeli oznaczymy wartość chwilową zmiennego strumienia magnetycznego, powstającego pod wpływem przechodzącego prądu zmiennego w każdym zwoju 1-go uzwojenia przez Φ_1 i założymy najpierw, że niema

rozproszenia magnetycznego, wtedy w obu uzwojeniach powstają siły elektromotoryczne indukcji o wartości chwilowej

$$e_1 = -z_1 \frac{d\Phi_t}{dt}$$

oraz

$$e_2 = -z_2 \frac{d\Phi_t}{dt}.$$

Stosunek

$$\frac{e_1}{e_2} = \frac{z_1}{z_2} \quad (8)$$

nazywamy przekładnią transformatora.

Oznaczmy przez i_0 prąd, który musimy przepuścić przez uzwojenie pierwotne, aby otrzymać strumień magnetyczny czyli wzbudzenie magnetyczne, wywołujące siłę elektromotoryczną indukcji w drugim obwodzie, z uwzględnieniem strat z prądów wirowych i histerezy magnetycznej; prąd ten możemy nazwać prądem magnesującym. Oznaczmy następnie prąd, powstający we wtórnym uzwojeniu, przez i_2 . Wówczas moc prądu we wtórnym uzwojeniu wyrazi się jako iloczyn $e_2 i_2$. Aby ją otrzymać musimy w pierwotnym uzwojeniu oprócz prądu i_0 mieć prąd i'_1 , którego moc $= e_1 i'_1$.

Moc, oddawana w pierwszym uzwojeniu przez prąd czynny, powinna się równać mocy, pobieranej we wtórnym uzwojeniu.

Wobec tego

$$e_1 i'_1 = -e_2 i_2. \quad (9)$$

Całkowity prąd i_1 , jaki będzie przepływał w pierwszym obwodzie, stanowi sumę prądów i_0 oraz i'_1 , czyli

$$i_1 = i_0 + i'_1. \quad (10)$$

Ze wzoru (9) z uwzględnieniem wzoru (8), mamy

$$\frac{e_1}{e_2} = -\frac{i_2}{i'_1} = \frac{z_1}{z_2},$$

skąd

$$z_1 i'_1 + z_2 i_2 = 0.$$

Podstawiając tu zamiast i'_1 jego wartość ze wzoru (10), otrzymujemy

$$z_1 (i_1 - i_0) + z_2 i_2 = 0,$$

lub inaczej

$$z_1 i_1 + z_2 i_2 = z_1 i_0.$$

Słowami możemy to wyrazić tak. Suma amperozwojów pierwotnego i wtórnego uzwojenia powinna się równać amperozwojom prądu magnesującego, przepływającego w pierwszym uzwojeniu.

Z ostatniego wzoru możemy napisać

$$i_1 = i_0 - \frac{z_2}{z_1} i_2,$$

Oznaczmy wyraz $-\frac{z_2}{z_1} i_2$ przez i'_2 .

Iloczyn $z_2 i_2$ stanowi amperozwoje wtórnego uzwojenia; one są podzielone przez liczbę zwojów pierwszego uzwojenia. Prąd i'_2 można więc określić jako prąd wtórny, zredukowany do uzwojenia pierwotnego i wzięty ze znakiem —.

Wobec tego możemy napisać

$$i_1 = i_0 + i'_2. \quad 11$$

Rozpatrzmy teraz przypadek, gdy uwzględniamy rozproszenie magnetyczne. Oznaczmy wartości chwilowe strumienia magnetycznego wspólnego dla obu obwodów przez Φ_t , strumień rozproszenia pierwotnego obwodu przez Φ_{r1} , zaś strumień rozproszenia obwodu wtórnego przez Φ_{r2} . Całkowity strumień, objęty przez uzwojenie pierwotne, będzie miał wartość

$$\Phi_t + \Phi_{r1},$$

zaś przez uzwojenie wtórne

$$\Phi_t + \Phi_{r2}.$$

Siła elektromotoryczna indukcji, powstająca w pierwszym uzwojeniu, będzie miała wartość

$$- z_1 \frac{d\Phi_t}{dt} - z_1 \frac{d\Phi_{r1}}{dt},$$

zaś w drugim uzwojeniu

$$- z_2 \frac{d\Phi_t}{dt} - z_2 \frac{d\Phi_{r2}}{dt}.$$

Rozproszenie zachodzi przeważnie w powietrzu. Strumień rozproszenia w tym przypadku jest proporcjonalny do prądu,

przepływającego w obwodzie. Oznaczmy indukcyjność od strumienia rozproszenia w pierwszym uzwojeniu przez L_{r1} , zaś w drugim przez L_{r2} , będziemy mieli

$$z_1 \Phi_{r1} = L_{r1} i_1;$$

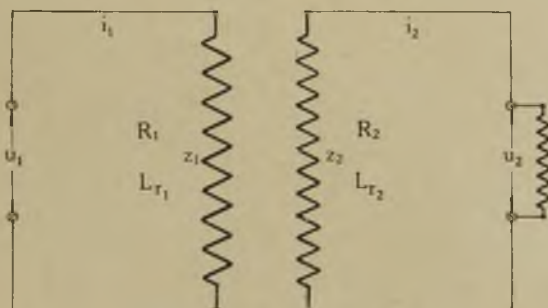
$$z_2 \Phi_{r2} = L_{r2} i_2.$$

Biorąc pochodne tych strumieni względem czasu i mając na uwadze, że w rozpatrywanym przypadku L_{r1} oraz L_{r2} mają wartości stałe, otrzymamy

$$z_2 \frac{d\Phi_{r2}}{dt} = L_{r2} \frac{di_2}{dt};$$

$$z_1 \frac{d\Phi_{r1}}{dt} = L_{r1} \frac{di_1}{dt}.$$

Oznaczmy przez u_1 wartość chwilową napięcia z zewnątrz przyłożonego do pierwotnego uzwojenia, przez R_1 jego oporność rzeczywistą (rys. 99), przez L_{r1} indukcyjność rozproszenia oraz z_1



Rys. 99.

ilość zwojów. Dla uzwojenia wtórnego te same wielkości niech mają wartości R_2 , L_{r2} , z_2 ; następnie niech u_2 oznacza napięcie na zaciskach odbiornika, włączonego do wtórnego uzwojenia. Oba uzwojenia znajdują się na rdzeniu żelaznym.

Według prawa Ohma w każdej chwili musi zachodzić zależność następująca

$$u_1 - z_1 \frac{d\Phi_t}{dt} - L_{r1} \frac{di_1}{dt} = i_1 R_1$$

oraz

$$- z_2 \frac{d\Phi_t}{dt} - L_{r2} \frac{di_2}{dt} = i_2 R_2 + u_2.$$

Rozwiązując te równania względem u_1 i u_2 , otrzymujemy

$$u_1 = z_1 \frac{d\Phi_t}{dt} + i_1 R_1 + L_{r_1} \frac{di_1}{dt}$$

oraz

$$u_2 = -z_2 \frac{d\Phi_t}{dt} - i_2 R_2 - L_{r_2} \frac{di_2}{dt}.$$

Przechodząc od wartości chwilowych do wartości skutecznych, możemy symbolicznie przepisać powyższe wzory w sposób następujący

$$\hat{U}_1 = -\hat{E}_1 + \hat{I}_1 (R_1 + j\omega L_{r_1}) \quad (12),$$

$$\hat{U}_2 = \hat{E}_2 - \hat{I}_2 (R_2 + j\omega L_{r_2}) \quad (13);$$

zaś wzór (11) w postaci

$$\hat{I}_1 = \hat{I}_0 + \hat{I}'_2,$$

gdzie

$$\hat{I}'_2 = -\frac{z_2 \hat{I}_2}{z_1}.$$

Wykreślić wzory te możemy przedstawić jak na rys. 100.

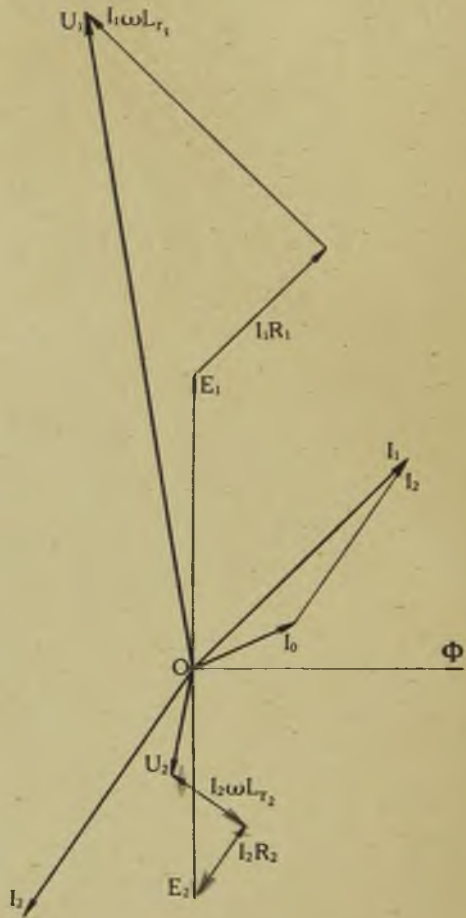
Za oś początkową bierzemy kierunek strumienia Φ .

Jak wiemy, SEM indukcji jest w fazie opóźniona o kąt prosty względem strumienia magnetycznego; wobec tego — E_1 , wchodzące we wzorze (12), odkładamy pod kątem prostym naprzód (do góry), zaś $+E_2$ pod kątem prostym wstecz (wdół).

Niech np. prąd I_2 będzie opóźniony w fazie względem E_2 .

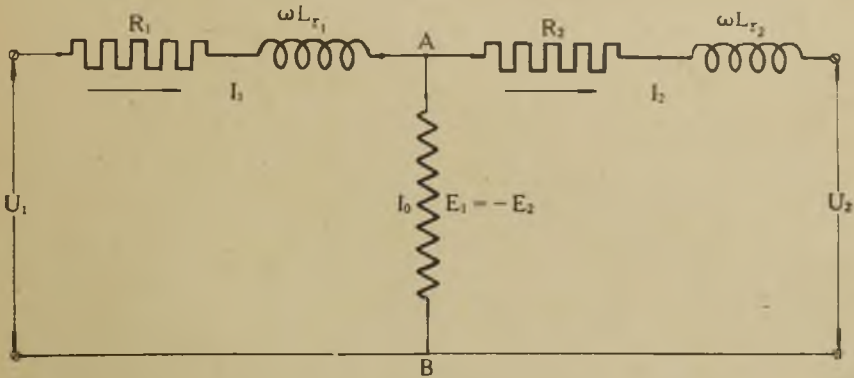
Prąd magnesujący I_0 ze względu na straty z histerezy i prądów wirowych jest przesunięty w fazie względem strumienia Φ o pewien kąt α . Do tego prądu dodajemy geometrycznie prąd I'_2 w kierunku przeciwnym do prądu I_2 i otrzymujemy prąd I_1 .

Do wektora $-E_1$ dodajemy geometrycznie $R_1 \hat{I}_1 + j\omega L_{r_1} \hat{I}_1$; suma geometryczna będzie wektorem napięcia pierwotnego U_1 .



Rys. 100.

Odejmując geometrycznie od wektora \vec{E}_2 , czyli dodając w kierunku przeciwnym, wektory $\vec{I}_2 R_2$ oraz $j \omega L_r \vec{I}_2$, otrzymamy napięcie na zaciskach wtórnych U_2 .



Rys. 101.

Jeżeli we wzorach (12) i (13) założymy $E_1 = -E_2$, to możemy te wzory otrzymać ze schematu, przedstawionego na rys. (101).

§ 37. Praktyczne znaczenie transformatorów.

Gdy chodzi o przesyłanie energii elektrycznej na znaczne odległości, staramy się osiągnąć jaknajmniejsze straty.

Zwykle zgóry oznaczamy dopuszczalny spadek napięcia lub dopuszczalną stratę mocy w procentach. Jeżeli mamy do przeniesienia pewną moc P przy napięciu U , to spadek napięcia ΔU i strata mocy ΔP będą określone wzorami

$$\Delta U = IR,$$

$$\Delta P = I^2 R.$$

Oporność przewodu podwójnego o długości l i przekroju s wynosi

$$R = \rho \cdot \frac{2l}{s},$$

gdzie ρ oznacza oporność właściwą materiału przewodu.

Wobec tego

$$\Delta U = I\rho \frac{2l}{s} \quad ; \quad \Delta P = I^2\rho \frac{2l}{s}$$

Z tych wzorów obliczamy potrzebny przekrój przewodu

$$s = \frac{I \rho 2l}{\Delta U} \quad \text{albo} \quad s = \frac{I^2 \rho 2l}{\Delta P}.$$

Przy prądzie zmiennym moc prądu

$$P = UI \cos \varphi.$$

Dla stałego, zwykle z góry określonego współczynnika mocy $\cos \varphi$, moc P zależy od dwóch zmiennych wielkości U i I .

Gdy powiększamy napięcie np. n razy, to prąd dla otrzymania tej samej mocy P powinien mieć wartość $\frac{I}{n}$. Spadek napięcia pozostawimy procentowo taki sam, będzie więc on n razy większy czyli $n \Delta U$. Podstawiając wartości te do poprzednich wzorów otrzymamy

$$s = \frac{I \rho 2l}{n^2 \Delta U}.$$

Ten sam wynik otrzymamy, pozostawiając taką samą procentową stratę mocy, mianowicie

$$s = \frac{I^2 \rho 2l}{n^2 \Delta P}.$$

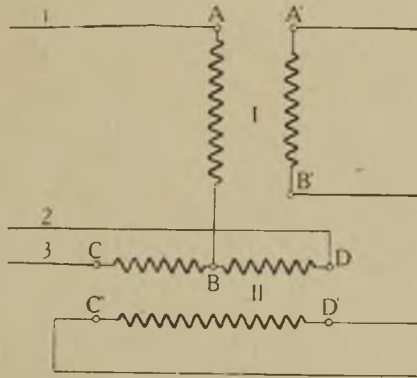
Widzimy, że w tym przypadku przekrój przewodu będzie n^2 razy mniejszy. Tyleż razy zmniejszy się również objętość materiału zużytego na przewody. Przy prądzie stałym, w celu zwiększenia napięcia musielibyśmy wziąć prądnicę na wyższe napięcie, a dla bardzo wysokich napięć takich prądnic zbudować nie można. Przy prądach zmiennych natomiast zastosujemy do tego celu transformatory, które nie wymagają żadnej obsługi i można je konstruować łatwo, wobec braku ruchomych części, na bardzo wysokie napięcia.

§ 38. Układ Scotta.

Układ ten, zawierający dwa transformatory jednofazowe, daje możliwość otrzymać prąd dwufazowy z prądu trójfazowego lub odwrotnie.

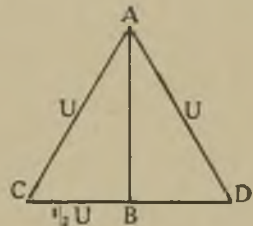
Na rys. 102 koniec pierwotnego uzwojenia pierwszego transformatora połączony jest ze środkiem pierwotnego uzwojenia dru-

giego transformatora; końce 1, 2 i 3 połączone są ze źródłem prądu trójfazowego. Wtedy napięcie między zaciskami C i D pierwotnego uzwojenia 2-go transformatora będzie równe napięciu



Rys. 102.

międzyprzewodowemu prądu trójfazowego U , zaś napięcie między zaciskami A i B pierwotnego uzwojenia 1-go transformatora będzie równe $\frac{\sqrt{3}}{2} U$, jak to wynika z rys. 103 gdzie $AB = \sqrt{AC^2 - CB^2} =$
 $= \sqrt{U^2 - \frac{U^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} U$.



Rys. 103.

To ostatnie napięcie jest przesunięte względem napięcia BC o 90° . Aby otrzymać jednakowe napięcia na zaciskach wtórnych uzwojeń obu transformatorów trzeba odpowiednio dobrać liczbę zwojów; mianowicie, jeżeli dla transformatora II stosunek liczby zwojów wtórnego uzwojenia do liczby zwojów pierwotnego wynosi m , to stosunek

ten dla transformatora I powinien wynosić $\frac{2}{\sqrt{3}} m$.

Otrzymujemy w ten sposób na zaciskach $A' B'$ i $C' D'$ napięcia prądu dwufazowego. Odwrotnie, mając prąd dwufazowy na zaciskach $A' B'$ i $C' D'$, otrzymamy pomiędzy zaciskami A i C , C i D , A i D napięcia prądu trójfazowego.

ROZDZIAŁ VI.

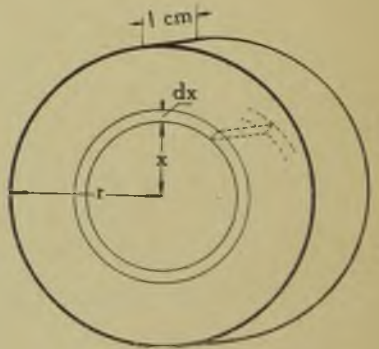
ZJAWISKA ZACHODZĄCE W PRZEWODACH I W DIELEKTRYKACH PRZY PRĄDZIE ZMIENNYM.

§ 39. Zjawisko naskórkowości.

Przy prądzie stałym gęstość prądu w poprzecznym przekroju przewodu jest rozłożona równomiernie, to znaczy ma tę samą wartość we wszystkich punktach przekroju. Przy prądzie zmiennym wytwarza się wewnątrz przewodu zmienne pole magnetyczne, które powoduje nierównomierny rozkład gęstości prądu w poprzecznym przekroju przewodu, a mianowicie, gęstość się zwiększa w kierunku od osi przewodu do jego powierzchni. Zjawisko to nazywamy naskórkowością (Skinneffekt).

Zbadajmy rozkład gęstości prądu w prostoliniowym przewodzie, o okrągłym przekroju, ograniczając się do niewielkiej jego długości, zdala od jego końców. Dla uproszczenia zagadnienia wprowadzimy zamiast wartości chwilowych wartości skuteczne rozważanych wielkości sinusoidalnie zmiennych w czasie.

W ten sposób będziemy mieli do czynienia z funkcjami tylko jednej zmiennej: odległości od osi przewodu. Rozpatrzmy w dowolnej odległości x od tej osi (rys. 104) warstwę cylindryczną o długości 1 cm i nieskończenie małej grubości dx . Gdy przez przewód przepływa prąd zmienny, powstaje zmienne pole magnetyczne i w dowolnym punkcie, na powierzchni rozpatrywanej warstwy, natężenie pola magnetycznego będzie miało pewną wartość skuteczną, którą oznaczymy przez H_x .



Rys. 104.

Wektory tego natężenia pola leżą w płaszczyznach prostopadłych do osi przewodu i są styczne do kół, otrzymywanych w poprzecznym przekroju. Część prądu, przepływającego przez przekrój o promieniu x i powodującego natężenie pola H_x , oznaczmy przez I_x . Zarówno I_x jak i H_x będą funkcjami odległości x . Działanie magnetyczne prądu I_x jest takie, jakgdyby cały ten prąd płynął wzdłuż osi przewodu; przyczem, w rozpatrywanym przypadku prostoliniowego przewodu,

$$H_x = \frac{2 I_x}{x}.$$

jeżeli I_x wyrażamy w jednostkach bezwzględnych; czyli

$$I_x = \frac{H_x x}{2}. \quad (1)$$

Niech gęstość prądu w przekroju warstwy wynosi σ . Prąd, przepływający przez cienką warstwę będzie dI_x , a ponieważ przekrój tej warstwy wynosi $2\pi x dx$, przeto

$$\sigma \cdot 2\pi x dx = dI_x,$$

skąd

$$\sigma = \frac{1}{2\pi x} \frac{dI_x}{dx}. \quad (2)$$

Ze wzoru (1) mamy

$$\frac{dI_x}{dx} = \frac{1}{2} \left(H_x + x \frac{dH_x}{dx} \right);$$

podstawiając tę wartość do wzoru (2), otrzymamy

$$4\pi x \sigma = H_x + x \frac{dH_x}{dx}. \quad (3)$$

Indukcja magnetyczna na powierzchni warstwy będzie $B_x = \mu H_x$, gdzie μ oznacza przenikalność magnetyczną metalu z którego przewód jest sporządzony. Dla metali magnetycznie obojętnych, jak np. miedź, aluminium i t. p., przenikalność ma wartość stałą i praktycznie może być przyjęta równą jedności.

Strumień magnetyczny w warstwie o przekroju $dx \cdot 1 \text{ cm}^2$ wyniesie

$$d\Phi_x = B_x dx = \mu H_x dx.$$

Pod wpływem tego strumienia powstaje siła elektromotoryczna, której wartość skuteczna według wzoru (4) z § 33 wyniesie w jednostkach bezwzględnych

$$dE = 2\pi f d\Phi_x;$$

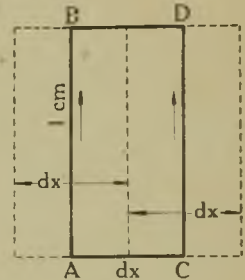
ponieważ siła elektromotoryczna jest opóźniona w fazie względem strumienia o 90° , przeto, traktując te wielkości symbolicznie, napiszemy

$$d\hat{E} = -j2\pi f d\hat{\Phi}_x,$$

lub podstawiając wartość $d\hat{\Phi}_x$,

$$d\hat{E} = -j2\pi f \mu \hat{H}_x dx. \quad (4)$$

Rozpatrując przekrój warstwy wzdłuż osi przewodu (rys. 105), możemy rozumować w sposób następujący: przez jeden bok AB płynie struga prądu $di = \sigma ds$, gdzie ds stanowi element przekroju; przez drugi bok CD w tym samym kierunku płynie struga prądu $di + d(di)$; oporność każdego boku wynosi $\frac{\rho \cdot 1}{ds}$, gdzie ρ oznacza oporność właściwą metalu. Stosując do rozpatrywanego zamkniętego obwodu 2-gie prawo Kirchhoffa, otrzymamy



Rys. 105.

$$dE = di \cdot \frac{\rho}{ds} - \left[(di + d(di)) \right] \frac{\rho}{ds} = -\rho \frac{d(di)}{ds},$$

lub po podstawieniu $di = \sigma ds$ i wprowadzając symbole,

$$d\hat{E} = -\rho d\hat{\sigma}. \quad (5)$$

Zestawiając wzory (5) i (4), będziemy mieli

$$\rho d\hat{\sigma} = j2\pi f \mu \hat{H}_x dx,$$

czyli

$$\hat{H}_x = -j \frac{\rho}{2\pi f \mu} \frac{d\hat{\sigma}}{dx}.$$

Podstawiając tę wartość H_x oraz jego pochodną do wzoru (3), otrzymamy

$$4\pi x \hat{\sigma} = -j \frac{\rho}{2\pi f \mu} \frac{d\hat{\sigma}}{dx} - j \frac{\rho}{2\pi f \mu} \frac{d^2 \hat{\sigma}}{dx^2},$$

skąd po uproszczeniu

$$\frac{d^2 \hat{\sigma}}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\hat{\sigma}}{dx} - j \frac{8\pi^2 f \mu}{\rho} \hat{\sigma} = 0.$$

Oznaczając w skróceniu

$$m^2 = -j \frac{8\pi^2 f \mu}{\rho}, \quad (6)$$

otrzymujemy równanie różniczkowe w postaci

$$\frac{d^2 \hat{\sigma}}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\hat{\sigma}}{dx} + m^2 \hat{\sigma} = 0. \quad (7)$$

Jest to równanie drugiego rzędu, które posiada dwa rozwiązania szczególne, suma których daje rozwiązanie ogólne. Rozwiązanie szczególne można założyć w postaci szeregu ze wzrastającymi potęgami x , czyli

$$\sigma = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6 + \dots,$$

gdzie a z indeksami oznacza wielkości stałe;

wtedy

$$\frac{d\sigma}{dx} = a_1 + 2 a_2 x + 3 a_3 x^2 + 4 a_4 x^3 + 5 a_5 x^4 + 6 a_6 x^5 + \dots,$$

$$\frac{d^2 \sigma}{dx^2} = 2 a_2 + 2 \cdot 3 a_3 x + 3 \cdot 4 a_4 x^2 + 4 \cdot 5 a_5 x^3 + 5 \cdot 6 a_6 x^4 + \dots;$$

podstawiając te wartości do naszego równania różniczkowego, otrzymamy po zgrupowaniu

$$\begin{aligned} & \frac{a_1}{x} + (m^2 a_0 + 4 a_2) + (m^2 a_1 + 9 a_3) x + (m^2 a_2 + 16 a_4) x^2 + \\ & + (m^2 a_3 + 25 a_5) x^3 + (m^2 a_4 + 36 a_6) x^4 + (m^2 a_5 + 49 a_7) x^5 + \dots = 0. \end{aligned}$$

Ponieważ wzór powyższy jest tożsamością, to znaczy, że lewa strona powinna się równać zeru przy wszelkich wartościach x , przeto wszystkie współczynniki przy wszelkich potęgach x , jak również wyraz stały, powinny się równać zeru; w ten sposób

$$a_1 = 0; \quad m^2 a_0 + 4 a_2 = 0; \quad m^2 a_1 + 9 a_3 = 0;$$

$$m^2 a_2 + 16 a_4 = 0; \quad m^2 a_3 + 25 a_5 = 0 \quad \text{i t. d.}$$

Ponieważ $a_1 = 0$, więc wszystkie współczynniki z nieparzystymi indeksami stają się również równe zero; pozostają więc tylko współczynniki z parzystymi indeksami, przyczem

$$a_2 = -\frac{m^2 a_0}{2^2}; \quad a_4 = -\frac{m^2 a_2}{4^2} = +\frac{m^4 a_0}{2^2 \cdot 4^2}; \quad a_6 = -\frac{m^6 a_0}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \quad \text{i t. d.}$$

Wobec tego rozwiązanie szczególne będzie

$$\sigma = a_0 \left(1 - \frac{m^2 x^2}{2^2} + \frac{m^4 x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{m^6 x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \frac{m^8 x^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} + \dots \right). \quad (8)$$

Szereg, stojący w nawiasach, stanowi funkcję Bessela albo funkcję cylindryczną pierwszego rodzaju, rzędu zerowego argumentu $m x$; oznaczmy ją przez $I_0(m x)$, czyli

$$I_0(m x) = 1 - \frac{(m x)^2}{2^2} + \frac{(m x)^4}{(2 \cdot 4)^2} - \frac{(m x)^6}{(2 \cdot 4 \cdot 6)^2} + \frac{(m x)^8}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8)^2} + \dots \quad (9)$$

Dalsze rozważania matematyczne doprowadzają do wniosku, że druga całka szczególna rozpatrywanego równania różniczkowego daje dla funkcji, czyli w tym przypadku dla gęstości prądu, wartość nieskończenie wielką, gdy $x = 0$, to znaczy na osi przewod. Niema to sensu fizycznego, więc stała dowolna przy tej drugiej całce szczególnej musi się równać zero, pozostanie tylko pierwsza wyżej wyznaczona całka szczególna; rozpatrując a_0 jako stałą dowolną i oznaczając ją przez A , otrzymamy ogólną całkę równania w postaci

$$\hat{\sigma} = A I_0(m x) \quad (10)$$

Stałą dowolną A możemy wyznaczyć przez prąd \hat{I} , płynący przez cały przekrój przewod. o promieniu r . Wtedy bowiem

$$\hat{I} = \int_0^r \hat{\sigma} \cdot 2 \pi x dx = 2 \pi A \int_0^r I_0(m x) x dx. \quad (11)$$

Biorąc wartość $I_0(m x)$ ze wzoru (9), mnożąc przez x i całkując, otrzymamy

$$\begin{aligned} \hat{I} &= 2 \pi A \left[\frac{r^2}{2} - \frac{m^2 r^4}{2^2 \cdot 4} + \frac{m^4 r^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6} - \frac{m^6 r^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8} + \dots \right] = \\ &= 2 \pi A \frac{r}{m} \left[\frac{m r}{2} - \frac{m^3 r^3}{2^2 \cdot 4} + \frac{m^5 r^5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6} - \frac{m^7 r^7}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8} + \dots \right]; \end{aligned}$$

wyraz, stojący w nawiasach, stanowi funkcję Bessela rzędu pierwszego, argumentu mr , czyli

$$I_1(mr) = \frac{mr}{2} - \frac{m^3 r^3}{2^2 \cdot 4} + \frac{m^5 r^5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6} - \frac{m^7 r^7}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8} + \dots =$$

$$= \frac{mr}{2} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{m^2 r^2}{2^2} + \frac{1}{3} \frac{m^4 r^4}{(2 \cdot 4)^2} - \frac{1}{4} \frac{m^6 r^6}{(2 \cdot 4 \cdot 6)^2} + \dots \right]. \quad (12)$$

Mamy więc

$$\hat{I} = 2\pi A \frac{r}{m} I_1(mr),$$

skąd

$$A = \frac{\hat{I} m}{2\pi r I_1(mr)}. \quad (13)$$

Wobec tego wzór (10) daje

$$\hat{\sigma} = \frac{\hat{I} m I_0(mx)}{2\pi r I_1(mr)}. \quad (14)$$

Dla małych częstotliwości możemy na podstawie wzorów (9) i (12) założyć w przybliżeniu

$$I_0(mx) \cong 1,$$

$$I_1(mr) \cong \frac{mr}{2};$$

wówczas dla gęstości prądu otrzymamy ze wzoru (14)

$$\hat{\sigma} = \frac{\hat{I}}{\pi r^2},$$

co wskazuje, że gęstość jest jednakowa we wszystkich punktach przekroju, jak przy prądzie stałym.

Ponieważ m , wchodzące do funkcji Bessela, jak widać ze wzoru (6), stanowi liczbę urojoną, przeto interesujące nas wielkości możemy wyrazić w postaci liczb zespolonych.

Oznaczmy w skróceniu

$$p = \sqrt{\frac{8\pi^2 f^2 \mu}{\rho}} = 2\pi \sqrt{\frac{2f\mu}{\rho}},$$

czyli

$$m^2 = -jp^2;$$

wtedy wyrazy, wchodzące do szeregów funkcyj Bessela, będą miały następujące wartości

$$\begin{aligned} m^2 x^2 &= -j p^2 x^2, & m^2 r^2 &= -j p^2 r^2, \\ m^4 x^4 &= -p^4 x^4, & m^4 r^4 &= -p^4 r^4, \\ m^6 x^6 &= j p^6 x^6, & m^6 r^6 &= j p^6 r^6, \\ m^8 x^8 &= p^8 x^8, & m^8 r^8 &= p^8 r^8, \end{aligned}$$

i t. d.

Wobec tego ze wzorów (9) i (12) otrzymujemy po zgrupowaniu

$$\begin{aligned} I_0(mx) &= \left(1 - \frac{p^4 x^4}{(2 \cdot 4)^2} + \frac{p^8 x^8}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8)^2} - \dots \right) + \\ &+ j \left(\frac{p^2 x^2}{2^2} - \frac{p^6 x^6}{(2 \cdot 4 \cdot 6)^2} + \frac{p^{10} x^{10}}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10)^2} \right); \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} I_1(mr) &= \frac{mr}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{3} \frac{p^4 r^4}{(2 \cdot 4)^2} + \frac{1}{5} \frac{p^8 r^8}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8)^2} - \dots \right) + \right. \\ &+ \left. j \left(\frac{1}{2} \frac{p^2 r^2}{2^2} - \frac{1}{4} \frac{p^6 r^6}{(2 \cdot 4 \cdot 6)^2} + \frac{1}{6} \frac{p^{10} r^{10}}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10)^2} + \dots \right) \right]. \end{aligned}$$

Lord Kelvin oznaczał część rzeczywistą stojącą w nawiasach przez *ber*, zaś część urojoną przez *bei*; używając tych oznaczeń, napiszemy

$$I_0(mx) = ber(px) + j bei(px); \quad (15)$$

$$I_1(mr) = \frac{mr}{2} \left[ber_1(pr) + j bei_1(pr) \right]; \quad (16)$$

wtedy wzór (14) przepiszemy w postaci

$$\hat{g} = \frac{\hat{I}}{\pi r^2} \frac{ber(px) + j bei(px)}{ber_1(pr) + j bei_1(pr)}. \quad (17)$$

Jest to gęstość prądu w odległości x od osi przewodu; na powierzchni przewodu czyli dla $x = r$ gęstość wyniesie

$$\hat{g}_r = \frac{\hat{I}}{\pi r^2} \frac{ber(pr) + j bei(pr)}{ber_1(pr) + j bei_1(pr)},$$

wobec tego stosunek gęstości:

$$\frac{\hat{g}}{\hat{g}_r} = \frac{ber(px) + j bei(px)}{ber(pr) + j bei(pr)},$$

Licznik w ostatnim wzorze dla $x < r$ jest mniejszy od mianownika, co łatwo sprawdzić ze wzoru (14), wynika stąd, że gęstość prądu jest największa na powierzchni i zmniejsza się w kierunku od powierzchni do osi przewodu.

Na samej osi, dla $x = 0$, gdzie gęstość prądu jest najmniejsza, $ber(px) = 1$, $bei(px) = 0$; $I_0(mx) = 1$,

$$\sigma_0 = \frac{I}{\pi r^2 [ber_1(pr) + j bei_1(pr)]} = \frac{Im}{2\pi r I_1(mr)},$$

czyli, jak widać ze wzoru (12),

$$\sigma_0 = A;$$

gęstość prądu na osi równa jest stałej, otrzymanej w całości ogólnej równania różniczkowego, dającego rozkład gęstości prądu w poprzecznym przekroju przewodu.

Widzimy więc, że przy prądzie zmiennym przewód nie jest wyzyskany jak przy prądzie stałym, gdzie gęstość prądu jest taka sama na osi jak i na powierzchni. Powoduje to, że oporność rzeczywista przy prądzie zmiennym jest większa niż przy prądzie stałym.

Rozpatrując jak i poprzednio część przewodu o długości 1 cm i promieniu r , będziemy mieli dla oporności R_s przy prądzie stałym

$$R_s = \frac{\rho}{\pi r^2}.$$

Moc prądu, wytwarzająca ciepło przy natężeniu prądu I , będzie

$$P = I^2 R_s.$$

W przypadku prądu zmiennego wartość skuteczną prądu, przepływającego przez cały przekrój przewodu, określiliśmy we wzorze (11), mianowicie

$$I = \int_0^r \sigma 2\pi x dx.$$

Oznaczmy przez R_z oporność rzeczywistą, którą określiliśmy jako iloraz mocy wytwarzającej ciepło przez kwadrat wartości skutecznej prądu; mamy więc

$$R_z = \frac{P}{I^2}$$

Moc P , przy uwzględnieniu nierównomiernego rozkładu gęstości, znajdziemy wyrażając moc dP nieskończenie cienkiej warstwy cylindrycznej (rys. 104), której oporność wynosi

$$dR = \frac{\rho}{2\pi x dx};$$

prąd przepływający przez tę warstwę dI wynosi $\sigma \cdot 2\pi dx$, więc

$$dP = (dI)^2 \cdot dR = \frac{\sigma^2 \cdot 4\pi^2 x^2 dx^2 \cdot \rho}{2\pi x dx} = 2\pi\rho\sigma^2 x dx;$$

całkując ten wyraz w granicach całego przekroju przewodu czyli dla x w granicach od 0 do r , znajdujemy moc prądu zmiennego w rozpatrywanej części przewodu

$$P = 2\pi\rho \int_0^r \sigma^2 x dx.$$

Dzieląc tę moc przez kwadrat wartości skutecznej prądu, otrzymamy

$$R_z = \frac{2\pi\rho \int_0^r \sigma^2 x dx}{\left[\int_0^r \sigma 2\pi x dx \right]^2}.$$

Stosunek oporności rzeczywistej przy prądzie zmiennym do oporności przy prądzie stałym, który oznaczymy przez k , wyrazi się wzorem

$$k = \frac{R_z}{R_s} = \frac{2\pi\rho \int_0^r \sigma^2 x dx \cdot \pi r^2}{4\pi^2 \left[\int_0^r \sigma x dx \right]^2 \cdot \rho} = \frac{r^2 \int_0^r \sigma^2 x dx}{2 \left[\int_0^r \sigma x dx \right]^2}.$$

Do tego wzoru należy podstawić wartość σ ze wzoru (17), przy-
czem w tym przypadku chodzi nie o wartości symboliczne, lecz
o same moduły, czyli

$$\sigma = \frac{I}{\pi r^2} \frac{\sqrt{[ber(px)]^2 + [bei(px)]^2}}{\sqrt{[ber_1(pr)]^2 + [bei_1(pr)]^2}}$$

Obliczenie tych całek daje w rezultacie szereg, za pomocą którego możemy wyznaczyć wartość k w każdym poszczególnym przypadku z żadaną dokładnością. Najczęściej posługujemy się wzorami przybliżonemi; w ogólnym przypadku dla niezbyt dużych częstotliwości istnieje wzór przybliżony

$$k = 1 + \frac{1}{12} \left(\frac{pr}{2} \right)^4 - \frac{1}{144} \left(\frac{pr}{2} \right)^8,$$

gdzie

$$p = 2\pi \sqrt{\frac{2f\mu}{\rho}};$$

przytem należy zwrócić uwagę, że r wyrażone jest w centymetrach, zaś oporność właściwa metalu przewodu w omach na 1 cm długości i 1 cm² przekroju poprzecznego.

Dla miedzi $\mu = 1$, $\rho = 0,017 \cdot 10^{-4}$, istnieje przybliżony wzór

$$k = 1 + 0,70 \left(\frac{fd^2}{1000} \right)^2 - 0,40 \left(\frac{fd^2}{1000} \right)^4,$$

gdzie d oznacza średnicę przewodu w cm.

W niżej podanej tablicy, ułożonej przez Lorda Kelvina, wskazane są wartości k dla różnych wartości fd^2 dla drutów miedzianych. Dla otrzymania wartości k dla drutów innych metali należy wartość fd^2 pomnożyć przez $\frac{\mu}{\rho} \cdot 0,017$ i dla otrzymanej wartości fd^2 szukać k w tabeli.

fd^2	k	fd^2	k	fd^2	k
0	1	720	1,3180	2420	2,2190
20	1,0000	980	1,4920	2880	2,3937
80	1,0010	1280	1,6778	5120	3,0956
180	1,0258	1620	1,8628	8000	3,7940
320	1,0805	2000	2,0430	18000	5,5732
500	1,1747			32000	7,3250

Widzimy stąd, że np. gdy $fd^2 = 320$, to dla $f = 50$, $d^2 = 6,4$, $d \cong 2,5$ cm, oporność jest o 8% większa, niż przy prądzie stałym.

Dla aluminium współczynniki we wzorze poprzednio podanym będą inne, a mianowicie

$$k = 1 + 0,25 \left(\frac{fd^2}{1000} \right)^2 - 0,05 \left(\frac{fd^2}{1000} \right)^4.$$

W żelaznym drucie zjawisko naskórkowości uwydatnia się bardzo znacznie, ponieważ wchodzi tu w grę jego własności magnetyczne. Używamy przewodów żelaznych tylko przy słabych prądach, gdyż mamy wtedy bardzo słabe pola magnetyczne.

Dla cienkich drutów żelaznych, gdy $\mu = 1000$, $\rho = 0,10 \cdot 10^{-4}$,

$$k = 1 + \left(\frac{fd^2}{10} \right)^2 - 3,33 \left(\frac{fd^2}{10} \right)^4.$$

Przy wielkich częstotliwościach używa się wzoru następującego

$$k = \frac{\pi d}{2} \sqrt{\frac{\mu f}{\rho}}.$$

Przy większych przekrojach, w celu zmniejszenia wpływu naskórkowości, używamy przewodów złożonych z szeregu drutów izolowanych i odpowiednio przeplatanych.

Przy bardzo wielkich częstotliwościach zjawisko naskórkowości występuje w takim stopniu, że można korzystać z przewodów rurkowych, gdyż cały prąd skupiony jest w pobliżu powierzchni przewodu.

Zjawisko naskórkowości wpływa również na indukccyjność przewodu, gdyż jednocześnie zachodzi inny rozkład natężenia pola magnetycznego. Skutkiem tego indukccyjność przy prądzie zmiennym staje się mniejszą niż przy prądzie stałym. Teoretyczne rozważania, podobne do poprzednich, doprowadzają również do funkcji Bessela i do szeregów, które w praktycznym zastosowaniu sprowadzają się do wzorów przybliżonych. Oznaczając przez L_s indukccyjność przewodu przy prądzie zmiennym o bardzo małej częstotliwości, graniczącym z prądem stałym, zaś przez L_z indukcyjność przy prądzie zmiennym o średnich częstotliwościach, mamy wzory przybliżone dla $pr \leq 2$

$$L_z = L_s - \frac{1}{48} \left(\frac{pr}{2} \right)^4 + \frac{13}{8640} \left(\frac{pr}{2} \right)^6;$$

dla wielkich częstotliwości, wzór Zenneck'a daje

$$L_z = L_s + \pi \left[\frac{1,424}{pr} - \frac{0,160}{(pr)^2} - 0,5 \right];$$

we wzorach tych r oznacza średnicę przewodu w cm, p jak i poprzednio

$$p = 2\pi \sqrt{\frac{2f^2}{\rho}}$$

§ 40. Straty w dielektrykach.

Oddawna spostrzeżono, że dielektryk w kondensatorze ogrzewa się wówczas, gdy kondensator podlega zmiennemu elektryzowaniu. W elektrotechnice mamy do czynienia z dielektrykami, które mają za zadanie izolować przewody od ziemi lub od innych przewodów. Każdy taki układ z izolacją możemy rozpatrywać jako kondensator; jeżeli zaś przewód znajduje się pod napięciem prądu zmiennego, wówczas w dielektryku, otaczającym przewód, zachodzi elektryzacja naprzemian w jednym i drugim kierunku, wydziela się ciepło, wobec czego w dielektryku zachodzi strata mocy. Zjawisko to posiada pewną analogję z histerezą magnetyczną, zachodzącą w żelazie, znajdującym się w zmiennem polu magnetycznem, przeto niektórzy elektrotechnicy (pierwszy Steinmetz) nazwali to zjawisko histerezą dielektryczną, chociaż nie są to zjawiska identyczne.

Oprócz powyższych strat dielektrycznych, mogą zachodzić w dielektryku straty, spowodowane tem, że każdy dielektryk posiada pewną przewodność, skutkiem czego pod działaniem napięcia powstaje prąd, płynący wskroś lub skroś dielektryka, czyli tak zwany prąd skrośny. Wreszcie mogą zachodzić straty skutkiem wyładowań elektrycznych czyli tak zwanego ulotu. Wszystkie te zjawiska powodują pewien upływ elektryczności, przetwarzającej się w ciepło. Upływ ten można ująć w postaci pewnego prądu czynnego, który nazwiemy prądem upływu, proporcjonalnego do napięcia działającego na dielektryk. Współczynnik proporcjonalności pomiędzy prądem upływu i napięciem nazywamy upływnością; upływność będziemy oznaczali literą A . W ten sposób pomiędzy prądem upływu I_u , napięciem U , działającym na dielektryk oraz upływnością istnieje zależność

$$I_u = A U \quad (18)$$

Moc, wytworzona przez prąd upływu, czyli moc P_u , pochłonięta w dielektryku, będzie określona wzorem

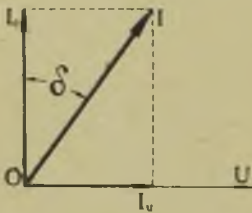
$$P_u = U I_u = A U^2,$$

skąd

$$A = \frac{P_u}{U^2};$$

możemy więc określić upływność A jako iloraz mocy, pochłoniętej w dielektryku, przez kwadrat napięcia, działającego na dielektryk.

W ten sposób, mając niedoskonały dielektryk, znajdujący się pod napięciem, musimy uwzględnić dwa prądy: prąd upływu, jako prąd czynny, będący w fazie z napięciem oraz prąd przesunięcia, stanowiący zwykle prąd ładowania kondensatora, w skład którego wchodzi rozpatrywany dielektryk. Ten ostatni prąd, który oznaczymy przez I_c , jak wiadomo, wyprzedza w fazie napięcie o kąt prosty. Geometryczna suma tych prądów (rys. 106) stanowi prąd I , który w rzeczywistości będzie płynął przez dielektryk. Łatwo zauważyć, że kąt δ odchylenia prądu wypadkowego I od prądu I_c jest tem większy im większy jest prąd upływu I_u , przyczem



Rys. 106.

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{I_u}{I_c};$$

ponieważ $I_c = \omega C U$, $I_u = A U$, przeto

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{A}{\omega C}; \quad A = \omega C \operatorname{tg} \delta.$$

Strata mocy w dielektryku, spowodowana upływnością, będzie

$$P_u = A U^2 = \omega C U^2 \operatorname{tg} \delta = 2 \pi f C U^2 \operatorname{tg} \delta. \quad (19)$$

Kąt δ nosi nazwę kąta stratności dielektrycznej, zaś $\operatorname{tg} \delta$ — nazwę współczynnika strat dielektrycznych.

Dla używanych w elektrotechnice materiałów izolacyjnych współczynnik strat dielektrycznych wynosi od 0,001 do 0,3.

Upływność, spowodowana tak zwaną histerezą dielektryczną, zależy od rodzaju materiału dielektryka i w pewnej mierze od

temperatury. W sieciach kablowych izolacja zwykle jest tak dobra, że straty od prądu skrośnego można nie brać pod uwagę; również niema zjawiska ulotu, wtedy stratność w dielektryku spowodowana jest wyłącznie zjawiskiem histerezy dielektrycznej.

Dla przykładu obliczmy stratę mocy w dielektryku kabla z izolacją papierową przy prądzie zmiennym o napięciu 10000 V i częstotliwości 50, jeżeli pojemność kabla wynosi 0,5 μF na kilometr; współczynnik strat dielektrycznych dla papieru impregnowanego $\text{tg } \delta = 0,024$. Ze wzoru (19) otrzymamy

$$P_u = 6,28 \cdot 50 \cdot 0,5 \cdot 10^{-6} \cdot 10^8 \cdot 0,024 = 375 \text{ watów};$$

co w ciągu roku daje stratę energii

$$W = \frac{375 \cdot 365 \cdot 24}{1000} = 3285 \text{ kilowatogodzin.}$$

Upływność przez izolację od prądu skrośnego zależy oczywiście od oporności materiału; jeżeli chodzi o przewody elektryczne, to w dobrych urządzeniach ta upływność nie przekracza zwykle $2 \cdot 10^{-7} S/km$. Upływność od ulotu w przewodach napowietrznych zachodzi tylko wówczas, jeżeli wartość napięcia między dwoma przewodami lub między przewodem i ziemią przekroczy pewną granicę, którą nazywamy napięciem krytycznym. Dla każdej średnicy przewodu i dla każdej odległości między przewodami lub przewodem i ziemią istnieje napięcie krytyczne, po którego przejściu rozpoczyna się wyładowanie elektryczne i powstaje zjawisko korony; na wartość tego napięcia w pewnej mierze wpływają jeszcze stan powierzchni przewodu oraz stan pogody.

Badania dokonane przez Towarzystwo Inżynierów Amerykańskich doprowadziły do empirycznego wzoru, który daje możliwość obliczać straty mocy, spowodowane ulotem elektryczności. Wzór ten, nazywany wzorem Peek'a, jest następujący

$$P_{ul} = \frac{344}{\alpha} f \sqrt{\frac{r}{a}} (U - U_0)^2 10^{-5},$$

gdzie

P_{ul} oznacza stratę mocy w kW na km przewodu pojedynczego, α — współczynnik zależny od temperatury i ciśnienia powietrza, przyczem

$$\alpha = \frac{3,92 b}{273 + t},$$

- b — ciśnienie powietrza w cm;
 t — temperatura powietrza w °C;
 f — częstotliwość prądu zmiennego;
 r — promień przewodu w cm.; jeżeli linka, to promień koła opisanego;
 a — odległość między przewodami w cm;

U — wartość skuteczna napięcia w kilowoltach względem punktu zerowego (ziemi); przy prądzie jednofazowym stanowi to połowę napięcia w sieci; przy prądzie trójfazowym i połączeniu gwiazdowym — napięcie fazowe; przy uwzględnieniu spadku napięcia w przewodach, trzeba brać średnią wartość napięcia całego przewodu;

U_0 — wartość skuteczna napięcia krytycznego w kilowoltach względem punktu zerowego.

To ostatnie napięcie oblicza się ze wzoru

$$U_0 = \delta m_1 m_2 \alpha r \lg_n \frac{a}{r},$$

w którym

δ — napięcie przebijające powietrza; dla $\alpha = 1$, czyli dla $b = 76$ cm i $t = 25^\circ C$ wynosi ono $21,1 \text{ kV/cm}$;

m_1 — współczynnik zależny od stanu powierzchni przewodu, przyczem

dla powierzchni odpolerowanej $m_1 = 1$,

dla zwykłych drutów $m_1 = 0,98 - 0,93$,

dla linek $m_1 = 0,87 - 0,83$.

m_2 — współczynnik zależny od stanu pogody i równy

dla suchego powietrza $m_2 = 1$,

dla wilgotnego powietrza (chmury, śnieg, deszcz) $m_2 = 0,8$.

Uwzględniając wartości α i δ , poprzednie wzory można napisać w sposób następujący:

$$P_{at} = \frac{87,8(273 + t)}{b} f \sqrt{\frac{r}{a}} (U - U_0)^2 \cdot 10^{-5} \text{ kilowatów na km.},$$

$$U_0 = \frac{21,1 \cdot 3,92 \cdot b}{273 + t} m_1 m_2 r \lg_n \frac{r}{a} \text{ kilowoltów.}$$

Ponieważ pojemność jednego przewodu wynosi

$$C = \frac{1}{18 \lg_n \frac{a}{r}} \text{ mikrofaradów na km.},$$

przeto

$$\lg_n \frac{a}{r} = \frac{1}{18 C} ;$$

wobec tego

$$U_0 = \frac{21,1 \cdot 3,92}{18} \cdot \frac{t}{273 + t} \cdot m_1 m_2 \frac{r}{C} \text{ kilowoltów,}$$

albo ostatecznie

$$U_0 = 4595 m_1 m_2 \frac{b}{273 + t} \cdot \frac{r}{C} \text{ woltów,}$$

gdzie pojemność C określona jest w mikrofaradach na 1 km pojedynczego przewodu.

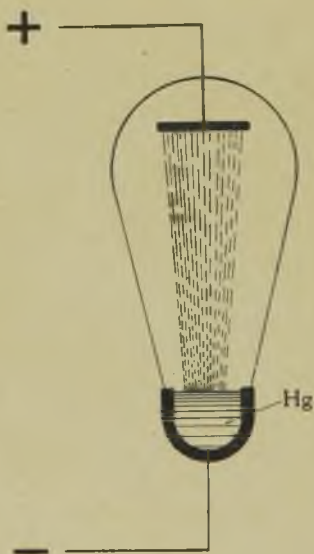
ROZDZIAŁ VII.

PROSTOWNIKI.

§ 41. Prostownik rtęciowy.

Przyrządy, za pomocą których możemy prąd zmienny prostować, czyli otrzymywać prąd o jednym kierunku, nazywamy prostownikami. Rozpatrzmy zasady działania kilku prostowników, stosowanych w elektrotechnice.

Prostownik rtęciowy oparty jest na własności lampy rtęciowej, dającej łuk świetlny tylko wówczas, gdy rtęć jest katodą.



Rys. 107.

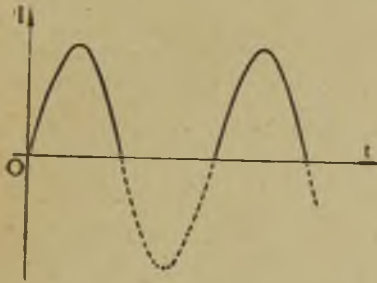
Przypuśćmy, że mamy naczynie (rys. 107) z rtęcią; po wypompowaniu powietrza zostanie w naczyniu para rtęci i, jeżeli następnie obie elektrody np. żelazną *A* i rtęciową *B* połączymy ze źródłem prądu, to nachylając bańkę możemy wytworzyć połączenie pomiędzy anodą i katodą, a zwracając bańkę do poprzedniego położenia otrzymamy łuk, lecz tylko wtedy, gdy rtęć jest katodą.

Gdybyśmy obie elektrody *A* i *B* przyłączyli do źródła prądu zmiennego, mielibyśmy łuk w ciągu połowy okresu, gdy prąd płynie przez elektrodę żelazną w kierunku rtęci; w drugiej połowie okresu łuku by nie było. Wykres prądu przechodzącego przez taki przyrząd mamy na rys. 108.

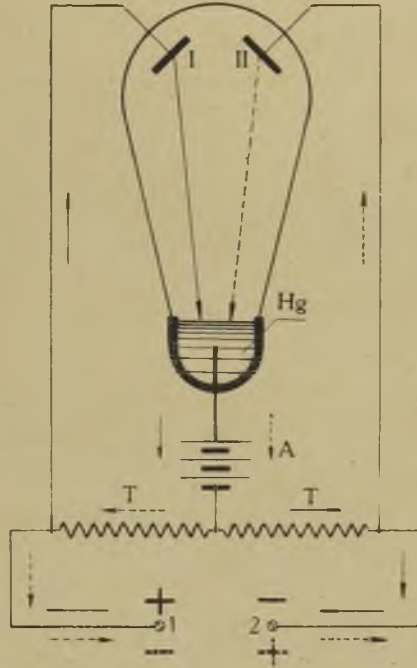
Dla uniknięcia przerwy w powstawaniu łuku zastosowane zostały przy zwykłym prądzie zmiennym dwie elektrody dodatnie. Prąd zmienny od zacisków 1 i 2 źródła prądu zmiennego (rys. 109) wchodzi do transformatora *T*, którego wtórne uzwojenie połączone

jest z dwoma żelaznymi elektrodami I i II; środek uzwojenia wtórnego łączymy ze rtęcią przez odbiornik *A*, zasilany prądem stałym np. przez baterię akumulatorów.

W chwili, gdy biegun dodatni znajduje się na zacisku 1, prąd płynie tak, jak wskazują strzałki ciągle, gdy zaś biegun dodatni przejdzie na zacisk 2, prąd popłynie tak, jak wskazują strzałki przerywane. Widzimy zatem, że przez odbiornik *A* prąd przepływa zawsze w jednym kierunku.

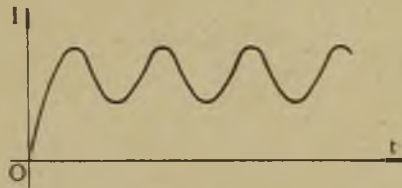


Rys. 108



Rys. 109

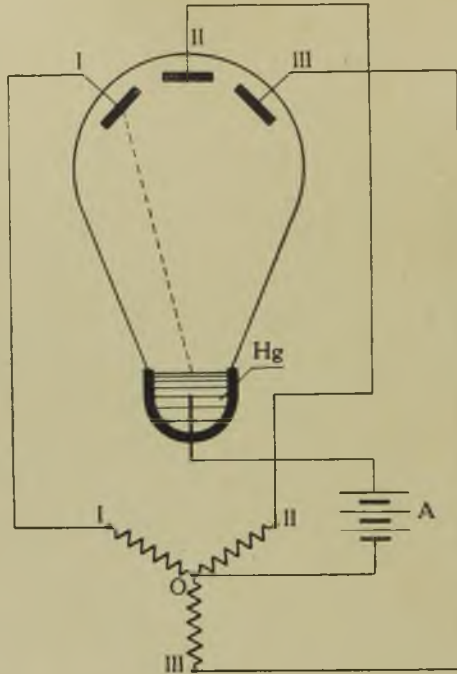
Trasformator *T* posiada indukcyjność i wywołuje skutek tego przesunięcie fazy prądu względem napięcia, mianowicie prąd opóźnia się względem napięcia. W chwili więc, gdy napięcie spadnie do zera, wartość prądu będzie większa od zera. Wykres dla prądu będzie w danym przypadku inny, niż dla napięcia; otrzymamy t. zw. prąd tętniący (rys. 110).



Rys. 110

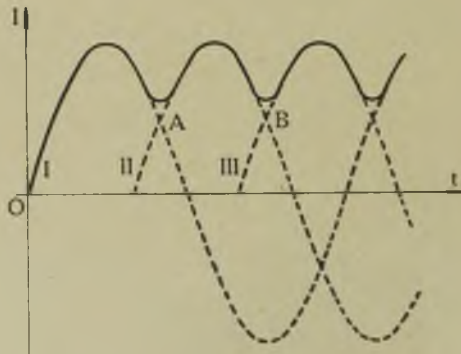
Dla prostowania prądu trójfazowego korzystamy z 3 elektrod dodatnich (rys. 111). Każdą z tych elektrod I, II i III łączymy z końcami poszczególnych faz (prądnicy lub transformatora), zaś elektrodę rtęciową łączymy z punktem zerowym przez odbiornik *A*. Wykres otrzymamy w danym przypadku następujący (rys. 112).

Z chwilą, gdy pomiędzy I elektrodą i rtęcią powstaje łuk — zaczyna płynąć prąd z pierwszej fazy, przedstawiony na rysunku sinusoidą I. W dalszym ciągu napięcie na pierwszej elektrodzie



Rys. 111.

maleje, zaś na II wzrasta i w pewnej chwili (punkt A na rys. 112) łuk z elektrody I przeskoczy na elektrodę II. W dalszym ciągu napięcie na elektrodzie II będzie malało, zaś na elektrodzie III



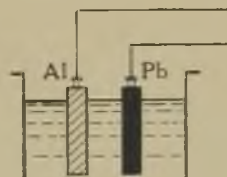
Rys. 112.

będzie wzrastało i w pewnej chwili (*B*) łuk przeskoczy na elektrodę III i t. d. Otrzymamy w ten sposób prąd tętniący, którego wartości nigdy do zera nie spadają.

Prostowniki rtęciowe zyskały szerokie zastosowanie, zwłaszcza w kolejnictwie elektrycznym i odznaczają się wysoką sprawnością.

§ 42. Prostownik elektrolityczny.

Prostownik elektrolityczny albo aluminiowy oparty jest na izolacyjnych własnościach tlenków niektórych metali, np. Al_2O_3 i składa się z jednego lub kilku ogniw; każde ogniwo zawiera dwie elektrody: aluminiową i ołowianą, zanurzone w naczyniu z wodnym roztworem kwasu siarkowego, lub, jeszcze lepiej, zwyczajnej sody (rys. 113). Gdy połączymy następnie elektrodę Al z anodą, zaś elektrodę Pb z katodą, wtedy na anodzie wydziela się tlen i tworzy się warstwa Al_2O_3 , która posiada własności izolacyjne i w pewnym stopniu przy niewielkim napięciu nie przepuszcza prądu.



Rys. 113.

Gdy przyłączymy obie elektrody do źródła prądu zmiennego, powstanie zjawisko następujące: w ciągu połowy okresu, gdy elektroda aluminiowa połączona jest z biegunem ujemnym, prąd będzie przepływać, gdy zaś w drugiej połowie okresu ta elektroda będzie połączona z biegunem dodatnim — prąd będzie przerwany.

W celu wyzyskania całego okresu prądu zmiennego obmyślił rodak nasz Pollak urządzenie, przedstawione schematycznie na rysunku 114.

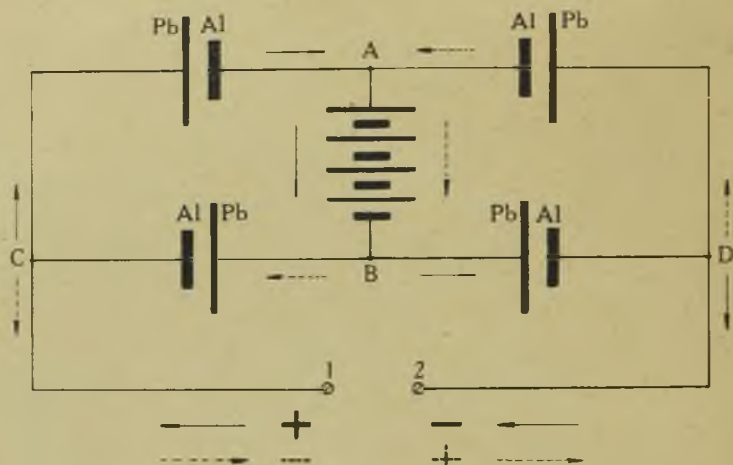
Mamy cztery ogniwa, połączone ze sobą jak wskazano na rysunku. Możemy łatwo sprawdzić, że pomiędzy punktami *A* i *B*, gdzie włączony został odbiornik np. akumulator, prąd będzie przepływał w jednym tylko kierunku mianowicie od *A* do *B*. Rzeczywiście, gdy na zacisku 1 mamy biegun dodatni, prąd będzie płynął w kierunku, wskazanym strzałkami ciągłymi do punktu *C*. W punkcie *C*, mając przed sobą dwie drogi, prąd popłynie, w myśl wyżej powiedzianego, przez elektrodę ołowianą, a zatem do punktu *A*. Z tego punktu *A* — mając znów dwie drogi przed sobą, popłynie on do punktu *B*, stąd zaś przez punkt *D* wróci do bieguna ujemnego na zacisku 2.

Zupełnie analogicznie wyznaczyć możemy drogę prądu w dru-

giej połowie okresu; wskazana jest ona na rysunku strzałkami przerywanymi.

Widzimy zatem, że urządzenie powyższe pozwala na korzystanie z całego okresu prądu zmiennego.

Sprawność tego rodzaju prostowników jest mała (do 25%), zachodzą tu bowiem znaczne straty na ogrzewanie. Użyteczne są



Rys. 114.

one przy niewielkich mocach, przy większych zaś stają się nieekonomiczne; można je stosować przy niskich napięciach; już nawet przy rozpowszechnionym napięciu 120 V część prądu będzie przepływała również przez elektrodę aluminiową.

§ 43. Prostownik katodowy.

Prostownik ten składa się z bańki szklanej, w której umieszczone są dwie elektrody: anoda z blaszki wolframowej i katoda z drucika wolframowego; wewnątrz bańki — próżnia. Katoda powinna być rozżarzona prądem albo z baterji ogniw albo ze źródła prądu zmiennego przez odpowiedni transformator.

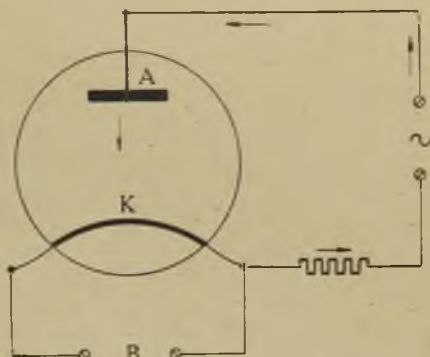
Tego rodzaju układ, nazywany lampą prostowniczą lub kenotronem, może przepuszczać prąd tylko w jednym kierunku, mianowicie wewnątrz lampy od anody do katody; prąd zewnętrzny będzie płynął od katody do anody.

Na rys. 115 wskazany jest kierunek prądu, który powstanie, gdy lampa prostownicza będzie włączona do sieci prądu zmiennego.

nego. *A* oznacza anodę, *K* — katodę, *B* oznacza źródło prądu zasilania. W takim obwodzie powstanie prąd jednokierunkowy, przerywany na przeciąg połowy okresu. Abyby wykorzystać obie połowy okresu prądu zmiennego można zastosować dwie lampy prostownicze, odpowiednio je włączając, lub też używać lampy z dwiema anodami, podobnie jak w prostowniku rtęciowym.

Spadek napięcia w takiej lampie jest znaczny; używa się je do wysokich napięć i słabych prądów.

Oprócz lamp prostowniczych próżniowych istnieją również lampy, wypełnione wewnątrz argonem o małym ciśnieniu (kilka centymetrów). W takich lampach otrzymuje się mniejszy spadek napięcia; używa się je do napięć niskich i prądów silniejszych np. do ładowania akumulatorów. Wytwarza się je tak samo jak lampy próżniowe z jedną lub z dwiema anodami.



Rys. 115.

§ 44. Prostownik tlenkowy.

Prostownik tlenkowy lub kuprytowy składa się z płytki miedzianej, pokrytej cienką warstwą tlenku miedzi; na tę płytkę nałożona jest płytka ołowiana i obie te płytki są mocno ściśnięte izolowaną śrubą. Działanie tego prostownika oparte jest na tem, że prąd, płynąc w kierunku od ołowiu do miedzi, napotyka w kontakcie opór znacznie mniejszy, niż prąd płynący w kierunku od miedzi do ołowiu. Prostownik ten używa się przeważnie do niskich napięć i niewielkich prądów.

ROZDZIAŁ VIII.

PRĄDY ODKSZTAŁCONE.

§ 45. Szereg Fourier'a.

Prądy zmienne, spotykane w praktyce, nie mają przebiegu dokładnie sinusoidalnego, chociaż stanowią funkcje okresowo zmienne w czasie, czasem odbiegają nawet znacznie od takiego przebiegu. Prądy tego rodzaju będziemy nazywali prądami odkształconymi. Analizę ich najdogodniej oprzeć na rozkładaniu takich funkcji w szeregi Fourier'a, gdyż w ten sposób sprowadzamy badanie prądów odkształconych do badania prądów sinusoidalnych. Przypomnijmy na czem polega rozkładanie funkcji w szeregi Fourier'a.

Niech będzie $f(x)$, gdzie $x = \frac{2\pi t}{T}$, jednoznaczna funkcja czasu t , okresowo zmienna z okresem T ; znaczy to, że wartości tej funkcji będą się powtarzały w odstępach czasu, różniących się o okres T lub o całkowitą liczbę okresów. Oznaczając przez k dowolną liczbę całkowitą, możemy napisać

$$f\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = f\left[\frac{2\pi}{T}(t + kT)\right] = f\left(\frac{2\pi}{T}t + 2k\pi\right).$$

Zakładając $\frac{2\pi t}{T} = x$, otrzymamy

$$f(x) = f(x + 2k\pi),$$

czyli, że wartości funkcji będą się powtarzały dla wartości x , różniących się o całkowitą liczbę 2π ; w tym przypadku 2π będzie okresem.

Według Fourier'a

$$\begin{aligned}
 f(x) &= A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + A_3 \cos 3x + \dots + A_n \cos nx + \\
 &+ B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + B_3 \sin 3x + \dots + B_n \sin nx = \\
 &= A_0 + \sum_{k=1}^{k=n} A_k \cos kx + \sum_{k=1}^{k=n} B_k \sin kx, \quad (1)
 \end{aligned}$$

+ \sum A_k \cos kx + \sum B_k \sin kx

gdzie $A_0, A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n$, są wielkościami stałymi, zaś n może być liczbą skończoną lub nieskończoną.

Dla znalezienia stałej A_0 mnożymy obie strony wzoru (1) przez dx i całkujemy w granicach od 0 do 2π albo od dowolnej wartości x do $x + 2\pi$. W ten sposób otrzymamy

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = \int_0^{2\pi} A_0 dx + \int_0^{2\pi} A_1 \cos x dx + \int_0^{2\pi} A_2 \cos 2x dx + \dots + \int_0^{2\pi} B_1 \sin x dx + \dots$$

Wszystkie całki określone postaci $\int_0^{2\pi} A_k \cos kx dx$ i $\int_0^{2\pi} B_k \sin kx dx$

są zerami, ponieważ ich całki nieokreślone $\frac{1}{k} \sin kx$ i $-\frac{1}{k} \cos kx$ mają tę samą wartość na początku i na końcu okresu. Zatem

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} f(x) dx &= \int_0^{2\pi} A_0 dx = A_0 \int_0^{2\pi} dx = 2\pi A_0; \\
 A_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx. \quad (2)
 \end{aligned}$$

*Do tej całki...
jeżeli od 0-2π
dopuszczamy wyprowadzić
niezgodności*

Dla znalezienia każdego ze współczynników przy cosinusach mnożymy obie strony wzoru (1) przez $\cos kx$ i całkujemy jak poprzednio. Otrzymamy wtedy

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx &= A_0 \int_0^{2\pi} \cos kx dx + \dots + A_l \int_0^{2\pi} \cos lx \cos kx dx + \\
 &+ \dots + A_k \int_0^{2\pi} \cos^2 kx dx + \dots + B_l \int_0^{2\pi} \sin lx \cos kx dx + \dots
 \end{aligned}$$

2π

Pierwsza całka jest zerem, cośmy już wyprowadzili poprzednio. Każda z całek typu

$$\int_0^{2\pi} \cos ix \cos kx dx; \quad (i \neq k), \quad \text{ i } \quad \int_0^{2\pi} \sin ix \cos kx dx,$$

jest również zerem, bo funkcja podcałkowa daje się zamienić na sumę 2-ch funkcji trygonometrycznych, a tych całki w rozpatrywanych granicach są, jakśmy już widzieli, zerami.

Otrzymujemy zatem

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx = A_k \int_0^{2\pi} \cos^2 kx dx,$$

Ale

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 kx dx = \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2kx}{2} dx = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2} + \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2kx dx}{2} = \pi.$$

skąd

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx = A_k \pi;$$

$$A_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx. \quad (3)$$

Zupełnie tak samo, dla wyznaczenia każdego ze współczynników przy sinusach, mnożymy obie strony wzoru (1) przez $\sin kx$ i całkujemy; wtedy

$$B_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx. \quad (4)$$

W szeregu Fourier'a, możemy połączyć sinusy i cosinusy, których argumenty są te same, pisząc jedną tylko funkcję sinusoidalną, zakładając

$$A_k \cos kx + B_k \sin kx = F_k \sin(kx + \psi_k),$$

$$F_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2}; \quad \text{tg } \psi_k = \frac{A_k}{B_k}.$$

*Ma otrzymać np. A₃ mnożymy funkcję przez cos 3x i otrzymamy nową funkcję sinusoidalną. Po całkowaniu dostaniemy sumę dwóch całek: jedna całka obrotowa, którą mamy wyznaczyć (3) i całka z cos 3x, która jest zerem. Wtedy A₃ = 1/2 * 2π = π.*

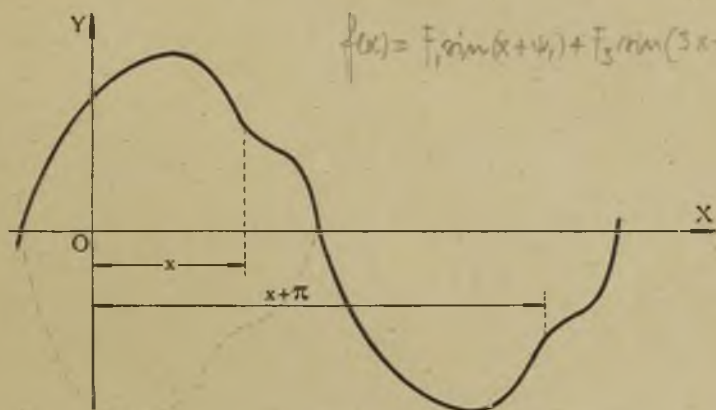
Na tej podstawie szereg Fourier'a możemy podać w postaci

$$f(x) = A_0 + F_1 \sin(x + \psi_1) + F_2 \sin(2x + \psi_2) + \dots + F_k \sin(kx + \psi_k) \quad (5)$$

Sinusoida $F_1 \sin(x + \psi_1)$ nazywa się główną sinusoidą, albo główną falą lub pierwszą harmoniczną. Inne sinusoidy noszą nazwę wyższych harmonicznym rozpatrywanej funkcji i w zależności od wskaźnika wielokrotności argumentu głównej sinusoidy, mówimy w skróceniu 2-ga, 3-cia i t. d. harmoniczna.

§ 46. Przypadki szczególne.

1) Krzywa, stanowiąca wykres rozpatrywanej funkcji, jest symetryczną względem osi X w ten sposób, że połowa fali, znajdująca się pod osią X , jest zwierciadlanem odbiciem połowy fali, przebiegającej nad osią X , przesunięciem naprzód o π (rys. 116).



Rys. 116.

W tym przypadku dla 2-ch punktów krzywej, których odcięte różnią się o π , rzędne będą się różniły tylko znakami. To znaczy

$$f(x + \pi) = -f(x).$$

Aby temu zadośćuczynić, w szeregu Fourier'a nie powinno być stałej A_0 , pozatem, zginąć powinny wyrazy, zawierające funkcje trygonometryczne od argumentów, stanowiących parzyste wielokrotności x . Mogą pozostać tylko wyrazy z argumentami o nie-

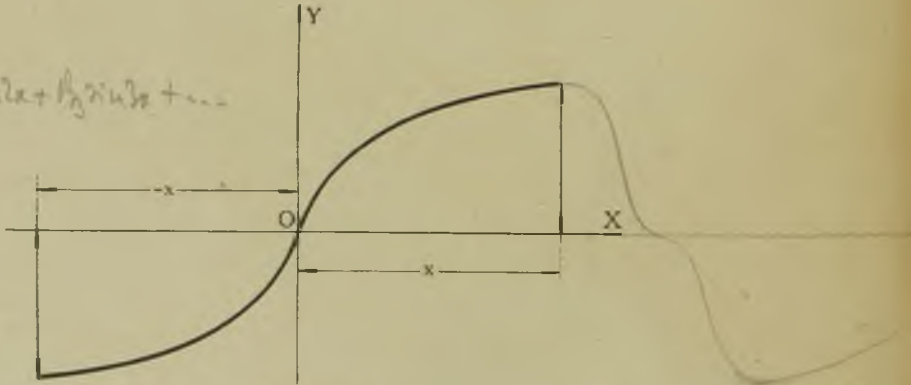
parzystych wielokrotnościach x , gdyż tylko te wyrazy zmieniają znak przy zamianie x na $(x + \pi)$. Zatem w tym przypadku

$$\begin{aligned}
 f(x) &= A_1 \cos x + A_3 \cos 3x + \dots + A_{2k+1} \cos(2k+1)x + \dots + \\
 &+ B_1 \sin x + B_3 \sin 3x + \dots + B_{2k+1} \sin(2k+1)x + \dots = \\
 &= \sum_{k=0}^{k=n} A_{2k+1} \cos(2k+1)x + \sum_{k=0}^{k=n} B_{2k+1} \sin(2k+1)x. \quad (6)
 \end{aligned}$$

Przy wyznaczaniu współczynników wystarczy całkowanie w granicach od 0 do π , gdzie funkcja ma ten sam znak, i pomnożenie rezultatów przez 2. W ten sposób

$$A_{2k+1} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(2k+1)x dx; \quad B_{2k+1} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(2k+1)x dx. \quad (7)$$

2) Krzywa jest symetryczna względem swego początku. Jeżeli początek osi współrzędnych umieścimy w punkcie krzywej, gdzie rzędna równa jest zeru, to symetria będzie polegała na tem, że



Rys. 117.

dwa punkty krzywej, mające odcięte $+x$ i $-x$ będą miały rzędne o tej samej wartości, przytem znaki tych rzędnych mogą być różne lub jednakowe; rozpatrzmy więc dwa przypadki:

a) przy zamianie x na $-x$ znak rzędnych się zmienia, czyli

$$f(-x) = -f(x),$$

jak to ma miejsce np. dla krzywej na rys. 117.

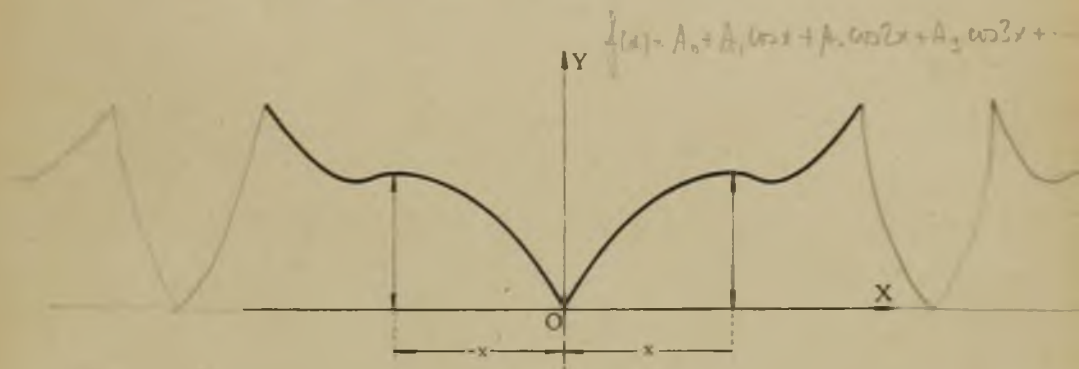
W tym przypadku w szeregu Fourier'a (1) nie powinno być stałej A_0 oraz wyrazów, zawierających cosinusy; otrzymamy więc szereg w postaci

$$f(x) = B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + \dots + B_k \sin kx + \dots = \\ = \sum_{k=1}^{k=n} B_k \sin kx; \quad (8)$$

b) przy zamianie x na $-x$ znak rzędnych się nie zmienia, czyli

$$f(-x) = f(x),$$

jak to np. ma miejsce dla krzywej na rys. 118.



Rys. 118.

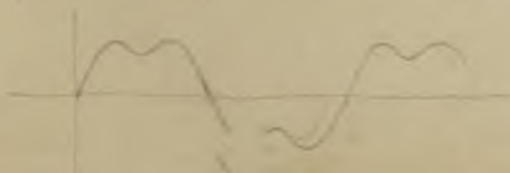
Łatwo jest zauważyć, że w tym przypadku w szeregu Fourier'a (1) nie powinno być wyrazów, zawierających sinusy; będziemy więc mieli szereg

$$f(x) = A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \dots + A_k \cos kx + \dots = \\ = A_0 + \sum_{k=1}^{k=n} A_k \cos kx. \quad (9)$$

3) Krzywa jest symetryczna względem osi X , jak w przypadku (1) i względem początku krzywej, jak w przypadku 2a.

Wtedy, na zasadzie poprzednich rozumowań, w szeregu Fourier'a mogą pozostać tylko wyrazy, zawierające sinusy argumentów, stanowiących nieparzyste wielokrotności x , czyli

$$f(x) = B_1 \sin x + B_3 \sin 3x + \dots + B_{2k+1} \sin (2k+1)x + \dots \quad (10)$$

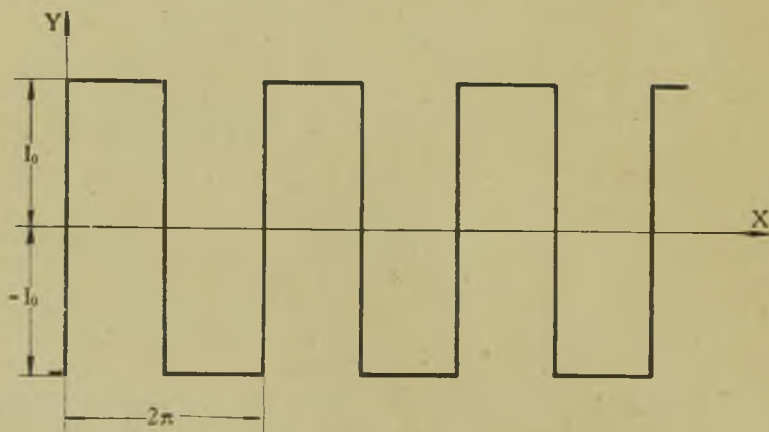


Ponieważ w tym przypadku można podzielić krzywą, odpowiadającą jednej fali na 4 jednakowe części, o takim samym przebiegu, więc przy obliczaniu współczynników wystarczy całkowanie w granicach od 0 do $\frac{\pi}{2}$ i mnożenie rezultatu przez 4. W ten sposób

$$B_{2k+1} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin(2k+1)x dx. \quad (11)$$

§ 47. Przykłady.

Przykład 1. Prąd o natężeniu stałym I , zmienia okresowo kierunek (rys. 119).



Rys. 119.

Zachodzi tu ostatnio rozpatrywany przypadek szczególny; stosujemy zatem wzory (10) i (11)

$$f(x) = B_1 \sin x + B_3 \sin 3x + \dots + B_{2k+1} \sin(2k+1)x + \dots;$$

$$B_{2k+1} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin(2k+1)x dx; \quad f(x) = I_0 = \text{const.}$$

$$\begin{aligned} B_{2k+1} &= \frac{4I_0}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2k+1)x dx = \frac{4I_0}{\pi(2k+1)} \left| -\cos(2k+1)x \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= \frac{4I_0}{\pi(2k+1)} \left[1 - \cos \frac{(2k+1)\pi}{2} \right]; \end{aligned}$$

$$\cos \frac{(2k+1)\pi}{2} = 0;$$

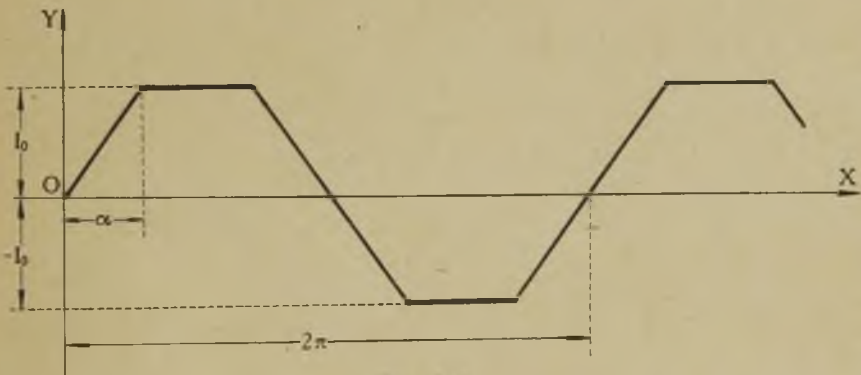
$$B_{2k+1} = \frac{4 I_0}{\pi(2k+1)};$$

Ostatecznie

$$f(x) = \frac{4I_0}{\pi} \left[\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \frac{1}{7} \sin 7x + \dots \right].$$

Dana funkcja jest wypadkową nieskończonego szeregu sinusoid, których okresy i amplitudy maleją, jak szereg naturalny liczb nieparzystych, a początek wszystkich jest wspólny. Główna fala ma amplitudę $\frac{4I_0}{\pi} \cong 1,3 I_0$, trzecia harmoniczna $\frac{4I_0}{3\pi} \cong 0,4 I_0$ i t. d.

Przykład 2. Funkcja zmienia się w sposób trapezoidalny (rys. 120) między wartościami $-I_0$ i $+I_0$. Mamy tu również szczególny przypadek 3.



Rys. 120.

Rozpatrujemy ćwierć fali.

$$\text{Dla } 0 \leq x \leq \alpha, \quad f(x) = \frac{I_0}{\alpha} x;$$

$$\alpha \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \quad f(x) = I_0.$$

$$f(x) = B_1 \sin x + B_3 \sin 3x + \dots + B_{2k+1} \sin (2k+1)x + \dots;$$

$$B_{2k+1} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin (2k+1)x dx = \frac{4}{\pi} \int_0^{\alpha} f(x) \sin (2k+1)x dx +$$

$$+ \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin (2k+1) x dx ;$$

$$\int_0^{\alpha} f(x) \sin (2k+1) x dx = \int_0^{\alpha} \frac{I_0}{\alpha} x \sin (2k+1) x dx =$$

$$= \frac{I_0}{(2k+1)^2 \alpha} \int_0^{\alpha} (2k+1) x \sin (2k+1) x d[(2k+1) x] ;$$

$$\int z \sin z dz = -z \cos z + \int \cos z dz = -z \cos z + \sin z ;$$

$$\int_0^{\alpha} (2k+1) x \sin (2k+1) x d[(2k+1) x] = \left| -(2k+1) x \cos (2k+1) x + \right.$$

$$\left. + \sin (2k+1) x \right|_0^{\alpha} = \sin (2k+1) \alpha - (2k+1) \alpha \cos (2k+1) \alpha ;$$

$$\int_0^{\alpha} f(x) \sin (2k+1) x dx = \frac{I_0}{\alpha} \left[\frac{\sin (2k+1) \alpha}{(2k+1)^2} - \frac{\alpha \cos (2k+1) \alpha}{2k+1} \right] ;$$

$$\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin (2k+1) x dx = I_0 \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \sin (2k+1) x dx =$$

$$= \frac{I_0}{2k+1} \left| -\cos (2k+1) x \right|_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{I_0}{2k+1} \cos (2k+1) \alpha ,$$

gdz

$$\cos (2k+1) \frac{\pi}{2} = 0 ;$$

$$B_{2k+1} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{I_0}{\alpha} \left[\frac{\sin (2k+1) \alpha}{(2k+1)^2} - \frac{\alpha}{(2k+1)} \cos (2k+1) \alpha \right] +$$

$$+ \frac{4}{\pi} \cdot \frac{I_0}{2k+1} \cos (2k+1) \alpha = \frac{4 I_0}{\pi \alpha} \cdot \frac{\sin (2k+1) \alpha}{(2k+1)^2} -$$

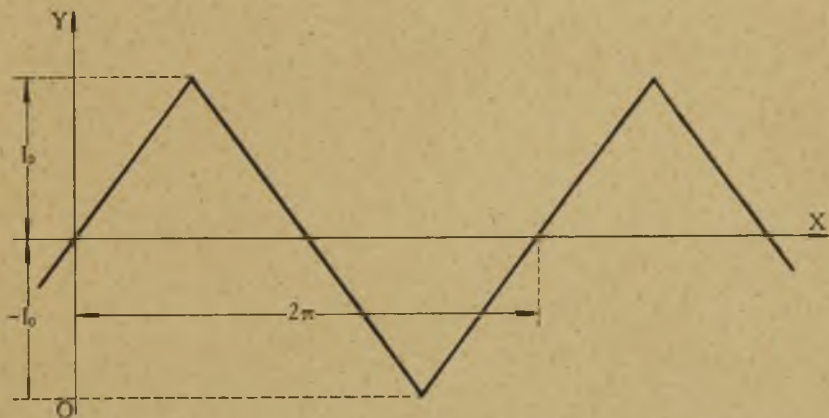
$$- \frac{4 I_0}{\pi (2k+1)} \cos (2k+1) \alpha + \frac{4 I_0}{\pi (2k+1)} \cos (2k+1) \alpha =$$

$$= \frac{4}{\pi} \cdot \frac{I_0}{\alpha} \frac{\sin (2k+1) \alpha}{(2k+1)^2} ;$$

$$f(x) = \frac{4I_0}{\pi\alpha} \left\{ \frac{\sin \alpha \sin x}{1^2} + \frac{\sin 3\alpha \sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5\alpha \sin 5x}{5^2} + \dots \right\} =$$

$$= \frac{4I_0}{\pi\alpha} \sum_{k=0}^{k=n} \frac{\sin (2k+1)\alpha \sin (2k+1)x}{(2k+1)^2}.$$

Przykład 3. Prąd wzrasta i maleje proporcjonalnie do czasu między stałymi wartościami $\pm I_0$ (rys. 121).



