ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1970

Seria: GÓRNICTWO z. 44 Nr kol. 292

BERNARD DRZĘŻLA

POZIOME DEFORMACJE GÓROTWORU PRZY EKSPLOATACJI GÓRNICZEJ

Streszczenie: W oparciu o różniczkowy wzór teorii T. Kochmańskiego na przesunięcie poziome punktu w kierunku elementarnej wybranej przestrzeni wyprowadzono wzory na przesunięcie poziome, odkształcenie właściwe poziome, obrót poziomego elementu liniowego oraz krzywiznę poziomą przy eksploatacji w kształcie prostokąta. Ponadto w oparciu o wzory zaczerpnięte z literatury oraz wyprowadzone częściowo przez autora podano sposób określenia wielkości tych deformacji w dowolnym kierunku.

1. Wstęp

W oparciu o metodę autora zaprezentowaną w pracy [6] i różniczkowy wzór teorii prof. Kochmańskiego [2] na przesunięcie poziome punktu w kierunku elementarnej wybranej przestrzeni, zostaną w artykule wyprowadzone wzory na przesunięcia poziome, odkształcenia właściwe poziome, obrót poziomego elementu liniowego i krzywiznę poziomą przy eksploatacji w kształcie prostokąta. Wzory szczegółowe według teorii T. Kochmańskiego będą poprzedzone wzorami ogólnymi określającymi wielkości tych deformacji w dowolnym kierunku oraz pewne charakterystyczne kierunki poszczególnych deformacji. Wzory ogólne zostały zaczerpnięte z literatury oraz częściowo wyprowadzone przez autora.

Wzory szczegółowe dotyczą eksploatacji pokładu poziomego.

2. Przesunięcia poziome

2.1. Wzory ogólne

Niech będzie zadany poziomy układ współrzędnych prostokątnych (x,y) oraz niech $u(x,y)$ i $v(x,y)$ będą składowymi przemieszczenia punktu (x,y) w kierunku osi x i y. Wtedy przesunięcie całkowite tego punktu wyniesie:

$$U(x,y) = \sqrt{u^2(x,y) + v^2(x,y)} \tag{2.1}$$

a jego kierunek znajdziemy z równania:

$$\operatorname{tg} \varphi_u = \frac{v}{u}, \tag{2.2}$$

gdzie:

φ_u – kąt między osią x, a kierunkiem przesunięcia punktu.

Składowe przesunięcia w kierunku osi układu (ξ, η) obróconego względem układu (x,y) o kąt α wyrażą się wzorami:

$$u_\xi = u \cos\alpha + v \sin\alpha$$
$$u_\eta = -u \sin\alpha + v \cos\alpha . \tag{2.3}$$

Rodzinę linii wektorowych przemieszczeń poziomych punktów płaszczyzny (x,y) określimy równaniem różniczkowym (na podstawie 2.2):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v(x,y)}{u(x,y)} . \tag{2.4}$$

Linia wektorowa przemieszczeń poziomych będzie łączyć punkty przesuwające się stycznie do tej linii.

Analogicznie można określić rodzinę linii przemieszczeń zerowych, czyli linii łączących punkty przesuwające się prostopadle do tych linii:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{u(x,y)}{v(x,y)} . \tag{2.5}$$

Obie rodziny linii utworzą na płaszczyźnie ortogonalną siatkę krzywych Podane wyżej wzory określono z zależności geometrycznych.

2.2. Wzory szczegółowe

Elementarne przemieszczenie poziome punktu w kierunku wyeksploatowanej powierzchni dP wynosi [2]:

$$du_r = -\frac{ag}{2r\pi} \cdot \frac{\partial\varphi(r,z)}{\partial z} \cdot dP ,$$

gdzie:

r – pozioma odległość rozpatrywanego punktu od wybranej powierzchni dP

z – współrzędna pionowa określająca odległość danego punktu w górotworze od pokładu

$$\varphi(r,z) = \frac{\int_0^r R \cdot e^{-\left(\frac{R}{r_0}\right)^b} dR}{r_0^2 \cdot \int_0^\infty \lambda \cdot e^{-\lambda^b} d\lambda} ; \quad b = b(z); \quad r_0 = r_0(z)$$

a – współczynnik zależny od sposobu kierowania stropem,

g – grubość pokładu,

r_0, b – parametry teorii.

Elementarne przemieszczenia w kierunku osi układu współrzędnych (x,y) wyniosą:

$$du = -\frac{ag}{2r\pi} \cdot \cos\delta \cdot \frac{\partial\varphi(r,z)}{\partial z}\, dP$$

$$dv = -\frac{ag}{2r\pi} \cdot \sin\delta \cdot \frac{\partial\varphi(r,z)}{\partial z}\, dP,$$

