H. LISOWSKI

WZORY MATEMATYCZNO-FIZYCZNE

Uzupełnił A. U.

WYDANIE SZÓSTE

WARSZAWA—1925
WYDAWNICTWO
KSIĘGARNI J. ŁISOWSKIEJ

H. LISOWSKI

WZORY MATEMATYCZNO-FIZYCZNE

Uzupełnił A. U.

WYDANIE SZÓSTE

Marjan Pucha

WARSZAWA—1925
WYDAWNICTWO
KSIĘGARNI J. LISOWSKIEJ

Druk. L. Wolnicki, Poznańska 2

ALGEBRA.

Dodawanie i odejmowanie.

1. $a + a + a + a = 4a$
2. $- a - a - a = - 3a$
3. $(+ a) + (- a) = 0$
4. $(- a) - (- b) = - a + b$

   albo $= - (a - b)$

Mnożenie.

1. $(+ a) . (+ b = + ab$;

   albo: $(- a) . (- b) = + ab$
2. $(+ a) . (- b) = - ab$;

   albo: $(- a) . (+ b) = - ab$
3. $(a+b) . c = ac+bc$; $(a-b . c = ac-bc$

Dzielenie.

1. $\frac{+a}{+b} = \frac{a}{b}$; albo: $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$
2. $\frac{+a}{-b} = -\frac{a}{b}$; albo: $\frac{-a}{+b} = -\frac{a}{b}$

3. $\frac{o}{a} = 0$; $\frac{a}{o} = \infty$ (niesk.) $\frac{o}{o} =$ nieozn

4. $\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} = a$

5. $\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} = b$

Równania I-go stopnia.

1. $ax + b = 0$; $x = -\frac{b}{a}$

2. $ax + by = c$ $\qquad$ $x = \frac{c_1 b - bc_1}{ab_1 - ba_1}$

$a_1 x + b_1 y = c_1$ $\qquad$ $y = \frac{ac_1 - ac_1}{ab_1 - ba_1}$

a) $ab_1 - ba_1 \neq o$ t. zn. $\frac{a}{a_1} \neq \frac{b}{b_1}$; układ rozwiązalny jednoznacznie;

b) $ab_1 - ba_1 = o$; $cb_1 - {}_1bc \neq o$

t. zn. $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} \neq \frac{c}{c_1}$, wówczas

$ac_1 - ca_1 \neq o$; układ nierozwiązalny

$x = \infty$; $y = \infty$;

c) $ab_1 - ba_1 = o$; $ob_1 - ba_1 = o$

t. zn. $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$, wówczas $ac_1 - ca_1 = o$: układ nieznaczony: $x = \frac{0}{0}$, $y = \frac{0}{0}$

Równania 2-go stopnia.

1. $x^2 = a$; $x_{1,2} = \pm \sqrt{a}$
2. $ax^2 + bx + c = 0 = a(x - x_1)(x - a_2)$;

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a};\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a};$$

3. $ax^2 + 2kx + c = o$

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$$

4. $x^2 + px = q + 0.$

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$$x_1 + x_2 = -p;\ x_1 \cdot x_2 = q$$

5. Równanie dwukwadratowe:

$ax^4 + bx^2 + c = 0;$

$$x = \pm\sqrt{\frac{-b \pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

6. Równania zwrotne:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$$

$$ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = 0$$

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0$$

$a(z^2 - 2) + bz + c = 0$, gdzie $z = x + \frac{1}{x}$

$$az^2 + bz + c - 2a = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm\sqrt{b^2 - 4a(c - 2a)}}{2a}$$

mając z_1 *i* z_2, znajdziemy x z równania: $x + \frac{1}{x} = z.$

Równania 3-go stopnia.

1. $x^3 = a;\ x_1 = \sqrt[3]{a};\ x_2 = \frac{1}{2}\sqrt[3]{a}(-1+$

$+\sqrt{-3})$; $x_3=-\frac{1}{2}\sqrt[3]{a}(1+\sqrt{-3})$

2. $x^3+ax^2+bx+c=0$,

Niech $x=z+t\ldots$ (I)

$(z+t)^3+a(z+t)^2+b(z+t)+c=0$

$z^3+(3t+a)z^2+(3t^2+2at+b)z+(t^3+$

$+at^2+bt+c)=0.$

Dla t dajemy taką wartość, że:

$$3t+a=0;\ t=-\frac{a}{3}\ldots\ \text{(II)}$$

$$z^3+\left(\frac{a^2}{3}-\frac{2a^2}{3}+b\right)z+\left(-\frac{a^3}{27}+\frac{a^3}{9}+\right.$$

$$\left.+\frac{ab}{3}+c\right)=0$$

Dla krótkości: $\frac{a^2}{3}-\frac{2a^2}{3}+b=p$;

$$-\frac{a^3}{27}+\frac{a^3}{9}-\frac{ab}{3}+c=q;$$

3. $z^3+pz+q=0$; niech $z=u+v\ldots$ (III)

$u^3+v^3+(u+v)\ (3uv\ p)++q=0$

Dla v dajemy taką wartość, że:

$$3uv + p\,0;\quad v = -\frac{p}{3u}\ .\ .\ .\ (\mathrm{IV})$$

$$u^6 + qu^3 - \frac{p^3}{27} = 0.$$

$$u = \sqrt[3]{\frac{-q \pm \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}};\ \text{zaś}\ \ v = -\frac{p}{3u}$$

Mając u i v, znajdziemy z, a mając z i t, znajdziemy x.

Dyskusja równań 2-go stopnia.

Równanie: $ax^2 + bx + c = 0$.

Wyróżnik: $\triangle = b^2 - 4ac$.

1. $\triangle > o$ — równanie posiada 2 pierwiastki rzeczywiste różne;
2. $\triangle = o$ — jeden pierwiastek rzeczywisty podwójny (dwa równe);
3. $\triangle < o$ — dwa urojone.

Znaki pierwiastków:

1. $\frac{c}{a} > o$ stąd $x_1 \, . \, x_2 > o$ — pierwiastki są znaków jednakowych

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0$ — obydwa dodatnie

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0$ — obydwa ujemne;

2. $\frac{c}{a} < 0$ stąd $x_1 \cdot x_2 < 0$ — pierwiastki są znaków różnych

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0;\ [x_1] > [x_2]$

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0;\ [x_1] < [x_2];$

jeżeli $x_1 > x_2$.

Trójmian 2-go stopnia.

$y = ax^2 + bx + c.\quad x_2 < x_1.$

1. $a > 0$.

$\Delta > 0;\ y > 0$ dla $x < x_2$ lub $x > x_1$

$y < 0$ dla $x_2 < x < x_1$

$\Delta = 0;\ y > 0$ dla każdego $x \pm -\frac{b}{2a}$

$\Delta < 0$; $y > o$ stale.

Dla $x = -\frac{b}{2a}$; $= \text{min.} = -\frac{\Delta}{4a}$

2. $a < o$.

$\Delta > 0$; $y > o$ dla $x_2 < x < x_1$

$y < o$ dla $x < x_2$ lub $x > x_1$

$\Delta = 0$; $y < o$ dla każdego $x \neq -\frac{b}{2a}$

$\Delta < 0$; $y < o$ stale.

Dla $x = -\frac{b}{2a}$; $y = \text{max.} = -\frac{\Delta}{4a}$

Położenie liczby (α) względem pierwiastków trójmianu kwadratowego.

$$y = ax^2 + bx + c; \quad x_1 > x_2.$$

1. Dla: $\alpha < x_2 < x_1$,

winno być: $\Delta = b^2 - 4ac > o$;

$$af(\alpha) > o; \text{ i } -\frac{b}{2a} > \alpha.$$

2. Dla $\alpha = x_2 < x_1$ winno być: $\Delta > o$;

$$af(\alpha) = o \text{ i } -\frac{b}{2a} > \alpha.$$

3. Dla $x_2 < \alpha < x_1$ winno być: $\Delta > o$;

$$af(\alpha) < o \text{ i } -\frac{b}{2a} \gtreqless \alpha.$$

4. Dla $x_2 < x_1 = \alpha$ winno być: $\Delta > o$;

$$af(\alpha) = o \text{ i } -\frac{b}{2a} < \alpha.$$

5. Dla $x_2 < x_1 < \alpha$, winno być: $\Delta > o$;

$$af(\alpha) > o \text{ i } -\frac{b}{2a} < \alpha.$$

Położenie pierwiastków trójmianu kwadratowego: $y = ax^2 + bx + c$ **względem danego przedziału.** $(\alpha < \beta)$

1. Dla: $\alpha < x_2 < x_1 < \beta$
winno być: $\Delta > o$;

$$\begin{cases} af(\alpha) > o \\ af(\beta) > o \end{cases} \; i \; \beta > -\frac{b}{2a} > \alpha.$$

2. Dla: $\alpha < x_2 < \beta < x_1$
winno być: $\Delta > o$;

$$\begin{cases} af(\alpha) > o \\ af(\beta) < o \end{cases} \text{ i } -\frac{b}{2a} > \alpha.$$

3. Dla: $x_2 < \alpha < x_1 < \beta$

winno być: $\Delta > 0$;

$$\begin{cases} af(\alpha) < 0 \\ af(\beta) > 0 \end{cases} \text{ i } -\frac{b}{2a} < \beta.$$

Dyskusja równań dwukwadratowych: $ax^4 + bx^2 + c = 0$.

$$x_1 + \sqrt{\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}};$$

$$x_2 - \sqrt{\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}};$$

$$x_3 = +\sqrt{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}};$$

$$x_4 = -\sqrt{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}; \quad \Delta = b^2 - 4ac$$

1. Przy $\Delta > 0, \frac{b}{a} < 0$ i $\frac{c}{a} > 0$ —

— 4 pierw. rzecz., z których 2 dodatnie i 2 ujemne,

t. j. $x_1 > 0$; $x_3 > 0$ i $x_2 < 0$; $x_4 < 0$

2. Przy $\Delta > 0$; $-\frac{b}{a} < 0$; $\frac{c}{a} > 0$

4 pierwiastki urojone.

3. Przy $\Delta > 0$ i $\frac{c}{a} < 0$ 2 pierw. rzecz.

i 2 urojone t. j.

$x_1 > 0$; $x_2 < 0$; x_3 i x_4 urojone.

4. Przy $\Delta = 0$ $x_1 = x_3$ i $x_2 = x_4$.

5. Przy $\Delta < 0$ — niema pierwiastków.

Nierówności.

1. $A > B$, wówczas:
2. $A \pm a > B \pm a$.
3. $A > B$ stąd $A - B > o$.
4. jeżeli $a > o$ i $A > B$ to $aA > aB$ i $\frac{A}{a} > \frac{B}{a}$
5. jeżeli $a < o$ i $A > B$ to $aA > aB$ i $\frac{A}{a} < \frac{B}{a}$
6. jeżeli $A > B$ i $C > D$ to $A + C > B + D$.
7. jeżeli $A > B$ i $C < D$ to $A - C > B - D$.

Potęgi.