Rys. 121.

Jest to graniczny przypadek przykładu poprzedniego, gdy $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Z tego powodu, biorąc pod uwagę, że

$$\sin \alpha = \sin \frac{\pi}{2} = 1, \quad \sin 3\alpha = \sin \frac{3\pi}{2} = -1,$$

$$\sin 5\alpha = \sin \frac{5\pi}{2} = 1, \quad \dots \quad \sin (4l+1)\alpha = \sin (4l+1)\frac{\pi}{2} = 1,$$

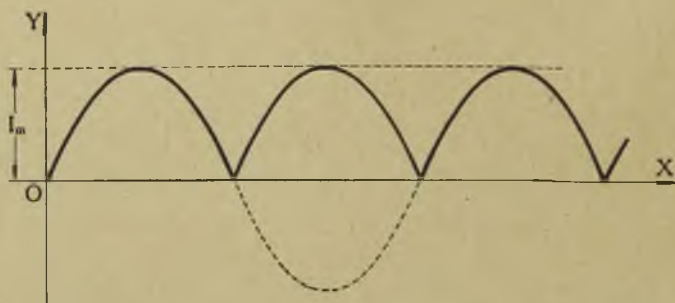
$$\sin (4l+3)\alpha = \sin (4l+3)\frac{\pi}{2} = -1,$$

będziemy mieli

$$f(x) = \frac{8I_0}{\pi^2} \left\{ \frac{\sin x}{1^2} - \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} - \frac{\sin 7x}{7^2} + \dots \right\} =$$

$$= \frac{8I_0}{\pi^2} \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k \frac{\sin (2k+1)x}{(2k+1)^2}.$$

Przykład 4. Prąd zmienny sinusoidalny zmienia swój kierunek w drugiej połowie okresu, stając się w ten sposób prądem jednokierunkowym — tętniącym (rys. 122).



Rys. 122.

Mamy tu przypadek szczególny 2b, więc stosujemy wzór (9)

$$f(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{k=n} A_k \cos kx.$$

Rozpatrywana funkcja, mając wartość największą I_m , zmienia się od zera do I_m w sposób następujący

$$\text{w granicach od } 0 \text{ do } \pi \dots f(x) = I_m \sin x,$$

$$\text{„ „ „ } \pi \text{ „ } 2\pi \dots f(x) = -I_m \sin x.$$

Obliczamy współczynniki

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{\pi} I_m \sin x \, dx + \int_{\pi}^{2\pi} -I_m \sin x \, dx \right] = \\ &= \frac{I_m}{2\pi} \left[-\cos x \Big|_0^{\pi} + \cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} \right] = \frac{2 I_m}{\pi}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi} I_m \sin x \cos kx \, dx + \int_{\pi}^{2\pi} -I_m \sin x \cos kx \, dx \right] = \\ &= \frac{I_m}{\pi} \left[\int_0^{\pi} \frac{1}{2} \left[\sin(k+1)x - \sin(k-1)x \right] dx - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left[\sin(k+1)x - \sin(k-1)x \right] dx = \\
 & = \frac{I_m}{2\pi} \left[-\frac{\cos(k+1)x}{k+1} + \frac{\cos(k-1)x}{k-1} \right]_0^{2\pi} = \\
 & = - \left[-\frac{\cos(k+1)x}{k+1} + \frac{\cos(k-1)x}{k-1} \right]_{\pi}^{2\pi} = \\
 & = \frac{I_m}{2\pi} \left[-\frac{\cos(k+1)\pi}{k+1} + \frac{\cos(k-1)\pi}{k-1} + \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k-1} + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k-1} - \frac{\cos(k+1)\pi}{k+1} + \frac{\cos(k-1)\pi}{k-1} \right] = \\
 & = \frac{I_m}{\pi} \left[\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k-1} - \frac{\cos(k+1)\pi}{k+1} + \frac{\cos(k-1)\pi}{k-1} \right];
 \end{aligned}$$

dla k nieparzystego

$$\cos(k+1)\pi = \cos(k-1)\pi = 1,$$

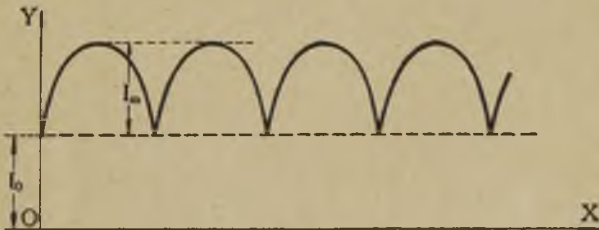
wtedy, co łatwo zauważyć,

$$A_k = 0;$$

dla k parzystego

$$\cos(k+1)\pi = \cos\pi = -1,$$

$$\cos(k-1)\pi = \cos(-\pi) = -1,$$



Rys. 123.

wtedy

$$A_k = \frac{I_m}{\pi} \left[\frac{2}{k+1} - \frac{2}{k-1} \right] = \frac{2I_m}{\pi} \cdot \frac{(k-1) - (k+1)}{(k+1)(k-1)} = -\frac{4I_m}{\pi} \cdot \frac{1}{k^2-1}.$$

Podstawiając wartości A_0 i A_k do wzoru na rozpatrywaną funkcję, otrzymamy

$$f(x) = \frac{2 I_m}{\pi} \left[1 - \frac{2}{1 \cdot 3} \cos 2x - \frac{2}{3 \cdot 5} \cos 4x - \frac{2}{5 \cdot 7} \cos 6x - \dots \right].$$

Jeżeli mamy prąd tętniący, którego wartości zmieniają się nie od 0 do I_m , lecz od I_0 do I_m , gdzie $I_0 > 0$ (rys. 123), wówczas dla znalezienia funkcji, przedstawionej krzywą prądu, trzeba tylko do poprzedniego wzoru dodać I_0 .

§ 48. Analiza krzywych.

W rozpatrywanych przykładach wyższe harmoniczne wywierają coraz mniejszy wpływ na kształt krzywej, tak, że uwzględniając tylko niewielką ilość harmonicznych, otrzymamy względnie znaczną dokładność. W praktyce uwzględniamy najczęściej harmoniczne do 9-ej włącznie.

Bardzo ważny ze względu na kształt krzywej jest znak 3-ej harmonicznej; jeżeli jest dodatni, to krzywa ma wierzchołki stępione w stosunku do 1-ej harmonicznej, jeżeli jest ujemny, to wierzchołki są zaostrome. Zupełnie odwrotnie wpływa znak 5-ej harmonicznej.

Na rys. 124 uwidoczniony jest wpływ tych harmonicznych na kształt krzywej.

Równania tych krzywych są następujące:

$$\text{I. } y = I_m \sin x$$

$$\text{II. } y = I_m \sin x + \frac{1}{3} I_m \sin 3x$$

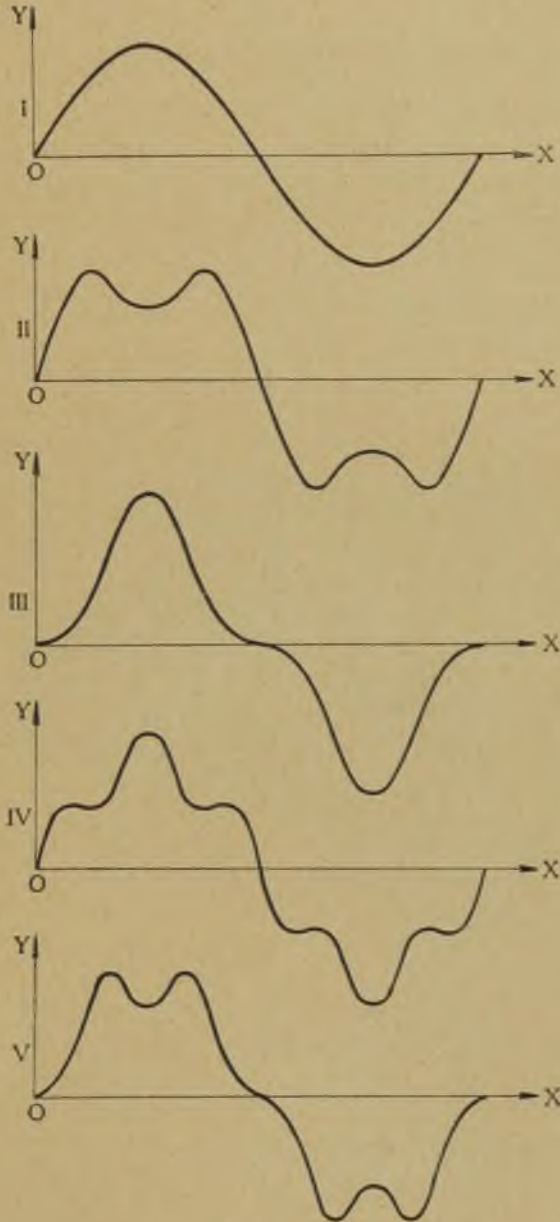
$$\text{III. } y = I_m \sin x - \frac{1}{3} I_m \sin 3x$$

$$\text{IV. } y = I_m \sin x + \frac{1}{5} I_m \sin 5x$$

$$\text{V. } y = I_m \sin x - \frac{1}{5} I_m \sin 5x.$$

Jest bardzo wiele sposobów analizy krzywych. Rozpatrzmy tu trzy metody.

Pierwsza, którą można nazwać metodą arytmetyczną, polega na tem, że całki, przez które wyrażone są współczynniki w szeregu Fourier'a, obliczamy w przybliżeniu; w tym celu na wykresie, na osi odciętych, dzielimy cały okres 2π na dowolną, zwykle pa-



Rys. 124.

rzystą, liczbę n równych części; każda wyniesie więc $\frac{2\pi}{n} = \Delta x$; dla punktów podziału, których odcięte będą

$$0, \Delta x, 2\Delta x, \dots, m\Delta x, \dots, (n-1)\Delta x,$$

znajdujemy z wykresu odpowiednie rzędne

$$y_0, y_1, y_2, \dots, y_m, \dots, y_{n-1};$$

rzędne te należy oznaczać z właściwym znakiem; jeżeli początek współrzędnych weźmiemy w punkcie, gdzie krzywa przecina oś odciętych, to

$$y_0 = 0.$$

Wyraz stały w szeregu Fourier'a:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx,$$

znajdujemy, jako średnią powyższych rzędnych, zastępując w ten sposób wzór ścisły, wzorem przybliżonym

$$A_0 = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{m=n-1} Y_m.$$

Na naszym wykresie odcięte $m\Delta x$ odpowiadają w szeregu Fourier'a odciętym x ; rzędne y_m odpowiadają wartości $f(x)$; zamieniając we wzorach (3) i (4), dla przybliżonych obliczeń, całki przez odpowiednie sumy, otrzymamy dla współczynników przy cosinusach i sinusach k -tej harmonicznej w szeregu Fourier'a (1)

$$A_k = \frac{1}{\pi} \sum_{x=0}^{x=2\pi} f(x) \cos kx = \frac{2}{n} \sum_{m=0}^{m=n-1} Y_m \cos km\Delta x,$$

$$B_k = \frac{1}{\pi} \sum_{x=0}^{x=2\pi} f(x) \sin kx = \frac{2}{n} \sum_{m=0}^{m=n-1} Y_m \sin km\Delta x,$$

albo

$$A_k = \frac{2}{n} \left[y_0 + y_1 \cos k \frac{2\pi}{n} + y_2 \cos 2k \frac{2\pi}{n} + \dots + y_m \cos mk \frac{2\pi}{n} + \dots + y_{n-1} \cos (n-1)k \frac{2\pi}{n} \right]; \quad (12)$$

$$B_k = \frac{2}{n} \left[y_1 \sin k \frac{2\pi}{n} + y_2 \sin 2k \frac{2\pi}{n} + \dots + \right. \\ \left. + y_m \sin mk \frac{2\pi}{n} + \dots + y_{n-1} \sin (n-1)k \frac{2\pi}{n} \right]. \quad (13)$$

Mając te wzory, obliczymy współczynniki dowolnej harmonicznej; następnie znajdujemy wartość maksymalną poszukiwanej harmonicznej ze wzoru

$$F_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2},$$

oraz kąt przesunięcia fazy ze wzoru

$$\operatorname{tg} \psi_k = \frac{A_k}{B_k}.$$

Im większa będzie liczba n punktów podziału jednego okresu, tem ściślejszy otrzymamy z obliczeń rezultat.

Druga metoda analizy krzywych, którą tu rozpatrzymy, stanowi wykreślny sposób, podany przez Rothe'go.

Mając wykres badanej krzywej, postępujemy jak poprzednio: dzielimy cały okres na dowolną całkowitą liczbę, najlepiej parzystą, n równych części; znajdujemy z wykresu rzędne, odpowiadające punktom podziału :

$$0, \frac{2\pi}{n}, 2 \cdot \frac{2\pi}{n}, \dots, (n-1) \frac{2\pi}{n};$$

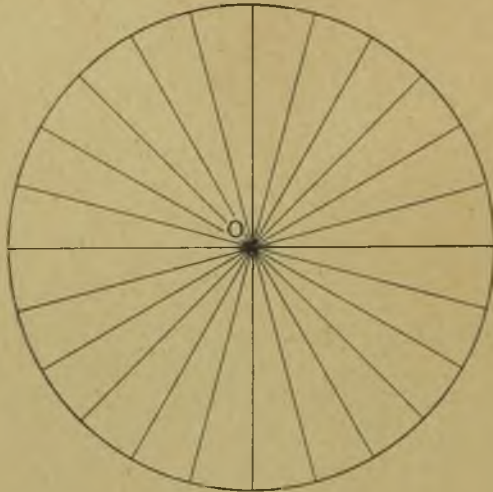
niech rzędne te będą :

$$y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}.$$

Robimy teraz następujący wykres: z dowolnego punktu, jako środka, przeprowadzamy promień początkowy w dowolnym kierunku np. poziomym oraz $n-1$ promieni pod kątami $\frac{2\pi}{n}, 2 \cdot \frac{2\pi}{n}, \dots, (n-1) \frac{2\pi}{n}$, odmierzonemi od promienia początkowego. Na rys. 125, $n = 24, \frac{2\pi}{n} = 15^\circ$.

Cheąc znaleźć wartość maksymalną dowolnej np. k -tej harmonicznej, odkładamy na przeprowadzonych promieniach pod kątami $0, k \frac{2\pi}{n}, 2k \frac{2\pi}{n}, \dots, (n-1) k \frac{2\pi}{n}$ znalezione poprzednio rzędne y_0, y_1, \dots, y_{n-1} , uwzględniając przy tem znaki tych rzędnych w taki sposób, że wartościom dodatnim dajemy kierunek od środka O , zaś wartościom ujemnym kierunek przeciwny. Otrzymane w ten sposób wektory matematyczne dodajemy do siebie

geometrycznie i sumę tę dzielimy przez $\frac{n}{2}$; rezultat daje nam wartość maksymalną k -tej harmonicznej.



Rys. 125.

Rzeczywiście, suma geometryczna rozpatrywanych odcinków może być wyrażona symbolicznie w postaci

$$\hat{S}_k = y_0 + y_1 e^{jk \frac{2\pi}{n}} + y_2 e^{j2k \frac{2\pi}{n}} + \dots + y_{n-1} e^{j(n-1)k \frac{2\pi}{n}},$$

albo

$$\begin{aligned} \hat{S}_k = & y_0 + y_1 \cos k \frac{2\pi}{n} + y_2 \cos 2k \frac{2\pi}{n} + \dots + y_{n-1} \cos (n-1)k \frac{2\pi}{n} + \\ & + j \left[y_1 \sin k \frac{2\pi}{n} + y_2 \sin 2k \frac{2\pi}{n} + \dots + y_{n-1} \sin (n-1)k \frac{2\pi}{n} \right]. \end{aligned}$$

Uwzględniając wzory (12) i (13), widzimy, że część rzeczywista ostatniego wyrazu stanowi $\frac{n}{2} A_k$, część zaś urojona $\frac{n}{2} B_k$; wobec tego

$$\hat{S}_k = \frac{n}{2} (A_k + j B_k).$$

Oznaczając przez ψ_k kąt, który tworzy \hat{S}_k z osią odciętych, czyli z osią początkową, będziemy mieli

$$S_k (\cos \psi_k + j \sin \psi_k) = \frac{n}{2} (A_k + j B_k).$$

Wartość maksymalna k -tej harmonicznej w szeregu, podanym we wzorze (5), będzie

$$F_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2} = \frac{S_k}{\frac{n}{2}}$$

kąt przesunięcia fazy tej harmonicznej znajdujemy ze wzoru

$$\operatorname{tg} \psi_k = \frac{A_k}{B_k}.$$

A_k stanowi rzut znalezionej sumy \bar{S}_k na oś odciętych (początkową), B_k — rzut tejże sumy na oś rzędnych (prostopadłą do osi początkowej).

Trzecią metodę, którą tu podajemy, stanowi sposób Fischer-Hinnena. Oparty on jest na następującem twierdzeniu: sumy

$$\sin x + \sin(x + \alpha) + \sin(x + 2\alpha) + \dots + \sin[x + (p - 1)\alpha],$$

$$\cos x + \cos(x + \alpha) + \cos(x + 2\alpha) + \dots + \cos[x + (p - 1)\alpha],$$

gdzie

$$\alpha = \frac{2k\pi}{p},$$

przyczem k i p oznaczają liczby całkowite, są równe $p \sin x$, względnie $p \cos x$, jeżeli $\frac{k}{p}$ jest liczbą całkowitą, zaś równają się zero, jeżeli $\frac{k}{p}$ jest ułamkiem. Ten ostatni przypadek był rozpatrzony w twierdzeniu o sumie wartości chwilowych wielkości układu wielofazowego w § 23, pozostaje więc do rozpatrzenia przypadek, gdy $\frac{k}{p}$ jest liczbą całkowitą.

Wówczas, zakładając $\frac{k}{p} = m$, gdzie m jest liczbą całkowitą, będziemy mieli $\alpha = \frac{2k\pi}{p} = 2m\pi$ i rozpatrywana suma sinusów będzie

$$\begin{aligned} & \sin x + \sin(x + 2m\pi) + \sin(x + 4m\pi) + \dots + \sin[x + \\ & + (p - 1)2m\pi] = \sin x + \sin x + \sin x + \dots + \sin x = p \sin x; \end{aligned}$$

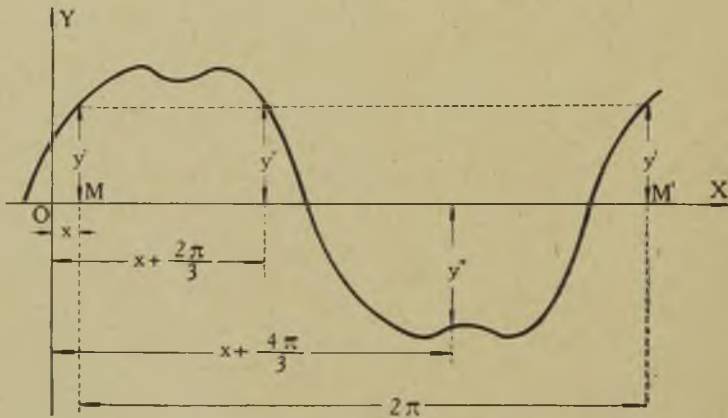
w sposób analogiczny znajdziemy, że suma cosinusów równa się $p \cos x$.

Sposób Fischer-Hinnena rozpatrzmy najpierw w przypadku, gdy krzywa jest symetryczna względem osi odciętych (rys. 126); wtedy szereg Fourier'a posiada, jak wiadomo, tylko nieparzyste harmoniczne; według wzoru (6)

$$f(x) = A_1 \cos x + B_1 \sin x + A_3 \cos 3x + B_3 \sin 3x + \dots =$$

$$= \sum_{k=0}^{k=n} \left[A_{2k+1} \cos(2k+1)x + B_{2k+1} \sin(2k+1)x \right]. \quad (14)$$

Ograniczmy liczbę harmonicznych do 9-ej włącznie.



rys. 126.

Najpierw wybieramy początek osi spórzędnych w dowolnym punkcie O na osi X (osi symetrii rozpatrywanej krzywej). Przypuśćmy, że od dowolnego punktu M na osi X , którego odcięta jest x , odłożymy na tejże osi $MM' = 2\pi$; niech rzędna krzywej, odpowiadająca punktowi M , będzie y' , wtedy

$$A_1 \cos x + B_1 \sin x + A_3 \cos 3x + B_3 \sin 3x + \dots +$$

$$+ A_9 \cos 9x + B_9 \sin 9x = y'. \quad (15)$$

Podzielmy MM' na 3 równe części i niech y' , y'' , y''' oznaczają rzędne w punktach podziału, których odcięte stanowią x , $x + \alpha$, $x + 2\alpha$, gdzie $\alpha = \frac{2\pi}{3}$. Te same wartości rzędnych mu-

simy otrzymać, zakładając we wzorze (14) zamiast x kolejno x , $x + \alpha$, $x + 2\alpha$. Oznaczając sumę

$$y' + y'' + y''' = S_3,$$

będziemy mieli

$$\begin{aligned} & A_1 [\cos x + \cos (x + \alpha) + \cos (x + 2\alpha)] + B_1 [\sin x + \sin (x + \alpha) + \\ & + \sin (x + 2\alpha)] + A_3 [\cos 3x + \cos (3x + 3\alpha) + \cos (3x + 6\alpha)] + \\ & + B_3 [\sin 3x + \sin (3x + 3\alpha) + \sin (3x + 6\alpha)] + \dots + \\ & + A_9 [\cos 9x + \cos (9x + 9\alpha) + \cos (9x + 18\alpha)] + B_9 [\sin 9x + \\ & + \sin (9x + 9\alpha) + \sin (9x + 18\alpha)] = S_3. \end{aligned}$$

Na podstawie poprzednio wyprowadzonego twierdzenia, dla

$$\alpha = \frac{2\pi}{3} \text{ otrzymamy}$$

$$3A_3 \cos 3x + 3B_3 \sin 3x + 3A_9 \cos 9x + 3B_9 \sin 9x = S_3. \quad (16)$$

Następnie dzielimy ten sam odcinek MM' na 5 równych części, odmierzamy rzędne w punktach podziału x , $x + \alpha$, $x + 2\alpha$, $x + 3\alpha$, $x + 4\alpha$, gdzie $\alpha = \frac{2\pi}{5}$. Korzystając ze wzoru (14) i biorąc sumę rzędnych, którą oznaczymy przez S_5 , otrzymamy, jak poprzednio

$$5A_5 \cos 5x + 5B_5 \sin 5x = S_5. \quad (17)$$

Dzieląc następnie MM' na 7, a wreszcie na 9 równych części, otrzymamy

$$7A_7 \cos 7x + 7B_7 \sin 7x = S_7, \quad (18)$$

$$9A_9 \cos 9x + 9B_9 \sin 9x = S_9, \quad (19)$$

gdzie S_7 i S_9 oznaczają sumy 7-miu i 9-ciu rzędnych w odpowiednich punktach podziału.

Pięć wzorów 15, 16, 17, 18 i 19 zawiera 10 niewiadomych współczynników A i B , dla znalezienia których potrzeba mieć 10 niezależnych od siebie równań. Równania te możemy z łatwością ułożyć, przeprowadzając obliczenia dla dwóch rozmaitych wartości x ; w tym przypadku najdogodniej założyć najpierw $x = 0$, następnie $x = \frac{\pi}{2}$. Jeżeli dla $x = 0$ oznaczymy rzędną przez y_1 , zaś

sumy S_3, S_5, S_7, S_9 , odpowiednio przez y_3, y_5, y_7, y_9 ; następnie dla $x = \frac{\pi}{2}$ oznaczymy rzędną przez y_1' i sumy odpowiednio przez y_3', y_5', y_7', y_9' , wtedy z powyższych wzorów otrzymamy

dla $x = 0$

$$\left. \begin{aligned} A_1 + A_3 + A_5 + A_7 + A_9 &= y_1, \\ 3 A_3 + 3 A_9 &= y_3, \\ 5 A_5 &= y_5, \\ 7 A_7 &= y_7, \\ 9 A_9 &= y_9, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

dla $x = \frac{\pi}{2}$

$$\left. \begin{aligned} B_1 - B_3 + B_5 - B_7 + B_9 &= y_1', \\ - 3 B_3 + 3 B_9 &= y_3', \\ 5 B_5 &= y_5', \\ - 7 B_7 &= y_7', \\ 9 B_9 &= y_9', \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

skąd odrazu znajdujemy wartości poszukiwanych współczynników.

Sposób postępowania w przypadku krzywej, symetrycznej względem osi odciętych, będzie więc następujący: bierzemy dowolny punkt na osi X , jako początek współrzędnych; od tego punktu ($x = 0$) odkładamy na osi X odcinek równy 2π , odpowiadający jednemu okresowi; odmierzamy rzędną krzywej na początku współrzędnych y_1 ; następnie dzielimy odcinek kolejno na 3, 5, 7 i 9 równych części, odmierzając za każdym razem odpowiednie rzędne i sumując je przy uwzględnieniu znaków tych rzędnych; w ten sposób znajdujemy y_3, y_5, y_7, y_9 ; następnie przesuujemy się na osi X od początku współrzędnych o $1/4$ okresu ($x = \frac{\pi}{2}$) i postępujemy w sposób analogiczny, wyznaczając $y_1', y_3', y_5', y_7', y_9'$. Znalezione wartości podstawiamy do układu równań (20) i (21) i rozwiązujemy te równania; obliczone wartości współczynników A i B podstawiamy do wzoru (14), który określi badaną krzywą.

W przypadku ogólnym, gdy badana krzywa nie wykazuje symetrii, musimy przedewszystkiem stwierdzić, czy szereg Fou-

rier'a (1), określający poszukiwaną funkcję, zawiera stałą A_0 , która się oblicza ze wzoru (2)

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y dx;$$

wyraz ten stanowi średnią rzędną wszystkich punktów krzywej, zawartych pomiędzy $x=0$ i $x=2\pi$, a więc w granicach całego okresu; ponieważ w jednej części okresu rzędne są dodatnie, w drugiej ujemne, przeto w rezultacie dla ogólnej średniej otrzymamy albo wielkość dodatnią, albo wielkość ujemną, albo zero. Praktycznie taką średnią możemy znaleźć, dzieląc okres od dowolnego punktu na osi X (np. od $x=0$ do $x=2\pi$) na mniejszą lub większą liczbę części, w zależności od stopnia odkształcenia krzywej; następnie odmierzamy wszystkie rzędne, odpowiadające punktom podziału, obliczamy ich sumę z uwzględnieniem znaków, wreszcie dzielimy tę sumę przez liczbę rzędnych; otrzymany w ten sposób rezultat da nam A_0 . Jeżeli A_0 nie będzie równe zero (praktycznie — blizkie zero), wtedy, przesuając oś odciętych równolegle na odległość równą A_0 w stronę dodatnią lub ujemną, w zależności od znaku A_0 , otrzymamy nowe osi spółrzędnych, względem których odcięte krzywej pozostaną te same, zaś wszystkie rzędne będą zmniejszone o A_0 . W ten sposób w nowym układzie spółrzędnych w szeregu Fourier'a pozbedziemy się wyrazu stałego.

Na rys. 127 pokazana jest taka krzywa niesymetryczna; w jednej połowie okresu mamy przebieg inny, aniżeli w drugiej połowie; średnia wszystkich rzędnych, odpowiadających jednemu okresowi, wynosi $OO' = A_0$; wypadła ona w tym przypadku dodatnia. Po przeniesieniu osi OX do położenia $O'X'$, otrzymujemy nowy układ spółrzędnych $O'X'$, $O'Y'$, względem którego rozpatrywana krzywa określona będzie szeregiem Fourier'a, zawierającym wyłącznie cosinusy i sinusy.

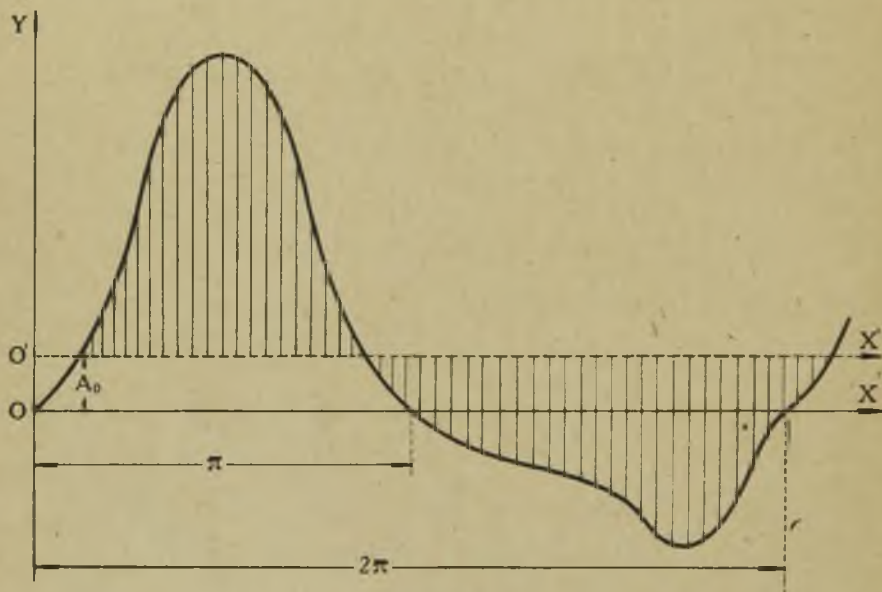
Znalezienie średniej rzędnej czyli A_0 może być uskutecznione jeszcze lepiej za pomocą planimetru (przrzędu do określenia pola powierzchni). Rozpatrując bowiem wyraz

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y dx$$

i biorąc początek współrzędnych ($x=0$) w punkcie przecięcia się krzywej z osią X , od którego zaczynając rzędne krzywej przyjmują wartości dodatnie, będziemy mieli

$$\int_0^{2\pi} y dx = \int_0^{\pi} y dx + \int_{\pi}^{2\pi} y dx = S_1 - S_2,$$

gdzie S_1 oznacza pole powierzchni, zawartej pomiędzy krzywą i osią X w granicach $x=0$ i $x=\pi$, zaś S_2 — pole powierzchni, ograniczonej krzywą i osią X w granicach $x=\pi$ i $x=2\pi$; wyraz S_2



Rys. 127.

wzięty ze znakiem —, ponieważ w rozpatrywanych tutaj granicach wszystkie rzędne krzywej będą ujemne. Jeżeli więc za pomocą planimetru określimy pola S_1 i S_2 , to dla znalezienia A_0 trzeba różnicę tych wartości podzielić przez 2π . Jasnym jest, że po przesunięciu osi X do położenia $O'X'$, pola powierzchni, odpowiadające dodatnim i ujemnym rzędnym krzywej, będą sobie równe; na rys. 127 pola te są zakreskowane.

Przystępując do analizy krzywej, nie zawierającej w szeregu Fourier'a stałej A_0 , musimy znaleźć współczynniki przy cosinusach i sinusach wszystkich harmonicznych, zarówno nieparzystych, jak i parzystych. Ograniczmy i w tym przypadku liczbę harmo-

nicznych do 9-ej włącznie. Ustaliwszy w dowolnym punkcie na osi odciętych początek osi współrzędnych, odkładamy od dowolnego punktu na tej osi, z odciętą x , odcinek równy 2π . Odcinek ten dzielimy kolejno na 2, 3, 4...9 równych części, odcieramy rzędne krzywej w punktach podziału i obliczamy odpowiednie sumy rzędnych z uwzględnieniem znaków rzędnych. Oznaczając przez S_1 rzędną krzywej, dla odciętej x , zaś przez $S_2, S_3 \dots S_9$ sumy rzędnych, odpowiadających 2, 3...9 działkom, otrzymamy, rozumując tak samo jak w poprzednio rozpatrzonym przypadku, następujące wzory

$$A_1 \cos x + B_1 \sin x + A_2 \cos 2x + B_2 \sin 2x + \dots + A_9 \cos 9x + \\ + B_9 \sin 9x = S_1,$$

$$2 A_2 \cos 2x + 2 B_2 \sin 2x + 2 A_4 \cos 4x + 2 B_4 \sin 4x + \\ + 2 A_6 \cos 6x + 2 B_6 \sin 6x + 2 A_8 \cos 8x + 2 B_8 \sin 8x = S_2,$$

$$3 A_3 \cos 3x + 3 B_3 \sin 3x + 3 A_6 \cos 6x + \\ + 3 B_6 \sin 6x + 3 A_9 \cos 9x + 3 B_9 \sin 9x = S_3,$$

$$4 A_4 \cos 4x + 4 B_4 \sin 4x + 4 A_8 \cos 8x + 4 B_8 \sin 8x = S_4,$$

$$5 A_5 \cos 5x + 5 B_5 \sin 5x = S_5,$$

$$6 A_6 \cos 6x + 6 B_6 \sin 6x = S_6,$$

$$7 A_7 \cos 7x + 7 B_7 \sin 7x = S_7,$$

$$8 A_8 \cos 8x + 8 B_8 \sin 8x = S_8,$$

$$9 A_9 \cos 9x + 9 B_9 \sin 9x = S_9.$$

Dla znalezienia współczynników A i B musimy ułożyć 18 równań niezależnych. Najpierw bierzemy $x=0$, to znaczy wybieramy pierwszy punkt podziału w początku współrzędnych; oznaczając rzędną krzywej w tym punkcie przez y_1 , zaś sumy rzędnych przy kolejnych dzieleniach w tym przypadku przez y_2, y_3, \dots, y_9 otrzymamy z powyższych wzorów

$$A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_9 = y_1.$$

$$A_2 + A_4 + A_6 + A_8 = \frac{y_2}{2},$$

$$A_3 + A_6 + A_9 = \frac{y_3}{3},$$

$$A_1 + A_8 = \frac{y_4}{4},$$

$$A_5 = \frac{y_5}{5},$$

$$A_6 = \frac{y_6}{6},$$

$$A_7 = \frac{y_7}{7},$$

$$A_8 = \frac{y_8}{8},$$

$$A_9 = \frac{y_9}{9},$$

skąd określamy wszystkie współczynniki A .

Dla znalezienia współczynników B musimy dać x jakąkolwiek inną wartość, ale taką, aby te współczynniki pozostały we wzorach, czyli aby żaden z sinusów nie stał się równym zeru (dla $x = \frac{\pi}{2}$, jak to czyniliśmy w poprzednim przypadku, zginęłyby we wzorach współczynniki B z parzystymi indeksami). Oczywiście, dogodniej jest dać dla x wartość taką, aby ona stanowiła π podzielone przez liczbę całkowitą większą niż 9 np. $\frac{\pi}{10}$ lub $\frac{\pi}{12}$. Odmierzając od nowego punktu odciętej odcinek równy 2π i postępując jak poprzednio, otrzymamy jeszcze 9 równań dla znalezienia współczynników B .

§ 49. Nakładanie się prądów odkształconych.

Wiadomo, że suma 2-ch prądów sinusoidalnych o jednakowej częstotliwości jest również prądem sinusoidalnym o tej samej częstotliwości. Oznaczmy wartości chwilowe 2-ch prądów przez i_1 i i_2 , ich amplitudy przez I_{1m} i I_{2m} , kąty przesunięcia faz tych prądów względem wspólnego napięcia przez φ_1 i φ_2 . Prąd wypadkowy, stanowiący ich sumę, niech ma wartość chwilową i oraz amplitudę I ; kąt przesunięcia fazy tego prądu wypadkowego wzglę-

dem napięcia oznaczmy przez ψ , zaś pulsację prądów — przez ω .
Wtedy mamy

$$i_1 = I_{1m} \sin(\omega t + \varphi_1), \quad i_2 = I_{2m} \sin(\omega t + \varphi_2);$$

$$i = I \sin(\omega t + \psi); \quad i = i_1 + i_2.$$

Następnie

$$I_{1m} \sin(\omega t + \varphi_1) + I_{2m} \sin(\omega t + \varphi_2) = I \sin(\omega t + \psi);$$

$$I_{1m} \cos \varphi_1 \sin \omega t + I_{2m} \cos \varphi_2 \sin \omega t + I_{1m} \sin \varphi_1 \cos \omega t +$$

$$+ I_{2m} \sin \varphi_2 \cos \omega t = I \sin \omega t \cos \psi + I \cos \omega t \sin \psi.$$

Stąd

$$(I_{1m} \cos \varphi_1 + I_{2m} \cos \varphi_2 - I \cos \psi) \sin \omega t +$$

$$+ (I_{1m} \sin \varphi_1 + I_{2m} \sin \varphi_2 - I \sin \psi) \cos \omega t = 0;$$

Ponieważ równość ta zachodzi dla wszystkich wartości t ,
więc powinno być

$$I_{1m} \cos \varphi_1 + I_{2m} \cos \varphi_2 - I \cos \psi = 0;$$

$$I_{1m} \sin \varphi_1 + I_{2m} \sin \varphi_2 - I \sin \psi = 0;$$

skąd

$$I \cos \psi = I_{1m} \cos \varphi_1 + I_{2m} \cos \varphi_2; \quad I \sin \psi = I_{1m} \sin \varphi_1 + I_{2m} \sin \varphi_2.$$

Podnosząc oba ostatnie równania do kwadratu i dodając
stronami, znajdziemy

$$I^2 = I_{1m}^2 + 2 I_{1m} I_{2m} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + I_{2m}^2,$$

skąd

$$I = \sqrt{I_{1m}^2 + 2 I_{1m} I_{2m} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + I_{2m}^2};$$

dzieląc zaś drugie równanie przez pierwsze, otrzymamy

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{I_{1m} \sin \varphi_1 + I_{2m} \sin \varphi_2}{I_{1m} \cos \varphi_1 + I_{2m} \cos \varphi_2}.$$

W ten sposób znaleźliśmy amplitudę i kąt przesunięcia fazy
prądu wypadkowego.

Jeżeli amplitudy prądów składowych są jednakowe

$$I_{1m} = I_{2m}, \quad \text{wtedy}$$

$$I = \sqrt{2 I_{1m}^2 + 2 I_{1m}^2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)} = I_{1m} \sqrt{2 [1 + \cos(\varphi_1 - \varphi_2)]} =$$

$$= 2 I_{1m} \cos \left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \right);$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{I_{1m} (\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2)}{I_{1m} (\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2)} = \frac{2 \sin \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}}{2 \cos \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}.$$

Ponieważ kąty φ_1 i φ_2 zawarte są w granicach $\pm 90^\circ$, przeto kąt ψ nie może przekroczyć $\pm 90^\circ$, wobec czego

$$\psi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}.$$

Rozpatrzmy teraz sumę dwóch jednakowych prądów odkształconych, przesuniętych względem siebie w fazie o kąt α ; rozumiemy pod tem, że o kąt α są przesunięte względem siebie w fazie główne harmoniczne tych prądów; inne harmoniczne będą wówczas przesunięte względem siebie odpowiednio o kąty

$$2\alpha, 3\alpha, \dots, k\alpha.$$

Harmoniczne tych prądów o tym samym wskaźniku będą miały te same amplitudy oraz będą przesunięte w fazie względem odpowiednich harmonicznych napięcia o te same kąty. Oznaczmy wartości chwilowe dowolnej harmonicznej tych prądów przez i_{1k} oraz i_{2k} , ich amplitudę przez I_{km} oraz kąt przesunięcia fazy względem tej samej harmonicznej napięcia przez φ_k ; wówczas będziemy mieli

$$i_{1k} = I_{km} (k \omega t + \varphi_k),$$

$$i_{2k} = I_{km} (k \omega t + k\alpha + \varphi_k).$$

Suma tych 2-ch harmonicznych da nam sinusoidę o tej samej częstotliwości, a amplituda i kąt przesunięcia fazy tej sinusoidy będą na podstawie wyżej wyprowadzonych wzorów

$$I'_k = 2 I_k \cos \frac{k\alpha}{2},$$

$$\psi_k = \frac{k\alpha}{2}.$$

Będzie to zatem harmoniczna prądu wypadkowego

$$i_k = i_{1k} + i_{2k} = 2 I_k \cos \frac{k\alpha}{2} \sin \left(k \omega t + \frac{k\alpha}{2} \right).$$

W szczególnym przypadku harmoniczne prądów składowych mogą się znosić i prąd wypadkowy może być pozbawiony odpowiedniej harmonicznej. Będzie to wtedy, gdy

$$I_k = 2 I_k \cos \frac{kx}{2} = 0; \quad \cos \frac{kx}{2} = 0; \quad \frac{kx}{2} = \frac{\pi}{2} (2m - 1);$$

$$kx = \pi (2m - 1); \quad x = \frac{2m - 1}{k} \pi;$$

gdzie m liczba całkowita.

Odpowiednia harmoniczna prądu wypadkowego osiągnie największą amplitudę, kiedy

$$\cos \frac{kx}{2} = 1; \quad \frac{kx}{2} = \frac{\pi}{2} \cdot 2m; \quad kx = 2m\pi;$$

$$x = \frac{2m}{k} \pi.$$

§ 50. Spółczynnik kształtu i spółczynnik szczytu.

Spółczynnikami kształtu krzywej, przedstawiającej przebieg w czasie funkcji okresowo zmiennej, nazywamy stosunek wartości skutecznej do wartości średniej rozpatrywanej funkcji:

$$s_k = \frac{Y}{Y_s}.$$

Wartość skuteczna jest określona wzorem

$$Y = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y^2 dx},$$

zaś wartość średnia

$$Y_s = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y dx;$$

w przypadkach szczególnych, gdy mamy krzywe symetryczne, rozpatrujemy tylko część krzywej, odpowiadającą $1/2$ lub $1/4$ okresu.

Spółczynnikiem szczytu krzywej, przedstawiającej przebieg w czasie funkcji okresowo zmiennej, nazywamy stosunek wartości największej do wartości skutecznej tej funkcji:

$$s_a = \frac{Y_m}{Y}$$

Określmy te spółczynniki dla niektórych krzywych:

a) Sinusoida (rozpatrujemy $1/4$ okresu).

$$Y_s = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} y dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} Y_m \sin x dx =$$

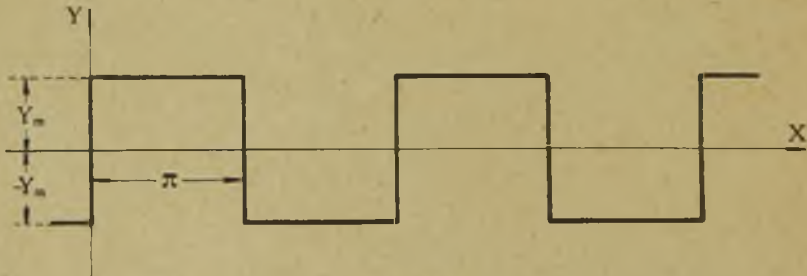
$$= \frac{2}{\pi} Y_m \left| -\cos x \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} Y_m;$$

$$Y = \frac{Y_m}{\sqrt{2}};$$

$$s_k = \frac{Y}{Y_s} = \frac{\frac{Y_m}{\sqrt{2}}}{\frac{2}{\pi} \cdot Y_m} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \cong 1,11;$$

$$s_a = \frac{Y_m}{Y} = \frac{Y_m}{\frac{Y_m}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2} \cong 1,41.$$

b) Krzywa płaska, to jest krzywa funkcji, zmieniającej się w ten sposób, że w ciągu każdego półokresu wartość funkcji jest stała, poczem zmienia znak, zachowując tę samą wartość bezwzględną (rys. 128).



Rys. 128.

Łatwo zauważyć, że zarówno wartość skuteczna jak i wartość średnia są równe sobie i równe wartości największej rozpatrywanej funkcji:

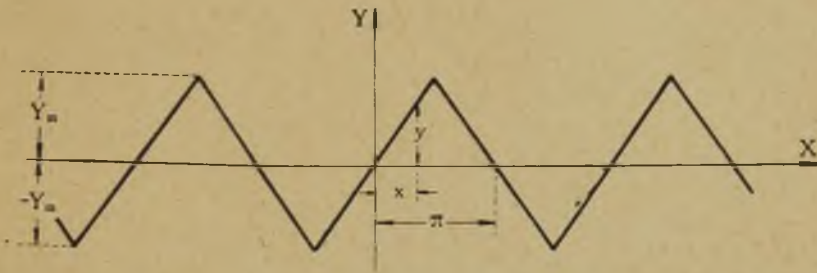
$$Y = Y_s = Y_m,$$

wobec tego

$$s_h = \frac{Y}{Y_s} = \frac{Y_m}{Y_m} = 1;$$

$$s_a = \frac{Y_m}{Y} = \frac{Y_m}{Y_m} = 1.$$

c) **Krzywa ostra.** Jest to krzywa, przedstawiająca funkcję, zmieniającą się linowo między dwiema wartościami. Przeprowadzamy oś X jako oś symetrii, wobec czego bezwzględne wartości największe będą sobie równe (rys. 129).



Rys. 129.

Rozpatrujemy $\frac{1}{4}$ okresu.

$$y = Y_m \cdot \frac{x}{\frac{\pi}{2}} = Y_m \cdot \frac{2x}{\pi};$$

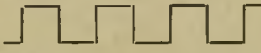

$$\begin{aligned} Y_s &= \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} y^2 dx} = \sqrt{\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} Y_m^2 \cdot \frac{4x^2}{\pi^2} dx} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi} \cdot \frac{4}{\pi^2} \cdot Y_m^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 dx} = \sqrt{\frac{8}{\pi^3} \cdot Y_m^2 \cdot \frac{\pi^3}{3 \cdot 8}} = \\ &= \sqrt{\frac{Y_m^2}{3}} = \frac{Y_m \sqrt{3}}{3}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_s &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} y dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} Y_m \frac{2x}{\pi} dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2}{\pi} Y_m \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx = \\ &= \frac{4}{\pi^2} \cdot Y_m \cdot \frac{\pi^2}{2 \cdot 4} = \frac{Y_m}{2}; \end{aligned}$$

$$s_k = \frac{Y}{Y_s} = \frac{\frac{Y_m}{3} \cdot \sqrt{3}}{\frac{Y_m}{2}} = \frac{2}{3} \sqrt{3} \cong 1,15;$$

$$s_a = \frac{Y_m}{Y} = \frac{Y_m}{\frac{Y_m}{3} \sqrt{3}} = \sqrt{3} \cong 1,73;$$

zestawiając, otrzymamy

Kształt krzywej	s_k	s_a
	1	1
sinusoida	$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} \cong 1,11$	$\sqrt{2} \cong 1,41$
	$\frac{2}{3} \sqrt{3} \cong 1,15$	$\sqrt{3} \cong 1,73$

Zwracamy uwagę, że krzywa płaska ma współczynniki mniejsze, krzywa ostra większe, niż sinusoida.

§ 51. Wartość skuteczna prądu odkształconego.

Jak wiadomo, wartością skuteczną funkcji okresowo zmiennej nazywamy wyrażenie

$$y = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y^2 dx}.$$

Dla prądu zmiennego odkształconego bez składowej stałej mamy

$$y = \sum_{k=1}^{k=n} (A_k \cos kx + B_k \sin kx).$$

Jeżeli tę sumę podniesiemy do kwadratu, otrzymamy sumę wyrazów następujących postaci

$$A_k^2 \cos^2 kx; 2 A_k B_k \cos kx \sin kx; B_k^2 \sin kx;$$

$$A_k A_l \cos kx \cos lx; A_k B_l \cos kx \sin lx; B_k B_l \sin kx \sin lx.$$

Całka sumy równa się sumie całek, więc pod pierwiastkiem otrzymamy sumę całek wyrazów tych postaci, wziętych w granicach od 0 do 2π . Ale

$$\int_0^{2\pi} \sin kx \cos kx dx = 0; \quad \int_0^{2\pi} \cos kx \cos lx dx = 0;$$

$$\int_0^{2\pi} \sin kx \sin lx dx = 0; \quad \int_0^{2\pi} \cos kx \sin lx dx = 0;$$

pozostaną zatem jedynie wyrażenia postaci

$$\int_0^{2\pi} A_k^2 \cos^2 kx dx = \pi A_k^2; \quad \int_0^{2\pi} B_k^2 \sin^2 kx dx = \pi B_k^2.$$

Wobec tego

$$Y = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y^2 dx} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{k=1}^{k-n} (A_k \cos kx + B_k \sin kx) \right]^2 dx} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{k-n} (\pi A_k^2 + \pi B_k^2)} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \pi \sum_{k=1}^{k-n} (A_k^2 + B_k^2)} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k-n} (A_k^2 + B_k^2)}.$$

Szereg

$$y = \sum_{k=1}^{k-n} (A_k \cos kx + B_k \sin kx)$$

możemy też przedstawić w postaci

$$y = \sum_{k=1}^{k-n} F_k \sin(kx + \varphi_k),$$

gdzie

$$F_k^2 = A_k^2 + B_k^2; \quad \operatorname{tg} \varphi_k = \frac{A_k}{B_k}.$$

W ten sposób dla wartości skutecznej otrzymujemy

$$Y = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=n} (A_k^2 + B_k^2)} = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=n} F_k^2}.$$

Ale wartość skuteczna funkcji sinusoidalnej, a więc każdej harmonicznej funkcji odkształconej, równa się wartości największej tej harmonicznej podzielonej przez $\sqrt{2}$, czyli

$$Y_k = \frac{Y_{km}}{\sqrt{2}}; \quad 2Y_k^2 = Y_{km}^2;$$

więc ostatecznie

$$Y = \sqrt{\frac{1}{2} \sum Y_{km}^2} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot 2 \sum Y_k^2} = \sqrt{\sum Y_k^2}.$$

Wartość skuteczna funkcji odkształconej, okresowo zmiennej w czasie, równa się pierwiastkowi kwadratowemu z sumy kwadratów wartości skutecznych wszystkich harmonicznych tej funkcji.

Tak np dla napięcia

$$U = \sqrt{\sum U_k^2} = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + \dots + U_n^2}; \quad (22)$$

dla prądu

$$I = \sqrt{\sum I_k^2} = \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \dots + I_n^2}. \quad (23)$$

Stosunek wartości skutecznej funkcji odkształconej do wartości skutecznej głównej fali stanowi współczynnik krzywej tej funkcji; oznaczając go przez s , mamy

$$s = \frac{Y}{Y_1} = \frac{\sqrt{Y_1^2 + Y_2^2 + \dots + Y_n^2}}{Y_1}.$$

§ 52. Obwód prądu odkształconego.

Rozpatrując część obwodu, w którym mamy napięcie $u = U_m \sin \omega t$ oraz w szereg połączone oporności: rzeczywistą, indukcyjną i pojemnościową, wiemy, że powstanie prąd ustalony o natężeniu

$$i = I_m \sin (\omega t - \varphi);$$

przyczem

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}},$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

W przypadku, gdy w takim obwodzie mamy napięcie o przebiegu odkształconym, rozumiemy w sposób następujący. Napięcie takie składa się z szeregu harmonicznym o przebiegu sinusoidalnym, o różnych amplitudach i częstotliwościach. Wobec niezależności prądów, płynących w jednym obwodzie, każda harmoniczna napięcia daje, niezależnie od innych, prąd o przebiegu sinusoidalnym o częstotliwości tej samej, co powodujące go napięcie. Wszystkie te prądy, dodając się, tworzą prąd wypadkowy, odkształcony, przyczem poszczególne prądy będą harmonicznymi. Ponieważ częstotliwość harmonicznej rzędu k jest k razy większa od częstotliwości prądu wypadkowego, więc

$$I_k = \frac{U_k}{\sqrt{R^2 + \left(k \omega L - \frac{1}{k \omega C}\right)^2}}, \quad (24)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_k = \frac{k \omega L - \frac{1}{k \omega C}}{R}.$$

Zbadajmy, jakie warunki muszą być spełnione, aby wpływy samoindukcji i pojemności znosiły się wzajemnie dla danej harmonicznej, czyli, żeby dana harmoniczna dawała rezonans napięć. Będzie to wtedy, gdy

$$k \omega L - \frac{1}{k \omega C} = 0; \quad k \omega L = \frac{1}{k \omega C};$$

$$k^2 \omega^2 LC = 1; \quad LC = \frac{1}{k^2 \omega^2};$$

albo jeszcze

$$k = \frac{1}{\omega \sqrt{LC}},$$

lub

$$k = \frac{1}{2\pi f \sqrt{LC}}.$$

Widzimy, że rezonans może zachodzić wyłącznie dla jednej harmonicznej naraz i to tylko wtedy, kiedy spełniony jest warunek

$$LC = \frac{1}{k^2 \omega^2}.$$

Jeżeli dla danej harmonicznej zachodzi rezonans napięć, to dla tej harmonicznej oporność pozorna staje się najmniejszą i równą oporności rzeczywistej, a więc natężenie prądu tej harmonicznej będzie największe; inaczej, wpływ danej harmonicznej napięcia na prąd wypadkowy potęguje się. To zjawisko pozwala nam wyodrębnić w badaniu poszczególne harmoniczne napięcia.

Ze wzoru (24) możemy zbadać, jaki wpływ na kształt krzywej prądu odkształconego wywierają indukcyjność i pojemność. Mianowicie, jeżeli w obwodzie, w którym działa napięcie o przebiegu odkształconym, mamy oporność R i indukcyjność L , w szeregowym połączeniu, wówczas natężenie prądu będzie miało również przebieg odkształcony, przyczem natężenie prądu harmonicznej rzędu k będzie, na podstawie wzoru (24), równe

$$I_k = \frac{U_k}{\sqrt{R^2 + (k\omega L)^2}};$$

wynika stąd, że im większy wskaźnik k harmonicznej, tem mniejszy będzie prąd, to znaczy, że wpływ wyższych harmonicznych maleje, a więc natężenie prądu będzie miało przebieg mniej odkształcony niż napięcie, które ten prąd spowodowało. Indukcyjność tłumí wyższe harmoniczne prądu, zbliża więc krzywą prądu do sinusoidy.

Jeżeli zaś w obwodzie z napięciem odkształconym mamy oporność R i pojemność C w szeregowym połączeniu, wówczas natężenie prądu harmonicznej rzędu k wyrazi się wzorem

$$I_k = \frac{U_k}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{k\omega C}\right)^2}}.$$

Im większy wskaźnik k , tem mniejszy będzie mianownik w ostatnim wzorze, czyli tem większe będzie natężenie prądu harmonicznej, czyli wpływ wyższych harmonicznych staje się coraz większy; przebieg natężenia prądu będzie więcej odkształcony niż przebieg napięcia. Pojemność potęguje wyższe harmoniczne, oddala więc krzywą prądu od sinusoidy.

§ 53. Moc prądu odkształconego.

Każda harmoniczna prądu odkształconego, jako prąd sinusoidalny, daje średnią moc za jeden okres, czyli tak zwaną moc czynną, równą iloczynowi napięcia przez natężenie prądu i przez współczynnik mocy, zależny od przesunięcia fazy prądu względem napięcia. Dla otrzymania mocy czynnej prądu odkształconego musimy wziąć sumę mocy czynnych wszystkich harmonicznych tego prądu. W ten sposób możemy napisać dla mocy czynnej P prądu odkształconego wzór następujący

$$P = U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_2 I_2 \cos \varphi_2 + \dots + U_n I_n \cos \varphi_n.$$

Rozpatrzmy prąd sinusoidalny, którego napięcie i natężenie mają wartości skuteczne U i I , zupełnie takie same, jak wartości skuteczne napięcia i natężenia prądu odkształconego; na podstawie wzorów (22) i (23) znaczy to, że

$$U = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_n^2}, \quad (25)$$

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + \dots + I_n^2}. \quad (26)$$

Niech natężenie prądu I będzie przesunięte względem napięcia U o kąt φ , dobrany w ten sposób, aby moc tego prądu sinusoidalnego wypadła taka sama, jak dla prądu odkształconego; wtedy będziemy mieli

$$P = UI \cos \varphi = U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_2 I_2 \cos \varphi_2 + \dots + U_n I_n \cos \varphi_n. \quad (27)$$

Taki umyślony prąd sinusoidalny, którego napięcie i natężenie mają te same wartości skuteczne, co i prąd odkształcony i którego moc czynna równa się mocy czynnej prądu odkształconego, nazywamy prądem sinusoidalnym równoważnym prądowi odkształconemu.

$\cos \varphi$ można nazwać współczynnikiem mocy równoważnego prądu; ten współczynnik zawsze może być odpowiednio dobrany, wynika to z tego, że na podstawie wzorów (27) oraz (25) i (26)

$$\cos \varphi = \frac{U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_2 I_2 \cos \varphi_2 + \dots + U_n I_n \cos \varphi_n}{\sqrt{(U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_n^2)(I_1^2 + I_2^2 + \dots + I_n^2)}}; \quad (28)$$

otóż łatwo można dowieść, że mianownik w ostatnim wzorze nie może być mniejszy od licznika, czyli że wyraz ten jest albo

mniejszy albo równy jedności; inaczej mówiąc, zawsze można dobrać kąt φ dla otrzymania potrzebnego współczynnika mocy.

W przypadku gdy w obwodzie prądu odkształconego, z opornością rzeczywistą R , założymy że dla wszystkich częstotliwości (harmonicznych) R ma wartość stałą, to znaczy, nie weźmiemy pod uwagę działania naskórkowości, będziemy mieli

$$UI \cos \varphi = I^2 R \quad (29)$$

$$\left. \begin{aligned} U_1 I_1 \cos \varphi_1 &= I_1^2 R, \\ \dots & \\ U_n I_n \cos \varphi_n &= I_n^2 R; \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

wzór (29) daje

$$\cos \varphi = \frac{IR}{U} = R \sqrt{\frac{I_1^2 + I_2^2 + \dots + I_n^2}{U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_n^2}} \quad (31)$$

określając zaś ze wzorów (30) wartości I_1, \dots, I_n i podstawiając do (31), otrzymamy

$$\cos \varphi = \sqrt{\frac{U_1^2 \cos^2 \varphi_1 + U_2^2 \cos^2 \varphi_2 + \dots + U_n^2 \cos^2 \varphi_n}{U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_n^2}};$$

w przypadku szczególnym, gdy w obwodzie uwzględniamy tylko oporność rzeczywistą, wszystkie harmoniczne prądu będą w fazie ze swymi napięciami, a więc dowolny $\cos \varphi_k = 1$, wtedy $\cos \varphi = 1$.

Iloczyn wartości skutecznych napięcia i prądu odkształconego stanowi moc pozorną tego prądu; iloraz mocy czynnej do mocy pozornej nazywamy współczynnikiem mocy prądu odkształconego. Oznaczając ten współczynnik przez K , będziemy mieli

$$K = \frac{U_1 I_1 \cos \varphi_1 + \dots + U_k I_k \cos \varphi_k + \dots + U_n I_n \cos \varphi_n}{\sqrt{(U_1^2 + \dots + U_k^2 + \dots + U_n^2)(I_1^2 + \dots + I_k^2 + \dots + I_n^2)}} \quad (32)$$

Porównywając wzory (28) i (32), widzimy, że współczynnik mocy prądu odkształconego może być ujęty w postaci

$$K = \cos \varphi.$$

Należy tylko mieć na uwadze, że kąt φ jest tylko pewnym umyślonym kątem, którego cosinus stanowi współczynnik mocy, na podstawie wyżej podanego określenia albo też kątem przesunięcia fazy natężenia prądu względem napięcia w równoważnym prądzie sinusoidalnym.

Oznaczając dla prądu odkształconego moc pozorną przez P_p , zaś moc czynną przez P , będziemy mieli

$$P_p = UI; P = KUI = UI \cos \varphi = P_p \cos \varphi.$$

Moc czynną możemy rozpatrywać jako składową mocy pozornej; wówczas drugą składową, analogicznie jak dla mocy prądu sinusoidalnego, będzie pewna moc, wartość której możemy wyrazić w postaci $UI \sin \varphi$; nazwijmy tę składową mocy pozornej mocą bierną; oznaczając ją przez P_b , będziemy mieli

$$P_b = UI \sin \varphi;$$

$$P_p^2 = P^2 + P_b^2; P_b = \sqrt{P_p^2 - P^2}.$$

Należy zwrócić uwagę, że w przeciwieństwie do mocy czynnej prądu odkształconego, która jest równa sumie mocy czynnych poszczególnych harmonicznycy, moc bierna, określona w sposób wyżej podany, nie jest, naogół, równa sumie mocy biernych tych harmonicznycy. Ta ostatnia suma

$$U_1 I_1 \sin \varphi_1 + \dots + U_k I_k \sin \varphi_k + \dots + U_n I_n \sin \varphi_n =$$

$$= \sum_{k=1}^{k=n} U_k I_k \sin \varphi_k$$

ma największą wartość wówczas, gdy wszystkie sinusy będą równe 1, czyli, gdy kąty przesunięcia wszystkich harmonicznycy prądu względem swych napięć wynoszą $\pm 90^\circ$, ale wówczas współczynnik mocy, jak wynika ze wzoru (32), staje się równym zeru, więc $\cos \varphi = 0$, $\sin \varphi = 1$; obwód zawiera tylko oporność bierną.

Porównajmy w tym teoretycznym przypadku wartość mocy biernej prądu odkształconego, która staje się wówczas równą mocy pozornej, z sumą mocy biernych poszczególnych harmonicznycy; biorąc różnicę kwadratów tych wielkości będziemy mieli

$$P_b^2 - \left[\sum_{k=1}^{k=n} U_k I_k \sin \varphi_k \right]^2 = U^2 I^2 - \left[\sum_{k=1}^{k=n} U_k I_k \right]^2 ;$$

ale $U^2 = U_1^2 + \dots + U_k^2 + \dots + U_n^2 = \Sigma U_k^2,$

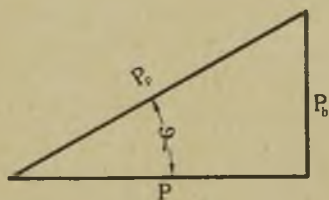
$$I^2 = I_1^2 + \dots + I_k^2 + \dots + I_n^2 = \Sigma I_k^2,$$

$$U^2 I^2 = \Sigma U_k^2 I_k^2 + \Sigma U_k^2 I_l^2 + \Sigma U_l^2 I_k^2,$$

$$[\Sigma U_k I_k]^2 = (U_1 I_1 + \dots + U_n I_n)^2 = \Sigma U_k^2 I_k^2 + 2 \Sigma U_k I_k U_l I_l.$$

odejmując stronami ostatnie dwa wzory, otrzymujemy

$$P_b^2 - \left[\sum_{k=1}^{k=n} U_k I_k \right]^2 = \Sigma (U_k I_l - U_l I_k)^2 > 0.$$



Rys. 130.

Wyraz stojący z prawej strony w rozpatrywanym przypadku nie może się równać zero, gdyż wówczas mielibyśmy

$$\frac{U_k}{I_k} = \frac{U_l}{I_l} = \text{Const.},$$

a to byłoby możliwe tylko w obecności w obwodzie wyłącznie oporności czynnej; tymczasem rozpatrywaliśmy przypadek, gdy w obwodzie mamy tylko oporność bierną.

Analogicznie do mocy prądu sinusoidalnego można moce przy prądzie odkształconym ująć wykreślnie w trójkąt jak na rys. 130.

§ 54. Wpływ prądu odkształconego przy pomiarach indukcyjności i pojemności.

Załóżmy, że do napięcia U prądu zmiennego o przebiegu sinusoidalnym włączyliśmy tylko oporność indukcyjną, np. cewkę o bardzo małej oporności rzeczywistej w porównaniu z indukcyjnością własną L tej cewki. Wówczas, oznaczając przez I natężenie prądu, płynącego w takim obwodzie, przy pulsacji ω , będziemy mieli

$$U = I \omega L,$$

skąd dla indukcyjności otrzymujemy

$$L = \frac{U}{I \omega}.$$

Jeżeli zaś taką samą cewkę włączymy do napięcia o takiej samej wartości skutecznej U , lecz o przebiegu odkształconym (bierzemy krzywą symetryczną względem osi X i początku), wtedy wartość chwilowa napięcia będzie

$$u = U_{1m} \sin \omega t + U_{3m} \sin 3 \omega t + U_{5m} \sin 5 \omega t + \dots$$

Biorąc pod uwagę, że każda harmoniczna prądu będzie opóźniona o kąt prosty względem odpowiedniej harmonicznej napięcia, otrzymamy prąd o wartości chwilowej

$$i = \frac{U_{1m}}{\omega L} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{U_{3m}}{3 \omega L} \sin \left(3 \omega t - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{U_{5m}}{5 \omega L} \sin \left(5 \omega t - \frac{\pi}{2} \right) + \dots$$

skąd, dla wartości skutecznych, będziemy mieli

$$U = \sqrt{U_1^2 + U_3^2 + U_5^2 + \dots},$$

$$I = \frac{1}{\omega L} \sqrt{U_1^2 + \frac{U_3^2}{3^2} + \frac{U_5^2}{5^2} + \dots}$$

Oznaczając wyraz $\frac{U}{\omega I}$ przy prądzie odkształconym przez L' , otrzymamy

$$L' = L \sqrt{\frac{U_1^2 + U_3^2 + U_5^2 + \dots}{U_1^2 + \frac{U_3^2}{3^2} + \frac{U_5^2}{5^2} + \dots}}$$

Ponieważ wyraz, stojący pod pierwiastkiem, jest większy od mianownika, przeto oczywiście

$$L' > L;$$

to znaczy, że przy mierzeniu indukcyjności własnej prądem odkształconym, otrzymujemy rezultat większy, niż przy prądzie sinusoidalnym.

Do analogicznego rezultatu dojdziemy również przy mierzeniu pojemności. Jeżeli, mianowicie, do napięcia U prądu sinusoidalnego

włączymy kondensator o pojemności C ze znikomo małą opornością rzeczywistą, wtedy przy prądzie sinusoidalnym

$$U = I \frac{1}{\omega C},$$

skąd

$$C = \frac{I}{\omega U}.$$

Przy prądzie odkształconym

$$u = U_{1m} \sin \omega t + U_{3m} \sin 3 \omega t + U_{5m} \sin 5 \omega t + \dots;$$

$$i = U_{1m} \omega C \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) + U_{3m} 3 \omega C \sin \left(3 \omega t + \frac{\pi}{2} \right) + \\ + U_{5m} 5 \omega C \sin \left(5 \omega t + \frac{\pi}{2} \right) + \dots;$$

więc

$$U = \sqrt{U_1^2 + U_3^2 + U_5^2 + \dots},$$

$$I = \omega C \sqrt{U_1^2 + 3^2 U_3^2 + 5^2 U_5^2 + \dots}.$$

Oznaczając przy prądzie odkształconym $\frac{I}{\omega U}$ przez C' , będziemy mieli

$$C' = C \sqrt{\frac{U_1^2 + 3 U_3^2 + 5 U_5^2 + \dots}{U_1^2 + U_3^2 + U_5^2 + \dots}},$$

skąd wnioskujemy, że

$$C' > C.$$

§ 55. Trójfazowe prądy odkształcone.

a) Połączenie gwiazdowe (rys. 131).

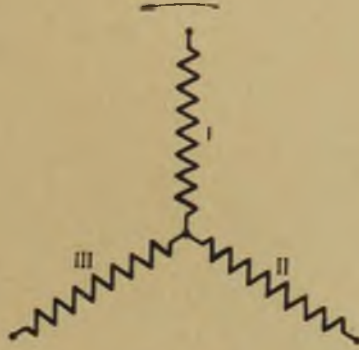
Przy prądzie sinusoidalnym mamy w poszczególnych fazach napięcia sinusoidalne, które, przy jednakowym obciążeniu wszystkich faz, będą

$$u_I = U_m \sin \omega t;$$

$$u_{II} = U_m \sin (\omega t - 120^\circ);$$

$$u_{III} = U_m \sin (\omega t + 120^\circ).$$

Przy prądzie odkształconym napięcie każdej fazy (rozpatrujemy krzywą napięcia symetryczną względem osi X i początku) wyrazi się w sposób następujący



Rys. 131.

$$u_I = U_{1m} \sin \omega t + U_{3m} \sin 3 \omega t + U_{5m} \sin 5 \omega t + \dots$$

$$u_{II} = U_{1m} \sin(\omega t - 120^\circ) + U_{3m} \sin 3(\omega t - 120^\circ) + U_{5m} \sin 5(\omega t - 120^\circ) + \dots$$

$$u_{III} = U_{1m} \sin(\omega t + 120^\circ) + U_{3m} \sin 3(\omega t + 120^\circ) + U_{5m} \sin 5(\omega t + 120^\circ) + \dots$$

Wzory te możemy napisać inaczej

$$u_I = U_{1m} \sin \omega t + U_{3m} \sin 3 \omega t + U_{5m} \sin 5 \omega t + \dots$$

$$u_{II} = U_{1m} \sin(\omega t - 120^\circ) + U_{3m} \sin 3 \omega t + U_{5m} \sin(5 \omega t + 120^\circ) + \dots$$

$$u_{III} = U_{1m} \sin(\omega t + 120^\circ) + U_{3m} \sin 3 \omega t + U_{5m} \sin(5 \omega t - 120^\circ) + \dots$$

Napięcia międzyfazowe skojarzone będą miały wartości chwilowe równe różnicy takichże wartości napięć fazowych, np. między I i II fazą

$$u_{I-II} = u_I - u_{II} = U_{1m} [\sin \omega t - \sin(\omega t - 120^\circ)] +$$

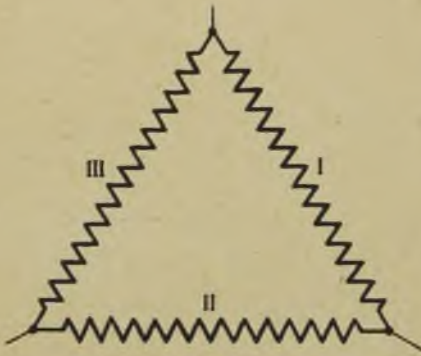
$$+ U_{3m} [\sin 5 \omega t - \sin(5 \omega t + 120^\circ)] + \dots = U_{1m} \sqrt{3} \sin(\omega t + 30^\circ) +$$

$$+ U_{3m} \sqrt{3} \sin(5 \omega t - 30^\circ) + \dots$$

więc zginą w nich te harmoniczne, wskaźnik których określony jest liczbą, podzielną przez 3, a więc 3, 9 itd. Jeżeli w układzie gwiazdowym mamy przewód zerowy, to przez ten przewód nawet przy jednakowym obciążeniu wszystkich faz będzie płynął prąd, powstający pod wpływem tych napięć, które między prze-

wodami się znoszą, t. zn. napięć harmoniczných, wskaźnik których określony jest liczbą podzielną przez 3.

b) Połączenie trójkątne (rys. 132). I tu, jak poprzednio, dla prądu sinusoidalnego przy jednakowem obciążeniu wszystkich faz



Rys. 132.

$$u_I = U_m \sin \omega t;$$

$$u_{II} = U_m \sin \omega t - 120^\circ;$$

$$u_{III} = U_m \sin (\omega t + 120^\circ).$$

W tym przypadku suma wartości chwilowych napięć poszczególnych faz jest stale równa zero. Przy prądzie odkształconym znajdziemy, jak poprzednio, że harmoniczne o wskaźnikach, niepodzielnych przez 3 są przesunięte każda względem następnej o 120° , wobec

czego, przy sumowaniu, wartości chwilowe tych harmoniczných znoszą się, natomiast wartości chwilowe harmoniczných, podzielnych przez 3, dają stale sumę różną od zera; a więc w trójkącie będziemy mieli w rezultacie wypadkowe napięcie, skutkiem czego będzie płynął prąd, zawierający harmoniczne 3, 9 i t. d.

W prądnicach nie stosuje się połączenia trójkątnego w tworniku chcąc uniknąć przy odkształconem napięciu straty na ciepło Joule'a, nawet wówczas, gdy prąd nazewnątrz nie byłby pobierany.

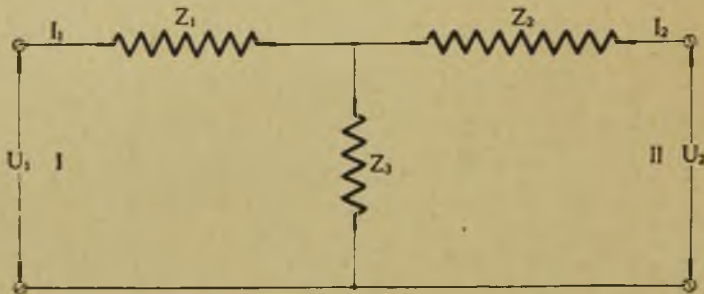
ROZDZIAŁ IX.

RÓWNANIA I WYKRESY OBWODÓW PRĄDU ZMIENNEGO, OPARTE NA BADANIACH W STANIE JAŁOWYM I W STANIE ZWARCIA.

§ 56. Równania zasadnicze.

W większości przypadków w elektrotechnice mamy do czynienia z obwodami, które można sprowadzić do układów równoważnych, dających się ująć w proste schematy. Gdy chodzi o przenoszenie energii elektrycznej od źródła prądu do odbiornika bezpośrednio albo za pomocą transformatorów, lub, gdy rozpatrujemy maszyny, względnie przyrządy elektryczne, w których zachodzą sprzężenia magnetyczne, możemy, bardzo często w celu badania zależności napięć i prądów w takich obwodach, zastosować układ równoważny, zawierający trzy oporności pozorne, z których albo dwie są połączone w szereg, zaś trzecia włączona między temi opornościami i drugim przewodem, albo odwrotnie — jedna włączona w szereg, a dwie równolegle między przewodami: jedna przed opornością szeregową, druga po niej. Wobec szerokiego zastosowania takiego układu, można go łącznie ze źródłem i odbiornikiem nazwać *obwodem przesyłowym prądu zmiennego*. Część obwodu, zawierającą trzy oporności pozorne w jednym z wyżej podanych układów, można nazwać *czwórnikiem*, gdyż posiada 2 pary biegunów: na początku i w końcu. Włączając taki czwórnik z jednej strony do źródła prądu, zaś z drugiej strony do odbiornika, otrzymujemy obwód prądu zmiennego, który ma własności obwodu zawierającego jedno źródło prądu często spotykane w praktyce. Rozpatrzmy bardziej szczegółowo własności tego rodzaju obwodów, zatrzymując się na układzie oporności pozornych Z_1 , Z_2 i Z_3 , jak wskazuje schemat (rys. 133).

Gdy do końców czwórnika włączymy odbiornik, przez ten odbiornik będzie płynął prąd o natężeniu takim samym, jakie ma prąd płynący przez oporność Z_2 . Oznaczmy dla takiego stanu obciążenia wartości skuteczne napięcia i natężenia prądu na początku przez U_1 i I_1 , zaś na końcu przy odbiorniku przez U_2 i I_2 ; kąty przesunięcia fazy między I_1 i U_1 przez φ_1 , zaś między I_2 i U_2 przez φ_2 .



Rys. 133.

Stan, w którym obciążenia niema, to znaczy, odbiornik nie jest włączony, obwód jest otwarty, nazywamy stanem jałowym.

Stan, w którym końce czwórnika lub wogóle linii elektrycznej są ze sobą połączone bezpośrednio, czyli bez oporności, nazywamy stanem zwarcia.

Dla stanu jałowego, gdy w końcu napięcie ma wartość U_2 jak przy obciążeniu, zaś prąd nie jest tu pobierany, czyli $I_2 = 0$, napięcie i prąd na początku będą U_{10} i I_{10} , kąt między nimi φ_0 ; dla stanu zwarcia (końce są połączone bez oporności), gdy $U_2 = 0$, zaś prąd ma wartość I_2 jak przy obciążeniu, napięcie i prąd na początku będą U_{1z} i I_{1z} , kąt między nimi φ_2 .

Rozpatrując obwód w stanie jałowym, spostrzegamy, że w tym przypadku prąd I_{10} przepływa przez oporności pozorne Z_1 i Z_3 , połączone ze sobą w szereg, czyli przez oporność $\hat{Z}_1 + \hat{Z}_3$; oznaczając sumę tych symbolów, która stanowi oporność pozorną stanu jałowego, przez \hat{Z}_0 , będziemy mieli

$$\hat{Z}_0 = \hat{Z}_1 + \hat{Z}_3, \quad (1)$$

$$\hat{I}_{10} = \frac{\hat{U}_{10}}{\hat{Z}_0}. \quad (2)$$

Z drugiej strony oporność Z_3 znajduje się pod napięciem U_2 , gdyż prąd przez Z_2 nie przepływa, więc

$$\hat{I}_{10} = \frac{\hat{U}_2}{\hat{Z}_3}; \quad (3)$$

przez porównanie (2) i (3) otrzymujemy

$$\hat{U}_{10} = \hat{U}_2 \frac{\hat{Z}_0}{\hat{Z}_3} = \hat{U}_2 \hat{S}_0, \quad (4)$$

gdzie

$$\hat{S}_0 = \frac{\hat{Z}_0}{\hat{Z}_3} = \frac{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_3}{\hat{Z}_3} = 1 + \frac{\hat{Z}_1}{\hat{Z}_3}. \quad (5)$$

Spółczynnik \hat{S}_0 , rozpatrywany jako symbol, ma argument równy kątowi pomiędzy \hat{U}_{10} i \hat{U}_2 ; oznaczmy ten kąt przez γ_0 .

Wprowadzając wartość \hat{U}_{10} ze wzoru (4) do (2), otrzymamy

$$\hat{I}_{10} = \hat{U}_2 \frac{\hat{S}_0}{\hat{Z}_0}. \quad (6)$$

W stanie zwarcia prąd, przepływający przez oporność Z_2 , równy jest I_2 . Przez oporność Z_3 , równoległą do Z_2 , płynie prąd, wartość którego będzie

$$\hat{I}_2 \frac{\hat{Z}_2}{\hat{Z}_3}.$$

Geometryczna suma tych dwóch prądów daje nam prąd I_{1z} ; mamy więc

$$\hat{I}_{1z} = \hat{I}_2 + \hat{I}_2 \frac{\hat{Z}_2}{\hat{Z}_3} = \hat{I}_2 \left(1 + \frac{\hat{Z}_2}{\hat{Z}_3} \right). \quad (7)$$

Oznaczając wyraz, znajdujący się w nawiasach, przez \hat{S}_z , gdzie \hat{S}_z stanowi symbol, którego argument określony będzie kątem γ_z pomiędzy \hat{I}_{1z} i \hat{I}_2 , otrzymamy

$$\hat{S}_z = 1 + \frac{\hat{Z}_2}{\hat{Z}_3}, \quad (8)$$

$$\hat{I}_{1z} = \hat{I}_2 \hat{S}_z. \quad (9)$$

Napięcie \hat{U}_{1z} na początku równa się geometrycznej sumie napięć na oporności Z_1 oraz na jednej z oporności Z_2 lub Z_3 , możemy więc napisać

$$\hat{U}_{1z} = \hat{I}_{1z} \hat{Z}_1 + \hat{I}_2 \hat{Z}_2, \quad (10)$$

zaś biorąc pod uwagę (9),

$$\hat{U}_{1z} = \hat{I}_2 \hat{S}_z \hat{Z}_1 + \hat{I}_2 \hat{Z}_2 = \hat{I}_2 (\hat{S}_z \hat{Z}_1 + \hat{Z}_2). \quad (11)$$

Stosunek wektora napięcia do wektora prądu w stanie zwarcia oznaczamy przez \hat{Z}_z , będzie to symbol, stanowiący oporność pozorną obwodu w stanie zwarcia.

Mamy więc

$$\hat{U}_{1z} = \hat{I}_{1z} \hat{Z}_z, \quad (12)$$

albo po uwzględnieniu (9)

$$\hat{U}_{1z} = \hat{I}_2 \hat{S}_z \hat{Z}_z. \quad (13)$$

Przez porównanie (11) i (13) otrzymujemy

$$\hat{S}_z \hat{Z}_z = \hat{S}_z \hat{Z}_1 + \hat{Z}_2. \quad (14)$$

Przechodząc do ustalenia zależności napięcia i prądu na początku od tychże wielkości na końcu, napiszemy następujące równania, wynikające z rozpatrzenia schematu na rys. 133

$$\hat{U}_1 - \hat{U}_2 = \hat{I}_1 \hat{Z}_1 + \hat{I}_2 \hat{Z}_2,$$

$$\hat{I}_1 - \hat{I}_2 = \frac{1}{\hat{Z}_3} (\hat{U}_1 - \hat{I}_1 \hat{Z}_1).$$

Wyrażamy z drugiego równania

$$\hat{I}_1 = \frac{\hat{U}_1 + \hat{I}_2 \hat{Z}_3}{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_3}$$

i podstawiamy do pierwszego; wtedy

$$\hat{U}_1 - \hat{U}_2 = (\hat{U}_1 + \hat{I}_2 \hat{Z}_3) \frac{\hat{Z}_1}{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_3} + \hat{I}_2 \hat{Z}_2,$$

skąd

$$\hat{U}_1 = \hat{U}_2 \frac{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_3}{\hat{Z}_3} + \hat{I}_2 \frac{\hat{Z}_1 \hat{Z}_2 + \hat{Z}_1 \hat{Z}_3 + \hat{Z}_2 \hat{Z}_3}{\hat{Z}_3}, \quad (15)$$

analogicznie, określając z drugiego równania

$$\hat{U}_1 = \hat{I}_1 \hat{Z}_3 - \hat{I}_2 \hat{Z}_3 + \hat{I}_1 \hat{Z}_1$$

i podstawiając do pierwszego, otrzymamy

$$\hat{I}_1 = \frac{\hat{U}_2}{\hat{Z}_3} + \hat{I}_2 \frac{\hat{Z}_2 + \hat{Z}_3}{\hat{Z}_3}. \quad (16)$$

We wzorach (15) i (16) możemy zamiast oporności Z_1 , Z_2 i Z_3 , wprowadzić poprzednio rozpatrzone symbole S_0 , S_z , Z_0 i Z_z ; na podstawie wzorów (1), (5), (8) i (14) mamy

$$\frac{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_3}{\hat{Z}_3} = 1 + \frac{\hat{Z}_1}{\hat{Z}_3} = \hat{S}_0,$$

$$\frac{\hat{Z}_1 \hat{Z}_2 + \hat{Z}_1 \hat{Z}_3 + \hat{Z}_2 \hat{Z}_3}{\hat{Z}_3} = \left(1 + \frac{\hat{Z}_2}{\hat{Z}_3}\right) \hat{Z}_1 + \hat{Z}_2 = \hat{S}_z \hat{Z}_1 + \hat{Z}_2 = \hat{S}_z \hat{Z}_z,$$

$$\frac{1}{\hat{Z}_3} = \frac{1 + \frac{\hat{Z}_1}{\hat{Z}_3}}{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_3} = \frac{\hat{S}_0}{\hat{Z}_0},$$

$$\frac{\hat{Z}_2 + \hat{Z}_3}{\hat{Z}_3} = 1 + \frac{\hat{Z}_2}{\hat{Z}_3} = \hat{S}_z.$$

W ten sposób wzory (15) i (16) przybierają postać

$$\hat{U}_1 = \hat{U}_2 \hat{S}_0 + \hat{I}_2 \hat{S}_z \hat{Z}_z, \quad (17)$$

$$\hat{I}_1 = \hat{U} \frac{\hat{S}_0}{\hat{Z}_0} + \hat{I}_2 \hat{S}_z. \quad (18)$$

We wzorze (17), z prawej strony, pierwszy wyraz, jak widać ze wzoru (4), stanowi \hat{U}_{10} , drugi zaś wyraz, jak widać ze wzoru (12) \hat{U}_{1z} ; we wzorze (18) pierwszy wyraz z prawej strony, jak widać ze wzoru (6), stanowi \hat{I}_{10} , drugi zaś wyraz, jak widać ze wzoru (9), \hat{I}_{1z} ; mamy więc

$$\hat{U}_1 = \hat{U}_{10} + \hat{U}_{1z},$$

$$\hat{I}_1 = \hat{I}_{10} + \hat{I}_{1z}.$$

Wynika stąd, że w stanie obciążenia napięcie i prąd na początku stanowią sumy napięć, względnie prądów, odpowiadających dwóm stanom: jałowemu i zwarcia.

Pomiędzy czterema symbolami \hat{Z}_0 , \hat{Z}_z , \hat{S}_0 i \hat{S}_z , w powyższych równaniach, istnieje zależność, którą możemy określić w sposób następujący: na zasadzie wzoru (5) mamy

$$\hat{S}_0 = \frac{\hat{Z}_0}{\hat{Z}_z},$$

$$\hat{S}_0 = 1 + \frac{\hat{Z}_1}{\hat{Z}_z};$$

zestawiając razem wzory (8) i (14), to znaczy

$$\hat{S}_z = 1 + \frac{\hat{Z}_2}{\hat{Z}_z},$$

$$\hat{S}_z \hat{Z}_z = \hat{S}_z \hat{Z}_1 + \hat{Z}_2,$$

otrzymujemy cztery równania, z których, rugując \hat{Z}_1 , \hat{Z}_2 i \hat{Z}_3 , otrzymamy pożądaną zależność pomiędzy symbolami.

Z pierwszego z tych równań mamy

$$\hat{Z}_z = \frac{\hat{Z}_0}{\hat{S}_0},$$

z drugiego

$$\hat{Z}_1 = (\hat{S}_0 - 1) \hat{Z}_z = (\hat{S}_0 - 1) \frac{\hat{Z}_0}{\hat{S}_0},$$

z trzeciego

$$\hat{Z}_2 = (\hat{S}_z - 1) \hat{Z}_z = (\hat{S}_z - 1) \frac{\hat{Z}_0}{\hat{S}_0}.$$

Podstawiając te wartości do czwartego równania, otrzymamy

$$\hat{S}_z \hat{Z}_z = \hat{S}_z (\hat{S}_0 - 1) \frac{\hat{Z}_0}{\hat{S}_0} + (\hat{S}_z - 1) \frac{\hat{Z}_0}{\hat{S}_0},$$

$$\hat{S}_0 \hat{S}_z \hat{Z}_z = \hat{S}_0 \hat{S}_z \hat{Z}_0 - \hat{S}_z \hat{Z}_0 + \hat{S}_z \hat{Z}_0 - \hat{Z}_0,$$

albo

$$\hat{S}_0 \hat{S}_z (\hat{Z}_0 - \hat{Z}_z) = \hat{Z}_0,$$

skąd

$$\hat{S}_0 \hat{S}_z = \frac{\hat{Z}_0}{\hat{Z}_0 - \hat{Z}_z}. \quad (19)$$

Wprowadzając zamiast oporności pozornej stanu jałowego Z_0 , wielkość odwrotną, czyli przewodność pozorną stanu jałowego i oznaczając tę wielkość przez Y_0 , możemy przepisać równania (17), (18) i (19) w sposób następujący

$$\hat{U}_1 = \hat{U}_2 \hat{S}_0 + \hat{I}_2 \hat{S}_z \hat{Z}_z; \quad (20)$$

$$\hat{I}_1 = \hat{U}_2 \hat{S}_0 \hat{Y}_0 + \hat{I}_2 \hat{S}_z; \quad (21)$$

$$\hat{S}_0 \hat{S}_z = \frac{1}{1 - \hat{Y}_0 \hat{Z}_z}. \quad (22)$$

Układ trzech równań (17), (18), (19) lub (20), (21) i (22) stanowi równania zasadnicze rozpatrzonego obwodu prądu zmiennego, dające zależności pomiędzy napięciami i prądami na początku i w końcu.