1. $a^1 = a;\ 1a = 1$
2. $(+a)^n = +a^n$
3. $(-a)^n = +a^n$, gdy n parzyst.
4. $(-a^n) = -a^n$, gdy n nieparzyst.
5. $(ab)^m = a^m\ b^m$
6. $(a:b)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$
7. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
8. $a^m : a^n = a^{m-n}$
9. $a^{n+1} : a^n = a;\ a^n : a^{n-1} = a$
10. $\frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$
11. $(a^m)^n = a^{mn}$.
12. $a^0 = 1;\ 3a^0 = 3;\ (3a)^0 = 1$
13. $a^{-1} = \frac{1}{a};\ a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
14. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
15. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
16. $a^2 - b^2 = (a+b)\ (a-b)$
17. $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab +$
$+ 2ac + 2bc$

18. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

19. $(a-b)^3 + a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

20. $a^3 + b^3 = (a+b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$

21. $a^3 - b^3 = (a-b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$

22. $(a+b)(a+c) = a^2 + (b+c)a + bc$

Liczby niewymierne (pierwiastniki).

1. $\sqrt[n]{a^n} = a$; $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

2. $\sqrt[n]{a^{mn}} = a^m$

3. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

4. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

5. $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$; $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

6. $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$

7. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

8. $\sqrt{a^2} = \pm a, \ \sqrt{(a+b)^2} = \pm(a+b)$

9. $\sqrt{a^3} = \pm a\sqrt{a}; \ \sqrt{(a+b)^3} =$
$= \pm (a+b)\sqrt{a+b}$

10. $(\sqrt{a}+\sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a}-\sqrt{b}) = a - b$

11. $\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm$
$\pm \sqrt{\dfrac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$

Wykładniki ułamkowe.

1. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

2. $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$

3. $a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$

4. $(ab)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}}$

5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} : b^{\frac{m}{n}} = \dfrac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}$

6. $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mp}{nq}}$.

7. $\sqrt[\frac{p}{q}]{a^{\frac{m}{n}}} = a^{\frac{m}{n} : \frac{p}{q}} = a^{\frac{mq}{np}}$.

Liczby urojone.

1. $\sqrt{-1} = i$.
2. $\sqrt{-a} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{a} = i\sqrt{a}$.
3. $i = \sqrt{-1}$; $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = +1$
4. $i^{4n} = +1$; $i^{4n+1} = +i$, $i^{4n+2} = -1$;
   $i^{4n+3} = -i$.
5. $\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = i^2\sqrt{ab} = -\sqrt{ab}$.
6. $(\sqrt{-a})^2 = -a$.
7. $\frac{1}{i} = \frac{i^4}{i} = i^3 = -i$.
8. $\frac{a}{\sqrt{-a}} = \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}}{i \cdot \sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{i} =$
   $= -i\sqrt{a} = \sqrt{-a}$.
9. $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-b}} = \frac{\sqrt{a}}{i\sqrt{b}} = -i\sqrt{\frac{a}{b}}$ (gdyż) $\frac{1}{i} = -i$.

10. $\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}=\frac{i\sqrt{a}}{i\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$.

11. $a \pm bi$ (liczba zespolona).

12. $(a+bi)(a-b_1)=a^2+b^2$

$r=+\sqrt{a^2+b^2}$ (moduł liczb zespolonych).

13. $a \pm bi = r\ (Cos\ \omega \pm i\ Sin\ \omega)$

Proporcje.

1. $a:b=c:d;\ c:a=d:a;$
$a:c=b:d;\ c:d=a:b;$
$b:a=d:c;\ d:b=c:a;$
$b:d=a:c;\ d:c=b:a.$

2. $a\,.\,d=b\,c.$

3. $a=\frac{bc}{d};\ d=\frac{bc}{a};\ b=\frac{ad}{c};\ c=\frac{ad}{b}.$

4. Pochodne.

$$\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d};\ \frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d};$$

$$\frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c};\ \frac{a-b}{a}=\frac{c-d}{c};$$

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d};\ \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d};$$

albo: $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}.$

5. $a : x = x : b$;
$x = \sqrt{ab}$ (średnia proporcjon. albo średnia geometryczna).

6. $2x = a + b$; $x = \frac{a+b}{2}$ średnia arytmetyczna).

Postęp arytmetyczny.

a_1 — wyraz pierwszy, a_n — ostatni, d — różnica postępu, n — liczba wyrazów, S_n — suma n wyrazów.

1. $a_n = a_1 + (n-1)\,d$
2. $a_1 = a_n - (n-1)\,d$
3. $S_n = \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n$

albo: $S_n = \left(a_1 + \frac{n-1}{2} d\right) n$

4. $ak = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}$

Postęp geometryczny.

a — wyraz pierwszy, a_n — ostatni, q — wykładnik postępu, n — liczba wyrazów, S_n — suma n wyrazów.

1. $a_n = a_1\, q^{n-1}$; $n = \dfrac{\log a_n - \log a}{\log q} + 1$.

2. $S_n = \dfrac{a_1 q^n - a_1}{q - 1}$ (dla p. wzrast.).

3. $S_n = \dfrac{a_1 - a_1 q^n}{1 - q}$ (dla p. malejąc.).

4. $\underset{n \to \infty}{S_n} = \dfrac{a}{1-q}$ (dla p. nieskończenie malejącego, gdy $[q] < 1$).

5. $a_k = \sqrt{a_{k-1} \cdot a_{k+1}}$

Suma niektórych szeregów.

1. $\dfrac{a}{a-x} = 1 + \dfrac{x}{a} + \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{x^3}{a^3} + \dots$

2. $\dfrac{a}{a+x} = 1 - \dfrac{x}{a} + \dfrac{x^3}{a^2} - \dfrac{x^3}{a^3} + \dots$

3. $\dfrac{1}{(x-a)^2} = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2a}{x^3} + \dfrac{3a^2}{x^4} + \dfrac{4a^3}{x^5} + \dots$

4. $\frac{1}{(x+a)^2}=\frac{1}{x^2}-\frac{2a}{x^3}+\frac{3a^2}{x^4}-\frac{4a^3}{x^5}+\ldots$

5. $\frac{n(n+1)(2n+1)}{1.2.3.}=1^2+2^2+3^2+\ldots+$
$+n^2.$

6. $\left[\frac{n(n+1)}{1.2}\right]^2=1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3$

7. $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}=1.2+2.3+3.4+\ldots$
$+n(n+1)$

8. $e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots$

9. $e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots=$
$=2{,}7182818\ldots$

10. $Sin\ x=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-\ldots$

11. $Cos\ x=1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}+$
$\frac{x^6}{1.2.3.4.5.6}+\ldots$

12. $\pi=4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots\right)=$
$=3{,}14159\ldots.$

Logarytmy.

1. $\lg ab = \lg a + \lg b.$

2. $\lg \frac{a}{b} = \lg a - \lg b.$

3. $\lg a^n = n \lg a.$

4. $\lg \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \lg a.$

5. $\lg_a a = 1;\ \lg_a 1 = 0;\ \lg_a 0 = -\infty$ gdzie $a > 1.$

6. $\lg_{10} 10 = 1;\ \lg_e 10 = \frac{\lg_{10} 10}{\lg_{10} e} =$

$= \frac{1}{0{,}43420} = 2{,}30259.$

7. $\lg_b N = \frac{1}{\lg_a b} \cdot \lg_a N.$

(gdzie $\frac{1}{\lg_a b}$ jest modulem log.).

Procenty składane.

1. na jaką sumę zamieni się po n latach kapitał a, oddany na pro-

cent składany po $p\%$ od sta $\left(\frac{p}{100}=r\right)$?

$$A=a(1+r)^n;$$

gdy $A=ma$; $m=(1+r)^n$.

Jeżeli kapitał procentuje przez $\left(n+\frac{k}{l}\right)$ lat, gdzie $\frac{k}{l}<1$, wówczas $A=$ $=a\left(1+r\right)^{n+\frac{k}{l}}$. Jeśli % dolicza się co g-tą część roku, wówczas

$$A=a\left(1+\frac{r}{g}\right)^{ng}.$$

2. Jakiemi spłatami terminowemi b, wnoszonemi przy końcu każdego roku, można przez n lat umorzyć pożyczkę B przy procencie składanym po $p^0/_0$ od sta?

$$B(1+r)^n=\frac{b}{r}\left[(1+r)^n-1\right].$$

3. Jaka się utworzy suma C, jeżeli na początku każdego roku przez

.n lat wnosi się do kasy c rubli przy procencie składanym po $p^0/_0$ od sta?

$$C = c\,\frac{1+r}{r}\left[(1+r)^n - 1\right]$$

Jeśli wnosi się przy końcu każdego roku, to $C = c\,\frac{[(1+r)^n - 1]}{r}$, przy wkładach zaś co pewien okres czasu (co m lat) po upływie q okresów

$$C = \frac{c\,(+r)^m\,[(1+r)\,q - 1]}{r}.$$

5. *Renta.* Jaką sumę D trzeba włożyć do banku, aby w końcu każdego z n lat otrzymać *rentę* d?

$$D = \frac{d\,[(1+r)^n - 1]}{r\,(1+r)^n}, \text{ gdzie } r = \frac{p}{100}$$

Ile trzeba włożyć (D), aby otrzymywać *wieczną rentę* d.

$$D = \frac{d}{r}.$$

Renta odroczona na $(m-1)$ lat:

a) płatna (d) przez n lat następnych:

$$D = \frac{d[(1+r)^n - 1]}{r(1+r)^{m+n-1}},$$

b) wieczna:

$$D = \frac{d}{r(1+r)^{m-1}}$$

Dyskonto weksli.

A waluta, a cena wekslu, q procent od 100 za czas przed terminem płatności.

I. Dyskonto matematyczne.

$$a = A - \frac{Aq}{100+q}$$

II. Dyskonto handlowe.

$$a = A - \frac{Aq}{100}$$

Kombinatoryka.

1. Rozmieszczenia (*Arrangements*):

$$A_m^n = m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots$$
$$\ldots(m-n+1).$$

2. Przestawienia (*Permutations*):
$P(m) = 1.2.3.4\ldots.(m-1)\,m = m!$

3. Liczba przestawień z n elementów, pomiędzy któremi jeden powtarza się α razy, drugi: β razy, trzeci: γ razy i t. d. $(\alpha+\beta+\gamma=n)$

$$\frac{P_{(n)}}{(\alpha,\beta,\gamma)} = \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}$$

(gdzie $n! = 1.2.3\ldots.n$).

4. Połączenia (*Combinaisons*):

$$C_m^n = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots.(m-n+1)}{1.2.3\ldots(n-1)\,n}$$

5. $C_m^n = C_m^{m-n}$; $C_m^n = C_{m-1}^n + C_{m-1}^{n-1}$

Dwumian Newtona.

1. $(X+a)^m = X^m + m\,a\,X^{m-1} +$

$$+\frac{m(m-1)}{1.2}a^2X^{m-2}+\ldots+a^m,$$

albo: $(X+a)^m = X^m + C_m^1\, a\, X^{m-1} +$

$$+ C_m^2 a^2 X^{m-2} + \ldots + a^m.$$

2. Wyraz ogólny. $T_{n+1} = C_m^n\, a^n\, X^{mn}$

3. $(X-a)^m = X^m - m\, a\, X^{m-1} +$

$$+\frac{m(m-1)}{1.2}a^2X^{m-2}-\ldots+(-1)^m a^m$$

Wyznaczniki.