Mamy w tych równaniach cztery zależne od siebie stałe $Z_0 (Y_0)$, Z_z , S_0 , S_z .

§ 57. Obwód symetryczny.

Nazywamy symetrycznym taki obwód prądu zmiennego, dla którego w rozpatrzonym schemacie $\hat{Z}_1 = \hat{Z}_2$. Wtedy przez porównanie wzorów (5) i (8) otrzymujemy

$$\hat{S}_0 = \hat{S}_z.$$

Oznaczając ten symbol wprost przez \hat{S} bez znaczka, zaś jego argument przez γ , będziemy mieli ze wzorów (4) i (9)

$$\frac{\hat{U}_{10}}{\hat{U}_2} = \frac{\hat{I}_{1z}}{\hat{I}_2} = \hat{S}.$$

Równania zasadnicze (17), (18), (19), lub (20), (21), (22) w tym przypadku przybiorą postać

$$\frac{\hat{U}_1}{\hat{S}} = \hat{U}_2 + \hat{I}_2 \hat{Z}_z, \quad (23)$$

$$\frac{\hat{I}_1}{\hat{S}} = \frac{\hat{U}_2}{\hat{Z}_0} + \hat{I}_2, \quad (24)$$

$$\hat{S} = \sqrt{\frac{\hat{Z}_0}{\hat{Z}_0 - \hat{Z}_z}}, \quad (25)$$

lub

$$\frac{\hat{U}_1}{\hat{S}} = \hat{U}_2 + \hat{I}_2 \hat{Z}_z, \quad (26)$$

$$\frac{\hat{I}_1}{\hat{S}} = \hat{U}_2 \hat{Y}_0 + \hat{I}_2, \quad (27)$$

$$\hat{S} = \sqrt{\frac{1}{1 - \hat{Y}_0 \hat{Z}_z}}. \quad (28)$$

W obwodzie symetrycznym mamy tylko trzy zależne od siebie stałe Z_0 (Y_0), Z_z i S .

§ 58. Określenie wielkości stałych zapomocą pomiarów.

Stałe, wchodzące do równań zasadniczych wyżej rozpatrzonego obwodu prądu zmiennego, można określić na podstawie doświadczeń, przeprowadzonych w stanie jałowym i w stanie zwarcia.

Przy dowolnem napięciu U mierzymy na początku obwodu natężenie prądu i przesunięcie jego fazy względem napięcia, gdy w końcu kolejno mamy stan jałowy i stan zwarcia; oznaczmy zmierzone wartości prądów przez I_0 i I_z , zaś kąty przesunięcia fazy tych prądów, liczone w kierunku od napięcia przez φ_0 i φ_z .

Wtedy

$$\hat{Z}_0 = \frac{\hat{U}}{\hat{I}_0} \text{ lub } \hat{Y}_0 = \frac{\hat{I}_0}{\hat{U}} \text{ oraz } \hat{Z}_z = \frac{\hat{U}}{\hat{I}_z}.$$

Zakładając we wzory (19) lub (22) powyższe wartości, otrzymamy

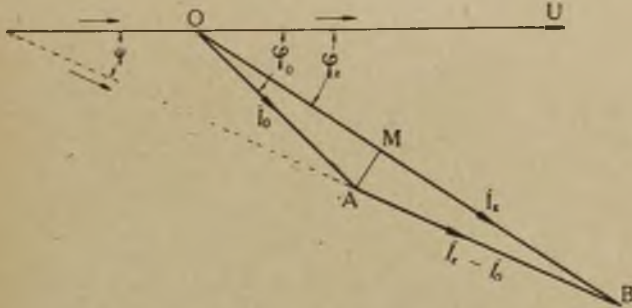
$$\hat{S}_0 \hat{S}_z = \frac{\hat{I}_z}{\hat{I}_z - \hat{I}_0}. \quad (29)$$

Dla wyznaczenia wartości tego iloczynu znajdziemy najpierw wartość różnicy wektorów $\hat{I}_z - \hat{I}_0$. Wychodząc z kierunku na-

pięcia \dot{U} jako początkowego (rys. 134), przeprowadzamy pod kątami φ_0 i φ_z $OA = I_0$ i $OB = I_z$; odcinek AB stanowi różnicę wektorów $\dot{I}_z - \dot{I}_0$.

Z trójkąta OAB mamy

$$AB = \sqrt{I_0^2 + I_z^2 - 2 I_0 I_z \cos(\varphi_0 - \varphi_z)}.$$



Rys. 134.

wobec tego

$$S_0 S_z = \frac{I_z}{\sqrt{I_0^2 + I_z^2 - 2 I_0 I_z \cos(\varphi_0 - \varphi_z)}}. \quad (30)$$

Opuszczając prostopadłą z A na bok OB , będziemy mieli

$$\operatorname{tg} \sphericalangle OBA = \frac{AM}{MB} = \frac{AM}{OB - OM} = \frac{I_0 \sin(\varphi_0 - \varphi_z)}{I_z - I_0 \cos(\varphi_0 - \varphi_z)}.$$

Oznaczmy kąt, który tworzy wektor $\dot{I}_z - \dot{I}_0 = AB$ z początkowym kierunkiem OU przez ψ , wtedy

$$\varphi_z = \psi + \sphericalangle OBA,$$

czyli

$$\sphericalangle OBA = \varphi_z - \psi;$$

ale ze wzoru (29) widzimy, że argument iloczynu symboli $\hat{S}_0 \hat{S}_z$ powinien się równać sumie argumentów tych symboli, czyli $\gamma_0 + \gamma_z$, z drugiej zaś strony, powinien się równać różnicy argumentów wektorów \dot{I}_z oraz $\dot{I}_z - \dot{I}_0$, czyli $\varphi_z - \psi$; z tego wynika, że

$$\sphericalangle OBA = \gamma_0 + \gamma_z,$$

więc

$$\operatorname{tg}(\gamma_0 + \gamma_z) = \frac{I_0 \sin(\varphi_0 - \varphi_z)}{I_z - I_0 \cos(\varphi_0 - \varphi_z)}. \quad (31)$$

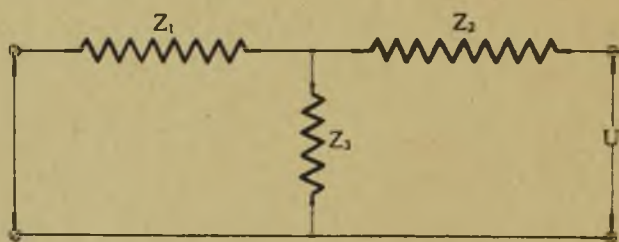
Następnie, doświadczenie przeprowadzamy w ten sposób, że w końcu obwodu dajemy dowolne napięcie U' , początek zaś raz pozostawiamy otwarty (stan jałowy na początku), drugi raz zamykamy bez oporności (stan zwarcia na początku) i mierzymy prąd i kąt przesunięcia jego fazy względem napięcia dla każdego stanu. Otrzymamy wartości

$$I_0', \varphi_0', I_z', \varphi_z',$$

skąd znajdujemy

$$\hat{Z}'_0 = \frac{U'}{\hat{I}'_0}, \quad \hat{Z}'_z = \frac{U'}{\hat{I}'_z}.$$

W tym przypadku (rys. 135)



Rys. 135.

$$\hat{Z}'_0 = \hat{Z}_2 + \hat{Z}_3 = \hat{Z}_3 \left(1 + \frac{\hat{Z}_2}{\hat{Z}_3} \right),$$

$$\hat{Z}'_z = \hat{Z}_2 + \frac{\hat{Z}_1 \hat{Z}_3}{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_3} = \hat{Z}_2 + \frac{\hat{Z}_1}{1 + \frac{\hat{Z}_1}{\hat{Z}_3}}.$$

Na zasadzie wzorów (8) i (5) będziemy mieli

$$\hat{Z}'_0 = \hat{Z}_3 \hat{S}_2; \quad \hat{Z}'_z = \hat{Z}_2 + \frac{\hat{Z}_1}{\hat{S}_0}; \quad \hat{Z}_0 = \hat{S}_0 \hat{Z}_3,$$

zaś ze wzoru (14)

$$\hat{Z}_z = \hat{Z}_1 + \frac{\hat{Z}_2}{\hat{S}_2};$$

stąd

$$\frac{\hat{Z}_0}{\hat{Z}'_0} = \frac{\hat{S}_0}{\hat{S}_2},$$

$$\frac{\hat{Z}_z}{\hat{Z}_{z'}} = \frac{\hat{Z}_1 + \frac{\hat{Z}_2}{\hat{S}_z}}{\hat{Z}_2 + \frac{\hat{Z}_1}{\hat{S}_0}} = \frac{\hat{S}_0}{\hat{S}_z} \left[\frac{\hat{Z}_1 \hat{S}_z + \hat{Z}_2}{\hat{Z}_2 \hat{S}_0 + \hat{Z}_1} \right].$$

Wyraz stojący w nawiasach równy jest 1. Rzeczywiście, ze wzorów (5) i (8)

$$\hat{S}_0 = 1 + \frac{\hat{Z}_1}{\hat{Z}_3}; \quad \hat{S}_z = 1 + \frac{\hat{Z}_2}{\hat{Z}_3};$$

$$\frac{\hat{Z}_1 \hat{S}_z + \hat{Z}_2}{\hat{Z}_2 \hat{S}_0 + \hat{Z}_1} = \frac{\hat{Z}_1 + \frac{\hat{Z}_1 \hat{Z}_2}{\hat{Z}_3} + \hat{Z}_2}{\hat{Z}_2 + \frac{\hat{Z}_1 \hat{Z}_2}{\hat{Z}_3} + \hat{Z}_1} = 1.$$

Wobec tego otrzymujemy

$$\frac{\hat{S}_0}{\hat{S}_z} = \frac{\hat{Z}_0}{\hat{Z}_0'} = \frac{\hat{Z}_z}{\hat{Z}_z'}. \quad (32)$$

Wartość stosunku poszukiwanych wielkości otrzymuje się jako stosunek wartości oporności pozornych Z_0 i Z_0' lub Z_z i Z_z'

$$\frac{S_0}{S_z} = \frac{Z_0}{Z_0'} = \frac{Z_z}{Z_z'}; \quad (33)$$

argument ilorazu \hat{S}_0 i \hat{S}_z będzie z jednej strony różnicą kątów γ_0 i γ_z , z drugiej strony, na zasadzie wzorów (32), będzie to różnica argumentów \hat{Z}_0 i \hat{Z}_0' lub \hat{Z}_z i \hat{Z}_z' .

Argumenty oporności pozornych mają bezwzględne wartości takie same jak i argumenty prądów, ale znaki przeciwne; wynika to z tego powodu, że

$$\hat{I} = \frac{\hat{U}}{\hat{Z}},$$

czyli, przy początkowym kierunku wektora U .

$$I e^{j\alpha} = \frac{U}{Z e^{j\alpha}} = \frac{U}{Z} e^{-j\alpha},$$

skąd

$$\alpha = -\varphi.$$

Wobec tego

$$\begin{aligned} \gamma_0 - \gamma_z &= (-\varphi_0) - (-\varphi_0') = (-\varphi_z) - (-\varphi_z'), \\ \text{czyli} \quad \gamma_0 - \gamma_z &= \varphi_0' - \varphi_0 = \varphi_z' - \varphi_z. \end{aligned} \quad (34)$$

Równania (30) i (33) dają nam możność znalezienia modułów symboli \hat{S}_0 i \hat{S}_z , zaś równania (31) i (34) służą dla określenia argumentów γ_0 i γ_z tychże symboli.

Oczywiście, dla znalezienia niewiadomych, wystarczyłoby jedno z równań (33) oraz jedno z równań (34), to znaczy, że można się ograniczyć przy pomiarach w końcu obwodu do stanu jałowego lub stanu zwarcia na początku; lepiej jednakże przeprowadzić wszystkie wskazane pomiary, dodatkowe zaś równanie posłuży dla sprawdzenia wyników.

W przypadku obwodu symetrycznego będziemy mieli

$$\begin{aligned} \hat{S}_0 &= \hat{S}_z = \hat{S}, \\ \gamma_0 &= \gamma_z = \gamma. \end{aligned}$$

Wtedy wystarczą pomiary, dokonane na początku; równania (29), (30) i (31) dadzą nam

$$\hat{S}^2 = \frac{I_z}{\hat{I}_z - \hat{I}_0} \quad (35)$$

$$S^2 = \frac{I_z}{\sqrt{I_0^2 + I_z^2 - 2 I_0 I_z \cos(\varphi_0 - \varphi_z)}}, \quad (36)$$

$$\operatorname{tg} 2\gamma = \frac{I_0 \sin(\varphi_0 - \varphi_z)}{I_z - I_0 \cos(\varphi_0 - \varphi_z)}, \quad (37)$$

skąd znajdujemy S i γ .

§ 59. Warunki osiągnięcia największej mocy prądu na odbiorniku.

Rozpatrzmy zagadnienie następujące: na początku napięcie obwodu u źródła U_1 ma wartość stałą, na odbiorniku współczynnik mocy $\cos \varphi_2$ również pozostaje bez zmiany. W jakich warunkach moc

oddawana odbiornikowi będzie miała wartość największą? Oznaczając tę moc przez P_2 , mamy

$$P_2 = U_2 I_2 \cos \varphi_2.$$

Wartość P_2 oczywiście będzie największą wtedy, gdy iloczyn $U_2 I_2$ będzie największy.

Wszystko co się znajduje między źródłem prądu i odbiornikiem, jak przewody, transformatory i t. p. możemy zastąpić czwórnikiem. Wtedy ze wzorów (4) i (13) będziemy mieli

$$\hat{U}_2 = \frac{\hat{U}_{10}}{\hat{S}_0}; \quad \hat{I}_2 = \frac{\hat{U}_{1z}}{\hat{S}_z \hat{Z}_z},$$

$$\hat{U}_2 \hat{I}_2 = \frac{\hat{U}_{10} \hat{U}_{1z}}{\hat{S}_0 \hat{S}_z \hat{Z}_z};$$

ponieważ $\hat{S}_0 \hat{S}_z \hat{Z}_z$ jest wielkością stałą dla danego obwodu, więc maximum $\hat{U}_2 \hat{I}_2$ będzie odpowiadało maximum iloczynu

$$\hat{U}_{10} \hat{U}_{1z},$$

czyli maximum iloczynu modułów tych wektorów

$$U_{10} U_{1z}.$$

Z drugiej strony

$$\hat{U}_{10} + \hat{U}_{1z} = \hat{U}_1,$$

a ponieważ, z założenia, \hat{U}_1 ma wartość stałą, więc suma geometryczna wektorów \hat{U}_{10} i \hat{U}_{1z} jest wielkością stałą. Oznaczmy kąt przesunięcia fazy \hat{U}_{10} względem \hat{U}_{1z} przez α , t. j.

$$\sphericalangle(\hat{U}_{10}, \hat{U}_{1z}) = \alpha;$$

łatwo jest określić wartość tego kąta na podstawie wzorów (4) i (13),

$$\hat{U}_{10} = \hat{U}_2 \hat{S}_0, \quad \hat{U}_{1z} = \hat{I}_2 \hat{S}_z \hat{Z}_z = \frac{\hat{U}_2}{\hat{Z}_2} \hat{S}_z \hat{Z}_z,$$

gdzie Z_2 oznacza oporność pozorną odbiornika.

Oznaczmy

$$\sphericalangle(\vec{U}_{10}, \vec{U}_1) = \psi_0, \quad \sphericalangle(\vec{U}_{1z}, \vec{U}_1) = \psi_z, \quad \sphericalangle(\vec{U}_z, \vec{U}_1) = \psi_2.$$

Zważywszy, że

$$\sphericalangle(\vec{I}_z, \vec{U}_z) = \varphi_z, \quad \arg. \vec{S}_0 = \gamma_0, \quad \arg. \vec{S}_z = \gamma_z, \quad \arg. \vec{Z}_z = -\varphi_z,$$

$$\arg. \vec{Z}_z = -\varphi_z,$$

będziemy mieli

$$\psi_0 = \psi_2 + \gamma_0,$$

$$\psi_z = \psi_2 + \varphi_2 + \gamma_z - \varphi_z,$$

$$\alpha = \psi_0 - \psi_z = \psi_2 + \gamma_0 - \psi_2 - \varphi_2 - \gamma_z + \varphi_z$$

i ostatecznie

$$\alpha = \varphi_z - \varphi_2 + \gamma_0 - \gamma_z, \quad (38)$$

zaś dla obwodu symetrycznego, gdy $\gamma_0 = \gamma_z$,

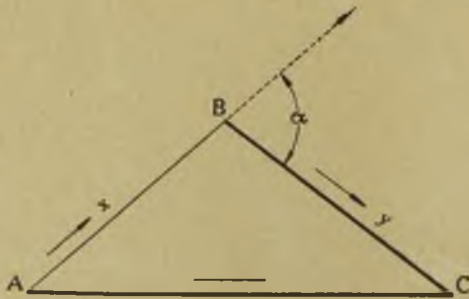
$$\alpha = \varphi_z - \varphi_2. \quad (39)$$

Ponieważ wartości kątów, określających kąt α , są stałe dla danego obwodu, przeto i kąt α pomiędzy wektorami \vec{U}_{10} i \vec{U}_{1z} jest wielkością stałą.

Mamy więc do rozwiązania następujące zadanie: dwa wektory (rys. 136)

$$AB = \vec{U}_{10} = x$$

$$BC = \vec{U}_{1z} = y$$



Rys. 136.

mają stałą sumę geometryczną $AC = \hat{U}_1 = c$ i tworzą stały kąt α ; trzeba znaleźć

$$\max U_{10} U_{1z} = \max xy.$$

Oznaczając

$$U = xy,$$

będziemy szukali $\max U$; z $\triangle ABC$

$$AB^2 + BC^2 + 2AB \cdot BC \cdot \cos \alpha = c^2,$$

czyli

$$x^2 + y^2 + 2xy \cos \alpha = c^2. \quad (40)$$

Rozpatrując y jako funkcję x , określoną ostatniem równaniem i różniczkując, otrzymamy

$$2x + 2yy' + 2x \cos \alpha y' + 2y \cos \alpha = 0,$$

skąd

$$y' = -\frac{y \cos \alpha + x}{y + x \cos \alpha}.$$

Różniczkując U , będziemy mieli

$$U' = xy' + y$$

i podstawiając znaną wartość y' , otrzymamy

$$U' = \frac{-xy \cos \alpha - x^2}{y + x \cos \alpha} + y = \frac{y^2 - x^2}{y + x \cos \alpha};$$

przyrównując $U' = 0$, znajdujemy

$$y = x,$$

czyli po podstawieniu do (40)

$$x = y = \frac{c}{\sqrt{2(1 + \cos \alpha)}} = \frac{c}{2 \cos \frac{\alpha}{2}};$$

ponieważ dla takiej wartości x i y $U'' < 0$, przeto warunek $y = x$ daje nam $\max U$, a więc

$$\max \hat{U}_{10} \hat{U}_{1z}, \text{ czyli } \max P_2$$

nastąpi wtedy, gdy

$$U_{10} = U_{1z} = \frac{U_1}{2 \cos \frac{\alpha}{2}},$$

albo na podstawie wzorów (4) i (13), gdy

$$U_2 = \frac{U_{10}}{S_0} = \frac{U_1}{2 S_0 \cos \frac{\alpha}{2}},$$

$$I_2 = \frac{U_{1z}}{S_z Z_z} = \frac{U_1}{2 S_z Z_z \cos \frac{\alpha}{2}},$$

więc

$$\max P_2 = \max U_2 I_2 \cos \varphi_2 =$$

$$= \frac{U_1^2 \cos \varphi_2}{4 \cos^2 \frac{\alpha}{2} S_0 S_z Z_z}.$$

Ponieważ

$$2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 + \cos \alpha = 1 + \cos (\varphi_z - \varphi_2 + \gamma_0 - \gamma_z),$$

możemy napisać

$$\max P_2 = \frac{U_1^2 \cos \varphi_2}{2 S_0 S_z Z_z [1 + \cos (\varphi_z - \varphi_2 + \gamma_0 - \gamma_z)]}.$$

Rozpatrując teraz największą wartość $\max P_2$ w zależności od φ_2 , możemy znaleźć największą z największych wartości mocy, którą możemy osiągnąć na odbiorniku, dobierając odpowiednio U_2 , I_2 oraz φ_2 . W tym celu bierzemy pochodną, ostatniego wzoru względem φ_2 i przyrównujemy ją do zera; po odpowiednich skróceniach otrzymamy

$$-[1 + \cos (\varphi_z - \varphi_2 + \gamma_0 - \gamma_z)] \sin \varphi_2 - \sin (\varphi_z - \varphi_2 + \gamma_0 - \gamma_z) \cos \varphi_2 = 0,$$

lub

$$(1 + \cos \alpha) \sin \varphi_2 + \sin \alpha \cos \varphi_2 = 0;$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = -\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = -\frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = -\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2};$$

$$\varphi_2 = -\frac{\alpha}{2} = -\frac{(\varphi_z - \varphi_2 + \gamma_0 - \gamma_z)}{2},$$

skąd

$$\varphi_2 = -(\varphi_z + \gamma_0 - \gamma_z);$$

dla obwodu symetrycznego będziemy mieli

$$\varphi_2 = -\varphi_z$$

i w tym przypadku największa możliwa moc będzie

$$\begin{aligned} \max P_2 &= \frac{U_1^2 \cos \varphi_z}{2 S_0 S_z Z_z (1 + \cos 2\varphi_z)} = \\ &= \frac{U_1^2 \cos \varphi_z}{4 S_0 S_z Z_z \cos^2 \varphi_z} = \frac{U_1^2}{4 S_0 S_z Z_z \cos \varphi_z}. \end{aligned}$$

§ 60. Wykres pracy obwodu prądu zmiennego.

Wykresem pracy obwodu prądu zmiennego nazywamy wykres, za pomocą którego możemy określać napięcia i prądy, powstające na początku i w końcu obwodu jak również moc pobieraną i oddawaną, przy zachowaniu pewnych warunków. Podstawą do takich wykresów są pomiary, przeprowadzone w stanie jałowym i w stanie zwarcia.

Wychodzimy znowu z założenia, że napięcie U_1 na początku obwodu pozostaje bez zmiany i że współczynnik mocy na odborniku $\cos \varphi_2$ ma wartość stałą. Mamy trzy zasadnicze równania (17), (18) i (19).

$$\hat{U}_1 = \hat{U}_{10} + \hat{U}_{1z} = \hat{U}_2 \hat{S}_0 + \hat{I}_2 \hat{S}_z \hat{Z}_z, \quad (41)$$

$$\hat{I}_1 = \hat{I}_{10} + \hat{I}_{1z} = \hat{U}_2 \frac{\hat{S}_0}{\hat{Z}_0} + \hat{I}_2 \hat{S}_z, \quad (42)$$

$$\hat{S}_0 \hat{S}_z = \frac{\hat{Z}_0}{\hat{Z}_0 - \hat{Z}_z}. \quad (43)$$

Z pierwszego równania określamy

$$\hat{U}_2 \hat{S}_0 = \hat{U}_1 - \hat{I}_2 \hat{S}_z \hat{Z}_z.$$

Podstawiając do drugiego, znajdziemy

$$\hat{I}_1 = \frac{\hat{U}_1 - \hat{I}_2 \hat{S}_z \hat{Z}_z}{\hat{Z}_0} + \hat{I}_2 \hat{S}_z = \frac{\hat{U}_1}{\hat{Z}_0} + \hat{I}_2 \hat{S}_z \left(1 - \frac{\hat{Z}_z}{\hat{Z}_0} \right),$$

zaś na mocy trzeciego równania

$$\hat{I}_1 = \frac{\hat{U}_1}{\hat{Z}_0} + \frac{\hat{I}_2}{\hat{S}_0}.$$

Oznaczmy przez I_0 prąd na początku obwodu przy napięciu U_1 , gdy w końcu mamy stan jałowy; wtedy

$$\hat{I}_0 = \frac{\hat{U}_1}{\hat{Z}_0}.$$

ma wartość stałą, przytem kąt przesunięcia fazy I_0 względem U_1 oznaczymy przez φ_0 ; możemy więc napisać

$$\hat{I}_1 = \hat{I}_0 + \frac{\hat{I}_2}{\hat{S}_0}.$$

Przyjmując dowolny kierunek np. pionowy jako kierunek napięcia U_1 , odłóżmy pod kątem φ_0 $OA = \hat{I}_0$ (rys. 137). Gdybyśmy wiedzieli, jaka jest wartość wektora $\frac{\hat{I}_2}{\hat{S}_0}$ i jaki jest jego kierunek, wtedy, dodając geometrycznie ten wektor do wektora \hat{I}_0 , otrzymalibyśmy wektor \hat{I}_1 . Przypuśćmy, że AB stanowi wektor $\frac{\hat{I}_2}{\hat{S}_0}$, wtedy OB wyraża wektor \hat{I}_1 .

Dzieląc obie strony równania (41) przez $\hat{S}_0 \hat{S}_z \hat{Z}_z$, otrzymamy

$$\frac{\hat{U}_1}{\hat{S}_0 \hat{S}_z \hat{Z}_z} = \frac{\hat{U}_{10}}{\hat{S}_0 \hat{S}_z \hat{Z}_z} + \frac{\hat{U}_{1z}}{\hat{S}_0 \hat{S}_z \hat{Z}_z} = \frac{\hat{U}_2}{\hat{S}_z \hat{Z}_z} + \frac{\hat{I}_2}{\hat{S}_0}. \quad (44)$$

Kąt pomiędzy wektorami \hat{U}_{10} i \hat{U}_{1z} , oznaczony poprzednio przez α , został określony na podstawie wzorów (38), względnie (39).

Jeżeli te dwa wektory \hat{U}_{10} i \hat{U}_{1z} podzielimy przez jeden i ten sam iloczyn symboli $\hat{S}_0 \hat{S}_z \hat{Z}_z$, to, oczywiście, otrzymane, w ten sposób nowe wektory będą tworzyły ze sobą ten sam kąt α , czyli

$$\angle \left(\frac{\hat{U}_2}{\hat{S}_z \hat{Z}_z}, \frac{\hat{I}_2}{\hat{S}_0} \right) = \alpha.$$

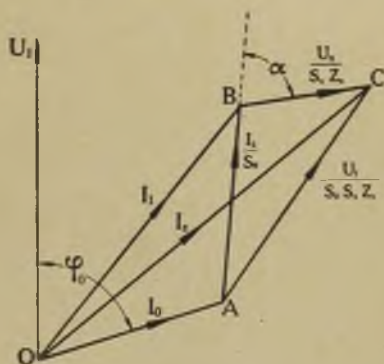
Kąt α będziemy odmierzać w kierunku od wektora $\frac{\hat{I}_2}{\hat{S}_0}$ do wektora $\frac{\hat{U}_1}{\hat{S}_z \hat{Z}_z}$; na rys. 137 $\alpha < 0$; wektor $\frac{\hat{U}_2}{\hat{S}_z \hat{Z}_z} = BC$ jest przesunięty wstecz względem wektora $\frac{\hat{I}_2}{\hat{S}_0}$.

Przechodząc do naszego wykresu, przeprowadzamy od punktu B pod kątem α np. wstecz ($\alpha < 0$) od AB odcinek

$$BC = \frac{\hat{U}_2}{\hat{S}_z \hat{Z}_z},$$

wtedy, na zasadzie (44), geometryczna suma AB i BC będzie

$$AC = \frac{\hat{U}_1}{\hat{S}_0 \hat{S}_z \hat{Z}_z}.$$



Rys. 137.

Wyraz ten stanowi wielkość stałą, więc jeżeli do tego stałego wektora dodamy również stały wektor $OA = \hat{I}_0 = \frac{\hat{U}_1}{\hat{Z}_0}$, wtedy otrzymamy również jako wektor stały geometryczną sumę

$$OC = \frac{\hat{U}_1}{\hat{Z}_0} + \frac{\hat{U}_1}{\hat{S}_0 \hat{S}_z \hat{Z}_z} = \frac{\hat{U}_1}{\hat{Z}_z} \left(\frac{\hat{Z}_z}{\hat{Z}_0} + \frac{1}{\hat{S}_0 \hat{S}_z} \right).$$

Wyraz stojący w nawiasach, na zasadzie wzoru (43), równy jest 1, zaś $\frac{\hat{U}_1}{\hat{Z}_z} = \hat{I}_z$ stanowi prąd, płynący na początku obwodu, gdy koniec obwodu jest zwarty; kąt przesunięcia fazy tego prądu względem napięcia U_1 oznaczmy przez φ_z ; będzie to argument prądu, gdy kierunek wektora U_1 przyjmniemy jako oś początkową.

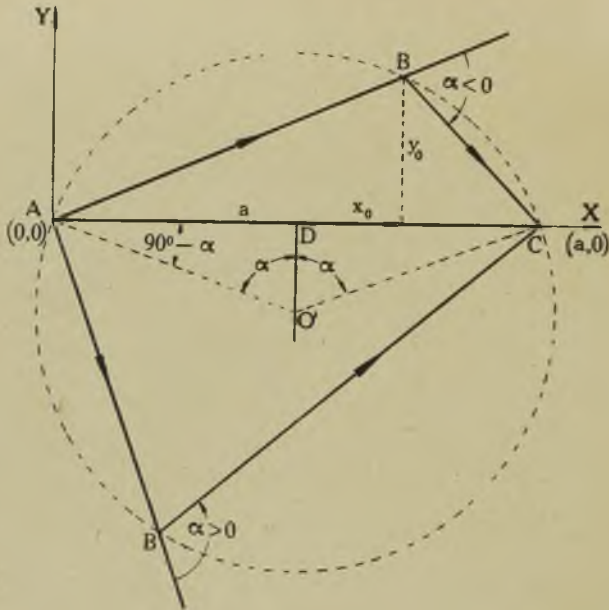
W ten sposób $OC = \hat{I}_z$; więc, jeżeli będziemy mieli wartości $I_0, I_z, \varphi_0, \varphi_z$, wtedy punkty A i C będą na wykresie końcami wiadomych wektorów \hat{I}_0 i \hat{I}_z ; łącząc te punkty, otrzymamy odcinek AC .

Wektory

$$AB = \frac{\hat{I}_2}{\hat{S}_0} \quad \text{i} \quad BC = \frac{\hat{U}_2}{\hat{S}_z \hat{Z}_z}$$

mają zatem stałą i wiadomą sumę geometryczną AC oraz tworzą ze sobą stały i wiadomy kąt α .

Jeżeli na danym odcinku $AC = a$ zbudujemy trójkąt tak, aby dwa pozostałe boki tworzyły kąt zewnętrzny α (rys. 138), wtedy



Rys. 138.

geometryczne miejsce wierzchołków B takich trójkątów będzie koło, środek którego O' ma współrzędne

$$x_c = \frac{a}{2}, \quad y_c = \frac{a}{2 \operatorname{tg} \alpha}, \quad (45)$$

zaś promień

$$r = \frac{a}{2 \sin \alpha},$$

czyli że dany odcinek AC stanowi cięciwę, opierającą się na kąt środkowy 2α , zaś środek znajduje się na prostopadłej, przeprowadzonej przez środek tego odcinka.

Aby tego dowieść, wybieramy osie spólrzędnych, biorąc w A początek, oś X w kierunku AC , zaś oś Y w kierunku prostopadłym. Oznaczmy spólrzędne zmiennego punktu B przez x_0 i y_0 ; spólrzędne punktu A będą $0,0$, zaś punktu C — będą $a, 0$. Stosując wzór na równanie prostej, przechodzącej przez dwa punkty, otrzymamy równanie BC

$$\frac{y}{y_0} = \frac{x-a}{x_0-a}, \text{ czyli } y = \frac{y_0}{x_0-a}x - \frac{ay_0}{x_0-a},$$

równanie AB

$$\frac{y}{y_0} = \frac{x}{x_0}, \text{ czyli } y = \frac{y_0}{x_0}x.$$

Kąt pomiędzy prostą BC i prostą AB oznaczyliśmy przez α ; z równań prostych wynika, że

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{y_0}{x_0-a} - \frac{y_0}{x_0}}{1 + \frac{y_0^2}{x_0(x_0-a)}} = \frac{ay_0}{x_0^2 - ax_0 + y_0^2},$$

skąd

$$x_0^2 + y_0^2 - ax_0 - \frac{a}{\operatorname{tg} \alpha} y_0 = 0,$$

albo

$$\left(x_0 - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y_0 - \frac{a}{2 \operatorname{tg} \alpha}\right)^2 = \frac{a^2}{4} \left(1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha}\right) = \frac{a^2}{4 \sin^2 \alpha}.$$

Jest to równanie koła, środek którego ma spólrzędne $\frac{a}{2}$ i $\frac{a}{2 \operatorname{tg} \alpha}$, zaś promień równy jest $\frac{a}{2 \sin \alpha}$.

Na rys. 138, O' stanowi środek takiego koła.

Z trójkąta $AO'D$ lub $DO'C$, mamy

$$\operatorname{tg} \sphericalangle A O' D = \frac{AD}{O'D} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{2 \operatorname{tg} \alpha}} = \operatorname{tg} \alpha,$$

skąd

$$\sphericalangle A O' D = \alpha.$$

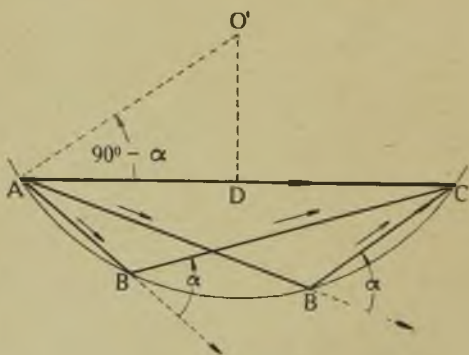
Z rysunku widzimy, że dla znalezienia środka koła O' musimy ze środka odcinka AC przeprowadzić prostopadłą, następnie

z punktu A pod kątem $90^\circ - \alpha$ do AC przeprowadzić prostą aż do przecięcia z prostopadłą w poszukiwanym punkcie O' .

Kąt α określiliśmy jako kąt przesunięcia fazy \hat{U}_{10} względem \hat{U}_{1z} ; następnie stwierdziliśmy, że ten sam kąt stanowi kąt przesunięcia fazy $\frac{\hat{U}_z}{\hat{S}_z \hat{Z}_z}$ względem $\frac{\hat{I}_z}{\hat{S}_0}$. Na rys. 138 jest to kąt, jaki tworzy

BC względem AB . Łatwo jest zauważyć, że dla punktów B , mających rzędne dodatnie, kąt $\alpha < 0$, czyli wektor BC jest przesunięty wstecz względem wektora AB ; gdy zaś rzędne punktów B będą ujemne, wtedy $\alpha > 0$. Z tego wynika, że przy $\alpha > 0$ zadaniu będzie odpowiadać część koła, leżąca pod odcinkiem AC (osią X), zaś przy $\alpha < 0$, część koła, leżąca nad odcinkiem AC . Kąt α , posiadający ważne znaczenie w rozpatrywanym zagadnieniu, może się zmieniać w granicach od -180° do $+180^\circ$.

Pozostawiając do szczególnego omówienia przypadki, gdy $\alpha = 0, \pm \frac{\pi}{2}, \pm \pi$, rozpatrzmy w jaki sposób zmienia się położenie środka interesującego nas koła przy zmianie wartości kąta α . Na podstawie wzorów (45) znak rzędnej środka koła jest taki sam, co i znak $\text{tg } \alpha$; przytem będziemy mogli sprawdzić, że we wszyst-



Rys. 139.

kich przypadkach dla znalezienia tego środka wystarczy z punktu A przeprowadzić prostą pod kątem $90^\circ - \alpha$ do AC z uwzględnieniem znaku tego kąta. Możemy ustalić cztery następujące przypadki:

I. (rys. 139):

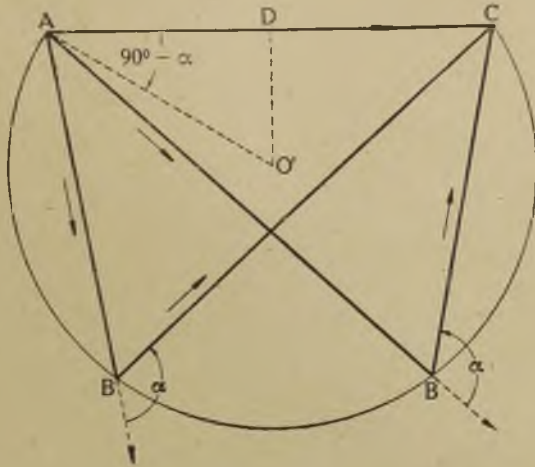
$$\alpha > 0, \text{ lecz } < 90^\circ,$$

$$\text{tg } \alpha > 0,$$

$$90^\circ - \alpha > 0, \text{ lecz } < 90^\circ.$$

AO' tworzy z AC kąt dodatni i ostry; geometryczne miejsce punktów B znajduje się pod odcinkiem AC .

II. (rys. 140).



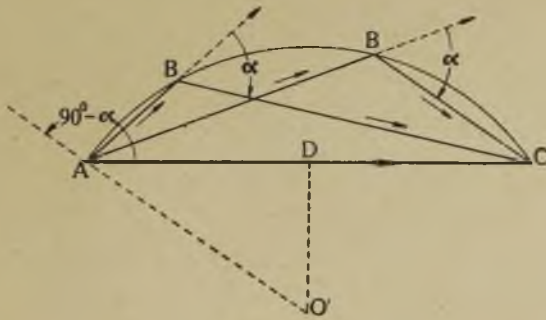
Rys. 140.

$$\alpha > 90^\circ, \text{ lecz } < 180^\circ, \text{ tg } \alpha < 0,$$

$$90^\circ - \alpha > -90^\circ, \text{ lecz } < 0.$$

AO' tworzy z AC kąt ujemny i ostry; geometryczne miejsce punktów B znajduje się pod odcinkiem AC .

III. (rys. 141).



Rys. 141.

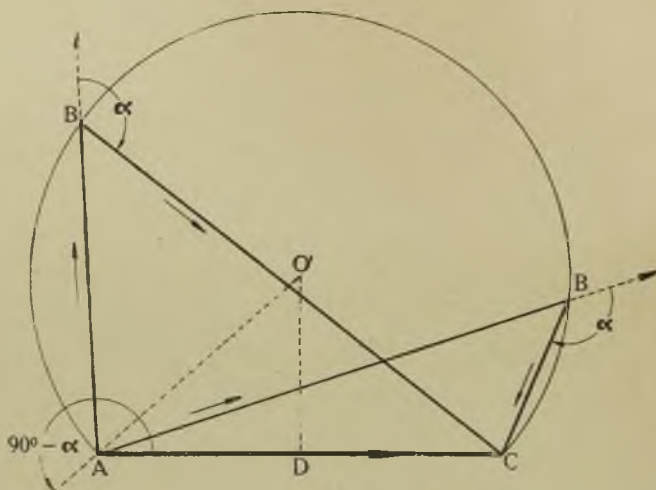
$$\alpha < 0, \text{ lecz } > -90^\circ,$$

$$\text{tg } \alpha < 0,$$

$$90^\circ - \alpha > 90^\circ, \text{ lecz } < 180^\circ.$$

AO' tworzy z AC kąt dodatni i rozwarty; geometryczne miejsce punktów B znajduje się nad odcinkiem AC .

IV. (rys. 142).



Rys. 142.

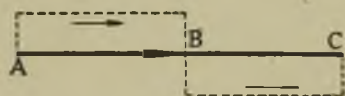
$$\alpha < -90, \text{ lecz } > -180^{\circ},$$

$$\operatorname{tg} \alpha > 0,$$

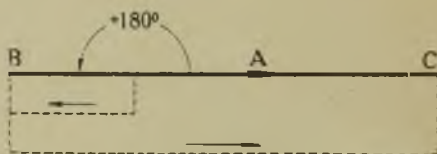
$$90^{\circ} - \alpha > 180^{\circ}, \text{ lecz } < 270^{\circ}.$$

AO' tworzy z AC kąt dodatni, zawarty pomiędzy 180° i 270° ; geometryczne miejsce punktów B znajduje się nad odcinkiem AC .

W przypadkach szczególnych, gdy $\alpha = 0, +180^{\circ}, -180^{\circ}$, geometrycznym miejscem punktów B będzie linia AC , przytem



Rys. 143.

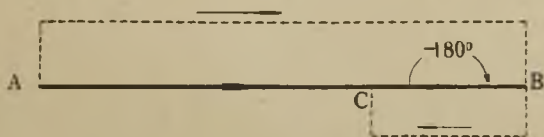


Rys. 144.

- dla $\alpha = 0$ punkty B leżą pomiędzy A i C (rys. 143);
- dla $\alpha = +180^{\circ}$ punkty B leżą po stronie A (rys. 144);
- dla $\alpha = -180^{\circ}$ punkty B leżą po stronie C (rys. 145);
- gdy $\alpha = \pm 90^{\circ}$, otrzymujemy środek koła w środku odcinka AC ,

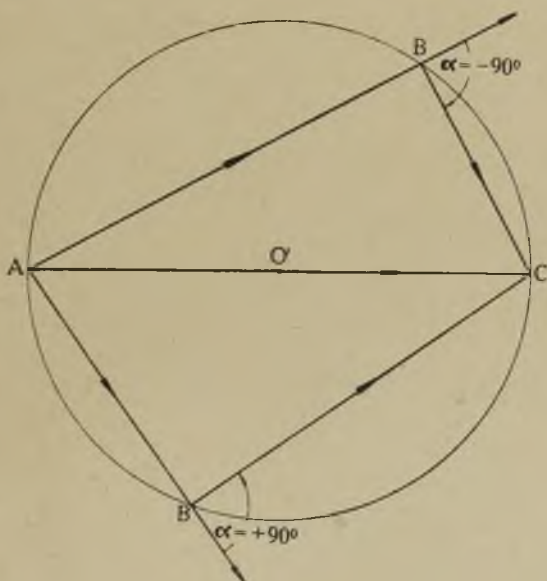
przytem dla $\alpha = +90^\circ$ geometrycznym miejscem punktów B będzie dolne półkole, zaś dla $\alpha = -90^\circ$ — górne półkole (rys. 146).

Powracając do rys. 137 i opierając się na powyższych rozumowaniach, możemy wykonać wykres pracy obwodu prądu zmiennego w sposób następujący.



Rys. 145.

Wybieramy początek wektorów O (rys. 147) i początkowy kierunek OU_1 jako kierunek wektora stałego napięcia U_1 . Od początku O pod kątami φ_0 i φ_z odkładamy w ustalonej skali prądów wiadome wartości $I_0 = OA$ oraz $I_z = OC$. Łączymy A i C linią prostą i ze środka D odcinka AC przeprowadzamy prostopadłą.



Rys. 146.

Z punktu A pod kątem $90^\circ - \alpha$ do AC prowadzimy prostą AO' do przecięcia owej prostopadłej w punkcie O' , który będzie środkiem koła o promieniu $O'A$. W zależności od znaku kąta α wykreślamy część koła: przy $\alpha > 0$ pod odcinkiem AC (jak na rysunku), przy $\alpha < 0$ nad odcinkiem AC .

nie jałowym i w stanie zwarcia. Na podstawie tych danych obliczymy potrzebne wielkości ze wzorów (30), (31), (33), (34) i (38).

W przypadku obwodu symetrycznego moduł współczynnika \hat{S} i jego argument γ możemy znaleźć z wykresu pracy, bowiem wychodząc ze wzoru (35)

$$S^2 = \frac{\hat{I}_z}{\hat{I}_z - \hat{I}_0}$$

i mając na wykresie $\hat{I}_z - \hat{I}_0 = AC$ (rys. 147), otrzymamy S^2 , dzieląc \hat{I}_z przez wartość AC , wreszcie znajdziemy S . Różnica kątów wektorów \hat{I}_z oraz $\hat{I}_z - \hat{I}_0$ równa się argumentowi 2γ wektora \hat{S}^2 ; czyli

$$2\gamma = \varphi_z - \sphericalangle CLU_1, \text{ skąd } \gamma = \frac{\varphi_z - \sphericalangle CLU_1}{2}.$$

$\sphericalangle CLU_1$ trzeba odmierzyć np. kątomierzem i wziąć oczywiście z właściwym znakiem, mierząc go w kierunku od osi początkowej OU_1 .

Zapomocą wykresu pracy możemy również znajdować moc P_1 na początku obwodu oraz moc P_2 w końcu dla określonej wartości prądu I_2 .

Wektor $OB = \hat{I}_1$ tworzy z kierunkiem wektora napięcia \hat{U}_1 kąt φ_1 . Jeżeli kierunek OU_1 przyjmiemy za oś odciętych, zaś oś rzędnych przeprowadzimy prostopadle do tego kierunku, wtedy otrzymamy dla odciętej punktu B

$$BF = I_1 \cos \varphi_1.$$

Ponieważ moc prądu na początku obwodu ma wartość

$$P_1 = U_1 I_1 \cos \varphi_1,$$

zaś U_1 ma wartość stałą, przeto odcinek

$$BF = \frac{P_1}{U_1}$$

jest proporcjonalny do tej mocy i w odpowiedniej skali daje nam wartość P_1 . W trójkącie ABC

$$AB = \frac{I_2}{S_0}, \quad BC = \frac{U_2}{S_z Z_z}.$$

Pole tego trójkąta ma wartość

$$\Delta = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{I_2 U_2}{S_0 S_z Z_z} \sin \alpha;$$

ponieważ moc odbiornika ma wartość

$$P_2 = U_2 I_2 \cos \varphi_2,$$

więc

$$\Delta = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin \alpha}{S_0 S_z Z_z \cos \varphi_2} P_2.$$

Z drugiej strony możemy pole trójkąta ABC określić jako połowę iloczynu podstawy AC przez wysokość BH .

Podstawa

$$AC = \frac{U_1}{S_0 S_z Z_z},$$

zatem

$$\Delta = \frac{1}{2} \cdot \frac{U_1}{S_0 S_z Z_z} \cdot BH;$$

przez porównanie obydwóch wzorów dla Δ znajdziemy

$$BH = \frac{P_2 \sin \alpha}{U_1 \cos \varphi_2},$$

$$\frac{BH}{\sin \alpha} = \frac{P_2}{U_1 \cos \varphi_2};$$

wartość $\frac{BH}{\sin \alpha}$ znajdziemy, przeprowadzając prostopadłą BG z punktu B na promień $O'A$; ta prostopadła przetnie odcinek AC w punkcie K ; ponieważ

$$\sphericalangle AKG = \alpha = \sphericalangle BKH,$$

przeto

$$BK = \frac{BH}{\sin \alpha} = \frac{P_2}{U_1 \cos \varphi_2};$$

iloczyn $U_1 \cos \varphi_2$ ma wartość stałą, więc odcinek BK w odpowiedniej skali daje nam wartość mocy oddawanej w końcu obwo-
du przy prądzie I_2 .

Największa moc na odbiorniku odpowiada największej wartości BH ; tę wartość otrzymamy, przeprowadzając ze środka AC prostopadłą do przecięcia się z kołem wykresu, wówczas $AB = \frac{I_2}{S_1}$ oraz $BC = \frac{U_2}{S_2 Z_2}$ dają nam wartości I_2 i U_2 , dla których moc oddawana będzie największą.

ROZDZIAŁ X.

OBLICZANIE POJEMNOŚCI I INDUKCYJNOŚCI W LINJACH ELEKTRYCZNYCH.

§ 61. Rozkład potencjału w polu elektrycznym.

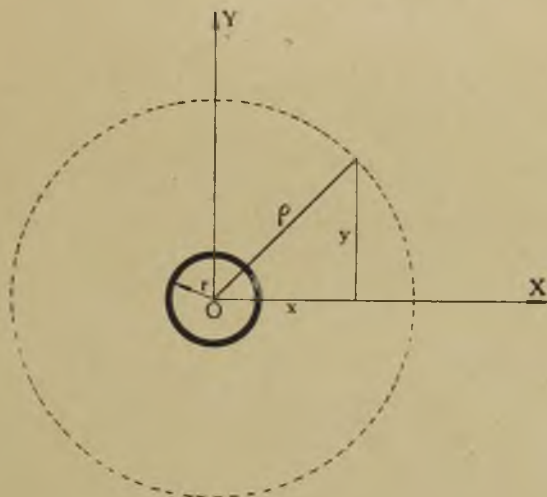
Będziemy rozpatrywali przewody, składające się z drutów lub linek okrągłych, gołych oraz izolowanych, czyli przewodów cylindrycznych z równomiernie rozłożonemi ładunkami. Ładunki, znajdujące się na takich przewodach, dają pole elektryczne, którego natężenie będzie skierowane prostopadle do powierzchni przewodów, czyli prostopadle do ich osi. Aby móc określać pojemność dla rozmaitych układów takich przewodów, musimy przedewszystkiem umieć określać wartość potencjału w dowolnym punkcie pola elektrycznego, powstającego pod wpływem ładunku przewodów. Najogólniejszy wzór dla potencjału V , w dowolnym punkcie (x, y, z) pola, jest to wzór Laplace'a

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0. \quad (1)$$

Dla naszych celów wzór ten możemy znacznie uprościć. Mianowicie, będziemy rozpatrywali przewody, których kształt, wymiary i całe otoczenie są jednakowe na całej rozpatrywanej ich długości. Jeżeli przeprowadzimy płaszczyznę prostopadłą do osi takiego przewodu, to zmiana potencjału w rozmaitych punktach tej płaszczyzny będzie niezależna od tego, w jakim miejscu przewodu taka płaszczyzna została przeprowadzona. Biorąc oś przewodu za oś Z , wyrazimy warunek powyższy w ten sposób, że zmiana potencjału nie zależy od z , czyli

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0. \quad (2)$$

Następnie, ponieważ, jak założyliśmy, przewód jest okrągły, przeto w płaszczyźnie prostopadłej do osi przewodu (rys. 148) wszystkie punkty, znajdujące się w jednakowej odległości od osi



Rys. 148.

przewodu O , będą miały potencjał o tej samej wartości; można więc zamiast dwóch zmiennych x i y wprowadzić tylko jedną zmienną ρ , stanowiącą odległość rozpatrywanego punktu od osi przewodu. Wtedy będziemy mieli dla dowolnego punktu

$$\rho^2 = x^2 + y^2; \quad \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{x}{\rho}; \quad \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{y}{\rho};$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{dV}{d\rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{dV}{d\rho} \cdot \frac{x}{\rho};$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{dV}{d\rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{dV}{d\rho} \cdot \frac{y}{\rho};$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{d^2 V}{d\rho^2} \cdot \frac{x^2}{\rho^2} + \frac{dV}{d\rho} \cdot \frac{y^2}{\rho^3};$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{d^2 V}{d\rho^2} \cdot \frac{y^2}{\rho^2} + \frac{dV}{d\rho} \cdot \frac{x^2}{\rho^3}$$

Wprowadzając te wartości do równania (1) i uwzględniając równanie (2), otrzymamy po uproszczeniu

$$\frac{d^2 V_\rho}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dV_\rho}{d\rho} = 0, \quad (3)$$

gdzie V_ρ oznacza potencjał w punkcie odległym o ρ od osi przewodu. Zakładając w równaniu (3)

$$\frac{dV_\rho}{d\rho} = Z, \quad (4)$$

będziemy mieli

$$\frac{dZ}{d\rho} + \frac{Z}{\rho} = 0,$$

skąd

$$\frac{dZ}{Z} = -\frac{d\rho}{\rho},$$

$$\lg_n Z = -\lg_n \rho + \lg_n A_1,$$

gdzie A_1 stała dowolna; wtedy

$$Z = \frac{A_1}{\rho}$$

i na podstawie (4)

$$\frac{dV_\rho}{d\rho} = \frac{A_1}{\rho},$$

czyli

$$V_\rho = A_1 \lg_n \rho + A_2, \quad (5)$$

gdzie A_2 druga stała dowolna.

Oznaczając potencjał własny (gdy niema wpływu otoczenia) na samym przewodzie, którego promień wynosi r , to znaczy dla $\rho = r$, przez V_1 , otrzymamy z (5)

$$V_1 = A_1 \lg_n r + A_2;$$

odejmując stronami ostatni wzór od wzoru (5), otrzymamy

$$V_\rho = V_1 + A_1 \lg_n \frac{\rho}{r}. \quad (6)$$

Dla określenia stałej A_1 musimy znać wartość potencjału jeszcze w jakiegokolwiek odległości, np. gdy dla $\rho = R$ potencjał ma wartość V_2 ; wtedy ze wzoru (6) będziemy mieli

$$V_2 = V_1 + A_1 \lg_n \frac{R}{r},$$

$$A_1 = - \frac{V_1 - V_2}{\lg_n \frac{R}{r}},$$

$$V_\rho = V_1 - \frac{V_1 - V_2}{\lg_n \frac{R}{r}} \lg_n \frac{\rho}{r}. \quad (7)$$

Natężenie pola elektrycznego K , wywołanego przez ładunek równomiernie rozłożony na powierzchni walca (przewodu cylindrycznego), wyraża się wzorem

$$K = \frac{2Q}{\varepsilon \rho},$$

gdzie Q ładunek, przypadający na 1 cm długości walca, ε stała dielektryczna środowiska, w którym się walec znajduje; ρ odległość rozpatrywanego punktu pola od osi walca.

Również wiemy, że natężenie pola w zależności od potencjału wyraża się wzorem

$$K = - \frac{dV_\rho}{d\rho},$$

wobec czego

$$- \frac{dV_\rho}{d\rho} = \frac{2Q}{\varepsilon \rho}. \quad (8)$$

Ze wzoru (7) znajdujemy

$$- \frac{dV_\rho}{d\rho} = \frac{V_1 - V_2}{\lg_n \frac{R}{\rho}} \cdot \frac{1}{\rho},$$

więc ze wzoru (8) otrzymamy

$$\frac{V_1 - V_2}{\lg_n \frac{R}{\rho}} = \frac{2Q}{\varepsilon}. \quad (9)$$

Uwzględniając ostatnie równanie oraz wzór (7), możemy potencjał w punkcie, znajdującym się w odległości ρ od osi przewodu, określić w sposób następujący

$$V_\rho = V_1 - \frac{2Q}{\varepsilon} \lg_n \frac{\rho}{r}, \quad (10)$$

gdzie V_1 stanowi potencjał własny przewodu, Q ładunek, przypadający na 1 cm długości, r promień przewodu, ε stałą dielektryczną środowiska, otaczającego przewód.

Wzory (9) i (10) dadzą możliwość określania pojemności dla rozmaitych układów przewodów.

W elektrotechnice potencjał ziemi przyjęty jest jako równy zeru; wobec tego potencjał w dowolnym punkcie, przy takim ujęciu, traktowany jest jako różnica potencjałów danego punktu i ziemi, czyli jako napięcie pomiędzy punktem i ziemią.

§ 62. Pojemność kabla jednożyłowego obołowionego.

Taki kabel można rozpatrywać jako kondensator cylindryczny, którego jedną okładzinę stanowi sam przewód, zaś drugą okładzinę płaszcz ołowiany. Oznaczając promień przewodu przez r , lub jego średnicę przez d , zaś promień kabla pod płaszczem przez R , lub jego średnicę przez D , odpowiednie potencjały przez V_1 i V_2 , otrzymamy wprost ze wzoru (9) dla pojemności takiego kabla na 1 cm długości

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{\varepsilon}{2 \lg_n \frac{R}{r}} = \frac{\varepsilon}{2 \lg_n \frac{D}{d}};$$

wzór ten daje nam wartość pojemności w jednostkach układu elektrostatycznego, czyli w centymetrach; dla przejścia do układu elektromagnetycznego musimy uwzględnić, że

$$1 F = 9 \cdot 10^{11} \text{ cm, lub } 1 \mu F = 9 \cdot 10^5 \text{ cm;}$$

następnie, zwykle obliczamy pojemność przewodów nie na 1 cm długości, lecz na $1 \text{ km} = 10^5 \text{ cm}$ i podajemy w μF ; wobec tego będziemy mieli

$$C = \frac{\varepsilon}{18 \lg_n \frac{R}{r}} = \frac{\varepsilon}{18 \lg_n \frac{D}{d}},$$

lub, wprowadzając logarytmy dziesiętne, otrzymamy

$$C = \frac{0,0241 \varepsilon}{\lg \frac{R}{r}} = \frac{0,0241 \varepsilon}{\lg \frac{D}{d}} \frac{\mu F}{km} \quad (11)$$

Przykład.

Kabel jednożyłowy obołowiony ma przewód o przekroju 16 mm²; średnica przewodu wynosi $d = 5,1$ mm, grubość izolacji papierowej 2 mm, wobec czego średnica kabla pod płaszczem wynosi 9,1 mm. Mamy

$$\frac{D}{d} = \frac{91}{51}; \quad \lg \frac{91}{51} = 0,251.$$

Stała dielektryczna dla papieru impregnowanego $\varepsilon = 4,31$.

$$C = \frac{0,0241 \cdot 4,31}{0,251} = 0,414 \frac{\mu F}{km}.$$

§ 63. Pojemność kabla jednożyłowego opancerzonego.

Kabel opancerzony posiada trzy metalowe powierzchnie cylindryczne: sam przewód, następnie płaszcz ołowiany, wreszcie opancerzenie żelazne (rys. 149).

Taki układ można rozpatrywać jako dwa kondensatory połączone w szereg. Oznaczając przez C_1 pojemność 1-go kondensatora, (przewód i płaszcz ołowiany), przez C_2 pojemność 2-go kondensatora (płaszcz ołowiany i pancierz), będziemy mieli dla pojemności kabla

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}.$$



Rys. 149.

Oznaczając przez r , R , R' , R_1 promienie przewodu, pod płaszczem, nad płaszczem i pod pancierzem, otrzymamy na podstawie wzoru (11)

$$C_1 = \frac{0,0241 \varepsilon_1}{\lg \frac{R}{r}} \frac{\mu F}{km},$$

$$C_2 = \frac{0,0241 \varepsilon_2}{\lg \frac{R_1}{R'}} \frac{\mu F}{km},$$

gdzie ε_1 — stała dielektryczna izolacji przewodu, zaś ε_2 stała dielektryczna materiału, znajdującego się pomiędzy płaszczem ołowianym i pancierzem (zwykle impregnowana taśma papierowa i warstwa materiału włóknistego).

Wobec tego

$$C = \frac{0,0241}{\frac{1}{\varepsilon_1} \lg \frac{R}{r} + \frac{1}{\varepsilon_2} \lg \frac{R_1}{R'}} \frac{\mu F}{km}.$$

Jeżeli $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ (np. papier impregnowany i juta mają prawie równe stałe dielektryczne 4,31), wtedy

$$C = \frac{0,0241 \varepsilon}{\lg \frac{R R_1}{r R'}} \frac{\mu F}{km}. \quad (12)$$

Porównywając wzór (12) ze wzorem (11), możemy stwierdzić, że obecność drugiej okładziny metalowej zmniejsza pojemność kabla $\left(\frac{R R_1}{r R'} > \frac{R}{r}\right)$.

Przykład.

Ten sam kabel, co w przykładzie poprzednim (§ 62), posiada jeszcze pancierz żelazny; grubość płaszcza ołowianego wynosi 2 mm, grubość warstwy pomiędzy ołowiem i żelazem wynosi również 2 mm.

Wobec tego

$$r = 2,55 \text{ mm}, \quad R = 2,55 + 2 = 4,55 \text{ mm},$$

$$R' = 4,55 + 2 = 6,55 \text{ mm},$$

$$R_1 = 6,55 + 2 = 8,55 \text{ mm},$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 4,31,$$

$$C = \frac{0,0241 \cdot 4,31}{\lg \frac{455 \cdot 855}{255 \cdot 655}} = 0,280 \frac{\mu F}{km},$$

gdy tymczasem przy jednym płaszczu ołowianym pojemność wyniosła

$$0,414 \frac{\mu F}{km}.$$

§ 64. Rozkład napięć na okładzinach metalowych kabla opancerzonego.

Na rozpatrzonym kablu z dwiema okładzinami metalowymi zbadajmy, jak się rozkłada napięcie pomiędzy przewodem i poszczególnymi okładzinami. Oznaczmy potencjały (względem ziemi) czyli napięcia na przewodzie, na płaszczu ołowianym i na pancerzu odpowiednio przez U , U_1 , U_2 , zaś pojemności, jak i poprzednio — przewodu względem płaszczu ołowianego przez C_1 oraz płaszczu ołowianego względem pancerza przez C_2 . Oznaczmy dalej ładunek elektryczny, który mamy na przewodzie i tak samo na każdej z okładzin, przez Q_1 .

Wtedy

$$Q = C_1 (U - U_1),$$

$$Q = C_2 (U_1 - U_2),$$

skąd

$$\frac{U - U_1}{U_1 - U_2} = \frac{C_2}{C_1}.$$

Z tego wzoru widzimy, że spadki napięcia w rozpatrywanych częściach kabla są odwrotnie proporcjonalne do pojemności tych części.

Jeżeli, co bywa przeważnie, pancerz jest połączony z ziemią i ma napięcie $= 0$, wtedy, zakładając w powyższym wzorze $U_2 = 0$, otrzymamy

$$\frac{U - U_1}{U_1} = \frac{C_2}{C_1},$$

skąd

$$U_1 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} U.$$

Przykład.

Ten sam kabel, co i poprzednio, o przekroju 16 mm^2 jest pod napięciem $U = 100$ woltów; pancerz uziemiony; mieliśmy

$$C_1 = 0,414 \frac{\mu F}{km},$$

$$C_2 = \frac{0,0241 \cdot 4,31}{\lg \frac{853}{655}} = 0,898 \frac{\mu F}{km},$$

wobec tego napięcie na ołowiu będzie

$$U_1 = \frac{0,414}{0,414 + 0,298} \cdot 100 = 31,6 \text{ wolta.}$$

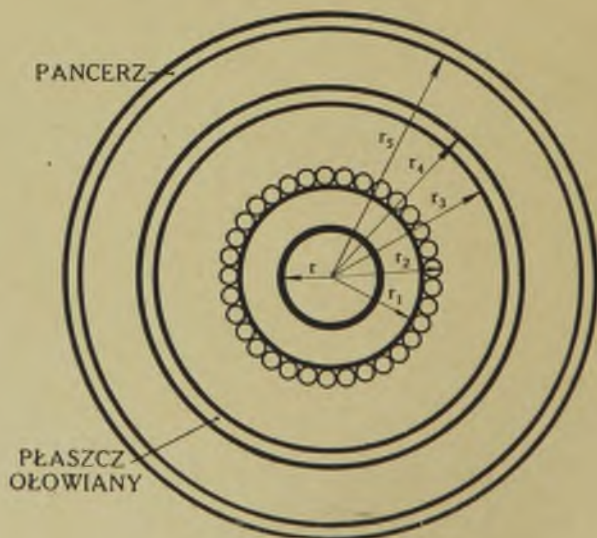
To znaczy, że spadek napięcia od przewodu do płaszczu ołowianego wynosi 68,4 wolta, — od płaszczu do pancerza — 31,6 wolta.

§ 65. Pojemność kabla dwużyłowego koncentrycznego.

Przekrój takiego kabla z oznaczeniem promieni pokazany jest na rys. 150.

Dwa przewody, zewnętrzny i wewnętrzny, służą do prowadzenia tego samego prądu w dwóch przeciwnych kierunkach. Wobec tego potencjały na tych przewodach mają te same wartości i różnią się tylko znakiem.

Niech na jednym przewodzie potencjał będzie $+V$, zaś na drugim $-V$.



Rys. 150.

Ładunek, przypadający na 1 cm długości przewodu wewnętrznego, określimy ze wzoru (9)

$$Q = \frac{\varepsilon (V_1 - V_2)}{2 \lg_n \frac{r_1}{r}} = \frac{\varepsilon |V - (-V)|}{2 \lg_n \frac{r_1}{r}} = \frac{\varepsilon V}{\lg_n \frac{r_1}{r}}$$

Wobec tego pojemność przewodu wewnętrznego będzie w centymetrach

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon}{\lg_n \frac{r_1}{r}},$$

albo, po przejściu do zwykłych logarytmów i do jednostek praktycznych,

$$C_1 = \frac{0,0483 \varepsilon}{\lg \frac{r_1}{r}} \frac{\mu F}{km}$$

Pojemność przewodu zewnętrznego stanowi sumę dwóch pojemności, jedna w stosunku do przewodu wewnętrznego — i ta pojemność ma tę samą wartość C_1 , druga pojemność — w stosunku do płaszcza ołowianego —, ta druga pojemność według wzoru (11) będzie

$$C_0 = \frac{0,0241 \varepsilon}{\lg \frac{r_3}{r_2}} \frac{\mu F}{km}$$

zaś w razie istnienia jeszcze pancerza żelaznego będzie według wzoru (12)

$$C'_0 = \frac{0,0241 \varepsilon}{\lg \frac{r_3 r_5}{r_2 r_4}} \frac{\mu F}{km}$$

Wobec tego pojemność przewodu zewnętrznego będzie przy jednym płaszczu ołowianym

$$C_2 = C_1 + C_0 = 0,0483 \varepsilon \left\{ \frac{1}{\lg \frac{r_1}{r}} + \frac{1}{2 \lg \frac{r_3}{r_2}} \right\},$$

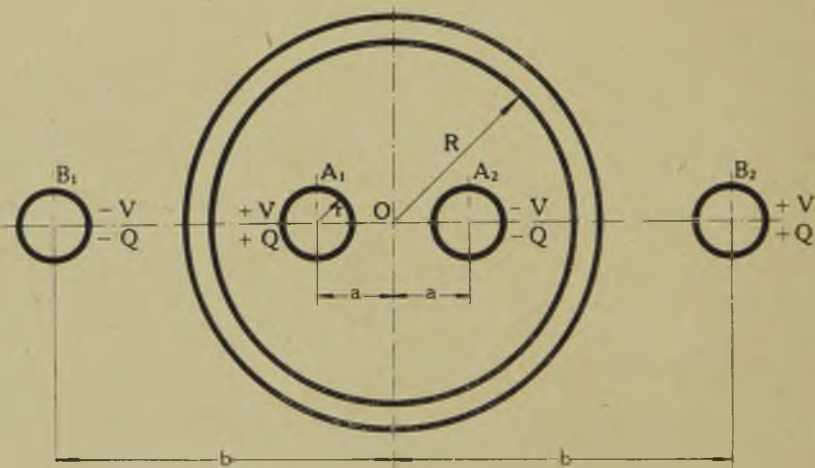
zaś przy płaszczu i uziemieniu pancerza

$$C_2 = C_1 + C'_0 = 0,0483 \varepsilon \left\{ \frac{1}{\lg \frac{r_1}{r}} + \frac{1}{2 \lg \frac{r_3 r_5}{r_2 r_4}} \right\}.$$

Niejednostajna pojemność obu przewodów w takim kablu powoduje to, że prądy ładowania będą w nich różne; oprócz tego straty w izolacji, otaczającej przewody, na histerezę dielektryczną, zależne od pojemności, również będą się różniły. Te okoliczności mogą wywoływać niepożądane zjawiska. Obecnie kable koncentryczne coraz rzadziej są używane.

§ 66. Pojemność kabla dwużyłowego skręconego.

W przekroju (rys. 151) mamy dwa przewody (żyły) A_1 i A_2 okrągłe, o jednakowym promieniu r , symetrycznie położone z obu stron środka kabla O . Odległość osi tych przewodów od osi kabla



Rys. 151.

oznaczymy przez a . Płaszcz ołowiany ma średnicę wewnętrzną R . Przez oba przewody płynie prąd o tej samej wartości, lecz o kierunkach przeciwnych. Ładunki na 1 cm długości i potencjały obu przewodów oznaczymy odpowiednio przez $\pm Q$, $\pm V$.

Lord Kelvin wykazał, że układ, zawierający szereg naładowanych przewodów, znajdujących się wewnątrz cylindrycznej powłoki metalowej, można zastąpić układem równoważnym, w którym zamiast powłoki będziemy mieli t. zw. elektryczne odbicia tych przewodów. Elektrycznym odbiciem jest przewód umyślony, znajdujący się poza powierzchnią przewodzącą; oś takiego przewodu leży w płaszczyźnie, przechodzącej przez oś układu (kabla) i od rzeczywistego przewodu w takiej odległości, że promień

przekroju powłoki R stanowi średnią geometryczną pomiędzy odległościami od osi układu rzeczywistego przewodu a i elektrycznego odbicia b .

Dla ścisłości trzeba zaznaczyć, że odległości powinny być mierzone nie od geometrycznych osi przewodów, lecz od ich osi elektrycznych, czyli od linii, w których możemy skupić ładunki, rozłożone na powierzchni przewodów, aby otrzymać takie same działanie zewnętrzne. Osie elektryczne, przy niewielkich przekrojach przewodów, znajdują się bardzo blisko od osi geometrycznych, wobec czego tej różnicy przy wyprowadzeniu wzorów praktycznych nie uwzględniamy.

Na tych elektrycznych odbiciach musimy mieć ładunki i potencjały te same, co i na odpowiednich przewodach, lecz o znakach przeciwnych.

Na rys. 151 B_1 stanowi elektryczne odbicie przewodu A_1 , na nim mamy $-Q$ i $-V$; B_2 stanowi odbicie przewodu A_2 , na nim mamy $+Q$ i $+V$. Pozatem musi być spełniony warunek

$$R^2 = ab.$$

Pojemność każdej żyły znajdziemy, dzieląc ładunek przez potencjał tej żyły. Każdy z przewodów posiada potencjał wypadkowy, stanowiący sumę potencjału własnego, powstającego od własnego ładunku (w przypuszczeniu, że wszystkie inne przewody są połączone z ziemią), oraz potencjałów, powstających od ładunków, znajdujących się na przewodach, otaczających rozpatrywany przewód. Oznaczając potencjał własny każdego z dwóch przewodów przez $\pm V_1$, będziemy mogli określić wartość potencjału na rozpatrywanym przewodzie, powstającego od innych ładunków, stosując wzór (10):

$$V_\rho = V_1 - \frac{2Q}{\varepsilon} \lg_n \frac{\rho}{r}.$$

Rozpatrzmy przewód A_1 .

Jego potencjał własny wynosi

$$+V_1$$

Potencjał od ładunku na odbiciu B_1

$$-V_1 + \frac{2Q}{\varepsilon} \lg_n \frac{b-a}{r},$$

„ „ „ „ przewodzie A_2

$$-V_1 + \frac{2Q}{\varepsilon} \lg_n \frac{2a}{r},$$

„ „ „ „ odbiciu B_2

$$+V_1 - \frac{2Q}{\varepsilon} \lg_n \frac{b+a}{r}.$$

Biorąc sumę tych potencjałów, otrzymamy faktyczny potencjał przewodu

$$V = \frac{2Q}{\varepsilon} \left[\lg_n \frac{b-a}{r} + \lg_n \frac{2a}{r} - \lg_n \frac{b+a}{r} \right],$$

albo

$$V = \frac{2Q}{\varepsilon} \lg_n \left[\frac{2a(b-a)}{r(b+a)} \right].$$

Na podstawie zależności $R^2 = ab$, mamy $b = \frac{R^2}{a}$ i wobec tego

$$V = \frac{2Q}{\varepsilon} \lg_n \left[\frac{2a(R^2 - a^2)}{r(R^2 + a^2)} \right];$$

stąd otrzymujemy pojemność jednej żyły w centymetrach na 1 cm długości

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon}{2 \lg_n \left[\frac{2a(R^2 - a^2)}{r(R^2 + a^2)} \right]},$$

lub

$$C = \frac{0,0241 \varepsilon}{\lg \left[\frac{2a(R^2 - a^2)}{r(R^2 + a^2)} \right]} \frac{\mu F}{km}$$

Pojemność pary żył, czyli pojemność robocza w tym przypadku wypadnie 2 razy mniejsza, gdyż różnica potencjałów między żyłami wynosi $V - (-V) = 2V$, więc pojemność pary żył będzie

$$C = \frac{Q}{2V} = \frac{0,01205 \varepsilon}{\lg \left[\frac{2a(R^2 - a^2)}{r(R^2 + a^2)} \right]} \frac{\mu F}{km}$$

Można wykazać, że w rozpatrywanym kablu, gdy potencjały na obu przewodach różnią się tylko znakami, na płaszczu ołowianym potencjał będzie równy 0.

W tym celu rozpatrzmy dowolny punkt P na płaszczu (rys. 152). Oznaczmy odległości tego punktu od osi A_1 , A_2 i B_1 , B_2 odpowiednio przez ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 i ρ_4 .

Dla obliczenia potencjału V_p w punkcie P mamy

potencjał od ładunku przewodu A_1 wynosi $V_1 = \frac{2Q}{\varepsilon} \lg_n \frac{\rho_1}{r}$,

$$\rho_1^2 = R^2 + \frac{R^4}{a^2} - \frac{2R^3}{a} \cos \theta = \frac{R^2}{a^2} \rho_2^2,$$

albo

$$\rho_3 = \frac{R}{a} \rho_1,$$

$$\rho_4 = \frac{R}{a} \rho_2,$$

$$\frac{\rho_2 \rho_3}{\rho_1 \rho_4} = \frac{\rho_2 \frac{R}{a} \rho_1}{\rho_1 \frac{R}{a} \rho_2} = 1.$$

Wobec tego

$$V_P = \frac{2Q}{\varepsilon} \lg_n \frac{\rho_2 \rho_3}{\rho_1 \rho_4} = \frac{2Q}{\varepsilon} \lg_n 1 = 0.$$

Więc w dowolnym punkcie płaszcza ołowianego potencjał równy jest 0, czyli na płaszczu niema napięcia. Jasnem jest, że wobec tego następne metalowe powłoki, znajdujące się nad płaszczem, jak np. pancierz, nie mają już żadnego wpływu na pojemności kabla.

§ 67. Pojemność kabla trójżyłowego skręconego prądu trójfazowego.

W przekroju poprzecznym (rys. 153) trzy żyły A_1 , A_2 i A_3 są ułożone symetrycznie względem osi O .

Promień każdej żyły $= r$, odległość osi żyły od osi kabla $= a$.

Promień kabla pod płaszczem ołowianym $= R$.

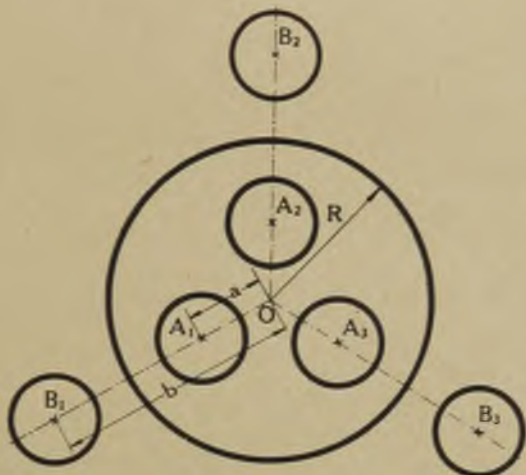
Elektryczne odbicia tych przewodów będą B_1 , B_2 i B_3 , osie których od osi kabla są w odległości b . Przytem

$$ab = R^2.$$

Oznaczmy ładunki (w pewnej chwili) na przewodach oraz potencjały odpowiednio przez Q_1 , Q_2 i Q_3 , V_1 , V_2 i V_3 ; te wielkości mogą mieć znaki dodatnie lub ujemne; wtedy na odbiciach będziemy mieli odpowiednio $-Q_1$, $-Q_2$, $-Q_3$, $-V_1$, $-V_2$, $-V_3$.

Układ, zawierający 3 przewody i płaszcz ołowiany, zastępujemy więc układem, zawierającym 3 przewody i 3 elektryczne

ich odbicia. Określmy potencjał każdego z przewodów. Potencjał żyły A_1 stanowi sumę potencjałów, powstających od własnego ładunku (równy V_1') oraz od ładunków innych przewodów. Oznaczmy dalej potencjały, które powstałyby na A_2 i A_3 od własnych ładunków przez V_2' i V_3' ; na odbiciach będziemy mieli własne potencjały — V_1' , — V_2' i — V_3' .



Rys. 153.

Określamy poszczególne potencjały ze wzoru

$$V_{\rho} = V - \frac{2Q}{\varepsilon} \lg \frac{\rho}{r}.$$

Mamy następujące geometryczne zależności (rys. 154)

$$A_1 A_2 = A_1 A_3 = A_2 A_3 = A_1 O \sqrt{3} = a \sqrt{3}.$$

$$A_1 B_1 = O B_1 - O A_1 = b - a,$$

$$\overline{B_2 A_1}^2 = \overline{O A_1}^2 + \overline{O B_2}^2 - 2 O A_1 \cdot O B_2 \cdot \cos 120^\circ = a^2 + b^2 + a b,$$

$$B_2 A_1 = \sqrt{a^2 + b^2 + a b} = B_2 A_3;$$

tak samo

$$B_3 A_1 = B_3 A_2 = B_1 A_2 = B_1 A_3 = \sqrt{a^2 + b^2 + a b}.$$

Dla przewodu A_1

potencjał własny wynosi V_1' ,

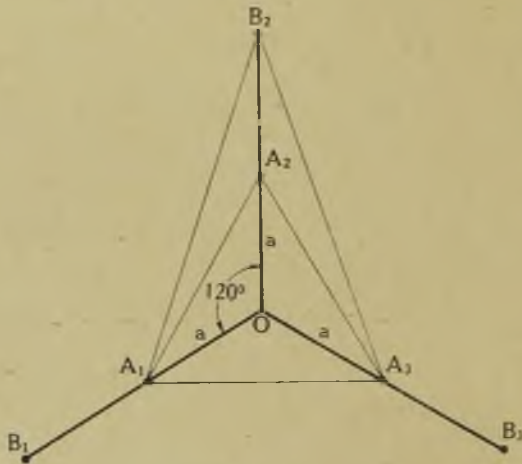
potencjał od przewodu B_1 wynosi $-V_1' + \frac{2Q_1}{\epsilon} \lg_n \frac{b-a}{r}$,

„ „ „ „ A_2 „ $V_2' - \frac{2Q_2}{\epsilon} \lg_n \frac{a\sqrt{3}}{r}$,

„ „ „ „ B_2 „ $-V_2' + \frac{2Q_2}{\epsilon} \lg_n \frac{\sqrt{a^2+b^2+ab}}{r}$,

„ „ „ „ A_3 „ $V_3' - \frac{2Q_3}{\epsilon} \lg_n \frac{a\sqrt{3}}{r}$,

„ „ „ „ B_3 „ $-V_3' + \frac{2Q_3}{\epsilon} \lg_n \frac{\sqrt{a^2+b^2+ab}}{r}$.



Rys. 154.

Biorąc sumę, otrzymamy rzeczywisty potencjał przewodu A_1

$$\begin{aligned}
 V_1 &= \frac{2Q_1}{\epsilon} \lg_n \frac{b-a}{r} + \frac{2Q_2}{\epsilon} \lg_n \frac{\sqrt{a^2+b^2+ab}}{a\sqrt{3}} + \\
 &\quad + \frac{2Q_3}{\epsilon} \lg_n \frac{\sqrt{a^2+b^2+ab}}{a\sqrt{3}} = \\
 &= \frac{2}{\epsilon} \left[Q_1 \lg_n \frac{b-a}{r} + (Q_2 + Q_3) \lg_n \frac{\sqrt{a^2+b^2+ab}}{a\sqrt{3}} \right].
 \end{aligned}$$

Analogicznie

$$V_2 = \frac{2}{\epsilon} \left[Q_2 \lg_n \frac{b-a}{r} + (Q_1 + Q_3) \lg_n \frac{\sqrt{a^2+b^2+ab}}{a\sqrt{3}} \right],$$

$$V_3 = \frac{2}{\varepsilon} \left[Q_3 \lg_n \frac{b-a}{r} + (Q_1 + Q_2) \lg_n \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + ab}}{a\sqrt{3}} \right],$$

skąd

$$V_1 + V_2 + V_3 = \frac{2}{\varepsilon} (Q_1 + Q_2 + Q_3) \left\{ \lg_n \frac{b-a}{r} + 2 \lg_n \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + ab}}{a\sqrt{3}} \right\},$$

Przy prądzie trójfazowym

$$V_1 + V_2 + V_3 = 0,$$

wobec tego w tym przypadku również

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0,$$

albo

$$Q_2 + Q_3 = -Q_1.$$

Wobec tego

$$V_1 = \frac{2Q_1}{\varepsilon} \lg_n \left(\frac{b-a}{r} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{a^2 + b^2 + ab}} \right);$$

$$\text{ale } b = \frac{R^2}{a}, \text{ więc } b-a = \frac{R^2 - a^2}{a^2};$$

$$\sqrt{a^2 + b^2 + ab} = \frac{1}{a} \sqrt{a^4 + a^2 R^2 + R^4};$$

$$V_1 = \frac{2Q_1}{\varepsilon} \lg_n \frac{(R^2 - a^2) a\sqrt{3}}{r \sqrt{a^4 + a^2 R^2 + R^4}} =$$

$$= \frac{Q_1}{\varepsilon} \lg_n \frac{(R^2 - a^2)^2 \cdot 3 a^2}{r^2 (a^4 + a^2 R^2 + R^4)} =$$

$$= \frac{Q_1}{\varepsilon} \lg_n \frac{3 a^2 (R^2 - a^2)^3}{r^2 (R^6 - a^6)}.$$

Stąd znajdujemy pojemność jednej żyły (fazy), jako iloraz ładunku Q_1 przez potencjał V_1 (napiecie fazowe) w centymetrach

$$C = \frac{\varepsilon}{\lg_n \frac{3 a^2}{r^2} \cdot \frac{(R^2 - a^2)^3}{(R^6 - a^6)}},$$

albo

$$C = \frac{0,0483 \varepsilon}{\lg_n \frac{3 a^2}{r^2} \cdot \frac{(R^2 - a^2)^3}{R^6 - a^6}} \frac{\mu F}{k m}.$$

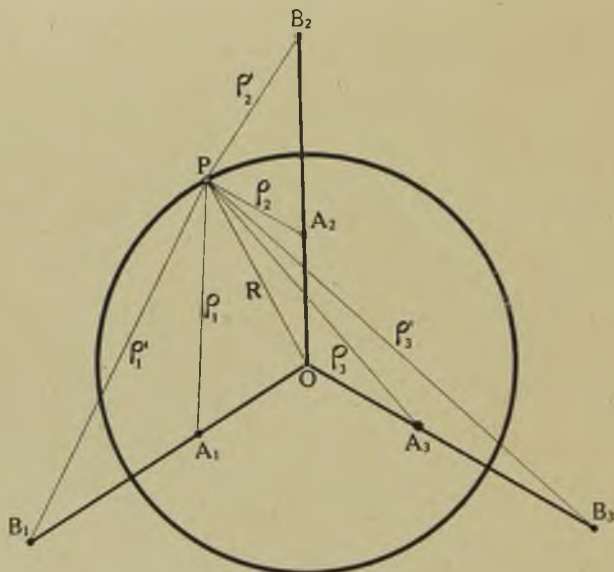
Wobec symetrii trzech przewodów, oczywiście, pojemności żył są jednakowe.

Przy prądzie trójfazowym, gdy spełniony jest warunek

$$V_1 + V_2 + V_3 = 0,$$

na płaszczu ołowianym napięcia nie będzie, to znaczy, że w dowolnym punkcie P płaszczu potencjał $V_P = 0$.

Rzeczywiście, potencjał V_P znajdziemy jako sumę potencjałów, powstających od ładunku przewodów A_1, B_1, A_2, B_2, A_3 i B_3 . Oznaczmy (rys. 155)



Rys. 155.

$$\begin{aligned} A_1 P &= \rho_1, \\ A_2 P &= \rho_2, \\ A_3 P &= \rho_3, \\ B_1 P &= \rho'_1, \\ B_2 P &= \rho'_2, \\ B_3 P &= \rho'_3. \end{aligned}$$

Potencjał od ład. A_1 wynosi $V_1' - \frac{2Q_1}{\epsilon} \lg_n \frac{\rho_1}{r},$

" " " B_1 " $-V_1' + \frac{2Q_1}{\epsilon} \lg_n \frac{\rho'_1}{r},$

Potencjał od ład. A_2 wynosi $V_2' = \frac{2Q_2}{\epsilon} \lg_n \frac{\rho_2'}{r}$,
 „ „ „ B_2 „ $-V_2' + \frac{2Q_2}{\epsilon} \lg_n \frac{\rho_2'}{r}$.
 „ „ „ A_3 „ $V_3' = \frac{2Q_3}{\epsilon} \lg_n \frac{\rho_3'}{r}$,
 „ „ „ B_3 „ $-V_3' + \frac{2Q_3}{\epsilon} \lg_n \frac{\rho_3'}{r}$.

Suma daje nam

$$V_P = \frac{2}{\epsilon} \left[Q_1 \lg_n \frac{\rho_1'}{\rho_1} + Q_2 \lg_n \frac{\rho_2'}{\rho_2} + Q_3 \lg_n \frac{\rho_3'}{\rho_3} \right]$$

Znajdziemy wartości $\frac{\rho_1'}{\rho_1}$, $\frac{\rho_2'}{\rho_2}$ i $\frac{\rho_3'}{\rho_3}$.