Wyznacznik 2-go rzędu.

1) $\begin{vmatrix} A, & B \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix} = AB_1 - A_1B$

2) Własność wyznacznika:

$$\begin{vmatrix} A, & B \\ A_1, & B_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A, & A_1 \\ B, & B_1 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} A, & B \\ A_1, & B_1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} A_1, & B_1 \\ A; & B \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} B, & A \\ B_1, & A_1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} A, & B \\ A, & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A, & A \\ B, & B \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} A, & B \\ A_1, & B_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A \pm mB, & B \\ A_1 \pm mB_1, & B_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} A \pm mA_1, & B \pm mB_1 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix} =$$

$$= AB_1 - A_1B.$$

3) Jedno z zastosowań.

$$\begin{aligned} Ax + By + C &= 0 \\ A_1x + B_1y + C_1 &= 0 \end{aligned}$$

$$x = \frac{BC_1 - B_1C}{AB_1 - A_1B},$$

$$y = \frac{CA_1 - C_1A}{AB_1 - A_1B};$$

lub inaczej:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -C, & B \\ -C_1, & B_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A, & B \\ A_1, & B_1 \end{vmatrix}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} A, & -C \\ A_1, & -C_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A, & B \\ A_1, & B_1 \end{vmatrix}}$$

Wyznacznik 3-go rzędu:

$$\begin{vmatrix} A, & B, & C \\ A_1, & B_1, & C_1 \\ A_2, & B_2, & C_2 \end{vmatrix}$$

Przy rozwijaniu wyznacznika 3 rzędu należy każdy element obranego wiersza lub kolumny pomnożyć przez odpowiadający mu podwyznacznik (minor). Przytym, jeżeli element ten znajduje się w kolumnie i wierszu odpowiednio parzystych lub nieparzystych (np. I kol. i 3 wiersz lub II k. i 2 w.), to element ten należy wziąć ze znakiem niezmienionym, w przeciwnym razie ze znakiem odwrotnym.

$$\begin{vmatrix} +, & -, & + \\ -, & +, & - \\ +, & -, & + \end{vmatrix}$$

Rozwińmy wyznacznik według 3 wiersza:

$$\begin{vmatrix} A, B, C \\ A_1, B_1, C_1 \\ A_2, B_2, C_2 \end{vmatrix} = A_2 \begin{vmatrix} B, C \\ B_1, C_1 \end{vmatrix} - B_2 \begin{vmatrix} A, C \\ A_1, C_1 \end{vmatrix} +$$

$$+ C_2 \begin{vmatrix} A, B \\ A_1, B_1 \end{vmatrix} = A_2 (BC_1 - B_1 C) +$$
$$- B_2 (A_1 C - A_1 C) + C_2 (AB_1 +$$
$$- A_1 B) = \text{i t. d.}$$

Skrócony sposób obliczania wyznacznika 3-go rzędu:

Mając wyznacznik 3-go rzędu dopisujemy pod nim dwa jego pierwsze wiersze; mamy.

$$
\begin{array}{ccc}
A, & B, & C \\
A_1, & B_1, & C_1 \\
A_2, & B_2, & C_2 \\
A, & B, & C \\
A_1, & B_1, & C_1
\end{array}
$$

Wyznacznik ten równa się sumie 3-ch iloczynów wziętych według trzech całkowitych przekątnych od lewej ręki ku prawej, więcej suma trzech takich samych iloczynów branych od prawej ręki ku lewej, wziętych ze znakiem —, a więc

$$
W = AB_1 C_2 + A_1 B_2 C + A_2 BC_1 + \\
- CB_1 A_2 - C_1 B_2 A - C_2 BA_1
$$

Rachunek różniczkowy i całkowity.

I. Ciągi.

Zbiór uporządkowany liczb tworzy ciąg:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots \ldots a_n, \ldots \ldots$$

a jest granicą tego ciągu, jeżeli dla każdej liczby $\Sigma > o$ istnieje N takie, że dla $n > N$ mamy: $[a_n - a] < \Sigma$.

II. Ogólne wzory różniczkowania.

Pochodną y względem x, związanych zależnością $y = f(x)$, oznaczamy przez:

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f(x)$$

1. Pochodna sumy:
$d(x + y + z + \ldots .) = dx +$
$+ dy + dz + \ldots .$
2. $d(C) = o$ — pochodna stałej jest zerem.

3. $d(x+c) = dx$

4. $d(Cx) = C \cdot dx$

5. $d(xy) = x \cdot dy + y \cdot dx$

6. $d(x^m) = m \cdot x^{m-1}\, dx$

7. $d(xyz \ldots\ldots) = \left(\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \right.$

$\left. + \frac{dz}{z} + \ldots\right) xyz \ldots\ldots$

8. $d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y \cdot dx - x \cdot dy}{y^2}$

9. Jeżeli $y = f(z)$, $z = \varphi(x)$

to $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}$

10. Jeżeli $y = f(x)$

to $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{f^1(x)}$

III. Ogólne wzory całkowania.

1. $\int (x\,dx + y\,dy + z\,dz + \ldots) =$
$= \int x\,dx + \int y\,dy + \int z\,dz + \ldots$

2. $\int C f(x)\, dx = C \int f(x)\, dx.$

3. $\int u \frac{dv}{dx}\, dx = uv - \int v \frac{du}{dx}\, dx.$

4. $\int f(x)\, dx = \int f[\varphi(t)]\, \varphi'(t)\, dt$

gdzie $x = \varphi(t)$.

5. $\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ gdy $n \neq -1$.

np. $\int x^3\, dx = \frac{x^4}{4}$; $\int 2x\, dx =$

$= 2 \int x\, dx = 2 \cdot \frac{x^2}{2} = x^2$; gdy $n = -1$

$\int x^{-1}\, dx = \int \frac{1}{x}\, dx =$ log. nat. x.

6. Całkowanie pomiędzy granicami, gdy zmienna przybiera wartości od a do b $(a < b)$:

Jeżeli $\int f(x)\, dx = F(x) + C$,

to $\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$.

np. $\int\limits_a^b A\,x^n\,dx = A\,\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_a^b =$

$$= \frac{A}{n+1}\,b^{n+1} - \frac{A}{n+1}\,a^{n+1} =$$

$$= \frac{A}{n+1}\,[b^{n+1} - a^{n+1}]$$

Jeżeli $a > b$ to:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx.$$

IV. Różniczki i całki częściej używane.

1) $dx^{n+1} = (n+1)\,x^n\,dx;$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

2) $d\log x = \frac{\log e}{x}\,dx;$

$$\int \frac{\log e}{x}\,dx = \log x + C.$$

3) $da^x = \frac{\log a}{\log e}\,a^x\,dx;$

$$\int a^x\,dx = \frac{\log e}{\log a}\,a^x + C.$$

4) $d \sin x = \cos x\,dx;$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C.$$

5) $d \cos x = -\sin x\,dx;$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$$

6) $d\,tg\,x = \dfrac{dx}{\cos^2 x};$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tang\,x + C.$$

7) $d cotg\,x = \dfrac{-dx}{\sin^2 x};$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\,cotg\,x + C;$$

Dla $x < \dfrac{\pi}{2}$.

8) $d\,arc\sin x = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arc\ sin\ x + C.$$

9) $d arc\ cos\ x = \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}};$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -arc\ cos\ x + C.$$

10) $d arc\ tg\ x = \frac{dx}{1+x^2};$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = arc\ tg\ x + C.$$

11) $d arc\ cotg\ x = \frac{-dx}{1+x^2};$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = -arctg\ x + C.$$

W powyższych wzorach C oznacza wielkość stałą.

V. Maxima i minima.

Dla dwóch zmiennych y i x, związanych ze sobą zależnością $y = f(x)$

maximum lub minimum y będzie przy x czyniącym zadość równaniu:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = 0;$$

y posiada maximum jeżeli przy danej wartości x mamy:

$$f''(x) < 0,$$

y posiada minimum, jeżeli

$$f''(x) > 0.$$

VI. Zastosowania geometryczne.

1) Miara pola ograniczonego przez krzywą $y = f(x)$ $[f(x) > 0]$, oś x-ów i rzędzie w punktach a i b $(a < b)$ jest

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

2) Długość łuku krzywej $y = f(x)$ zawartego pomiędzy rzędnemi w punktach a i b $(b < a)$ mierzy się całką

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

3) Promień krzywizny krzywej $y = f(x)$

$$\varsigma = \frac{1}{y''} (1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}.$$

GEOMETRJA.

Planimetrja.

a, b, c boki, h wysokość, R promień koła opisanego.

1. Pole równoległoboku $= a \,.\, h$.
2. „ prostokąta $= a \,.\, b$.
3. „ kwadratu $= a^2$.
4. „ trójkąta $= \frac{ah}{2} = \frac{abc}{4R}$.
5. albo pole trójkąta $=$
   $= \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$,
   gdzie $2p = a + b + c$.
6. Pole trapezu $= \frac{a+b}{2}h$, albo$= l \,.\, h$,
   gdzie linja środkowa $l = \frac{a+b}{2}$

Pole ukośnika *(rombu)* $= \frac{l\,.\,m}{2}$,
gdzie l i m są przekątnemi.

8. Obwód koła $= 2\pi R$ $(\pi = 3{,}14159)$.

9. Pole koła $= \pi R^2$.

10. Długość łuku, mającego n^0 stopni $= \frac{\pi R . n}{180}$.

11. Pole wycinka kołowego o n^0 stopniach $= \frac{\pi R n}{180} \frac{R}{2} = \frac{\pi R^2 n}{360}$.

12. Pole odcinka = polu wycinka mniej pole trójkąta.

13. Bok wielokąta foremnego wpisanego o podwojonej liczbie boków

$$a_{2n} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a^2_n}{4}}}$$

albo:

$$a_{2n} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - a^2_n}}$$

14. Wzór odwrotny:

$$a_n = \frac{a_{2n}}{R}\sqrt{4R^2 - a^2_{2n}}$$

15. Bok wielokąta foremnego opisanego na kole (mającego jednakową liczbę boków z wielok. wpisanym):

$$b_n = \frac{a_n \cdot R}{\sqrt{R^2 - \frac{a^2_n}{4}}}$$

16. Wzór odwrotny:

$$a_n = \frac{b_n \cdot R}{\sqrt{R^2 + \frac{b^2_n}{4}}}$$

17. Boki niektórych figur foremnych wpisanych: a_n i opisanych: b_n:

$$a_3 = R\sqrt{3} \qquad b_3 = 2R\sqrt{3}$$

$$a_4 = R\sqrt{2} \qquad b_4 = 2R$$

$$a_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \qquad b_5 = 2R\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$$

$$a_6 = R \qquad b_6 = \frac{2}{3}R\sqrt{3}$$

$$a_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}} \qquad b_8 = 2R(\sqrt{2}-1)$$

$$a_{10} = \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1) \quad b_{10} = 2R\sqrt{1-\sqrt{0{,}8}}$$

$$a_{12} = R\sqrt{2-\sqrt{3}} \qquad b_{12} = 2R(2-\sqrt{3})$$

18. Zależności pomiędzy bokami trójkąta prostokątnego o kącie ostrym α, przyprostokątnej przyległej b, przeciwległej a i przeciwprostokątnej c:

$$\alpha = 15^0;\ a = \frac{c}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}};\ b = \frac{c}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

$$\alpha = 30^0;\ a = \frac{c}{2};\ b = \frac{c}{2}\sqrt{3}$$

$$\alpha = 45;\quad a = \frac{c\sqrt{2}}{2};\quad b = \frac{c\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha = 60^0;\quad a = \frac{c}{2}\sqrt{3};\quad b = \frac{c}{2}$$

$$\alpha = 75^0;\ a = \frac{c}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}};\ b = \frac{c}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

Stereometrja.

1. Sześcian.

a krawędź sześcianu; B pole podstawy, M powierzchnia boczna, S powierzchnia całkowita, V objętość.

1. $B = a^2$; $M = 4a^2$.
2. $S = 6a^2$.
3. $V = a^3$.

2. Prostopadłościan.

a, b krawędzie przy podstawie, c wysokość.

1. $B = a \cdot b$ $M = 2\ (a + b) \cdot c$
2. $S = 2(a+b).c + 2ab = 2[ab + ac + bc]$
3. $V = a \cdot b \cdot c$.

3. Graniastosłup (pryzmat).

P obwód podstawy, h wysokość; P_1 obwód przecięcia prostopadłego; l krawędź boczna; B pole podstawy. M powierzchnia boczna, S powierzchnia całkowita; V objętość:

1. $M = P.h$, a gdy pochyły $M = P_1 . l$.

2. $S = P.h + 2B$.

3. $V = B.h$.

4. Objętość graniastosłupa trójkątnego ściętego nierównolegle:

$$V = \frac{B}{3}(h_1 + h_2 + h_3).$$

4. *Ostrosłup (piramida).*

P obwód podstawy, l apotema ściany bocznej, h wysokość, B pole podstawy, M powierzchnia boczna, S całkowita, V objętość.

1. $M = \frac{P.l.}{2}$.

2. $S = M + B$.

3. Jeżeli ostrosłup foremny, to $B = \frac{P.r}{2}$ (gdzie r apotema podstawy); $S = \frac{P}{2}(l + r)$.

4. $V = \frac{B \, . \, h}{3}$.

5. *Ostrosłup ścięty równolegle do podstawy. P i p odwody podstaw dolnej i górnej, B i b ich pola, l — apotema ściętego ostrosłupa, h wysokość:

$$M = \frac{P + p}{2} l; \quad S = M + B + b;$$

$$V = \frac{h}{3} (B + b + \sqrt{B \, . \, b}).$$

5. *Walec (prosty).*

R promień podstawy, h wysokość; πR^2 pole podstawy, M powierzchnia boczna; S—całkowita, V objętość:

1. $M = 2\pi R h.$
2. $S = 2\pi R (R + h).$
3. $V = \pi R^2 \, . \, h.$

6. *Stożek (prosty).*

R promień podstawy: l tworząca, h wysokość stożka; M powierzchnia boczna, S — całkowita, V objętość.

1. $M = \pi R l$.
2. $S = \pi R\,(R + l)$.
3. $V = \frac{\pi R^2 \cdot h}{3}$; $(h = \sqrt{l^2 - R^2})$.

7. *Stożek ścięty równolegle.*

R promień podstawy dolnej; r — górnej, l tworząca, h wysokość; R_1 promień przecięcia środkowego.

1. $M = \pi \cdot (R + r)\, l$.
2. $S = \pi R \cdot (l + R) + \pi r\,(l + r)$.

albo $M = 2\pi R_1 l$, $\left(\text{gdzie } R_1 = \frac{R + r}{2}\right)$.

3. $V = \frac{\pi h}{3}\,(R^2 + r^2 + Rr)$.

8. *Kula.*

R promień kuli.

1. $S = 4\pi R^2$.
2. $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

9. *Wycinek kulisty.*

R promień kuli, r promień podstawy odcinka, h wysokość odcinka M, powierzchnia kulista, S powierzchnia całkowita, V objętość.

1. $M = 2\pi Rh$.
2. $S = \pi R(r + 2h)$.
3. $V = \frac{M \cdot R}{3} = \frac{2\pi R^2 h}{3}$.

10. *Odcinek kulisty.*

Oznaczenia powyższe.

1. $M = 2\pi R \cdot h$.
2. $S = M + \pi r^2$.
3. $V = \frac{\pi h^2}{3}(3R - h)$

albo: $V = \frac{1}{2}\pi h r^2 + \frac{1}{6}\pi h^3$.

11. *Warstwa (pas) kulista.*

R promień kuli, r i r_1 promienie podstaw warstwy, h wysokość (grubość) warstwy, M powierzchnia boczna, S—całkowita, V objętość.

1. $M = 2\pi Rh.$
2. $S = M + \pi(r^2 + r_1^2).$
3. $V = \frac{\pi h}{6}(3r^2 + 3r_1^2 + h^2)$

albo: $V = \frac{\pi r^2 + \pi r_1^2}{2} \cdot h + \frac{\pi h^3}{6}.$

12. *Wielościany foremne.*

a krawędź wielościanu, R promień kuli opisanej, r — wpisanej do wielościanu.

1. *Czworościan (Tetraedr).*

$$R = \frac{a}{4}\sqrt{6};\; r = \frac{a}{12}\sqrt{6}\;\; S = a^2\sqrt{3};$$

$$V = \frac{a^3}{12}\sqrt{2}.$$

2. Sześcian (Eksaedr).

$$R = \frac{a}{2}\sqrt{2};\; r = \frac{a}{2};\; S = 6a^2;\; V = a^3.$$

3. Ośmiościan (Oktaedr).

$$R = \frac{a}{2}\sqrt{2};\; r = \frac{a}{6}\sqrt{6};$$

$$S = 2a^2\sqrt{3};\; V = \frac{a^3}{3}\sqrt{2}.$$

4. Dwunastościan (Ikosaedr).

$$R = \frac{a}{4}\sqrt{2(5+\sqrt{5})};\; r = \frac{a(3+\sqrt{5})}{4\sqrt{3}};$$

$$S = 5a^2\sqrt{3};\; V = \frac{5}{12}a^3(3+\sqrt{5}).$$

5. Dwunastościan (Dodekaedr).

$$R = \frac{a}{4}(\sqrt{3}+\sqrt{15});$$

$$r = \frac{a}{4}\sqrt{\frac{50 + 22\sqrt{5}}{5}}$$

$$S = 3a^2\sqrt{5(5 + 2\sqrt{5})};$$

$$V = \frac{a^3}{4}(15 + 7\sqrt{5}).$$

TRYGONOMETRJA.

Kąty mierzymy:

1) stopniami, 2) radjanami. Radjan jest to kąt, którego łuk środkowy posiada długość równą promieniowi.

Zadanie 1. Ile stopni jest w łuku równym promieniowi R?

$$2\pi R - 360^0$$
$$R - m^0$$

$$m^0 = \frac{180^0}{\pi} = 57^0 17' 45''.$$

Radjan odpowiada $57^0 17' 45''$.

Zadanie 2. Ile radjanów ma kąt α^0?

$$x = \frac{\pi\alpha}{180^0} = \pi\left(\frac{\alpha}{180^0}\right)$$

Funkcje goniometryczne.

I. Znaki w czterech kwadratach:

	Sin.	Cos.	Tg.	Ctg.
I	+	+	+	+
II	+	—	—	—
III	—	—	+	+
IV	—	+	—	—

II. Wartości funkcji przy:

	0^0	15^0	30^0	45^0	60^0	75^0	90^0	180^0	270^0	360^0
Sin.	0	$\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$	1	0	-1	0
Cos.	1	$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$	0	-1	0	1
Tg.	0	$2-\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	0
Ctg.	$\pm\infty$	$2+\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$

III. Funkcje kąta (łuku) ujemnego.

$Sin\,(-\alpha) = -Sin\,\alpha;\ tg\,(-\alpha) = -tg\,\alpha.$
$Cos\,(-\alpha) - Cos\,\alpha;\ Ctg\,(-\alpha) = -Cgt\,\alpha.$

IV. Funkcje kąta dopełniającego.

$Sin\,(90-\alpha) = Cos\,\alpha;\ tg\,(90-\alpha) - Ctg\,\alpha.$
$Cos\,(90-\alpha) = Sin\,\alpha;\ Ctg\,(90-\alpha) = tg\,\alpha.$

V. Prawo redukcji. Jeżeli jakikolwiek łuk jest przedstawiony pod postacią parzystej liczby ćwiartek (t. j. 2 lub 4 razy po 90°) $\pm\,\alpha$, to funkcja goniometryczna tego łuku = wziętej z odpowiednim znakiem *takiej samej* funkcji łuku α; jeżeli zaś łuk jest dany pod postacią nieparzystej liczby ćwiartek (to jest 1 lub 3 razy po 90°) $\pm\,\beta$, to goniometryczna funkcja tego łuku = wziętej z odpowiednim znakiem takiej funkcji łuku β, której nazwa różni się od nazwy danej funkcji przyrostkiem *co*.

$$\sin(180^\circ \pm \alpha) = \mp \sin\alpha$$
$$\cos(180^\circ \pm \alpha) = -\cos\alpha$$
$$tg(180^\circ \pm \alpha) = \pm tg\,\alpha$$
$$cotg(180^\circ \pm \alpha) = \pm cotg\,\alpha$$
$$\sec(180^\circ \pm \alpha) = -\sec\alpha$$
$$cosec(180^\circ \pm \alpha) = \mp cosec\,\alpha$$

$$\sin(90^\circ + \beta) = \cos\beta$$
$$\cos(90^\circ + \beta) = -\sin\beta$$
$$tg(90^\circ + \beta) = -cotg\,\beta$$
$$cotg(90^\circ + \beta) = -tg\,\beta$$
$$\sec(90^\circ + \beta) = -cosec\,\beta$$
$$cosec(90^\circ + \beta) = \sec\beta$$

$$\sin(270^\circ \pm \beta) = -\cos\beta$$
$$\cos(270^\circ \pm \beta) = \pm \sin\beta$$
$$tg(270^\circ \pm \beta) = \mp cotg\,\beta$$
$$cotg(270^\circ \pm \beta) = \mp tg\,\beta$$
$$\sec(270^\circ \pm \beta) = \pm cosec\,\beta$$
$$cosec(270^\circ \pm \beta) = -\sec\beta$$

$$\sin(360^\circ - \alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(360^\circ - \alpha) = +\cos\alpha$$
$$tg(360^\circ - \alpha) = -tg\,\alpha$$

$$\operatorname{cotg}(360^0 - \alpha) = -\operatorname{cotg}\alpha$$
$$\sec(360^0 - \alpha) = +\sec\alpha$$
$$\operatorname{cosec}(360^0 - \alpha) = -\operatorname{cosec}\alpha$$

Ogólne wzory redukcyjne.