Z ΔOA_1P :

$$A_1P^2 = OP^2 + OA_1^2 - 2 \cdot OP \cdot OA_1 \cos A_1OP,$$

czyli

$$\rho_1'^2 = R^2 + a^2 - 2aR \cos A_1OP;$$

z ΔOB_1P :

$$B_1P^2 = OP^2 + OB_1^2 - 2OP \cdot OB_1 \cos A_1OP;$$

czyli

$$\rho_1''^2 = R^2 + b^2 - 2bR \cos A_1OP;$$

ale wobec $b = \frac{R^2}{a}$,

$$\begin{aligned} \rho_1''^2 &= R^2 + \frac{R^4}{a^2} - \frac{2R^3}{a} \cos A_1OP = \\ &= \frac{R^2}{a^2} \left(R^2 + a^2 - 2aR \cos A_1OP \right) = \frac{R^2}{a^2} \cdot \rho_1'^2, \end{aligned}$$

więc

$$\frac{\rho_1'}{\rho_1} = \frac{R}{a};$$

analogicznie znajdziemy

$$\frac{\rho_2'}{\rho_2} = \frac{\rho_3'}{\rho_3} = \frac{R}{a},$$

więc

$$V_P = \frac{2}{\varepsilon} (Q_1 + Q_2 + Q_3) \lg_n \frac{R}{a};$$

ponieważ

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0,$$

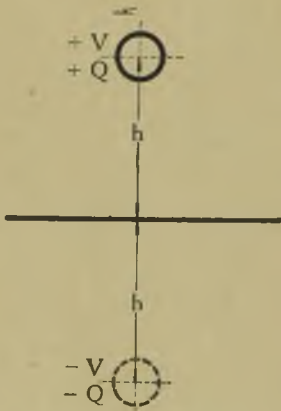
więc

$$V_P = 0.$$

Na tej podstawie możemy stwierdzić, że przy prądzie trójfazowym pojemność kabla trójżyłowego nie zależy od wszelkich powierzchni metalowych, znajdujących się nad płaszczem ołowianym.

§ 68. Pojemność przewodu napowietrznego pojedynczego (drugi przewód ziemia).

Układ, zawierający przewód cylindryczny i przewód w postaci powierzchni płaskiej, według teorii Lorda Kelvina, możemy zastąpić układem, zawierającym dwa przewody cylindryczne, z których drugi będzie odbiciem elektrycznym, znajdującym się po drugiej stronie płaszczyzny w takiej samej od niej odległości co i dany przewód, czyli stanowiący jakby zwierciadlane odbicie pierwszego. Oznaczając przez h odległość osi przewodu od ziemi (rys. 156), przez r jego promień, przez $\pm V$ i $\pm Q$ potencjały i ładunki (na 1 cm długości) przewodów, rzeczywistego i jego odbicia, oraz przez $\pm V'$ potencjały własne tych przewodów, będziemy mieli na zasadzie wzoru (10)



Rys. 156.

dla danego przewodu:

potencjał własny

$$V',$$

„ od elek. odbicia ($\rho = 2h$) $-V' + \frac{2Q}{\varepsilon} \lg_n \frac{2h}{r},$

a więc suma

$$V = \frac{2Q}{\varepsilon} \lg_n \frac{2h}{r};$$

stąd znajdujemy pojemność przewodu na 1 cm długości, uwzględniając, że dla powietrza $\epsilon=1$, w centymetrach

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{1}{2 \lg_n \frac{2h}{r}}$$

albo

$$C = \frac{0,0241}{\lg \frac{2h}{r}} \frac{\mu F}{km}$$

Jest to pojemność przewodu względem ziemi; mamy z nią do czynienia wówczas, gdy źródło prądu włączone jest między przewód a ziemię.

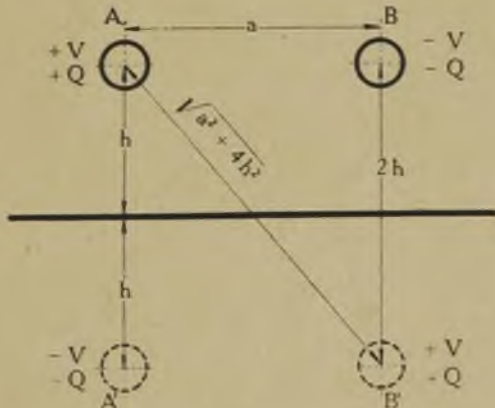
§ 69. Pojemność dwóch równoległych do siebie przewodów napowietrznych.

Tutaj możemy rozpatrywać dwa przypadki:

I, gdy osie obu przewodów leżą w płaszczyźnie poziomej i II, gdy osie te leżą w płaszczyźnie pionowej.

W obu przypadkach mamy na myśli dwa przewody, należące do wspólnego przewodu, i wprowadzimy zamiast powierzchni ziemi elektryczne odbicia rozpatrywanych przewodów.

W przypadku I (rys. 157) oba przewody A i B są w odległości a od siebie oraz na jednakowej wysokości h nad ziemią. Takie same odległości mamy dla odbić A' i B' .



Rys. 157.

Potencjał na każdym z przewodów, np. A , znajdziemy, mając potencjał własny przewodu A

$$\begin{aligned} & V', \\ \text{,,} & \text{ od ładunku } B & - V' + 2 Q \lg_n \frac{a}{r}, \\ \text{,,} & \text{ ,, ,, } A' & - V' + 2 Q \lg_n \frac{2h}{r}, \\ \text{,,} & \text{ ,, ,, } B' & V' - 2 Q \lg_n \frac{\sqrt{a^2 + 4h^2}}{r}; \end{aligned}$$

biorąc sumę, otrzymamy

$$V = 2 Q \lg_n \frac{2ah}{r \sqrt{a^2 + 4h^2}} = 2 Q \lg_n \frac{a}{r \sqrt{1 + \left(\frac{a}{2h}\right)^2}},$$

skąd pojemność każdego przewodu w cm

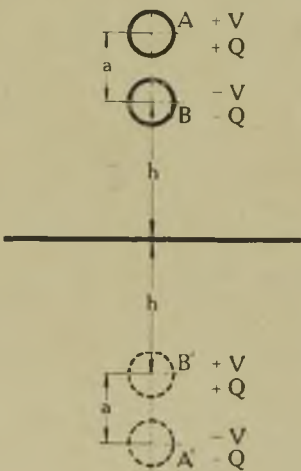
$$C = \frac{Q}{V} = \frac{1}{2 \lg_n \frac{a}{r \sqrt{1 + \left(\frac{a}{2h}\right)^2}}}.$$

Ponieważ odległość między przewodami a jest zwykle znacznie mniejsza od podwójnej wysokości zawieszenia $2h$, więc najczęściej odrzuca się wyraz $\frac{a}{2h}$ i używa się wzór uproszczony

$$C = \frac{1}{2 \lg_n \frac{a}{r}},$$

lub

$$C = \frac{0,0241}{\lg \frac{a}{r}} \frac{\mu F}{km}.$$



Rys. 158.

Pojemność linii dwuprzewodowej, gdzie między przewodami różnica potencjałów wynosi $2V$, wypadnie dwa razy mniejsza.

W przypadku II (rys. 158) oba przewody A i B są zawieszane na rozmaitych wysokościach $a+h$ i h . Dla obliczenia potencjałów w A i B mamy

na przewodzie A

potencjał własny	V'
potencjał od ładunku B	$-V' + 2Q \lg_n \frac{a}{r}$,
" " " B'	$V' - 2Q \lg_n \frac{a+2h}{r}$,
" " " A'	$-V' + 2Q \lg_n \frac{2a+2h}{r}$;

na przewodzie B

potencjał własny	$-V'$,
" od ładunku A	$V' - 2Q \lg_n \frac{a}{r}$,
" " " B'	$V' - 2Q \lg_n \frac{2h}{r}$,
" " " A'	$-V' + 2Q \lg_n \frac{a+2h}{r}$.

Wobec tego

$$\begin{aligned}
 V_A = +V &= 2Q \lg_n \frac{2a(a+h)}{r(a+2h)} = \\
 &= 2Q \lg_n \frac{2ah \left(1 + \frac{a}{h}\right)}{2rh \left(1 + \frac{a}{2h}\right)} \cong 2Q \lg_n \frac{a}{r}; \\
 V_B = -V &= -2Q \lg_n \frac{2ah}{r(a+2h)} = \\
 &= -2Q \lg_n \frac{2ah}{2rh \left(1 + \frac{a}{2h}\right)} \cong -2Q \lg_n \frac{a}{r},
 \end{aligned}$$

skąd pojemność każdego przewodu w cm

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{1}{2 \lg_n \frac{a}{r}}$$

lub

$$C = \frac{0,0241}{\lg \frac{a}{r}} \frac{\mu F}{km},$$

czyli pojemność jest taka sama, jak w przypadku 1.

§ 70. Pojemność trzech równoległych symetrycznie ułożonych przewodów napowietrznych prądu trójfazowego.

Rozpatrujemy układ z 3-ch przewodów I, II i III (rys. 159), przeznaczonych do przenoszenia prądu trójfazowego.

Dla wyprowadzenia wzoru przybliżonego, mając na względzie, że odległość między przewodami a jest nieznaczną w stosunku do wysokości zawieszenia h (liczonej od środka koła, przechodzącego przez środki przekroju przewodów), będziemy przyjmowali odległość między każdym przewodem i każdym odbiciem za równą $2h$. Oznaczając przez V_1' , V_2' , V_3' własne potencjały przewodów oraz przez Q_1 , Q_2 i Q_3 ładunki ich na 1 cm długości, będziemy mieli dla przewodu I

potencjał własny

$$\text{" od ładunku I' } \quad - V_1' + 2 Q_1 \lg_n \frac{2h}{r},$$

$$\text{" " " II} \quad V_2' - 2 Q_2 \lg_n \frac{a}{r},$$

$$\text{" " " II'} \quad - V_2' + 2 Q_2 \lg_n \frac{2h}{r},$$

$$\text{" " " III} \quad V_3' - 2 Q_3 \lg_n \frac{a}{r},$$

$$\text{" " " III'} \quad - V_3' + 2 Q_3 \lg_n \frac{2h}{r},$$

skąd

$$V_1 = 2(Q_1 + Q_2 + Q_3) \lg_n \frac{2h}{r} - 2(Q_2 + Q_3) \lg_n \frac{a}{r}.$$

Ale dla prądu trójfazowego

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0, \quad Q_2 + Q_3 = -Q_1,$$

więc

$$V_1 = 2 Q_1 \lg_n \frac{a}{r}$$

i analogicznie

$$V_2 = 2 Q_2 \lg_n \frac{a}{r},$$

$$V_3 = 2 Q_3 \lg_n \frac{a}{r}.$$

Wobec tego pojemność każdego przewodu (fazy) na 1 cm długości w cm będzie

$$C = \frac{1}{2 \lg_n \frac{a}{r}},$$

lub

$$C = \frac{0,0241 \mu F}{\lg \frac{a}{r} km},$$

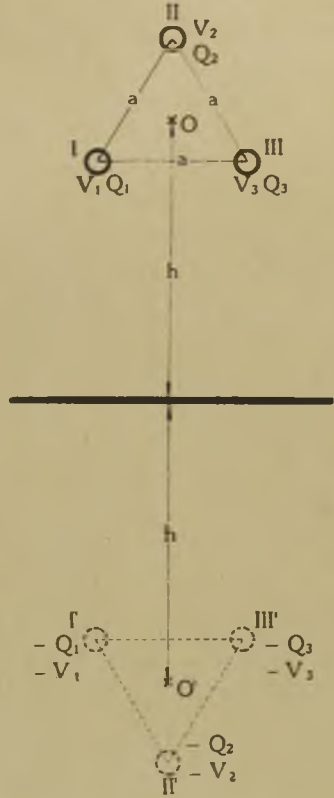
a więc taka sama, jak i w przypadku dwóch równoległych przewodów.

§ 71. Pojemność cząstkowa i pojemność robocza w liniach elektrycznych.

W układach wieloprzewodowych, znajdujących się pod prądem, poszczególne przewody posiadają naogół różne ładunki elektryczne. Każdy z tych ładunków wpływa na wszystkie przewody w ten sposób, że na tych przewodach powstaną potencjały, których wartości są proporcjonalne do poszczególnych ładunków.

Rozpatrzmy układ, zawierający n przewodów z ładunkami Q_1, Q_2, \dots, Q_n . Załóżmy na chwilę, że wszystkie przewody za wyjątkiem pierwszego, nie posiadają ładunków, że zatem mamy do czynienia tylko z ładunkiem Q_1 ; wówczas potencjały (względem ziemi), które powstaną na wszystkich przewodach, proporcjonalne do Q_1 , możemy wyrazić w sposób następujący

- w pierwszym przewodzie $a_{11} Q_1$,
- w drugim „ $a_{21} Q_1$,
-
- w ostatnim „ $a_{n1} Q_1$,



Rys. 159.

$$b_{nn} = C_{nn} + C_{n1} + C_{n2} + \dots + C_{n(n-1)},$$

$$b_{12} = -C_{12}; b_{21} = -C_{21},$$

.....

$$b_{kl} = -C_{kl}; b_{lk} = -C_{lk}.$$

Pomiędzy każdą parą przewodów powstaje strumień indukcji elektrycznej, przyczem strumień idący np. z przewodu 1-go do przewodu 2-go jest równy co do wartości, lecz przeciwnie skierowany do strumienia, idącego z przewodu 2-go do przewodu 1-go i t. d.; z tego wynika, że

$$C_{12}(v_1 - v_2) = -C_{21}(v_2 - v_1)$$

i ogólnie

$$C_{kl}(v_k - v_l) = -C_{lk}(v_l - v_k),$$

czyli

$$C_{12} = C_{21}$$

i ogólnie

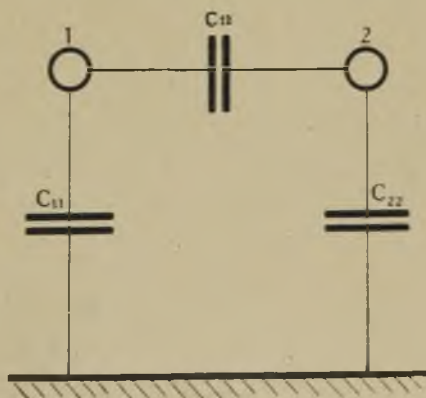
$$C_{kl} = C_{lk}.$$

Wielkość C_{kl} nazywamy pojemnością cząstkową między przewodami k i l , przyczem jednym z przewodów może być ziemia.

Łatwo zauważyć ze wzorów (13), że $C_{11}, C_{22}, \dots, C_{nn}$ stanowią wartości ładunków na poszczególnych przewodach, w przypadku, gdy potencjały v_1, v_2, \dots, v_n na wszystkich przewodach równe są 1.

Pojemność wypadkową układu, zawierającego pojemności cząstkowe, nazywamy pojemnością roboczą tego układu.

Tak np. dla linii dwuprzewodowej napowietrznej otrzymamy 3 pojemności cząstkowe (rys. 160) dwie C_{11} i C_{22} między każdym z przewodów i ziemią i jedną C_{12} między przewodami. Pierwsze dwie są połączone w szereg, zaś C_{12} równoległe do poprzednich; wypadkowa pojemność takiego układu będzie



Rys. 160.

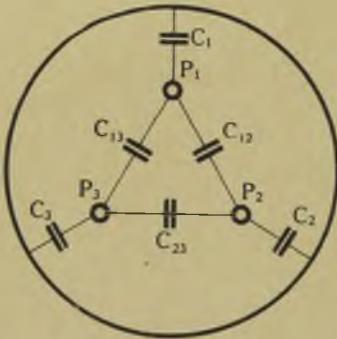
$$C = C_{12} + \frac{C_{11} C_{22}}{C_{11} + C_{22}}.$$

Gdy oba przewody są zawieszono na tej samej wysokości, wtedy $C_{11} = C_{22} = C_0$ i wypadkowa pojemność staje się równą

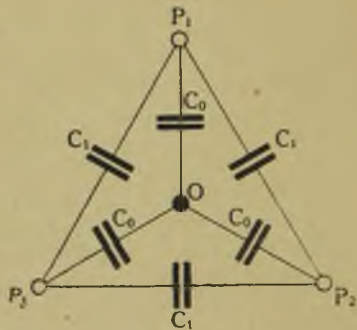
$$C = C_{12} + \frac{C_0}{2};$$

będzie to pojemność robocza rozpatrywanej linii dwuprzewodowej. Gdy przewody są zawieszono wysoko nad ziemią, pojemność C_0 ma wartość nieznaczną w porównaniu do pojemności C_{12} ; wówczas pojemność robocza sprowadza się do pojemności między przewodami.

Na rys. 161 mamy układ trzech przewodów P_1 , P_2 i P_3 , otoczonych uziemionym płaszczem metalowym; spostrzegamy 6 po-



Rys. 161.



Rys. 162.

jemności cząstkowych: C_{10} , C_{20} i C_{30} między poszczególnymi przewodami i płaszczem oraz C_{12} , C_{13} i C_{23} między przewodami. Przy symetrycznym układzie $C_{10} = C_{20} = C_{30} = C_0$ oraz $C_{12} = C_{13} = C_{23} = C_1$.

Układ poprzedni można schematycznie przedstawić jak na rys. 162, gdzie punkt O odpowiada uziemieniu.

Oznaczając napięcia fazowe (między przewodem i uziemieniem) dla poszczególnych przewodów przez U_1 , U_2 i U_3 , otrzymamy dla prądu ładowania kondensatorów, pobieranego z pierwszego przewodu,

$$\begin{aligned} \hat{I}_c = \hat{U}_1 j \omega C_0 + (\hat{U}_1 - \hat{U}_2) j \omega C_1 + (\hat{U}_1 - \hat{U}_3) j \omega C_1 = \hat{U}_1 j \omega C_0 + \\ + (2 \hat{U}_1 - \hat{U}_2 - \hat{U}_3) j \omega C_1, \end{aligned}$$

ale dla symetrycznego układu, przy jednakowym obciążeniu wszystkich 3-ch faz

$$\hat{U}_1 + \hat{U}_2 + \hat{U}_3 = 0,$$

$$-\tilde{U}_2 - \tilde{U}_3 = \tilde{U}_1,$$

wobec tego

$$\hat{I}_c = \tilde{U}_1 j \omega (C_0 + 3 C_1).$$

Analogiczne wzory otrzymalibyśmy dla pozostałych przewodów.
Wyraz

$$C = C_0 + 3 C_1$$

stanowi w tym przypadku pojemność roboczą każdego przewodu.

§ 72. Indukcyjność.

Rozpatrzmy dowolny obwód, przez który przepływa prąd. Pod wpływem tego prądu powstaje pole magnetyczne i przez obwód przeniknie strumień magnetyczny. Iloraz tego strumienia magnetycznego przez prąd, przepływający w obwodzie, nazywamy indukcyjnością własną tego obwodu. Jeżeli w obwodzie płynie prąd I i całkowity strumień magnetyczny, objęty przez ten obwód i powstający pod wpływem tego prądu, będzie Φ , wówczas indukcyjność własna obwodu wypadnie

$$L = \frac{\Phi}{I}.$$

Liczbowo indukcyjność własna równa się wartości strumienia, wywołanego prądem o natężeniu równym jednostce. W układzie elektromagnetycznym indukcyjność ma wymiar długości i wobec tego może być mierzona w cm. Praktyczną jednostką jest henr, oznaczany przez H , przyczem

$$1 H = 10^9 \text{ cm.}$$

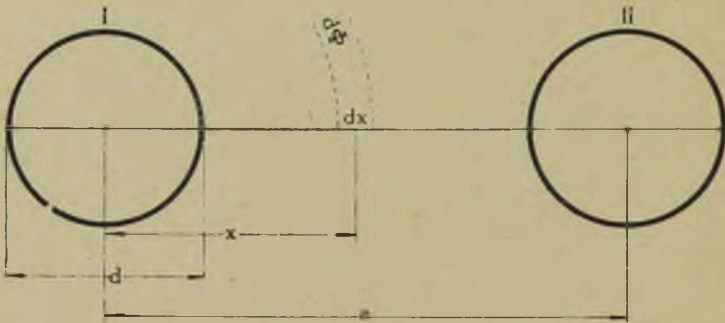
Będziemy rozpatrywali obwody, zawierające długie przewody z materiałów magnetycznie obojętnych, jak miedź lub aluminium, dla których przenikalność magnetyczna równa jest 1. W tym przypadku L stanowi wielkość stałą, zależną tylko od geometrycznego układu i wymiarów przewodów.

§ 73. Indukcyjność linii dwuprzewodowej.

Dwa długie i jednakowe przewody I i II (rys. 163) o długości l i średnicy d , znajdują się w odległości a (między osiami). Prosto-

linijny przewód, po którym przepływa prąd I , daje pole magnetyczne, którego natężenie w odległości x będzie $H_x = \frac{2I}{x}$. Takie natężenie pola będziemy mieli we wszystkich punktach, znajdujących się poza przewodem czyli dla $x \geq \frac{d}{2}$. Dla określenia natężenia pola magnetycznego wewnątrz przewodu, czyli dla $x \leq \frac{d}{2}$,

musimy brać pod uwagę nie cały prąd I , rozłożony w przekroju poprzecznym przewodu, lecz tylko tę jego część, która odpowiada polu poprzecznego przekroju o promieniu x ; oznaczając wartość tego prądu wewnątrz przekroju przez I_x , będziemy mieli



Rys. 163.

$$\frac{I_x}{I} = \frac{\pi x^2}{\pi \frac{d^2}{4}} = \frac{4x^2}{d^2},$$

skąd

$$I_x = \frac{4x^2}{d^2} I.$$

Wobec tego natężenie pola wewnątrz przewodu w odległości x będzie

$$H_x = \frac{8x^2}{d^2} \frac{I}{x} = \frac{8x}{d^2} I. \quad (14)$$

Obliczmy strumień magnetyczny, przenikający przez rozpatrywany obwód pod wpływem prądu przewodu I. Przeprowadźmy płaszczyznę przez osie przewodów i rozpatrzmy na tej płaszczyźnie w odległości x od przewodu I nieskończenie wąski pasek szeroko-

kości dx i długości l . Natężenie pola w tym pasku będzie równe H_x , zaś strumień magnetyczny, przenikający przez ten pasek, będzie miał wartość

$$d\Phi = H_x l dx.$$

Dla otrzymania całego strumienia, powstającego od przewodu I, musimy zcałkować ten wyraz oddzielnie dla $x \leq \frac{d}{2}$ i dla $x > \frac{d}{2}$. Część strumienia, znajdująca się wewnątrz przewodu, będzie

$$\Phi_1 = \int_0^{\frac{d}{2}} \frac{8x}{d^2} Il dx = Il,$$

zaś druga część, znajdująca się zewnątrz przewodu, będzie

$$\Phi_2 = \int_{\frac{d}{2}}^a \frac{2I}{x} l dx = 2Il \left| \lg_n x \right|_{\frac{d}{2}}^a = 2Il \lg_n \frac{2a}{d}.$$

Cały strumień od przewodu I będzie

$$\Phi_1 + \Phi_2 = Il \left(1 + 2 \lg_n \frac{2a}{d} \right).$$

Rozpatrując teraz przewód II z takim samym prądem I , lecz o znaku przeciwnym, otrzymamy zupełnie taki sam strumień, okrążający przewód II w kierunku przeciwnym, a więc mający kierunek jednakowy z kierunkiem strumienia przewodu I w polu, objętem przez rozpatrywany obwód. W ten sposób całkowity strumień, działający na obwód, będzie

$$\Phi = 2Il \left(1 + 2 \lg_n \frac{2a}{d} \right),$$

skąd znajdujemy indukcyjność całej linii w jednostkach *CGS*.

$$L = \frac{\Phi}{I} = \left(2 + 4 \lg_n \frac{2a}{d} \right) l.$$

Zakładając w tym wzorze $l = 1 \text{ km} = 10^5 \text{ cm}$ i wyrażając L w $mH = 10^6 \text{ cm}$, otrzymamy

$$L = \left(0,2 + 0,4 \lg_n \frac{2a}{d} \right) \frac{mH}{\text{km}}. \quad (15)$$

Przy wielkiej częstotliwości prądu zmiennego, wskutek zjawiska naskórkowości, nie cały przekrój przewodu przyjmuje udział w przepuszczaniu prądu. Jeżeli założymy, że prąd przepływa tylko po powierzchni przewodu, co może mieć miejsce przy bardzo wielkiej częstotliwości, będziemy musieli uwzględnić tylko strumień magnetyczny Φ_2 ; wtedy całkowity strumień będzie

$$\Phi = 2 \Phi_2 = 4 I l \cdot \lg_n \frac{2a}{d},$$

$$L = 4 l \cdot \lg_n \frac{2a}{d},$$

albo

$$L = 0,4 \lg_n \frac{2a}{d} \frac{mH}{km}. \quad (16)$$

Zwykle przyjmuje się do obliczeń wartość średnią ze wzorów (15) i (16), czyli

$$L = \left(0,1 + 0,4 \lg_n \frac{2a}{d} \right) \frac{mH}{km}, \quad (17)$$

albo, po wprowadzeniu zwykłych logarytmów,

$$L = \left(0,1 + 0,92 \lg \frac{2a}{d} \right) \frac{mH}{km}. \quad (18)$$

Ten wzór może być zastosowany zarówno do linii kablowej, zawierającej dwa jednożyłowe kable obołowione, lecz nie opancerzone. Również wzór ten nadaje się do kabla dwużyłowego skręconego opancerzonego; żelazo pancerza bowiem bardzo nieznacznie mogłoby wpływać na indukcyjność linii, gdyż w każdej chwili w obydwóch przewodach prądy mają wartości jednakowe, zaś kierunki przeciwne, więc nie powinno zachodzić magnesowania się żelaza pancerza.

§ 74. Indukcyjność linii jedнопrzewodowej (drugi przewód ziemia).

Układ taki można zastąpić za pomocą metody Lorda Kelvina przez linię dwuprzewodową (rys. 164), przytem drugi umyślony przewód stanowi zwierciadlane odbicie danego przewodu. Oznaczając przez h wysokość zawieszenia przewodu nad ziemią, zaś

przez d jego średnicę, otrzymamy odległość między przewodami $a=2h$. Ponieważ w rzeczywistości mamy jeden przewód, który daje połowę strumienia całkowitego linii dwuprzewodowej, przeto we wzorze (18) musimy założyć $a=2h$ i wszystko pomnożyć przez $\frac{1}{2}$; wobec tego dla rozpatrywanej linii

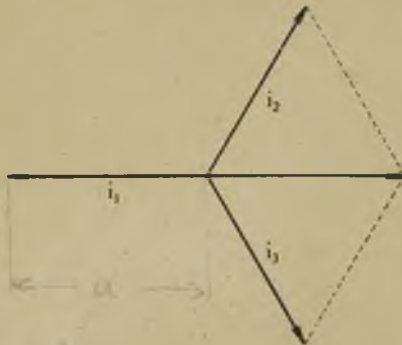
$$L = \left(0,05 + 0,46 \lg \frac{4h}{d} \right) \frac{mH}{km}$$



Rys. 164.

§ 75. Indukcyjność linii trzyprzewodowej prądu trójfazowego.

Jeżeli mamy układ, zawierający trzy przewody prądu trójfazowego, symetrycznie ułożone, wtedy we wszystkich trzech przewodach w każdej chwili będą płynęły prądy, suma których równa jest zeru. Z tego wynika, że w każdej chwili prąd w jednym z przewodów co do wartości swej równy jest sumie prądów, płynących w dwóch pozostałych przewodach. Wobec tego w każdej chwili strumień magnetyczny, wywołany przez dwa przewody, równy jest strumieniowi, wywołanemu przez trzeci przewód. Można więc uważać dwa przewody pod względem działania zewnętrznego za równoznaczne z trzecim i zamienić dwa przewody przez jeden równoważny (rys. 165); wtedy otrzymamy linię dwuprzewodową, gdy na każdy przewód przypada połowa całkowitego



Rys. 165.

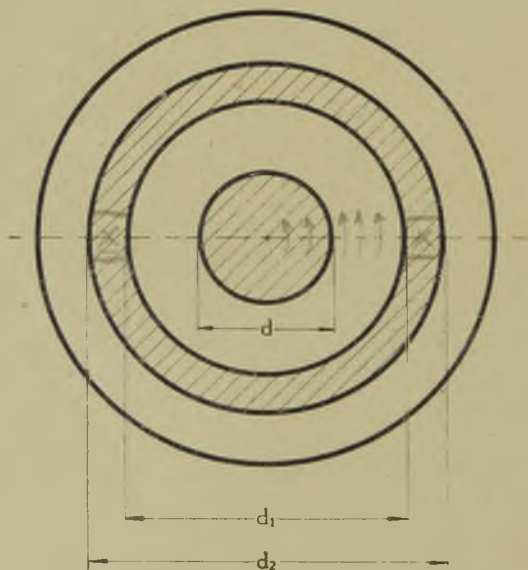
strumienia magnetycznego. Możemy więc zastosować dla indukcyjności ten sam wzór (18), biorąc dla każdego przewodu połowę wartości t. j.

$$L = \left(0,05 + 0,46 \lg \frac{2a}{d} \right) \frac{mH}{km}$$

Taki wzór możemy stosować zarówno dla linii napowietrznej, jak i do kabla trójżyłowego skręconego.

§ 76. Indukcyjność kabla dwużyłowego koncentrycznego.

Oznaczmy przez d średnicę wewnętrznego przewodu, zaś przez d_1 i d_2 średnicę wewnętrzną i zewnętrzną drugiego przewodu koncentrycznego (rys. 166).



Rys. 166.

W dowolnym punkcie, znajdującym się w odległości $x \ll \frac{d_1}{2}$ od osi kabla, natężenie pola magnetycznego będzie zależało wyłącznie od prądu wewnętrznego przewodu, ponieważ prąd zewnętrzny pola

magnetycznego wewnątrz nie daje. Dla punktów zaś znajdujących się poza zewnętrznym przewodem, dla których $x \geq \frac{d_2}{2}$, natężenie pola magnetycznego będzie równe zero; rzeczywiście, natężenie to będzie wypadkiem dwóch natężeń pól, powstających od prądów $+I$ oraz $-I$, płynących w obu przewodach; pierwsze będzie równe $+\frac{2I}{x}$, drugie $-\frac{2I}{x}$, bo odległość mierzy się od osi przewodu, a w tym przypadku osie są wspólne.

Musimy więc rozpatrywać natężenie pola

1) dla $0 < x \leq \frac{d}{2}$.

2) dla $\frac{d}{2} \leq x \leq \frac{d_1}{2}$,

3) dla $\frac{d_1}{2} \leq x \leq \frac{d_2}{2}$;

$\frac{d}{2} \leq x < \frac{d_2}{2}$

w pierwszym przypadku, według wzoru (14),

$$H'_x = \frac{8xI}{d^2},$$

w drugim

$$H_x'' = \frac{2I}{x},$$

zaś w trzecim, to znaczy w masie zewnętrznego przewodu koncentrycznego, działa prąd wewnętrznego przewodu $+I$ oraz część prądu własnego (rys. 167), mianowicie

$$I_x = \frac{-I}{\frac{\pi d_2^2}{4} - \frac{\pi d_1^2}{4}} \cdot \pi \left(x^2 - \frac{d_1^2}{4} \right) = I \frac{d_2^2 - 4x^2}{d_2^2 - d_1^2};$$

wypadkowy prąd będzie

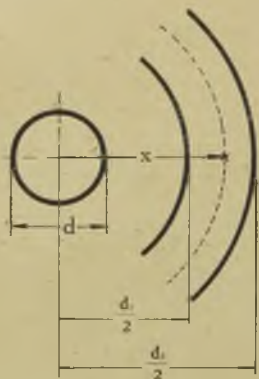
$$I_x = I \left(1 - \frac{d_1^2 - 4x^2}{d_2^2 - d_1^2} \right) = I \frac{d_2^2 - 4x^2}{d_2^2 - d_1^2};$$

wobec tego

$$H_x''' = \frac{2I_x}{x} = \frac{2I(d_2^2 - 4x^2)}{x(d_2^2 - d_1^2)}.$$

$H_x''' = -\frac{4x^2 - d_1^2}{d_2^2 - d_1^2}$

Dla obliczenia całkowitego strumienia magnetycznego, objętego dwoma przewodnikami kabla o długości l , obliczymy strumienie w oddzielnych częściach kabla, a więc



Rys. 167.

dla wartości x od 0 do $\frac{d}{2}$

$$\Phi_1 = l \int_0^{\frac{d}{2}} H'_x dx = l \int_0^{\frac{d}{2}} \frac{8I}{d^2} x dx = Il;$$

dla wartości x od $\frac{d}{2}$ do $\frac{d_1}{2}$

$$\Phi_2 = l \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{d_1}{2}} H_x'' dx = l \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{d_1}{2}} \frac{2I}{x} dx = 2Il \cdot \lg_n \frac{d_1}{d},$$

wreszcie dla wartości x od $\frac{d_1}{2}$ do $\frac{d_2}{2}$

$$\begin{aligned} \Phi_3 &= l \int_{\frac{d_1}{2}}^{\frac{d_2}{2}} H_x''' dx = l \int_{\frac{d_1}{2}}^{\frac{d_2}{2}} \frac{2I}{x} \frac{d_2^2 - 4x^2}{d_2^2 - d_1^2} dx = \\ &= \frac{2Il}{d_2^2 - d_1^2} \left[d_2^2 \int_{\frac{d_1}{2}}^{\frac{d_2}{2}} \frac{dx}{x} - 4 \int_{\frac{d_1}{2}}^{\frac{d_2}{2}} x dx \right] = \\ &= \frac{2Il}{d_2^2 - d_1^2} \left[d_2^2 \lg_n \frac{d_2}{d_1} - \frac{d_2^2 - d_1^2}{2} \right] = \frac{2Il d_2^2}{d_2^2 - d_1^2} \lg_n \frac{d_2}{d_1} - Il. \end{aligned}$$

Dodając do siebie te trzy strumienie, znajdziemy całkowity strumień

$$\Phi = 2Il \left[\lg_n \frac{d_1}{d} + \frac{d_2^2}{d_2^2 - d_1^2} \lg_n \frac{d_2}{d_1} \right],$$

skąd

$$L = 2l \left[\lg_n \frac{d_1}{d} + \frac{d_2^2}{d_2^2 - d_1^2} \lg_n \frac{d_2}{d_1} \right]. \quad (19)$$

$$2l \left[\lg \frac{d_1}{d} + \frac{d_2^2}{d_2^2 - d_1^2} \lg \frac{d_2}{d_1} \right] = 2l \left[\lg \frac{d_1}{d} - \lg \frac{d_1}{d_1} + \frac{d_2^2}{d_2^2 - d_1^2} \lg \frac{d_2}{d_1} \right] =$$

$$2l \left[\lg \frac{d_1}{d} + \left(\frac{d_2^2}{d_2^2 - d_1^2} - 1 \right) \lg \frac{d_1}{d_1} \right] = 2l \left[\lg \frac{d_1}{d} + \frac{d_1^2}{d_2^2 - d_1^2} \lg \frac{d_2}{d_1} \right]$$

Jeżeli założyć, jak to czyniliśmy dla innych linii elektrycznych, że wskutek naskórkowości prąd przepływa tylko po powierzchni przewodów, wtedy wzięlibyśmy tylko strumień

$$\Phi = l \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{d_1}{2}} \frac{2I}{x} dx = 2Il \lg_n \frac{d_1}{d}$$

oraz

$$L = 2l \cdot \lg_n \frac{d_1}{d} \quad (20)$$

W praktyce bierzemy zwykle średnią z dwóch wartości (19) i (20), która wyniesie

$$L = 2l \left[\lg_n \frac{d_1}{d} + \frac{1}{2} \frac{d_2^2}{d_2^2 - d_1^2} \lg_n \frac{d_2}{d_1} \right],$$

zaś dla $l = 1 \text{ km}$ i L , wyrażonego w mH

$$L = 0,2 \left[\lg_n \frac{d_1}{d} + \frac{1}{2} \frac{d_2^2}{d_2^2 - d_1^2} \lg_n \frac{d_2}{d_1} \right] \frac{mH}{km}$$

ROZDZIAŁ XI.

PRZEWODY DŁUGIE.

§. 77. Wielkości charakterystyczne.

Dotychczas w obwodach prądu zmiennego zakładaliśmy, że oporność czynna, pojemność i indukcyjność są skupione w poszczególnych miejscach obwodu. W urządzeniach elektrycznych mamy często do czynienia z temi wielkościami rozłożonemi w przewodach wzdłuż obwodu. W przewodach krótkich, łączących źródła z odbiornikiem, wpływ pojemności i indukcyjności samych przewodów jest zwykle nieznaczny, natomiast w przewodach dłuższych musimy te wielkości uwzględniać w obliczeniach.

Zajmiemy się tylko przypadkiem, gdy rozłożenie pojemności i indukcyjności wzdłuż całej linii jest równomierne.

Przy znacznej długości przewodów należy się liczyć jeszcze ze stratami, spowodowanemi przez niedoskonałość izolacji, przez tak zwaną histerezę dielektryczną, wreszcie przez wyładowanie elektryczności czyli tak zwany ulot w rozmaitych postaciach aż do powstania korony świetlnej. Straty te, o czem była mowa w § 40, powodują upływ prądu i ten prąd upływowy I_u , spowodowany napięciem U , określa się wzorem

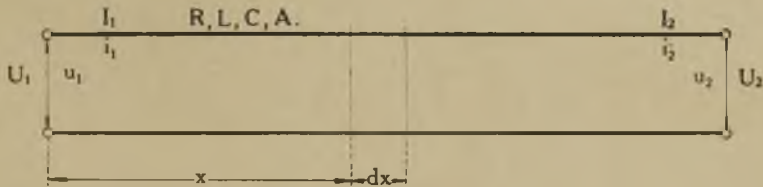
$$I_u = A U,$$

gdzie współczynnik proporcjonalności A nazywa się upływnością linii.

Oporność rzeczywistą, indukcyjność, pojemność i upływność przewodu podajemy w odniesieniu do jednostki długości linii (w praktyce na 1 km) i oznaczamy przez R , L , C i A . Linja zatem o długości l posiada oporność rzeczywistą Rl , indukcyjność Ll , pojemność Cl i upływność Al .

§ 78. Równania zasadnicze.

Rozpatrzmy linię dwuprzewodową, na początku której (u źródła) wartości chwilowe napięcia i prądu, wypływającego na linię, są u_1 i i_1 , zaś wartości skuteczne U_1 i I_1 ; na końcu (u odbiornika) oznaczmy te wielkości odpowiednio przez u_2 , i_2 , U_2 i I_2 (rys. 168). Rozpatrzmy odcinek tej linii nieskończenie małej dłu-



Rys. 168.

gości dx , odległy o x od jej początku. Niech wartości chwilowe napięcia i prądu w tem miejscu będą u i i , skuteczne U i I . Oporność, indukcyjność, pojemność i upływność odcinka dx będą miały wartości Rdx , Ldx , Cdx i Adx .

Napięcie u i prąd i są funkcjami dwóch zmiennych: czasu t oraz odległości x . Na rozpatrywanym odcinku dx zachodzi zmiana wartości zarówno napięcia, jak i natężenia prądu. Idąc w kierunku dodatnim, t. j. od strony źródła do odbiornika, będziemy mieli na początku tego odcinka napięcie u i prąd i , zaś w końcu odcinka napięcie $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$ oraz prąd $i + \frac{\partial i}{\partial x} dx$. Zmiana tych wielkości

wyniesie wobec tego dla napięcia

$$u - \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) = - \frac{\partial u}{\partial x} dx;$$

dla prądu

$$i - \left(i + \frac{\partial i}{\partial x} dx \right) = - \frac{\partial i}{\partial x} dx.$$

Zmiana napięcia spowodowana jest spadkiem napięcia na oporności rzeczywistej i oporności indukcyjnej badanego odcinka i równa się sumie tych spadków napięć.

Możemy więc napisać

$$- \frac{\partial u}{\partial x} dx = R dx \cdot i + L dx \cdot \frac{\partial i}{\partial t}.$$

Zmiana wartości natężenia prądu równa się sumie prądu upływu i prądu pojemnościowego odcinka dx . Pierwszy równy jest $A dx \cdot u$, drugi $C dx \cdot \frac{\partial u}{\partial t}$. Wobec tego będziemy mieli

$$-\frac{\partial i}{\partial x} dx = A dx \cdot u + C dx \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Z tych równań, po skróceniu przez dx , otrzymamy

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = Ri + L \frac{\partial i}{\partial t}; \quad (1)$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = Au + C \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (2)$$

§ 79. Rozwiązanie metodą symboliczną.

Równania powyższe będziemy rozwiązywali ogólnie przy badaniu prądów nieustalonych. Dla prądów ustalonych możemy zagadnienie znacznie uprościć. Rozpatrując mianowicie prąd sinusoidalny, możemy zamiast wartości chwilowych wprowadzić wartości skuteczne, stosując metodę symboliczną. Wartości skuteczne, jako niezależne od czasu, będą funkcjami tylko odległości x , więc, zamiast równań o pochodnych cząstkowych, otrzymamy równania o pochodnych zwykłych.

W tym celu do równań (1) i (2) stosujemy metodę symboliczną, wprowadzając wartości skuteczne napięcia U i natężenia prądu I w odległości x od początku linii, zakładając, że prądy ustalone są sinusoidalne (w przeciwnym razie wzory stosujemy do każdej harmonicznej), będziemy mieli

$$\hat{u} = \hat{U} \sqrt{2} e^{j\omega t}, \quad \hat{i} = \hat{I} \sqrt{2} e^{j\omega t};$$

wtedy z równań (1) i (2) otrzymamy

$$-\frac{d\hat{U}}{dx} \sqrt{2} e^{j\omega t} = R\hat{I} \sqrt{2} e^{j\omega t} + j\omega L\hat{I} \sqrt{2} e^{j\omega t},$$

$$-\frac{d\hat{I}}{dx} \sqrt{2} e^{j\omega t} = A\hat{U} \sqrt{2} e^{j\omega t} + j\omega C\hat{U} \sqrt{2} e^{j\omega t},$$

skąd po skróceniu

$$-\frac{d\hat{U}}{dx} = (R + j\omega L)\hat{I}, \quad (3)$$

$$-\frac{d\hat{I}}{dx} = (A + j\omega C)\hat{U}, \quad (4)$$

W celu otrzymania równań, zawierających tylko jedną nie-
wiadomą funkcję, bierzemy pochodne względem x , co nam da

$$-\frac{d^2\hat{U}}{dx^2} = (R + j\omega L)\frac{d\hat{I}}{dx}; \quad (5)$$

$$-\frac{d^2\hat{I}}{dx^2} = (A + j\omega C)\frac{d\hat{U}}{dx} \quad (6)$$

i podstawiamy wartości $\frac{d\hat{I}}{dx}$ i $\frac{d\hat{U}}{dx}$, otrzymane ze wzorów (3) i (4).

Wtedy będziemy mieli

$$\frac{d^2\hat{U}}{dx^2} = (R + j\omega L)(A + j\omega C)\hat{U}; \quad (7)$$

$$\frac{d^2\hat{I}}{dx^2} = (R + j\omega L)(A + j\omega C)\hat{I}. \quad (8)$$

W tych wzorach \hat{U} i \hat{I} czynią zadość temu samemu równaniu
różniczkowemu w postaci

$$\frac{d^2y}{dx^2} = k^2 y, \quad (9)$$

gdzie

$$k = \sqrt{(R + j\omega L)(A + j\omega C)}; \quad (10)$$

jego równanie charakterystyczne

$$z^2 = k^2$$

ma dwa pierwiastki

$$z_1 = +k, \quad z_2 = -k$$

i daje całkę ogólną

$$y = C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx},$$

Handwritten notes:
 $y = C e^{kx}$
 $\frac{dy}{dx} = C k e^{kx} = C k y$
 $\frac{dy}{dx} = -C k e^{-kx} = -C k y$
 $C = \sqrt{k}$
 $z_1 = k$
 $z_2 = -k$
 $y_1 = C e^{kx} = C e^{kx}$
 $y_2 = C e^{-kx} = C e^{-kx}$
 $y = y_1 + y_2$

gdzie C_1 i C_2 są stałe dowolne, e podstawa logarytmów naturalnych.
W ten sposób całka ogólna równania będzie

$$\hat{U} = C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx}. \quad (11)$$

Z równania (8) mogliśmy napisać również dla \hat{I} analogiczne rozwiązanie, w którym mielibyśmy dwie inne stałe dowolne. Dogodniej będzie uniknąć wprowadzenia nowych stałych dowolnych, otrzymując \hat{I} bezpośrednio ze wzoru (3)

$$\hat{I} = \frac{\frac{d\hat{U}}{dx}}{(R + j\omega L)}.$$

Ale ze wzoru (11)

$$\frac{d\hat{U}}{dx} = k C_1 e^{kx} - k C_2 e^{-kx},$$

więc

$$\hat{I} = \frac{-k(C_1 e^{kx} - C_2 e^{-kx})}{R + j\omega L}.$$

Podstawiając wartość k ze wzoru (10), otrzymamy

$$\begin{aligned} \hat{I} &= \frac{-\sqrt{(R + j\omega L)(A + j\omega C)}}{R + j\omega L} \cdot (C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx}) = \\ &= \sqrt{\frac{A + j\omega C}{R + j\omega L}} (-C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx}). \end{aligned} \quad (12)$$

Wzory (11) i (12) można przekształcić jeszcze inaczej, biorąc pod uwagę, że wykładnik potęgi k jest naogół liczbą zespoloną; możemy założyć

$$k = \sqrt{(R + j\omega L)(A + j\omega C)} = a + jb.$$

Dla odnalezienia współczynników a i b podnosimy obie strony do kwadratu:

$$AR - \omega^2 LC + j\omega(AL + RC) = a^2 - b^2 + j2ab,$$

skąd

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= AR - \omega^2 LC, \\ 2ab &= \omega(AL + RC). \end{aligned} \quad (13)$$

Następnie, w ostatnich równaniach podnosimy obie strony do kwadratu i dodajemy:

$$\begin{aligned}
 + \quad a^4 - 2a^2b^2 + b^4 &= A^2R^2 - 2\omega^2ARLC + \omega^4L^2C^2; \\
 4a^2b^2 &= \omega^2A^2L^2 + 2\omega^2ARLC + \omega^4R^2C^2; \\
 (a^2 + b^2)^2 &= A^2(R^2 + \omega^2L^2) + \omega^2C^2(R^2 + \omega^2L^2) = \\
 &= (A^2 + \omega^2C^2)(R^2 + \omega^2L^2).
 \end{aligned}$$

Wyciągając pierwiastek z obu stron powyższego równania otrzymamy

$$a^2 + b^2 = \sqrt{(A^2 + \omega^2C^2)(R^2 + \omega^2L^2)}. \quad (14)$$

Dodając i odejmując stronami równania (13) i (14), dzieląc następnie przez 2 i wyciągając pierwiastek, otrzymamy

$$a = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \sqrt{(A^2 + \omega^2C^2)(R^2 + \omega^2L^2)} + AR - \omega^2LC \right\}}; \quad (15)$$

$$b = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \sqrt{(A^2 + \omega^2C^2)(R^2 + \omega^2L^2)} - AR + \omega^2LC \right\}}. \quad (16)$$

Na zasadzie wzoru Eulera możemy napisać

$$\begin{aligned}
 e^{kx} &= e^{ax+jbx} = e^{ax}(\cos bx + j \sin bx), \\
 e^{-kx} &= e^{-ax-jbx} = e^{-ax}(\cos bx - j \sin bx).
 \end{aligned}$$

Oznaczmy

$$\sqrt{\frac{R + j\omega L}{A + j\omega C}} = \hat{Z}. \quad (17)$$

Symbol \hat{Z} nazywamy opornością charakterystyczną lub opornością falową.

Podstawiając powyższe wzory do równań (11) i (12), otrzymamy

$$\hat{U} = C_1 e^{ax}(\cos bx + j \sin bx) + C_2 e^{-ax}(\cos bx - j \sin bx), \quad (18)$$

$$\hat{I} \hat{Z} = -C_1 e^{ax}(\cos bx + j \sin bx) + C_2 e^{-ax}(\cos bx - j \sin bx). \quad (19)$$

§ 80. Stałe całkowania.

Założmy, że mamy dane napięcie i prąd na początku linii, mianowicie dla $x=0$

$$\hat{U} = \hat{U}_1, \quad \hat{I} = \hat{I}_1.$$

Wtedy wzory (18) i (19) dają

$$\hat{U}_1 = C_1 + C_2,$$

$$\hat{I}_1 \cancel{W} = -C_1 + C_2,$$

skąd

$$C_2 = \frac{\hat{U}_1 + \hat{I}_1 \cancel{W}}{2}, \quad C_1 = \frac{\hat{U}_1 - \hat{I}_1 \cancel{W}}{2},$$

więc ostatecznie

$$\begin{aligned} \hat{U} = \frac{1}{2} \left\{ (\hat{U}_1 - \hat{I}_1 \cancel{W}) e^{ax} (\cos bx + j \sin bx) + \right. \\ \left. + (\hat{U}_1 + \hat{I}_1 \cancel{W}) e^{-ax} (\cos bx - j \sin bx) \right\}; \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \hat{I} \cancel{W} = \frac{1}{2} \left\{ -(\hat{U}_1 - \hat{I}_1 \cancel{W}) e^{ax} (\cos bx + j \sin bx) + \right. \\ \left. + (\hat{U}_1 + \hat{I}_1 \cancel{W}) e^{-ax} (\cos bx - j \sin bx) \right\}. \end{aligned} \quad (21)$$

Często przy projektowaniu linii elektrycznej zadane są napięcie i prąd w miejscu zużycia energii, czyli \hat{U}_2 i \hat{I}_2 . W tym przypadku dogodniej jest obliczać odległość x nie od początku linii, lecz od jej końca. Również stałe C_1 i C_2 należy wtedy określić przez \hat{U}_2 i \hat{I}_2 . W takim razie we wzorach (18) i (19) trzeba x zmienić na $-x$, gdyż sposób rozumowania przy wyprowadzaniu tych wzorów pozostanie ten sam, tylko odległość odmierza się w kierunku przeciwnym. Warunki dla określenia stałych C_1 i C_2 będą następujące: dla $x=0$, $\hat{U} = \hat{U}_2$; $\hat{I} = \hat{I}_2$. Zmieniając we wzorach (18) i (19) znak przy x i zakładając $x=0$ i odpowiednie wartości U i I , będziemy mieli

$$\hat{U}_2 = C_1 + C_2,$$

$$\hat{I}_2 \cancel{W} = C_2 - C_1,$$

skąd

$$C_2 = \frac{\hat{U}_2 + \hat{I}_2 \cancel{W}}{2}, \quad C_1 = \frac{\hat{U}_2 - \hat{I}_2 \cancel{W}}{2},$$

i po podstawieniu tych wartości do wzorów (18) i (19)

$$\hat{U} = \frac{1}{2} \left\{ (\hat{U}_2 + \hat{I}_2 \hat{W}) e^{ax} (\cos bx + j \sin bx) + \right. \\ \left. + (\hat{U}_2 - \hat{I}_2 \hat{W}) e^{-ax} (\cos bx - j \sin bx) \right\}, \quad (22)$$

$$\hat{I} \hat{W} = \frac{1}{2} \left\{ (\hat{U}_2 + \hat{I}_2 \hat{W}) e^{ax} (\cos bx + j \sin bx) - \right. \\ \left. - (\hat{U}_2 - \hat{I}_2 \hat{W}) e^{-ax} (\cos bx - j \sin bx) \right\}. \quad (23)$$

W dalszych zagadnieniach będziemy przeważnie korzystali z tych ostatnich wzorów.

Wzory (20) (21) (22) i (23) można napisać w innej postaci, wprowadzając funkcje hiperboliczne.

Ponieważ

$$e^{\pm ax} (\cos bx \pm j \sin bx) = e^{\pm kx},$$

następnie

$$\frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2} = \cos \text{hip } kx,$$

$$\frac{e^{kx} - e^{-kx}}{2} = \sin \text{hip } kx,$$

otrzymamy z (20) i (21)

$$\hat{U} = \hat{U}_1 \cos \text{hip } kx - \hat{I}_1 \hat{W} / \sin \text{hip } kx, \quad (24)$$

$$\hat{I} \hat{W} = -\hat{U}_1 \sin \text{hip } kx + \hat{I}_1 \hat{W} \cos \text{hip } kx, \quad (25)$$

oraz z (22) i (23)

$$\hat{U} = \hat{U}_2 \cos \text{hip } kx + \hat{I}_2 \hat{W} \sin \text{hip } kx, \quad (26)$$

$$\hat{I} \hat{W} = \hat{U}_2 \sin \text{hip } kx + \hat{I}_2 \hat{W} \cos \text{hip } kx. \quad (27)$$

§ 81. Fale napięcia i prądu.

W równaniach powyższych \hat{U}_2 oraz $\hat{I}_2 \hat{W}$ są wektorami; ich sumy i różnice są zatem też wektorami. Oznaczmy

$$\frac{1}{2} (\hat{U}_2 + \hat{I}_2 \hat{W}) = \hat{P}_1, \quad (28)$$

$$\frac{1}{2} (\hat{U}_2 - \hat{I}_2 \hat{Z}) = \hat{P}_2. \quad (29)$$

Wartości chwilowe wielkości P_1 i P_2 mają przebieg sinusoidalny, gdyż taki przebieg mają wartości chwilowe wielkości składowych.

Możemy więc napisać dla wartości chwilowych P_1 i P_2

$$p_1 = P_{1m} \sin(\omega t + \psi_1), \quad p_2 = P_{2m} \sin(\omega t + \psi_2).$$

Równania (22) i (23), po uwzględnieniu (28) i (29) przyjmą postać

$$\begin{aligned} \hat{U} &= P_1 e^{ax} \cdot e^{jbx} + P_2 e^{-ax} e^{-jbx}, \\ \hat{I} \hat{Z} &= P_1 e^{ax} e^{jbx} - P_2 e^{-ax} e^{-jbx}; \end{aligned}$$

przechodząc od wartości skutecznych do wartości chwilowych, napiszemy symbolicznie

$$\hat{u} = P_{1m} e^{ax} e^{j(\omega t + \psi_1 + bx)} + P_{2m} e^{-ax} e^{j(\omega t + \psi_2 - bx)},$$

co w zwykłym rachunku daje

$$u = P_{1m} e^{ax} \sin(\omega t + \psi_1 + bx) + P_{2m} e^{-ax} \sin(\omega t + \psi_2 - bx), \quad (30)$$

$$iZ = P_{1m} e^{ax} \sin(\omega t + \psi_1 + bx) - P_{2m} e^{-ax} \sin(\omega t + \psi_2 - bx). \quad (31)$$

Wartość chwilowa napięcia prądu oraz iloczyn wartości chwilowej jego natężenia przez oporność charakterystyczną linii są sumą, względnie różnicą 2-ch wyrazów postaci

$$P_m e^{\pm ax} \sin(\omega t + \psi \pm bx).$$

W każdym z nich jeden czynnik P_m ma wartość stałą (niezależną od czasu, ani od przestrzeni); drugi $e^{\pm ax}$ zależy jedynie od odległości. Wobec tego wartość największa (amplituda) napięcia oraz natężenia prądu jest funkcją tylko odległości. Argument $(\omega t + \psi \pm bx)$ zależy zarówno od odległości jak od czasu i zmienia się okresowo; to samo wobec tego można powiedzieć o wartościach napięcia oraz natężenia prądu, inaczej mówiąc, napięcie i natężenie prądu wzdłuż linii rozchodzą się falowo.

Przystąpimy do obliczenia długości i szybkości tych fal. Dla znalezienia długości zbadamy, w jakiej odległości znajdują się najbliższe punkty, w których składniki napięcia lub prądu w do-

wolnej chwili mają tę samą fazę. Na to trzeba, żeby argumenty funkcyj sinusoidalnych różniły się o 2π . Przypuśćmy, że argument $\omega t + \psi \pm bx$ wzrośnie o 2π , kiedy x wzrośnie o λ ; wtedy

$$\begin{aligned}\omega t + \psi \pm b(x + \lambda) &= \omega t + \psi \pm bx \pm 2\pi, \\ \pm b\lambda &= \pm 2\pi, \\ \lambda &= \frac{2\pi}{b}.\end{aligned}\tag{32}$$

To znaczy, że wartości składników napięcia oraz natężenia prądu są w jednakowej fazie w punktach, najbliższa odległość których wynosi $\lambda = \frac{2\pi}{b}$, czyli taka jest długość fali napięcia lub prądu; b nazywamy współczynnikiem długości fali.

Dla znalezienia prędkości rozchodzenia się fal, załóżmy, że w danym punkcie x w pewnej chwili t mamy określoną fazę składników napięcia lub prądu i że tę samą fazę mamy po czasie dt w punkcie odległym o dx , czyli w czasie $t + dt$ i w punkcie $x + dx$. Przyrównyując argumenty w obu przypadkach, otrzymamy

$$\omega t + \psi \pm bx = \omega(t + dt) + \psi \pm b(x + dx),$$

$$\omega t + \psi \pm bx = \omega t + \omega dt + \psi \pm bx \pm bdx,$$

skąd

$$\omega dt = \mp bdx.$$

Prędkość rozchodzenia się fali

$$v = \frac{dx}{dt} = \mp \frac{\omega}{b}.$$

Pomijając znak,

$$v = \frac{\omega}{b} = \frac{2\pi f}{b} = \frac{2\pi}{bT} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f,\tag{33}$$

gdzie f oznacza częstotliwość, T — okres prądu zmiennego. Wynika stąd, że prędkość rozchodzenia się fali równa się iloczynowi długości fali przez częstotliwość prądu zmiennego; inaczej, w ciągu jednego okresu prąd przebiega długość jednej fali. Znak przy prędkości v wskazuje na kierunek rozchodzenia się fali: czy w kierunku dodatnich x , czy też ujemnych.

Rozpatrując wzór (22) widzimy, że dla napięcia \hat{U} otrzymujemy sumę dwóch fal, przebiegających w rozmaitych kierunkach z jednakową prędkością; jedna fala przebiega od początku linii do jej końca, druga odwrotnie. Pierwsza nazywa się falą główną, druga — falą odbitą. Czynnikiem $e^{\pm ax}$ wskazuje, że amplituda, czyli wartość największa, zmienia się w zależności od odległości; a jest to współczynnik tłumienia. Dla prądu \hat{I} , jak widać ze wzoru (23) otrzymujemy różnicę dwóch fal, przebiegających tak samo, jak fale napięcia w dwóch przeciwnych kierunkach, lecz ich amplitudy są zmniejszone w stosunku oporności charakterystycznej \hat{Z} . Współczynnik $k = a + jb$ nazywamy stałą rozchodzenia się fal.

Współczynnik tłumienia wielkości fizycznych przyjęto określać przez logarytm ilorazu dwóch wartości rozpatrywanej wielkości, np. logarytm ilorazu dwóch napięć, dwóch prądów i t. p. Gdy stosujemy logarytmy naturalne, otrzymujemy rezultat w „neperach”; w ten sposób

$$a = \lg_n \frac{u_1}{u_2} \text{ neperów}$$

stanowi współczynnik tłumienia napięcia; z tego wynika, że

$$\frac{u_1}{u_2} = e^a.$$

Oprócz tego została wprowadzona inna jednostka tłumienia z zastosowaniem logarytmów dziesiętnych z określenia współczynnika tłumienia mocy; jednostkę tę nazwano „bel”, przyczem w użyciu dogodniejszym okazał się „decybel” czyli 10 belów; mamy więc

$$a = 10 \lg_{10} \frac{P_1}{P_2} \text{ decybelów.}$$

Ponieważ moc jest proporcjonalna do kwadratu napięcia lub prądu, przeto współczynnik tłumienia napięcia wyrażony w decybelach będzie

$$a' = 20 \lg_{10} \frac{u_1}{u_2} \text{ decybelów,}$$

czyli

$$\frac{u_1}{u_2} = 10^{\frac{a'}{20}};$$

przez porównanie tego samego ilorazu, wyrażonego przez a i przez a' , znajdujemy

$$10^{\frac{a'}{20}} = e^a,$$

skąd

$$\frac{a'}{20} = a \lg_{10} e,$$

$$a' = 20 a \lg_{10} e = 8,686 a;$$

z tego wynika, że

$$1 \text{ neper} = 8,686 \text{ decybelów.}$$

§ 82. Linja bez strat.

Dla bliższego zbadania otrzymanych wzorów rozpatrzmy najpierw rozchodzenie się prądu w linii bez strat, to jest takiej, w której niema oporności rzeczywistej, ani upływności, a jedynie indukcyjność i pojemność. A więc

$$R = 0, \quad A = 0. \quad (34)$$

Oporność charakterystyczna takiej linii będzie

$$\cancel{W} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{A + j\omega C}} = \sqrt{\frac{j\omega L}{j\omega C}} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \cancel{W}; \quad (35)$$

w tym przypadku jest ona liczbą rzeczywistą. Znajdźmy współczynniki a i b

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \sqrt{(A^2 + \omega^2 C^2)(R^2 + \omega^2 L^2)} + AR - \omega^2 LC \right\}} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\omega^2 C^2 \cdot \omega^2 L^2} - \omega^2 LC \right\}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \omega^2 LC - \omega^2 LC \right\}} = 0, \quad (36) \end{aligned}$$

$$b = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \sqrt{(A^2 + \omega^2 C^2)(R^2 + \omega^2 L^2)} - AR + \omega^2 LC \right\}} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\omega^2 C^2 \cdot \omega^2 L^2 + \omega^2 L C} \right\}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \omega^2 L C + \omega^2 L C \right\}} \\
 &= \sqrt{\frac{1}{2} \cdot 2 \omega^2 L C} = \sqrt{\omega^2 L C} = \omega \sqrt{L C}. \quad (37)
 \end{aligned}$$

Wobec tego

$$e^{ax} = e^{-ax} = e^0 = 1.$$

Maksymalne wartości składników napięcia i natężenia prądu nie zmieniają się z odległością, czyli niema tłumienia. Prędkość rozchodzenia się fal

$$v = \frac{\omega}{b} = \frac{\omega}{\omega \sqrt{L C}} = \frac{1}{\sqrt{L C}} \quad (38)$$

nie zależy od częstotliwości prądu.

W liniach wykonanych, indukcyjność i pojemność zmieniają się w niewielkich granicach: w liniach napowietrznych indukcyjność jest większa, pojemność zaś mniejsza niż w liniach kablowych.

Prędkość rozchodzenia się fal w liniach napowietrznych jest bliska prędkości światła, czyli ok. $3 \cdot 10^5$ km/sek; w liniach kablowych jest ona mniejsza i wynosi ok. $1,2 \cdot 10^5$ km/sek.

Przy częstotliwości $f = 50$, przeważnie spotykanej w urządzeniach prądu silnego, długość fali dla linii napowietrznej

$$\lambda = v T \cong 300.000 \cdot \frac{1}{50} \cong 6000 \text{ km}$$

dorównywa długości promienia ziemskiego. Przy częstotliwości $f = 3000$, którą mamy np. w liniach telefonicznych

$$\lambda = v T \cong 300.000 \cdot \frac{1}{3000} \cong 100 \text{ km}.$$

Równania (22) i (23) w przypadku linii bez strat przekształcają się wobec $e^{ax} = e^{-ax} = 1$; $\tilde{W} = \check{W}$ na

$$\begin{aligned}
 \hat{U} &= \frac{1}{2} \left\{ (\hat{U}_2 + \hat{I}_2 \check{W}) (\cos bx + j \sin bx) + (\hat{U}_2 - \hat{I}_2 \check{W}) (\cos bx - j \sin bx) \right\} = \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ 2 \hat{U}_2 \cos bx + 2j \hat{I}_2 \check{W} \sin bx \right\} = \hat{U}_2 \cos bx + j \hat{I}_2 \check{W} \sin bx,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{I}W &= \frac{1}{2} \left\{ (\hat{U}_2 + \hat{I}_2 W) (\cos bx + j \sin bx) - (\hat{U}_2 - \hat{I}_2 W) (\cos bx - j \sin bx) \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ 2 \hat{I}_2 W \cos bx + 2 j \hat{U}_2 \sin bx \right\} = \hat{I}_2 W \cos bx + j \hat{U}_2 \sin bx, \end{aligned}$$

czyli ostatecznie

$$\hat{U} = \hat{U}_2 \cos bx + j \hat{I}_2 W \sin bx, \quad (39)$$

$$\hat{I}W = \hat{I}_2 W \cos bx + j \hat{U}_2 \sin bx. \quad (40)$$

Wartości U i I z wyprowadzonych wzorów możemy znaleźć albo sposobem analitycznym, stosując metodę symboliczną, albo też sposobem wykreślnym.

Stosując metodę symboliczną, musimy najpierw na podstawie wiadomych L i C obliczyć oporność charakterystyczną W według wzoru (35) oraz współczynnik długości fali b ze wzoru (37); następnie dla wiadomej odległości x obliczamy bx i znajdujemy $\cos bx$ i $\sin bx$. Napięcie U_2 , prąd I_2 i współczynnik mocy $\cos \varphi_2$ na odbiorniku zakładamy jako wiadome. Za początkowy kierunek wektorów najdogodniej jest wziąć kierunek wektora U_2 ; argumentem symbolu I_2 będzie więc kąt φ_2 mierzony od początkowego kierunku wektora U_2 . Oznaczając przez ψ niewiadomy kąt pomiędzy \hat{U} i \hat{U}_2 oraz przez ψ' kąt pomiędzy I i U_2 , otrzymamy na podstawie wzorów (39) i (40)

$$\begin{aligned} \hat{U} &= U_2 \cos bx + j I_2 Z \sin bx (\cos \varphi_2 + j \sin \varphi_2) = \\ &= (U_2 \cos bx - I_2 Z \sin bx \sin \varphi_2) + j I_2 Z \sin bx \cos \varphi_2, \\ \hat{I}Z &= I_2 Z \cos bx (\cos \varphi_2 + j \sin \varphi_2) + j U_2 \sin bx = \\ &= I_2 Z \cos bx \cos \varphi_2 + j (I_2 Z \cos bx \sin \varphi_2 + U_2 \sin bx), \end{aligned}$$

skąd

$$U = \sqrt{(U_2 \cos bx + I_2 Z \sin bx \sin \varphi_2)^2 + (I_2 Z \sin bx \cos \varphi_2)^2},$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{I_2 Z \sin bx \cos \varphi_2}{U_2 \cos bx - I_2 Z \sin bx \sin \varphi_2},$$

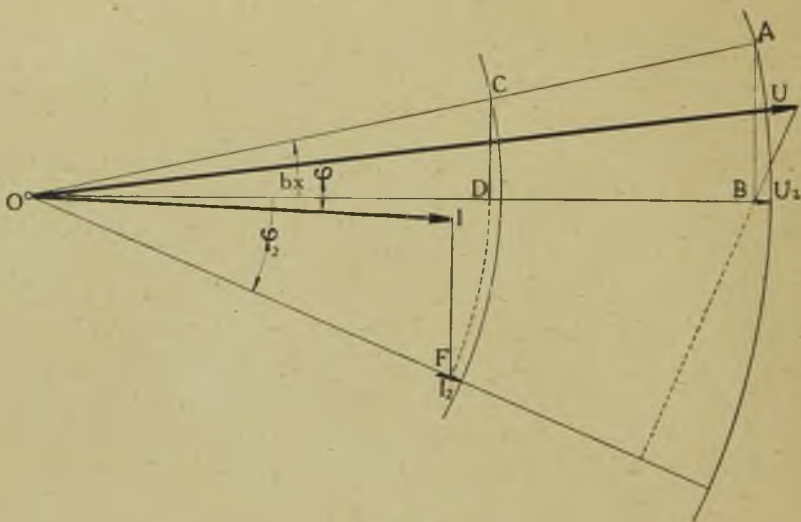
$$IZ = \sqrt{(I_2 Z \cos bx \cos \varphi_2)^2 + (I_2 Z \cos bx \sin \varphi_2 + U_2 \sin bx)^2},$$

$$\operatorname{tg} \psi' = \frac{I_2 Z \cos bx \sin \varphi_2 + U_2 \sin bx}{I_2 Z \cos bx \cos \varphi_2}$$

Kąt φ pomiędzy \hat{I} i \hat{U} znajdziemy, mając kąty ψ i ψ' , mianowicie

$$\varphi = \psi' - \psi.$$

Bardzo łatwo możemy znaleźć napięcie \hat{U} i prąd \hat{I} sposobem wykreślnym. W tym celu z dowolnego punktu O (rys. 169) przeprowadzamy dowolną linię prostą jako kierunek \hat{U}_2 i na niej od-



Rys. 169.

mierzamy w odpowiedniej skali odcinek $OU_2 = U_2$. Pod kątem φ_2 do tego wektora przeprowadzamy kierunek \hat{I}_2 i w tym kierunku odmierzymy odcinek $OI_2 = \hat{I}_2 Z$; oczywiście mnożenie wektora przez oporność charakterystyczną Z , która w tym przypadku jest wielkością rzeczywistą, daje nam wektor $\hat{I}_2 Z$, kierunek którego jest taki sam, co i kierunek wektora \hat{I}_2 . Następnie z punktu O pod kątem bx do \hat{U}_2 przeprowadzamy prostą, na której odmierzymy $OA = U_2$ i $OC = I_2 Z$, zataczając w tym celu łuki koła o promieniu OU_2 i OI_2 aż do przecięcia tej prostej. Z punktów A i C opuszczamy prostopadłe AB i CD na OU_2 . Oczywiście

$$OB = U_2 \cos bx, \quad OD = I_2 Z \cos bx,$$

$$AB = U_2 \sin bx, \quad CD = I_2 Z \sin bx;$$

znaleźliśmy więc wartości (moduły) wektorów, wchodzących do wzorów (39) i (40), teraz musimy wykonać wskazane w tych wzorach działania geometryczne, uwzględniając również kierunki wektorów.

Na podstawie wzoru (39) dla otrzymania \hat{U} musimy do $\hat{U}_2 \cos bx$ dodać geometrycznie $j I_2 Z \sin bx$; pierwszy z tych wektorów ma kierunek U_2 , więc odcinek OB odpowiada wektorowi $\hat{U}_2 \cos bx$ i co do wartości i co do kierunku.

Drugi wektor ma wartość $I_2 Z \sin bx$, odmierzoną odcinkiem CD , ale kierunek wektora $\hat{I}_2 Z \sin bx$ musi być zgodny z kierunkiem OI_2 , zaś kierunek wektora $j \hat{I}_2 Z \sin bx$ musi być wzięty pod kątem prostym naprzód do kierunku OI_2 ; z tego wynika, że od punktu B , końca wektora $\hat{U}_2 \cos bx$, przeprowadzamy wektor $BU = j \hat{I}_2 Z \sin bx$, prostopadłe do OI_2 i równy co do wartości odcinkowi CD ; łącząc O z U , otrzymujemy wektor $OU = \hat{U}$.

Analogicznie, na podstawie wzoru (40), do $\hat{I}_2 Z \cos bx$ musimy dodać geometrycznie $j \hat{U}_2 \sin bx$. Wektor $\hat{I}_2 Z \cos bx$ ma kierunek OI_2 ; przerzucając odcinek $OD = I_2 Z \cos bx$ na ten kierunek, otrzymamy $OF = \hat{I}_2 Z \cos bx$, do tego wektora dodajemy geometrycznie $FI = j \hat{U}_2 \sin bx$, mianowicie odcinek $FI = AB = U_2 \sin bx$; wektor zaś $j \hat{U}_2 \sin bx$ powinien być przeprowadzony pod kątem prostym naprzód względem wektora \hat{U}_2 , więc kierunek AB i takież sam kierunek FI odpowiada kierunkowi $j U_2 \sin bx$; łącząc wreszcie punkt I z O , otrzymamy wektor $OI = \hat{I}Z$. Za pomocą kątomierza możemy łatwo zmierzyć kąt $\varphi = \sphericalangle UOI$ przesunięcia fazy \hat{I} względem \hat{U} .

Miejszem geometrycznym końców wektora \hat{U} na powyższym wykresie przy zmianie kąta bx od 0 do 2π jest elipsa. Dla przekonania się o tem wprowadźmy do rys. 169 prostokątny układ współrzędnych (u, v) , umieszczając jego początek w punkcie O (rys. 170) i kierując oś u wzdłuż OU_2 .

Wtedy

$$\sphericalangle UBU_2 = \frac{\pi}{2} - \varphi_2.$$

Oznaczając współrzędne zmiennego punktu U przez (u, v) , będziemy mieli

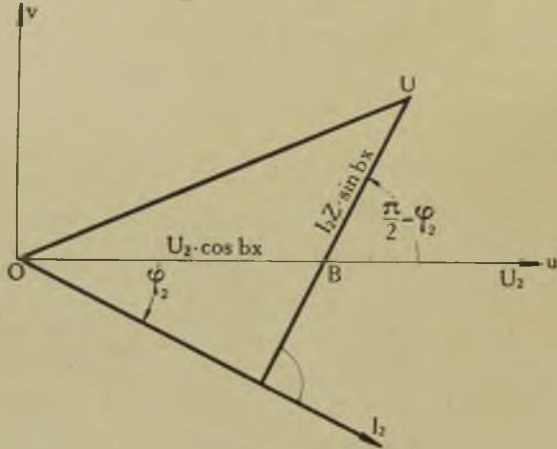
$$u = OB + BU \cos \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_2 \right) = U_2 \cos bx + I_2 Z \sin bx \sin \varphi_2, \quad (\text{I})$$

$$v = BU \sin \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_2 \right) = I_2 Z \sin bx \cos \varphi_2. \quad (\text{II})$$

Z tych równań rugujemy zmienną niezależną x . Z równania (II)

$$\sin bx = \frac{v}{I_2 Z \cos \varphi_2},$$

$$\cos bx = \sqrt{1 - \sin^2 bx} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{I_2^2 Z^2 \cos^2 \varphi_2}}.$$



Rys. 170

Podstawiamy znalezione wartości do równania (I):

$$u = U_2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{I_2^2 Z^2 \cos^2 \varphi_2}} + I_2 Z \sin \varphi_2 \cdot \frac{v}{I_2 Z \cos \varphi_2},$$

$$u = U_2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{I_2^2 Z \cos^2 \varphi_2}} + v \operatorname{tg} \varphi_2,$$

$$u - v \operatorname{tg} \varphi_2 = U_2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{I_2^2 Z \cos^2 \varphi_2}}.$$

Podnosimy obie strony do kwadratu:

$$u^2 - 2uv \operatorname{tg} \varphi_2 + v^2 \operatorname{tg}^2 \varphi_2 = U_2^2 - \frac{U_2^2 v^2}{I_2^2 Z^2 \cos^2 \varphi_2}.$$

Przenosimy wszystkie wyrazy na lewą stronę:

$$u^2 - 2uv \operatorname{tg} \varphi_2 + v^2 \left(\operatorname{tg}^2 \varphi_2 + \frac{U_2^2}{I_2^2 Z^2 \cos^2 \varphi_2} \right) - U_2^2 = 0.$$

Otrzymaliśmy równanie 2-go stopnia, niezawierające zmiennych w stopniu 1-szym, czyli równanie typu

$$A u^2 + B u v + C v^2 + F = 0.$$

Takie równanie przedstawia elipsę, jeżeli

$$B^2 - 4 AC < 0 \quad \text{oraz} \quad F < 0.$$

W naszym przypadku

$$B^2 - 4 AC = 4 \operatorname{tg}^2 \varphi_2 - 4 \operatorname{tg}^2 \varphi_2 - \frac{4 U_2^2}{I_2^2 Z^2 \cos^2 \varphi_2} = - \frac{4 U_2^2}{I_2^2 Z^2 \cos^2 \varphi_2} < 0,$$

$$F = -U_2^2 < 0;$$

wobec czego wnioskujemy, że równanie nasze przedstawia elipsę.

W szczególnym przypadku odbiornika bezindukcyjnego i bezpojemnościowego, względnie odbiornika dającego rezonans napięć, mamy:

$$\varphi_2 = 0, \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = 0, \quad \cos \varphi_2 = 1.$$

Wtedy równanie nasze przyjmie postać

$$u^2 + v^2 \frac{U_2^2}{I_1^2 Z^2} = U_2^2,$$

albo

$$\frac{u^2}{U_2^2} + \frac{v^2}{I_2^2 Z^2} = 1,$$

to znaczy, że półosiami otrzymanej elipsy są U_2 i $I_2 Z$.

Gdy przytem wyjątkowo $I_2 Z = U_2$, zamiast elipsy otrzymujemy koło. Napięcie i prąd mają wtedy wzdłuż całej linii wartość stałą.

§ 83. Linja bez strat w stanie jałowym i w stanie zwarcia.

Stan, w którym linja nie jest obciążona, to znaczy odbiornik nie jest włączony do końca linji, nazywamy stanem jałowym. W tym przypadku $I_2 = 0$. Napięcie w końcu linji zależne jest od napięcia na jej początku, więc w stanie jałowym moglibyśmy, zmieniając napięcie na początku, osiągnąć dowolną wartość na-

pięcia na końcu; dobierzmy taką wartość napięcia na początku, aby w stanie jałowym, w końcu napięcie stało się równem U_2 , które mamy przy obciążeniu; oznaczmy wtedy napięcie na początku przez U_{10} i nazwijmy go napięciem na początku w stanie jałowym. Przy takim napięciu popłynie na początku linii prąd, którego natężenie oznaczmy przez I_{10} ; będzie to prąd na początku w stanie jałowym. Dla dowolnego punktu linii w odległości x od jej końca napięcie i natężenie prądu w stanie jałowym niech wynoszą U_0 i I_0 , wtedy, zakładając we wzorach (39) i (40) $\hat{I}_2=0$, otrzymamy

$$\tilde{U}_0 = \tilde{U}_2 \cos bx, \quad (41)$$

$$\hat{I}_0 = j \tilde{U}_2 \sin bx. \quad (42)$$

Największa wartość napięcia zachodzi dla $\cos bx = \pm 1$, $bx = 0, \pi, 2\pi, \dots, k\pi$, gdzie k liczba całkowita, czyli dla $x = 0, \frac{\pi}{b}, \frac{2\pi}{b}, \dots, \frac{k\pi}{b}$. Ponieważ długość fali na podstawie wzoru (32)

wynosi $\lambda = \frac{2\pi}{b}$, przeto napięcie będzie miało największe wartości na końcu linii oraz w odległościach od końca linii, wynoszących całkowity iloraz połowy długości fali. W liniach prądu silnego, których długość jest zwykle mniejsza od połowy długości fali, napięcie wzrasta od początku linii ku końcowi, gdzie jest największe. Zjawisko to po raz pierwszy było spostrzeżone w kablu koncentrycznym przez inżyniera Ferranti na wystawie w Londynie i dla tego nazywa się zjawiskiem Ferranti'ego.

Widzimy następnie, że prąd w stanie jałowym wyprzedza napięcie o kąt prosty, czyli o $\frac{1}{4}$ okresu, otrzymując największą wartość tam, gdzie wartość napięcia przechodzi przez 0 i odwrotnie, wartość 0 tam, gdzie napięcie przechodzi przez swoją największą wartość.

Stan, w którym końce linii są ze sobą połączone bezpośrednio, czyli bez oporności, nazywamy stanem zwarcia. W tym przypadku napięcie $U_2 = 0$. Natężenie prądu w końcu linii będzie zależne od napięcia, które przyłożymy na początku. Dobierzmy taką wartość napięcia na początku, aby w stanie zwarcia natężenie prądu, płynącego w końcu linii, stało się równem I_2 , które byśmy mieli przy obciążeniu. Oznaczmy to napięcie na początku przez U_{1z} ; nazwiemy go napięciem na początku w stanie zwarcia. Przy tem napięciu na początku linii popłynie prąd, którego natę-

żenie oznaczymy przez I_{1z} ; nazwiemy go prądem na początku w stanie zwarcia. Dla dowolnego punktu linii w odległości x od jej końca napięcie i natężenie prądu w stanie zwarcia oznaczymy przez U_z i I_z ; wtedy, zakładając we wzorach (39) i (40) $U_2 = 0$, otrzymamy

$$\hat{U}_z = j \hat{I}_z Z \sin bx, \quad (43)$$

$$\hat{I}_z X = \hat{I}_z X \cos bx. \quad (44)$$

Największa wartość prądu zachodzi dla $\cos bx = 1$, czyli na końcu linii oraz w odległościach, wynoszących całkowity iloraz połowy długości fali.

Widzimy, że prąd w stanie zwarcia opóźnia się względem napięcia o kąt prosty, czyli o $1/4$ okresu, otrzymuje, podobnie jak poprzednio, największą wartość tam, gdzie wartość napięcia przechodzi przez 0 i odwrotnie, otrzymuje wartość 0 tam, gdzie napięcie przechodzi przez swoją największą wartość.

W obydwu rozpatrzonych przypadkach wektory napięć i prądów nie zmieniają swoich kierunków, inaczej mówiąc, napięcie oraz prąd mają wzdłuż całej linii tę samą fazę; zamiast elipsy otrzymujemy na wykresie linię prostą. Napięcie i prąd zmieniają tylko swoje wartości w zależności od odległości x , tworząc w ten sposób fale stojące.

Takie same zjawisko otrzymamy również w przypadku, gdy pomiędzy napięciem i prądem w końcu linii istnieje różnica faz, równa 90° , to znaczy $\cos \varphi_2 = 0$; wtedy bowiem we wzorach (39) i (40) wektory $j \hat{I}_2 Z$ będą miały kierunek wektora napięcia \hat{U}_2 , zaś wektory $j \hat{U}_2$ kierunek wektora prądu \hat{I}_2 ; więc zarówno dla napięcia, jak i dla prądu otrzymamy, jako wykres, linię prostą.

Zestawiając przypadki, gdy w linii bez strat otrzymują się fale stojące dla napięcia i prądu, możemy wyprowadzić wniosek, że takie zjawisko ma miejsce, gdy 1) $\hat{I}_2 = 0$, 2) $\hat{U}_2 = 0$ i 3) $\cos \varphi_2 = 0$, to znaczy, gdy

$$U_2 I_2 \cos \varphi_2 = 0,$$

czyli wtedy, gdy w końcu linii nie jest oddawana energia.

Z porównania wzorów (39), (41) i (43) oraz (40), (42) i (44) wynika, że

$$\hat{U} = \hat{U}_0 + \hat{U}_z,$$

$$\hat{I}Z = \hat{I}_0 Z + \hat{I}_z Z,$$

$$\hat{I} = \hat{I}_0 + \hat{I}_z.$$

To znaczy, że napięcie, względnie prąd, w stanie obciążenia są równe sumie napięć, względnie prądów, w stanie jałowym i w stanie zwarcia.

§ 84. Linja nieodkształcająca.

Zbadajmy teraz, jako szczególny przypadek, linię, której oporność rzeczywista, indukcyjność, upływność i pojemność tworzą proporcję

$$\frac{R}{L} = \frac{A}{C}, \quad (45)$$

skąd

$$AL = RC;$$

oporność charakterystyczna takiej linii będzie

$$\underline{W} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{A + j\omega C}} = \sqrt{\frac{L \left(\frac{R}{L} + j\omega \right)}{C \left(\frac{A}{C} + j\omega \right)}} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \underline{W};$$

jest ona wielkością rzeczywistą i równa się oporności charakterystycznej linii bez strat o takiejże indukcyjności i pojemności.

Obliczmy ze wzorów (14 i (15) współczynniki a i b

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ AR - \omega^2 LC + \sqrt{(A^2 + \omega^2 C^2)(R^2 + \omega^2 L^2)} \right\}} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} \left| AR - \omega^2 LC + \sqrt{\omega^2 C^2 \left(1 + \frac{A^2}{\omega^2 C^2} \right) \cdot \omega^2 L^2 \left(1 + \frac{R^2}{\omega^2 L^2} \right)} \right|}; \end{aligned}$$

z proporcji (45) mamy

$$\frac{R^2}{\omega^2 L^2} = \frac{A^2}{\omega^2 C^2}, \quad 1 + \frac{R^2}{\omega^2 L^2} = 1 + \frac{A^2}{\omega^2 C^2},$$

więc

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ AR - \omega^2 LC + \omega^2 LC \sqrt{\left(1 + \frac{R^2}{\omega^2 L^2}\right)^2} \right\}} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ AR - \omega^2 LC + \omega^2 LC \left(1 + \frac{R^2}{\omega^2 L^2}\right) \right\}} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ AR + \omega^2 LC \left(-1 + 1 + \frac{R^2}{\omega^2 L^2}\right) \right\}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ AR + \frac{CR^2}{L} \right\}}. \end{aligned}$$

Z proporcji (45)

$$A = \frac{RC}{L}, \quad AR = \frac{CR^2}{L},$$

wobec czego

$$a = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \frac{CR^2}{L} + \frac{CR^2}{L} \right\}} = \sqrt{\frac{CR^2}{L}} = R \sqrt{\frac{C}{L}}. \quad (46)$$

Ponieważ

$$W = \sqrt{\frac{L}{C}},$$

więc

$$a = \frac{R}{W}. \quad (47)$$

Spółczynnik tłumienia linii równy jest stosunkowi jej oporności rzeczywistej do oporności charakterystycznej i niezależny od ω .

$$\begin{aligned} b &= \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \omega^2 LC - AR + \sqrt{(A^2 + \omega^2 C^2)(R^2 + \omega^2 L^2)} \right\}} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \omega^2 LC - AR + \sqrt{A^2 \left(1 + \frac{\omega^2 C^2}{A^2}\right) R^2 \left(1 + \frac{\omega^2 L^2}{R^2}\right)} \right\}} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \omega^2 LC - AR + AR \sqrt{\left(1 + \frac{\omega^2 C^2}{A^2}\right) \left(1 + \frac{\omega^2 L^2}{R^2}\right)} \right\}}. \end{aligned}$$

Z proporcji (45) mamy

$$\frac{\omega^2 L^2}{R^2} = \frac{\omega^2 C^2}{A^2},$$

więc

$$\begin{aligned} b &= \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \omega^2 LC - AR + AR \sqrt{\left(1 + \frac{\omega^2 L^2}{R^2}\right)^2} \right\}} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \omega^2 LC - AR + AR \left(1 + \frac{\omega^2 L^2}{R^2}\right) \right\}} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \omega^2 LC + AR \left(-1 + 1 + \frac{\omega^2 L^2}{R^2}\right) \right\}} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \omega^2 LC + \omega^2 \frac{AL^2}{R} \right\}}. \end{aligned}$$

Z proporcji (45) mamy

$$\frac{AL}{R} = C, \quad \frac{AL^2}{R} = CL,$$

więc

$$b = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \omega^2 LC + \omega^2 LC \right\}} = \sqrt{\omega^2 LC} = \omega \sqrt{LC}. \quad (48)$$

Spółczynnik długości fali linii, czyniącej zadość proporcji (45), równy jest temu współczynnikowi linii bez strat o takiej samej indukcyjności i pojemności. Równe zatem będą również długości oraz prędkości fali w obu przypadkach.

Równania (22) i (23) przy uwzględnieniu, że Z jest liczbą rzeczywistą, przybierają postać

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \left\{ (\hat{U}_2 + \hat{I}_2 Z) e^{ax} (\cos bx + j \sin bx) + \right. \\ &\quad \left. + (\hat{U} - \hat{I}_2 Z) e^{-ax} (\cos bx - j \sin bx) \right\}, \quad (49) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{I} Z &= \frac{1}{2} \left\{ (\hat{U}_2 + \hat{I}_2 Z) e^{ax} (\cos bx + j \sin bx) - \right. \\ &\quad \left. - (\hat{U}_2 - \hat{I}_2 Z) e^{-ax} (\cos bx - j \sin bx) \right\}. \quad (50) \end{aligned}$$

Rozpatrzmy linię w stanie jałowym. Oznaczmy, jak i poprzednio, napięcie i natężenie prądu w odległości x od końca przez \hat{U}_0 i \hat{I}_0 . Podstawiając do powyższych wzorów $\hat{I}_2 = 0$, znajdziemy

$$\hat{U}_0 = \frac{1}{2} \hat{U}_2 \left\{ e^{ax} (\cos bx + j \sin bx) + e^{-ax} (\cos bx - j \sin bx) \right\}, \quad (51)$$

$$\hat{I}_0 Z = \frac{1}{2} \hat{U}_2 \left\{ e^{ax} (\cos bx + j \sin bx) - e^{-ax} (\cos bx - j \sin bx) \right\}. \quad (52)$$

Rozpatrzmy następnie linię w stanie zwarcia, oznaczając analogicznie napięcie i prąd przez \hat{U}_z i \hat{I}_z . Podstawiając $\hat{U}_2 = 0$, otrzymamy

$$\hat{U}_z = \frac{1}{2} \hat{I}_z Z \left\{ e^{ax} (\cos bx + j \sin bx) - e^{-ax} (\cos bx - j \sin bx) \right\}, \quad (53)$$

$$\hat{I}_z Z = \frac{1}{2} \hat{I}_z Z \left\{ e^{ax} (\cos bx + j \sin bx) + e^{-ax} (\cos bx - j \sin bx) \right\}. \quad (54)$$

Bezpośrednio z porównania wzorów (49), (51) i (53) oraz (50) (52) i (54) wynika, że

$$\hat{U} = \hat{U}_0 + \hat{U}_z, \quad (55)$$

oraz

$$\hat{I} Z = \hat{I}_0 Z + \hat{I}_z Z,$$

$$\hat{I} = \hat{I}_0 + \hat{I}_z. \quad (56)$$

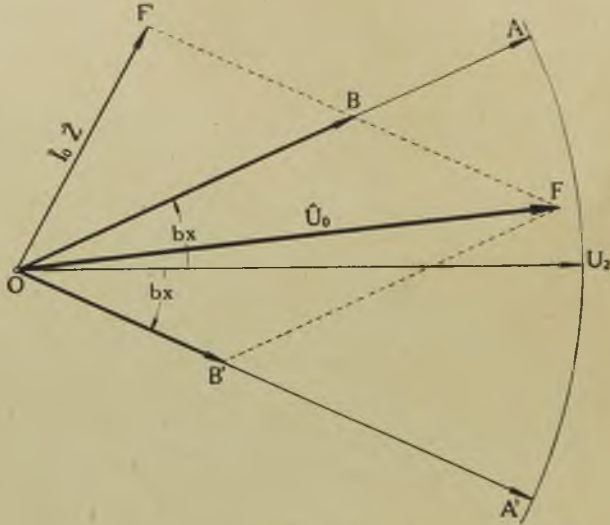
Napięcie oraz prąd w danym punkcie linii w stanie obciążenia są równe sumie napięć, względnie prądów, w tym punkcie w stanie jałowym i w stanie zwarcia.

Zależność, wyrażona we wzorach (55) i (56) pozwala nam zastosować metodę wykreślną znajdowania napięcia i prądu w dowolnym miejscu linii.

Opieramy się na spostrzeżeniu, że w każdym ze wzorów (51), (52), (53) i (54) na \hat{U}_0 , \hat{I}_0 , \hat{U}_z i \hat{I}_z występuje tylko jeden z wektorów \hat{U}_2 lub \hat{I}_2 , pozatem tylko funkcje wykładnicze i zespolone trygonometryczne.

Przedewszystkiem obliczamy analitycznie wartości a i b współczynników tłumienia i długości fali, następnie dla danej odległości x wartości funkcji wykładniczych e^{ax} i e^{-ax} oraz kąta bx .

Odmierzamy teraz w odpowiedniej skali, w kierunku, który bierzemy jako kierunek początkowy, napięcie końca linii \hat{U}_2 (rys. 171). Niech to będzie odcinek OU_2 . Z punktu O zataczamy koło promieniem OU_2 i odmierzamy od OU_2 w obie strony przy punkcie O kąty bx .



Rys. 171.

Ramiona tych kątów przetną koło w punktach A i A' .

$$\sphericalangle U_2 OA = bx,$$

$$\sphericalangle U_2 OA' = -bx.$$

OA i OA' stanowią wektory, określone w sposób następujący

$$\hat{OA} = U_2 (\cos bx + j \sin bx),$$

$$\hat{OA}' = U_2 (\cos bx - j \sin bx).$$

Mnożymy teraz U_2 przez $\frac{1}{2} e^{ax}$ i $\frac{1}{2} e^{-ax}$ i odmierzamy otrzymane iloczyny na liniach OA i OA' jako OB i OB' . Będzie więc

$$\hat{OB} = \frac{1}{2} U_2 e^{ax} (\cos bx + j \sin bx),$$

$$\hat{OB}' = \frac{1}{2} U_2 e^{-ax} (\cos bx - j \sin bx).$$

Budujemy sumę tych wektorów OF i ich różnicę OF' , czyli

$$O\hat{F} = O\hat{B} + O\hat{B}',$$

$$O\hat{F}' = O\hat{B} - O\hat{B}'.$$

Więc

$$O\hat{F} = \frac{1}{2} \hat{U}_2 e^{ax} (\cos bx + j \sin bx) + \frac{1}{2} \hat{U}_2 e^{-ax} (\cos bx - j \sin bx),$$

$$O\hat{F}' = \frac{1}{2} \hat{U}_2 e^{ax} (\cos bx + j \sin bx) - \frac{1}{2} \hat{U}_2 e^{-ax} (\cos bx - j \sin bx).$$

Porównywając otrzymane wzory ze wzorami (51) i (52), widzimy, że

$$O\hat{F} = \hat{U}_0,$$

$$O\hat{F}' = \hat{I}_0 Z.$$

W ten sposób znaleźliśmy napięcie i prąd w dowolnym miejscu linii w stanie jałowym. Przystąpimy teraz do znalezienia tych samych wielkości w stanie zwarcia.

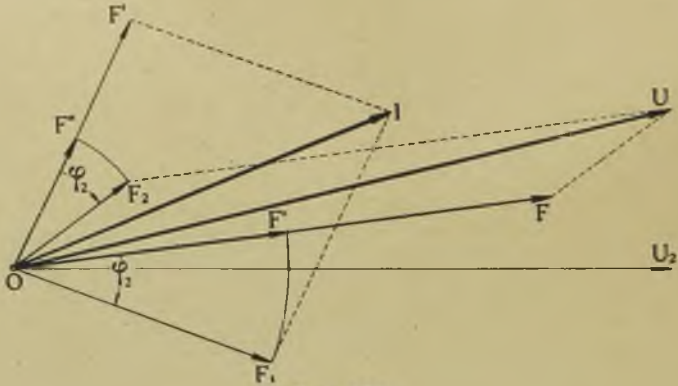
Porównywając wzory (54) i (53) na prąd i napięcie w stanie zwarcia ze wzorami (51) i (52) na napięcie i prąd w stanie jałowym, widzimy, że prąd i napięcie w stanie zwarcia zupełnie tak samo zależą od prądu końca linii, jak napięcie i prąd w stanie jałowym od napięcia końca linii. Dla ich znalezienia powinniśmy wykonać wykres zupełnie podobny do poprzedniego, odmierzając wektor $\hat{I}_2 Z$ zamiast wektora \hat{U}_2 . Korzystając z tego samego wykresu, powinniśmy skalę zmienić w stosunku $\frac{U_2}{I_2 Z}$, następnie kierunek każdego z wektorów powinien być przesunięty o kąt φ_2 , ponieważ wektor $\hat{I}_2 Z$ tworzy taki kąt z wektorem \hat{U}_2 .

W ten sposób wektory $O\hat{F}$ i $O\hat{F}'$ w nowej skali i przesunięte o kąt φ_2 , dadzą nam prąd i napięcie w danym punkcie w stanie zwarcia.

$$O\hat{F} = \hat{I}_2 Z, \quad O\hat{F}' = U_z.$$

Aby przy pomocy rozważanego wykresu znaleźć napięcie i prąd w danym punkcie linii w stanie zwykłego obciążenia, postępujemy w następujący sposób (rys. 172).

Mnożymy długość wektorów OF i OF' przez stosunek $\frac{I_2 Z}{U_2}$ i odmierzymy w tych samych kierunkach jako OF'' i OF''' . Te wektory OF'' i OF''' przedstawiają co do wielkości (ale nie kierunku) w skali pierwotnego wykresu prąd i napięcie w stanie zwarcia.



Rys. 172.

Obracamy je teraz około punktu O we właściwym kierunku o kąt φ_2 do położenia OF_1 i OF_2 . Te wektory OF_1 i OF_2 stanowią wektory prądu i napięcia w stanie zwarcia. Budujemy sumę wektorów OF i OF_2 równą OU oraz sumę wektorów OF' i OF_1 równą OI . Wtedy

$$\hat{O}U = \hat{O}F + \hat{O}F_2 = \hat{U}_0 + \hat{U}_z = \hat{U},$$

$$\hat{O}I = \hat{O}F' + \hat{O}F_1 = \hat{I}_0 Z + \hat{I}_z Z = \hat{I} Z.$$

Znaleźliśmy zatem wykreślnie napięcie i prąd w dowolnym miejscu linii.

Zauważymy jeszcze, że dla różnych odległości x punkty B i B' w wykresie (rys. 171) leżą na spiralnej logarytmicznej.

Rzeczywiście

$$OB = \frac{1}{2} U_2 e^{ax}, \quad OB' = \frac{1}{2} U_2 e^{-ax}.$$

W spólrzędnych biegunowych $bx = \alpha$ dla OB , zaś $-bx = \alpha$ dla OB' stanowią kąty biegunowe. U_2 , a i b mają wartości stałe;

oznaczając promień wodzący OB , względnie OB' przez r ; $\frac{1}{2}U_2=k$,
 $\frac{a}{b} = m$, będziemy mieli dla OB

$$r = k e^{ax} = k e^{\frac{a}{b}x} = k e^{mx};$$

dla OB'

$$r = k e^{-ax} = k e^{-\frac{a}{b}x} = k e^{-mx}.$$

Są to równania spirali logarytmicznej.

W linjach kablowych, zwłaszcza telefonicznych i telegraficznych, indukcyjność L oraz upływność A są naogół nieznaczące i można te wielkości założyć równe zeru, co czynił W. Thomson przy rozpatrywaniu przenoszenia prądów telegraficznych w kablach. Wówczas ze wzorów (14), (16) i (17) otrzymamy

$$a = \sqrt{\frac{1}{2} R \omega C}, \quad b = \sqrt{\frac{1}{2} R \omega C}, \quad \hat{Z} = \sqrt{\frac{R}{j \omega C}} = \sqrt{\frac{R}{\omega C}} e^{-j\frac{\pi}{4}}.$$

Jak widzimy, oporność falowa w tym przypadku jest odwrotnie proporcjonalna do pierwiastka kwadratowego pulsacji ω , a więc i częstotliwości, z czego wynika, że im większa częstotliwość tem mniejsze jest napięcie, potrzebne dla otrzymania tego samego prądu. Natomiast współczynnik tłumienia wzrasta ze wzrostem częstotliwości. Argument oporności wynosi -45° , z czego wynika, że prąd wyprzedza napięcie o kąt 45° . Okoliczność, że tłumienie zależne jest od częstotliwości, wpływa niekorzystnie przy rozmowach telefonicznych i wogóle przy przesyłaniu dźwięków po linjach kablowych.

Dla wielkich częstotliwości współczynnik tłumienia w przybliżeniu będzie uzależniony tylko od stałych linii, mianowicie ze wzoru (14) będziemy mieli

$$a = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\omega^2 LC \left(1 + \frac{R^2}{\omega^2 L^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{A^2}{\omega^2 C^2} \right)^{\frac{1}{2}} + AR - \omega^2 LC \right]}.$$

Rozwijając w szereg dwumiany, stojące w nawiasach i podniesione do potęgi $\frac{1}{2}$, otrzymamy

$$\left(1 + \frac{R^2}{\omega^2 L^2}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{R^2}{\omega^2 L^2} + \dots,$$

$$\left(1 + \frac{A^2}{\omega^2 C^2}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{A^2}{\omega^2 C^2} + \dots;$$

przy założeniu, że ω ma wartość wielką, możemy odrzucić te człony szeregu, które zawierają wyższe potęgi ω^2 i przyjąć, że

$$\left(1 + \frac{R^2}{\omega^2 L^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{A^2}{\omega^2 C^2}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{R^2}{\omega^2 L^2} + \frac{1}{2} \frac{A^2}{\omega^2 C^2}.$$

Wtedy

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{1}{4} R^2 \frac{C}{L} + \frac{1}{4} A^2 \frac{L}{C} + \frac{1}{2} AR} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{4} \left(R \sqrt{\frac{C}{L}} + A \sqrt{\frac{L}{C}}\right)^2} = \frac{1}{2} \left[R \sqrt{\frac{C}{L}} + A \sqrt{\frac{L}{C}}\right]. \end{aligned}$$

Jak widać z ostatniego wzoru tłumienie zależy od stosunku $\frac{L}{C}$ i można znaleźć taką zależność między stałymi linii, aby współczynnik tłumienia był najmniejszy. Zakładając w ostatnim wzorze

$$\sqrt{\frac{L}{C}} = x,$$

napişemy

$$a = \frac{1}{2} \left(Ax + \frac{R}{x}\right),$$

skąd

$$\frac{da}{dx} = \frac{1}{2} \left(A - \frac{R}{x^2}\right);$$

przyrównyując tę pochodną do zera i biorąc pod uwagę, że $x > 0$, znajdziemy

$$x = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{R}{A}};$$

ponieważ druga pochodna $\frac{d^2a}{dx^2}$ staje się większą od zera, przeto

znaleziona wartość x odpowiada minimum funkcji a , tłumienie więc będzie najmniejsze, gdy

$$\frac{L}{C} = \frac{R}{A},$$

wtedy

$$a = \sqrt{RA}.$$

Ponieważ w liniach kablowych L i A są małe, przeto w znacznym stopniu

$$\frac{L}{C} < \frac{R}{A};$$

dla zmniejszenia więc tłumienia należy zwiększyć indukcyjność L . Pupin zaproponował w tym celu włączanie cewek indukcyjnych w kablach telefonicznych w odległości $1\frac{1}{2}$ —2 km. Krarup zaleca pokrywanie kabla cienkim drutem ze stopu żelaza z niklem, posiadającego znaczną przenikalność magnetyczną.

§ 85. Przypadek ogólny.

Zbadajmy teraz linię w przypadku ogólnym, kiedy oporność, upływność, indukcyjność i pojemność nie są powiązane żadnymi zależnościami. Wtedy, jak wiadomo, oporność charakterystyczna linii jest liczbą zespoloną. Znajdźmy jej moduł Z i argument α :

$$\hat{Z} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{A + j\omega C}} = Z(\cos \alpha + j \sin \alpha),$$

$$\frac{R + j\omega L}{A + j\omega C} = Z^2(\cos 2\alpha + j \sin 2\alpha),$$

$$\frac{(R + j\omega L)(A - j\omega C)}{A^2 + \omega^2 C^2} = Z^2(\cos 2\alpha + j \sin 2\alpha),$$

$$\frac{AR + \omega^2 LC + j\omega(AL - RC)}{A^2 + \omega^2 C^2} = Z^2(\cos 2\alpha + j \sin 2\alpha);$$

stąd otrzymujemy

$$Z^2 \cos 2\alpha = \frac{AR + \omega^2 LC}{A^2 + \omega^2 C^2},$$

$$Z^2 \sin 2\alpha = \omega \frac{AL - RC}{A^2 + \omega^2 C^2},$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \omega \cdot \frac{AL - RC}{AR + \omega^2 LC},$$

$$Z^4 = \frac{(AR + \omega^2 LC)^2 + \omega^2 (AL - RC)^2}{(A^2 + \omega^2 C^2)^2},$$

skąd ostatecznie

$$Z = \sqrt[4]{\frac{R^2 + \omega^2 L^2}{A^2 + \omega^2 C^2}}, \quad (57)$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \omega \frac{AL - RC}{AR + \omega^2 LC}. \quad (58)$$

Argument α charakterystyki ma znak taki sam, jak licznik we wzorze (58), ponieważ mianownik jest zawsze dodatni; wobec tego

$$\alpha > 0 \text{ przy } AL > RC,$$

$$\alpha < 0 \text{ przy } AL < RC.$$

W szczególnym przypadku, gdy $AL = RC$, lub gdy $R = 0$ i $A = 0$, argument jest zerem i wtedy oporność charakterystyczna jest liczbą rzeczywistą.

Napięcie i prąd w dowolnym miejscu linii wyznaczają się z ogólnych wzorów (22) i (23)

$$\begin{aligned} \hat{U} = \frac{1}{2} \left\{ (\hat{U}_2 + \hat{I}_2 \hat{Z}) e^{ax} (\cos bx + j \sin bx) + \right. \\ \left. + (\hat{U}_2 - \hat{I}_2 \hat{Z}) e^{-ax} (\cos bx - j \sin bx) \right\}, \quad (59) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{I} \hat{Z} = \frac{1}{2} \left\{ (\hat{U}_2 + \hat{I}_2 \hat{Z}) e^{ax} (\cos bx + j \sin bx) - \right. \\ \left. - (\hat{U}_2 - \hat{I}_2 \hat{Z}) e^{-ax} (\cos bx - j \sin bx) \right\}. \quad (60) \end{aligned}$$

Rozpatrzmy, podobnie jak w § 84 linie w stanie jałowym. Stosując te same oznaczenia co tam, znajdziemy ($\hat{I}_2 = 0$)

$$\hat{U}_0 = \frac{1}{2} \hat{U}_2 \left\{ e^{ax} (\cos bx + j \sin bx) + e^{-ax} (\cos bx - j \sin bx) \right\}, \quad (61)$$

$$\hat{I}_0 \hat{Z} = \frac{1}{2} \hat{U}_2 \left\{ e^{ax} (\cos bx + j \sin bx) - e^{-ax} (\cos bx - j \sin bx) \right\}. \quad (62)$$

Tak samo dla stanu zwarcia ($\hat{U}_2 = 0$)

$$\hat{U}_2 = \frac{1}{2} \hat{I}_2 \hat{Z} \left\{ e^{ax} (\cos bx + j \sin bx) - e^{-ax} (\cos bx - j \sin bx) \right\}, \quad (63)$$

$$\hat{I}_2 \hat{Z} = \frac{1}{2} \hat{I}_2 \hat{Z} \left\{ e^{ax} (\cos bx + j \sin bx) + e^{-ax} (\cos bx - j \sin bx) \right\}. \quad (64)$$

Bezpośrednio z porównania wzorów (59), (61) i (63) oraz (60), (62) i (64) wynika, że i w tym przypadku słuszne są wzory

$$\hat{U} = \hat{U}_0 + \hat{U}_2,$$

$$\hat{I} = \hat{I}_0 + \hat{I}_2.$$

Prąd \hat{I}_2 końca linii jest odchyłony od takiegoż napięcia \hat{U}_2 o kąt φ_2 ; iloczyn $\hat{I}_2 \hat{Z}$ będzie więc przesunięty względem \hat{U}_2 o kąt $\varphi_2 + \alpha$.

Z tych rozważań wynika, że sposób wykreślnego wyznaczenia napięcia i prądu w dowolnym miejscu linii jest zupełnie taki sam, jak w przypadku podanym w § 84. Należy tylko uwzględnić, że kąt między kierunkami napięcia końca linii i iloczynem prądu końca linii przez jej oporność charakterystyczną jest nie φ_2 , lecz $(\varphi_2 + \alpha)$, więc na rys. 172 wektory OF'' i OF''' powinny być przesunięte o kąt $(\varphi_2 + \alpha)$.

§ 86. Obliczenie stałych linii na podstawie pomiarów, dokonanych w stanie jałowym i w stanie zwarcia.

Wszystkie stałe linii: oporność, upływność, indukcyjność i pojemność mogą być obliczone, jeżeli wiadome są oporności pozorne linii, odpowiadające stanowi jałowemu i stanowi zwarcia.

Te wielkości mogą być podane przez fabrykę (np. dla kabli), lub też określone za pomocą pomiarów; w tym celu wystarczy zmierzyć na początku linii moc, napięcie i natężenie prądu przy dowolnem napięciu oraz kąt przesunięcia fazy prądu względem napięcia, najpierw w przypadku, gdy linja jest w stanie jałowym, następnie, gdy linja jest w stanie zwarcia; na podstawie tych pomiarów znajdujemy odpowiednie oporności pozorne. Oznaczając przez Z_0 i Z_z wartości oporności pozornych linii w stanie jałowym i w stanie zwarcia, zaś przez φ_0 i φ_z kąty przesunięcia fazy odpowiednich prądów względem napięć, mierzone w kierunku od napięć, będziemy mieli dla argumentów symboli \hat{Z}_0 i \hat{Z}_z kąty $-\varphi_0$ i $-\varphi_z$.

$$\hat{Z}_0 = Z_0 (\cos \varphi_0 - j \sin \varphi_0) = Z_0 e^{-j\varphi_0}, \quad (65)$$

$$\hat{Z}_z = Z_z (\cos \varphi_z - j \sin \varphi_z) = Z_z e^{-j\varphi_z}. \quad (66)$$

Na podstawie wzorów (26) i (27) mamy na początku linii, czyli na odległości $x=l$, mierzonej od końca, następujące wartości napięcia U_1 i prądu I_1 , gdy w końcu wartości te wynoszą U_2 i I_2 ,

$$\hat{U}_1 = \hat{U}_2 \cos \text{hip } kl + \hat{I}_2 \hat{Z} \sin \text{hip } kl, \quad (67)$$

$$\hat{I}_1 \hat{Z} = \hat{U}_2 \sin \text{hip } kl + \hat{I}_2 \hat{Z} \cos \text{hip } kl. \quad (68)$$

Oznaczając dla stanu jałowego, gdy w końcu linii napięcie ma wartość U_2 , zaś natężenie prądu równe jest zeru, napięcie i prąd na początku przez U_{10} i I_{10} , następnie dla stanu zwarcia, gdy napięcie w końcu równe jest zeru, zaś natężenie ma wartość I_2 , napięcie i prąd na początku przez U_{1z} i I_{1z} , otrzymamy ze wzorów (67) i (68), zakładając kolejno $I_2=0$ oraz $U_2=0$,

$$\hat{U}_{10} = \hat{U}_2 \cos \text{hip } kl, \quad (69)$$

$$\hat{I}_{10} \hat{Z} = \hat{U}_2 \sin \text{hip } kl, \quad (70)$$

$$\hat{U}_{1z} = \hat{I}_2 \hat{Z} \sin \text{hip } kl, \quad (71)$$

$$\hat{I}_{1z} \hat{Z} = \hat{I}_2 \hat{Z} \cos \text{hip } kl. \quad (72)$$

Dzieląc stronami (69) przez (70) oraz (71) przez (72) otrzymamy

$$\frac{\hat{U}_{10}}{\hat{I}_{10} \hat{Z}} = \cotg \text{hip } kl,$$

$$\frac{\hat{U}_{1z}}{\hat{I}_{1z} Z} = \operatorname{tg} \operatorname{hip} kl;$$

ale

$$\frac{\hat{U}_{10}}{\hat{I}_{10}} = \hat{Z}_0, \quad \frac{\hat{U}_{1z}}{\hat{I}_{1z}} = \hat{Z}_z,$$

wobec czego

$$\hat{Z}_0 = \hat{Z} \operatorname{ctg} \operatorname{hip} kl, \quad (73)$$

$$\hat{Z}_z = \hat{Z} \operatorname{tg} \operatorname{hip} kl. \quad (74)$$

skąd, przez pomnożenie i dzielenie, otrzymujemy

$$\hat{Z}^2 = \hat{Z}_0 \hat{Z}_z,$$

$$(\operatorname{tg} \operatorname{hip} kl)^2 = \frac{\hat{Z}_z}{\hat{Z}_0};$$

wreszcie

$$\hat{Z} = \sqrt{\hat{Z}_0 \hat{Z}_z}, \quad (75)$$

$$\operatorname{tg} \operatorname{hip} kl = \sqrt{\frac{\hat{Z}_z}{\hat{Z}_0}}. \quad (76)$$

Ponieważ

$$\operatorname{tg} \operatorname{hip} kl = \frac{e^{kl} - e^{-kl}}{e^{kl} + e^{-kl}} = \frac{e^{2kl} - 1}{e^{2kl} + 1},$$

więc

$$e^{2kl} = \frac{1 + \operatorname{tg} \operatorname{hip} kl}{1 - \operatorname{tg} \operatorname{hip} kl} = \frac{1 + \sqrt{\frac{\hat{Z}_z}{\hat{Z}_0}}}{1 - \sqrt{\frac{\hat{Z}_z}{\hat{Z}_0}}} = \frac{\sqrt{\hat{Z}_0} + \sqrt{\hat{Z}_z}}{\sqrt{\hat{Z}_0} - \sqrt{\hat{Z}_z}}. \quad (77)$$

Biorąc wartości \hat{Z}_0 i \hat{Z}_z ze wzorów (65) i (66), będziemy mieli

$$e^{2kl} = \frac{\sqrt{Z_0} e^{-j\frac{\tau_0}{2}} + \sqrt{Z_z} e^{-j\frac{\tau_z}{2}}}{\sqrt{Z_0} e^{-j\frac{\tau_0}{2}} - \sqrt{Z_z} e^{-j\frac{\tau_z}{2}}};$$

mnożąc licznik i mianownik przez

$$\sqrt{Z_0} e^{j\frac{\tau_0}{2}} - \sqrt{Z_z} e^{j\frac{\tau_z}{2}},$$

otrzymamy

$$e^{2kl} = \frac{Z_0 - Z_z - \sqrt{Z_0 Z_z} \left[e^{j \frac{(\varphi_z - \varphi_0)}{2}} - e^{-j \frac{(\varphi_z - \varphi_0)}{2}} \right]}{Z_0 + Z_z - \sqrt{Z_0 Z_z} \left[e^{j \frac{(\varphi_z - \varphi_0)}{2}} + e^{-j \frac{(\varphi_z - \varphi_0)}{2}} \right]}$$

Zważywszy, że $k = a + jb$ i zamieniając funkcje wykładnicze na funkcje trygonometryczne według wzorów Eulera, napiszemy

$$e^{2al} (\cos 2bl + j \sin 2bl) = \frac{Z_0 - Z_z - j 2 \sqrt{Z_0 Z_z} \sin \left(\frac{\varphi_z - \varphi_0}{2} \right)}{Z_0 + Z_z - 2 \sqrt{Z_0 Z_z} \cos \left(\frac{\varphi_z - \varphi_0}{2} \right)},$$

skąd

$$e^{4al} = \frac{(Z_0 - Z_z)^2 + 4 Z_0 Z_z \sin^2 \left(\frac{\varphi_z - \varphi_0}{2} \right)}{\left[Z_0 + Z_z - 2 \sqrt{Z_0 Z_z} \cos \left(\frac{\varphi_z - \varphi_0}{2} \right) \right]^2} = M,$$

$$\operatorname{tg} 2bl = - \frac{2 \sqrt{Z_0 Z_z} \sin \left(\frac{\varphi_z - \varphi_0}{2} \right)}{Z_0 - Z_z} = N;$$

przez odpowiednie działania otrzymujemy

$$a = \frac{1}{4l} \lg_n M, \quad b = \frac{1}{2l} \operatorname{arctg} N;$$

w ten sposób obliczamy współczynnik tłumienia a oraz współczynnik długości fali b .

Następnie, dla znalezienia oporności falowej Z wprowadzamy do wzoru (75) wartości \hat{Z}_0 i \hat{Z}_z z (65) i (66), wtedy

$$\hat{Z} = \sqrt{Z_0 Z_z} e^{-j \frac{(\varphi_0 + \varphi_z)}{2}} = \sqrt{Z_0 Z_z} \left[\cos \left(\frac{\varphi_0 + \varphi_z}{2} \right) - j \sin \left(\frac{\varphi_0 + \varphi_z}{2} \right) \right]. \quad (78)$$

Ale na podstawie wzorów (10) i (17)

$$\sqrt{(R + j\omega L)(A + j\omega C)} = a + jb,$$

$$\sqrt{\frac{R + j\omega L}{A + j\omega C}} = \hat{Z},$$

więc

$$R + j\omega L = (a + jb) \hat{Z},$$

$$A + j\omega C = \frac{a + jb}{\hat{Z}};$$

biorąc wartość \hat{Z} ze wzoru (78), otrzymamy

$$R + j\omega L = (a + jb) \sqrt{Z_0 Z_z} \left[\cos\left(\frac{\varphi_0 + \varphi_z}{2}\right) - j \sin\left(\frac{\varphi_0 + \varphi_z}{2}\right) \right],$$

$$A + j\omega C = (a + jb) \frac{1}{\sqrt{Z_0 Z_z}} \left[\cos\left(\frac{\varphi_0 + \varphi_z}{2}\right) + j \sin\left(\frac{\varphi_0 + \varphi_z}{2}\right) \right];$$

przyrównyując w tych wzorach części rzeczywiste i części urojone, znajdujemy

$$R = \sqrt{Z_0 Z_z} \left[a \cos\left(\frac{\varphi_0 + \varphi_z}{2}\right) + b \sin\left(\frac{\varphi_0 + \varphi_z}{2}\right) \right],$$

$$L = \frac{\sqrt{Z_0 Z_z}}{\omega} \left[b \cos\left(\frac{\varphi_0 + \varphi_z}{2}\right) - a \sin\left(\frac{\varphi_0 + \varphi_z}{2}\right) \right],$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{Z_0 Z_z}} \left[a \cos\left(\frac{\varphi_0 + \varphi_z}{2}\right) - b \sin\left(\frac{\varphi_0 + \varphi_z}{2}\right) \right],$$

$$C = \frac{1}{\omega \sqrt{Z_0 Z_z}} \left[b \cos\left(\frac{\varphi_0 + \varphi_z}{2}\right) + a \sin\left(\frac{\varphi_0 + \varphi_z}{2}\right) \right].$$

W ten sposób możemy obliczyć stałe linie, mając wartości Z_0 , Z_z , φ_0 , i φ_z .

§ 87. Wzory dla napięć i prądów oparte na własnościach linii w stanie jałowym i w stanie zwarcia. Spółczynnik linjowy.

Rozpatrując wzory (69) i (72) spostrzegamy, że

$$\frac{\hat{U}_{10}}{\hat{U}_2} = \frac{\hat{I}_{1z}}{\hat{I}_2} = \cos \text{hip } kl;$$

ponieważ $k = a + jb$ jest naogół liczbą zespoloną, więc i $\cos \text{hip } kl$ musi być również liczbą zespoloną; oznaczmy

$$\cos \text{hip } kl = \hat{S};$$

wprowadzając do naszych wzorów ten spółczynnik, musimy go traktować jako symbol; nazywamy go spółczynnikiem linjowym.

Możemy więc powyższe wzory przepisać w postaci

$$\frac{\hat{U}_{10}}{\hat{U}_2} = \frac{\hat{I}_{1z}}{\hat{I}_2} = \hat{S}. \quad (79)$$

Niech γ będzie kątem przesunięcia fazy \hat{U}_{10} względem \hat{U}_2 lub, co jedno i to samo, — \hat{I}_{1z} względem \hat{I}_2 ; kąt ten będzie więc argumentem współczynnika linjowego w ujęciu symbolicznem; wówczas

$$\hat{S} = S e^{j\gamma} = S (\cos \gamma + j \sin \gamma).$$

Moduł S i argument γ możemy określić przez współczynniki a i b oraz długość linii l w sposób następujący. Z założenia wynika, że

$$\hat{S} = \cos \text{hip } kl = \frac{e^{kl} + e^{-kl}}{2} = \frac{e^{(a+jb)l} + e^{-(a+jb)l}}{2},$$

albo

$$\begin{aligned} S (\cos \gamma + j \sin \gamma) &= \frac{e^{al} + e^{-al}}{2} \cos bl + j \frac{e^{al} - e^{-al}}{2} \sin bl = \\ &= \cos \text{hip } al \cdot \cos bl + j \sin \text{hip } al \cdot \sin bl, \end{aligned}$$

skąd

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{\cos^2 \text{hip } al \cdot \cos^2 bl + \sin^2 \text{hip } al \cdot \sin^2 bl} = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{2(\cos \text{hip } 2al + \cos 2bl)}, \end{aligned}$$

$$\text{tg } \gamma = \text{tg hip } al \cdot \text{tg } bl.$$

Chcąc określić \hat{S} przez oporności pozorne linii w stanie jałowym i w stanie zwarcia, napiszemy

$$\hat{S} = \cos \text{hip } kl = \frac{1}{\sqrt{1 - (\text{tg hip } kl)^2}};$$

biorąc wartość $\text{tg hip } kl$ ze wzoru (76) będziemy mieli

$$\hat{S} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\hat{Z}_z}{\hat{Z}_0}}} = \sqrt{\frac{\hat{Z}_0}{\hat{Z}_0 - \hat{Z}_z}}; \quad (80)$$

stąd

$$\hat{S}^2 = \frac{\hat{Z}_z}{\hat{Z}_0 - \hat{Z}_z} = \frac{Z_0 e^{-j\varphi_0}}{Z_0 e^{-j\varphi_0} - Z_z e^{-j\varphi_z}} = \frac{Z_0}{Z_0 - Z_z e^{-j(\varphi_z - \varphi_0)}};$$

mnożąc licznik i mianownik przez $Z_0 - Z_z e^{j(\varphi_z - \varphi_0)}$, otrzymamy

$$S^2 = \frac{Z_0 [Z_0 - Z_z e^{j(\varphi_z - \varphi_0)}]}{Z_0^2 + Z_z^2 - Z_0 Z_z [e^{j(\varphi_z - \varphi_0)} + e^{-j(\varphi_z - \varphi_0)}]};$$

zamieniając funkcje wykładnicze funkcjami trygonometrycznymi i biorąc pod uwagę, że

$$\hat{S}^2 = S^2 (\cos \gamma + j \sin \gamma)^2 = S^2 (\cos 2\gamma + j \sin 2\gamma),$$

będziemy mieli

$$S^2 (\cos 2\gamma + j \sin 2\gamma) = \frac{Z_0 [Z_0 - Z_z \cos(\varphi_z - \varphi_0) - j Z_z \sin(\varphi_z - \varphi_0)]}{Z_0^2 + Z_z^2 - 2 Z_0 Z_z \cos(\varphi_z - \varphi_0)},$$

skąd

$$S^2 = \frac{Z_0^2 \{ [Z_0 - Z_z \cos(\varphi_z - \varphi_0)]^2 + Z_z^2 \sin^2(\varphi_z - \varphi_0) \}}{[Z_0^2 + Z_z^2 - 2 Z_0 Z_z \cos(\varphi_z - \varphi_0)]^2} =$$

$$= \frac{Z_0^2}{Z_0^2 + Z_z^2 - 2 Z_0 Z_z \cos(\varphi_z - \varphi_0)};$$

$$S = \frac{\sqrt{Z_0}}{\sqrt{4 Z_0^2 + Z_z^2 - 2 Z_0 Z_z \cos(\varphi_z - \varphi_0)}}, \quad (81)$$

$$\operatorname{tg} 2\gamma = - \frac{Z_z \sin(\varphi_z - \varphi_0)}{Z_0 - Z_z \cos(\varphi_z - \varphi_0)}. \quad (82)$$

Ten sam rezultat można otrzymać geometrycznie. Wychodząc ze wzoru

$$\hat{S}^2 = \frac{\hat{Z}_0}{\hat{Z}_0 - \hat{Z}_z},$$

przeprowadzamy dowolny kierunek OX (rys. 173), odkładamy z punktu O pod kątami $(-\varphi_0)$ oraz $(-\varphi_z)$ $OA = Z_0$, $OB = Z_z$; wówczas

$$BA = \hat{Z}_0 - \hat{Z}_z,$$

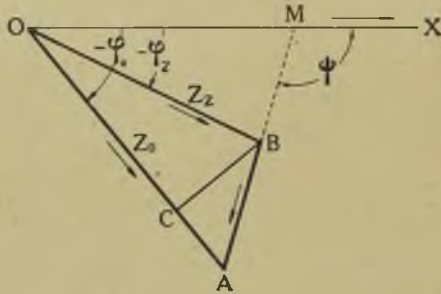
$$\sphericalangle MOA = -\varphi_0,$$

$$\sphericalangle MOB = -\varphi_z;$$

oznaczając przez ψ kąt BMX , który tworzy BA z OX , będziemy mieli

$$\hat{Z}_0 = OA \cdot e^{-j\varphi_0},$$

$$\hat{Z}_0 - \hat{Z}_z = BA \cdot e^{j\psi},$$



Rys. 173.

wobec czego

$$\hat{S}^2 = \frac{\hat{Z}_0}{\hat{Z}_0 - \hat{Z}_z} = \frac{OA}{BA} e^{-j(\varphi_0 + \psi)},$$

skąd

$$S^2 = \frac{OA}{BA},$$

$$2\gamma = -(\varphi_0 + \psi).$$

Z $\triangle OAB$

$$BA = \sqrt{OA^2 + OB^2 - 2 OA \cdot OB \cos \sphericalangle AOB},$$

ale

$$OA = Z_0, \quad OB = Z_z, \quad \sphericalangle AOB = \sphericalangle MOA - \sphericalangle MOB =$$

$$= -\varphi_0 - (-\varphi_z) = \varphi_z - \varphi_0,$$

więc

$$S = \sqrt{\frac{OA}{BA}} = \frac{\sqrt{Z_0}}{\sqrt{Z_0^2 + Z_z^2 - 2 Z_0 Z_z \cos(\varphi_z - \varphi_0)}}.$$

Następnie

$$\sphericalangle BMX = \sphericalangle MOA + \sphericalangle OAB;$$

czyli $\psi = -\varphi_0 + \sphericalangle OAB$;

$$\sphericalangle OAB = \varphi_0 + \psi = -2\gamma;$$

ponieważ

$$\operatorname{tg} \sphericalangle OAB = \frac{BC}{AC} = \frac{OB \sin \sphericalangle AOB}{OA - OB \cos \sphericalangle AOB},$$

więc ostatecznie

$$\operatorname{tg} 2\gamma = -\frac{Z_z \sin(\varphi_z - \varphi_0)}{Z_0 - Z_z \cos(\varphi_z - \varphi_0)}.$$

Wprowadzenie współczynnika linowego S pozwala na uproszczenie wzorów, uzależniających napięcia i prądy na początku linii, od napięć i prądów w jej końcu; ze wzoru (79) mamy

$$\hat{U}_{10} = \hat{U}_2 \hat{S}, \quad \hat{I}_{1z} = \hat{I}_2 \hat{S},$$

następnie

$$\frac{\hat{U}_{1z}}{\hat{I}_{1z}} = \hat{Z}_z, \quad \text{czyli} \quad \hat{U}_{1z} = \hat{I}_{1z} \hat{Z}_z = \hat{I}_2 \hat{Z}_z \hat{S},$$

$$\frac{\hat{U}_{10}}{\hat{I}_{10}} = \hat{Z}_0 \quad \text{czyli} \quad \hat{I}_{10} = \frac{\hat{U}_{10}}{\hat{Z}_0} = \frac{\hat{U}_2 \hat{S}}{\hat{Z}_0}.$$

Ponieważ

$$\hat{U}_1 = \hat{U}_{10} + \hat{U}_{1z},$$

$$\hat{I}_1 = \hat{I}_{10} + \hat{I}_{1z},$$

więc po podstawieniu odpowiednich wartości, otrzymamy

$$\hat{U}_1 = \hat{S}(\hat{U}_2 + \hat{I}_2 \hat{Z}_z), \quad (83)$$

$$\hat{I}_1 = \hat{S}\left(\hat{I}_2 + \frac{\hat{U}_2}{\hat{Z}_0}\right), \quad (84)$$

albo

$$\frac{\hat{U}_1}{\hat{S}} = \hat{U}_2 + \hat{I}_2 \hat{Z}_z, \quad (85)$$

$$\frac{\hat{I}_1}{\hat{S}} = \hat{I}_2 + \frac{\hat{U}_2}{\hat{Z}_0}. \quad (86)$$

Wzory te są identyczne ze wzorami (26) i (27) z § 57, wyprowadzonymi dla obwodu symetrycznego prądu zmiennego. Z tego

wynika, że długa linja elektryczna z równomiernie rozłożonemi stałemi stanowi symetryczny obwód.

Jeżeli, zamiast oporności pozornej w stanie zwarcia $Z_{\bar{g}}$, wprowadzić do wyżej rozpatrzonych wzorów przewodność pozorną w stanie zwarcia $Y_{\bar{g}}$, wówczas zamiast $Z_{\bar{g}}$ wprowadzamy $\frac{1}{Y_{\bar{g}}}$.

Przy rozwiązywaniu powyższych równań metodą symboliczną, gdy chodzi o znalezienie wartości napięcia U_1 , prądu I_1 oraz współczynnika mocy $\cos \varphi_1$, gdzie φ_1 stanowi kąt przesunięcia fazy prądu I_1 względem napięcia U_1 , musimy oprócz danych U_2 , I_2 i φ_2 mieć wartości Z_0 , Z_z oraz kąty φ_0 i φ_z ; z tych danych obliczamy S według wzoru (81); określenie argumentu γ jest w tym przypadku zbyteczne, gdyż kąt φ_1 pomiędzy \hat{I}_1 i \hat{U}_1 jest taki sam, co i pomiędzy $\frac{\hat{I}_1}{\hat{S}}$ i $\frac{\hat{U}_1}{\hat{S}}$; wystarczy więc obliczenie kątów pomiędzy $\frac{\hat{I}_1}{\hat{S}}$ i \hat{U}_2 , oraz pomiędzy $\frac{\hat{U}_1}{\hat{S}}$ i \hat{U}_2 , wtedy różnica tych kątów da nam wartość φ_1 .

W poprzednich wzorach oporności Z_0 i Z_z odpowiadały całej długości linji l . Czasami zachodzi potrzeba przerachowania tych wielkości, podanych dla określonej długości l , na inną długość l' takiej samej linji. Oznaczmy poszukiwane oporności pozorne, odpowiadające długości l' przez Z_0' i Z_z' ; na podstawie wzorów (73) i (74) będziemy mieli

$$Z_0' = \hat{Z} \cotg \text{hip } kl', \quad (87)$$

$$Z_z' = \hat{Z} \text{tg hip } kl', \quad (88)$$

gdzie według wzoru (75)

$$\hat{Z} = \sqrt{\hat{Z}_0 \hat{Z}_z}$$

jest wielkością niezależną od długości linji, lecz tylko od stałych R , L , A , C oraz ω . Dla określenia funkcyj hiperbolicznych we wzorach (87) i (88) mamy

$$\text{tg hip } kl' = \frac{e^{2kl'} - 1}{e^{2kl'} + 1}, \quad (89)$$

$$\cotg \text{ hip } kl' = \frac{e^{2kl'} + 1}{e^{2kl'} - 1}; \quad (90)$$

z drugiej strony ze wzoru (77)

$$e^{2kl} = \frac{\sqrt{\hat{Z}_0} + \sqrt{\hat{Z}_z}}{\sqrt{\hat{Z}_0} - \sqrt{\hat{Z}_z}};$$

oznaczając w skróceniu

$$\frac{\sqrt{\hat{Z}_0} + \sqrt{\hat{Z}_z}}{\sqrt{\hat{Z}_0} - \sqrt{\hat{Z}_z}} = q,$$

mamy

$$e^{2kl} = q,$$

$$e^{2k} = q^{\frac{1}{l}},$$

$$e^{2kl} = q \left(\frac{r}{l} \right).$$

Podstawiając tę wartość do (89), (90), a następnie do (87) i (88), otrzymamy

$$\hat{Z}'_0 = \sqrt{\hat{Z}_0 \hat{Z}_z \frac{q^{\frac{r}{l}} + 1}{q^{\frac{r}{l}} - 1}}, \quad (91)$$

$$\hat{Z}'_z = \sqrt{\hat{Z}_0 \hat{Z}_z \frac{q^{\frac{r}{l}} - 1}{q^{\frac{r}{l}} + 1}}. \quad (92)$$

Rozwiązując te wzory metodą symboliczną znajdziemy moduły Z'_0 i Z'_z oraz ich argumenty.

ROZDZIAŁ XII.

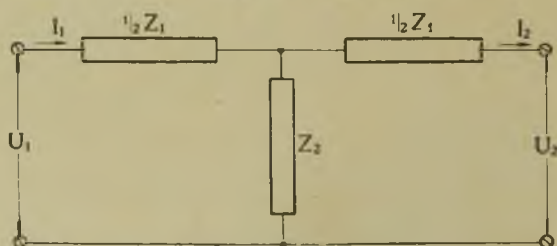
SZTUCZNE LINJE ELEKTRYCZNE.

§ 88. Układy, zastępujące długą linię.

Wzory dla napięć i prądów w długich liniach jednorodnych (z równomiernie rozłożonemi stałemi), jak to już stwierdziliśmy, są identyczne ze wzorami, które otrzymaliśmy dla obwodu symetrycznego; z tego wynika, że gdy chodzi nam wyłącznie o ustalenie zależności napięć i prądów w dwóch dowolnych punktach linii np. na początku i na końcu, możemy zastąpić taką linię lub jej odcinek przez odpowiedni układ, zawierający trzy oporności pozorne, z których dwie są sobie równe.

Rozpatrzmy najpierw zastępczy układ, w którym oporności pozorne są ułożone w literę *T* (rys. 174). Oporności pozorne Z_1 i Z_2 muszą być tak dobrane, aby zarówno w stanie jałowym, jak i w stanie zwarcia, zależność pomiędzy napięciami i prądami na początku i na końcu była taka sama, jak w rzeczywistej linii. Ze schematu wynika, że

$$\left. \begin{aligned} \hat{U}_1 - \hat{U}_2 &= \frac{1}{2} \hat{Z}_1 (\hat{I}_1 + \hat{I}_2), \\ \hat{I}_1 - \hat{I}_2 &= \frac{1}{Z_2} \left(\hat{U}_1 - \frac{1}{2} \hat{Z}_1 \hat{I}_1 \right). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$



Rys. 174.

Dla stanu jałowego, gdy napięcie w końcu ma wartość U_2 , zaś na początku napięcie i prąd wynoszą U_{10} i I_{10} , otrzymamy, zakładając $I_2 = 0$

$$\left. \begin{aligned} \hat{U}_{10} - \hat{U}_2 &= \frac{1}{2} \hat{I}_{10} \hat{Z}_1, \\ \hat{I}_{10} &= \frac{1}{\hat{Z}_2} \left(\hat{U}_{10} - \frac{1}{2} \hat{Z}_1 \hat{I}_{10} \right). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Rugując z tych dwóch równań \hat{I}_{10} , będziemy mieli

$$\frac{\hat{U}_{10}}{\hat{U}_2} = 1 + \frac{\hat{Z}_1}{2\hat{Z}_2}, \quad (3)$$

zaś z drugiego z równań (2) znajdziemy

$$\frac{\hat{U}_{10}}{\hat{I}_{10}} = \frac{1}{2} \hat{Z}_1 + \hat{Z}_2. \quad (4)$$

Dla stanu zwarcia, gdy prąd w końcu wynosi I_2 , zaś na początku napięcie i prąd mają wartości U_{1z} i I_{1z} , otrzymamy, zakładając we wzorach (1) $U_2 = 0$,

$$\begin{aligned} \hat{U}_{1z} &= \frac{1}{2} \hat{Z}_1 (\hat{I}_{1z} + \hat{I}_2), \\ \hat{I}_{1z} - \hat{I}_2 &= \frac{1}{\hat{Z}_2} \left(\hat{U}_{1z} - \frac{1}{2} \hat{Z}_1 \hat{I}_{1z} \right), \end{aligned}$$

skąd po wyrugowaniu \hat{U}_{1z} ,

$$\frac{\hat{I}_{1z}}{\hat{I}_2} = 1 + \frac{\hat{Z}_1}{2\hat{Z}_2}. \quad (5)$$

Dla linii jednorodnej stosunki napięć i prądów w stanie jałowym i w stanie zwarcia, objęte wzorami (3) i (5), stanowią t. zw. współczynnik linjowy \hat{S} , równy $\cos \text{hip } kl$, który może być obliczony na podstawie oporności pozornych linii Z_0 i Z_z w stanie jałowym i w stanie zwarcia (§ 87), te ostatnie wielkości łatwo znów możemy znaleźć, gdy są wiadome stałe linii.

Co się tyczy wzoru (4), to stanowi on oporność pozorną linii w stanie jałowym; możemy więc napisać

$$1 + \frac{\hat{Z}_1}{2\hat{Z}_2} = \hat{S} \quad (6)$$

oraz

$$\frac{\hat{Z}_1}{2} + \hat{Z}_2 = \hat{Z}_0,$$

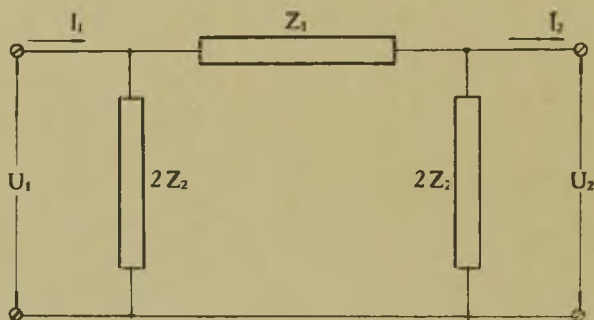
skąd

$$\frac{1}{2} \hat{Z}_1 = \frac{(\hat{S} - 1)\hat{Z}_0}{\hat{S}},$$

$$\hat{Z}_2 = \frac{\hat{Z}_0}{\hat{S}};$$

według tych wzorów obliczamy \hat{Z}_1 oraz \hat{Z}_2 dla układu, zastępującego rozpatrywaną długą linię

Drugi układ zastępczy zawiera trzy oporności pozorne ułożone tak, że tworzą jakby grecką literę Π (pi), dwie równe oporności są włączone równolegle na początku i w końcu między przewodami (rys. 175).



Rys. 175.

W tym przypadku

$$\left. \begin{aligned} \hat{U}_1 - \hat{U}_2 &= \hat{Z}_1 \left(\hat{I}_1 - \frac{1}{2\hat{Z}_2} \hat{U}_1 \right), \\ \hat{I}_1 - \hat{I}_2 &= \frac{1}{2\hat{Z}_2} (\hat{U}_1 + \hat{U}_2). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Rozumując jak poprzednio, znajdziemy dla stanu jałowego

$$\hat{U}_{10} - \hat{U}_2 = \hat{Z}_1 \left(\hat{I}_{10} - \frac{1}{2\hat{Z}_2} \hat{U}_{10} \right),$$

$$\hat{I}_{10} = \frac{1}{2 \hat{Z}_2} (\hat{U}_{10} + \hat{U}_2),$$

skąd po wyrugowaniu \hat{I}_{10} znajdujemy

$$\frac{\hat{U}_{10}}{\hat{U}_2} = 1 + \frac{\hat{Z}_1}{2 \hat{Z}_2}.$$

Dla stanu zwarcia będziemy mieli

$$\hat{U}_{1z} = \hat{Z}_1 \left(\hat{I}_{1z} - \frac{1}{2 \hat{Z}_2} \hat{U}_{1z} \right),$$

$$\hat{I}_{1z} - \hat{I}_2 = \frac{1}{2 \hat{Z}_2} \hat{U}_{1z}.$$

skąd po wyrugowaniu U_{1z}

$$\frac{\hat{I}_{1z}}{\hat{I}_2} = 1 + \frac{\hat{Z}_1}{2 \hat{Z}_2},$$

następnie

$$\frac{\hat{U}_{1z}}{\hat{I}_{1z}} = \frac{\hat{Z}_1}{1 + \frac{\hat{Z}_1}{2 \hat{Z}_2}}.$$

Jak i poprzednio zakładamy

$$1 + \frac{\hat{Z}_1}{2 \hat{Z}_2} = \hat{S},$$

zaś

$$\frac{\hat{Z}_1}{1 + \frac{\hat{Z}_1}{2 \hat{Z}_2}} = Z_z,$$

gdzie \hat{Z}_z oznacza oporność pozorną rozpatrywanego układu w stanie zwarcia.

Z ostatnich równań znajdujemy wzory

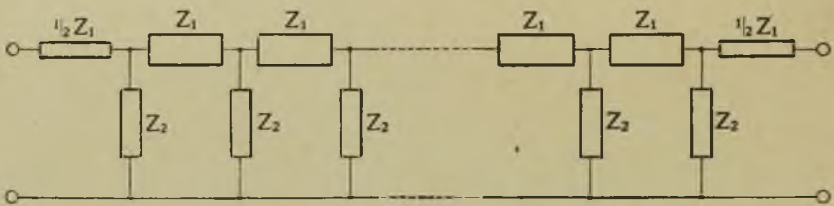
$$\hat{Z}_1 = \hat{Z}_z \hat{S},$$

$$2 \hat{Z}_2 = \frac{\hat{Z}_z \hat{S}}{\hat{S} - 1},$$

z których możemy obliczyć oporności pozorne, wchodzące do układu zastępczego.

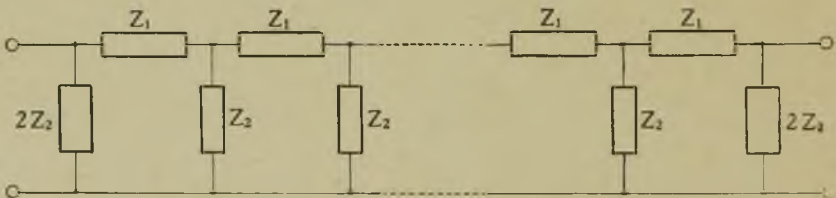
§ 89. Linje łańcuchowe.

Łącząc w szereg dowolną ilość rozpatrywanych poprzednio układów, zawierających po trzy oporności pozorne, otrzymamy więcej złożony układ, który nazywamy linią łańcuchową. Taką linię możemy rozpatrywać jako złożoną z jednakowych ogniw, każde ogniwo zawiera 3 oporności pozorne, zestawione albo według schematu I, typu *T* (rys. 174) albo według schematu II, typu *Π* (rys. 175). W pierwszym przypadku otrzymamy linię łańcuchową typu *T* (rys. 176), w drugim — linię typu *Π* (rys. 177).



Rys. 176.

Oba typy linii łańcuchowej w układzie swym różnią się tylko na początku i na końcu, mianowicie w typie *T* mamy na początku i na końcu szeregowo włączoną oporność pozorną $\frac{1}{2} Z_1$, zaś w drugim typie *Π* mamy na początku i na końcu równoległe włączoną oporność pozorną $2 Z_2$.



Rys. 177.

Będziemy oznaczali przez n liczbę ogniw w łańcuchu, zaś przez U i I , z odpowiednimi indeksami napięcia i prądu w końcu każdego ogniwa; U_0 i I_0 oznaczać będą napięcie i prąd na początku łańcucha, czyli u źródła, zaś U_n i I_n te same wielkości przy odbiorniku; U_x i I_x oznaczać będą rozpatrywane wielkości w końcu ogniwa, oznaczonego w kierunku od źródła do odbiornika liczbą x .

W celu wyprowadzenia wzorów, dających wartości napięć i prądów w dowolnym ogniwie, rozpatrzmy dowolne dwa sąsiednie

ogniwa, określone liczbami x i $x+1$, najpierw dla linii typu T (rys. 178)

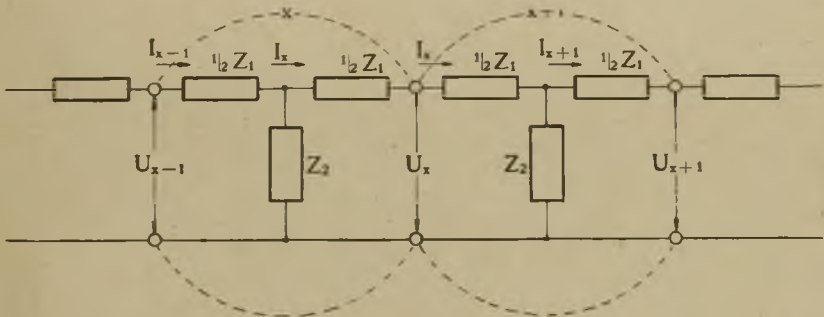
Będziemy mieli

$$\hat{U}_{x-1} - \hat{U}_x = \frac{1}{2} \hat{Z}_1 (\hat{I}_{x-1} + \hat{I}_x), \quad (9)$$

$$\hat{U}_x - \hat{U}_{x+1} = \frac{1}{2} \hat{Z}_1 (\hat{I}_x + \hat{I}_{x+1}), \quad (10)$$

$$\hat{I}_{x-1} - \hat{I}_x = \frac{1}{\hat{Z}_2} \left(\hat{U}_{x-1} - \frac{1}{2} \hat{Z}_1 \hat{I}_{x-1} \right), \quad (11)$$

$$\hat{I}_x - \hat{I}_{x+1} = \frac{1}{\hat{Z}_2} \left(\hat{U}_x - \frac{1}{2} \hat{Z}_1 \hat{I}_x \right). \quad (12)$$



Rys. 178.

Z tych 4-ch równań możemy wyrugować albo prądy i otrzymać zależność pomiędzy napięciami, albo też napięcia i otrzymać zależność między prądami; wyrugujmy prądy np. w ten sposób: z równań (9) i (11) mamy

$$\hat{I}_{x-1} + \hat{I}_x = \frac{2}{\hat{Z}_1} \left(\hat{U}_{x-1} - \hat{U}_x \right), \quad (13)$$

$$\hat{I}_{x-1} - \hat{I}_x = \frac{1}{\hat{Z}_2} \left(\hat{U}_{x-1} - \frac{1}{2} \hat{Z}_1 \hat{I}_{x-1} \right); \quad (14)$$

po dodaniu otrzymujemy

$$2\hat{I}_{x-1} = \left(\frac{2}{\hat{Z}_1} + \frac{1}{\hat{Z}_2} \right) \hat{U}_{x-1} - \frac{2}{\hat{Z}_1} \hat{U}_x - \frac{\hat{Z}_1}{2\hat{Z}_2} \hat{I}_{x-1},$$

albo

$$\hat{I}_{x-1} \left(2 + \frac{\hat{Z}_1}{2 \hat{Z}_2} \right) = \frac{\hat{Z}_1 + 2 \hat{Z}_2}{\hat{Z}_1 \hat{Z}_2} \hat{U}_{x-1} - \frac{2}{\hat{Z}_1} \hat{U}_x.$$

Oznaczając, jak i poprzednio (6)

$$1 + \frac{\hat{Z}_1}{2 \hat{Z}_2} = \hat{S}, \quad (15)$$

przepiszemy ostatnie równanie w postaci

$$\hat{I}_{x-1} (\hat{S} + 1) = \frac{2 \hat{S}}{\hat{Z}_1} \hat{U}_{x-1} - \frac{2}{\hat{Z}_1} \hat{U}_x,$$

skąd

$$\hat{I}_{x-1} = \frac{2}{\hat{Z}_1 (\hat{S} + 1)} (\hat{S} \hat{U}_{x-1} - \hat{U}_x); \quad (16)$$

podstawiając tę wartość \hat{I}_{x-1} do równania (13), będziemy mieli

$$\begin{aligned} \hat{I}_x &= \frac{2}{\hat{Z}_1} (\hat{U}_{x-1} - \hat{U}_x) - \frac{2}{\hat{Z}_1 (\hat{S} + 1)} (\hat{S} \hat{U}_{x-1} - \hat{U}_x) = \\ &= \frac{2}{\hat{Z}_1 (\hat{S} + 1)} [(\hat{S} + 1) \hat{U}_{x-1} - (\hat{S} + 1) \hat{U}_x - \hat{S} \hat{U}_{x-1} + \hat{U}_x]; \end{aligned}$$

ostatecznie po skróceniu

$$\hat{I}_x = \frac{2}{\hat{Z}_1 (\hat{S} + 1)} (\hat{U}_{x-1} - \hat{S} \hat{U}_x). \quad (17)$$

Z równania (12) mamy

$$\hat{I}_{x+1} = \hat{I}_x - \frac{1}{\hat{Z}_2} \left(\hat{U}_x - \frac{1}{2} \hat{Z}_1 \hat{I}_x \right) = \hat{I}_x \left(1 + \frac{\hat{Z}_1}{2 \hat{Z}_2} \right) - \frac{\hat{U}_x}{\hat{Z}_2},$$

zaś, po uwzględnieniu (17) oraz (15),

$$\begin{aligned} \hat{I}_{x+1} &= \frac{2 \hat{S}}{\hat{Z}_1 (\hat{S} + 1)} (\hat{U}_{x-1} - \hat{S} \hat{U}_x) - \frac{\hat{U}_x}{\hat{Z}_2} = \\ &= \frac{2 \hat{S}}{\hat{Z}_1 (\hat{S} + 1)} \hat{U}_{x-1} - \left(\frac{2 \hat{S}^2}{\hat{Z}_1 (\hat{S} + 1)} + \frac{1}{\hat{Z}_2} \right) \hat{U}_x. \end{aligned} \quad (18)$$

Znalezione ze wzorów (17) i (18) wartości \hat{I}_x i \hat{I}_{x+1} podstawiamy do równania (10), wtedy

$$\begin{aligned} \hat{U}_x - \hat{U}_{x+1} &= \frac{1}{2} \hat{Z}_1 \left[\frac{2}{\hat{Z}_1(\hat{S}+1)} (\hat{U}_{x-1} - \hat{S} \hat{U}_x) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\hat{S}}{\hat{Z}_1(\hat{S}+1)} \hat{U}_{x-1} - \left(\frac{2\hat{S}^2}{\hat{Z}_1(\hat{S}+1)} + \frac{1}{\hat{Z}_2} \right) \hat{U}_x \right] = \\ &= \frac{1}{\hat{S}+1} (\hat{U}_{x-1} - \hat{S} \hat{U}_x) + \frac{\hat{S}}{\hat{S}+1} \hat{U}_{x-1} - \frac{\hat{S}^2}{\hat{S}+1} \hat{U}_x - \frac{\hat{Z}_1}{2\hat{Z}_2} \hat{U}_x; \end{aligned}$$

zamieniając na podstawie (15) $\frac{\hat{Z}_1}{2\hat{Z}_2}$ przez $\hat{S}-1$ i łącząc podobne wyrazy, otrzymujemy

$$\hat{U}_{x+1} - \left[\frac{1}{\hat{S}+1} (\hat{S}^2 + \hat{S}) + \hat{S} - 1 + 1 \right] \hat{U}_x + \left(\frac{\hat{S}+1}{\hat{S}+1} \right) \hat{U}_{x-1} = 0,$$

albo

$$\hat{U}_{x+1} - 2\hat{S} \hat{U}_x + \hat{U}_{x-1} = 0. \quad (19)$$

Rozwiązanie tego równania z powodu analogii z długą linią szukamy w postaci

$$\hat{U}_x = A e^{kx} + B e^{-kx}, \quad (20)$$

gdzie A , B i k od x nie zależą; wtedy

$$\hat{U}_{x+1} = A e^k e^{kx} + B e^{-k} e^{-kx}, \quad (21)$$

$$\hat{U}_{x-1} = A e^{-k} e^{kx} + B e^k e^{-kx}; \quad (22)$$

podstawiając te wartości do (19), otrzymamy

$$\begin{aligned} A e^k e^{kx} + B e^{-k} e^{-kx} - 2\hat{S}(A e^{kx} + B e^{-kx}) + \\ + A e^{-k} e^{kx} + B e^k e^{-kx} = 0 \end{aligned}$$

albo

$$(A e^{kx} + B e^{-kx})(e^k + e^{-k} - 2\hat{S}) = 0;$$

z tego wzoru wynika, że wartość \hat{U}_x ze wzoru (20) będzie rozwiązaniem równania (19), gdy spełniony będzie warunek

$$e^k + e^{-k} - 2\hat{S} = 0,$$

czyli

$$\frac{e^k + e^{-k}}{2} = \hat{S}, \quad (23)$$

lub (15)

$$\cos \text{hip } k = \hat{S} = 1 + \frac{\hat{Z}_1}{2\hat{Z}_2}. \quad (24)$$

Z tego wzoru widzimy, że ponieważ \hat{Z}_1 , i \hat{Z}_2 są naogół liczbami zespolonymi, przeto i k jest wogóle liczbą zespoloną.

Oznaczmy $k = a + jb$, gdzie a i b liczby rzeczywiste, wtedy

$$\begin{aligned} \cos \text{hip } k &= \frac{e^{a+jb} + e^{-(a+jb)}}{2} = \frac{e^a (\cos b + j \sin b)}{2} + \\ &\frac{e^{-a} (\cos b - j \sin b)}{2} = \frac{e^a + e^{-a}}{2} \cos b + j \frac{e^a - e^{-a}}{2} \sin b = \\ &= \cos \text{hip } a \cos b + j \sin \text{hip } a \sin b. \end{aligned} \quad (25)$$

Łatwo zauważyć, że analogicznie do długiej linii jednorodnej współczynnik a jest współczynnikiem tłumienia, zaś współczynnik b wpływa na przesunięcie fazy i może być nazwany współczynnikiem przesunięcia fazy.

Założmy

$$1 + \frac{\hat{Z}_1}{2\hat{Z}_2} = p + jq, \quad (26)$$

gdzie p i q liczby rzeczywiste, wtedy na podstawie wzorów (24), (25) i (26) będziemy mieli

$$p = \cos \text{hip } a \cos b, \quad (27)$$

$$q = \sin \text{hip } a \sin b; \quad (28)$$

podnosząc do kwadratu każdy z tych wzorów, otrzymamy

$$p^2 = \cos^2 \text{hip } a \cos^2 b = (1 + \sin^2 \text{hip } a) (1 - \sin^2 b),$$

$$q^2 = \sin^2 \text{hip } a \sin^2 b;$$

rozwiązując ostatnie dwa równania względem $\sin \text{hip}^2 a$ i $\sin^2 b$, znajdujemy

$$\sin \text{hip}^2 a = -\frac{1}{2} \left(1 - p^2 - q^2 \right) + \sqrt{q^2 + \frac{1}{4} \left(1 - p^2 - q^2 \right)^2}, \quad (29)$$

$$\sin^2 b = \frac{1}{2} \left(1 - p^2 - q^2 \right) + \sqrt{q^2 + \frac{1}{4} \left(1 - p^2 - q^2 \right)^2}. \quad (30)$$

Przy rozwiązywaniu równań kwadratowych pod pierwiastkiem wzięliśmy tylko znak $+$ z tego względu, że niewiadome $\sin \text{hip}^2 a$ oraz $\sin^2 b$ jako kwadraty liczb rzeczywistych muszą być liczbami dodatnimi.

Dla znalezienia wzoru na prąd podstawiamy do (17) wartości \hat{U}_{x-1} i \hat{U}_x ze wzorów (22) i (20), wtedy

$$\begin{aligned} \hat{I}_x &= \frac{2}{\hat{Z}_1(\hat{S} + 1)} \left[A e^{-k} e^{kx} + B e^k e^{-kx} - A \hat{S} e^{kx} - B \hat{S} e^{-kx} \right] = \\ &= \frac{2}{\hat{Z}_1(\hat{S} + 1)} \left[A e^{kx} (e^{-k} - \hat{S}) + B e^{-kx} (e^k - \hat{S}) \right], \end{aligned}$$

ale na podstawie (23)

$$e^{-k} - \hat{S} = \frac{e^{-k} - e^k}{2} = -\frac{e^k - e^{-k}}{2},$$

$$e^k - \hat{S} = \frac{e^k - e^{-k}}{2},$$

wobec tego

$$\begin{aligned} \hat{I}_x &= \frac{2(e^k - e^{-k})}{\hat{Z}_1(e^k + e^{-k} + 2)} (B e^{-kx} - A e^{kx}) = \\ &= \frac{2 \left(e^{\frac{k}{2}} - e^{-\frac{k}{2}} \right) \left(e^{\frac{k}{2}} + e^{-\frac{k}{2}} \right)}{\hat{Z}_1 \left(e^{\frac{k}{2}} + e^{-\frac{k}{2}} \right)^2} (B e^{-kx} - A e^{kx}) = \\ &= \frac{2}{\hat{Z}_1} \operatorname{tg} \text{hip} \frac{k}{2} (B e^{-kx} - A e^{kx}). \end{aligned} \quad (31)$$

Oznaczmy

$$\hat{Z} = \frac{\hat{Z}_1}{2 \operatorname{tg} \operatorname{hip} \frac{k}{2}}; \quad (32)$$

na podstawie wzoru

$$\cos \operatorname{hip} k = 2 \sin \operatorname{hip}^2 \frac{k}{2} + 1,$$

z uwzględnieniem (24), będziemy mieli

$$\begin{aligned} \sin \operatorname{hip} \frac{k}{2} &= \sqrt{\frac{\hat{Z}_1}{4 \hat{Z}_2}}, \\ 2 \operatorname{tg} \operatorname{hip} \frac{k}{2} &= 2 \frac{\sin \operatorname{hip} \frac{k}{2}}{\cos \operatorname{hip} \frac{k}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{\hat{Z}_1}{\hat{Z}_2}}}{\cos \operatorname{hip} \frac{k}{2}}, \end{aligned}$$

wobec czego wzór (32) możemy napisać również w postaci

$$\hat{Z} = \sqrt{\hat{Z}_1 \hat{Z}_2} \cos \operatorname{hip} \frac{k}{2}. \quad (33)$$

Zestawiając wzory (20 i (31), otrzymamy w najogólniejszej postaci wyrażenia dla napięcia i prądu w dowolnym ogniwie:

$$\hat{U}_x = A e^{kx} + B e^{-kx}, \quad (34)$$

$$\hat{I}_x \hat{Z} = -A e^{kx} + B e^{-kx}; \quad (35)$$

wielkość \hat{Z} , odgrywająca rolę oporności, określoną wzorem (32), lub (33), przez analogję do długiej linii jednorodnej, nazwiemy opornością falową linii łańcuchowej.

Wchodzące do wzorów (34) i (35) wielkości A i B możemy określić na podstawie wiadomych wartości napięcia i prądu w określonym miejscu; najczęściej wchodzi tu w grę te wielkości na początku i na końcu linii łańcuchowej. Ponieważ dla początku $x = 0$, przeto ze wzorów (34) i (35) dla napięcia i prądu na początku otrzymamy

$$\hat{U}_0 = A + B,$$

$$\hat{I}_0 \hat{Z} = -A + B,$$

skąd

$$A = \frac{\hat{U}_0 - \hat{I}_0 \hat{Z}}{2},$$

$$B = \frac{\hat{U}_0 + \hat{I}_0 \hat{Z}}{2}.$$

Wobec tego z tychże wzorów (34) i (35) otrzymamy

$$\hat{U}_x = \frac{\hat{U}_0 - \hat{I}_0 \hat{Z}}{2} e^{kx} + \frac{\hat{U}_0 + \hat{I}_0 \hat{Z}}{2} e^{-kx}, \quad (36)$$

$$\hat{I}_x \hat{Z} = - \frac{\hat{U}_0 - \hat{I}_0 \hat{Z}}{2} e^{kx} + \frac{\hat{U}_0 + \hat{I}_0 \hat{Z}}{2} e^{-kx}, \quad (37)$$

lub

$$\hat{U}_x = \hat{U}_0 \frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2} - \hat{I}_0 \hat{Z} \frac{e^{kx} - e^{-kx}}{2}, \quad (38)$$

$$\hat{I}_x \hat{Z} = \hat{I}_0 \hat{Z} \frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2} - \hat{U}_0 \frac{e^{kx} - e^{-kx}}{2}, \quad (39)$$

albo wreszcie w funkcjach hiperbolicznych

$$\hat{U}_x = \hat{U}_0 \cos \text{hip } kx - \hat{I}_0 \hat{Z} \sin \text{hip } kx, \quad (40)$$

$$\hat{I}_x \hat{Z} = \hat{I}_0 \hat{Z} \cos \text{hip } kx - \hat{U}_0 \sin \text{hip } kx. \quad (41)$$

Jak widać z tych wzorów napięcie i prąd w dowolnym ogniwie jest wynikiem nakładania się dwóch fal, idących naprzeciw siebie, z których jedna jest falą postępującą od początku do końca linii, druga falą odbitą od końca (rozumowania te same, co były przeprowadzone dla długiej linii jednorodnej). Gdy linja łańcuchowa ma bardzo dużo ogniw (teoretycznie nieskończenie dużo), wówczas fali odbitej niema, gdyż napięcie i prąd w końcu w tym przypadku muszą się równać zeru; wzory (34) i (35) wskazują, że powinno być wtedy

$$\hat{U}_x = Be^{-kx},$$

$$\hat{I}_x \hat{Z} = Be^{-kx},$$

skąd

$$\hat{Z} = \frac{\hat{U}_x}{\hat{I}_x},$$

a także

$$\hat{Z} = \frac{\hat{U}_0}{\hat{I}_0}; \quad (42)$$

ponieważ ostatni wyraz stanowi oporność pozorną łańcucha, więc w rozpatrywanym przypadku oporność pozorną łańcucha równa się oporności falowej.

Uwzględniając wzór (42) otrzymamy w danym przypadku, ponieważ fale ulegają jedynie tłumieniu, ze wzorów (36) i (37)

$$\left. \begin{aligned} \hat{U}_x &= \hat{U}_0 e^{-kx}, \\ \hat{I}_x &= \hat{I}_0 e^{-kx}; \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

dla końca łańcucha, gdy $x = n$.

$$\left. \begin{aligned} \hat{U}_n &= \hat{U}_0 e^{-kn}, \\ \hat{I}_n &= \hat{I}_0 e^{-kn}. \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

W wyżej wyprowadzonych wzorach ogólnych (36) do (41) nie wprowadzaliśmy oporności odbiornika, włączonego w końcu ostatniego ogniwa. Rozpatrzmy teraz, jak się zmieniają te wzory, gdy przyjmiemy pod uwagę warunki, istniejące na końcu łańcucha.

Jeżeli linja łańcuchowa na końcu niema obciążenia, to znaczy jest w stanie jałowym, wtedy $I_n = 0$; ze wzoru (41), zakładając $x = n$, otrzymamy

$$\hat{I}_0 \hat{Z} \cos \text{hip } kn = \hat{U}_0 \sin \text{hip } kn,$$

lub

$$\hat{I}_0 \hat{Z} = \hat{U}_0 \text{tg hip } kn; \quad (45)$$

po podstawieniu tej wartości $\hat{I}_0 \hat{Z}$ do wzoru (40) dla $x = n$, będziemy mieli

$$\hat{U}_n = \hat{U}_0 (\cos \text{hip } kn - \sin \text{hip } kn \cdot \text{tg hip } kn),$$

lub po uproszczeniu

$$\hat{U}_n = \frac{\hat{U}_0}{\cos \text{hip } kn} \quad (46)$$

Z ostatniego wzoru można, w rozpatrywanym przypadku, znaleźć napięcie w końcu łańcucha, gdy wiadome jest ono na po-

czątku lub odwrotnie. Prąd w dowolnem ogniwie da się obliczyć wówczas ze wzoru, który otrzymamy podstawiając (45) do (41), wtedy

$$\begin{aligned} \hat{I}_x &= \hat{I}_0 \left(\cos \text{hip } kx - \frac{\sin \text{hip } kx}{\text{tg hip } kn} \right) = \\ &= \hat{I}_0 \frac{\sin \text{hip } k(n-x)}{\sin \text{hip } kn} \end{aligned} \quad (47)$$

W przypadku, gdy linja łańcuchowa jest w stanie zwarcia, to znaczy końce ostatniego ogniwa są zwarte, wtedy $U_n = 0$; ze wzoru (40) otrzymujemy dla $x = n$

$$\hat{U}_0 \cos \text{hip } kn = \hat{I}_0 \hat{Z} \sin \text{hip } kn,$$

lub

$$\hat{U}_0 = \hat{I}_0 \hat{Z} \text{tg hip } kn; \quad (48)$$

podstawiając tę wartość U_0 do (41) i zakładając $x = n$, otrzymamy

$$\hat{I}_n = \hat{I}_0 (\cos \text{hip } kn - \sin \text{hip } kn \cdot \text{tg hip } kn),$$

lub po uproszczeniu

$$\hat{I}_n = \frac{\hat{I}_0}{\cos \text{hip } kn}; \quad (49)$$

wzór ten daje zależność pomiędzy prądami na początku i w końcu łańcucha, gdy ostatnie ogniwo jest zwarte. Podstawiając wartość $\hat{I}_0 \hat{Z}$ ze wzoru (48) do wzoru (40), otrzymamy wzór dla napięcia w dowolnem ogniwie

$$\hat{U}_x = \hat{U}_0 \cos \text{hip } kx - \frac{\sin \text{hip } kx}{\text{tg hip } kn} = \hat{U}_0 \frac{\sin \text{hip } k(n-x)}{\sin \text{hip } kn} \quad (50)$$

Ze wzorów (45) i (48) możemy otrzymać oporności pozorne linji łańcuchowej, gdy ostatnie jej ogniwo jest w stanie jałowym lub w stanie zwarcia; oznaczając te oporności pozorne odpowiednio przez Z_0 i Z_z , otrzymamy znane z teorii długich linji jednorodnych wzory

$$\hat{Z}_0 = \hat{Z} \cotg \text{hip } kn,$$

$$\hat{Z}_z = \hat{Z} \text{tg hip } kn.$$

Wzory (36) do (41) uzależniają napięcia i prądy w dowolnym ogniwie od napięcia i prądu na początku łańcucha; oczywiście można uzależnić rozpatrywane wielkości od napięcia i prądu w końcu: wtedy, zakładając we wzorach (34) i (35) $x = n$, otrzymamy

$$Ae^{kn} + Be^{-kn} = \hat{U}_n,$$

$$-Ae^{kn} + Be^{-kn} = \hat{I}_n \hat{Z},$$

skąd

$$A = \frac{\hat{U}_n - \hat{I}_n \hat{Z}}{2} e^{-kn}, \quad B = \frac{\hat{U}_n + \hat{I}_n \hat{Z}}{2} e^{kn},$$

wobec czego wzory dla napięcia i prądu po odpowiednich uproszczeniach przybiorą postać:

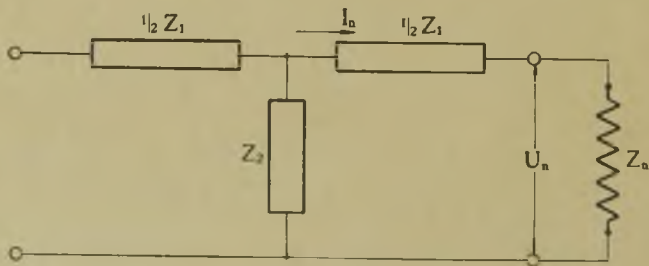
$$\hat{U}_x = \frac{\hat{U}_n + \hat{I}_n \hat{Z}}{2} e^{k(n-x)} + \frac{\hat{U}_n - \hat{I}_n \hat{Z}}{2} e^{-k(n-x)} =$$

$$= \hat{U}_n \cos \text{hip } k(n-x) + \hat{I}_n \hat{Z} \sin \text{hip } k(n-x), \quad (51)$$

$$\hat{I}_x \hat{Z} = \frac{\hat{U}_n + \hat{I}_n \hat{Z}}{2} e^{k(n-x)} - \frac{\hat{U}_n - \hat{I}_n \hat{Z}}{2} e^{-k(n-x)} =$$

$$= \hat{U}_n \sin \text{hip } k(n-x) + \hat{I}_n \hat{Z} \cos \text{hip } k(n-x); \quad (52)$$

z tych wzorów moglibyśmy otrzymać również wzory w przypadkach, gdy ostatnie ogniwo jest w stanie jałowym lub w stanie zwarcia, zakładając kolejno $I_n = 0$ i $U_n = 0$.



Rys. 179.

Rozpatrzmy teraz przypadek, gdy w końcu ostatniego ogniwa włączony jest odbiornik, którego oporność pozorną wynosi Z_n (rys. 179). Wtedy będziemy mieli dodatkowy warunek $\hat{U}_n = \hat{I}_n \hat{Z}_n$.

Uwzględniając ten warunek we wzorach (51) i (52), otrzymamy

$$\hat{U}_x = \hat{U}_n \left[\cos \text{hip } k(n-x) + \frac{\hat{Z}}{\hat{Z}_n} \sin \text{hip } k(n-x) \right],$$

$$\hat{I}_x = \hat{I}_n \left[\cos \text{hip } k(n-x) + \frac{\hat{Z}_n}{\hat{Z}} \sin \text{hip } k(n-x) \right];$$

dla $x=0$, t. j. na początku łańcucha

$$\bar{U}_0 = \bar{U}_n \left(\cos \text{hip } kn + \frac{\hat{Z}}{\hat{Z}_n} \sin \text{hip } kn \right), \quad (53)$$

$$\bar{I}_0 = \bar{I}_n \left(\cos \text{hip } kn + \frac{\hat{Z}_n}{\hat{Z}} \sin \text{hip } kn \right). \quad (54)$$

Wzory te dają możność w najogólniejszym przypadku obliczyć stosunek napięć względnie prądów na początku i na końcu linii łańcuchowej o wiadomej liczbie ogni i wiadomych opornościach Z_1 i Z_2 oraz Z_n .

W przypadku szczególnym, gdy oporność odbiornika Z_n równa jest oporności falowej łańcucha Z , czyli

$$\hat{Z}_n = \hat{Z},$$

z równań (53) i (54) otrzymamy

$$\hat{U}_0 = \hat{U}_n (\cos \text{hip } kn + \sin \text{hip } kn) = \hat{U}_n e^{kn},$$

$$\hat{I}_0 = \hat{I}_n (\cos \text{hip } kn + \sin \text{hip } kn) = \hat{I}_n e^{kn},$$

albo

$$\hat{U}_n = \hat{U}_0 e^{-kn}; \quad \hat{I}_n = \hat{I}_0 e^{-kn};$$

wzory te są identyczne ze wzorami (44) dla linii łańcuchowej o nieskończenie dużej ilości ogni; a więc, gdy odbiornik posiada oporność równą oporności falowej łańcucha, linja o skończonej liczbie ogni zachowuje się tak, jak linja o nieskończenie dużej ilości ogni.

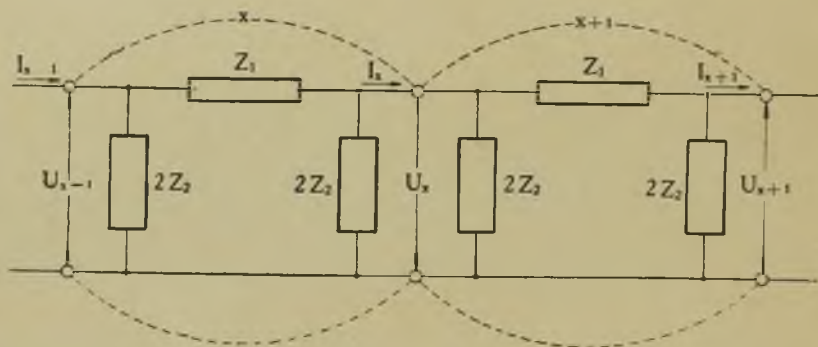
Rozpatrzmy teraz linję łańcuchową typu II i dwa jej dowolne sąsiednie ogniwa, określone liczbami x i $x+1$ (rys. 180).

Będziemy mieli

$$\hat{U}_{x-1} - \hat{U}_x = \hat{Z}_1 \left(\hat{I}_{x-1} - \frac{\hat{U}_{x-1}}{2\hat{Z}_2} \right), \quad (55)$$

$$\hat{U}_x - \hat{U}_{x+1} = \hat{Z}_1 \left(\hat{I}_x - \frac{\hat{U}_x}{2\hat{Z}_2} \right), \quad (56)$$

$$\hat{I}_{x-1} - \hat{I}_x = \frac{1}{2\hat{Z}_2} (\hat{U}_{x-1} + \hat{U}_x). \quad (57)$$



Rys. 180.