1) $\sin[k \,.\, 180^0 + (-1)^k\alpha] = \sin\alpha;$
2) $\cos(k \,.\, 360^0 \pm \alpha) = \cos\alpha;$
3) $\operatorname{tg}(k \,.\, 180^0 + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha;$

naprzykład:

$$\sin 3000^0 = \sin[16 \,.\, 180 + (-1)^{16} 120^0] =$$
$$= \sin(16 \,.\, 180^0 + 120^0) = \sin 120^0 =$$
$$= \sin(180^0 - 120^0) = \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

lub:

$$\sin 3000^0 = \sin[17 \,.\, 180 + (-1)^{17}(\quad 60^0)] =$$
$$= \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos 3000^0 = \cos(8 \,.\, 360^0 + 120^0) =$$
$$= \cos 120^0 = \cos(90^0 + 30^0) =$$
$$= -\sin 30^0 = -{}^1/_2.$$

$$tg\, 3000^\circ = tg\,(16 \,.\, 180 + 120^\circ) =$$
$$= tg\, 120^\circ = -\,tg\, 60^\circ = -\sqrt{3};$$

lub:

$$tg\, 3000^\circ = tg\,[17 \,.\, 180 + (-\,60^\circ)] =$$
$$= tg\,(-\,60^\circ) = -\,tg\, 60^\circ = -\sqrt{3}.$$

VI. Zależność pomiędzy funkcjami jednego i tego samego kąta: a i b przyprostokątne, c przeciwprostokotna, α kąt przeciwległy a, β kąt przeciwległy b.

1. $Sin\, \alpha = \frac{a}{c}$; $Cos\, \alpha = \frac{b}{c}$; $tg\, \alpha = \frac{a}{b}$;

$$Ctg\, \alpha = \frac{b}{a};\; Sec\, \alpha = \frac{c}{b};\; Cosec\, \alpha = \frac{c}{a}.$$

2. $Sec\, \alpha = \frac{1}{Cos\, \alpha}$; $Sec\, \alpha \,.\, Cos\, \alpha = 1$;

$$Cosec\, \alpha = \frac{1}{Sin\, \alpha};\; Cosec\, \alpha \,.\, Sin\, \alpha = 1.$$

3. $Sin^2\, \alpha + Cos^2\, \alpha = 1$;

$$Sin\, \alpha = \sqrt{1 - Cos^2\, \alpha};\; Cos\, \alpha = \sqrt{1 - Sin^2\, \alpha}.$$

4. $Sec^2\,\alpha - tg^2\,\alpha = 1$;

5. $cosec^2\,\alpha - ctg^2 = 1$;

6. $\frac{Sin\,\alpha}{Cos\,\alpha} = tg\,\alpha$; $\frac{Cos\,\alpha}{Sin\,\alpha} = Ctg\,\alpha$; $tg\,\alpha = \frac{1}{Ctg\,\alpha}$; $Ctg\,\alpha = \frac{1}{tg\,\alpha}$; $tg\,\alpha.\ Ctg\,\alpha = 1$.

VII. Funkcje sumy i różnicy dwóch kątów.

1. $Sin\,(\alpha+\beta) = Sin\,\alpha\ Cos\,\beta + Cos\,\alpha\ Sin\,\beta$
2. $Cos\,(\alpha+\beta) = Cos\,\alpha\ Cos\,\beta - Sin\,\alpha\ Sin\,\beta$
3. $Sin\,(\alpha-\beta) = Sin\,\alpha\ Cos\,\beta - Sin\,\alpha\ Sin\,\beta$
4. $Cos\,(\alpha-\beta) = Cos\,\alpha\ Cos\,\beta + Sin\,\alpha\ Sin\,\beta$
5. $tg\ (\alpha+\beta) = \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha\,.\,tg\,\beta}$
6. $tg\ (\alpha-\beta) = \frac{tg\,\alpha - tg\,\beta}{1 + tg\,\alpha\,.\,tg\,\beta}$
7. $Ctg\ (\alpha+\beta) = \frac{Ctg\,\alpha\,.\,Ctg\,\beta - 1}{Ctg\,\alpha + Ctg\,\beta}$
8. $Ctg\ (\alpha+\beta) = \frac{Ctg\,\alpha\ Ctg\,\beta + 1}{Ctg\,\beta - Ctg\,\alpha}$

$\sin 3\alpha = 3\cos^2\alpha \sin\alpha -$
$\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

VIII. Funkcje kąta podwojonego

$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha -$

1. $Sin\, 2\alpha = 2\, Sin\, \alpha\; Cos\, \alpha.$
2. $Cos\, 2\alpha = Cos^2\, \alpha - Sin^2\, \alpha.$
3. $tg\, 2\alpha = \frac{2\, tg\, \alpha}{1 - tg^2\, \alpha}.$
4. $Ctg\, 2\alpha = \frac{Ctg^2\, \alpha - 1}{2\, Ctg\, \alpha}.$

XI. Funkcje połowy kąta.

1. $Sin\, \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - Cos\, \alpha}{2}}$
2. $Cos\, \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + Cos\, \alpha}{2}}$
3. $tg\, \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - Cos\, \alpha}{1 + Cos\, \alpha}}$
4. $Ctg\, \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + Cos\, \alpha}{1 - Cos\, \alpha}}$

X. Suma i różnica dwóch funkcyj

(Wzory logarytmiczne).

1. $Sin\,p + Sin\,q = 2 Sin\frac{p+q}{2}\,Cos\frac{p-q}{2}$

2. $Sin\,p - Sin\,q = 2 Cos\frac{p+q}{2}\,Sin\frac{p-q}{2}$

3. $Sin^2 p - Sin^2 q =$

$$= Sin\,(p+q)\,.\,Sin\,(p-q)$$

4. $Cos\,p + Cos\,q = 2 Cos\frac{p+q}{2}\,Cos\frac{p-q}{2}$

5. $Cos\,p - Cos\,q = -2 Sin\frac{p+q}{2}\,Sin\frac{p-q}{2}$

albo $= 2 Sin\frac{p+q}{2}\,Sin\frac{q-p}{2}$

6. $Cos^2 p - Cos^2 q =$

$$= Sin\,(q+p)\,Sin\,(q-p)$$

7. $\dfrac{Sin\,p + Sin\,q}{Sin\,p - Sin\,q} = \dfrac{tg\frac{p+q}{2}}{tg\frac{p-q}{2}}$

8. $\dfrac{\operatorname{Cos} p + \operatorname{Cos} q}{\operatorname{Cos} p - \operatorname{Cos} q} = \operatorname{Ctg} \dfrac{p+q}{2} \operatorname{Ctg} \dfrac{p-q}{2}$

9. $tg\,\alpha + tg\,\beta = \dfrac{\operatorname{Sin}(\alpha+\beta)}{\operatorname{Cos}\alpha \ \operatorname{Cos}\beta}$

10. $tg^2\alpha - tg^2\beta = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)}{\cos^2\alpha\,.\,\cos^2\beta}$

11. $1 + tg\,\alpha = tg\,45^0 + tg\,\alpha = \dfrac{\sin(45^0+\alpha)}{\cos 45^0 . \cos\alpha}$

12. $3 - tg^2\alpha = tg^2\,60^0 - tg^2\alpha =$

$$= \frac{\sin(60^0+\alpha)\ \sin(60^0-\alpha)}{\cos^2 60^0\ \cos^2\alpha}$$

13. $\operatorname{Ctg}\alpha \pm \operatorname{Ctg}\beta = \dfrac{\operatorname{Sin}(\beta\pm\alpha)}{\operatorname{Sin}\alpha\ \operatorname{Sin}\beta}$

14. $\operatorname{Sin}\alpha + \operatorname{Cos}\alpha = \sqrt{2}\ \operatorname{Sin}(\alpha + 45^0) =$

$$= \sqrt{2}\cos(45^0 - \alpha)$$

15. $1 + 2\operatorname{Sin}\alpha = 2(\operatorname{Sin} 30^0 + \operatorname{Sin}\alpha) =$

$$= 4\sin\left(15^0 + \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(15^0 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

Jeżeli $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$, to

16. $Sin\,\alpha + Sin\,\beta + Sin\,\gamma =$

$$= 4 Cos\frac{\alpha}{2}\;Cos\frac{\beta}{2}\;Cos\frac{\gamma}{2}$$

17. $tg\,\alpha + tg\,\beta + tg\,\gamma = tg\,\alpha \,.\, tg\,\beta \,.\, tg\,\gamma$

XI. Suma i różnica jedności i sinusa lub cosinusa kąta α:

1. $1 + Cos\,\alpha = 2 Cos^2\frac{\alpha}{2}$;

2. $1 - Cos\,\alpha = 2 Sin^2\frac{\alpha}{2}$;

3. $1 + Sin\,\alpha = 2 Cos^2\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right)$;

4. $1 - Sin\,\alpha = 2 Sin^2\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right)$.

XII. Wzory Simpsona.

1. $Sin\,(n+1)\,\beta = 2 Sin\,n\beta\; Cos\,\beta +$

$-\,Sin\,(n-1)\,\beta.$

2. $Cos\,(n+1)\,\beta = 2\,Cos\,n\beta\;Cos\,\beta +$
$-\,Cos\,(n-1)\,\beta.$

XIII. Zamiana nielogarytmujących się wyrażeń typu $A \pm B$ (gdzie A i B są wielkościami dodatniemi) na wyrażenie dogodne do logarytmowania.

1. $A + B = A\left(1 + \frac{B}{A}\right) = B\,(1 + tg^2\,\varphi) =$

$$= A\,sec^2\,\varphi = \frac{A}{cos^2\,\varphi}.$$

2. $A - B = A\left(1 - \frac{B}{A}\right) = A\,(1 - tg^2\,\varphi) =$

$$= \frac{A\,cos\,2\varphi}{cos^2\,\varphi}$$

lub:

$$A - B = A\left(1 - \frac{B}{A}\right) = A\,(1 - cos^2\varphi) = A\,sin^2\varphi$$

gdyż $\frac{B}{A} < 1.$

XIV. *Zależność pomiędzy bokami a kątami trójkąta* wogóle: a, b, c — boki trojkąta; α, β, γ — kąty odpowiadające tym bokom; h_A, h_B, h_C, — wysokości odpowiadające wierzchołkom A, B, C; m_A, m_B, m_C, — środkowe poprowadzone z wierzchołków A, B, C; l_A, l_B, l_C — dwusieczne odpowiednich boków; $2p = a + b + c$; R — promień koła opisanego; r — promień koła wpisanego; S — pole.

A. Trójkąt prostokątny.

c—przeciwprostokątna, $\sphericalangle C = 90°$; h — wysokość z C.

1. $\alpha + \beta = 90°$, więc $\sin\alpha = \cos\beta$, $\cos\alpha = \sin\beta$, $tg\,\alpha = cotg\,\beta$, $ctg\,\alpha = tg\,\beta$ $\sin 2\alpha = \sin 2\beta$.

2. $a = c \cdot \sin\alpha$; $b = c \cdot \sin\beta$, $a = c \cdot \cos\beta$; $b = c \cdot \cos\alpha$.