Z pierwszych dwóch równań znajdujemy

$$\hat{I}_{x-1} - \hat{I}_x = \frac{\hat{U}_{x-1} - \hat{U}_x}{\hat{Z}_1} + \frac{\hat{U}_{x-1}}{2\hat{Z}_2} - \frac{\hat{U}_x - \hat{U}_{x+1}}{\hat{Z}_1} - \frac{\hat{U}_x}{2\hat{Z}_2}.$$

Porównując ten rezultat z równaniem (57), otrzymamy

$$\frac{1}{2\hat{Z}_2} (\hat{U}_{x-1} + \hat{U}_x) = \frac{\hat{U}_{x-1} + \hat{U}_x}{\hat{Z}_1} + \frac{\hat{U}_{x-1}}{2\hat{Z}_2} - \frac{\hat{U}_x}{\hat{Z}_1} + \frac{\hat{U}_{x+1}}{\hat{Z}_1} - \frac{\hat{U}_x}{2\hat{Z}_2}$$

i po uproszczeniu

$$\hat{U}_{x-1} - \left(2 + \frac{\hat{Z}_1}{\hat{Z}_2} \right) \hat{U}_x + \hat{U}_{x+1} = 0. \quad (58)$$

Jak i w linii typu T szukamy rozwiązania tego równania w postaci

$$\hat{U}_x = A e^{hx} + B e^{-hx}, \quad (59)$$

wtedy

$$\hat{U}_{x-1} = A e^{-k} e^{kx} + B e^k e^{-kx}, \quad (60)$$

$$\hat{U}_{x+1} = A e^k e^{kx} + B e^{-k} e^{-kx}, \quad (61)$$

po podstawieniu do równania (58), otrzymamy

$$Ae^{-k} + Be^k e^{-kx} - \left(2 + \frac{\hat{Z}_1}{\hat{Z}_2} \right) (Ae^{kx} + Be^{-kx}) + \\ + Ae^k e^{kx} + Be^{-k} e^{-kx} = 0,$$

albo

$$Ae^{kx} \left[e^k + e^{-k} - \left(2 + \frac{\hat{Z}_1}{\hat{Z}_2} \right) \right] + B e^{-kx} \left[e^k + e^{-k} - \left(2 + \frac{\hat{Z}_1}{\hat{Z}_2} \right) \right] = 0,$$

$$(Ae^{kx} + B e^{-kx}) \left[e^k + e^{-k} - \left(2 + \frac{\hat{Z}_1}{\hat{Z}_2} \right) \right] = 0,$$

skąd widać, że rozwiązanie równania (58) w postaci (59) jest możliwe, przyczem powinno być

$$e^k + e^{-k} = 2 + \frac{\hat{Z}_1}{\hat{Z}_2},$$

$$\frac{e^k + e^{-k}}{2} = 1 + \frac{\hat{Z}_1}{2\hat{Z}_2},$$

czyli

$$\cos \text{hip } k = 1 + \frac{\hat{Z}_1}{2\hat{Z}_2} = \hat{S}, \quad (62)$$

tak samo jak dla linii typu T (24), gdzie wskazano, w jaki sposób znaleźć $k = a + jb$. Dla wyprowadzenia wzoru na prąd weźmiemy równanie (56), z którego

$$\hat{I}_x \hat{Z}_1 = \hat{U}_x \left(1 + \frac{\hat{Z}_1}{2\hat{Z}_2} \right) \hat{U}_{x+1} = \hat{S} \hat{U}_x - \hat{U}_{x+1};$$

podstawiając do tego równania wartości \hat{U}_x i \hat{U}_{x+1} z (59) i (61), będziemy mieli

$$\begin{aligned} \hat{I}_x \hat{Z}_1 &= A \hat{S} e^{kx} + B \hat{S} e^{-kx} - A e^k e^{kx} - B e^{-k} e^{-kx} = \\ &= A e^{kx} (\hat{S} - e^k) + B e^{-kx} (\hat{S} - e^{-k}); \end{aligned}$$

ale

$$\hat{S} = \cos \text{hip } k = \frac{e^k + e^{-k}}{2}.$$

więc

$$\hat{S} - e^k = -\frac{e^k - e^{-k}}{2}, \quad \hat{S} - e^{-k} = \frac{e^k - e^{-k}}{2},$$

wobec czego

$$\hat{I}_x \hat{Z}_1 = \frac{e^k - e^{-k}}{2} (B e^{-kx} - A e^{kx})$$

albo

$$\hat{I}_x \frac{\hat{Z}_1}{\sin \text{hip } k} = B e^{-kx} - A e^{kx}; \quad (63)$$

oporność falowa w tym przypadku będzie

$$\hat{Z} = \frac{\hat{Z}_1}{\sin \text{hip } k}, \quad (64)$$

a ponieważ

$$\text{tg hip } \frac{k}{2} = \frac{\cos \text{hip } k - 1}{\sin \text{hip } k} = \frac{\hat{Z}_1}{2 \hat{Z}_2 \sin \text{hip } k}$$

przeto oporność falową można napisać jeszcze w postaci

$$\hat{Z} = 2 \hat{Z}_2 \text{tg hip } \frac{k}{2}. \quad (65)$$

Jeżeli, na podstawie wzoru (62),

$$\sin \text{hip } k = \sqrt{\cos^2 \text{hip } k - 1} = \sqrt{\frac{\hat{Z}_1}{\hat{Z}_2} + \frac{\hat{Z}_1^2}{4 \hat{Z}_2^2}},$$

wtedy ze wzoru (64) otrzymamy

$$\hat{Z} = \frac{\hat{Z}_1}{\sqrt{\frac{\hat{Z}_1}{\hat{Z}_2} + \frac{\hat{Z}_1^2}{4 \hat{Z}_2^2}}} = \sqrt{\frac{\hat{Z}_1 \hat{Z}_2}{1 + \frac{\hat{Z}_1}{4 \hat{Z}_2}}}. \quad (66)$$

W ten sposób, zestawiając wzory (59) i (63) przy uwzględnieniu (64), będziemy mieli

$$\hat{U}_x = A e^{kx} + B e^{-kx},$$

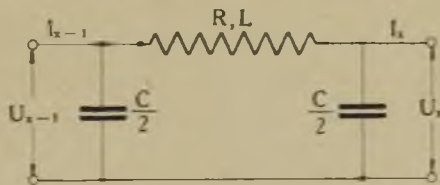
$$\hat{I}_x \hat{Z} = B e^{-kx} - A e^{kx},$$

czyli wzory takie same, jak dla linii typu T (34) i (35).

Ponieważ warunki na początku i na końcu linii są w tym przypadku takie same, co i w poprzednim, to znaczy, że napięcie i prąd wynoszą dla $x=0$, U_0 i I_0 , zaś dla $x=n$ odpowiednio U_n i I_n , przeto dla napięć i prądów w dowolnym ogniwie otrzymujemy zupełnie te same wzory, jakie wyprowadziliśmy dla linii typu T ; różnica polega tylko na tem, że oporność falowa Z ma dla linii typu Π inną wartość, określoną wzorami (64), (65) lub (66).

§ 90. Filtry elektryczne.

Filtr dławikowy. Zbadajmy własności linii łańcuchowej przy zmiennej częstotliwości. Rozpatrzmy np. linię typu Π , którego ogniwo dowolne przedstawione jest na rys. 181.



Rys 181.

W rozpatrywanym przykładzie

$$\hat{Z}_1 = R + j\omega L,$$

$$2\hat{Z}_2 = \frac{2}{j\omega C},$$

czyli

$$\hat{Z}_2 = \frac{1}{j\omega C};$$

wobec tego, na podstawie (66),

$$\hat{Z} = \sqrt{\frac{(R + j\omega L) \frac{1}{j\omega C}}{1 + j \frac{1}{4} (R + j\omega L) j\omega C}},$$

co po przekształceniu daje

$$\hat{Z} = \sqrt{\frac{\omega L \left(1 - \frac{1}{4} \omega^2 L C\right) - \frac{1}{4} R^2 \omega C - j R}{\omega C \left[\left(1 - \frac{1}{4} \omega^2 L C\right)^2 + \frac{1}{16} R^2 \omega^2 C^2\right]}}. \quad (67)$$

Następnie, na podstawie (26), otrzymamy

$$p + jq = 1 + \frac{1}{2} (R + j\omega L) j\omega C = 1 - \frac{1}{2} \omega^2 L C + j \frac{1}{2} R \omega C,$$

skąd

$$p = 1 - \frac{1}{2} \omega^2 L C, \quad (68)$$

$$q = \frac{1}{2} R \omega C. \quad (69)$$

Dla określonej częstotliwości, względnie pulsacji ω , gdy są wiadome R , L i C , obliczamy ze wzorów (68) i (69) p i q ; następnie ze wzorów (29) i (30) znajdziemy a i b , a więc i współczynnik falowy k .

Mając oporność falową \hat{Z} , możemy na podstawie wyżej wprowadzonych wzorów w każdym poszczególnym przypadku (stan jałowy, stan zwarcia i stan wiadomego obciążenia) znaleźć napięcie oraz natężenie prądu w dowolnym ogniwie.

Aby zbadać zachowanie się rozpatrzonej linii łańcuchowej przy rozmaitych częstotliwościach, dogodniej będzie wprowadzić t. zw. częstotliwość względnie pulsację drgań swobodnych ogniwa. Gdy mamy obwód zamknięty, zawierający L i C (przy $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$), przyczem zachodzi wyładowanie kondensatora, wówczas w takim obwodzie, który nazywamy obwodem oscylacyjnym, powstaje prąd drgający czyli oscylacyjny; mówimy, że w obwodzie powstają drgania własne, które przy braku R byłyby swobodne o stałej amplitudzie, przyczem pulsacja takich drgań swobodnych wynosi

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (70)$$

Jeżeli w naszym przykładzie rozpatrzemy jedno ogniwo jako obwód zamknięty i spostrzeżemy, że oba kondensatory, posiadające każdy pojemność równą $\frac{C}{2}$, są połączone szeregowo, więc pojemność wypadkowa w tym obwodzie ogniwa wynosi $\frac{C}{4}$; na podstawie wzoru (70) znajdziemy, że pulsacja drgań swobodnych ogniwa wynosi

$$\omega_0 = \frac{2}{\sqrt{LC}}. \quad (71)$$

Oznaczmy

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \eta, \quad (72)$$

wtedy

$$\omega = \omega_0 \eta = \frac{2}{\sqrt{LC}} \eta; \quad (73)$$

podstawiając tę wartość ω do wzorów (68) i (69) i oznaczając dla skrótowania

$$R \sqrt{\frac{C}{L}} = \rho, \quad (74)$$

znajdziemy

$$p = 1 - 2\eta^2, \quad (75)$$

$$q = \rho \eta. \quad (76)$$

Dla wiadomego ogniwa R , L i C są dane, przyczem dla niezbyt wielkich częstotliwości wielkości te możemy uważać jako stałe; wtedy p i q będą funkcjami tylko η ; podstawiając te wartości p i q do wzorów (29) i (30), otrzymamy współczynniki a i b jako funkcje η .

Szczególnie ważne jest rozpatrzenie zmiany współczynnika tłumienia a przy zmianie częstotliwości, względnie η . Ponieważ zależność a od η stanowi funkcję bardzo skomplikowaną, przeto uprościmy nasze rozważanie w ten sposób, że wyraz $R \sqrt{\frac{C}{L}}$, który oznaczyliśmy przez ρ , przyjmiemy jako bardzo mały, co zresztą w praktyce jest przeważnie blizkie do rzeczywistości; wtedy dla

niezbyt dużych wartości η możemy na podstawie wzoru (76) założyć, że q , będąc zawsze wielkością dodatnią, jest bliskie zeru; wówczas wzory (27) i (28) dadzą nam w przybliżeniu

$$\cos \text{hip } a \cdot \cos b = p, \quad (77)$$

$$\sin \text{hip } a \cdot \sin b = 0. \quad (78)$$

Ponieważ $p = 1 - 2\eta^2$, gdzie $\eta = \frac{\omega}{\omega_0}$, przeto łatwo zauważyć, że największa wartość dla p wynosi 1, gdy $\eta = 0$, czyli $\omega = 0$; następnie dla $\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $p = 0$; dla $\eta = 1$, $p = -1$, zaś dla wszelkich wartości $\eta > 1$, $p < -1$. Zauważmy oprócz tego, że $\cos \text{hip } a$ ma najmniejszą wartość równą 1 dla $a = 0$, pozatem zawsze jest większy od 1, natomiast $\sin \text{hip } a$ ma najmniejszą wartość 0 dla $a = 0$, pozatem zawsze jest większy od 0;

$$\text{gdy } \eta \leq 1, \text{ czyli } \omega \leq \omega_0,$$

wtedy

$$-1 \leq p \leq 1,$$

$$-1 \leq \cos \text{hip } a \cos b \leq 1. \quad (79)$$

Wzór (78) wskazuje, że albo $a = 0$, albo $b = 0$ lub π , lecz warunkowi (79) wartość $a = 0$ zawsze czyni zadość, przy wszelkich możliwych wartościach $\cos b$ (dla $b = 0$ lub π , również $a = 0$), przeto w rozpatrywanym przypadku $a = 0$, zaś b zmienia się od 0 do 180° ; gdy $\eta > 1$, czyli $\omega > \omega_0$; wtedy $p < -1$.

Niech będzie $p = -k = -(2\eta^2 - 1)$, czyli $k = 2\eta^2 - 1 > 1$; wzory (77) i (78) dają wówczas

$$\cos \text{hip } a \cos b = -k,$$

$$\sin \text{hip } a \sin b = 0;$$

a nie może się równać 0, bo wtedy z pierwszego równania wypadłoby, że $\cos b = -k$ ma wartość bezwzględną większą od 1; wobec tego $b = 0$ lub π ; z pierwszego równania wynika, że ponieważ $\cos \text{hip } a > 1$, więc $\cos b$ powinno być ujemne, czyli $b = \pi$; wtedy $\cos b = -1$, zaś

$$\cos \text{hip } a = k = 2\eta^2 - 1,$$

skąd widać, że a rośnie i to szybko ze wzrostem η .

Z tych rozważań wynika, że w rozpatrzonej linii łańcuchowej współczynnik tłumienia $a=0$ (w rzeczywistości bardzo mały) dla wszystkich częstotliwości nie przekraczających częstotliwości drgań swobodnych ogniwa i że tłumienie szybko rośnie dla częstotliwości większych; natomiast współczynnik przesunięcia fazy b wzrasta od zera do 180° , gdy częstotliwość zmienia się od zera do częstotliwości drgań swobodnych i następnie przy dalszym wzroście częstotliwości ten współczynnik b pozostaje bez zmiany i stale jest równy 180° .

Na rys. 182 podany jest przebieg tych współczynników w zależności od η .

Za pomocą rozpatrzonego układu cewek i kondensatorów możemy więc oddzielić prądy, których częstotliwość przekracza częstotliwość drgań własnych ogniwa. Urządzenie tego rodzaju nazywamy filtrem elektrycznym. Filtr elektryczny, w którym, jak w naszym przypadku, cewki są połączone szeregowo, zaś kondensatory równolegle, nazywamy filtrem dławikowym; taki więc filtr przepuszcza prawie bez tłumienia prądy o częstotliwości mniejszej od częstotliwości drgań swobodnych, zatrzymując, czyli znacznie tłumiąc prądy o większej częstotliwości.

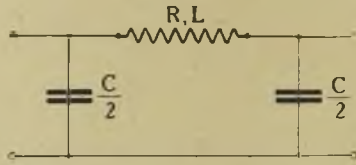
Filtry elektryczne mają szerokie zastosowanie w elektrotechnice, gdy zachodzi potrzeba tłumienia prądów określonych częstotliwości, a więc w radjotechnice, w telefonji, w miernictwie, dla otrzymania możliwie sinusoidalnego prądu zmiennego i t. d.

Obszar częstotliwości, które filtr elektryczny przepuszcza, nazywamy widmem filtru. W rozpatrzonym przykładzie widmo obejmuje częstotliwości od 0 do częstotliwości drgań swobodnych ogniwa; oczywiście widmo będzie tem większe, im większa będzie ta częstotliwość drgań swobodnych, zaś tę ostatnią częstotliwość możemy dowolnie ustalić, dobierając we wzorze (71) odpowiednio L i C .

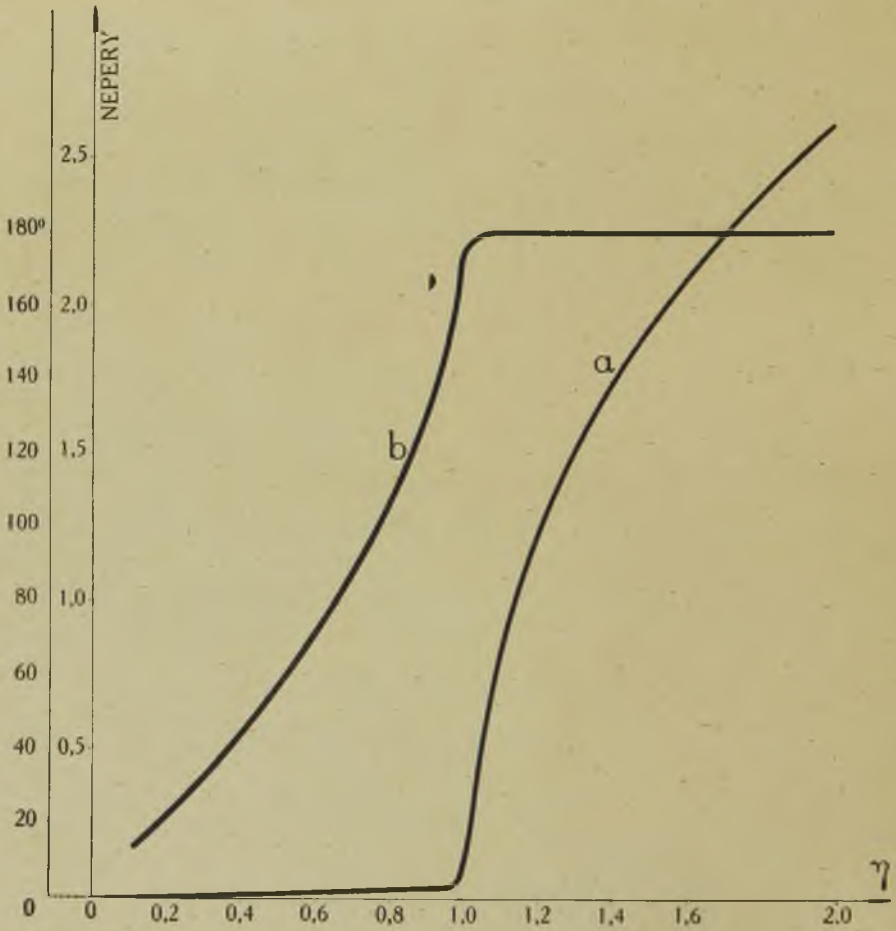
Filtr kondensatorowy. Innego rodzaju filtr stanowi linja łańcuchowa również typu II, ułożona w ten sposób, że kondensatory są połączone ze sobą szeregowo, natomiast cewki włączone równolegle. Każde ogniwo złożone jest z kondensatora o pojemności C oraz dwóch cewek, których oporność i indukcyjność oznaczymy odpowiednio przez $2R$ i $2L$, a to z tego względu, że przy łączeniu dwóch ogniw otrzymamy wspólną oporność R i indukcyjność L (rys. 183).

W tym przypadku

$$\hat{Z}_1 = \frac{1}{j\omega C},$$



$R = 10\Omega$
 $L = 0,179\text{ H}$
 $C = 0,1\mu\text{F}$



Rys. 182.

$$\hat{Z}_2 = R + j\omega L.$$

Podstawiając te wartości do wzoru (26) otrzymamy

$$\begin{aligned} p + jq &= 1 + \frac{1}{2} \frac{\hat{Z}_1}{\hat{Z}_2} = 1 + \frac{1}{2j\omega C(R + j\omega L)} = \\ &= 1 - \frac{L}{2C(R^2 + \omega^2 L^2)} - j \frac{R}{2\omega C(R^2 + \omega^2 L^2)}, \end{aligned}$$

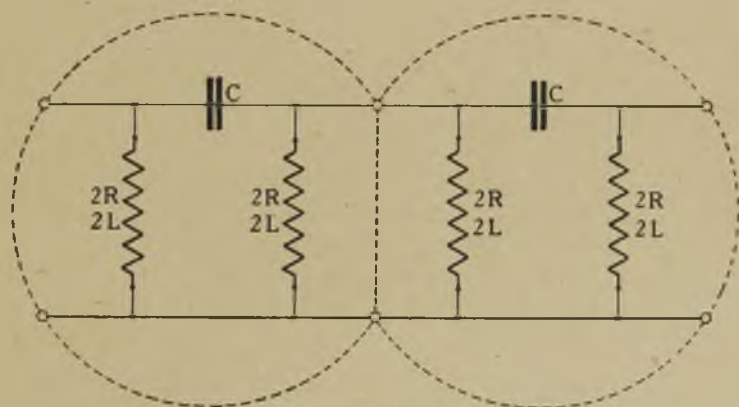
skąd

$$p = 1 - \frac{L}{2C(R^2 + \omega^2 L^2)}. \quad (80)$$

$$q = - \frac{R}{2\omega C(R^2 + \omega^2 L^2)}. \quad (81)$$

Oporność falową znajdujemy ze wzoru (66)

$$\hat{Z} = \sqrt{\frac{\hat{Z}_1 \hat{Z}_2}{1 + \frac{1}{4} \frac{\hat{Z}_1}{\hat{Z}_2}}}$$



Rys. 183.

i obliczymy, podstawiając odpowiednie wartości \hat{Z}_1 i \hat{Z}_2 i wykonując potrzebne działania nad liczbami zespolonymi.

Rozpatrując pojedyncze ogniwo i nie uwzględniając oporności rzeczywistej, ustalimy pulsację własną ogniwa, gdy zważymy, że indukcyjność ogniwa, jako zamkniętego obwodu, wynosi $4L$, zaś pojemność C ; na podstawie wzoru (70) ta pulsacja wyniesie

$$\omega_0 = \frac{1}{2\sqrt{LC}}. \quad (82)$$

Jeżeli, jak i poprzednio, oznaczymy

$$\eta = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad \omega = \eta\omega_0 = \frac{\eta}{2\sqrt{LC}}, \quad \rho = R\sqrt{\frac{C}{L}},$$

wtedy wzory (80) i (81) przybiorą postać następującą

$$p = 1 - \frac{L}{2C(R^2 + \omega^2 L^2)} = 1 - \frac{1}{2\left(R^2 \frac{C}{L} + \omega^2 LC\right)} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2\left(\rho^2 + \frac{\eta^2}{4}\right)},$$

$$q = -\frac{R}{2\omega C(R^2 + \omega^2 L^2)} = -\frac{R}{\frac{\eta}{\sqrt{LC}} C(R^2 + \omega^2 L^2)} =$$

$$= -\frac{R}{\eta \sqrt{\frac{C}{L}} (R^2 + \omega^2 L^2)} = -\frac{R\sqrt{\frac{C}{L}}}{\eta \left(R^2 \frac{C}{L} + \omega^2 LC\right)} = \frac{-\rho}{\eta \left(\rho^2 + \frac{\eta^2}{4}\right)},$$

czyli ostatecznie

$$p = 1 - \frac{2}{4\rho^2 + \eta^2}, \quad (83)$$

$$q = -\frac{4\rho}{4\rho^2 \eta + \eta^3}. \quad (84)$$

Dla zbadania własności rozpatrywanego filtru, jak i w poprzednim przykładzie, założmy, że $\rho = R\sqrt{\frac{C}{L}}$ jest bardzo małe; wtedy, jak to wynika ze wzorów (83) i (84), będziemy mieli przybliżone wzory

$$p = 1 - \frac{2}{\eta^2}, \quad (85)$$

$$q = 0, \quad (86)$$

przyczem należy zwrócić uwagę, że q będąc bliskim zeru ma jednakże wartość ujemną. Przy takich wartościach p i q wzory (27) i (28) przybiorą postać

$$\cos \text{hip } a \cos b = p = 1 - \frac{2}{\eta^2}, \quad (87)$$

$$\sin \text{hip } a \sin b = 0. \quad (88)$$

Zbadajmy wartości a i b dla rozmaitych wartości η :

gdy $\eta < 1$ czyli $\omega < \omega_0$,

$$p < -1 \quad \text{czyli} \quad p = -k, \quad \text{gdzie} \quad k > 1;$$

wtedy

$$\cos \text{hip } a \cos b = -k,$$

$$\sin \text{hip } a \sin b = 0,$$

skąd wynika, że a nie może się równać zeru; więc $\sin b = 0$, ale $\cos b$ powinno być ujemne, więc $\cos b = -1$; ponieważ jednakże, jak wyżej zaznaczyliśmy, q dąży do 0, pozostając liczbą ujemną i ponieważ w rozpatrywanym przypadku $\sin \text{hip } a > 0$, przeto $\sin b$ powinien dążyć do zera, pozostając ujemnym.

Z tych względów wypada, że $b = -180^\circ$, natomiast

$$\cos \text{hip } a = k = \frac{2}{\eta^2} - 1,$$

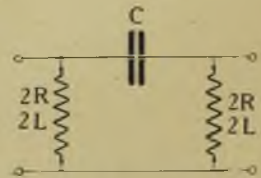
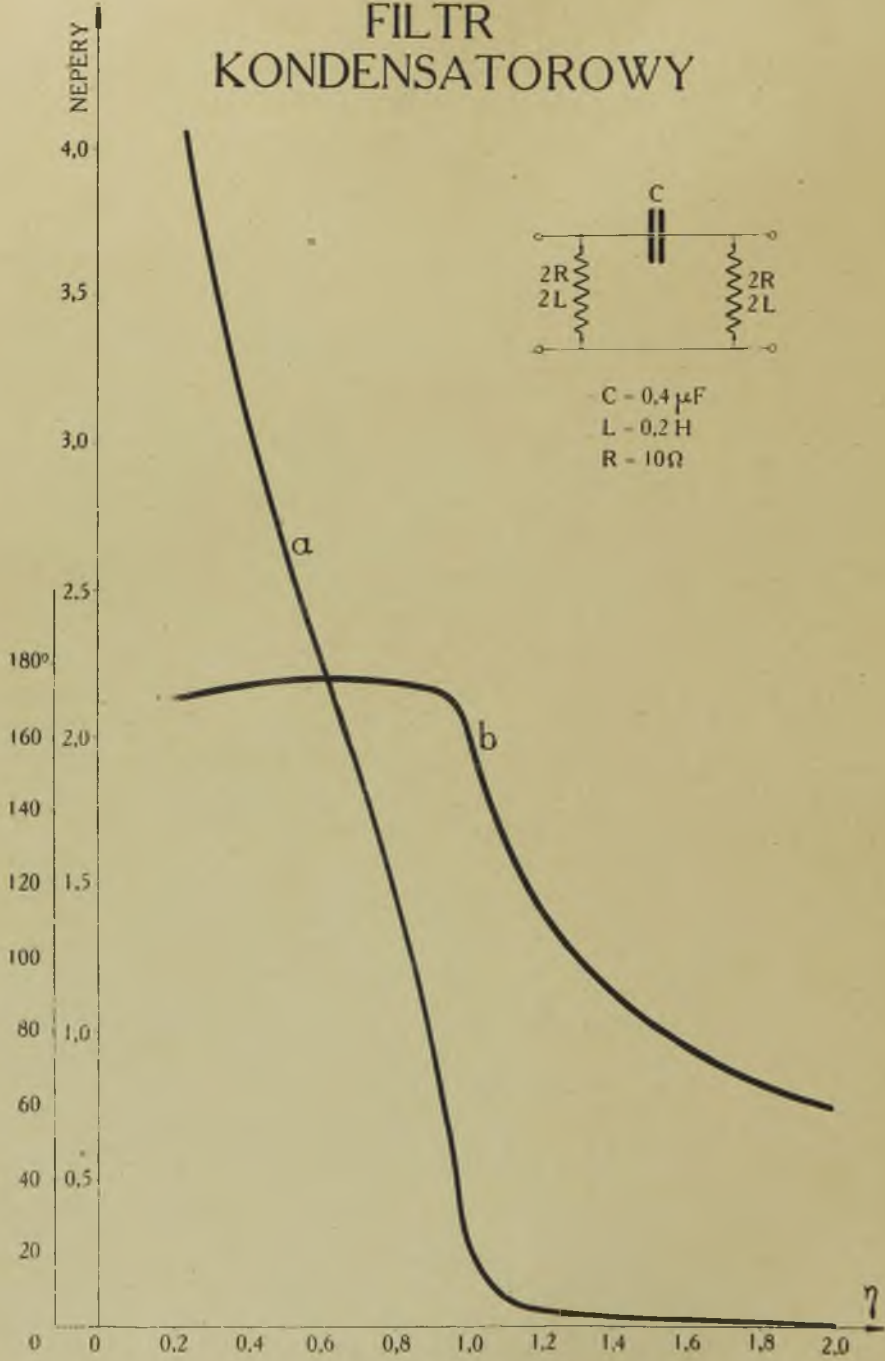
czyli, że współczynnik a , znaczny przy małych wartościach η (małych częstotliwościach), stopniowo maleje i staje się równym 0 ($\cos \text{hip } a = 1$), gdy $\eta = 1$, to znaczy dla częstotliwości równej częstotliwości drgań swobodnych ogniwa.

Gdy $\eta > 1$, czyli $\omega > \omega_0$, wtedy, jak widać ze wzoru (85), p zmienia się w granicach $-1_{(\eta=1)}$ i $+1_{(\eta=\infty)}$, czyli

$$-1 \leq p \leq +1;$$

równania (87) i (88) wskazują, że $\sin b$ nie może się równać zeru, gdyż wtedy $\cos b = \pm 1$, a ponieważ $\cos \text{hip } a$ conajmniej może się równać 1, więc nie uczynilibyśmy zadość warunkowi dla p ; pozostaje więc jedyna możliwość

FILTR KONDENSATOROWY



C - $0.4 \mu\text{F}$
L - 0.2 H
R - 10Ω

Rys. 184.

$$\sin \text{hip } a = 0, \quad a = 0;$$

wtedy $\cosh \text{hip } a = 1$ i z równania (87)

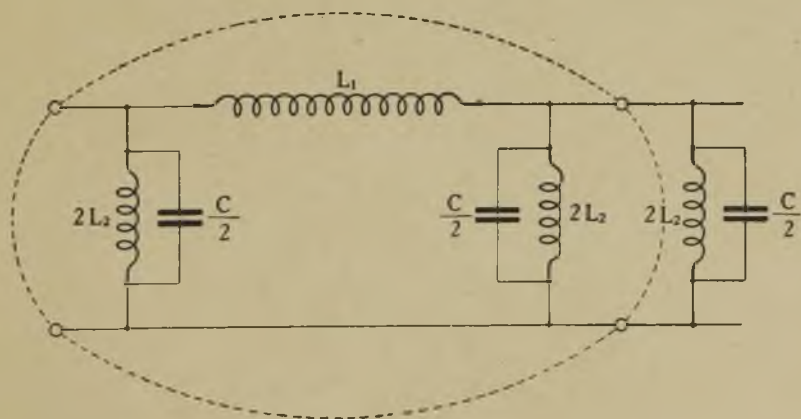
$$\cos b = p = 1 - \frac{2}{\eta^2},$$

czyli (po uwzględnieniu, że b powinno być ujemne) wnioskujemy, że b zmienia się w granicach od -180 do 0° .

Z tych rozważań wynika, że rozpatrywany filtr, który nazwiemy filtrem kondensatorowym, tłumia prądy o częstotliwości mniejszej od częstotliwości drgań swobodnych ogniwa, natomiast przepuszcza prawie bez tłumienia prądy o częstotliwości wyższej. Na rys 184 wskazany jest przebieg współczynników a i b w zależności od η w filtrze kondensatorowym.

Filtr widmowy. Przez odpowiednie połączenie cewek i kondensatorów można otrzymać również filtry, które będą prawie bez tłumienia przepuszczały prądy o częstotliwościach, zawartych w określonych granicach, lub będą tłumić prądy określonej częstotliwości, przepuszczając swobodnie prądy inne. Osiągnąć można takie wyniki za pomocą bardzo wielu rozmaitych kombinacji; ograniczymy się do rozpatrywania kilku najbardziej charakterystycznych przykładów. W celu badania własności filtrów poprzednio rozpatrzonych, zakładaliśmy, że oporność rzeczywista równa jest zeru; to samo uczynimy przy rozpatrywaniu następnych typów filtrów, od razu upraszczając wzory w założeniu, że $R = 0$.

Rozpatrzmy najpierw filtr, którego ogniwo przedstawione jest na rys. 185. Jest to łańcuch typu II, przy czym



Rys. 185.

$$\hat{Z}_1 = j \omega L_1$$

$$\hat{Z}_2 = \frac{j \omega L_2 \cdot \frac{1}{j \omega C}}{j \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C} \right)} = \frac{L_2}{C j \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C} \right)} ;$$

na podstawie wzorów (26), (27) i (28) mamy

$$\begin{aligned} p + j q &= 1 + \frac{\hat{Z}_1}{2 \hat{Z}_2} = 1 - \frac{\omega L_1 C \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C} \right)}{2 L_2} = \\ &= 1 - \frac{\omega^2 L_1 C}{2} + \frac{L_1}{2 L_2} , \end{aligned}$$

$$p = \cos \text{hip } a \cos b = 1 - \frac{\omega^2 L_1 C}{2} + \frac{L_1}{2 L_2} ,$$

$$q = \sin \text{hip } a \sin b = 0 .$$

Tłumienia nie będzie, gdy $a = 0$, a więc gdy $\cos \text{hip } a = 1$, wtedy

$$\cos b = 1 - \frac{\omega^2 L_1 C}{2} + \frac{L_1}{2 L_2} ;$$

wyraz ten może się zmieniać tylko w granicach $+1$ i -1 ; staje się on równym $+1$, gdy

$$\frac{\omega^2 L_1 C}{2} = \frac{L_1}{2 L_2} ,$$

czyli dla

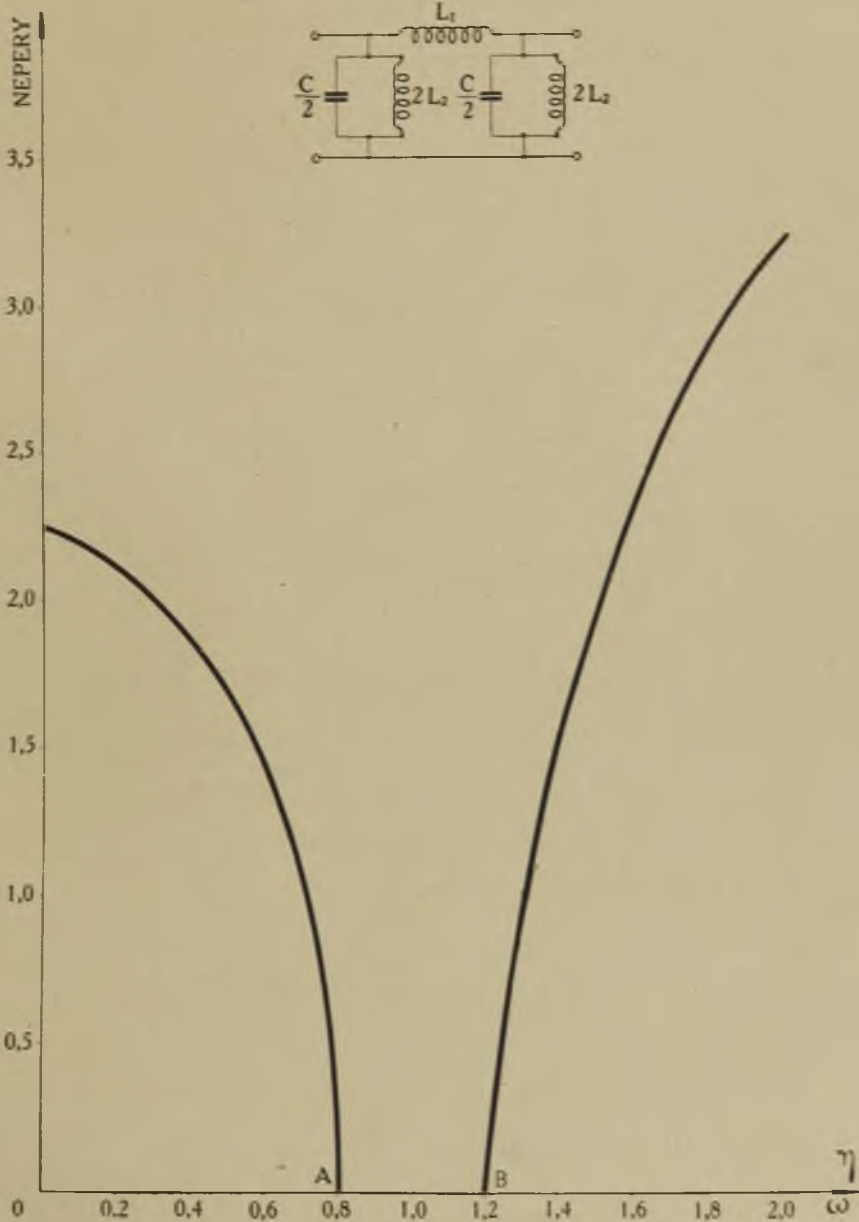
$$\omega = \frac{1}{\sqrt{C L_2}} ;$$

staje się on równym -1 , gdy

$$-\frac{\omega^2 L_1 C}{2} + \frac{L_1}{2 L_2} = -2 ,$$

$$\omega^2 = \frac{4 L_2 + L_1}{L_1 L_2 C} = \frac{1 + 4 \frac{L_2}{L_1}}{C L_2} .$$

FILTR WIDMOWY



Rys. 186.

czyli

$$\omega = \frac{\sqrt{1 + 4 \frac{L_2}{L_1}}}{\sqrt{C L_2}} ;$$

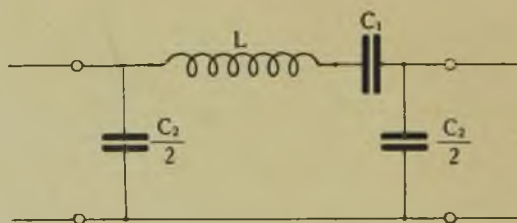
wynika więc, że $a = 0$, gdy pulsacja prądu zawarta jest w granicach

$$\frac{1}{\sqrt{C L_2}} \leq \omega \leq \frac{\sqrt{1 + 4 \frac{L_2}{L_1}}}{\sqrt{C L_2}} ;$$

przez odpowiedni dobór ilorazu $\frac{L_2}{L_1}$ możemy więc zwęzić lub rozszerzyć granice częstotliwości prądów swobodnie przechodzących przez filtr.

Wykres, charakteryzujący zmianę współczynnika tłumienia dla takiego filtru pokazany jest na rys. 186. Obszar częstotliwości AB , dla których tłumienia niema, nazywamy widmem filtru, a filtr tego typu — filtrem widmowym.

Również filtr widmowy otrzymamy, biorąc ogniwa, jak na rys. 187; w tym przypadku



Rys. 187.

$$\hat{Z}_1 = j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C_1} \right) ,$$

$$\hat{Z}_2 = \frac{1}{j \omega C_2} ;$$

wtedy

$$p = 1 + \frac{\hat{Z}_1}{2 \hat{Z}_2} = 1 - \frac{\omega C_2}{2} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C_1} \right) = 1 - \frac{\omega^2 L C_2}{2} + \frac{C_2}{2 C_1} ,$$

$$q = 0 ,$$

więc

$$\cos \text{hip } a \cos b = 1 - \frac{\omega^2 L C_2}{2} + \frac{C_2}{2 C_1}$$

$$\sin \text{hip } a \sin b = 0.$$

Tłumienia nie będzie, gdy $\cos \text{hip } a = 1$ ($a = 0$), wtedy

$$\cos b = 1 - \frac{\omega^2 L C_2}{2} + \frac{C_2}{2 C_1};$$

wyraz ten staje się równy $+1$, gdy

$$\frac{\omega^2 L C_2}{2} = \frac{C_2}{2 C_1}, \text{ czyli } \omega = \frac{1}{\sqrt{L C_1}};$$

staje się równy -1 , gdy

$$\frac{\omega^2 L C_2}{2} = \frac{C_2}{2 C_1} + 2,$$

czyli

$$\omega = \frac{\sqrt{1 + 4 \frac{C_1}{C_2}}}{\sqrt{L C_1}}.$$

Nie będzie więc tłumienia dla częstotliwości zawartych w granicach

$$\frac{1}{\sqrt{L C_1}} \leq \omega \leq \frac{\sqrt{1 + 4 \frac{C_1}{C_2}}}{\sqrt{L C_1}};$$

granice te tworzą widmo filtru.

Rozpatrzmy teraz filtr, którego ogniwo utworzone jest, jak na rys. 188.

Tutaj

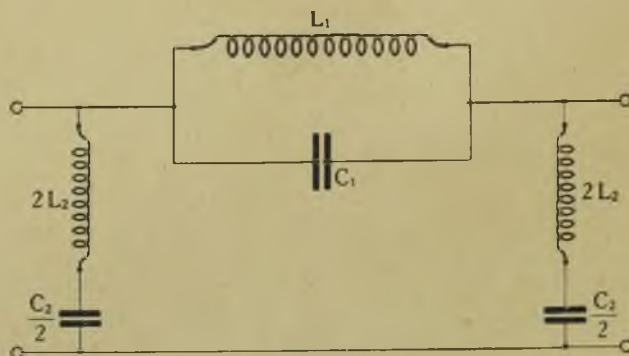
$$\hat{Z}_1 = \frac{j \omega L_1 \cdot \frac{1}{j \omega C_1}}{j \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right)} = \frac{L_1}{C_1 j \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right)},$$

$$\hat{Z}_2 = j \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right).$$

Wtedy

$$p = 1 + \frac{\hat{Z}_1}{2\hat{Z}_2} = 1 - \frac{L_1}{2C_1 \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right) \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right)},$$

$$q = 0;$$



Rys. 188.

wobec tego

$$\cos \text{hip } a \cos b = 1 - \frac{L_1}{2C_1 \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right) \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right)},$$

$$\sin \text{hip } a \sin b = 0.$$

Tłumienia nie będzie, gdy $\cos \text{hip } a = 1$ ($a = 0$), czyli

$$\begin{aligned} \cos b &= 1 - \frac{L_1}{2C_1 \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right) \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right)} = \\ &= 1 - \frac{L_1 C_2 \omega^2}{2(\omega^2 L_1 C_1 - 1)(\omega^2 L_2 C_2 - 1)}. \end{aligned}$$

Ze względu na możliwe wartości $\cos b$ ostatni ułamek może się zmieniać tylko w granicach od 0 do 2; lub po odrzuceniu 2 w mianowniku, w granicach od 0 do 4.

Powinno więc być

$$0 \leq \frac{L_1 C_2 \omega^2}{(\omega^2 L_1 C_1 - 1)(\omega^2 L_2 C_2 - 1)} \leq 4. \quad (89)$$

Licznik rozpatrywanego wyrazu jest dodatni, więc i mianownik powinien być dodatni, to znaczy, że oba czynniki stojące w mianowniku powinny mieć znaki jednakowe.

Dla znalezienia takich wartości ω , któreby czyniły zadość powyższej nierówności, rozpatrzmy najpierw warunek

$$\frac{L_1 C_2 \omega^2}{(\omega^2 L_1 C_1 - 1)(\omega^2 L_2 C_2 - 1)} \leq 4,$$

skąd, przy uwzględnieniu, że mianownik jest dodatni, otrzymujemy

$$4(\omega^2 L_1 C_1 - 1)(\omega^2 L_2 C_2 - 1) - L_1 C_2 \omega^2 \geq 0$$

albo

$$\omega^4 - \left(\frac{1}{L_1 C_1} + \frac{1}{L_2 C_2} + \frac{1}{4 L_2 C_1} \right) \omega^2 + \frac{1}{L_1 L_2 C_1 C_2} \geq 0. \quad (90)$$

Przyrównywając lewą część tej nierówności do zera i rozwiązując równanie bikwadratowe, znajdujemy cztery pierwiastki

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{L_1 C_1} + \frac{1}{L_2 C_2} + \frac{1}{4 L_2 C_1} \right) - \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{1}{L_1 C_1} + \frac{1}{L_2 C_2} + \frac{1}{4 L_2 C_1} \right)^2 - \frac{1}{L_1 L_2 C_1 C_2}}},$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{L_1 C_1} + \frac{1}{L_2 C_2} + \frac{1}{4 L_2 C_1} \right) + \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{1}{L_1 C_1} + \frac{1}{L_2 C_2} + \frac{1}{4 L_2 C_1} \right)^2 - \frac{1}{L_1 L_2 C_1 C_2}}},$$

$$\omega_3 = -\omega_1,$$

$$\omega_4 = -\omega_2;$$

z tych pierwiastków pierwsze dwa są dodatnie, przyczem $\omega_2 > \omega_1$, zaś ostatnie dwa są ujemne i wobec tego nie odpowiadają warunkom zadania.

Uwzględniając znalezione pierwiastki, możemy nierówność (90) przepisać w postaci

$$(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)(\omega + \omega_1)(\omega + \omega_2) \geq 0,$$

skąd wynika, że

$$(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2) \geq 0,$$

czyli

$$\omega \geq \omega_1 \quad \text{lub} \quad \omega \leq \omega_1,$$

$$\text{i } \omega \geq \omega_2 \quad \text{„} \quad \omega \leq \omega_2;$$

a ponieważ

$$\omega_2 > \omega_1,$$

więc powinno być

$$\omega \geq \omega_2$$

$$\omega \leq \omega_1.$$

Biorąc teraz pod uwagę drugi warunek

$$\frac{L_1 C_2 \omega^2}{(\omega^2 L_1 C_1 - 1)(\omega^2 L_2 C_2 - 1)} \geq 0,$$

widzimy, że warunek ten będzie spełniony przy wszelkich wartościach ω .

Zestawiając oba warunki, wnioskujemy, że $a=0$, to znaczy nie będzie tłumienia dla takich częstotliwości, gdy pulsacja zmienia się

$$\text{od } 0 \text{ do } \omega_1$$

$$\text{i od } \omega_2 \text{ do } \infty,$$

natomiast zachodzi tłumienie dla pulsacyj, zawartych w granicach

$$\omega_1 < \omega < \omega_2;$$

przytem łatwo zauważyć ze wzoru na $\cos \text{hip } a \cos b$, że $\cos \text{hip } a$, a przez to i współczynnik tłumienia a staje się równym nieskończoności, gdy

$$\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} = 0 \quad \text{czyli} \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$$

oraz

$$\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} = 0 \quad \text{„} \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}$$

a więc w rozpatrywanych granicach współczynnik tłumienia wzrasta od 0 do ∞ i następnie maleje od ∞ do 0; gdy przez odpowiedni dobór indukcyjności cewek i pojemności kondensatorów zbliżymy do siebie wartości pulsacji ω_1 i ω_2 , wtedy tłumieniu będą podlegały prądy o określonej częstotliwości, czyli określonej długości fali; dlatego też tego rodzaju filtr może być nazwany pochłaniaczem fali i ma za zadanie usunięcie wpływu prądu wiadomej częstotliwości. Wykres dla tego rodzaju filtru podany jest na rys. 189.

§ 91. Łańcuch izolatorów wiszących.

Jako przykład zastosowania teorii linii łańcuchowej w sieciach prądów wysokiego napięcia, rozpatrzmy rozkład napięć w łańcuchu izolatorów wiszących. Takie izolatory stanowią układ, zawierający pewną liczbę n umieszczonych jeden nad drugim izolatorów; pierwszy z tych izolatorów jest przytwierdzony do słupa, do ostatniego izolatora przymocowany jest przewód o wysokim napięciu. W takim układzie mamy do czynienia tylko z pojemnościami, które rozpatrujemy albo pomiędzy każdym izolatorem i ziemią, albo pomiędzy poszczególnymi izolatorami. Oznaczając pierwszą pojemność przez C_2 , drugą przez C_1 , otrzymamy następujący schemat (rys. 190 albo rys. 191).

Oznaczając

$$\hat{Z}_1 = \frac{1}{j\omega C_1},$$

$$\hat{Z}_2 = \frac{1}{j\omega C_2},$$

będziemy mieli

$$\hat{I}_x - \hat{I}_{x+1} = \frac{\hat{U}_x}{\hat{Z}_2},$$

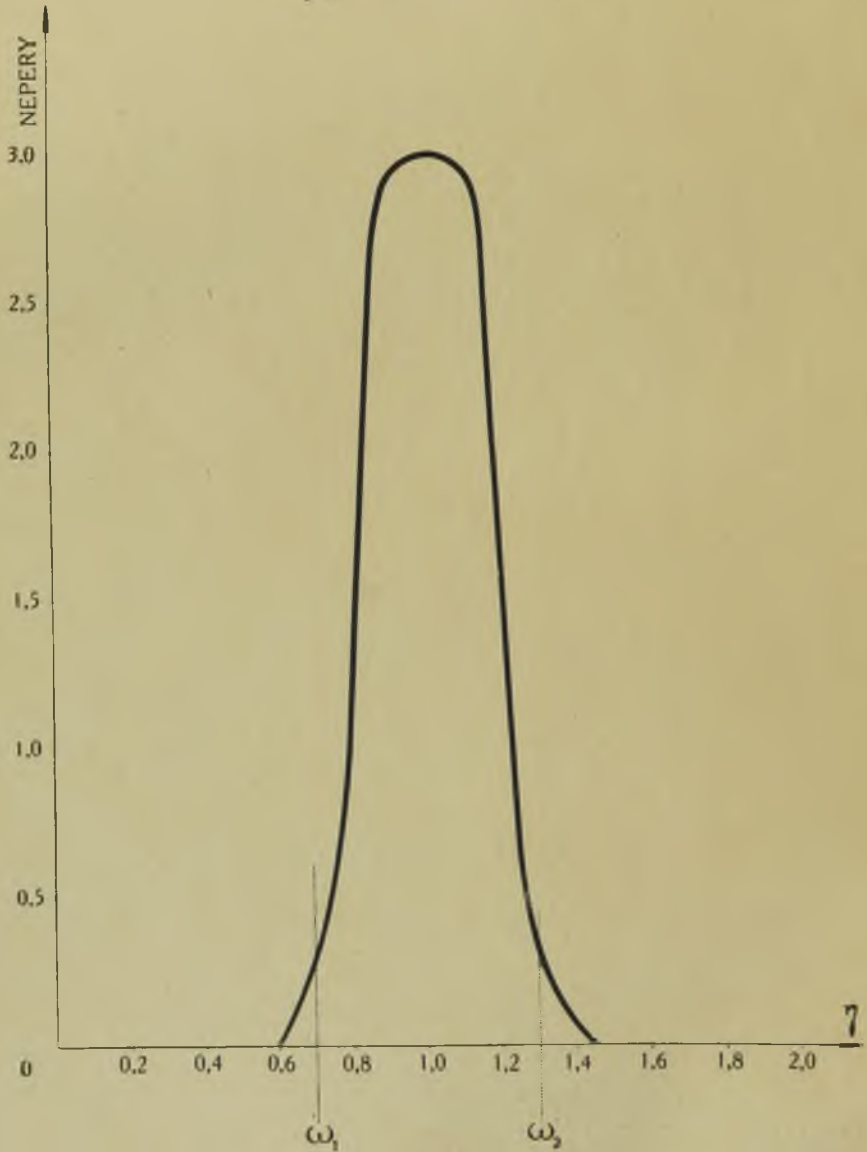
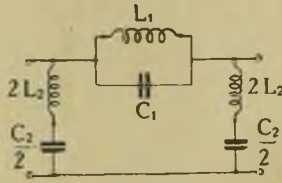
$$\hat{U}_{x-1} - \hat{U}_x = \hat{I}_x \hat{Z}_1,$$

$$\hat{U}_x - \hat{U}_{x+1} = \hat{I}_{x+1} \hat{Z}_1.$$

Określając z drugiego i trzeciego równania \hat{I}_x i \hat{I}_{x+1} i podstawiając te wartości do pierwszego, otrzymamy

FILTR WIDMOWY

[POCHŁANIACZ FAL]

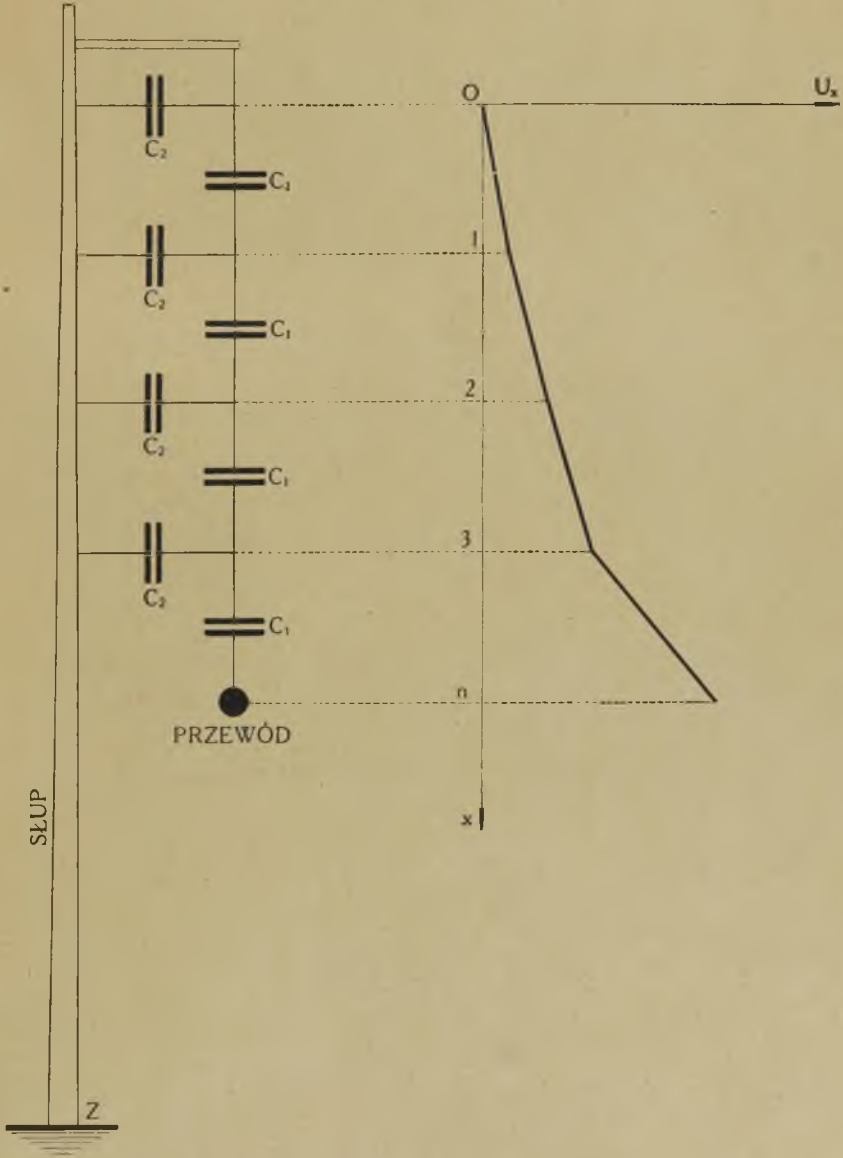


Rys. 189.

$$\frac{\hat{U}_{x-1} - \hat{U}_x}{\hat{Z}_1} - \frac{\hat{U}_x - \hat{U}_{x+1}}{\hat{Z}_1} - \frac{\hat{U}_x}{\hat{Z}_2} = 0,$$

lub

$$\hat{U}_{x-1} - \left(2 + \frac{\hat{Z}_1}{\hat{Z}_2}\right) \hat{U}_x + \hat{U}_{x+1} = 0;$$



Rys. 190.

równanie to jest identyczne z równaniem (58), więc będziemy mieli rozwiązanie (59):

$$\hat{U}_x = A e^{kx} + B e^{-kx}, \quad (91)$$

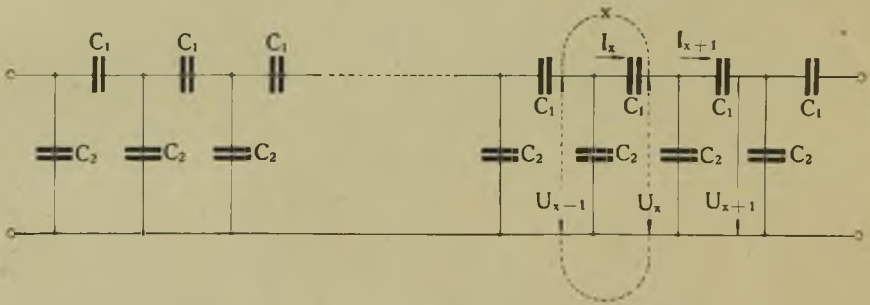
gdzie

$$\cos \text{hip } k = 1 + \frac{\hat{Z}_1}{2 \hat{Z}_2}.$$

Podstawiając wartości \hat{Z}_1 i \hat{Z}_2 , będziemy mieli

$$\cos \text{hip } k = 1 + \frac{C_2}{2 C_1},$$

skąd znajdziemy k .



Rys. 191.

Na początku łańcucha ($x=0$), gdzie izolator jest przytwierdzony do słupa, możemy uważać, że miejsce to jest uziemione, a więc napięcie względem ziemi wynosi 0; w końcu łańcucha mamy przewód pod napięciem U (względem ziemi).

Wobec tego, zakładając we wzorze (91) kolejno $x=0$ i $x=n$, otrzymamy

$$A + B = 0,$$

$$A e^{kn} + B e^{-kn} = U,$$

skąd

$$B = -A,$$

$$A (e^{kn} - e^{-kn}) = U,$$

czyli

$$A = \frac{U}{2 \sin \text{hip } kn},$$

$$B = - \frac{U}{2 \sin \text{hip } kn} .$$

Podstawiając te wartości do (91), znajdujemy

$$U_x = \frac{U}{\sin \text{hip } kn} \frac{(e^{kx} - e^{-kx})}{2} = \frac{U \sin \text{hip } kx}{\sin \text{hip } kn} .$$

Z tego wzoru możemy znaleźć napięcie na dowolnym izolatorze, numer którego, liczony od miejsca przytwierdzenia do słupa wynosi x . Wykres rozkładu napięcia uwidoczniiony jest na rys. 190.

ROZDZIAŁ XIII.

STANY NIEUSTALONE W OBWODACH ZE SKUPIONEMI OPORNOŚCIĄ RZECZYWISTĄ, INDUKCYJNOŚCIĄ I POJEMNOŚCIĄ.

§ 92. Stany ustalone i nieustalone.

Przy rozpatrywaniu obwodów elektrycznych zarówno przy prądzie stałym jak i przy prądzie zmiennym przeważnie mamy do czynienia z napięciami i natężeniami prądów, których wartości są ustalone, to znaczy, że albo wartości te pozostają bez zmiany, jak to ma miejsce przy prądzie stałym, albo stają się okresowo zmiennymi funkcjami czasu ze stałą wartością skuteczną — przy prądzie zmiennym. Każda zmiana warunków, w których się obwód znajduje, zmiana napięcia u źródła, zmiana oporności lub innej wielkości, wchodzącej w skład obwodu, powoduje zmianę wartości, napięć i prądów. Przejście od jednej wartości do drugiej wymaga pewnego czasu, często bardzo małego, ale w ciągu tego czasu mogą zachodzić bardzo poważne zmiany w obwodzie, wywołujące skoki napięć czyli tak zwane przepięcia, lub znaczny wzrost natężenia prądu — tak zwane przetężenia; mogą też powstawać przy tem drgania napięć i prądów czyli tak zwane fale elektromagnetyczne.

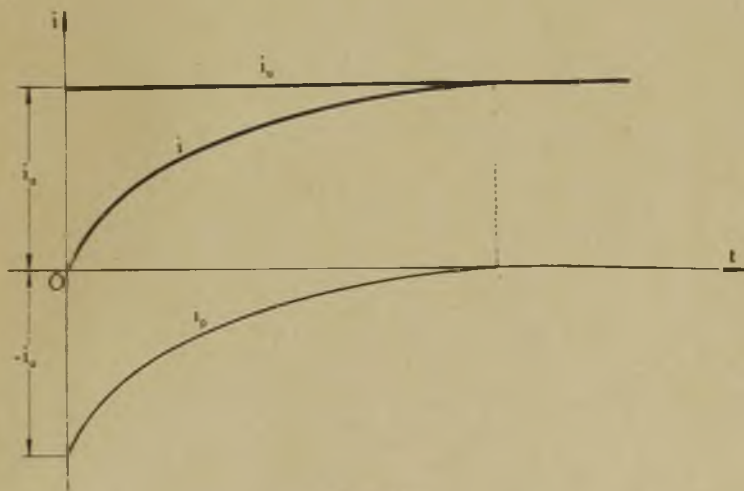
Musimy więc w obwodach elektrycznych odróżniać wartości napięć i prądów w stanie ustalonym oraz w stanie nieustalonym. Przy wszelkich zmianach, zachodzących w obwodzie, będziemy mieli stan nieustalony, zanim napięcia i natężenia prądów nie osiągną swych granicznych wartości, odpowiadających stanowi ustalonemu. Możemy sobie wyobrazić, że w okresie przejściowym do wartości chwilowych napięć i prądów, odpowiadających stanowi ustalonemu, dodają się pewne przejściowe napięcia i prądy; w ten sposób wartości chwilowe tych wielkości w stanie nieusta-

lonym możemy rozpatrywać jako sumę dwóch wartości chwilowych, które będziemy nazywali odpowiednio wartością ustaloną i wartością przejściową, odróżniając je wskaźnikami „ u ” i „ p ”, wobec czego będziemy pisali

$$u = u_u + u_p,$$

$$i = i_u + i_p,$$

gdzie u i i oznaczają wartości chwilowe napięcia oraz natężenia prądu w stanie nieustalonym. Po upływie pewnego czasu wartości przejściowe stają się praktycznie równe zerom, wtedy wartości u i i otrzymują wartości u_u i i_u . Na rys. 192 podany jest przykład takiego ujęcia zjawiska w stanie nieustalonym dla natężenia prądu, wartość którego i zmienia się od zera do i_u . W tym okresie, w dowolnej chwili, wartość i stanowi sumę wartości i_u oraz i_p , przyczem wartości i_p w tym przykładzie są ujemne, zmieniając się od $-i_u$ do zera.

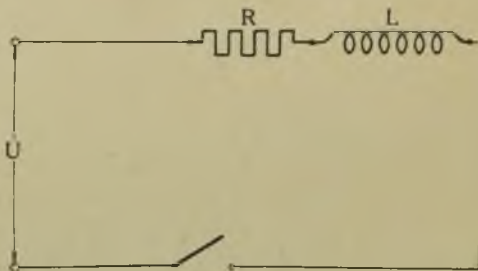


Rys. 192.

W obwodach, w których pola magnetyczne i elektryczne są skupione w niektórych ich częściach, ustalanie się prądu zachodzi stosunkowo powoli. Prąd rozkłada się na poszczególne części obwodu tak jak w stanie ustalonym. Tego rodzaju stan obwodu nazywają nibyustalonym.

§ 93. Powstawanie i zanikanie prądu stałego w obwodzie z opornością i indukcyjnością.

Mamy obwód (rys. 193), w którym między zaciskami źródła istnieje napięcie prądu stałego o wartości U , oporność rzeczywista R i indukcyjność własna L .



Rys. 193.

W chwili zamknięcia takiego obwodu prądu jeszcze nie ma; licząc czas od tej chwili i oznaczając przez i wartość prądu w dowolnej chwili, będziemy mieli

$$Ri + L \frac{di}{dt} = U \quad (1)$$

Całkujemy najpierw równanie uproszczone

$$Ri + L \frac{di}{dt} = 0.$$

$$\frac{di}{i} = -\frac{R}{L} dt,$$

$$\lg_n i = -\frac{R}{L} t + \lg_n K,$$

gdzie K stała dowolna, skąd

$$i = Ke^{-\frac{R}{L}t},$$

gdzie e jest podstawą logarytmów naturalnych.

Całka szczególna równania (1) oczywiście równa się $\frac{U}{R}$, wobec tego całka ogólna tego równania będzie

$$i = \frac{U}{R} + Ke^{-\frac{R}{L}t}.$$

Dla określenia stałej K wiemy, że przy $t=0$, $i=0$, więc

$$K + \frac{U}{R} = 0,$$

$$K = -\frac{U}{R};$$

wobec tego

$$i = \frac{U}{R} - \frac{U}{R} \cdot e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (2)$$

Łatwo zauważyć, że w rozpatrywanym obwodzie dla stanu ustalonego natężenie prądu

$$i_u = \frac{U}{R},$$

a ponieważ

$$i = i_u + i_p,$$

więc ze wzoru (2)

$$i_p = -\frac{U}{R} \cdot e^{-\frac{R}{L}t} = -i_u \cdot e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (3)$$

Ostatni wzór nazywa się wzorem Helmholtz'a; $\frac{R}{L}$ nazywamy stałą lub współczynnikiem tłumienia, zaś odwrotność, czyli $\frac{L}{R} = T$ nazywamy stałą czasu; im większe jest L i im mniejsze R , tem większa jest stała czasu T , to znaczy, że więcej czasu potrzeba, aby prąd osiągnął praktycznie swą wartość graniczną.

Przebieg i oraz i_p podany jest na rys. 192. Jak widać ze wzoru (3), prąd przejściowy staje się równym zeru przy $t = \infty$.

Przy $t = \frac{L}{R} = T$, $i_p = -\frac{i_u}{e} \cong -0,37 i_u$;

przy

$$t = 2T, \quad i_p \cong -0,13 i_u; \quad \text{przy } t = 3T, \quad i_p \cong -0,05 i_u$$

Gdy $e^{-\frac{R}{L}t} = 0,01$, czyli $e^{-\frac{t}{T}} = 0,01$, $t = T \lg_n 100 \cong 4,6 T$,
 wtedy $i_p = 0,01 i_u$. Naprzykład, gdy $\frac{L}{R} = 0,1$, wtedy po upływie

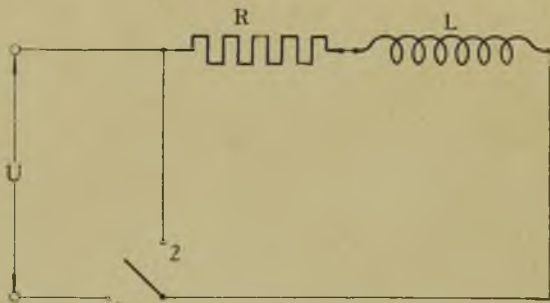
czasu 0,46 sek natężenie prądu przejściowego wyniesie zaledwie 0,01 natężenia prądu ustalonego. W cewkach elektromagnesów T może dochodzić do 1 sek np. przy $L = 11 H$, $R = 11 \Omega$, $T = 1$, wtedy po upływie 1 sek prąd przejściowy wyniesie 0,37, po upływie 2 sek 0,13; po upływie 3 sek 0,05, a po upływie 4,6 sek 0,01 natężenia prądu ustalonego.

Siła elektromotoryczna indukcji własnej, powstająca w stanie nieustalonym, wyrazi się wzorem

$$e_s = -L \frac{di}{dt} = -L i_u e^{-\frac{R}{L}t}, \quad \frac{R}{L} = -U e^{-\frac{R}{L}t};$$

widać z tego, że nie może ona w swej wartości bezwzględnej przekroczyć wartości napięcia U .

Rozpatrzmy ten sam obwód co poprzednio. Wyobraźmy sobie, że raptownie następuje zwarcie w ten sposób, że tworzy się zamknięty obwód z R i L bez napięcia U , np. przełącznik (rys. 194)



Rys. 194.

przestawiamy z położenia 1 na 2. Niech takie zwarcie nastąpi w chwili, gdy natężenie prądu w obwodzie wynosiło I i od tej chwili rozpoczniemy rachubę czasu; wtedy dla takiego obwodu będziemy mieli

$$Ri + L \frac{di}{dt} = 0,$$

$$\text{czyli } i = Ke^{-\frac{R}{L}t},$$

a ponieważ dla $t=0$, $i=I$, przeto

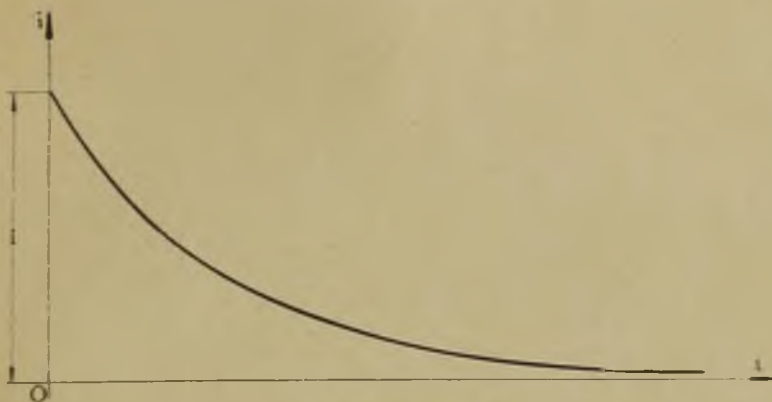
$$K = I;$$

więc

$$i = i_p = I e^{-\frac{R}{L}t} \quad (4)$$

Widzimy więc, że w takim obwodzie powstanie tylko prąd przejściowy, zanikający, przyczem czas zanikania zależy od współczynnika tłumienia $\frac{R}{L}$, względnie od stałej czasu $T = \frac{L}{R}$,

Na rys. 195 podany jest przebieg takiego prądu.



Rys. 195.

Przy zanikaniu prądu *SEM* samoindukcji będzie

$$e_s = -L \frac{di}{dt} = Ri = RI e^{-\frac{R}{L}t} = U e^{-\frac{R}{L}t},$$

czyli nie przekracza wartości U napięcia źródła prądu stałego.

§ 94. Zmiana oporności w obwodzie prądu stałego.

Jeżeli w poprzednio rozpatrywanym obwodzie (rys. 193), przy stałym napięciu prądu stałego U , oporność zmieni swą wartość od R do R' , wtedy prąd ustalony zmieni swą wartość od

$$i_u = I = \frac{U}{R} \text{ do } i_u' = I' = \frac{U}{R'};$$

dla nowego stanu obwodu będziemy mieli

$$R' i + L \frac{di}{dt} = U,$$

$$i = I' + K e^{-\frac{R'}{L} t}.$$

Licząc czas od chwili zmiany oporności R na oporność R' , będziemy mieli przy $t = 0$, $i = I$, więc

$$K = I - I',$$

$$i = I' + (I - I') e^{-\frac{R'}{L} t}$$

skąd

$$i_p = (I - I') e^{-\frac{R'}{L} t}.$$

Podczas zmiany prądu od wartości I do wartości I' , powstaje *SEM* samoindukcji

$$e_s = -L \frac{di}{dt} = L \frac{(I - I') R'}{L} \cdot e^{-\frac{R'}{L} t} =$$

$$= U \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'} \right) R' \cdot e^{-\frac{R'}{L} t} =$$

$$U = \left(\frac{R' - R}{R} \right) \cdot e^{-\frac{R'}{L} t}.$$

Oznaczając zmianę oporności $R' - R = \Delta R$, będziemy mieli

$$e_s = \frac{\Delta R}{R} \cdot U \cdot e^{-\frac{R'}{L} t}.$$

Jak widać z tego wzoru, na wartość *SEM* samoindukcji przy zmianie oporności wpływa stosunek $\frac{\Delta R}{R}$; L wpływa tylko na czas tłumienia.

Zrozumiałem jest wobec tego, że w opornikach musimy przechodzić od jednej oporności do drugiej, nie odrazu, lecz stopniowo, aby ΔR było $< R$, gdyż wtedy unikniemy raptownego skoku napięcia, spowodowanego *SEM* samoindukcji.

§ 95. Powstawanie i zanikanie prądu zmiennego w obwodzie z opornością rzeczywistą i indukcyjnością.

Przypuśćmy, że obwód z R i L zamknęliśmy w chwili, gdy faza napięcia prądu zmiennego równa jest ψ , to znaczy przy wartości chwilowej napięcia $u = U_m \sin(\omega t + \psi)$, inaczej, dla $t = 0$, $u = U_m \sin \psi$. Wtedy dla takiego obwodu

$$Ri + L \frac{di}{dt} = U_m \sin(\omega t + \psi);$$

dla prądu przejściowego otrzymamy, jak i poprzednio

$$i_p = K e^{-\frac{R}{L}t},$$

zaś prąd ustalony będzie, jak wiadomo,

$$i_u = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi),$$

gdzie

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{R}.$$

Wobec tego w stanie nieustalonym

$$i = i_u + i_p = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi) + K e^{-\frac{R}{L}t}$$

Ponieważ dla $t = 0$, $i = 0$,

więc

$$I_m \sin(\psi - \varphi) + K = 0,$$

$$K = -I_m \sin(\psi - \varphi)$$

i w ten sposób

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi) - I_m \sin(\psi - \varphi) e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (5)$$

$$i_p = -I_m \sin(\psi - \varphi) e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Z ostatniego wzoru widzimy, że prąd przejściowy jest naogół funkcją malejącą z biegiem czasu; niema go wcale, czyli ma on

wartość zero, gdy $\psi = \varphi$, to znaczy wtedy, gdy w chwili zamykania obwodu prąd ustalony przechodzi przez wartość zero, ponieważ przy $t = 0$, $i_u = I_m \sin(\psi - \varphi) = 0$, natomiast największą wartość będzie miał prąd przejściowy, gdy $\psi - \varphi = \pm \frac{\pi}{2}$; wtedy

przy $t = 0$ bezwzględna wartość największa prądu przejściowego będzie $\max i_p = I_m$; będzie to miało miejsce wówczas, gdy również $i_u = I_m$, to znaczy, gdy w chwili zamykania obwodu prąd ustalony przechodzi przez swą największą wartość.

W stanie nieustalonym wartość prądu i , jak to widać ze wzoru (5), zależy nie tylko od czasu, lecz również od fazy ψ , którą ma napięcie w chwili zamknięcia obwodu. Największą wartość tego prądu otrzymamy dla tych wartości $\psi = \psi_0$ oraz $t = t_0$, przy których pierwsze pochodne cząstkowe i względem tych zmiennych stają się równe zeru. Dla określenia tych wartości mamy

$$\frac{\partial i}{\partial t} = I_m \omega \cos(\omega t + \psi - \varphi) + I_m \frac{L}{R} \sin(\psi - \varphi) e^{-\frac{R}{L}t}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial i}{\partial \psi} = I_m \cos(\omega t + \psi - \varphi) - I_m \cos(\psi - \varphi) e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (7)$$

Przyrównyując te pochodne do zera i dzieląc obie strony równań przez I_m , otrzymamy

$$\omega \cos(\omega t_0 + \psi_0 - \varphi) + \frac{R}{L} \sin(\psi_0 - \varphi) e^{-\frac{R}{L}t_0} = 0, \quad (8)$$

$$\cos(\omega t_0 + \psi_0 - \varphi) - \cos(\psi_0 - \varphi) e^{-\frac{R}{L}t_0} = 0, \quad (9)$$

skąd przez porównanie

$$\frac{R}{\omega L} \sin(\psi_0 - \varphi) e^{-\frac{R}{L}t_0} = -\cos(\psi_0 - \varphi) e^{-\frac{R}{L}t_0},$$

$$\operatorname{tg}(\psi_0 - \varphi) = -\frac{\omega L}{R} = -\operatorname{tg} \varphi;$$

to ostatnie równanie w granicach jednego okresu daje dwie wartości dla ψ_0 :

- 1) $\psi_0 - \varphi = -\varphi$, czyli $\psi_0 = 0$,
- 2) $\psi_0 - \varphi = \pi - \varphi$, „ $\psi_0 = \pi$.

Dla znalezienia t_0 , podstawiamy do jednego z równań (8) lub (9) znalezione wartości ψ_0 . Zarówno dla $\psi_0 = 0$, jak i dla $\psi = \pi$ otrzymamy

$$\cos(\omega t_0 - \varphi) = \frac{R}{\omega L} \sin \varphi e^{-\frac{R}{L} t_0},$$

lub zamieniając $\frac{\omega L}{R}$ przez $\operatorname{tg} \varphi$,

$$\cos(\omega t_0 - \varphi) = \cos \varphi e^{-\frac{R}{L} t_0} \quad (10)$$

Ponieważ kąt φ , stanowiący wartość bezwzględną przesunięcia fazy prądu względem napięcia w stanie ustalonym, jest mniejszy względnie równy $\frac{\pi}{2}$, przeto prawa strona ostatniego wzoru jest większą od zera, względnie równa zeru; wobec tego powinno być

$$\cos(\omega t_0 - \varphi) \geq 0, \quad (11)$$

co w granicach jednego okresu daje

$$0 \leq \omega t_0 - \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad (12)$$

albo

$$\frac{3}{2} \pi \leq \omega t_0 - \varphi \leq 2\pi. \quad (13)$$

Dla przekonania się, czy określone w ten sposób wartości ψ_0 i t_0 dają maximum lub minimum funkcji i , musimy obliczyć dla tych wartości drugie pochodne cząstkowe tej funkcji; oznaczając

$$\left. \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \right|_{\substack{\psi = \psi_0 \\ t = t_0}} = A, \quad \left. \frac{\partial^2 i}{\partial \psi^2} \right|_{\substack{\psi = \psi_0 \\ t = t_0}} = C,$$

$$\left. \frac{\partial^2 i}{\partial t \partial \psi} \right|_{\substack{\psi = \psi_0 \\ t = t_0}} = B,$$

będziemy mieli następujące warunki

gdy $AC - B^2 > 0$, A i $C < 0$, — maximum,

gdy $AC - B^2 > 0$, A i $C > 0$, — minimum.

Na podstawie wzorów (6) i (7) znajdujemy

$$A = -I_m \left[\omega^2 \sin(\omega t_0 + \psi_0 - \varphi) + \frac{R^2}{L^2} \sin(\psi_0 - \varphi) e^{-\frac{R}{L} t_0} \right],$$

$$C = -I_m \left[\sin(\omega t_0 + \psi_0 - \varphi) - \sin(\psi_0 - \varphi) e^{-\frac{R}{L} t_0} \right],$$

$$B = -I_m \left[\omega \sin(\omega t_0 + \psi_0 - \varphi) - \frac{R}{L} \cos(\psi_0 - \varphi) e^{-\frac{R}{L} t_0} \right].$$

Przy uwzględnieniu wzoru (10) oraz zamieniając $\frac{\omega L}{R}$ przez $\operatorname{tg} \varphi$, otrzymamy, dla wartości $\psi_0 = 0$ oraz $\psi_0 = \pi$,

$$A = \pm \frac{I_m \omega^2}{\sin \varphi} \cos \omega t_0,$$

$$C = \frac{I_m}{\cos \varphi} \sin \omega t_0,$$

$$B = \pm \frac{I_m \omega}{\sin \varphi} \cos \omega t_0,$$

gdzie pierwszy znak odpowiada $\psi_0 = 0$, drugi $\psi_0 = \pi$.
Dla obu wartości ψ_0 .

$$AC - B^2 = - \frac{I_m \omega^2 \cos \omega t_0 \cdot \cos(\omega t_0 - \varphi)}{\sin^2 \varphi \cos \varphi}.$$

Ponieważ (wzór 9) $\cos(\omega t_0 - \varphi) \geq 0$, więc, aby było możliwe $AC - B^2 > 0$, powinno być $\cos \omega t_0 < 0$, to znaczy w granicach jednego okresu

$$\frac{\pi}{2} < \omega t_0 < \pi, \quad \text{lub} \quad \pi < \omega t_0 < \frac{3}{2} \pi.$$

Ale w pierwszym przypadku

dla $\psi_0 = 0$, $A < 0$ i $C < 0$ istnieje maximum,

„ $\psi_0 = \pi$, $A > 0$ i $C > 0$ „ minimum,

w drugim przypadku

dla $\psi_0 = 0, A < 0, C > 0$ | nie istnieje ani maximum,
 „ $\psi_0 = \pi, A > 0, C < 0$ | ani minimum.

Wartość prądu i otrzymamy na podstawie wzoru (5):

$$\text{dla } \psi = 0, i = I_m \sin(\omega t - \varphi) + I_m \sin \varphi e^{-\frac{R}{L} t},$$

$$\text{dla } \psi = \pi, i = -I_m \sin(\omega t - \varphi) - I_m \sin \varphi e^{-\frac{R}{L} t},$$

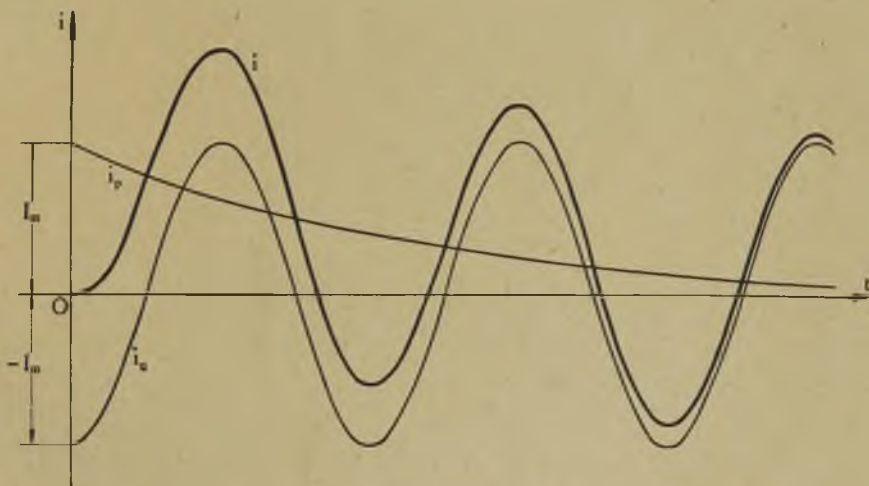
czyli dla obu wartości ψ

$$i = \pm I_m \left[\sin(\omega t - \varphi) + \sin \varphi \cdot e^{-\frac{R}{L} t} \right];$$

największa wartość bezwzględna, która, jak poprzednio stwierdziliśmy, zachodzi dla wartości ωt , zawartej pomiędzy $\frac{\pi}{2}$ i π , w każdym razie jest mniejszą od $2 I_m$, gdyż wyraz stojący w nawiasach jest w tym wypadku mniejszy od 2.

Ostatecznie więc możemy stwierdzić, że w rozpatrywanym obwodzie, przy zamykaniu, może nastąpić wzrost prądu, czyli zjawisko przetężenia, gdy zamykanie następuje w chwili przejścia napięcia przez wartość 0 (faza 0 lub π); jednakże największa wartość tego prądu nie może przekroczyć podwójnej wartości prądu ustalonego w danym obwodzie,

Na rys. 196 podany jest przebieg prądu przejściowego i_p , prądu ustalonego i_u , oraz prądu i w stanie nieustalonym dla $\cos \varphi = 0,19$



Rys. 196.

$\frac{R}{L} = 60$, w wypadku zamknięcia takiego obwodu w chwili, gdy napięcie przechodzi przez wartość 0 ($\psi = 0$).

Różnica pomiędzy zjawiskiem zanikania prądu stałego, rozpatrzonem w § 95, a zanikaniem prądu zmiennego, polega tylko na tem, że, w chwili zwarcia, wartość prądu będzie zależna od fazy napięcia w tej samej chwili. Jeśli bowiem napięcie w chwili zwarcia przechodzi przez fazę ψ , to znaczy przy $t = 0$, $u = U_m \sin \psi$, wtedy prąd będzie miał wartość $i = I_m \sin(\psi - \varphi)$. Wobec tego wzór (4) przyjmie postać

$$i_p = I_m \sin(\psi - \varphi) e^{-\frac{R}{L} t} ;$$

z tego widać, że prąd zanika stopniowo, przyczem w przypadku $\psi = \varphi$, to znaczy, gdy prąd w chwili zwarcia przechodzi przez wartość zero, niema wcale prądu przejściowego.

§ 96. Przerwanie obwodu z uwzględnieniem zmiany oporności na wyłączniku.

Przy przerywaniu obwodu oporność jego w krótkim zwykle okresie wyłączania wzrasta od pierwotnej wartości R do wartości bardzo wysokiej, którą praktycznie przyjmujemy jako nieskończenie wielką. Załóżmy, że zmiana oporności w zależności od czasu zachodzi na zasadzie wzoru Aronsa. Według tego wzoru, jeżeli oznaczymy przez t_0 czas użyty na wyłączenie, wartość chwilowa oporności R_t w chwili t , czyli po upływie t sekund od chwili rozpoczęcia wyłączania, wynosi

$$R_t = \frac{R}{1 - \frac{t}{t_0}} \quad (14)$$

Wzór ten daje dla $t = 0$, $R_t = R$, zaś dla $t = t_0$, $R_t = \infty$. Przy takiej zmianie oporności w okresie wyłączania otrzymamy następujące równanie dla obwodu, zawierającego R i L przy napięciu prądu stałego, równem U

$$i \frac{R}{1 - \frac{t}{t_0}} + L \frac{di}{dt} = U, \quad (15)$$

albo

$$\frac{di}{dt} + \frac{R t_0}{L(t_0 - t)} i = \frac{U}{L}.$$

Dla scałkowania tego równania zakładamy

$$i = xy, \quad (16)$$

gdzie x i y są funkcjami t ; wtedy

$$\begin{aligned} x \frac{dy}{dt} + y \frac{dx}{dt} + \frac{R t_0}{L(t_0 - t)} xy &= \frac{U}{L}, \\ x \left[\frac{dy}{dt} + \frac{R t_0}{L(t_0 - t)} y \right] + y \frac{dx}{dt} &= \frac{U}{L}; \end{aligned} \quad (17)$$

funkcję y wybieramy w ten sposób, aby

$$\frac{dy}{dt} + \frac{R t_0}{L(t_0 - t)} y = 0,$$

czyli

$$\frac{dy}{y} = - \frac{R}{L} \frac{t_0}{t_0 - t} dt;$$

jedno z rozwiązań daje

$$\lg y = \frac{R}{L} t_0 \lg(t_0 - t) = \lg(t_0 - t)^{\frac{R}{L} t_0},$$

skąd

$$y = (t_0 - t)^{\frac{R}{L} t_0}. \quad (18)$$

Wprowadzając taką wartość y do wzoru (17), otrzymamy

$$(t_0 - t)^{\frac{R}{L} t_0} \frac{dx}{dt} = \frac{U}{L},$$

skąd

$$dx = \frac{U}{L} \frac{dt}{(t_0 - t)^{\frac{R}{L} t_0}}.$$

Dla określenia x przez całkowanie musimy rozpatrzeć 2 przypadki:

$$1) \frac{R}{L} t_0 \geq 1; \quad 2) \frac{R}{L} t_0 = 1.$$

W przypadku 1) będziemy mieli

$$x = -\frac{U}{L} \frac{(t_0 - t)^{-\frac{R}{L}t_0 + 1}}{-\frac{R}{L}t_0 + 1} + K,$$

gdzie K stała dowolna, albo po uproszczeniu

$$x = \frac{U}{Rt_0 - L} (t_0 - t)^{1 - \frac{R}{L}t_0} + K. \quad (19)$$

Zakładając wartości dla x i y ze wzorów (19) i (18), otrzymamy ze wzoru (16)

$$i = K(t_0 - t)^{\frac{R}{L}t_0} + \frac{U}{Rt_0 - L}(t_0 - t). \quad (20)$$

Stałą K określimy z warunku, że w chwili rozpoczęcia wyłączenia prąd miał pewną wartość I , to znaczy, dla $t=0$, $i=I$, wtedy ze wzoru (20) otrzymamy

$$Kt_0^{\frac{R}{L}t_0} + \frac{U}{Rt_0 - L}t_0 = I,$$

skąd

$$K = \left(I - \frac{Ut_0}{Rt_0 - L} \right) t_0^{-\frac{R}{L}t_0}.$$

Wobec tego ze wzoru (20) będziemy mieli

$$\begin{aligned} i &= \left(I - \frac{Ut_0}{Rt_0 - L} \right) (t_0 - t)^{\frac{R}{L}t_0} \cdot t_0^{-\frac{R}{L}t_0} + \frac{U}{Rt_0 - L}(t_0 - t) = \\ &= \left(I - \frac{Ut_0}{Rt_0 - L} \right) \left(\frac{t_0 - t}{t_0} \right)^{\frac{R}{L}t_0} + \frac{U}{Rt_0 - L}(t_0 - t). \end{aligned} \quad (21)$$

W przypadku 2-im otrzymujemy przez całkowanie

$$x = -\frac{U}{L} \lg_n(t_0 - t) + K;$$

wobec tego

$$i = K(t_0 - t) - \frac{U}{L}(t_0 - t) \lg_n(t_0 - t) = (t_0 - t) \left[K - \frac{U}{L} \lg_n(t_0 - t) \right].$$

Określamy stałą K , zakładając $t=0$, $i=I$,
wtedy

$$t_0 \left(K - \frac{U}{L} \lg_n t_0 \right) = I,$$

$$K = \frac{I}{t_0} + \frac{U}{L} \lg_n t_0,$$

$$i = (t_0 - t) \left[\frac{I}{t_0} + \frac{U}{L} \lg_n t_0 - \frac{U}{L} \lg_n (t_0 - t) \right] =$$

$$= (t_0 - t) \left(\frac{I}{t_0} + \frac{U}{L} \lg_n \frac{t_0}{t_0 - t} \right). \quad (22)$$

Prąd I , który mamy we wzorach (21) i (22), stanowi prąd w chwili rozpoczęcia wyłączania, to znaczy przy $t=0$. Prąd ten może być prądem ustalonym lub też nieustalonym. Dla prądu ustalonego $I = \frac{U}{R}$, wówczas ze wzorów (21) i (22) otrzymamy dla

$$\frac{R}{L} t_0 \cong 1$$

$$i = I \left(1 - \frac{t_0}{t - \frac{L}{R}} \right) \left(\frac{t_0 - t}{t_0} \right)^{\frac{R}{L} t_0} + I \frac{t_0 - t}{t_0 - \frac{L}{R}} =$$

$$= I \left[\frac{t_0 - t}{t_0 - \frac{L}{R}} - \frac{L}{(R t_0 - L)} \left(\frac{t_0 - t}{t_0} \right)^{\frac{R}{L} t_0} \right], \quad (23)$$

zaś dla $\frac{R}{L} t_0 = 1$

$$i = I (t_0 - t) \left(\frac{1}{t_0} + \frac{R}{L} \lg_n \frac{t_0}{t_0 - t} \right). \quad (24)$$

Oporność na wyłączniku w czasie wyłączania będzie

$$R_t - R = \frac{R}{1 - \frac{t_0}{t}} - R = \frac{Rt}{t_0 - t},$$

zaś napięcie na wyłączniku w chwili t wyniesie

$$u_w = i \frac{Rt}{t_0 - t};$$

dla $\frac{R}{L}t_0 \geq 1$, biorąc wartość i ze wzoru (21) i zamieniając I przez $\frac{U}{R}$, otrzymamy

$$u_w = U \frac{t - \frac{L}{R} \frac{t_0}{t} \left(\frac{t_0 - t}{t_0} \right)^{\frac{R}{L} t_0 - 1}}{t_0 - \frac{L}{R}}. \quad (25)$$

Dla $\frac{R}{L}t_0 = 1$, na podstawie wzoru (22),

$$u_w = Ut \left(\frac{1}{t_0} + \frac{R}{L} \lg_n \frac{t_0}{t_0 - t} \right). \quad (26)$$

Zbadajmy teraz wzory (25) i (26), określając z nich wartość napięcia na wyłączniku w końcu wyłączania, to znaczy dla $t = t_0$. Oznaczając to napięcie przez U_w , otrzymamy

w przypadku, gdy $\frac{R}{L}t_0 - 1 > 0$, ze wzoru (25)

$$U_w = U \frac{t_0 - \frac{L}{R}}{t_0 - \frac{L}{R}} = \frac{U \frac{R}{L} t_0}{\frac{R t_0}{L} - 1} = U + \frac{U}{\frac{R t_0}{L} - 1}, \quad (27)$$

czyli $U_w \geq U$; lecz U_w ma pewną wartość skończoną.

W przypadku, gdy $\frac{R}{L}t_0 - 1 < 0$, z tegoż wzoru (25), biorąc pod uwagę, że mianownik staje się ujemnym, gdyż $t_0 < \frac{L}{R}$,

$$U_w = U \frac{t_0 - \infty}{t_0 - \frac{L}{R}} = \infty.$$

W przypadku, gdy $\frac{R}{L} t_0 - 1 = 0$, ze wzoru (26) otrzymamy

$$U_w = U t_0 \left(\frac{1}{t_0} + \frac{R}{L} \lg_n \frac{t_0}{0} \right) = U + \infty = \infty .$$

Napięcie zatem na wyłączniku będzie zawsze większem, niż napięcie z zewnątrz przyłożone. Teoretycznie w dwóch ostatnich przypadkach wartość napięcia otrzymuje się nieskończenie wielka; w rzeczywistości, w tych przypadkach tworzy się iskra, trwająca tak długo, aż $\frac{R}{L} t_0 - 1$ staje się większem od 0. Praktycznie zatem zawsze $\frac{R}{L} t_0 < 1$ i najmniejszy okres czasu, po upływie którego następuje zupełne otwarcie obwodu, zależy jest od stosunku $\frac{L}{R}$; powinno być

$$t_0 > \frac{L}{R} ;$$

np. gdy $L = 1 \text{ mH} = 0,001 \text{ H}$, $R = 0,1 \Omega$,

$$t_0 > 0,01 \text{ sec.}$$

Jeżeli wyłączymy obwód np. w ciągu $t_0 = \frac{1}{80} \text{ sec}$, wtedy na podstawie wzoru (27) otrzymamy na wyłączniku napięcie

$$U_w = U \frac{\frac{1}{80}}{\frac{1}{80} - \frac{1}{100}} = 5 U,$$

czyli 5 razy większe od napięcia źródła.

§ 97. Ładowanie kondensatora prądem stałym przez oporność rzeczywistą.

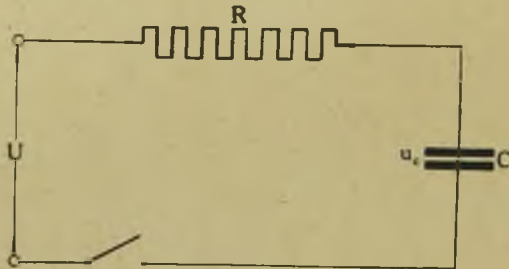
Rozpatrzmy obwód (rys. 197), w którym pomiędzy zaciskami źródła mamy napięcie prądu stałego o wartości U , oporność rzeczywistą R oraz kondensator o pojemności C . Licząc czas od chwili

zamknięcia takiego obwodu i oznaczając wartość chwilową napięcia na kondensatorze przez u_c oraz przez i natężenie prądu w stanie nieustalonym, będziemy mieli na zasadzie znanych wzorów,

$$Ri + u_c = U,$$

$$i = C \frac{du_c}{dt};$$

w tym przypadku dla $t = 0$, $u_c = 0$.



Rys. 197.

Z ostatnich równań otrzymujemy

$$RC \frac{du_c}{dt} + u_c = U,$$

$$\frac{du_c}{u_c - U} = - \frac{dt}{RC},$$

$$\lg_n (u_c - U) = - \frac{t}{RC} + \lg_n K,$$

gdzie K stała dowolna; wreszcie

$$u_c - U = Ke^{-\frac{t}{RC}},$$

$$u_c = U + Ke^{-\frac{t}{RC}},$$

Zakładając w tym wzorze $t = 0$, $u_c = 0$, znajdujemy

$$K = -U,$$

wobec czego

$$u_c = U - Ue^{-\frac{t}{RC}},$$

$$i = C \frac{du_c}{dt} = \frac{U}{R} e^{-\frac{t}{RC}} ;$$

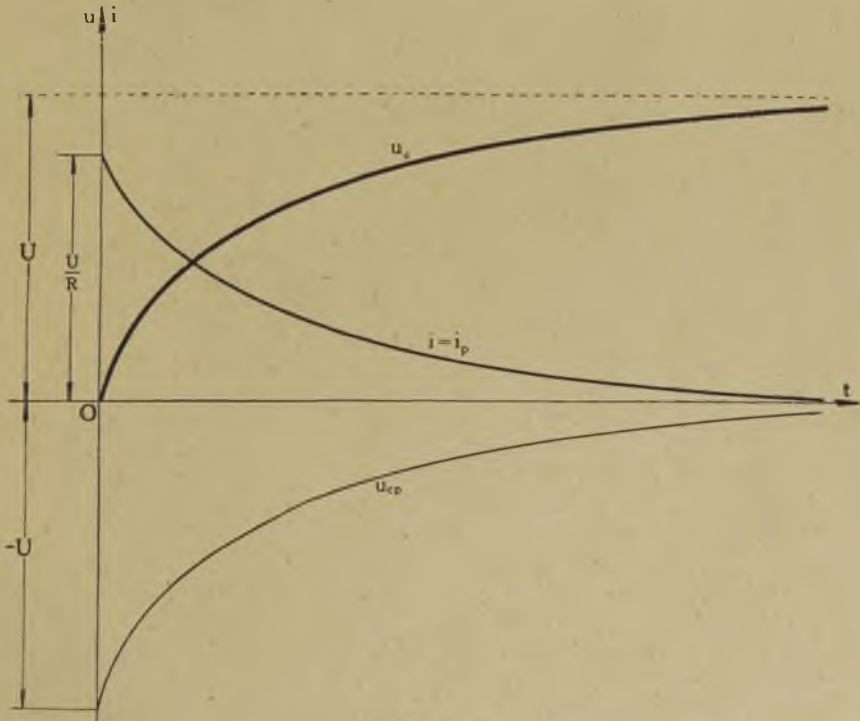
ponieważ w stanie ustalonym napięcie na kondensatorze będzie równe U , zaś prądu wcale nie będzie, przeto dla wartości przejściowych otrzymujemy

$$u_{cp} = -Ue^{-\frac{t}{RC}} ,$$

$$i_p = \frac{U}{R} e^{-\frac{t}{RC}} .$$

Widzimy, że obie te wielkości maleją stopniowo z biegiem czasu; RC stanowi w tym przypadku stałą czasu T , od wartości której zależy okres czasu potrzebny, aby napięcie i prąd osiągnęły praktycznie swe wartości graniczne, to znaczy, aby nastąpił stan ustalony obwodu.

Na rys. 198 pokazany jest przebieg napięcia i prądu po zamknięciu obwodu, czyli w czasie ładowania kondensatora prądem stałym.



Rys. 198.

Ponieważ wzory, wyprowadzone dla wartości przejściowych napięcia na kondensatorze oraz prądu, ładującego kondensator, są analogiczne do wzoru, wyprowadzonego dla prądu przejściowego w obwodzie, zawierającym oporność rzeczywistą i indukcyjność (wzór 3), przeto możemy wyprowadzić tutaj takie same wnioski co do zanikania napięć i prądów, a mianowicie, po upływie czasu $T = RC$ wartości przejściowe spadną do 0,37, po upływie $2T$ do 0,13, a po upływie $3T$ do 0,05 swej pierwotnej wartości i t. d.

§ 98. Powstawanie prądu zmiennego w obwodzie z opornością rzeczywistą i pojemnością.

Rozpatrujemy obwód, jak na rys. 197 z tą różnicą, że zamiast napięcia prądu stałego mamy na zaciskach napięcie prądu zmiennego. Rozpocznijmy liczenie czasu w chwili zamknięcia obwodu i niech wartość chwilowa napięcia przechodzi wówczas przez fazę ψ , to znaczy, że wartość napięcia w chwili t będzie określona wzorem

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi).$$

Dla takiego obwodu będziemy mieli

$$Ri + u_c = U_m \sin(\omega t + \psi),$$

a ponieważ

$$i = C \frac{du_c}{dt},$$

przeto

$$\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{RC} u_c = \frac{U_m}{RC} \sin(\omega t + \psi). \quad (28)$$

Rozwiązujemy najpierw równanie uproszczone

$$\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{RC} u_c = 0,$$

$$\frac{du_c}{u_c} = - \frac{dt}{RC},$$

skąd

$$\lg_n u_c = - \frac{t}{RC} + \lg_n K,$$

gdzie K stała dowolna, i ostatecznie

$$u_c = K e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Łatwo zauważyć, iż otrzymana wartość u_c stanowi wartość przejściową, więc możemy napisać

$$u_{cp} = K e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (29)$$

Całkę szczególną równania (28), która daje nam napięcie ustalone, moglibyśmy znaleźć na podstawie znanych metod matematycznych; prędzej ją znajdziemy, rozumując w sposób następujący: jak wiadomo w rozpatrywanym obwodzie powstaje prąd ustalony o wartości

$$i_u = I_m \sin(\omega t + \psi + \varphi), \quad (30)$$

przyśpieszony w fazie względem napięcia na zaciskach źródła o kąt φ , przyczem

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{\omega C R} = \frac{1}{R \omega C},$$

zaś

$$I_m = \frac{U_m}{Z}, \text{ gdzie } Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2};$$

następnie wiadomo, że napięcie na pojemności (kondensatorze) równe jest iloczynowi prądu przez oporność pojemnościową i że to napięcie względem prądu jest opóźnione o kąt prosty. W ten sposób dla stanu ustalonego mamy

$$u_{cu} = I_m \frac{1}{\omega C} \sin\left(\omega t + \psi + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{U_m}{Z \omega C} \cos(\omega t + \psi + \varphi).$$

Dodając do siebie wartości przejściową i ustaloną napięcia na kondensatorze, otrzymamy napięcie w stanie nieustalonym

$$u_c = u_{cp} + u_{cu} = K e^{-\frac{t}{RC}} - \frac{U_m}{Z \omega C} \cos(\omega t + \psi + \varphi).$$

Zakładając w tym wzorze $t=0$, $u_c=0$, otrzymamy

$$K = \frac{U_m}{Z \omega C} \cos(\psi + \varphi), \quad (31)$$

wobec czego

$$u_c = \frac{U_m}{Z \omega C} \left[\cos(\psi + \varphi) e^{-\frac{t}{RC}} - \cos(\omega t + \psi + \varphi) \right]. \quad (32)$$

Łatwo jest zauważyć, że wyraz stojący w nawiasach nie może być większy od dwóch, gdyż

$$|\cos(\psi + \varphi)| \leq 1,$$

$$|\cos(\omega t + \psi + \varphi)| \leq 1,$$

$$e^{-\frac{t}{RC}} \leq 1,$$

wobec tego

$$\max u_c = \frac{2 U_m}{Z \omega C},$$

a ponieważ $\frac{U_m}{Z} \cdot \frac{1}{\omega C}$ stanowi napięcie na kondensatorze w stanie ustalonym, przeto przyszliśmy do wniosku, że w stanie nieustalonym napięcie na kondensatorze nie może przekroczyć podwójnej wartości napięcia, które mamy w stanie ustalonym.

Na podstawie wzoru (29) po uwzględnieniu (31) mamy

$$u_{cp} = \frac{U_m}{Z \omega C} \cos(\psi + \varphi) e^{-\frac{t}{RC}};$$

stąd znajdujemy prąd przejściowy

$$i_p = C \frac{du_{cp}}{dt} = -\frac{U_m}{Z} \frac{1}{R \omega C} \cos(\psi + \varphi) e^{-\frac{t}{RC}};$$

ponieważ

$$\frac{U_m}{Z} = I_m, \quad \frac{1}{R \omega C} = \operatorname{tg} \varphi,$$

więc

$$i_p = -I_m \operatorname{tg} \varphi \cos(\psi + \varphi) e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (33)$$

Dodając do siebie wartości prądów ze wzorów (30) i (33), otrzymamy prąd w stanie nieustalonym

$$i = i_u + i_p = I_m \sin(\omega t + \psi + \varphi) - I_m \operatorname{tg} \varphi \cos(\psi + \varphi) e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (34)$$

Łatwo stwierdzić ze wzorów (32) i (33), że nie będziemy mieli ani napięcia przejściowego, ani prądu przejściowego gdy

$$\psi + \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Dla $t = 0$ wzór (34) daje

$$i = I_m [\sin(\psi + \varphi) - \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos(\psi + \varphi)] = \frac{I_m}{\cos \varphi} \sin \psi;$$

największą wartość prądu w tym przypadku otrzymamy wtedy, gdy $\psi = \frac{\pi}{2}$, to znaczy, gdy w chwili zamknięcia obwodu napięcie przechodzi przez wartość maksymalną; wtedy

$$\max i = \frac{I_m}{\cos \varphi} = \frac{Z}{R} I_m.$$

Przy małym $\cos \varphi$, czyli przy małej oporności rzeczywistej w porównaniu do oporności pojemnościowej, prąd i może w znacznym stopniu przewyższać prąd, który pozostaje w stanie ustalonym, a chociaż tego rodzaju przetężenie trwa nadzwyczaj krótko, tem niemniej w wielu przypadkach wskazanem jest włączanie dodatkowych oporników do czasu ustalenia się prądu, lub stopniowe zwiększanie napięcia, działającego w obwodzie.

Dla przykładu weźmiemy

$$R = 1 \Omega, \quad C = 1 \mu F, \quad f = 50^{\text{okr}}/\text{sek}.$$

Wtedy

$$Z = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{314 \cdot 10^{-6}}\right)^2} = 3185 \Omega,$$

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z} = \frac{1}{3185}.$$

Dla $\psi = \frac{\pi}{2}$ oraz $t = 0$, $\max i = 3185 I_m$.

Prąd przejściowy w tej chwili ma wartość $3184 I_m$. Stała czasu $T = RC = 10^{-6}$ sek. Wartość prądu przejściowego spadnie do wartości I_m po upływie czasu t_0 , gdy

$$e^{-10^6 t_c} = \frac{1}{3184},$$

czemu odpowiada $t_0 = 8 \cdot 10^{-6}$ sec.

Do wartości $0,001 I_m$ prąd przejściowy spadnie już po upływie $15 \cdot 10^{-6}$ sec.

§ 99. Wyładowanie kondensatora przez oporność rzeczywistą.

Jeżeli rozpatrzemy obwód, zawierający oporność rzeczywistą i kondensator, który w pewnej chwili zostaje zwarty w ten sposób, że ładunek znajdujący się na kondensatorze stanowi jedyne źródło energii elektrycznej, wówczas następuje wyładowanie kondensatora. Oznaczmy wartość napięcia na kondensatorze w chwili takiego zwarcia przez U_c , niezależnie od tego, czy to napięcie powstało od prądu stałego lub zmiennego, zaś wartość chwilową napięcia po zwarciu przez u_c oraz prądu, powstającego przy wyładowaniu kondensatora przez i . Będziemy mieli dla takiego obwodu

$$R i = u_c,$$

a ponieważ $i = -C \frac{du_c}{dt}$, więc

$$R C \frac{du_c}{dt} + u_c = 0,$$

skąd jak poprzednio

$$u_c = K e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Zakładając $t = 0$, $u_c = U_c$, będziemy mieli

$$K = U_c,$$

$$u_c = U_c e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Prąd wyładowania, mający kierunek odwrotny do kierunku prądu ładowania, otrzymamy w postaci

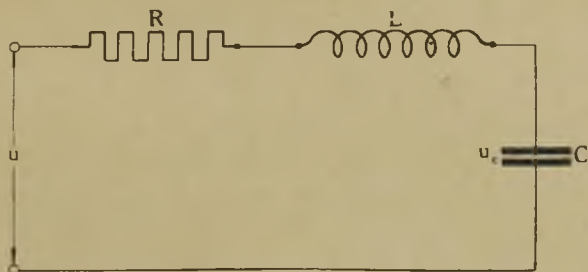
$$i = -C \frac{du_c}{dt} = \frac{U_c}{R} e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Widzimy więc, że w rozpatrywanym obwodzie zarówno napięcie na kondensatorze, jak też i prąd wyładowania, maleją stopniowo z biegiem czasu. Prędkość zanikania napięcia i prądu zależy od wartości stałej czasu $T = RC$.

§ 100. Obwód z opornością, rzeczywistą, indukcyjnością i pojemnością.

Rozpatrując obwód, jak na rys. 199, będziemy mieli w każdej chwili

$$Ri + L \frac{di}{dt} + u_c = u, \quad (35)$$



Rys. 199.

$$i = C \frac{du_c}{dt}; \quad (36)$$

podstawiamy i z (36) do (35), wtedy

$$RC \frac{du_c}{dt} + LC \frac{d^2u_c}{dt^2} + u_c = u,$$

albo

$$\frac{d^2u_c}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_c}{dt} + \frac{1}{LC} u_c = \frac{1}{LC} u; \quad (37)$$

u może być napięciem o wartości stałej lub zmiennej.

Przy rozwiązywaniu równania (37) przedewszystkiem musimy znaleźć całkę ogólną równania uproszczonego

$$\frac{d^2u_c}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_c}{dt} + \frac{1}{LC} u_c = 0; \quad (38)$$

następnie musimy wyszukać całkę szczególną równania (37) i obie te znalezione całki dodać do siebie, wówczas otrzymamy całkę ogólną równania (37).

Przypomnijmy, że równanie różniczkowe linijowe rzędu drugiego o stałych współczynnikach typu

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = 0$$

rozwiązać możemy w ten sposób, że piszemy algebraiczne równanie charakterystyczne

$$k^2 + p_1 k + p_2 = 0,$$

które po rozwiązaniu może dać pierwiastki

- 1) k_1 i k_2 — rzeczywiste i różne,
- 2) $k_1 = k_2 = k_0$ — rzeczywiste i równe,
- 3) $k_1 = m + nj$, $k_2 = m - nj$, gdzie $j = \sqrt{-1}$, w postaci liczb zespolonych sprzężonych.

Całki takiego równania będą w tych przypadkach

$$1) y = A_1 e^{k_1 x} + A_2 e^{k_2 x}, \quad (39)$$

$$2) y = e^{k_0 x} (A_1 + A_2 x), \quad (40)$$

$$3) y = e^{mx} (A_1 \sin nx + A_2 \cos nx), \quad (41)$$

gdzie A_1 i A_2 stałe dowolne.

Na tej podstawie, rozwiązując równanie (38), napiszemy równanie charakterystyczne w postaci

$$k^2 + \frac{R}{L} k + \frac{1}{LC} = 0,$$

skąd

$$k_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}, \quad (42)$$

$$k_2 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}. \quad (43)$$

Oczywiście, w zależności od tego, czy podpierwiastkowa jest większa od zera, równa zero lub mniejsza od zera, otrzymamy każdy z 3-ch rozpatrzonych przypadków, a więc przy

$R > 2 \sqrt{\frac{L}{C}}$ pierwiastki będą rzeczywiste i różne,

$R = 2 \sqrt{\frac{L}{C}}$ pierwiastki będą rzeczywiste i równe,

$R < 2 \sqrt{\frac{L}{C}}$ pierwiastki będą liczbami zespolonymi sprzężonymi.

Przypadek I.

$$R > 2 \sqrt{\frac{L}{C}} .$$

Łatwo zauważyć, że oba pierwiastki k_1 i k_2 ze wzorów (42) i (43) mają wartości ujemne, przyczem wartość bezwzględna pierwiastka k_2 jest większa od wartości bezwzględnej pierwiastka k_1 ; oznaczając te wartości bezwzględne przez a_1 i a_2 , czyli zakładając

$$k_1 = -a_1,$$

$$k_2 = -a_2,$$

gdzie a_1 i a_2 stanowią liczby dodatnie, przyczem $a_2 > a_1$, możemy na podstawie wzoru (39) napisać

$$u_c = A_1 e^{-a_1 t} + A_2 e^{-a_2 t} . \quad (44)$$

Przypadek II.

$$R = 2 \sqrt{\frac{L}{C}} .$$

Jak widać ze wzorów (42) i (43)

$$k_1 = k_2 = -\frac{R}{2L} = -a ,$$

gdzie $a = \frac{R}{2L}$ jest liczbą dodatnią.

Na podstawie wzoru (40) będziemy mieli

$$u_c = e^{-at} (A_1 + A_2 t) . \quad (45)$$

Przypadek III.

$$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Pierwiastki ze wzorów (42) i (43) możemy wówczas przepisać w postaci

$$k_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \cdot \sqrt{-1}$$

$$k_2 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \cdot \sqrt{-1};$$

oznaczając

$$\frac{R}{2L} = \alpha,$$

$$\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = \beta,$$

będziemy mieli

$$k_1 = -\alpha + j\beta,$$

$$k_2 = -\alpha - j\beta,$$

wobec tego na podstawie wzoru (41) otrzymamy

$$u_c = e^{-\alpha t} (A_1 \sin \beta t + A_2 \cos \beta t). \quad (45)$$

§ 101. Wyładowanie kondensatora aperiodyczne.

Rozpatrzmy przypadek, gdy rozpatrywany obwód, zawierający (rys. 199) R , L i C w pewnej chwili został zwarty. Wtedy nastąpi wyładowanie kondensatora, posiadającego w początkowej chwili napięcie o określonej wartości, np. U_0 , zaś prąd płynący będzie prądem wyładowania kondensatora, którego kierunek jest przeciwny do kierunku prądu, płynącego przedtem od zewnętrznego źródła. Dla takiego obwodu będziemy mieli

$$\text{dla } t = 0, \quad u_c = U_0, \quad i = 0, \quad (47)$$

$$i = -C \frac{du_c}{dt}. \quad (48)$$

Wobec tego, że $u=0$, zamiast równania (37) będziemy mieli równanie (38), dla którego mamy już znalezione całki ogólne, a więc

w przypadku I, według wzoru (44),

$$u_c = A_1 e^{-a_1 t} + A_2 e^{-a_2 t},$$

skąd

$$i = -C \frac{du_c}{dt} = A_1 C a_1 e^{-a_1 t} + A_2 C a_2 e^{-a_2 t};$$

zakładając w obu tych wzorach wartości ze wzorów (47) otrzymamy,

$$A_1 + A_2 = U_0,$$

$$A_1 a_1 + A_2 a_2 = 0,$$

skąd

$$A_1 = \frac{a_2}{a_2 - a_1} U_0,$$

$$A_2 = -\frac{a_1}{a_2 - a_1} U_0.$$

Wobec tego

$$u_c = \left(\frac{a_2}{a_2 - a_1} e^{-a_1 t} - \frac{a_1}{a_2 - a_1} e^{-a_2 t} \right) U_0,$$

albo

$$u_c = \frac{U_0}{a_2 - a_1} (a_2 e^{-a_1 t} - a_1 e^{-a_2 t}). \quad (49)$$

Biorąc pochodną u_c względem t , otrzymamy

$$\begin{aligned} \frac{du_c}{dt} &= \frac{U_0}{a_2 - a_1} (-a_1 a_2 e^{-a_1 t} + a_1 a_2 e^{-a_2 t}) = \\ &= \frac{a_1 a_2}{a_2 - a_1} U_0 (e^{-a_2 t} - e^{-a_1 t}); \end{aligned} \quad (50)$$

ponieważ, jak to przedtem stwierdziliśmy, $a_2 > a_1$, przeto

$$e^{-a_2 t} < e^{-a_1 t}$$

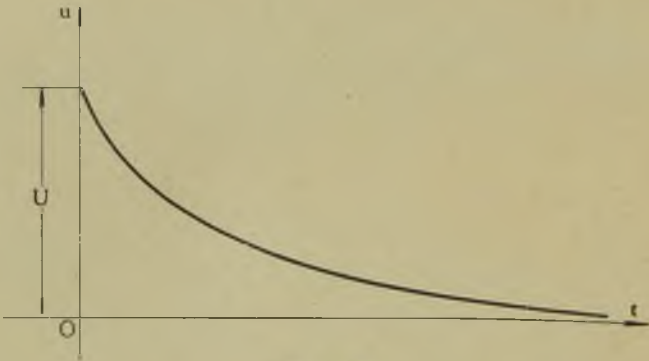
i wyraz, stojący w nawiasach wzoru (50), jest liczbą ujemną, zaś wyraz, stojący przed tym nawiasem, jest liczbą dodatnią, więc

$$\frac{du_c}{dt} < 0;$$

na tej podstawie stwierdzamy, że u_c jest funkcją malejącą z biegiem czasu i ma wartość zawsze dodatnią, gdyż

$$a_2 > a_1, \quad e^{-a_1 t} > e^{-a_2 t}, \quad a_2 e^{-a_1 t} > a_1 e^{-a_2 t},$$

więc najmniejsza jej wartość $= 0$, teoretycznie dla $t = \infty$ (rys. 200); wartość prądu i znajdziemy na podstawie wzorów (48) i (50)



Rys. 200.

$$\begin{aligned} i &= -C \frac{du_c}{dt} = -\frac{a_1 a_2}{a_2 - a_1} C U_0 \left(e^{-a_2 t} - e^{-a_1 t} \right) = \\ &= \frac{a_1 a_2}{a_2 - a_1} C U_0 \left(e^{-a_1 t} - e^{-a_2 t} \right). \end{aligned} \quad (51)$$

Dla zbadania tej funkcji bierzemy pochodną względem t :

$$\frac{di}{dt} = \frac{a_1 a_2}{a_2 - a_1} C U_0 \left(a_2 e^{-a_2 t} - a_1 e^{-a_1 t} \right); \quad (52)$$

wyraz stojący w nawiasach może być większy lub mniejszy od zera, lub może się równać zero, mianowicie $\frac{di}{dt} = 0$, jeżeli

$$a_1 e^{-a_1 t} = a_2 e^{-a_2 t}, \quad (53)$$

skąd

$$e^{(a_2 - a_1)t} = \frac{a_2}{a_1},$$

$$(a_2 - a_1)t = \lg_n \frac{a_2}{a_1},$$

$$t = \frac{1}{a_2 - a_1} \lg_n \frac{a_2}{a_1} > 0. \quad (54)$$

Biorąc jeszcze raz pochodną we wzorze (52), otrzymamy

$$\frac{d^2 i}{dt^2} = \frac{a_1 a_2}{a_2 - a_1} CU_0 \left(a_1^2 e^{-a_1 t} - a_2^2 e^{-a_2 t} \right) \quad (55)$$

Dla wartości t , przy której pierwsza pochodna staje się równą zeru, czyli gdy ma miejsce równanie (53), druga pochodna i ze wzoru (55) będzie ujemną, gdyż wyraz stojący w nawiasach staje się mniejszym od zera; rzeczywiście, na podstawie wzoru (53)

$$a_1^2 e^{-a_1 t} - a_2^2 e^{-a_2 t} = a_1^2 e^{-a_1 t} - a_1 a_2 e^{-a_2 t} =$$

$$= a_1 e^{-a_1 t} (a_1 - a_2) < 0,$$

gdyż $a_1 < a_2$.

Wobec tego przy znalezionej we wzorze (54) wartości t , rozpatrywana funkcja i ze wzoru (51) otrzymuje wartość największą, ponieważ zaś $e^{-a_1 t} > e^{-a_2 t}$, przeto i zawsze jest większe od zera; tylko przy $t = \infty$, $i = 0$, oraz przy $t = 0$, $i = 0$, (rys. 201).

W przypadku II.

$$R = 2 \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

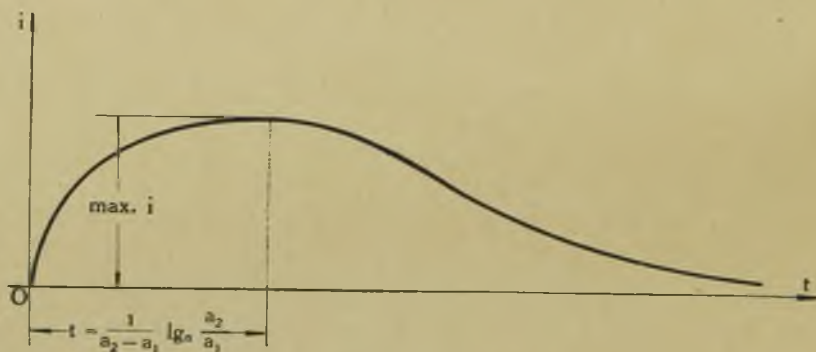
$$k_1 = k_2 = -\frac{R}{2L} = -a;$$

stosujemy wzór (45)

$$u_c = e^{-at} (A_1 + A_2 t), \quad (56)$$

skąd

$$i = -C \frac{du_c}{dt} = -C e^{-at} (A_2 - A_1 a - A_2 at); \quad (57)$$



Rys. 201.

zakładając $t=0$, $u_c = U_0$, $i = 0$,

będziemy mieli

$$A_1 = U_0,$$

$$A_2 - A_1 a = 0,$$

czyli

$$A_1 = U_0,$$

$$A_2 = a U_0.$$

Podstawiając te wartości do wzorów (56) i (57) otrzymamy

$$u_c = U_0 (1 + at) e^{-at}, \quad (58)$$

$$i = C a^2 t U_0 e^{-at};$$

wobec tego, że

$$C a^2 = C \frac{R^2}{4L^2},$$

zaś

$$R^2 = 4 \frac{L}{C},$$

$$C a^2 = \frac{C}{4L^2} \cdot \frac{4L}{C} = \frac{1}{L},$$

możemy napisać

$$i = \frac{U_0}{L} t e^{-at}; \quad (59)$$

u_c ze wzoru (58) jest funkcją malejącą, gdyż jej pochodna

$$\frac{du_c}{dt} = -a^2 t e^{-at} < 0,$$

więc napięcie na kondensatorze stopniowo zanika, natomiast prąd ze wzoru (59) tak samo jak w przypadku I, najpierw wzrasta, dochodzi do swej największej wartości, poczem stopniowo zanika; łatwo to stwierdzić z następujących działań

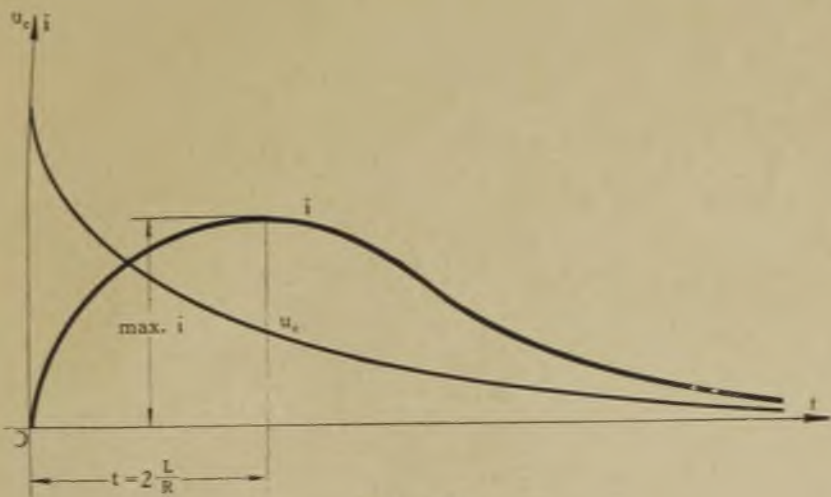
$$\frac{di}{dt} = \frac{U_0}{L} e^{-at} (1 - at).$$

Z równania

$$e^{-at} (1 - at) = 0$$

znajdujemy

$$t = \frac{1}{a};$$



Rys. 202.

przy tej wartości t druga pochodna

$$\left| \frac{d^2 i}{dt^2} \right|_{t=\frac{1}{a}} = \left| e^{-at}(a^2 t - 2a) \right|_{t=\frac{1}{a}} = -e^{-1} a < 0,$$

wobec czego stwierdzamy, że $\max i$ będzie przy

$$t = \frac{1}{a} = \frac{1}{\frac{R}{2L}} = 2 \frac{L}{R};$$

wartość tego prądu największego będzie

$$\max i = \frac{U_0}{L} 2 \frac{L}{R} e^{-1} = \frac{2 U_0}{R e} \cong 0,74 \frac{U_0}{R}.$$

Rys. 202 podaje przebieg u_c oraz i . W obu rozpatrzonych przypadkach wyładowanie zachodzi w sposób równomierny bez wahań i z tego powodu takie wyładowania możemy nazwać aperiodycznymi.

§ 102. Wyładowanie kondensatora oscylacyjne. Wzór Thomsona.

Rozpatrzmy przypadek III

$$R < 2 \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Na podstawie wzoru (46)

$$u_c = e^{-\alpha t} (A_1 \sin \beta t + A_2 \cos \beta t), \quad (60)$$

gdzie

$$\alpha = \frac{R}{2L}, \quad \beta = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \alpha^2}.$$

Znajdujemy

$$i = -C \frac{du_c}{dt} = C e^{-\alpha t} \left\{ \alpha A_1 \sin \beta t + \right. \\ \left. + \alpha A_2 \cos \beta t + \beta A_2 \sin \beta t - \beta A_1 \cos \beta t \right\}. \quad (61)$$

Zakładając we wzorach (60) i (61) $t = 0$, $u_c = U_0$, $i = 0$, otrzymamy

$$A_2 = U_0, \quad \alpha A_2 - \beta A_1 = 0,$$

skąd

$$A_1 = \frac{\alpha}{\beta} U_0,$$

$$A_2 = U_0;$$

wobec tego

$$u_c = \frac{U_0}{\beta} e^{-\alpha t} (\alpha \sin \beta t + \beta \cos \beta t),$$

$$i = C U_0 e^{-\alpha t} \frac{(\alpha^2 + \beta^2)}{\beta} \sin \beta t.$$

Ponieważ

$$\alpha \sin \beta t + \beta \cos \beta t = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \sin(\beta t + \delta),$$

gdzie

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\beta}{\alpha},$$

zaś

$$\alpha^2 + \beta^2 = \alpha^2 + \frac{1}{LC} - \alpha^2 = \frac{1}{LC}.$$

przeto

$$u_c = \frac{U_0 e^{-\alpha t}}{\beta \sqrt{LC}} \sin(\beta t + \delta), \quad (62)$$

$$i = \frac{U_0 e^{-\alpha t}}{\beta L} \sin \beta t. \quad (63)$$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\beta}{\alpha}, \quad \sin \delta = \beta \sqrt{LC}, \quad \cos \delta = \alpha \sqrt{LC}. \quad (64)$$

Łatwo jest zauważyć, że stosunek pomiędzy amplitudami u_c oraz i wynosi $\sqrt{\frac{L}{C}}$; prąd i jest opóźniony względem u_c o kąt $\delta = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\beta}{\alpha}$.

Stwierdzamy, że napięcie na kondensatorze u_c oraz prąd i , płynący w obwodzie, mają przebieg nieco odmienny od przebiegu

sinusoidalnego; różnica polega na tem, że na zmianę wartości tych wielkości ma wpływ funkcja wykładnicza e^{-at} ; ta ostatnia, jako funkcja malejąca, tłumí zjawisko, doprowadzając wreszcie wartości do zera. Tego rodzaju przebieg można nazwać przebiegiem sinusoidalnym tłumionym. W naszym przypadku pulsację stanowi β , częstotliwość zaś $f_w = \frac{\beta}{2\pi}$. W obwodzie zachodzą więc drgania napięcia i prądu czyli oscylacje; drgania te nazywamy własnymi, dla odróżnienia od drgań wymuszonych, wywołanych napięciem sinusoidalnem, przyłożonem od zewnątrz źródła. Taki obwód nazywamy obwodem oscylacyjnym. Częstotliwość drgań własnych wyraża się wzorem

$$f_w = \frac{\beta}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}. \quad (65)$$

Amplitudy napięcia na kondensatorze i prądu wynoszą

$$U_{cm} = \frac{U_0}{\beta \sqrt{LC}} e^{-at},$$

$$I_m = \frac{\beta L}{U_0} e^{-at}.$$

Poraz tych amplitud, równy $\sqrt{\frac{L}{C}}$ możemy nazwać opornością pozorną drgań własnych.

Jak widzimy, amplitudy te stanowią funkcje malejące z biegiem czasu i szybkość, z jaką one maleją, zależy od współczynnika tłumienia

$$\alpha = \frac{R}{2L}.$$

Badając funkcję u_c ze wzoru (62) stwierdzamy, że jej pierwsza pochodna względem czasu $\frac{du_c}{dt} = -\frac{i}{C}$, więc na podstawie wzoru (29)

$$\frac{du_c}{dt} = -\frac{U_0 C^{-at}}{\beta LC} \sin \beta t;$$

pochodna ta staje się równą zeru dla wartości

$$\beta t = 0, \pi, \dots, k\pi;$$

$$t = 0, \frac{\pi}{\beta}, \dots, k \frac{\pi}{\beta},$$

gdzie k dowolna liczba całkowita; zaś druga pochodna

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} = \frac{U_0 e^{-\alpha t}}{\beta L C} [\alpha \sin \beta t - \beta \cos \beta t]$$

dla powyższych wartości będzie mniejsza od zera, gdy k jest równe zeru lub jest liczbą parzystą; natomiast druga pochodna będzie większa od zera, gdy k jest liczbą nieparzystą: będziemy mieli więc szereg największych i najmniejszych (największych dodatnich i ujemnych) wartości napięcia u_c , idących w równych odstępach czasu; wartości te maleją z biegiem czasu według prawa funkcji wykładniczej $e^{-\alpha t}$. Największą wartość będziemy mieli dla $t = 0$, wtedy ze wzoru (62)

$$\max u_c = \frac{U_0}{\beta \sqrt{LC}} \sin \delta,$$

a ponieważ $\sin \delta = \beta \sqrt{LC}$, więc

$$\max u_c = U_0.$$

Napięcie więc na kondensatorze zmienia się według prawa sinusoidy tłumionej i posiada największą swą wartość w pierwszej chwili po rozpoczęciu się wyładowania kondensatora.

Dla prądu i ze wzoru (63)

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= \frac{U_0 e^{-\alpha t}}{\beta L} (\beta \cos \beta t - \alpha \sin \beta t) = \\ &= \frac{\alpha U_0 e^{-\alpha t}}{\beta L} (\cos \beta t \operatorname{tg} \delta - \sin \beta t) = \\ &= -\frac{U_0 e^{-\alpha t}}{\operatorname{tg} \delta L \cos \delta} \sin (\beta t - \delta) = \\ &= -\frac{U_0 e^{-\alpha t} \sin (\beta t - \delta)}{\sin \delta \cdot L}. \end{aligned}$$

Pochodna ta staje się równą zeru, gdy

$$\sin (\beta t - \delta) = 0;$$

$$\beta t - \delta = k\pi \quad (k=0, 1, 2, \dots),$$

$$t = \frac{\delta}{\beta}, \quad \frac{\pi}{\beta} + \frac{\delta}{\beta}, \quad \frac{2\pi}{\beta} + \frac{\delta}{\beta}, \dots;$$

druga pochodna

$$\frac{d^2 i}{dt^2} = -\frac{U_0 e^{-\alpha t}}{\sin \delta \cdot L} [\beta \cos(\beta t - \delta) - \alpha \sin(\beta t - \delta)]$$

dla powyższych wartości $(\beta t - \delta)$ będzie ujemną, gdy $k=0$ oraz gdy k jest liczbą parzystą, natomiast będzie dodatnią, gdy k jest liczbą nieparzystą. W ten sposób stwierdzamy, że również prąd wyładowania będzie przechodził przez szereg największych i najmniejszych wartości, zmieniając się oscylacyjnie według wzoru (63). Oczywiście, największa ze wszystkich wartości tego prądu otrzyma się dla najmniejszej wartości t , dającej maximum funkcji i , to znaczy dla

$$\beta t - \delta = 0,$$

$$t = \frac{\delta}{\beta}.$$

Wtedy ze wzoru (63)

$$\max i = \frac{U_0 e^{-\frac{\alpha}{\beta} \delta} \cdot \sin \delta}{\beta L},$$

a ponieważ $\sin \delta = \beta \sqrt{LC}$, więc

$$\max i = U_0 \sqrt{\frac{C}{L}} \cdot e^{-\frac{\alpha}{\beta} \delta}. \quad (66)$$

Przebieg napięcia u_c oraz prądu i w obwodzie oscylacyjnym podany jest na rys. 203 i rys. 204.

Zarówno dla napięcia, jak i dla prądu, miarą tłumienia jest funkcja

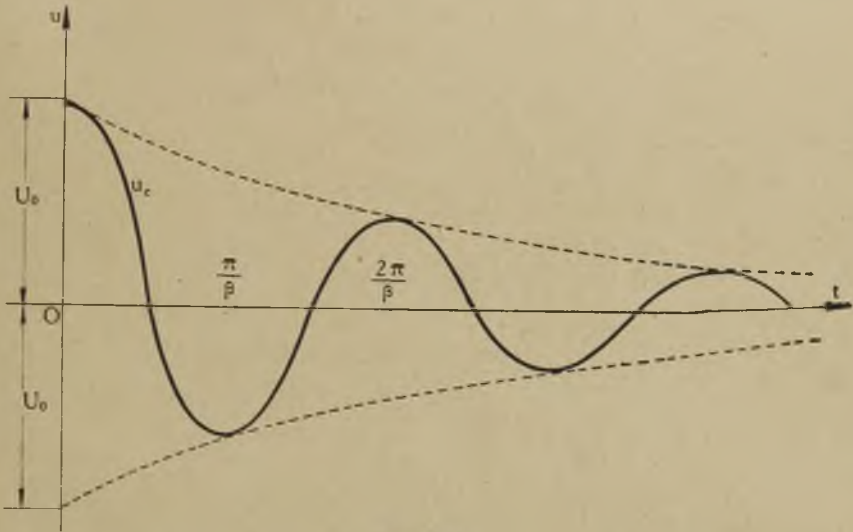
$$e^{-\alpha t};$$

stosunek amplitud, odpowiadających zmianie czasu o cały okres T , wynosi

$$\frac{e^{-\alpha t}}{e^{-\alpha(t+T)}} = e^{-\alpha T};$$

logarytm naturalny tego stosunku, równy

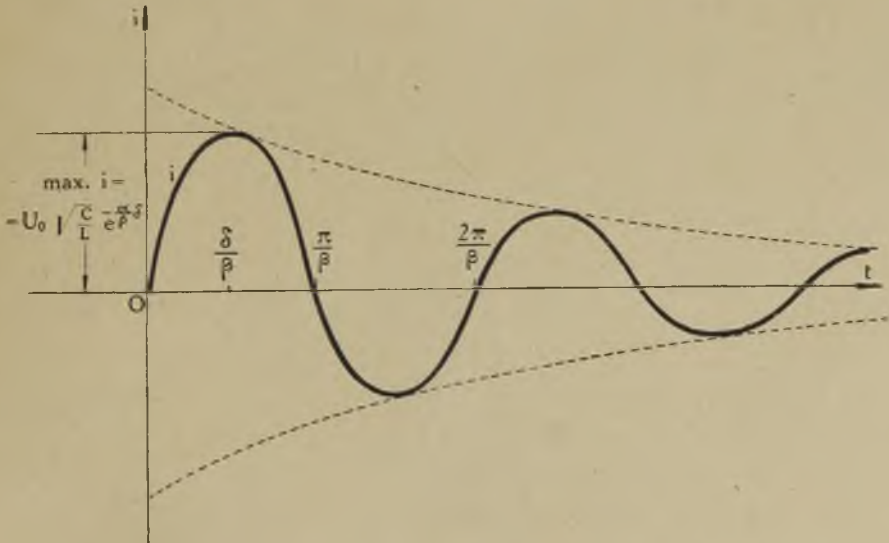
$$\lambda = \alpha T = \frac{R}{2L} T,$$



Rys. 203.

nazywamy logarytmicznym dekrementem tłumienia.

Na szczególne uwzględnienie zasługuje przypadek, gdy R jest bardzo małe w porównaniu do L , tak, iż praktycznie $\frac{R}{2L}$ można



Rys. 204.

założyć równe zero; powstające w tym przypadku drgania w obwodzie nazywamy drganiami swobodnemi; mamy więc

$$\alpha = \frac{R}{2L} = 0,$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{LC} - \alpha^2} = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\beta}{\alpha} = \infty, \quad \delta = \frac{\pi}{2};$$

ze wzorów (62), (63) i (65) otrzymamy

$$u_c = U_0 \sin \left(\beta t + \frac{\pi}{2} \right),$$

$$i = U_0 \sqrt{\frac{C}{L}} \sin \beta t,$$

$$f_s = \frac{\beta}{2\pi} = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}},$$

$$T_s = \frac{1}{f_s} = 2\pi \sqrt{LC}. \quad (67)$$

Jeżeli weźmiemy pod uwagę, że rezonans napięć w obwodzie zachodzi, gdy

$$\omega L = \frac{1}{\omega C},$$

czyli

$$\omega^2 = \frac{1}{LC},$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}},$$

to znaczy przy

$$f = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}},$$

$$T = 2\pi \sqrt{LC},$$

wtedy przyjdziemy do wniosku, że częstotliwość drgań swobodnych, odpowiada warunkowi rezonansu napięcia.

Wzór (67) na okres drgań swobodnych obwodu oscylacyjnego, znany jest jako wzór Thomsona, bo był po raz pierwszy wprowadzony przez Williama Thomsona, późniejszego Lorda Kelvina; oczywiście, że w rozpatrywanym przypadku tłumienia niema i drgania trwają, teoretycznie, czas nieograniczony.

§ 103. Ładowanie kondensatora prądem stałym przez oporność rzeczywistą i indukcyjność.

Jeżeli przyłączymy obwód (rys. 199) do źródła prądu stałego o napięciu U , wówczas dla określenia napięcia na kondensatorze będziemy mieli na podstawie wzoru (37) równanie różniczkowe

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_c}{dt} + \frac{1}{LC} u_c = \frac{1}{LC} U, \quad (68)$$

zaś prąd, płynący w obwodzie, będzie określony wzorem (36)

$$i = C \frac{du_c}{dt},$$

Całka szczególna równania (68) będzie $u_c = U$, co łatwo sprawdzić; wobec tego całkę ogólną tegoż równania otrzymamy, dodając U do całek ogólnych równania uproszczonego (38), które znaleźliśmy już dla trzech rozmaitych przypadków.

Dla określenia stałych, wchodzących do tych całek ogólnych, będziemy mieli warunek graniczny

$$t = 0, \quad u_c = 0, \quad i = 0.$$

W ten sposób otrzymamy w przypadku I, gdy

$$R > 2 \sqrt{\frac{L}{C}},$$

według wzoru (44)

$$u_c = A_1 e^{-a_1 t} + A_2 e^{-a_2 t} + U, \quad (69)$$

$$i = C \frac{du_c}{dt} = -a_1 C A_1 e^{-a_1 t} - a_2 C A_2 e^{-a_2 t}, \quad (70)$$

skąd przy $t = 0$

$$A_1 + A_2 = -U,$$

$$a_1 A_1 + a_2 A_2 = 0.$$

Rozwiązując te równania, znajdziemy

$$A_1 = -\frac{a_2}{a_2 - a_1} U; \quad A_2 = \frac{a_1}{a_2 - a_1} U.$$

Wobec tego

$$u_c = -\frac{U}{a_2 - a_1} \left\{ + a_2 e^{-a_1 t} - a_1 e^{-a_2 t} \right\} + U. \quad (71)$$

Jeżeli porównamy pierwszy wyraz prawej strony tego wzoru ze wzorem (49), to spostrzegamy, że różni się on od tego ostatniego tylko znakiem; poprzednio już zbadaliśmy, że taka funkcja jest malejącą z biegiem czasu; wyraz ten stanowi napięcie przejściowe na kondensatorze, gdy wyraz drugi U stanowi napięcie ustalone

$$u_{cp} = -\frac{U}{a_2 - a_1} \left\{ a_2 e^{-a_1 t} - a_1 e^{-a_2 t} \right\}. \quad (72)$$

Przebieg napięć uwidoczniiony jest na rys. 205.

Prąd i znajdziemy, podstawiając wartości stałych A_1 i A_2 do wzoru (70), wtedy

$$i = CU \frac{a_1 a_2}{a_2 - a_1} \left\{ e^{-a_1 t} - e^{-a_2 t} \right\}; \quad (73)$$

badając funkcję, stojącą w nawiasach, znajdziemy, że pochodna

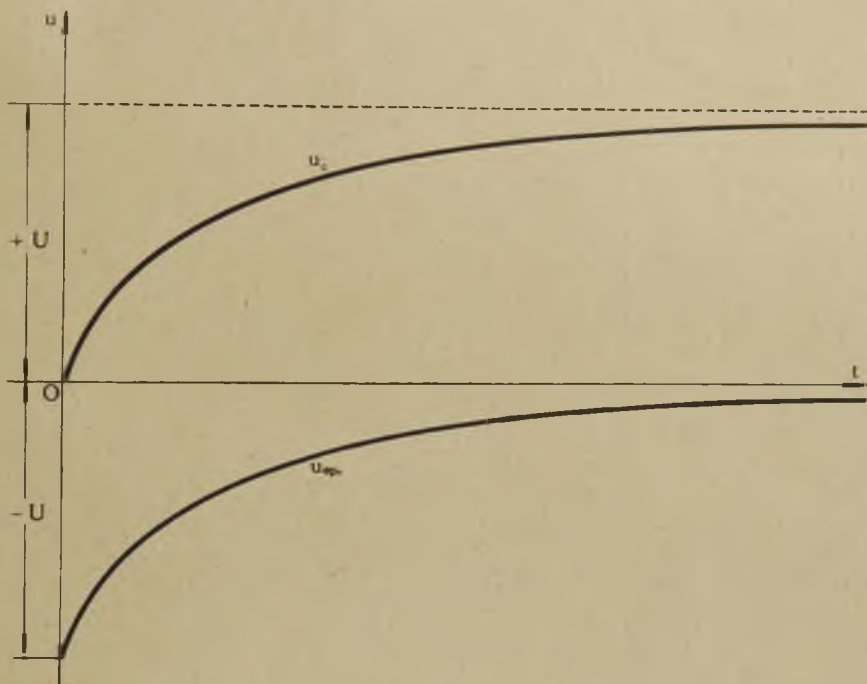
$\frac{di}{dt}$ staje się równą zero, gdy

$$-a_1 e^{-a_1 t} + a_2 e^{-a_2 t} = 0, \quad (74)$$

$$e^{(a_2 - a_1)t} = \frac{a_2}{a_1},$$

$$t = \frac{1}{a_2 - a_1} \lg_n \frac{a_2}{a_1} > 0; \quad (75)$$

ponieważ druga pochodna $\frac{d^2 i}{dt^2}$ przy znalezionej wartości t jest mniejszą od zera, więc ta wartość t daje nam $\max i$.



Rys. 205.

Uwzględniając (73), (74) i (75), otrzymamy

$$\begin{aligned} \max i &= C U \frac{a_1 a_2}{a_2 - a_1} \left\{ e^{-a_1 t} - \frac{a_1}{a_2} e^{-a_2 t} \right\} = \\ &= C U a_1 e^{-a_1 t} = \\ &= C U a_1 e^{-\frac{a_1}{a_2 - a_1} \cdot \lg R \frac{a_2}{a_1}} \end{aligned} \quad (76)$$

Rys. 206 podaje przebieg ładowania kondensatora.

W przypadku II, gdy

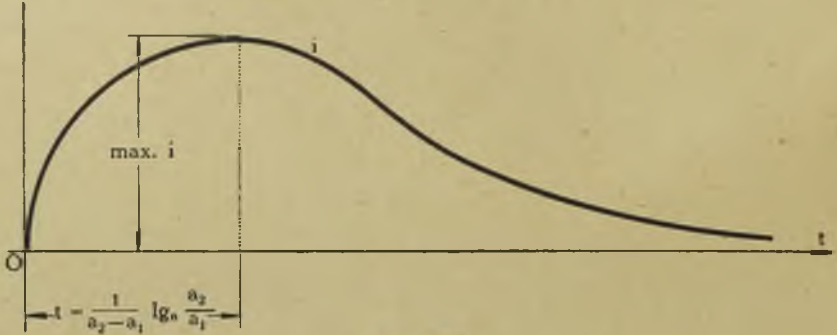
$$R = 2\sqrt{\frac{L}{C}},$$

według wzoru (56)

$$u_c = e^{-at} (A_1 + A_2 t) + U, \quad (77)$$

gdzie $a = \frac{R}{2L}$;

$$i = C \frac{du_c}{dt} = C e^{-at} (A_2 - a A_1 - a A_2 t); \quad (78)$$



Rys. 206.

zakładając w tych wzorach $t=0$, $u_c=0$, $i=0$, otrzymamy

$$A_1 = -U,$$

$$A_2 - a A_1 = 0,$$

skąd

$$A_1 = -U,$$

$$A_2 = -aU.$$

Wobec tego

$$u_c = -U(1 + at)e^{-at} + U, \quad (79)$$

$$i = UC a^2 t e^{-at};$$

ponieważ

$$a^2 = \frac{R^2}{4L^2} = \frac{\frac{4L}{C}}{4L^2} = \frac{1}{LC},$$

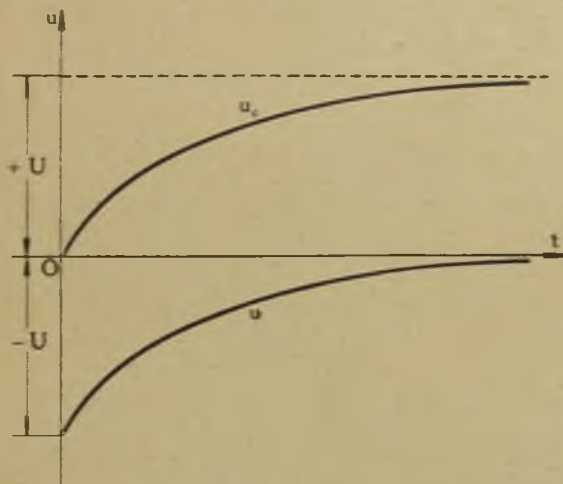
więc

$$i = \frac{U}{L} t e^{-at} \quad (80)$$

We wzorze (77) pierwszy wyraz z prawej strony stanowi napięcie przejściowe u_{cp} ; jest to funkcja malejąca z biegiem czasu. Przebieg napięć podaje rys. 207.

Dla funkcji prądu znajdujemy, jak w analogicznym przypadku wyładowania (§ 101) $\max i$ przy

$$t = \frac{1}{a} = \frac{2L}{R},$$

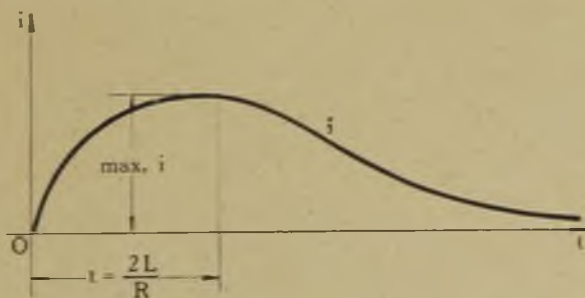


Rys. 207.

czyli

$$\max i = \frac{U}{L} \cdot \frac{2L}{R} e^{-1} = \frac{2U}{Re} \cong 0,74 \frac{U}{R}. \quad (81)$$

Przebieg prądu ładowania pokazany jest na rys. 208.



Rys. 208.

W przypadku III, gdy

$$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}},$$

na podstawie wzoru (60)

$$u_c = e^{-\alpha t} (A_1 \sin \beta t + A_2 \cos \beta t) + U,$$

$$i = C \frac{du_c}{dt} = C e^{-\alpha t} \left\{ -\alpha A_1 \sin \beta t - \alpha A_2 \cos \beta t - \beta A_2 \sin \beta t + \beta A_1 \cos \beta t \right\}.$$

Zakładając w tych wzorach

$$t = 0, \quad u_c = 0, \quad i = 0,$$

otrzymamy

$$A_2 = -U,$$

$$-\alpha A_2 + \beta A_1 = 0,$$

skąd

$$A_1 = -\frac{\alpha}{\beta} U; \quad A_2 = -U;$$

wobec tego

$$u_c = -\frac{U}{\beta} e^{-\alpha t} (\alpha \sin \beta t + \beta \cos \beta t) + U,$$

$$i = C U e^{-\alpha t} \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta} \sin \beta t.$$

Mamy

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{1}{LC},$$

$$\alpha \sin \beta t + \beta \cos \beta t = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \sin(\beta t + \delta) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{LC}} \sin(\beta t + \delta),$$

gdzie

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\beta}{\alpha},$$

przeto

$$u_c = -\frac{U e^{-\alpha t}}{\beta \sqrt{LC}} \sin(\beta t + \delta) + U, \quad (82)$$

$$i = \frac{U e^{-\alpha t}}{\beta L} \sin \beta t. \quad (83)$$

Napięcie przejściowe na kondensatorze wynosi

$$u_{cp} = - \frac{U}{\beta \sqrt{LC}} e^{-\alpha t} \cdot \sin(\beta t + \delta).$$

Jest to funkcja zupełnie ta sama, co i we wzorze (62), dla której znaleźliśmy, że maleje ona, zmniejszając się sinusoidalnie, przechodząc przez szereg wartości największych dodatnich i ujemnych dla

$$t = 0, \frac{\pi}{\beta}, \frac{2\pi}{\beta}, \dots$$

Najbliższą największą wartość dodatnią dla napięcia przejściowego otrzymamy, gdy $t = \frac{\pi}{\beta}$, wtedy bowiem

$$\sin(\beta t + \delta) = \sin(\pi + \delta) = -\sin \delta;$$

ponieważ

$$\sin \delta = \beta \sqrt{LC},$$

więc dla $t = \frac{\pi}{\beta}$ otrzymamy

$$\begin{aligned} \max u_c &= \frac{U e^{-\alpha t}}{\beta \sqrt{LC}} \beta \sqrt{LC} + U = \\ &= U \left(1 + e^{-\alpha t} \right) = U \left(1 + e^{-\frac{\alpha}{\beta} \pi} \right). \end{aligned}$$

Funkcja wykładnicza, stojąca w nawiasie, nie może być większa od 1, wobec tego możemy napisać

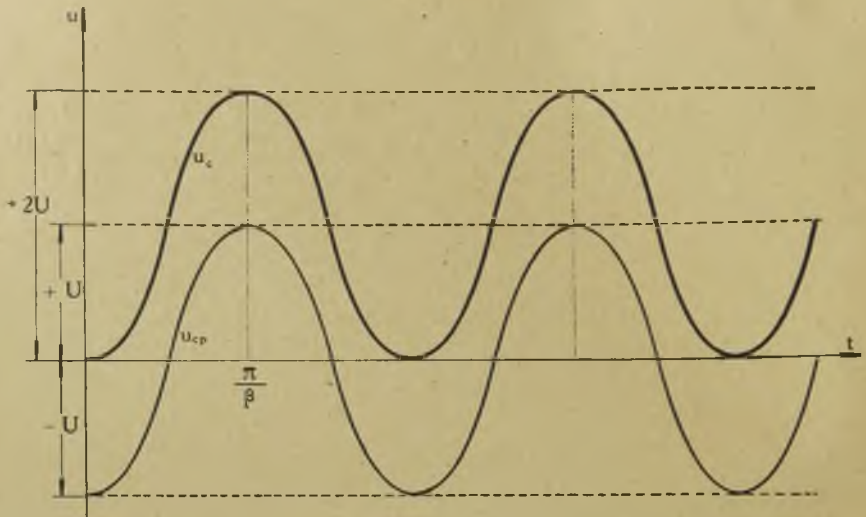
$$\max u_c \leq 2U.$$

Co się tyczy prądu i , to, ponieważ wzór (83) jest zupełnie taki sam, jak i wzór (63), więc otrzymamy największą jego wartość dla $t = \frac{\delta}{\beta}$:

$$\max i = U \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-\frac{\alpha}{\beta} \delta}.$$

Na rys. 209 mamy przebieg napięcia na kondensatorze w przypadku, gdy α jest małe $\left(\frac{R}{2L} \cong 0 \right)$.

Przebieg prądu ładowania jest zupełnie taki sam, jak przy wyładowaniu (rys. 203).



Rys. 209.

§ 104. Powstawanie prądu zmiennego w obwodzie z opornością rzeczywistą, indukcyjnością i pojemnością.

Niech w chwili $t=0$, gdy zamykamy obwód z prądem zmiennym, napięcie na naciskach przechodzi przez fazę ψ ; wartość chwilowa tego napięcia będzie określona wzorem

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi).$$

Na podstawie wzoru (37) równanie dla takiego obwodu będzie

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_c}{dt} + \frac{1}{LC} u_c = \frac{U_m}{LC} \sin(\omega t + \psi). \quad (84)$$

Oczywiście, przy rozwiązywaniu tego równania, tak samo jak poprzednio, będziemy mieli do rozpatrzenia trzy przypadki; jednakże w pierwszych dwóch przypadkach w porównaniu z tem, co mieliśmy przy prądzie stałym, nic szczególnego nie spostrzegamy, przejdziemy więc od razu do przypadku III, gdy

$$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}, \quad \alpha = \frac{R}{2L}, \quad \beta = \sqrt{\frac{1}{LC} - \alpha^2}, \quad \alpha^2 + \beta^2 = \frac{1}{LC}.$$

Całka ogólna równania uproszczonego będzie (wzór 46)

$$u_c = e^{-\alpha t} (A_1 \sin \beta t + A_2 \cos \beta t),$$

gdzie A_1 i A_2 stałe dowolne; daje ona nam wartość napięcia przejściowego na kondensatorze; możemy napisać w postaci jednej funkcji sinusoidalnej

$$u_{cp} = e^{-\alpha t} M \sin(\beta t + \vartheta), \quad (85)$$

gdzie M i ϑ stanowią stałe dowolne.

Całkę szczególną równania (84) znajdziemy na podstawie takiego samego rozumowania, jakie stosowaliśmy w § 98, mianowicie określamy najpierw dla naszego obwodu prąd ustalony

$$i_u = \frac{U_m}{Z} \sin(\omega t + \phi - \varphi), \quad (86)$$

gdzie

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R};$$

mając wartość tego prądu, znajdujemy wartość napięcia ustalonego na kondensatorze

$$u_{cu} = \frac{U_m}{Z} \frac{1}{\omega C} \sin\left(\omega t + \phi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right),$$

albo

$$u_{cu} = -\frac{U_m}{Z \omega C} \cos(\omega t + \phi - \varphi). \quad (87)$$

Ze wzoru (85) znajdujemy przejściowy prąd

$$i_p = C \frac{d u_{cp}}{d t} = C e^{-\alpha t} [\beta M \cos(\beta t + \vartheta) - \alpha M \sin(\beta t + \vartheta)]. \quad (88)$$

Ze wzorów (84) i (85) oraz (86) i (88) otrzymujemy wartości napięcia na kondensatorze i prądu w stanie nieustalonym

$$u_c = u_{cu} + u_{cp} = -\frac{U_m}{Z \omega C} \cos(\omega t + \phi - \varphi) + e^{-\alpha t} M \sin(\beta t + \vartheta), \quad (89)$$

$$i = i_u + i_p = \frac{U_m}{Z} \sin(\omega t + \psi - \varphi) + \\ + C e^{-\alpha t} [\beta M \cos(\beta t + \delta) - \alpha M \sin(\beta t + \delta)]. \quad (90)$$

Zakładając w obu tych wzorach $t=0$, $u_c=0$, $i=0$, otrzymamy

$$M \sin \delta = \frac{U_m}{Z \omega C} \cos(\psi - \varphi),$$

$$\alpha C M \sin \delta - \beta C M \cos \delta = \frac{U_m}{Z} \sin(\psi - \varphi);$$

podstawiając wartość $M \sin \delta$ z pierwszego wzoru do drugiego, znajdujemy

$$M \cos \delta = \frac{U_m}{Z \omega C} \left[\frac{\alpha}{\beta} \cos(\psi - \varphi) - \frac{\omega}{\beta} \sin(\psi - \varphi) \right].$$

Na tej podstawie obliczamy

$$M \sin(\beta t + \delta) = M \cos \delta \sin \beta t + M \sin \delta \cos \beta t = \\ = \frac{U_m}{Z \omega C} \left[\frac{\alpha}{\beta} \cos(\psi - \varphi) \sin \beta t - \frac{\omega}{\beta} \sin(\psi - \varphi) \sin \beta t + \cos(\psi - \varphi) \cos \beta t \right] = \\ = \frac{U_m}{Z \omega C} \left[\left(\frac{\alpha \sin \beta t + \beta \cos \beta t}{\beta} \right) \cos(\psi - \varphi) - \frac{\omega}{\beta} \sin(\psi - \varphi) \sin \beta t \right] = \\ = \frac{U_m}{Z \omega C} \left[\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\beta} \cos(\psi - \varphi) \sin(\beta t + \gamma) - \frac{\omega}{\beta} \sin(\psi - \varphi) \sin \beta t \right],$$

gdzie $\operatorname{tg} \gamma = \frac{\beta}{\alpha}$.

Następnie

$$M \cos(\beta t + \delta) = M \cos \delta \cos \beta t - M \sin \delta \sin \beta t = \\ = \frac{U_m}{Z \omega C} \left[\frac{\alpha}{\beta} \cos(\psi - \varphi) \cos \beta t - \frac{\omega}{\beta} \sin(\psi - \varphi) \cos \beta t - \cos(\psi - \varphi) \sin \beta t \right] = \\ = \frac{U_m}{Z \omega C} \left[-\cos(\psi - \varphi) \left(\frac{\beta \sin \beta t - \alpha \cos \beta t}{\beta} \right) - \frac{\omega}{\beta} \sin(\psi - \varphi) \cos \beta t \right] = \\ = -\frac{U_m}{Z \omega C} \left[\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\beta} \cos(\psi - \varphi) \sin(\beta t - \gamma') + \frac{\omega}{\beta} \sin(\psi - \varphi) \cos \beta t \right],$$

gdzie

$$\operatorname{tg} \gamma' = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Podstawiając znalezione wartości $M \sin(\beta t + \delta)$ oraz $M \cos(\beta t + \delta)$ do wzorów (85) oraz (88), znajdujemy, uwzględniając, że

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

$$u_{cp} = -e^{-at} \frac{U_m}{\beta Z C} \left[\sin(\psi - \varphi) \sin \beta t - \frac{\cos(\psi - \varphi)}{\omega \sqrt{LC}} \sin(\beta t - \gamma) \right], \quad (91)$$

gdzie

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\beta}{\alpha},$$

oraz

$$\begin{aligned} i_p &= e^{-at} \frac{U_m}{Z \omega} \left[-\frac{\cos(\psi - \varphi)}{\sqrt{LC}} \sin(\beta t - \gamma') - \omega \sin(\psi - \varphi) \cos \beta t - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\alpha}{\beta \sqrt{LC}} \cos(\psi - \varphi) \sin(\beta t + \gamma) + \frac{\alpha}{\beta} \omega \sin(\psi - \varphi) \sin \beta t \right] = \\ &= e^{-at} \frac{U_m}{Z \beta} \left[\sin(\psi - \varphi) (\alpha \sin \beta t - \beta \cos \beta t) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\cos(\psi - \varphi)}{\omega \sqrt{LC}} \left[\alpha \sin(\beta t + \gamma) + \beta \sin(\beta t - \gamma') \right] \right], \end{aligned}$$

gdzie

$$\operatorname{tg} \gamma' = \frac{\alpha}{\beta};$$

ponieważ

$$\operatorname{tg} \gamma' = \operatorname{cotg} \gamma = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \gamma \right),$$

przeto

$$\gamma' = \frac{\pi}{2} - \gamma,$$

więc

$$\sin(\beta t - \gamma') = -\cos(\beta t + \gamma);$$

następnie

$$\alpha \sin \beta t - \beta \cos \beta t = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \sin(\beta t - \gamma) = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sin(\beta t - \gamma),$$

$$\alpha \sin(\beta t + \gamma) - \beta \cos(\beta t + \gamma) = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \sin(\beta t + \gamma - \gamma) = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sin \beta t,$$

więc ostatecznie

$$i_p = e^{-at} \frac{U_m}{Z\beta\sqrt{LC}} \left[\sin(\psi - \varphi) \sin(\beta t - \gamma) - \frac{\cos(\psi - \varphi)}{\omega\sqrt{LC}} \sin \beta t \right]. \quad (92)$$

Porównyując wzory (91) i (92) na u_{cp} i i_p widzimy, że każda z tych wielkości określona jest przez dwie sinusoidy (dwie fale) z amplitudami malejącymi, zależnymi od współczynnika tłumienia

$\alpha = \frac{R}{2L}$. Pulsacja tych sinusoid wynosi β , czyli ich częstotliwość

$\frac{\beta}{2\pi}$; obie sinusoidy są przesunięte względem siebie o kąt γ ,

przyczem $\operatorname{tg} \gamma = \frac{\beta}{\alpha}$. Sinusoidy prądu są przesunięte względem

odpowiednich sinusoid napięcia o kąt γ wstecz (prądy są opóźnione w fazie o kąt γ). Stosunek amplitudy napięcia do amplitudy

prądu wynosi $\sqrt{\frac{L}{C}}$.

Wzór (91) można przepisać w postaci:

$$u_{cp} = e^{-at} \frac{U_m}{\beta ZC} \left\{ \left[\sin(\psi - \varphi) - \frac{\cos(\psi - \varphi) \cos \gamma}{\omega\sqrt{LC}} \right] \sin \beta t - \frac{\cos(\psi - \varphi) \sin \gamma}{\omega\sqrt{LC}} \cos \beta t \right\},$$

skąd widać, że amplituda tego napięcia równa jest

$$U_{cpm} = e^{-at} \frac{U_m}{\beta ZC} \sqrt{\sin^2(\psi - \varphi) + \frac{\cos^2(\psi - \varphi)}{\omega^2 LC} - \frac{2 \sin(\psi - \varphi) \cos(\psi - \varphi) \cos \gamma}{\omega\sqrt{LC}}},$$

ponieważ

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \gamma}} = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \frac{R\sqrt{LC}}{2L} = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}},$$

więc

$$U_{cpm} = \frac{e^{-at} U_m}{\beta ZC} \sqrt{\sin^2(\psi - \varphi) + \frac{\cos^2(\psi - \varphi)}{\omega^2 LC} - \frac{R}{2\omega L} \sin 2(\psi - \varphi)} = \\ = \frac{e^{-at} U_m}{\beta ZC} \sqrt{1 - \cos^2(\psi - \varphi) \left(1 - \frac{1}{\omega^2 LC}\right) - \frac{R}{2\omega L} \sin 2(\psi - \varphi)}. \quad (93)$$

W analogiczny sposób przepiszemy wzór (92)

$$i_p = \frac{e^{-\alpha t} U_m}{Z \beta \sqrt{LC}} \left\{ \left[\sin(\psi - \gamma) \cos \gamma - \frac{\cos(\psi - \varphi)}{\omega \sqrt{LC}} \right] \sin \beta t - \right. \\ \left. - \sin(\psi - \varphi) \sin \gamma \cos \beta t \right\},$$

skąd znajdujemy amplitudę prądu przejściowego

$$I_{pm} = \frac{e^{-\alpha} U_m}{Z \beta \sqrt{LC}} \sqrt{\sin^2(\psi - \varphi) + \frac{\cos^2(\psi - \varphi)}{\omega^2 LC} - \frac{2 \sin(\psi - \varphi) \cos(\psi - \varphi) \cos \gamma}{\omega \sqrt{LC}}}$$

i na podstawie takich samych działań, co i poprzednio

$$I_{pm} = \frac{e^{-\alpha} U_m}{Z \beta \sqrt{LC}} \sqrt{1 - \cos^2(\psi - \varphi) \left(1 - \frac{1}{\omega^2 LC} \right) - \frac{R}{2 \omega L} \sin 2(\psi - \varphi)}. \quad (94)$$

Porównyując wzory (93) i (94) spostrzegamy, że amplituda napięcia na kondensatorze i amplituda prądu w jednakowy sposób są uzależnione od fazy ψ , którą ma napięcie źródła prądu zmiennego w chwili zamknięcia obwodu. Aby znaleźć taką wartość ψ , dla której obie wymienione amplitudy otrzymują największe wartości, musimy zbadać funkcję znajdującą się pod pierwiastkiem w obu wzorach (93) i (94), mianowicie

$$X = 1 - \cos^2(\psi - \varphi) \left(1 - \frac{1}{\omega^2 LC} \right) - \frac{R}{2 \omega L} \sin 2(\psi - \varphi),$$

$$\frac{dX}{d\psi} = \left(1 - \frac{1}{\omega^2 LC} \right) \sin 2(\psi - \varphi) - \frac{R}{\omega L} \cos 2(\psi - \varphi).$$

Gdy przyrównamy tę pochodną do 0, otrzymamy

$$\operatorname{tg} 2(\psi - \varphi) = \frac{R}{\omega L \left(1 - \frac{1}{\omega^2 LC} \right)} = \frac{R}{\omega L - \frac{1}{\omega C}},$$

ale

$$\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = \operatorname{tg} \varphi,$$

więc

$$\operatorname{tg} 2(\psi - \varphi) = \operatorname{cotg} \varphi. \quad (95)$$

W granicach jednego okresu daje to dwa rozwiązania

$$1) \quad 2(\psi - \varphi) = \frac{\pi}{2} - \varphi,$$

skąd

$$\psi = \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4},$$

$$2) \quad 2(\psi - \varphi) = \frac{3}{2}\pi - \varphi,$$

skąd

$$\psi = \frac{\varphi}{2} + \frac{3}{4}\pi.$$

Biorąc drugą pochodną X , otrzymamy

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X}{d\psi^2} &= 2 \left(1 - \frac{1}{\omega^2 LC} \right) \cos 2(\psi - \varphi) + \frac{2R}{\omega L} \sin 2(\psi - \varphi) = \\ &= \frac{2R}{\omega L} \cos 2(\psi - \varphi) \left[\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} + \operatorname{tg} 2(\psi - \varphi) \right] = \\ &= \frac{2R}{\omega L} \cos 2(\psi - \varphi) [\operatorname{cotg} \varphi + \operatorname{tg} 2(\psi - \varphi)]; \end{aligned}$$

przy uwzględnieniu (95)

$$\frac{d^2 X}{d\psi^2} = \frac{4R}{\omega L} \cos 2(\psi - \varphi) \operatorname{cotg} \varphi.$$

Dla wartości ψ , odpowiadającej 1-mu rozwiązaniu t. j.

$$\psi = \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4},$$

$$\frac{d^2 X}{d\psi^2} = \frac{4R}{\omega L} \operatorname{cotg} \varphi \cos \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) = \frac{4R}{\omega L} \cos \varphi;$$

przy wszelkich wartościach φ w granicach

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{będzie} \quad \frac{d^2 X}{d\psi^2} > 0;$$

dla drugiej wartości $\psi = \frac{\varphi}{2} + \frac{3}{4}\pi$ będzie

$$\frac{d^2 X}{d\psi^2} = \frac{4R}{\omega L} \cotg \varphi \cos \left(\frac{3}{2}\pi - \varphi \right) = -\frac{4R}{\omega L} \cos \varphi,$$

czyli

$$\frac{d^2 X}{d\psi^2} < 0.$$

Otrzymujemy więc dla funkcji U_{cpm} i I_{pm}

$$\text{minimum, gdy } \psi = \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4},$$

$$\text{maximum, gdy } \psi = \frac{\varphi}{2} + \frac{3}{4}\pi.$$

Zbadajmy jeszcze te wartości, dla $\psi - \varphi = 0$ oraz $\psi - \varphi = \frac{\pi}{2}$; w pierwszym przypadku wzory (93) i (94) dają

$$U_{cpm} = \frac{e^{-at} U_m}{\beta Z C} \cdot \frac{1}{\omega \sqrt{LC}},$$

$$I_{pm} = \frac{e^{-at} U_m}{\beta Z \sqrt{LC}} \cdot \frac{1}{\omega \sqrt{LC}} = \frac{e^{-at} U_m}{\beta Z \omega LC}.$$

Porównyując te wartości z maksymalną wartością napięcia na kondensatorze i prądu w stanie ustalonym (wzory 87 i 86), mianowicie

$$U_{cum} = \frac{U_m}{Z \omega C}, \quad I_{um} = \frac{U_m}{Z},$$

znajdujemy

$$\frac{U_{cpm}}{U_{cum}} = e^{-at} \cdot \frac{1}{\beta \sqrt{LC}}, \quad \frac{I_{pm}}{I_{um}} = e^{-at} \cdot \frac{1}{\omega \beta LC}.$$

W przypadku, gdy $\psi - \varphi = \frac{\pi}{2}$, będziemy mieli

$$U_{cpm} = \frac{e^{-at} U_m}{\beta Z C}, \quad I_{pm} = \frac{e^{-at} U_m}{\beta Z \sqrt{LC}}$$

$$\frac{U_{cpm}}{U_{cum}} = e^{-\alpha t} \cdot \frac{\omega}{\beta}, \quad \frac{I_{p m}}{I_{um}} = e^{-\alpha t} \cdot \frac{1}{\beta \sqrt{LC}}.$$

Na szczególne uwzględnienie zasługuje przypadek, gdy tłumienie jest bardzo małe, czyli R bardzo małe w porównaniu do L . Wtedy możemy założyć

$$\alpha = \frac{R}{2L} = 0, \quad e^{-\alpha t} = 1;$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{LC} - \alpha^2} = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \beta \sqrt{LC} = 1.$$

W tym przypadku będziemy mieli

$$\text{Dla } \psi - \varphi = 0,$$

$$\frac{U_{cpm}}{U_{cum}} = 1,$$

$$\frac{I_{p m}}{I_{um}} = \frac{\beta}{\omega};$$

$$\text{dla } \psi - \varphi = \frac{\pi}{2},$$

$$\frac{U_{cpm}}{U_{cum}} = \frac{\omega}{\beta},$$

$$\frac{I_{p m}}{I_{um}} = 1.$$

Z tych wzorów wnioskujemy, że gdy $\omega > \beta$, można oczekiwać przebiega na kondensatorze, zaś gdy $\beta > \omega$, — przetężenia w obwodzie.

Stwierdziliśmy, że stosunek wartości maksymalnej napięcia na kondensatorze do wartości maksymalnej prądu wynosi $\sqrt{\frac{L}{C}}$:

$$\frac{U_{cm}}{I_m} = \sqrt{\frac{L}{C}};$$

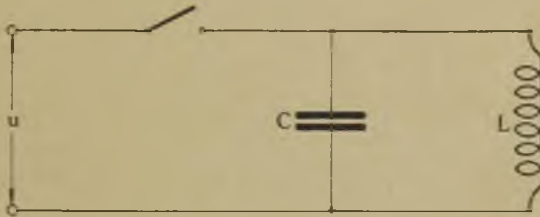
stąd

$$\frac{1}{2} C U_{cm}^2 = \frac{1}{2} L I_m^2.$$

Pierwszy wyraz stanowi maksymalną energję elektryczną kondensatora, drugi maksymalną energję magnetyczną cewki indukcyjnej. Zachodzi więc w obwodzie oscylacyjnym przemiana energii elektrycznej na energję magnetyczną i naodwrot i, gdyby nie było tłumienia ($R=0$), taka przemiana energii miałaby miejsce bez końca. Obecność R wywołuje straty ciepłne energii, zachodzi tłumienie i zjawisko oscylacyjne stopniowo zanika.

§ 105. Przerwanie obwodu, w którym indukcyjność i pojemność są połączone równolegle.

Zastosujemy powyższe wyniki do obwodu prądu zmiennego, w którym C i L są połączone równolegle, $R=0$ (rys. 210).



Rys. 210.

Przypuśćmy, że przerwa w obwodzie nastąpiła w chwili, gdy napięcie na kondensatorze przechodziło przez swoją wartość największą, równą wartości maksymalnej napięcia na zaciskach prądu zmiennego, t. j.

$$u_c = U_m;$$

wtedy prąd w obwodzie

$$i = 0,$$

gdyż prąd wyprzedza napięcie u_c o kąt prosty. Cała energia znajduje się wówczas na kondensatorze i wynosi $\frac{1}{2} C U_m^2$. Zaczyna się oscylacyjne wyładowanie kondensatora i po upływie $\frac{1}{4}$ okresu cała energia kondensatora przechodzi w energję magnetyczną na cewkę; prąd przechodzi przez cewkę i osiąga wartość I , przyczem

$$\frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} C U_m^2,$$

skąd

$$I = U_m \sqrt{\frac{C}{L}}. \quad (96)$$

Jeżeli zaś wyłączenie nastąpiło w chwili, gdy $u_c = 0$, to znaczy, gdy prąd $i = I_m$ przechodził przez obwód, wtedy cała energia znajduje się w cewce i wynosi $\frac{1}{2} L I_m^2$. Po upływie $1/4$ okresu energia ta przejdzie na kondensator, który uzyska napięcie U_c , przyczem

$$\frac{1}{2} C U_c^2 = \frac{1}{2} L I_m^2,$$

skąd

$$U_c = I_m \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (97)$$

W stanie ustalonym mamy

$$U_m = I_m Z,$$

gdzie Z oporność pozorną naszego układu, którą możemy łatwo znaleźć, jako oporność wypadkową dwóch oporności $\hat{Z}_1 = j \omega L$

oraz $\hat{Z}_2 = -j \frac{1}{\omega C}$; mamy

$$\hat{Z} = \frac{\hat{Z}_1 \cdot \hat{Z}_2}{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2} = \frac{\omega L \frac{1}{\omega C}}{j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)} = j \frac{\frac{L}{C}}{\frac{1}{\omega C} - \omega L},$$

skąd

$$Z = \frac{\frac{L}{C}}{\frac{1}{\omega C} - \omega L}.$$

Podstawiając do wzoru (96) zamiast U_m — $I_m Z$ oraz do wzoru (97) zamiast I_m — $\frac{U_m}{Z}$, otrzymamy

$$I = I_m \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{\frac{1}{\omega C} - \omega L}, \quad U_c = U_m \sqrt{\frac{C}{L} \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L \right)}.$$

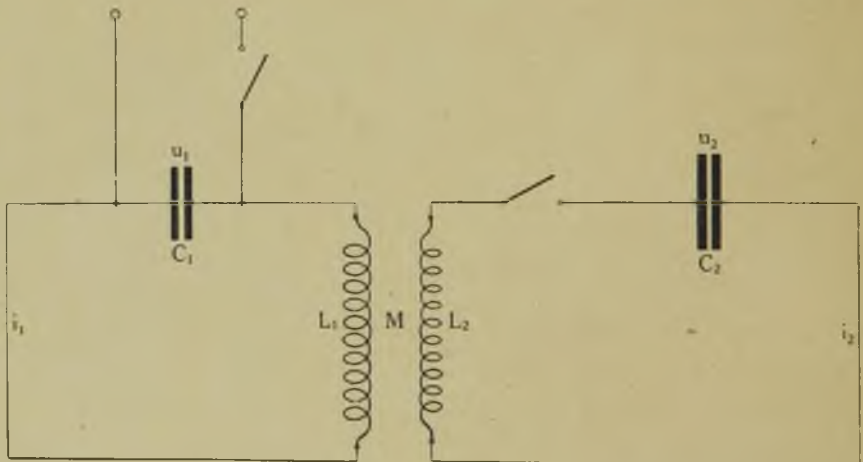
W tych wzorach można łatwo porównać prąd i napięcie, powstające przy wyładowaniu kondensatora, z wartościami tychże wielkości w stanie ustalonym.