3. $a = b\ tg\,\alpha = b\ cotg\,\beta,$

$b = a\,.\,tg\,\beta = a\,.\,cotg\,\alpha.$

4. $S = \frac{ab}{2} = \frac{ch}{2} = R\,.\,p;$

$$R = \frac{c}{2};\ r = \frac{S}{p} = \frac{ab}{a+b+c};$$

$$r = (p-a)\,tg\frac{\alpha}{2};\ r = (p-b)\,tg\frac{\beta}{2};$$

$$r = p - c = \frac{a+b-c}{2};$$

$$h = a\ sin\,\beta = \frac{c}{2}\,sin\,2\beta = \frac{c}{2}\,sin\,2\alpha.$$

5. $a + b = c\sqrt{2}\,cos\,\frac{\alpha-\beta}{2} =$

$$= c\sqrt{2}\,cos\,(\alpha - 45^0).$$

6. $a - b = c\sqrt{2}\,sin\,\frac{\alpha-\beta}{2} =$

$$= c\sqrt{\ }\,sin\,(\alpha - 45^0).$$

7. $2p = a + b + c = c\sqrt{8}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}$;

8. Jeżeli na przedłużeniu przeciwprostokątnej odłożymy do punktu A odcinek $= b$ i od punktu B odcinek $= a$ i połączymy końce tych odcinków z wierzchołkiem C, to otrzymamy trójkąt o podstawie $= 2p$, kątach przyległych $\frac{\alpha}{2}$ i $\frac{\beta}{2}$ i wysokości $= h$.

$$2p = h\left(\cot g\frac{\beta}{2} + \cot g\frac{\alpha}{2}\right),$$

$$2p = \frac{h \,.\, \sin 45^0}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}$$

skąd

$$h = p\sqrt{8} \,.\, \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}.$$

B. *Trójkąt ukośnokątny.*

1. Bok trójkąta równa się iloczynowi średnicy koła opisanego przez sinus kąta przeciwległego:

$$\text{np. } a = 2R \sin \alpha.$$

2. Ponieważ $a = 2R \sin \alpha$, $b = 2R \sin \beta$ i $c = 2R \sin \gamma$

więc

$$2R = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = const.$$

3. $a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma.$

4. $$\frac{a+b}{\ } = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}$$

$$\frac{a-b}{c} = \frac{Sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{Sin\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}$$

Są to wzory Mollweidego

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{tg\,\frac{\alpha+\beta}{2}}{tg\,\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

Wzór tangensów.

$$\frac{a^2-b^2}{c^2}=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\gamma}$$

5. $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$ (Carnot).

7. $h_A=b\,\sin\gamma=c\,\sin\beta$
$h_B=c\,\sin\alpha=a\,\sin\gamma$
$h_C=a\,\sin\beta=b\,\sin\alpha.$

7. $S=\frac{1}{2}bc\,.\,\sin\alpha;$

$$S=\frac{a^2\,\sin\beta\,.\,\sin\gamma}{2\,\sin\alpha};$$

$$S=pr.$$

8. $R=\frac{ac}{2h_B}=\frac{acb}{2bh_B}=\frac{acb}{4S}=$

$$=\frac{acb}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

9. Oznaczmy odcinki boków, licząc od wierzchołków trójkąta A, B, C do punktów styczności koła wpisanego, odpowiednio przez x, y, z. Środek koła wpisanego leży na przecięciu dwusiecznych kątów trójkąta.

$$x + y + z = p;$$

$$x = p - a; \quad y = p - b; \quad z = p - c;$$

$$tg\,\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{x} = \frac{r}{p-a};$$

$$tg\,\frac{\beta}{2} = \frac{r}{p-b}; \quad tg\,\frac{\gamma}{2} = \frac{r}{p-c}$$

lub

$$x = r\,cotg\,\frac{\alpha}{2}; \quad p - a = r\,cotg\,\frac{\alpha}{2}$$

$$S = rp;$$

$$r = \frac{S}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}};$$

$$tg\,\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{p-a} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}};$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}};$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

$\left(\text{takież wzory dla } \frac{\beta}{2} \text{ i } \frac{\gamma}{2}\right)$

10. $$tg\frac{\alpha}{2}\,tg\frac{\beta}{2}=\frac{p-c}{p}=\frac{(a+b)-c}{(a+b)+c}$$

$$tg\frac{\alpha}{2}:tg\frac{\beta}{2}=(p-b):(p-a)=$$

$$=\frac{c+(a-b)}{c-(a-b)}.$$

11. $$2p=2R(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma);$$

$$p=4R\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2};$$

$$S=\frac{1}{2}bc\sin\alpha=2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

12. $p=x+y+z=$

$$= r\left(cotg\frac{\alpha}{2}+cotg\frac{\beta}{2}+cotg\frac{\gamma}{2}\right)=$$

$$= r\,.\,cotg\frac{\alpha}{2}\,cotg\frac{\beta}{2}\,cotg\frac{\gamma}{2};$$

$$r = p\;tg\frac{\alpha}{2}\,tg\frac{\beta}{2}\,tg\frac{\gamma}{2};$$

$$S = r\,p = r^2\,cotg\frac{\alpha}{2}\,cotg\frac{\beta}{2}\,cotg\frac{\gamma}{2};$$

$$S = p^2\,.\,tg\frac{\alpha}{2}\,tg\frac{\beta}{2}\,tg\frac{\gamma}{2}.$$

13. Z równania:

$$S = 2R^2\sin\alpha\,\sin\beta\,\sin\gamma =$$

$$= r^2\,cotg\frac{\alpha}{2}\,cotg\frac{\beta}{2}\,cotg\frac{\gamma}{2};$$

znajdziemy

$$r = 3R\,\sin\frac{\alpha}{2}\,\sin\frac{\alpha}{2}\,\sin\frac{\gamma}{2}.$$

14. $a = r\,.\,cotg\frac{\beta}{2} + r\,cot\frac{\gamma}{2} =$

$$= \frac{r \cdot \cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}.$$

15. $l_B = BD$ jest dwusieczną kąta B; pole trójkąta ABC = sumie pól trójkątów ABD i BDC:

$$c \cdot a \cdot \sin\beta = cl_B \sin\frac{\beta}{2} + al_B \sin\frac{\beta}{2};$$

$$l_b = \frac{2c \cdot a \cdot \cos\frac{\beta}{2}}{c + a} = \frac{h_B}{\cos\frac{\alpha - \gamma}{2}}.$$

16. Powierzchnia jakiegokolwiek czworokąta mierzy się połową iloczynu z przekątnych przez sinus kąta między niemi zawartego.

XV. Funcje odwrotne:

Jeżeli $u = Sin\,\alpha$; $v = tg\,\alpha$

$m = Cos\,\alpha$; $n = Ctg\,\alpha$

to: $\alpha = arc\ Sin\ u$

$\alpha = arc\ tg\ v$

$\alpha = arc\ Cos\ m$

$\alpha = arc\ Ctg\ n$

Naprzykład

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = Sin\ 60^0;\ 60^0 = arc\ Sin\ \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sqrt{3} = tg\ 60^0;\ 60^0 = arc\ tg\ \sqrt{3}$$ i t. d.

Geometrja analityczna

A. Geometrja płaska.

1. Odległość między punktami:

$A(x_1 y_1)$ i $B(x_2 y_2)$:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) \cos \varphi}$$

Jeżeli $\varphi = \frac{\pi}{2}$, to

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

2. Podzielić odcinek $A(x_1 y_1)$ $B(x_2 y_2)$ w stosunku λ.

Spółrzędne punkty podziału:

$$x_0 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \; y_0 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

Jeżeli $\lambda = 1$, wówczas

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \; y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

3. Prosta.

a) Równania prostej:

ogólne: $Ax + By + C = 0$;

normalne: $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$;

[czynnik normujący. $\dfrac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$;

znak $+$ gdy $C < 0$, znak $-$ gdy $C > 0$];

kierunkowe: $y = mx + b$;

odcinkowe: $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$.

b) Kąt między prostemi:

$$tg\,\varphi = \frac{m - m_1}{1 + mm_1}; \text{ lub}$$

$$tg\,\varphi = \frac{AB_1 - A_1B}{AA_1 + BB_1}.$$

Warunek równoległości:

$$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1}; \text{ lub } m = m_1.$$

Warunek prostopadłości:

$AA_1 + BB_1 = 0$, lub $mm_1 = -1$.

c) Punkt przecięcia dwuch prostych:

$$Ax + By + C = 0$$

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} -C, & B \\ -C_1, & B_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A, & B \\ A_1, & B_1 \end{vmatrix}}$$

$$y_0 = \frac{\begin{vmatrix} A, & -C \\ A_1, & -C_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A, & B \\ A_1, & B_1 \end{vmatrix}}.$$

d) Równanie prostej, przechodzącej przez jeden punkt dany $(x_1\ y_1)$:

$$A(x-x_1) + B(y-y_1) = 0$$ | A i B są wielkościami dowolnemi,

lub $y - y_1 = m(x - x_1)$ | m—dowolne;

prostej, przechodz. przez dwa punkty

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}; \text{ lub}$$

$$\begin{vmatrix} x, & y, & 1 \\ x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

e) Odległość punktu $(x_1\, y_1)$ od prostej $Ax + By + C = 0$:

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} =$$

$$= \pm (x_1 \cos\delta + y_1 \sin\delta - p).$$

4. Pole trójkąta o wierzchołkach: $(x_1\, y_1)$, $x_2\, y_2)$ i $(x_3\, y_3)$:

$$S = \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) +$$

$$+ x_3(y_1 - y_2)]; \text{ lub}$$

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix}.$$

5. Zmiana układu spółrzędnych:

a) $x = a + x_1$; $y = b + y_1$;

b) $x = \dfrac{x_1 \sin(\varphi - \alpha)}{\sin\varphi} + \dfrac{y_1 \sin(\varphi - \beta)}{\sin\varphi}$;

$$y = \frac{x_1 \sin\alpha}{\sin\varphi} + \frac{y_1 \sin\beta}{\sin\varphi}.$$

gdy $\varphi = \frac{\pi}{2}$, a $\beta = 90^\circ + \alpha$,

wówczas:

$$x = x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha$$
$$y = x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha.$$

α i β są to kąty, jakie tworzą ze sobą osie x i osie y starego i nowego układu po obrocie.

c) W razie przesunięcia równoległego i obrotu trzeba do wyrażeń na x i y, podanych w *b*), dodać jeszcze odpowiednio wielkości a i b.

6. Krzywe 2-go rzędu. Ogólna postać równania:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

a) Jeśli

$$\triangle = \begin{vmatrix} 2A, & B, & D \\ B, & 2C, & E \\ D & E, & 2F \end{vmatrix} = 0,$$

wówczas równanie to rozpada się na dwa równania linjowe.