ROZDZIAŁ XIV.

OBWODY SPRZĘŻONE MAGNETYCZNIE.

§ 106. Wyładowanie kondensatora w jednym z dwóch obwodów, sprzężonych magnetycznie.

Rozpatrzmy dwa obwody, znajdujące się jeden obok drugiego (rys. 211); w każdym mamy kondensator o pojemności C_1 względnie C_2 , oraz cewkę o indukcyjności własnej L_1 , względnie L_2 . Oporności rzeczywiste w obu obwodach przyjmujemy równe zeru.



Rys. 211.

Kondensator pierwszego obwodu C_1 przyłączony jest do źródła prądu stałego lub zmiennego i w pewnej chwili $t=0$ zostaje odłączony od tego źródła, gdy napięcie na kondensatorze wynosi U_0 ; jednocześnie zostaje zamknięty obwód 2-gi. Oznaczając war-

tości chwilowe napięć na kondensatorach przez u_1 i u_2 , zaś wartości chwilowe prądów, które przy wyładowaniu kondensatorów powstają, przez i_1 oraz i_2 , wreszcie współczynnik indukcji wzajemnej cewek przez M , będziemy mieli na podstawie znanych wzorów dla obwodu pierwszego

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = u_1, \quad (1)$$

i dla obwodu drugiego

$$L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = u_2, \quad (2)$$

oraz warunki graniczne

$$t = 0, \quad u_1 = U_0, \quad i_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad i_2 = 0. \quad (3)$$

Ponieważ

$$i_1 = -C_1 \frac{du_1}{dt}, \quad i_2 = -C_2 \frac{du_2}{dt},$$

przeto wzory (1) i (2) możemy przepisać w postaci

$$-L_1 C_1 \frac{d^2 u_1}{dt^2} - M C_2 \frac{d^2 u_2}{dt^2} = u_1,$$

$$-L_2 C_2 \frac{d^2 u_2}{dt^2} - M C_1 \frac{d^2 u_1}{dt^2} = u_2,$$

albo

$$u_1'' + \frac{1}{L_1 C_1} u_1 + \frac{M C_2}{L_1 C_1} u_2'' = 0,$$

$$u_2'' + \frac{1}{L_2 C_2} u_2 + \frac{M C_1}{L_2 C_2} u_1'' = 0.$$

Oznaczmy

$$\left. \begin{aligned} \frac{M C_2}{L_1 C_1} &= k_1, & \frac{M C_1}{L_2 C_2} &= k_2, \\ \frac{1}{L_1 C_1} &= a^2, & \frac{1}{L_2 C_2} &= b^2, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

wtedy

$$u_1'' + a^2 u_1 = -k_1 u_2'', \quad (5)$$

$$u_2'' + b^2 u_2 = -k_2 u_1'', \quad (6)$$

z równania (6)

$$u_2 = -\frac{k_2}{b^2} u_1'' - \frac{1}{b^2} u_2'',$$

zaś z równania (5)

$$-u_2'' = \frac{1}{k_1} u_1'' + \frac{a^2}{k_1} u_1,$$

więc

$$-\frac{1}{b^2} u_2'' = \frac{1}{k_1 b^2} u_1'' + \frac{a^2}{k_1 b^2} u_1,$$

$$u_2 = -\frac{k_2}{b^2} u_1'' + \frac{1}{k_1 b^2} u_1'' + \frac{a^2}{k_1 b^2} u_1 =$$

$$= \frac{1 - k_1 k_2}{k_1 b^2} u_1'' + \frac{a^2}{k_1 b^2} u_1. \quad (7)$$

Biorąc pochodną względem t dwa razy, otrzymamy

$$u_2'' = \frac{1 - k_1 k_2}{k_1 b^2} u_1^{(IV)} + \frac{a^2}{k_1 b^2} u_1'',$$

$$k_1 u_2'' = \frac{1 - k_1 k_2}{b^2} u_1^{(IV)} + \frac{a^2}{b^2} u_1''.$$

Ponieważ

$$k_1 k_2 = \frac{MC_2}{L_1 C_1} \cdot \frac{MC_1}{L_2 C_2} = \frac{M^2}{L_1 L_2} = k^2,$$

gdzie $k \leq 1$ stanowi współczynnik sprzężenia magnetycznego, więc podstawiając te wartości do równania (5) otrzymamy

$$u_1'' + a^2 u_1 + \frac{1 - k^2}{b^2} u_1^{(IV)} + \frac{a^2}{b^2} u_1'' = 0,$$

albo

$$(1 - k^2) u_1^{(IV)} + (a^2 + b^2) u_1'' + a^2 b^2 u_1 = 0. \quad (9)$$

Jest to równanie linjowe 4-go stopnia, którego równanie charakterystyczne

$$(1 - k^2)x^4 + (a^2 + b^2)x^2 + a^2b^2 = 0,$$

jako równanie dwukwadratowe, daje pierwiastki

$$x^2 = \frac{-(a^2 + b^2) \pm \sqrt{(a^2 + b^2)^2 - 4(1 - k^2)a^2b^2}}{2(1 - k^2)},$$

podpierwiastkowa

$$(a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2 + 4k^2a^2b^2 = (a^2 - b^2)^2 + 4k^2a^2b^2 > 0,$$

następnie

$$|a^2 + b^2| > \sqrt{(a^2 + b^2)^2 - 4(1 - k^2)a^2b^2}, \quad k < 1,$$

więc x^2 zawsze < 0 . Oznaczając

$$\left. \begin{aligned} \frac{a^2 + b^2 + \sqrt{(a^2 + b^2)^2 - 4(1 - k^2)a^2b^2}}{2(1 - k^2)} &= \beta_1^2, \\ \frac{a^2 + b^2 - \sqrt{(a^2 + b^2)^2 - 4(1 - k^2)a^2b^2}}{2(1 - k^2)} &= \beta_2^2, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

otrzymamy 4 pierwiastki dla x :

$$\begin{aligned} x_1 &= +j\beta_1, & x_2 &= -j\beta_1, \\ x_3 &= +j\beta_2, & x_4 &= -j\beta_2. \end{aligned}$$

Wobec tego całka ogólna równania będzie

$$u_1 = A_1 \sin \beta_1 t + A_2 \cos \beta_1 t + A_3 \sin \beta_2 t + A_4 \cos \beta_2 t, \quad (11)$$

gdzie A_1, A_2, A_3, A_4 stanowią stałe dowolne.

Biorąc dwa razy pochodną u_1 względem t , znajdujemy

$$u_1'' = -\beta_1^2 A_1 \sin \beta_1 t - \beta_1^2 A_2 \cos \beta_1 t - \beta_2^2 A_3 \sin \beta_2 t - \beta_2^2 A_4 \cos \beta_2 t.$$

Wstawiając tę wartość do (7) i uwzględniając (8), znajdujemy

$$u_2 = -\frac{(1 - k^2)}{k_1 b^2} \left\{ \beta_1^2 (A_1 \sin \beta_1 t + A_2 \cos \beta_1 t) + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \beta_2^2 (A_3 \sin \beta_2 t + A_4 \cos \beta_2 t) \Big\} + \\
 & + \frac{a^2}{k_1 b^2} \Big\{ A_1 \sin \beta_1 t + A_2 \cos \beta_1 t + A_3 \sin \beta_2 t + A_4 \cos \beta_2 t \Big\} = \\
 & = \frac{1}{k_1 b^2} \Big\{ \left[a^2 - \beta_1^2 (1 - k^2) \right] \cdot \left[A_1 \sin \beta_1 t + A_2 \cos \beta_1 t \right] + \\
 & + \left[a^2 - \beta_2^2 (1 - k^2) \right] \cdot \left[A_3 \sin \beta_2 t + A_4 \cos \beta_2 t \right] \Big\},
 \end{aligned}$$

albo

$$u_2 = B_1 \sin \beta_1 t + B_2 \cos \beta_1 t + B_3 \sin \beta_2 t + B_4 \cos \beta_2 t, \quad (12)$$

gdzie

$$B_1 = \frac{a^2 - \beta_1^2 (1 - k^2)}{k_1 b^2} A_1,$$

$$B_2 = \frac{a^2 - \beta_1^2 (1 - k^2)}{k_1 b^2} A_2,$$

$$B_3 = \frac{a^2 - \beta_2^2 (1 - k^2)}{k_1 b^2} A_3,$$

$$B_4 = \frac{a^2 - \beta_2^2 (1 - k^2)}{k_1 b^2} A_4,$$

lub, oznaczając w skróceniu

$$\left. \begin{aligned}
 p &= \frac{a^2 - \beta_1^2 (1 - k^2)}{k_1 b^2}, \\
 q &= \frac{a^2 - \beta_2^2 (1 - k^2)}{k_1 b^2},
 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned}
 B_1 &= p A_1, \\
 B_2 &= p A_2, \\
 B_3 &= q A_3, \\
 B_4 &= q A_4.
 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Ze wzoru (11) znajdujemy

$$\begin{aligned}
 i_1 &= - C_1 \frac{du_1}{dt} = - C_1 \beta_1 A_1 \cos \beta_1 t + C_1 \beta_1 A_2 \sin \beta_1 t - \\
 & - C_1 \beta_2 A_3 \cos \beta_2 t + C_1 \beta_2 A_4 \sin \beta_2 t.
 \end{aligned} \quad (15)$$

Ze wzoru (12) otrzymujemy

$$i_1 = -C_2 \frac{du_2}{dt} = -C_2 \beta_1 B_1 \cos \beta_1 t + C_2 \beta_1 B_2 \sin \beta_1 t - \\ - C_2 \beta_2 B_3 \cos \beta_2 t + C_2 \beta_2 B_4 \sin \beta_2 t. \quad (16)$$

Zakładając do wzorów (11), (12), (15) i (16) warunki graniczne (3), znajdujemy

$$U_0 = A_2 + A_4,$$

$$0 = B_2 + B_4,$$

$$0 = \beta_1 A_1 + \beta_2 A_3,$$

$$0 = \beta_1 B_1 + \beta_2 B_3,$$

albo, po uwzględnieniu (14)

$$A_2 + A_4 = U_0,$$

$$p A_2 + q A_4 = 0,$$

$$\beta_1 A_1 + \beta_2 A_3 = 0,$$

$$\beta_1 p A_1 + \beta_2 q A_3 = 0.$$

Z ostatnich dwóch równań otrzymujemy

$$A_1 = 0,$$

$$A_3 = 0,$$

zaś z pierwszych dwóch

$$A_2 = \frac{q}{q-p} U_0,$$

$$A_4 = -\frac{p}{q-p} U_0.$$

Wobec tego na podstawie wzorów (11)

$$B_1 = 0, \quad B_2 = \frac{p q}{q-p} U_0,$$

$$B_3 = 0, \quad B_4 = -\frac{pq}{q-p} U_0,$$

$$B_2 = -B_4.$$

Podstawiając określone wartości stałych do wzorów (11), (12), (15) i (16), znajdujemy

$$u_1 = \frac{q}{q-p} U_0 \cos \beta_1 t - \frac{p}{q-p} U_0 \cos \beta_2 t,$$

$$u_2 = \frac{pq}{q-p} U_0 \cos \beta_1 t - \frac{pq}{q-p} U_0 \cos \beta_2 t = \frac{pq}{q-p} U_0 (\cos \beta_1 t - \cos \beta_2 t),$$

$$i_1 = C_1 \beta_1 \frac{q}{q-p} U_0 \sin \beta_1 t - C_1 \beta_2 \frac{p}{q-p} U_0 \sin \beta_2 t,$$

$$\begin{aligned} i_2 &= C_2 \beta_1 \frac{pq}{q-p} U_0 \sin \beta_1 t - C_2 \beta_2 \frac{pq}{q-p} U_0 \sin \beta_2 t = \\ &= C_2 \frac{pq}{q-p} U_0 (\beta_1 \sin \beta_1 t - \beta_2 \sin \beta_2 t). \end{aligned}$$

Z powyższych wzorów widać, że mamy tu różnicę dwóch drgań sinusoidalnych o pulsacjach β_1 i β_2 .

§ 107. Wyładowanie kondensatora w przypadku, gdy oba obwody są ze sobą w rezonansie.

Na szczególne uwzględnienie zasługuje przypadek, gdy każdy z obwodów rozpatrywany samodzielnie posiada drgania swobodne o tej samej częstotliwości; mówimy wtedy, że obwód drugi jest w rezonansie z pierwszym obwodem.

Oznaczając częstotliwości drgań swobodnych obwodów odpowiednio przez f_{s_1} i f_{s_2} będziemy mieli na podstawie wzoru (67) z § 102

$$f_{s_1} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_1 C_1}}, \quad f_{s_2} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_2 C_2}},$$

skąd otrzymujemy warunek rezonansu obu obwodów

$$L_1 C_1 = L_2 C_2.$$

Wobec tego na podstawie (4) i (10)

$$a^2 = b^2,$$

$$\beta_1^2 = \frac{2a^2 + \sqrt{4a^4 - 4a^4 + 4k^2a^4}}{2(1-k^2)} = \frac{a^2(1+k)}{1-k^2} = \frac{a^2}{1-k},$$

$$\beta_2^2 = \frac{2a^2 - \sqrt{4a^4 - 4a^4 + 4k^2a^4}}{2(1-k^2)} = \frac{a^2(1-k)}{1-k^2} = \frac{a^2}{1+k},$$

$$\beta_1 = \pm \frac{a}{\sqrt{1-k}}; \quad \beta_2 = \pm \frac{a}{\sqrt{1+k}};$$

zaś na podstawie (13)

$$p = \frac{a^2 - a^2(1+k)}{k_1 a^2} = -\frac{k}{k_1},$$

$$q = \frac{a^2 - a^2(1-k)}{k_1 a^2} = \frac{k}{k_1},$$

albo, uwzględniając (8), że $k = \sqrt{k_1 k_2}$, oraz (4), że $\frac{k_2}{k_1} = \frac{C_1}{C_2}$ (dla $L_1 C_1 = L_2 C_2$) będziemy mieli

$$p = -\sqrt{\frac{C_1}{C_2}}, \quad q = \sqrt{\frac{C_1}{C_2}},$$

$$q - p = 2\sqrt{\frac{C_1}{C_2}}.$$

Wobec tego wzory dla napięć i prądów otrzymamy ostatecznie w postaci

$$u_1 = \frac{1}{2} U_0 \cos \beta_1 t + \frac{1}{2} U_0 \cos \beta_2 t = \frac{1}{2} U_0 [\cos \beta_1 t + \cos \beta_2 t],$$

$$u_2 = -\frac{\sqrt{\frac{C_1}{C_2}}}{2} U_0 [\cos \beta_1 t - \cos \beta_2 t],$$

$$i_1 = C_1 U_0 \frac{1}{2} [\beta_1 \sin \beta_1 t + \beta_2 \sin \beta_2 t],$$

$$i_2 = -C_2 \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} \cdot \frac{1}{2} U_0 [\beta_1 \sin \beta_1 t - \beta_2 \sin \beta_2 t].$$

Z tych wzorów wnioskujemy, że prądy są przesunięte w fazie o kąt prosty względem odpowiednich napięć, przyczem prądy są opóźnione w fazie o $\frac{\pi}{2}$ względem napięć. Gdy napięcia przechodzą przez wartość maksymalną, prądy przechodzą przez wartość zero i naodwrot. Gdybyśmy uwzględnili obecność oporności rzeczywistej R , otrzymalibyśmy jeszcze zjawisko tłumienia i wzory na napięcia i prądy dałyby nam sinusoidy tłumione, jak na rys. 212.

Kształt funkcyj napięcia i prądu jest zależny od pulsacji β_1 oraz β_2 , a mianowicie: nazwijmy przez T funkcję

$$T = \beta_1 \sin \beta_1 t + \beta_2 \sin \beta_2 t = (\beta_1 + \beta_2) \left\{ \sin \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} t \cos \frac{\beta_1 - \beta_2}{2} t \right\} + \\ + (\beta_1 - \beta_2) \left\{ \sin \frac{\beta_1 - \beta_2}{2} t \cos \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} t \right\}.$$

Na rys. 212 mamy wykres tej funkcji, w przypadku ogólnym, t. j. gdy drgania są tłumione, czyli we wzorach na prąd i napięcie wchodzi jeszcze funkcje wykładnicze; z rysunku widać że powstają dudnienia.

Częstotliwość dudnień drgań swobodnych zależy od współczynnika sprzężenia k :

$$\beta_1 = \frac{a}{\sqrt{1-k}}; \quad \beta_2 = \frac{a}{\sqrt{1+k}};$$

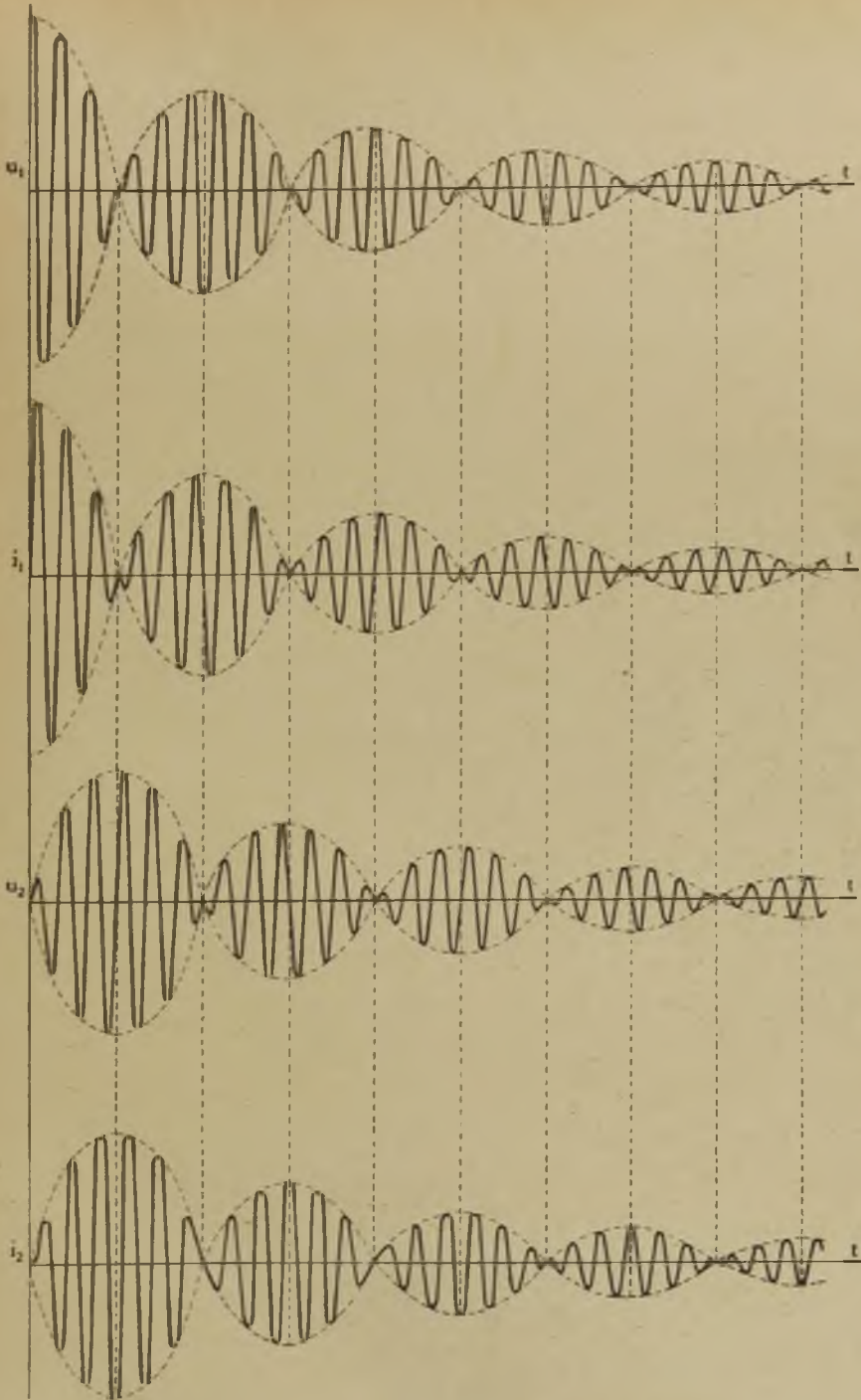
gdy $k = 1$, czyli dla max. sprzężenia, otrzymujemy

$$\beta_1 = \infty, \quad \beta_2 = \frac{a}{\sqrt{2}};$$

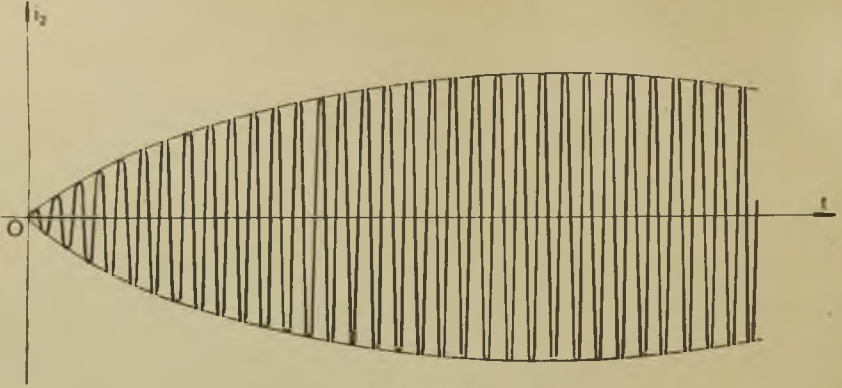
obydwa obwody drgają z tą samą częstotliwością $\beta_2 = \beta$; dudnień niema.

Analogicznie dla $k = 0$:

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta = a; \quad \text{dudnień niema.}$$



Rys. 212.



Rys. 213.

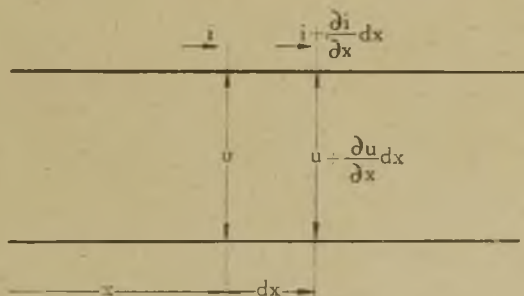
Gdy k jest małe, obwody nieznacznie wpływają na siebie, dudnienia będą bardzo powolne, otrzymamy wykres dla prądu i_2 , jak na rys. 213.

ROZDZIAŁ XV.

PRZEWODY DŁUGIE Z RÓWNOMIERNIE ROZŁOŻONEMI OPORNOŚCIĄ, RZECZYWISTĄ, INDUKCYJNOŚCIĄ, UPLYWNOŚCIĄ I POJEMNOŚCIĄ.

§ 108. Równania różniczkowe dla wartości chwilowych napięć i prądów. Całki ogólne tych równań.

W rozdziale XI rozpatrywaliśmy przewody z równomiernie rozłożonymi stałymi R , L , A i C , ale tylko w stanie ustalonym. Wprowadzając wartości skuteczne napięć i prądów; obecnie dla stanu nieustalonego musimy wyprowadzić wzory dla wartości chwilowych tych wielkości. Rozpatrzmy nieskończenie mały odcinek dx linii dwuprzewodowej (rys. 214) w odległości x od źródła



Rys. 214.

prądu. Oznaczając wartości chwilowe napięcia i prądu w rozpatrywanym punkcie odpowiednio przez u i i , otrzymamy na podstawie znanych już rozumowań (§ 73)

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = Ri + L \frac{\partial i}{\partial t}, \quad (1)$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = Au + C \frac{\partial u}{\partial t}; \quad (2)$$

biorąc pochodną (1) względem x i podstawiając zamiast $\frac{\partial i}{\partial x}$ jego wartość z (2) otrzymujemy

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -RAu - RC \frac{\partial u}{\partial t} - LA \frac{\partial u}{\partial t} - LC \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

albo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = RAu + (RC + LA) \frac{\partial u}{\partial t} + LC \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (3)$$

Po znalezieniu wartości u z tego równania, możemy określić wartość i z równania (2).

Równanie (3) jest równaniem różniczkowym o pochodnych cząstkowych i może być rozwiązane rozmaitymi sposobami; odpowiedź otrzymamy w postaci rozmaitych szeregów, sumy tych szeregów muszą dawać te same rezultaty. Zastosujemy metodę Eulera.

Założmy, że niewiadoma funkcja u jest iloczynem dwóch funkcji, z których każda jest funkcją jednej tylko zmiennej t lub x , więc

$$u = TX, \quad (4)$$

gdzie

$$T = f_1(t),$$

$$X = f_2(x);$$

wtedy

$$\frac{\partial u}{\partial x} = T \frac{dX}{dx}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = T \frac{d^2 X}{dx^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = X \frac{dT}{dt}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X \frac{d^2 T}{dt^2}.$$

Podstawiając te wartości do (3), otrzymamy

$$T \frac{d^2 X}{dx^2} = RATX + (RC + LA) X \frac{dT}{dt} + LCX \frac{d^2 T}{dt^2},$$

lub, po podzieleniu przez TX

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = RA + \frac{RC + LA}{T} \frac{dT}{dt} + \frac{LC}{T} \frac{d^2 T}{dt^2}. \quad (5)$$

Lewa strona tego równania zależy tylko od x , prawa zaś tylko od t ; ponieważ równość musi mieć miejsce przy dowolnych wartościach x i t , więc jest to możliwe tylko wówczas, gdy każdy z tych wyrazów ma jedną i tę samą stałą i rzeczywistą wartość liczbową.

Ta stała nie może mieć wartości dodatniej, np. $+ a^2$, gdzie a może mieć jaką chcą wartość liczbową; rzeczywiście, mielibyśmy wówczas

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = a^2,$$

skąd

$$X = K_1 e^{ax} + K_2 e^{-ax},$$

gdzie K_1 i K_2 stałe dowolne, ale z tego wynikałoby, że przy wzroście x do ∞ funkcja X również wzrastałaby do nieskończoności; do takich samych rezultatów doszlibyśmy, badając funkcję T , gdybyśmy przyrównali do $+ a^2$ prawą stronę równania (5); czyli, że w takim przypadku napięcie $u = TX$ wzrastałoby do nieskończoności ze wzrostem x , co oczywiście nie odpowiada naszemu zagadnieniu. Wobec tego musimy przyjąć tę stałą w postaci liczby ujemnej, a więc $- a^2$, gdzie a może naogół mieć wartość dowolną.

Z równania (5) wobec tego otrzymujemy

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = - a^2,$$

$$RA + \frac{RC + LA}{T} \frac{dT}{dt} + \frac{LC}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = - a^2,$$

albo

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + a^2 X = 0, \tag{6}$$

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \left(\frac{R}{L} + \frac{A}{C} \right) \frac{dT}{dt} + \frac{RA + a^2}{LC} T = 0. \tag{7}$$

Rozwiązując równanie (6), znajdujemy

$$X = A_0 \cos ax + B_0 \sin ax, \tag{8}$$

gdzie A_0 i B_0 stałe dowolne.

Dla rozwiązania równania (7) piszemy równanie charakterystyczne:

$$k^2 + \left(\frac{R}{L} + \frac{A}{C} \right) k + \frac{RA + a^2}{LC} = 0,$$

które daje pierwiastki

$$k_1 = - \left(\frac{R}{2L} + \frac{A}{2C} \right) + \sqrt{\left(\frac{R}{2L} + \frac{A}{2C} \right)^2 - \frac{RA + a^2}{LC}} =$$

$$= - \left(\frac{R}{2L} + \frac{A}{2C} \right) + \sqrt{\left(\frac{R}{2L} - \frac{A}{2C} \right)^2 - \frac{a^2}{LC}},$$

$$k_2 = - \left(\frac{R}{2L} + \frac{A}{2C} \right) - \sqrt{\left(\frac{R}{2L} - \frac{A}{2C} \right)^2 - \frac{a^2}{LC}}.$$

W zależności od tego, czy pierwiastki k_1 i k_2 są rzeczywiste różne lub równe, lub są liczbami zespolonemi, otrzymamy trzy postacie rozwiązań; w pierwszych dwóch przypadkach

$$1) \quad T = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t},$$

$$2) \quad T = e^{ht} (C_1 + C_2 t),$$

gdzie C_1 i C_2 stałe dowolne; ponieważ k_1 i k_2 są liczbami ujemnymi, więc otrzymujemy funkcje malejące i to nic osobliwego nie przedstawia; rozpatrujemy więc przypadek, gdy pierwiastki są liczbami zespolonemi, czyli $\frac{R}{2L} - \frac{A}{2C} < \frac{a}{\sqrt{LC}}$;

wtedy

$$k_1 = -\alpha + j\beta,$$

$$k_2 = -\alpha - j\beta.$$

gdzie

$$\alpha = \frac{R}{2L} + \frac{A}{2C}, \tag{9}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{a^2}{LC} - \gamma^2}, \tag{10}$$

$$\gamma = \frac{R}{2L} - \frac{A}{2C}. \quad (11)$$

Zwróćmy uwagę, że α i γ zależą tylko od stałych linii, więc dla rozpatrywanej linii mają wartości określone, gdy tymczasem β zależy od stałej a .

Całka ogólna w tym przypadku będzie

$$T = e^{-at} (C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t).$$

Podstawiając tę wartość T , a także wartość X z (8), do (4) i zamieniając iloczyny stałych dowolnych pojedynczemi literami, otrzymamy

$$u = e^{-at} \{ (A_1 \cos \beta t + A_2 \sin \beta t) \cos ax + (B_1 \cos \beta t + B_2 \sin \beta t) \sin ax \}.$$

W zależności od wartości a możemy otrzymać nieskończoną ilość takich rozwiązań, całka ogólna będzie więc sumą wszystkich takich całek szczególnych; oznaczając dla dowolnej całki szczególnej wartości a przez a_n , odpowiednią wartość β przez β_n , zaś stałe dowolne dla tej całki przez A_{1n} , A_{2n} , B_{1n} , B_{2n} , możemy napisać całkę ogólną w postaci

$$u = e^{-at} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (A_{1n} \cos \beta_n t + A_{2n} \sin \beta_n t) \cos a_n x + \right. \\ \left. + (B_{1n} \cos \beta_n t + B_{2n} \sin \beta_n t) \sin a_n x \right\}.$$

Wzór ten można przepisać inaczej, zakładając

$$A_{1n} \cos \beta_n t + A_{2n} \sin \beta_n t = M_n \sin (\beta_n t + \delta_n),$$

$$B_{1n} \cos \beta_n t + B_{2n} \sin \beta_n t = N_n \sin (\beta_n t + \psi_n),$$

gdzie M , N , δ i ψ stałe dowolne; w ten sposób

$$u = e^{-at} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ M_n \sin (\beta_n t + \delta_n) \cos a_n x + N_n \sin (\beta_n t + \psi_n) \sin a_n x \right\}. \quad (12)$$

Teraz określimy prąd ze wzoru (2)

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = Au + C \frac{\partial u}{\partial t};$$

biorąc wartość u ze wzoru (12), będziemy mieli

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = e^{-\alpha t} \sum_{n=1}^{n=\infty} \left\{ A M_n \sin(\beta_n t + \delta_n) \cos a_n x + A N_n \sin(\beta_n t + \psi_n) \sin a_n x - \right. \\ \left. - \alpha C M_n \sin(\beta_n t + \delta_n) \cos a_n x - \alpha C N_n \sin(\beta_n t + \psi_n) \sin a_n x + \right. \\ \left. + \beta_n C M_n \cos(\beta_n t + \delta_n) \cos a_n x + \beta_n C N_n \cos(\beta_n t + \psi_n) \sin a_n x \right\},$$

albo

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = e^{-\alpha t} \sum_{n=1}^{n=\infty} \left\{ M_n \left[(A - \alpha C) \sin(\beta_n t + \delta_n) + \beta_n C \cos(\beta_n t + \delta_n) \right] \cos a_n x + \right. \\ \left. + N_n \left[(A - \alpha C) \sin(\beta_n t + \psi_n) + \beta_n C \cos(\beta_n t + \psi_n) \right] \sin a_n x \right\}.$$

Wyrazy, stojące w nawiasach prostokątnych, możemy zastąpić sinusoidami, których amplitudy będą jednakowe i równe

$$\sqrt{(A - \alpha C)^2 + (\beta_n C)^2};$$

podpierwiastkowa przy uwzględnieniu (9), (10) i (11) będzie równa

$$(A - \alpha C)^2 + (\beta_n C)^2 = A^2 - 2 A C \alpha + C^2 \alpha^2 + C^2 \beta_n^2 = \\ = A^2 - 2 A C \alpha + C^2 (\alpha^2 + \beta_n^2) = \\ = A^2 - \frac{R A C}{L} - A^2 + C^2 \left\{ \left(\frac{R}{2L} + \frac{A}{2C} \right)^2 + \frac{a_n^2}{L C} - \left(\frac{R}{2L} - \frac{A}{2C} \right)^2 \right\} = \\ = -\frac{R A C}{L} + C^2 \left\{ \left(\frac{R}{2L} \right)^2 + \frac{R A}{2L C} + \left(\frac{A}{2C} \right)^2 + \frac{a_n^2}{L C} - \right. \\ \left. - \left(\frac{R}{2L} \right)^2 + \frac{R A}{2L C} - \left(\frac{A}{2C} \right)^2 \right\} = -\frac{R A C}{L} + \frac{R A C}{L} + a_n^2 \frac{C}{L};$$

wobec tego amplituda sinusoidy będzie

$$a_n \sqrt{\frac{C}{L}};$$

kąt przesunięcia fazy tej sinusoidy ϑ_n określimy ze wzoru

$$\operatorname{tg} \vartheta_n = \frac{\tilde{z}_n C}{A - z C} = \frac{\tilde{z}_n}{\frac{A}{C} - z} = \frac{\tilde{z}_n}{\frac{A}{C} - \frac{R}{2L} - \frac{A}{2C}} = -\frac{\tilde{z}_n}{\gamma}.$$

Wobec tego

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = e^{-\alpha x} \left\{ \sqrt{\frac{C}{L}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[M_n \sin(\tilde{z}_n t + \tilde{z}_n + \vartheta_n) \cos a_n x + \right. \right. \\ \left. \left. + N_n \sin(\tilde{z}_n t + \tilde{z}_n + \vartheta_n) \sin a_n x \right] \right\}.$$

Dla znalezienia i całkujemy ten wzór względem x , wtedy

$$i = e^{-\alpha x} \left\{ \sqrt{\frac{C}{L}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[-M_n \sin(\tilde{z}_n t + \tilde{z}_n + \vartheta_n) \sin a_n x + \right. \right. \\ \left. \left. + N_n \sin(\tilde{z}_n t + \tilde{z}_n + \vartheta_n) \cos a_n x \right] \right\}. \quad (13)$$

Stałą dowolnej nie piszemy, gdyż, oczywiście, jest ona równa zero, albowiem dla $t = \infty$, $i = 0$, bo $u = 0$. Ponieważ

$$-\sin a_n x = \cos \left(a_n x + \frac{\pi}{2} \right),$$

$$\cos a_n x = \sin \left(a_n x + \frac{\pi}{2} \right),$$

przeto porównyując (13) z (12), możemy sformułować otrzymany wynik w ten sposób:

amplitudę prądu otrzymujemy z amplitudy napięcia, mnożąc tę ostatnią przez $\sqrt{\frac{C}{L}}$. W czasie prąd jest przesunięty o kąt

$$\vartheta_n = \operatorname{arctg} \left(-\frac{\tilde{z}_n}{\gamma} \right);$$

jeżeli $\gamma > 0$, czyli $\frac{R}{L} > \frac{A}{C}$,

wtedy $\vartheta_n < 0$, β_n zawsze > 0 , bo to wartość bezwzględna pierwiastka, czyli prąd jest opóźniony w czasie względem napięcia;

gdy $\frac{R}{L} < \frac{A}{C}$, $\gamma < 0$, wtedy $\vartheta_n > 0$,

prąd jest przyśpieszony w czasie względem napięcia; wreszcie

gdy $\frac{R}{L} = \frac{A}{C}$, $\gamma = 0$, $\vartheta_n = \text{arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$,

prąd jest opóźniony w czasie o kąt prosty względem napięcia.

W przestrzeni prąd wyprzedza napięcie o kąt prosty.

Wzory (12) i (13) dają nam wartości chwilowe napięcia i prądu w dowolnym punkcie obwodu, odległym o x od początku w najogólniejszym przypadku; w tych wzorach mamy stałe dowolne

$$M_n, \delta_n, N_n, \psi_n, a_n,$$

stałe β_n i δ_n zależą od a_n .

Wartość tych stałych dowolnych może być znaleziona tylko wtedy, gdy będziemy mieli dostateczną ilość dodatkowych danych, dotyczących wartości napięć i prądów w wiadomych chwilach i w określonych miejscach.

Mówiliśmy już poprzednio, że wartości chwilowe napięć i prądów w stanie nieustalonym można rozpatrywać jako sumę dwóch wartości chwilowych, odpowiadających stanowi ustalonemu i stanowi przejściowemu

$$u = u_u + u_p,$$

$$i = i_u + i_p.$$

Wyżej wyprowadzone równania różniczkowe mogą być zastosowane zarówno do wartości u i i , jako też i do poszczególnych wartości u_u , i_u lub u_p , i_p . Oczywiście, w zależności od tego, jaki stan obwodu rozpatrujemy, stałe dowolne, wchodzące do całek ogólnych równań różniczkowych, będą miały inne wartości.

Zajmiemy się obecnie określeniem napięć i prądów przejściowych w okresie nieustalonego stanu obwodu.

Będziemy więc mieli ze wzorów (12) i (13)

$$u_p = e^{-\alpha t} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ M_n \sin(\beta_n t + \delta_n) \cos a_n x + \right. \\ \left. + N_n \sin(\beta_n t + \psi_n) \sin a_n x \right\}, \quad (14)$$

$$i_p = e^{-\alpha t} \sqrt{\frac{C}{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ -M_n \sin(\beta_n t + \delta_n + \vartheta_n) \sin a_n x + \right. \\ \left. + N_n \sin(\beta_n t + \psi_n + \vartheta_n) \cos a_n x \right\}, \quad (15)$$

gdzie

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{R}{L} + \frac{A}{C} \right), \quad (16)$$

$$\beta_n = \sqrt{\frac{a_n^2}{LC} - \gamma^2}, \quad \frac{a_n^2}{LC} > \gamma^2, \quad (17)$$

$$\gamma = \frac{1}{2} \left(\frac{R}{L} - \frac{A}{C} \right), \quad (18)$$

$$\operatorname{tg} \vartheta_n = -\frac{\beta_n}{\gamma}. \quad (19)$$

§ 109. Przyłączanie linii w końcu otwartej do źródła prądu stałego.

Na początku linii wartość napięcia prądu stałego, do którego przyłączana jest linja w końcu otwarta, wynosi U . Będziemy mieli następujące warunki graniczne:

przy wszelkich wartościach t

$$1) \text{ dla } x=0 \text{ (na początku przy zaciskach)} \quad \begin{aligned} u &= U, \\ u_u &= U, \\ \underline{u_p} &= 0; \end{aligned}$$

$$2) \text{ dla } x=l \text{ (w końcu linji)} \quad \begin{aligned} i &= 0, \\ i_u &= 0, \\ \underline{i_p} &= 0; \end{aligned}$$

przy wszelkich wartościach $x > 0$

$$\begin{array}{ll}
 3) \text{ dla } t=0, & \begin{array}{l} u=0, \\ u_u=U, \\ \underline{u_p=-U} \end{array} \\
 4) \text{ dla } t=0, & \begin{array}{l} i=0, \\ i_u=0, \\ \underline{i_p=0.} \end{array}
 \end{array}$$

Uwzględniając we wzorze (14) pierwszy warunek graniczny, otrzymamy

$$0 = e^{-at} \sum_{n=1}^{n=\infty} M_n \sin(\beta_n t + \delta_n).$$

Ponieważ równość ta powinna mieć miejsce dla dowolnej wartości t , więc

$$M_n = 0.$$

W ten sposób, zamiast wzorów (14) i (15) będziemy mieli

$$u_p = e^{-at} \sum_{n=1}^{n=\infty} N_n \sin(\beta_n t + \psi_n) \sin a_n x, \quad (20)$$

$$i_p = e^{-at} \sqrt{\frac{C}{L}} \sum_{n=1}^{n=\infty} N_n \sin(\beta_n t + \psi_n + \vartheta_n) \cos a_n x. \quad (21)$$

Zakładając w ostatnim wzorze, na podstawie warunku (2), $x=l$, $i_p=0$ i zaznaczając, że N_n nie może być równe zero, gdyż wtedy $u_p=0$ przy wszelkich wartościach x , co przeczy warunkowi (3), otrzymujemy po uproszczeniu

$$\cos a_n l = 0,$$

czyli, że wszelkie wartości $a_n l$ muszą być nieparzystymi wielokrotnościami $\frac{\pi}{2}$, a więc

$$a_1 l = \frac{\pi}{2}; \quad a_3 l = 3 \frac{\pi}{2}; \quad a_5 l = 5 \frac{\pi}{2}; \quad \dots, \quad a_{2k-1} l = (2k-1) \frac{\pi}{2};$$

stąd wynika, że stała dowolna a_n może mieć w tym przypadku tylko następujące wartości:

$$a_1 = \frac{\pi}{2l}; a_3 = \frac{3\pi}{2l} = 3a_1; \dots; a_{2k-1} = \frac{(2k-1)\pi}{2l} = (2k-1)a_1. \quad (22)$$

Rozpatrując falę napięcia i prądu wzdłuż linii w określonej chwili, spostrzegamy ze wzorów (20) i (21), że długość fali λ_n otrzymamy, gdy

$$a_n(x + \lambda_n) = a_n x + 2\pi,$$

skąd

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{a_n};$$

gdy $a_n = a_1 = \frac{\pi}{2l}$, będziemy mieli $\lambda_1 = 4l$,

to znaczy, że cała długość linii zawiera tylko $\frac{1}{4}$ fali tej sinusoidy, którą nazwiemy sinusoidą główną albo pierwszą harmoniczną.

$$\text{Dla } a_n = a_3 = \frac{3\pi}{2l} \text{ (trzecia harmoniczna) } \lambda_3 = \frac{4l}{3},$$

$$\text{dla } a_n = a_5 = \frac{5\pi}{2l} \text{ (piąta harmoniczna) } \lambda_5 = \frac{4l}{5};$$

widzimy więc, że cała fala układa się na długości linii tylko dla harmoniczných wyższych, zaczynając od piątej, przyczem będziemy mieli tylko nieparzyste harmoniczne.

Uwzględnijmy teraz warunek (3) i założmy we wzorze (20) $t = 0$, $u_p = -U$, wtedy

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} N_n \sin \psi_n \sin a_n x = -U, \quad (23)$$

przyczem, jak stwierdziliśmy wyżej, a_n może mieć tylko wartości podane w (22).

Wzór (23) daje nam nieskończony szereg Fourier'a

$$N_1 \sin \psi_1 \sin a_1 x + N_3 \sin \psi_3 \sin 3 a_1 x + \dots + N_{2k-1} \sin \psi_{2k-1} \sin (2k-1) a_1 x + \dots = -U.$$

w tym szeregu wchodzi tylko nieparzyste sinusoidy, więc krzywa, przedstawiająca naszą funkcję, jest symetryczną i względem osi x i względem swego początku. Oznaczając dla dogodności

$$a_1 x = z, \quad N_{2k-1} \sin \psi_{2k-1} = A_{2k-1},$$

będziemy mieli szereg

$$A_1 \sin z + A_3 \sin 3z + \dots + A_{2k-1} \sin (2k-1)z = -U;$$

spółczynnik dowolnej sinusoidy określimy ze znanego wzoru

$$A_{2k-1} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(z) \sin (2k-1)z \, dz;$$

u nas $f(z) = -U$, więc

$$A_{2k-1} = N_{2k-1} \sin \psi_{2k-1} = -\frac{4U}{\pi} \left| \frac{-\cos (2k-1)z}{2k-1} \right|_0^{\frac{\pi}{2}},$$

czyli ostatecznie

$$N_{2k-1} \sin \psi_{2k-1} = -\frac{4U}{(2k-1)\pi}. \quad (24)$$

Wreszcie, po uwzględnieniu ostatniego warunku granicznego: $t=0$, $i_p=0$, ze wzoru (21) otrzymamy, po skróceniu przez

$$\sqrt{\frac{C}{L}},$$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} N_n \sin (\psi_n + \vartheta_n) \cos a_n x = 0.$$

Ponieważ ta równość powinna mieć miejsce przy wszelkich wartościach x , przeto każdy współczynnik przy wszystkich $\cos a_n x$ oddzielnie powinien się równać zero. Uwzględniając, że $n=2k-1$, otrzymamy

$$N_{2k-1} \sin (\psi_{2k-1} + \vartheta_{2k-1}) = 0. \quad (25)$$

Ale N_{2k-1} nie może być równe 0, jak widać ze wzoru (24), więc powinno być

skąd

$$\sin(\psi_{2k-1} + \vartheta_{2k-1}) = 0,$$

lub wogóle

$$\psi_{2k-1} + \vartheta_{2k-1} = 0,$$

$$\psi_{2k-1} + \vartheta_{2k-1} = k\pi,$$

gdzie k liczba całkowita; wtedy

$$\operatorname{tg} \psi_{2k-1} = -\operatorname{tg} \vartheta_{2k-1};$$

ponieważ, ze wzoru (19),

$$\operatorname{tg} \vartheta_{2k-1} = -\frac{\beta_{2k-1}}{\gamma},$$

przeto

$$\operatorname{tg} \psi_{2k-1} = \frac{\beta_{2k-1}}{\gamma}.$$

Z tego wzoru znajdujemy

$$\sin \psi_{2k-1} = \frac{\operatorname{tg} \psi_{2k-1}}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \psi_{2k-1}}} = \frac{\beta_{2k-1}}{\sqrt{\beta_{2k-1}^2 + \gamma^2}};$$

ponieważ ze wzoru (17)

$$\beta_{2k-1}^2 + \gamma^2 = \frac{a_{2k-1}^2}{LC},$$

przeto ostatecznie

$$\sin \psi_{2k-1} = \frac{\beta_{2k-1}}{a_{2k-1}} \sqrt{LC}. \quad (26)$$

Ze wzorów (24) i (26) znajdujemy

$$N_{2k-1} = -\frac{4 U a_{2k-1}}{(2k-1)\pi \beta_{2k-1} \sqrt{LC}}.$$

Zamieniając w tym wzorze a_{2k-1} przez jego wartość ze wzoru 22, a mianowicie

$$a_{2k-1} = (2k-1) \frac{\pi}{2l},$$

otrzymamy, po skróceniu, ostatecznie

$$N_{2k-1} = -\frac{2U}{l\sqrt{LC} \cdot \beta_{2k-1}}. \quad (27)$$

Podstawiając do wzorów (20) i (21) znalezione wartości stałych dowolnych, otrzymamy

$$u_p = - \frac{2 U e^{-\alpha t}}{l \sqrt{LC}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_{2k-1}} \sin(\beta_{2k-1} t - \vartheta_{2k-1}) \sin \frac{(2k-1)\pi}{2l} x, \quad (28)$$

$$i_p = - \frac{2 U e^{-\alpha t}}{l L} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_{2k-1}} \sin \beta_{2k-1} t \cos \frac{(2k-1)\pi}{2l} x, \quad (29)$$

albo inaczej

$$u_p = - \frac{2 U}{l \sqrt{LC}} e^{-\alpha t} \left\{ \frac{1}{\beta_1} \sin(\beta_1 t - \vartheta_1) \sin \frac{\pi x}{2l} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\beta_3} \sin(\beta_3 t - \vartheta_3) \sin \frac{3\pi x}{2l} + \frac{1}{\beta_5} \sin(\beta_5 t - \vartheta_5) \sin \frac{5\pi x}{2l} + \dots \right\}, \quad (30)$$

$$i_p = - \frac{2 U}{l L} e^{-\alpha t} \left\{ \frac{1}{\beta_1} \sin \beta_1 t \cos \frac{\pi x}{2l} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\beta_3} \sin \beta_3 t \cos \frac{3\pi x}{2l} + \frac{1}{\beta_5} \sin \beta_5 t \cos \frac{5\pi x}{2l} + \dots \right\}, \quad (31)$$

gdzie

$$\beta_{2k-1} = \sqrt{\frac{\alpha^2 \beta_{2k-1}^2}{LC} - \gamma^2} = \sqrt{\frac{(2k-1)^2 \pi^2}{4l^2 LC} - \left(\frac{R}{2l} - \frac{A}{2C}\right)^2} \quad (32)$$

$$\vartheta_{2k-1} = \arctg \left(- \frac{\beta_{2k-1}}{\gamma} \right). \quad (33)$$

Z tych wzorów możemy zbadać amplitudy wszystkich harmoniczných, np. dla pierwszej harmoniczných

$$u_{1p} = - \frac{2 U}{l \sqrt{LC}} e^{-\alpha t} \frac{1}{\beta_1} \sin(\beta_1 t - \vartheta_1) \sin \frac{\pi x}{2l},$$

$$i_{1p} = - \frac{2 U}{l L} e^{-\alpha t} \frac{1}{\beta_1} \sin \beta_1 t \cos \frac{\pi x}{2l},$$

$$U_{1pm} = \frac{2 U e^{-\alpha t}}{l \sqrt{LC} \beta_1},$$

$$I_{1pm} = \frac{2 U e^{-\alpha t}}{l L \beta_1},$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{R}{L} + \frac{A}{C} \right); \quad \beta_1 = \sqrt{\frac{\pi^2}{4F LC} - \left(\frac{R}{2L} - \frac{A}{2C} \right)^2}.$$

W zależności od wartości mianownika we wzorach na U lub I możemy otrzymać przepięcie lub przetężenie.

§ 110. Przyłączanie linii w końcu zwartej do źródła prądu stałego.

Warunki graniczne będą przy wszelkich wartościach t

$$1) \text{ dla } x=0, \quad u_p=0; \quad (u=U, \quad u_u=U),$$

$$2) \text{ dla } x=l, \quad u_p=0; \quad (u=0, \quad u_u=0),$$

przy wszelkich wartościach x w granicach $0 < x < l$

$$3) \text{ dla } t=0; \quad u_p = -U_u \quad (u=0);$$

$$4) \text{ dla } t=0; \quad i_p = -i_u \quad (i=0);$$

jeżeli nie weźmiemy pod uwagę upływności, która przy prądzie stałym niema praktycznego znaczenia, możemy założyć, że w stanie ustalonym prąd wzdłuż całej linii ma jednakową wartość $i_u = \frac{U}{R}$, gdzie R stanowi oporność całej linii, wobec czego $i_p = -\frac{U}{R}$; napięcie zaś w dowolnym punkcie w odległości x od początku, w stanie ustalonym, wyrazi się wzorem

$$u_u = U - U \frac{x}{l} = U \left(1 - \frac{x}{l} \right), \text{ wobec czego } u_p = -U \left(1 - \frac{x}{l} \right).$$

§ 111. Przyłączanie linii w końcu otwartej do źródła prądu zmiennego.

Niech wartość napięcia prądu zmiennego sinusoidalnego w chwili zamknięcia obwodu przechodzi przez fazę ψ , czyli, że wartość chwilowa będzie określona wzorem

$$u_u = U_m \sin(\omega t + \psi).$$

Będziemy mieli następujące warunki graniczne przy wszelkich wartościach t

1) dla $x=0$, napięcie u będzie odrazu takie jak po ustaleniu się, a ponieważ $u = u_u + u_p$, przeto $u_p = 0$;

2) dla $x=l$; $i=0$, $i_u=0$, $i_p=0$;

przy wszelkich wartościach $x > 0$

3) dla $t=0$, $u=0$, $u_u + u_p = 0$, $u_p = -u_u$;

4) dla $t=0$, $i=0$, $i_u + i_p = 0$, $i_p = -i_u$.

Wartości ustalone napięcia u_u oraz prądu i_u , jako funkcje zmiennej odległości x , mogą być znalezione ze wzorów, dotyczących stanu ustalonego.

Stosując te same ogólne wzory (14) i (15) dla przejściowych wartości napięcia i prądu, i spostrzegając, że pierwsze dwa warunki graniczne są te same, co i przy prądzie stałym, znajdziemy jak w § 2

$$M_n = 0; \quad \cos a_n l = 0.$$

Warunek 3-ci da nam

$$\sum_{n=1}^{\infty} N_n \sin \psi_n \sin a_n x = -u_u,$$

skąd, jak dla szeregu Fourier'a,

$$N_{2k-1} \sin \psi_{2k-1} = -\frac{4}{\pi} \int_0^l u_u \sin(2k-1)a_1 x d(a_1 x); \quad (34)$$

w tym przypadku u_u jest funkcją x , która może być określona przez stałe obwodu i przez wartości napięć na początku lub w końcu w stanie ustalonym. Wreszcie ostatni warunek daje

$$\sqrt{\frac{C}{L}} \sum_{n=1}^{\infty} N_n \sin(\psi_n + \vartheta_n) \cos a_n x = -i_u,$$

có znowu nam daje szereg Fourier'a, dla którego

$$N_{2k-1} \sin(\psi_{2k-1} + \vartheta_{2k-1}) = -\frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{L}{C}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} i_u \cos(2k-1) a_1 x d(a_1 x),$$

albo

$$\begin{aligned} N_{2k-1} \cos \vartheta_{2k-1} \sin \psi_{2k-1} + N_{2k-1} \sin \vartheta_{2k-1} \cos \psi_{2k-1} &= \\ &= -\frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{L}{C}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} i_u \cos(2k-1) a_1 x d(a_1 x). \end{aligned} \quad (35)$$

Ze wzorów (19) i (17) znajdujemy

$$\begin{aligned} \cos \vartheta_{2k-1} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\beta_{2k-1}^2}{\gamma^2}}} = \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + \beta_{2k-1}^2}} = \frac{\gamma \sqrt{LC}}{a_{2k-1}}, \\ \sin \vartheta_{2k-1} &= -\frac{\beta_{2k-1} \sqrt{LC}}{\gamma a_{2k-1}} = -\frac{\beta_{2k-1} \sqrt{LC}}{a_{2k-1}}, \end{aligned}$$

zaś ze wzorów (34) i (35) możemy znaleźć N_{2k-1} oraz ψ_{2k-1} .

§ 112. Przyłączenie linii w końcu zwartej do źródła prądu zmiennego.

Będziemy mieli warunki graniczne analogiczne do tych, które ustaliliśmy dla prądu stałego, mianowicie:

przy wszelkich wartościach t

1) dla $x=0$, $u_p=0$ ($u=u$),

2) dla $x=l$, $u_p=0$ ($u=0$, $u_u=0$);

przy wszelkich wartościach $x > 0$

3) dla $t=0$, $u_p=-u_u$ ($u=0$),

4) dla $t=0$, $i_p=-i_u$ ($i=0$),

gdzie u_u i i_u są funkcjami x , które mogą być określone na podstawie znanych wzorów dla stanu ustalonego. Sposób rozwiązywania zagadnienia jest taki sam, jak w § 111.

§ 113. Linja nieodkształcająca. Wyrażenie wartości chwilowych napięć i prądów w postaci dwóch fal.

Znaczne uproszczenie we wzorach dla napięć i prądów otrzymamy, rozpatrując linję, w której stałe tworzą znaną proporcję:

$$\frac{R}{L} = \frac{A}{C}, \quad (36)$$

czyli t. zw. linję nieodkształcającą. W tym przypadku wzory (16) i (18) dają

$$\alpha = \frac{R}{L} = \frac{A}{C}, \quad (37)$$

$$\gamma = 0.$$

Weźmy ogólne równanie różniczkowe (3)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = R A u + (RC + LA) \frac{\partial u}{\partial t} + LC \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad (38)$$

załóżmy

$$u = Y e^{-\alpha t} \quad (39)$$

gdzie Y narazie niewiadoma funkcja dwóch zmiennych x i t :

$$Y = f(x, t).$$

Wtedy

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{-\alpha t} \frac{\partial Y}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{-\alpha t} \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = e^{-\alpha t} \left(\frac{dY}{dt} - \alpha Y \right), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = e^{-\alpha t} \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} - 2\alpha \frac{\partial Y}{\partial t} + \alpha^2 Y \right).$$

Podstawiając te wartości do (38) i dzieląc obie strony przez $e^{-\alpha t}$, otrzymamy

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} &= RAY + (RC + LA) \left(\frac{\partial Y}{\partial t} - \alpha Y \right) + LC \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} - 2\alpha \frac{\partial Y}{\partial t} + \alpha^2 Y \right) = \\ &= Y[RA - \alpha(RC + LA) + \alpha^2 LC] + \\ &+ \frac{\partial Y}{\partial t} [RC + LA - 2\alpha LC] + \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} LC, \end{aligned} \quad (40)$$

Uwzględniając wartości α ze wzoru (37) obliczamy

$$RA - \alpha(RC + LA) + \alpha^2 LC = RA - \frac{R^2 C}{L} - RA + \frac{R^2 C}{L} = 0,$$

$$RC - LA - 2\alpha LC = RC - RC - 2RC = 0$$

Wobec tego równanie (40) otrzymuje postać

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}.$$

Oznaczmy

$$a = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (41)$$

czyli $LC = \frac{1}{a^2}$, wówczas

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}. \quad (42)$$

Jest to znane równanie różniczkowe d'Alembert'a, wyprowadzone dla drgającej struny. Całka ogólna tego równania ma postać.

$$Y = f_1(x - at) + f_2(x + at), \quad (43)$$

gdzie f_1 i f_2 stanowią naogół dowolne funkcje odległości x i czasu t .

Można łatwo sprawdzić słuszność tego rozwiązania, gdyż

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial f_1}{\partial (x - at)} (-a) + \frac{\partial f_2}{\partial (x + at)} a,$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial (x - at)^2} a^2 + \frac{\partial^2 f_2}{\partial (x + at)^2} a^2 =$$

$$= a^2 \left[\frac{\partial^2 f_1}{\partial (x - at)^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial (x + at)^2} \right],$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial (x - at)} + \frac{\partial f_2}{\partial (x + at)},$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial (x-at)^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial (x+at)^2},$$

skąd widać, że warunek (42) spełniony.

Podstawiając wartość Y ze wzoru (43) do (39), otrzymamy

$$u = e^{-\alpha t} \{f_1(x-at) + f_2(x+at)\}.$$

Stosując nasze rozumowanie do stanu przejściowego będziemy mieli

$$u_p = e^{-\alpha t} \{f_1(x-at) + f_2(x+at)\}. \quad (44)$$

Dla znalezienia i bierzemy wzór (2)

$$-\frac{\partial i_p}{\partial x} = Au_p + C \frac{\partial u_p}{\partial t};$$

podstawiając tutaj znalezioną wartość u_p , otrzymamy

$$\begin{aligned} -\frac{\partial i_p}{\partial x} &= e^{-\alpha t} \left\{ A(f_1 + f_2) - \alpha C(f_1 + f_2) - Ca \frac{\partial f_1}{\partial (x-at)} + \right. \\ &\quad \left. + Ca \frac{\partial f_2}{\partial (x+at)} \right\} = e^{-\alpha t} \left\{ (A - \alpha C)(f_1 + f_2) - \right. \\ &\quad \left. - Ca \left(\frac{\partial f_1}{\partial (x-at)} - \frac{\partial f_2}{\partial (x+at)} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Wobec (37)

$$A - \alpha C = A - A = 0,$$

więc

$$-\frac{\partial i_p}{\partial x} = -Ca e^{-\alpha t} \left\{ \frac{\partial f_1(x-at)}{\partial (x-at)} - \frac{\partial f_2(x+at)}{\partial (x+at)} \right\},$$

albo, podstawiając $a = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ i zmieniając znaki

$$\frac{\partial i_p}{\partial x} = \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-\alpha t} \left\{ \frac{\partial f_1(x-at)}{\partial (x-at)} - \frac{\partial f_2(x+at)}{\partial (x+at)} \right\}.$$

Całkując względem x , otrzymamy

$$i_p = \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-\alpha t} \{f_1(x-at) - f_2(x+at)\}. \quad (45)$$

Stała dowolna powinna równać się zero, gdyż dla $t = \infty$, $u_p = 0$ oraz $i_p = 0$.

Stosunek amplitud napięcia i natężenia prądu stanowi oporność falową Z ; w rozpatrywanym przypadku

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Wzory (44) i (45) dają nam wartości chwilowe napięcia i prądu przejściowego w dowolnym punkcie przewodu.

Rozpatrzmy dwa punkty, znajdujące się w odległości dx ; w tym drugim punkcie wartość napięcia i prądu będzie taka sama, jak w punkcie pierwszym po upływie czasu dt . Wobec tego

$$1) \quad x + dx - a(t + dt) = x - at,$$

$$2) \quad x + dx + a(t + dt) = x + at;$$

z pierwszego równania otrzymujemy

$$dx - a dt = 0; \quad a = \frac{dx}{dt},$$

z drugiego równania

$$dx + a dt = 0; \quad a = -\frac{dx}{dt}.$$

Widzimy stąd, że współczynnik a stanowi prędkość, z jaką się rozchodzą z jednego dowolnego punktu do drugiego — te same wartości prądu i napięcia; inaczej mówiąc, jest to prędkość rozchodzenia się fal napięcia i prądu wzdłuż przewodu.

Ze wzorów (44) i (45) stwierdzamy, że napięcie stanowi sumę dwóch fal, zaś prąd różnicę dwóch fal, które rozchodzą się z jedną i tą samą prędkością, ale w kierunkach przeciwnych (prędkości mają znaki przeciwne); fale są tłumione odpowiednio do funkcji wykładniczej e^{-at} , która jest funkcją malejącą.

Fale prądu są podobne do odpowiednich fal napięcia; amplitudy fal prądu otrzymujemy z amplitud napięcia, mnożąc je przez

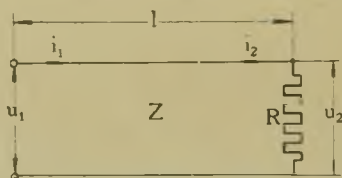
$\sqrt{\frac{C}{L}}$, co stanowi odwrotność oporności falowej linii w rozpatrywanym przypadku.

Obie fale, które mamy w powyższych wzorach, nazywamy falami wędrownymi. Pierwsza z tych fal, wychodząca ze źródła stanowi falę główną; druga, biegnąca z tą samą prędkością, ale w kierunku przeciwnym, stanowi falę wpadającą do źródła lub falę odbitą na końcu linii.

§ 114. Przyłączanie linii nieodkształcającej do oporności rzeczywistej.

Fale wędrujące, natrafiając na przeszkody w postaci skupionych oporności, bądź rzeczywistych, bądź urojonych, podlegają częściowo odbiciu, częściowo załamaniu.

Rozpatrzmy najpierw przypadek, gdy fala z linii nieodkształcającej o oporności falowej $Z = \sqrt{\frac{L}{C}}$ natrafia w odległości l od początku linii na oporność rzeczywistą R (rys. 215).



Rys. 215.

Wartość chwilowa napięcia przejściowego na tej oporności wyrazi się według wzoru (44) w sposób następujący

$$u_2 = e^{-at} \left[f_1(l - at) + f_2(l + at) \right], \quad (47)$$

zaś wartość chwilowa natężenia prądu przepływającego przez oporność R według wzoru (45) z uwzględnieniem wzoru (46) przybierze postać

$$i_2 = \frac{e^{-at}}{Z} \left[f_1(l - at) - f_2(l + at) \right]. \quad (48)$$

Oznaczając w skróceniu pierwszą falę, jako falę główną przez f_g , drugą zaś jako falę odbitą przez f_o , czyli zakładając

$$e^{-at} f_1(l - at) = f_g,$$

$$e^{-at} f_2(l + at) = f_o,$$

będziemy mieli ze wzorów (47) i (48)

$$u_2 = f_g + f_o, \quad (49)$$

$$i_2 = \frac{1}{Z} (f_g - f_o). \quad (50)$$

Ale $u_2 = i_2 R,$

więc

$$u_2 = \frac{R}{Z} (f_g - f_o). \quad (51)$$

Przez zestawienie ostatniego wzoru ze wzorem (49), otrzymujemy

$$f_g + f_o = \frac{R}{Z} (f_g - f_o);$$

skąd

$$f_o = \frac{R - Z}{R + Z} f_g. \quad (52)$$

Wyraz

$$s_o = \frac{R - Z}{R + Z} \quad (53)$$

stanowi współczynnik odbicia fali głównej.

Podstawiając wartość f_o ze wzoru (52) do wzoru (51), będziemy mieli

$$u_2 = \frac{R}{Z} \left[f_g - \frac{R - Z}{R + Z} f_g \right] = \frac{2R}{R + Z} f_g. \quad (54)$$

Wyraz

$$s_p = \frac{2R}{R + Z} \quad (55)$$

stanowi współczynnik przejścia fali głównej.

Ze wzoru (50), przy uwzględnieniu wzoru (52), otrzymamy

$$i_2 = \frac{1}{Z} \left(f_g - \frac{R - Z}{R + Z} f_g \right) = \frac{2}{R + Z} f_g. \quad (56)$$

Z powyższych wzorów na u_2 oraz i_2 możemy otrzymać wartości napięcia i natężenia prądu, gdy linja jest w stanie jałowym lub gdy jest w stanie zwarcia. W pierwszym przypadku $R = \infty$, wtedy

$$u_2 = 2f_g,$$

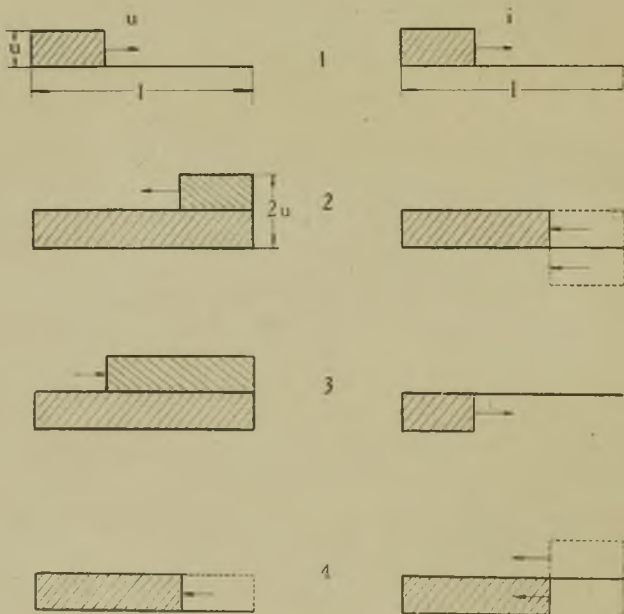
$$i_2 = 0.$$

Ze wzoru (52) wynika, że w tym przypadku

$$f_o = f_g;$$

wskazuje to, że fala odbita ma ten sam znak, co i fala główna, wobec czego napięcie na oporności wzrasta do podwójnej wartości napięcia u , które mamy u źródła. Dla prądu zaś fala odbita otrzymuje znak przeciwny, skutkiem czego prąd zanika.

Na rys. 216 pokazany jest przebieg fal napięcia i prądu w przypadku, gdy nie uwzględniamy tłumienia ($\alpha = 0$). Położenie 1 odpowiada chwili, gdy pierwotna fala główna nie doszła jeszcze do końca linii; w końcu zostaje odbita, przyczem dla napięcia



Rys. 216.

z tym samym znakiem, dla prądu ze znakiem przeciwnym. Położenie 2 wskazuje stan po tym odbiciu; napięcie się podwaja, prąd zaś zanika; stan taki będzie trwał zanim fale nie dojdą do początku linii; tu napięcie powinno się zrównać z napięciem u_1 źródła, wobec czego zachodzi odbicie fali ze zmianą znaku zarówno

dla napięcia jak i dla prądu. Położenie 3 daje nam obraz, gdy w pewnej odległości od źródła ujemne napięcie zniwelowało do wartości u_1 poprzednie napięcie równe $2u_1$ oraz ujemny prąd osiągnął swoją wartość. Po dojściu takiego stanu do końca linii zachodzi odbicie fali napięcia z tym samym znakiem czyli ujemnym, wobec czego napięcie spada do zera, fala zaś prądu odbija się ze znakiem przeciwnym czyli dodatnim, co powoduje zanikanie prądu, otrzymujemy położenie 4. Taki stan trwa aż fale dojdą do początku; wtedy rozpoczyna się wszystko na nowo w takim samym porządku.

Najkrótszy czas czyli okres T , po upływie którego następuje powtórzenie zjawiska, znajdziemy, biorąc pod uwagę, że powtórzenie zjawiska zachodzi po czterokrotnym przebiegu fali wzdłuż całej długości linii l i że prędkość przebiegu fali wynosi a ; oczywiście

$$T = \frac{4l}{a},$$

to znaczy, że na długości linii mamy $\frac{1}{4}$ całkowitej fali.

Gdy linja jest w stanie zwarcia $R = 0$, wówczas ze wzoru (54) wynika, że

$$u_2 = 0,$$

fala napięcia odbija się w końcu ze znakiem przeciwnym.

Na podstawie wzoru (56), w tym przypadku,

$$i_2 = \frac{2}{Z} f_g,$$

a ponieważ

$$f_g = u_1,$$

zaś

$$\frac{U_1}{Z} = i_1,$$

przeto

$$i_2 = 2i_1;$$

znaczy to, że fala napięcia zostaje w miejscu zwarcia linii odbita z tym samym znakiem.

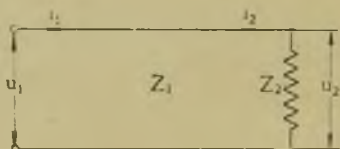
Ciekawy przypadek zachodzi, gdy $R = Z$; wówczas, jak to wynika ze wzoru (52),

$$f_0 = 0;$$

to znaczy, że nie zachodzi odbicie; cała fala główna przechodzi przez oporność R .

§ 115. Przyłączanie linii nieodkształcającej do oporności pozornej.

Rozpatrzmy obecnie przypadek, gdy do linii nieodkształcającej z opornością falową Z_1 przyłączamy oporność pozorną Z_2 ; może to być również oporność falowa drugiej podobnej linii (rys. 217).



Rys. 217.

Zamieniając we wzorach poprzedniego paragrafu Z na Z_1 i R na Z_2 otrzymamy wzory, odpowiadające nowym warunkom. Ze wzoru (53), otrzymujemy dla rozpatrywanego przypadku współczynnik odbicia fali w miejscu przyłączenia oporności Z_2

$$s_0 = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1},$$

zaś ze wzoru (55) współczynnik przejścia fali

$$s_p = \frac{2 Z_2}{Z_1 + Z_2}.$$

Fala odbita w pierwszej linii w miejscu przyłączenia Z_2 wyrazi się wzorem

$$f_0 = s_0 f_g,$$

zaś napięcie na oporności będzie

$$u_2 = s_p f_g = \frac{2 Z_2}{Z_1 + Z_2} u_1.$$

Tak samo znajdziemy prąd i_2 , wchodzący do oporności Z_2 ; ze wzoru (56)

$$i_2 = \frac{2}{Z_1 + Z_2} f_g = \frac{2}{Z_1 + Z_2} u_1,$$

ale

$$u_1 = Z_1 i_1,$$

więc

$$i_2 = \frac{2 Z_1}{Z_1 + Z_2} i_1.$$

W przypadku, gdy $Z_1 = Z_2$, współczynnik odbicia staje się równym zero, czyli cała fala główna przechodzi przez oporność Z_2 .

SKOROWIDZ ALFABETYCZNY.

	Str.		Str.
Admitancja	56	Faza	7
d'Alembert'a równanie	451	w układach wielofa- zowych	84
Aluminjowy prostownik	165	Faz skojarzenie	88
Amplituda	4	Ferranti	296
Analiza krzywych	180	Filtr dławikowy.	339
Aperjodyczne wyładowa- nie kondensatora	390	kondensatorowy	343
Argument (symbolu)	47	widmowy	349
Aronsa wzór	374	Fischer-Hinnena sposób analizy krzywych	185
Arytmetyczna metoda ana- lizy krzywych	181	Foucault'a prądy	129
Bessela funkcje	150	Fourier'a szereg	168
Cykl histerezy magne- tycznej	124	Fryze S.	67
Częstotliwość	6	Główna fala	171
Czterofazowy układ	87	sinusoida	171
Czwórnik	211	Gwiazdowe połączenie	88
Decybel	288	Harmoniczna	171
Dekrement logarytmiczny tłumienia	401	Helmholtz'a wzór	365
Długość fali	287	Histereza dielektryczna 157, 158 magnetyczna 123, 124	
Dodawanie funkcji sinu- soidalnych	15	Impedancja	32
Drgania swobodne	402	Indukcyjność	269
własne	398	kabla dwu- żyłowego koncentrycz- nego	274
wymuszone	398	Indukcyjność linii dwu- przewodowej	269
Dudnienie	430	Indukcyjność linii jedno- przewodowej	272
Dwufazowy układ	87	Indukcyjność linii trzy- przewodowej	273
Fala główna	171, 288	Indukcyjność własna	269
odbita	288, 454	Indukcyjności wpływ na kształt krzywej prądu	202
wędrówna	453, 454	Induktancja	32
Fale napięcia w długich liniach	285		
Fale prądu w długich liniach	285		

	Str.		Str.
Inwersja	58	Moc prądu trójfazowego	100
Inwersji stopień	58	prądu zmiennego	12
środek	58	prądu zmiennego w	
Jednofazowy układ trój-		symbolicznym uję-	
przewodowy	87	ciu	55
Kapacitancja	32	rzeczywista	13
Kąt histerezy (magnety-		urojona	14
cznej)	129	Moduł (symbolu)	47
Kąt przesunięcia fazy	8	Nakładanie się prądów	
stratności dielektry-		odkształconych	192
cznej	158	Napięcia spadek	65
Kelvin Lord	155, 250	strata	65
Kenelly'ego metoda prze-		w szeregowem	
kształcenia trójkąta w		połączeniu	61
gwiazdę	108	Napięcie bezmocne	45
Kirchhoffa prawa w za-		bierne	45
stosowaniu do prądów		czynne	45
zmiennych	66	fazowe	89
Konduktancja	56	indukcyjne	20, 34
Krarup	307	międzyfazowe	89
Laplace'a wzór	240	międzyprzewo-	
Linja bez strat	289	dowe	89
w stanie jałowym	295	mocne	45
w stanie zwarcia	296	na kondensato-	
nieodkształcająca	298, 450	rze	35
Linje łańcuchowe	324	na oporności rze-	
Logarytmiczny dekrement		czywistej	34
tłumienia	401	omowe	20
Ładowanie kondensa-		skojarzone	90
tora prądem stałym	379, 403	Napięć trójkąt	44
Łańcuch izolatorów wi-		Naskórkowość	146
szących	357	Natężenie powściągające	124
Magnetyzm szczątkowy	124	prądu skoja-	
Metoda inwersji	58	rzone	91
symboliczna	46	Neper	288
wykreślna	39	Obieg histerezy magne-	
Moc bierna	14	tycznej	124
bierna prądu od-		Obwody magnetycznie	
kształconego	205	sprężone	135, 422
czynna	13	Obwód oscylacyjny	396
czynna prądu od-		prądu odkształco-	
kształconego	203	nego	200
prądów wielofazow.	92	przesyłowy prądu	
pozorna	14	zmiennego	211
pozorna jako wektor	46	symetryczny	217
Moc pozorna prądu od-		Okres	5
kształconego	204	Określenie wielkości sta-	
prądu odkształconego	203	łych za pomocą pomia-	
		rów	218

	Str.		Str.
Oporność bierna	32	Pojemność robocza układu	
charakterysty-		trzech przewodów . . .	268
czna	283	Pojemność trzech równo-	
czynna	18	ległych symetrycznie	
falowa	283	ułożonych przewodów	
falowa linii łań-		napowietrznych	264
cuchowej	330	Pojemności wpływ na	
indukcyjna	20	kształt krzywej prądu	202
omowa	18	Pole wirujące	117, 119
pojemnościowa	26	Pollaka układ prostowni-	
pozorna	24, 32	kowy	165
drgań		Połączenia gwiazdowe . . .	88
własnych	398	wielobokowe	88
pozorna—zależ-		Powstawanie prądu stałego	364
ność od czę-		Powstawanie prądu zmien-	
stotliwości	37	nego	369, 382, 410
rzeczywista	17	Prawa Kirchhoffa w za-	
urojona	32	stosowaniu do prądów	
Oporności pozorne połą-		zmiennych	66
czone równoległe	69	Prąd bezmocny	25
Oporności pozorne połą-		bierny	25
czone szeregowo	63	czynny	25
Oporności trójkąt	44	dwufazowy	110
Opóźnienie w fazie	8	fazowy	89
Oscylacyjne wyładowanie		magnesujący	128
kondensatora	396	mocny	25
Oś czasu	52	odkształcony	168
Peek'a wzór	159	przewodowy	89
Pochłaniacz fali (filtr)	357	sinusoidalny	1
Pojemność cząstkowa	267	skrośny	157, 159
Pojemność dwóch równo-		tętniący	163
ległych do siebie prze-		trójfazowy	93
wodów napowietrznych	261	upływu	157
Pojemność kabla dwużył-		zmienny	1
owego koncentrycznego	248	Prądy wirowe	129
Pojemność kabla dwużył-		Prądy w układach trójfa-	
owego skręconego	250	zowych	105
Pojemność kabla jednożył-		Prędkość rozchodzenia się	
owego obołowionego	244	fal	287, 290
Pojemność kabla jednożył-		Prostownik aluminiowy	165
owego opancerzonego	245	elektrolityczny	165
Pojemność kabla trzyżył-		katodowy	166
owego skręconego	254	rtęciowy	162
Pojemność przewodu na-		tlenkowy	167
powietrznego pojedyn-		Prostowniki	162
czego	260	Przekładnia transformatora	139
Pojemność robocza	267	Przekształcenie układu	
Pojemność robocza linii		trójkątnego w układ	
dwuprzewodowej	267	gwiazdowy	108

Str.		Str.
	Przerywanie obwodu, w którym indukcyjność i pojemność są połączone równolegle	419
	Przerywanie obwodu z uwzględnieniem zmiany oporności na wyłączniku	374
	Przesunięcie faz	7
	Przesunięcie fazy o kąt prosty pomiędzy prądem i napięciem	80
	Przewodność bierna	56
	czynna	56
	pozorna	56
	rzeczywista	56
	urojona	56
	Przewody długie—równania zasadnicze	279
	Przewody; wielkości charakterystyczne	278
	Przewody w stanie nieustalonym	433
	Przyłączanie linii nieodkształcającej do oporności pozornej	458
	zylaczanie linii do oporności rzeczywistej	454
	Przyłączanie linii w końcu otwartej do źródła prądu stałego	441
	Przyłączanie linii w końcu zwartej do źródła prądu stałego	447
	Przyłączanie linii w końcu otwartej do źródła prądu zmiennego	447
	Przyłączanie linii w końcu zwartej do źródła prądu zmiennego	449
	Pulsacja	6
	Pupin	307
	Reaktancja	32
	Rezonans napięć	35
	prądów	73
	Rezystancja	32
	Richtera wzór	126
	Rothe'go wykreslny sposób analizy krzywych	183
	Rozkład napięć na okładzinach metalowych kabla opancerzonego	247
	Rozkład potencjału w polu elektrycznym	240
	Rozkład układów niesymetrycznych na układy symetryczne prądu trójfazowego	96
	Równania zasadnicze obwodów prądu zmiennego	211
	Równoważny prąd sinusoidalny	202
	Scotta układ	144
	Skinieffekt	146
	Skojarzenie faz	88
	Spadek napięcia	65
	Sposób Fischer-Hinnena analizy krzywych	185
	Spółczynnik długości fali histerezymagnetycznej kształtu	125
	krzywej	195
	liniowy	200
	mocy	313
	14	
	Spółczynnik prądu odkształconego przejścia	204
	przesunięcia fazy	455
	sprężenia magnetycznego	328
	138	
	Spółczynnik strat dielektrycznych	158
	szczytu	196
	tłumienia	288, 365
	Stać czasu	365
	rozchodzenia się (fali)	288
	tłumienia	365
	Stan jałowy	212
	nibyustalony	362
	nieustalony	363
	zwarcia	212
	Steinmetz	157
	Steinmetza wzór	125
	Stopień inwersji	58

	Str.		Str.
Strata napięcia	65	Wartość skuteczna prądu	
z histerezy magne-		odkształconego	198
tycznej	125	Wartość szczytowa	4
z prądów wirowych	132	średnia	8
Stratność magnetyczna	133	Warunki osiągnięcia naj-	
Straty w dielektrykach	157	większej mocy na od-	
Strzałki kierunkowe	67	biorniku	222
kierunkowości	67	Wektory	42
Susceptancja	56	Wielobokowe połączenie	88
Symboliczna metoda	46	Wielofazowy układ	83
Szereg Fourier'a	168	Wielofazowy układ skoja-	
Sztuczne linie elektryczne	320	rzony	88
Środek inwersji	58	Wielofazowy układ syme-	
Thomsona wzór	402	tryczny	83
Transformator powietrzny	135	Wpływ indukcyjności i	
z rdzeniem		pojemności na kształt	
żelaznym	138	krzywej prądu odkształ-	
Trójfazowy prąd	93	conego	202
odkształcony	208	Wpływ prądu odkształco-	
układ	87	nego przy pomiarach	
Trójkąt napięć	44	indukcyjności i pojem-	
oporności	44	ności	206
Układ czterofazowy	87	Wykres pracy obwodu	
dwufazowy	87	prądu zmiennego	227
jednofazowy trój-		Wykres wektorowy	42
przewodowy	87	Wykreślny sposób Rothe'	
Scotta	144	go analizy krzywych	183
trójfazowy	87	Wyładowanie kondensa-	
wielofazowy	83	tora aperiodyczne	390
Układ wielofazowy skoja-		Wyładowanie kondensato-	
rzony	88	ra oscylacyjne	396
Układ wielofazowy syme-		Wyładowanie kondensato-	
tryczny	83	ra przez oporność rze-	
Układ wyrównany	93	czywistą	386
Układy zastępujące długą		Wyładowanie kondensato-	
linię	320	ra w obwodach sprzężo-	
Ulot	157, 159	nych magnetycznie 422, 428	
Uptywność	157, 278	Wyprzedzanie w fazie	7
Wartość chwilowa	4	Wyrównany układ	93
maksymalna	4	Zanikanie prądu stałego	364
przejściowa	363	zmiennego	369
skuteczna	10	Zmiana oporności w ob-	
		wodzie	367

E R R A T A

<i>Str.</i>	<i>Wiersz</i>	<i>Zamiast</i>	<i>Powinno być</i>
10	12 od góry we wzorze	$Y_m =$	$Y_m \cdot$
14	we wzorze 23	$\frac{P}{PU}$	$\frac{P}{UI}$
14	" " 24	$\sqrt{P_b^2 - P^2}$	$\sqrt{P_p^2 - P^2}$
30	4 od góry	czynną	rzeczywistą
35	6 " "	czynną	rzeczywistą
51	14 " "	b_1	b_1
59	9 od dołu	<i>OBD</i>	<i>OAD</i>
71	7 od góry	24	25
71	8 " "	25	24
71	na rys. 47 na końcu poziomej osi powinno być	X	Z
72	8 od góry	$\frac{Z_1}{Z_2}$	$\frac{Z}{Z_2}$
74	10 " "	$X^2 C$	$X^2 c$
76	2 " "	$\frac{1}{\omega C} Z$	$\frac{1}{\omega C} \cdot Z$
78	13 " " przed [należy postawić	j	
81	9 " "	\hat{I}	\hat{I}_1
81	9 od dołu	$\hat{Z}_1 = R_2 + jX_1$	$\hat{Z}_1 = R_1 + jX_1$
86	10 od góry	$n > 2$	$n > 1.$
		przytem należy skreślić wszystko od słowa „gdyż“ aż do kropki po wzorze.	
97	13 od dołu	$j\sqrt{3}$	$j\frac{\sqrt{3}}{2}$
109	na rys. 78	Z_c	Z_B
"	" " "	Z_B	Z_c
117	8 od dołu	wartość	natężenie
128	10 " "	<i>OD'</i>	<i>O'D'</i>
137	2 od góry	\hat{U}	\hat{U}_1
142	5 " "	U_2	u_2
291	we wzorze 39	\hat{I}	\hat{I}_2
305	3 i 5 od góry	$e^{\frac{a}{b} x}$	$e^{\frac{a}{b} \alpha}$
310	we wzorze 66	$e^{-j \varphi_2}$	$e^{-j \varphi}$
311	3 od góry	\hat{Z}	\hat{Z}_z
329	8 od dołu	e_k	e^k
331	we wzorze 37	\hat{I}^0	\hat{I}_0
376	6 od dołu	$i = \left(I \frac{Ut_0}{Rt_0 - L} \right)$	$i = \left(I - \frac{Ut_0}{Rt_0 - L} \right)$
435	7 " "	$= a^2$	$= -a^2$



BG Politechniki Śląskiej

nr inw.: 102 - 131927



Dyr.1 131927