Badany następnie mały wyznacznik:

$$B^2 - 4AC = \begin{vmatrix} B, & 2A \\ 2C, & B \end{vmatrix} = \omega;$$

jeżeli $\omega > 0$, to proste są rzeczywiste, jeżeli $\omega < 0$ — proste urojone, jeżeli $\omega = 0$ — proste równoległe. Rozwiązując równania prostych, określimy ich punkt przecięcia:

$$x_0 = \frac{2CD - BE}{B^2 - 4AC};$$

$$y_0 = \frac{2AE - BD}{B^2 - 4AC}.$$

Kąt między niemi:

$$tg\,\alpha = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2C}$$

Dwusieczne kątów między temi prostemi tworzą z osią x takie kąty φ, że

$$tg\,2\varphi_1 = \frac{B}{A - C}.$$

b) Jeśli:

$$\Delta \gtrless 0, \text{ wówczas:}$$

gdy $\omega < 0$, mamy elipsę,
„ $\omega > 0$, „ hyperbolę,
„ $\omega = 0$, „ parabolę.

c) Równanie koła:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

gdzie a i b są spółrzędnemi środka koła o promieniu r; gdy $a = b = 0$, wówczas mamy $x^2 + y^2 = r^2$ — równanie koła ze środkiem w początku spółrzędnych. Każde równanie drugiego stopnia kształtu: $x^2+y^2+mx+ny+q=0$ przedstawia koło, gdyż możemy napisać:

$$\left(x+\frac{m}{2}\right)^2+\left(y+\frac{n}{2}\right)^2=\frac{m^2}{4}+\frac{n^2}{4}-q$$

d) Równanie elipsy:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \text{ gdzie}$$

a i b są to połowy większej i mniejszej osi elipsy;

Mimośród $2c = \pm 2\sqrt{a^2 - b^2}$.

e) Równania hyperboli:

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, gdzie a — odległość wierzchołków hyperboli od początku, zaś $b^2 = c^2 - a^2$.

f) Równanie paraboli:

$y^2 = 2px$, gdzie p jest to odległość pomiędzy kierownicą a ogniskiem paraboli;

g) Równania stycznych:

do elipsy: $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$;

do koła: $y - y_1 = -\frac{x_1 - a}{y_1 - b}(x - x_1)$;

lub: $xx_1 + yy_1 = r^2$;

do hyperboli $\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$;

do paraboli $yy_1 = p(x + x)$.

h) Równania normalnych:

do elipsy $y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - {}_1)$;

do koła $y - y_1 = \frac{y_1 - b}{x_1 - a}(x - x)$;

do hyperboli $y - y_1 = -\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x)$;

do paraboli $y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x)$.

i) Spółrzędne biegunowe.

Przejście od spółrzędnych biegunowych do kartezjuszowskich i odwrotnie:

$$x = \rho \cos \varphi$$

$$y = \rho \sin \varphi$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$tg\, \varphi = \frac{y}{x}.$$

Równanie krzywych 2-go rzędu o współrzędnych biegunowych:

$$\rho = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}.$$

B. Geometrja przestrzenna.

Spółrzędne prostokątne.

1. Odległość między dwoma punktami $(x_1\ y_1\ z_1)$ i $(x_2\ y_2\ z_2)$:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

Odległość punktu $(x_1\ y_1\ z_1)$ od początku spółrzędnych:

$$\rho = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}.$$

2. Zależność między kątami α, β i γ, jakie tworzy jakakolwiek prosta z osiami spółrzędnych:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

3. Zależność pomiędzy długością odcinka l prostej i jego rzutem a na dowolną oś:

$$a = l \cos \varphi.$$

Spółrzędne punktu $(x\ y\ z)$:

$$x = r \cos \alpha$$
$$y = r \cos \beta$$
$$z = r \cos \gamma.$$

4. Kąt między dwiema prostemi, tworzącemi z osiami spółrzędnych kąty $(\alpha\ \beta\ \gamma)$ i $(\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1)$:

$$\cos\varphi = \cos\alpha \cos\alpha_1 + \cos\beta \cos\beta_1 + \cos\gamma \cos\gamma_1.$$

Warunek prostopadłości:

$$\cos \varphi = 0.$$

5. Zmiana układu spółrzędnych:

a) $x = x_1 + a$, $y = y_1 + b$, $z = z_1 + c$ — osie równoległe, (abc) — spółrzędne nowego początku

b) $x = x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta + z_1 \cos\gamma$
$y = x_1 \cos\alpha_1 + y_1 \cos\beta_1 + z_1 \cos\gamma_1$
$z = x_1 \cos\alpha_2 + y_1 \cos\beta_2 + z_1 \cos\gamma_2$ — wspólny początek, obrót.

	x	y	z
x_1	α	α_1	α_2
y_1	β	β_1	β_2
z_1	γ	γ_1	γ_2

kąty, jakie tworzą ze sobą osie.

6. Płaszczyzna.

a) Równania płaszczyzny:
normalne

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p = 0;$$

ogólne

$$Ax + By + Cz + D = 0;$$

(czynnik normujący:

$$k = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\Bigg)$$

odcinkowe:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

b) Odległość początku spółrzędnych od płaszczyzny

$$Ax + By + Cz + D = 0:$$

$$d = \frac{D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

c) Kąt między dwiema płaszczyznami:

$$\cos\varphi = \frac{AA_1 + BB_1 + CC_1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{A_1{}^2 + B_1{}^2 + C_1{}^2}}$$

Warunek prostopadłości:

$$AA_1 + BB_1 + CC_1 = 0:$$

Warunek równoległości:

$$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1}$$

d) Punkt przecięcia się trzech płaszczyzn

$$Ax + By + Cz + D = 0$$
$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

$$x_0 = \frac{P}{\delta}; \; y_0 = \frac{Q}{\delta}; \; z_0 = \frac{R}{\delta};$$

gdzie $\delta = \begin{vmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_2 \\ A_2 & B_2 & C_1 \end{vmatrix}$

$P = \begin{vmatrix} -D & B & C \\ -D_1 & B_1 & C_1 \\ -D_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$ i t. d.

7. Prosta.

a) Równania prostej:

ogólne

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \end{cases}$$

kierunkowe

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{k};$$

rzutowe

$$\begin{cases} x=\lambda z+p \\ y=\mu z+q \end{cases}$$

b) Kąty prostej z osiami:

$$\cos\alpha=\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2+k^2}}=\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2+1}};$$

$$\cos\beta=\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2+k^2}}=\frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2+1}};$$

$$\cos\gamma=\frac{k}{\sqrt{m^2+n^2+k^2}}=\frac{1}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2+1}}.$$

c) Kąt między dwiema prostemi:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p} \quad \text{i}$$

$$\frac{x-x'_0}{m'}=\frac{y-y'_0}{n'}=\frac{z-z'_0}{p'};$$

$$\cos\varphi=\frac{mm'+nn'+pp'}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\,\sqrt{m'^2+n'^2+p'^2}}.$$

Warunek prostopadłości:

$$mm' + nn' + pp' = 0;$$

Warunek równoległości:

$$\frac{m}{m'} = \frac{n}{n'} = \frac{p}{p'}.$$

d) Kąt między prostą

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

i płaszczyzną

$$Ax + By + Cz + D = 0:$$

$$\sin\varphi = \frac{mA + nB + pC}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\,\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Warunek równoległości:

$$mA + nB + pC = 0;$$

Warunek prostopadłości:

$$\frac{m}{A} = \frac{n}{B} = \frac{p}{C}.$$

8. Powierzchnia 2-go rzędu.

a) Elipsoida

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

gdy $a = b$, wówczas mamy elipsoidę obrotową z osią obrotową około osi z:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

jeżeli $a = b = c$, wówczas otrzymamy równanie kuli:

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{a^2} = 1;$$

Stożek eliptyczny urojony:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0;$$

b) Hyperboloida jednopowłokowa:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

gdy $a = b$, wówczas hyperboloida jednopowłokowa obrotowa.

Stożek eliptyczny rzeczywisty:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0;$$

Hyperboloida dwupowłokowa:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1,$$

c) Paraboloida eliptyczna:

$$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z;$$

paraboloida hyperboliczna:

$$\frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2q}=z.$$

d) Walec eliptyczny:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;$$

(gdy $a=b$, wówczas walec kołowy);

walec hyperboliczny

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1;$$

walec paraboliczny:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{2y}{b}=0.$$

FIZYKA

I. Mechanika.

1. Układ jednostek zasadniczych:

długość . . 1 *cm.*
masa . . . 1 *gr.*
czas . . . 1 *sek.*

2. Ruch jednostajny prostolinjowy. Czas t, szybkość v, droga przebyta s, droga początkowa s_0:

$$s = s_0 + v \, . \, t;$$

Jeżeli $s_0 = 0$ to $s = v \, . \, t$; $v = \frac{s}{t}$

3. Ruch jednostajnie zmienny (prostolinjowy).

a przyspieszenie; v_0 szybkość początkowa; v_t szybkość końcowa; s droga:

$$v_t = v_0 + a \, . \, t$$

$$s = \frac{v_0 + v_t}{2} \, . \, t = v_0 \, . \, t + \frac{at^2}{2}$$

$a > 0$ ruch jednostajnie przyśpieszony
$a < 0$ „ „ opóźniony.

4. Spadek swobodny ciał;

h wysokość spadania; g przyśpieszenie ziemskie

$$g = 981 \frac{cm}{sek^2}$$

$$v = gt; \quad h = \frac{1}{2} g \, . \, t^2$$

$$v = \sqrt{2g \, . \, h}$$

5. Rzut pionowy:

v_0 szybkość początkowa; h wysokość rzutu

$$v = v_0 - gt$$

$$h = v_0 t - \frac{1}{2} gt^2.$$

6. Siła:

m masa; a przyśpieszenie; F siła

$$F = m \, . \, a$$

Siła żywa (pęd) $= \frac{1}{2} m \, . \, v^2$

Ciężar ciała (jako siła) $p = m \, . \, g.$

7. Praca.

F siła działająca; s droga; α kąt pomiędzy kierunkiem działania siły i torem; L praca

$$L = F \cdot s \cdot \cos \alpha$$

gdy $\alpha = 0$, $L = F \cdot s.$

dzielność $D = \frac{L}{t}$

8. Zderzenie się ciał.

Ciała niesprężyste: M masa pierwszego ciała, V jego szybkość; m masa drugiego, v szybkość.

Szybkość po zderzeniu się:

$$x = \frac{M \cdot V + m \cdot v}{M + m}$$

Ciała sprężyste: ciało pierwsze: m masa, v szybkość, w szybkość po zderzeniu; ciało drugie: odpowiednio m', v', w'

$$w = \frac{2m' v' + (m - m') v}{m + m'}$$

$$w' = \frac{2m \cdot v + (m' - m) v'}{m + m'}$$

Jeżeli $m = m'$ to

$$w = v' ; w' = v.$$

9. Równia pochyła.

P siła, ciężaru ciała, h wysokość równi, b podstawa, l długość:

Siła równoległa do l, utrzymująca ciało w równowadze:

$$v = P \cdot \frac{h}{l}.$$

Siła równoległa do b, utrzymując ciało w równowadze:

$$v = P \cdot \frac{h}{b}.$$

10. Zasada równowagi kołowrotu:

P siła, działająca na walec o promieniu R'; F siła, działająca na walec o promieniu R

$$F \cdot R = P \cdot R'$$

lub $\frac{F}{P} = \frac{R'}{R}.$

11. Dźwignia dwuramienna:

F siła o ramieniu a, P siła o ramieniu b

$$\frac{F}{P}=\frac{b}{a} \text{ lub } F \cdot a = P \cdot b$$

12. Wahadło:

l długość, g przyspieszenie ziemskie. Okres całkowity wahadła:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

13. Jednostki pochodne:

$$\text{szybkość}=\frac{\text{droga}}{\text{czas}};\ 1\,\frac{cm}{sek}$$

$$\text{przyśpieszenie}=\frac{\text{szybkość}}{\text{czas}};\ 1\,\frac{cm}{sek^2}$$

siła = masa × przyśpieszenie

$$1\ dyna = 1\,\frac{gr.cm}{sek^2}$$

$$1\ Gr. = 1\ gr.\ 981\,\frac{cm}{sek^2} = 981\ dyn$$

$$\text{praca} = \text{siła} \,.\, \text{droga}$$

$$1 \ erg = dyna \,.\, cm = 1 \frac{gr. \ cm^2}{sek^2}$$

$$1 \ Joule = 10^7 \ erg\acute{o}w.$$

$$1 \ kologramometr = 1 \ Kg. \ 1 \ metr =$$
$$= 9{,}81 \,.\, 10^7 \ erg = 9{,}81 \ Joule.$$

dzielność: $1 \ HP = 1$ koń parowy $=$

$$= 75 \frac{kgm.}{sek} = 75 \,.\, 9{,}81 \frac{Joule}{sek} =$$
$$= 736 \ watt.$$

$$\text{gęstość bezwzględ.} = \frac{\text{masa}}{\text{objętość}} = 1 \frac{gr}{cm^3}.$$

Płyny i gazy.

1. Ciśnienie na dno:

S powierzchnia dna, h wysokość słupa, d gęstość, P ciśnienie:

$$P = S. \ h. \ d.$$

2. Naczynia połączone:

h wysokość cieczy o gęstości d ; h'

wysokość cieczy o gęstości d'; warunek równowagi:

$$dh = d'h' \text{ albo } \frac{h}{h'} = \frac{d'}{d}$$

3. Ciśnienie 1 atmosfery = 760 *mm.* słupa rtęciowego = $1033{,}6 \frac{gr.}{cm.^2}$.

4. Prawo Boyle-Mariotte'a; v, v' objętości gazu o ciśnieniach p i p':

$$\frac{v}{v'} = \frac{p'}{p} \text{ albo } v \,.\, p = v' \,.\, p = const.$$

5. Prawo Daltona: H prężność mieszaniny gazów, V jej objętość, h_i prężność każdego z gazów, v_i odpowiednia objętość:

$$H = \frac{v_1 \,.\, h_1 + v_2 \,.\, h_2 + v_3 \,.\, h_3 + \ldots\ldots}{V}$$

Ciepło.

1. Zamiana skal termometrycznych:

$$n^0\,C = \frac{n}{5} \cdot 4^0 R = \left[\frac{n}{5} \cdot 9^0 + 32^0\right] F$$

$$n^0\,R = \frac{n}{4} \cdot 5^0 C = \left[\frac{n}{4} \cdot 9^0 + 32^0\right] F$$

$$n^0\,F = \frac{n-32}{9} \cdot 4^0 R = \frac{n-32}{9} \cdot 5^0 C$$

Temperatura bezwzględna:

$T^0 = t^0 + 273^0$; $t^0 = T^0 - 273^0$.

Termometr gazowy:

$$t = \frac{100\ (p - p_0)}{p100 - p_0}$$

gdzie p jest ciśnieniem danego gazu przy t^0.

2. Rozszerzalność linjowa: k spółczynnik rozszerzalności, t temperatura ogrzana, l_0, l_t długość ciała przy 0^0 i t^0

$$l = l_0\ (1 + kt).$$

Rozszerzalność powierzchniowa i objętościowa:

$s = s_0 (1 + 2kt)$; $v = v_0 (1 + 3kt)$.

3. Rozszerzalność gazów.

Przyrost ciśnienia przy stałej objętości: $p_t = p_0 (1 + \alpha t)$ gdzie α jest spółczynnikiem przyrostu ciśnienia przy objętości stałej

$$\alpha = \frac{p_{100} - p_0}{100 p_0}.$$

Przyrost objętości przy ciśnieniu stałem: $v = v_0 (1 + \beta t)$; $\beta = \frac{1}{273}$.

Prawo Mariotte'a-Gay-Lussac'a

$$\frac{vp}{1 + \beta t} = \frac{v'p'}{1 + \beta t'} = v_0 p_0.$$

4. Kalorymetrja:

Temperatura mieszaniny m *gr.* ciała o temp. t^0 i $m_{,}$ *gr.* ciała o temp. $t_{,}^0$

$$x = \frac{m \cdot t + m_{,} \cdot t_{,}}{m + m_{,}}.$$

Określenie ciepła właściwego (równanie kalorymetru wodnego): m masa ciała o temperaturze T^0; $m_,$ masa wody o temperaturze t^0, $t_,^0$ temperatura mieszaniny; ciepło właściwe ciała m

$$x = \frac{m_, . (t_, - t)}{m . (T - t_,)}$$

lub:

$$x = \frac{m_, (t_, - t) + m_2 . C_2 (t_, - t)}{m . (T - t_,)}$$

gdzie m_2 masa kalorymetru, C_2 jego ciepło właściwe.

Kalorymetr lodowy (ciepło utajone topnienia lodu 80 cal); m masa ciała ogrzanego do temperatury t^0 o cieple właściwym x; p ilość stopionego lodu:

$$x = \frac{80 . p}{m . t}.$$

Ruch harmoniczny.

1 Ruch po kole:

m masa ciała poruszającego się,

v jego szybkość, r promień koła, T okres ruchu kolistego. Siła ośrodkowa = siła dośrodkowa.

$$P = \frac{mv^2}{r}, \text{ lub } P = \frac{4\pi^2 r \, . \, m}{T^2}$$

2. Ruch harmoniczny:

s odchylenie, a amplituda punktu drgającego, T okres wahania,

$\frac{2\pi t}{T} + \alpha_0$ faza drgania w chwili t; —

$$s = a \, . \, sin \left(\frac{2\pi t}{T} + \alpha_0 \right)$$

Jeżeli $\alpha_0 = 0$ to $s = a \, . \, sin \, 2\pi \, . \, \frac{t}{T}$

3. Ruch falowy i akustyka: szybkość rozchodzenia się fal:

$$c = \sqrt{\frac{\text{moduł sprężystości}}{\text{gęstość}}}$$

Długość fali głosowej: $l = \frac{v}{n}$

gdzie v szybkość dźwięku, n liczba drgań.

1. Natężenie światła.

k dzielność świecenia źródła oddalonego (prostopadle) od pola o r; na jednostkę tego pola przypada natężenie:

$$I = \frac{k}{4\pi r^2}$$

Natężenie światła padającego pod kątem α jest $= I . \cos \alpha$.

2. Załamanie. Spółczynnik załamania $n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ gdzie: α kąt podania, β kąt załamania.

3 Zwierciadła kuliste.

x odległość punktu od zwierciadła, y odległość obrazu punktu od zwierciadła, R promień zwierciadła.

Równanie dla zw. wklęsłych:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{R}$$

oraz dla wypukłych:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+=-\frac{2}{R}$$

Powiększenie linjowe

$$n=\frac{\frac{R}{2}-y}{\frac{R}{2}}=\frac{R-2y}{R}$$

4. Soczewki.

R i R' promienie powierzchni kulistych, x odległość punktu świecącego, y odległość obrazu od środka soczewki. Ogólny wzór soczewkowy:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=(n-1)\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)$$

(n spółcz. załamania)

lub $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{f}$

gdzie f jest odległością ogniskową;

$$\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right).$$

Elektryczność.

1. Prawo Coulomba:

e, e' ładunki elektryczne dwu biegunów, r ich odległość; siła wzajemnego przyciągania lub odpychania:

$$f = \frac{e \cdot e'}{r^2}$$

1 kulomb $= 3 \cdot 10^9$ j. elektrostat.

2. Opór: l długość przewodnika, s przekrój, k spółczynnik oporu: opór przewodnika $R = \frac{l \cdot k}{s}$.

Prawo Ohma: $I = \frac{E}{R}$ gdzie I natężenie prądu, E siła elektrobodźcza, R opór.

3. Ogniwa: I natężenie, e siła elektrobodźcza ogniwa, n liczba ogniw, r opór wewnętrzny, R zewnętrzny.

Łączenie szeregowe:

$$I = \frac{e \cdot n}{r \cdot n + R}.$$

Łączenie równoległe:

$$I = \frac{e}{\frac{r}{n} + R}$$

Łączenie mieszane:

$$I = \frac{ep}{r . \frac{p}{q} + R}$$

gdzie q liczba szeregów równoległych po p ogniw w każdym połączonych w szereg.

4. Prawo Faraday'a: k równoważnik elektrochemiczny, i natężenie prądu, t czas, m masa wydzielonego jonu:

$$m = k . i . t.$$

5. Prawo Joule'a: i natężenie, t czas, v opór; ilość wydzielonego ciepła

$$Q = 0{,}24\, i^2 . v . t.$$

DOSTRZEŻONE OMYŁKI DRUKU

Str.	wiersz	zamiast:	powinno być:
4	6 od góry	$x=\frac{c_,b-bc_,}{ab_,-ba_,}$	$x=\frac{cb_,-bc_,}{ab_,-ba_,}$
„	7 od góry	$y=\frac{ac_,-ac_,}{ab_,-ba_,}$	$y=\frac{ac_,-ca_,}{ab_,-ba_,}$
5	1 od góry	$ob_,-ba_,=0$	$cb_,-bc_,=0$
„	7 od góry	$(x-a_2)$	$(x-x_2)$
„	6 od dołu	$x_,+x_2=+-\frac{b}{a}$	$x_,+x_2=-\frac{b}{a}$
„	3 od dołu	$x^5\pm px=q+0$	$x^2+px+q=0$
27	4 od góry	x^{mn}	x^{m-n}
54	2 od góry	kwadratach	kwadrantach
67	1 od dołu	$=c\sqrt{\ }\,sin(\alpha-45^0)$	$c\sqrt{2}\,sin(\alpha-45^0)$
69	2 od dołu	$\underline{a+b}$	$\frac{c+b}{c}$

— „Literatura Polski porozbiorowej XIX i XX w. zesz. I pogląd na wiek XVIII". Utwory okresu przed Mickiewiczowskiego. . . . . —.76
— Zeszyt II. Poezja i powieść w. XIX do Fr. Skarbka. . . . . —.90
Dzwonkowski Włodz. Repetytorjum maturalne. Cz. I. Historja starożytna. 1.75
— Cz. II. Historja średniowieczna. . 3.—
— Cz. III. Historja nowożytna, w druku. 2.50
— Cz. IV Dzieje Polski . . . . . . 5.—
Lisowski H. prof. Zasady arytmetyki ogólnej. Teorja obejmująca całokształt arytmetyki, wyd. 2. popr. . . . . 1.—
— Wzory matematyczne, wyd. 6-te. .
H. Mościcki. I. Wybór dokumentów niezbędnych do nauki historji polskiej. Część I 1.50
— II. Wybór dokumentów niezbędnych do nauki historji polskiej. Część II. 2.—
Polecona przez M. W. R. i O. P.
— III Konstytucja 3 Maja (rozbiór, porównanie z innemi ustawami konstytucyjnemi. . . . . 2.—