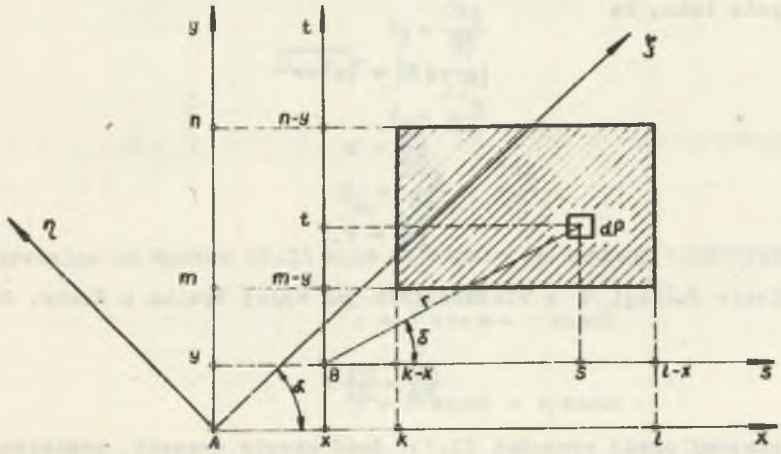
gdzie:

u – składowa przemieszczenia w kierunku osi x

v – składowa przemieszczenia w kierunku osi y

δ – kąt między osią x, a kierunkiem łączącym dany punkt z elementarną powierzchnią dP

Obieramy na płaszczyźnie prostokątny układ współrzędnych (x,y) o środku w punkcie A i osiach równoległych do prostokąta eksploatacji (rys. 1). W punkcie B o współrzędnych (x,y) umiejscawiamy początek nowego układu współrzędnych (s,t) również o osiach równoległych do prostokąta eksploatacji.



Rys. 1. Rzut poziomy rozpatrywanego kształtu obszaru eksploatacji

Zakładając, że punkt o współrzędnych (s,t) w układzie współrzędnych (s,t) jest zawarty w dP, to dla punktu B mamy:

$$r = \sqrt{s^2 + t^2}$$

$$\cos\delta = \frac{s}{\sqrt{s^2 + \quad}}$$

$$\sin\delta = \frac{t}{\sqrt{s^2 + t^2}} .$$

Stąd składowe przemieszczenia punktu B wyniosą:

$$u_B = u(x,y) = -\frac{\varrho g}{2\pi} \int_{k-x}^{l-x} ds \int_{m-y}^{n-y} \frac{s}{s^2+t^2} \cdot \frac{\partial\varphi(\sqrt{s^2+t^2}, z)}{\partial z} dt .$$

$$v_B = v(x,y) = -\frac{\varrho g}{2\pi} \int_{k-x}^{l-x} ds \int_{m-y}^{n-y} \frac{t}{s^2+t^2} \cdot \frac{\partial\varphi(\sqrt{s^2+t^2}, z)}{\partial z} dt . \tag{2.6}$$

Wzory (2.6) określają składowe przemieszczenia w punkcie bieżącym (x,y) stanowią więc równania przemieszczeń poziomych.

Pole przemieszczeń poziomych, jest według omawianej teorii, polem potencjalnym [1,4], czyli istnieje funkcja skalarna $\Phi(x,y)$ zwana potencjałem pola taka, że

$$|\mathrm{grad}\,\Phi| = \sqrt{u^2+v^2}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = u$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = v .$$

Istnienie funkcji Φ o własnościach jak wyżej wynika z faktu, że

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} . \tag{2.7}$$

Bezpośredni dowód równości (2.7), dość prosty zresztą, pominiemy. Szkic dowodu pośredniego podamy przy wzorach na krzywizny poziome. Równość (2.7) wyniknie poza tym w oczywisty sposób przy wzorach dla eksploatacji w kształcie wycinka kołowego przy czym, w związku z superpozycją wpływów, można ją będzie uogólnić na dowolny kształt eksploatacji.
Wzory dla eksploatacji w kształcie wycinka kołowego będą tematem odrębnego opracowania.

Wzory podane w punkcie 2.1 występują w teorii pola skalarnego [4], ale są oczywiście również ważne w przypadku niepotencjalnych czyli wirowych pól przemieszczeń.

3. Odkształcenia poziome

3.1. Wzory ogólne

Wielkości odkształcenia poziomego w kierunku obu osi wyniosą:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \tag{3.1}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x},$$

gdzie:

ε_x, ε_y – odkształcenia liniowe w kierunku osi x i y

γ_{xy} – odkształcenie postaciowe odpowiadające układowi współrzędnych (x,y).

Wielkości odkształcenia w kierunku osi układu (ξ, η) obróconego względem układu (x,y) o kąt α znajdziemy z równań:

$$\varepsilon_\xi = \frac{\partial u_\xi}{\partial \xi}$$

$$\varepsilon_\eta = \frac{\partial u_\eta}{\partial \eta}$$

$$\gamma_{\xi\eta} = \frac{\partial u_\xi}{\partial \eta} + \frac{\partial u_\eta}{\partial \xi}$$

korzystając ze wzorów (2.3) oraz ze wzorów na zamianę współrzędnych:

$$x = \xi \cos\alpha - \eta \sin\alpha$$

$$y = \xi \sin\alpha + \eta \cos\alpha . \tag{3.2}$$

Otrzymamy

$$\varepsilon_\xi = \varepsilon_x \cos^2\alpha + \gamma_{xy} \sin\alpha \cos\alpha + \varepsilon_y \sin^2\alpha$$

$$\varepsilon_\eta = \varepsilon_x \sin^2\alpha - \gamma_{xy} \sin\alpha \cos\alpha + \varepsilon_y \cos^2\alpha \tag{3.3}$$

$$\gamma_{\xi\eta} = (\varepsilon_y - \varepsilon_x) \sin 2\alpha + \gamma_{xy} \cos 2\alpha .$$

Kierunki odkształceń ekstremalnych, czyli tzw. kierunki główne odkształceń określimy z równania:

$$\frac{d\varepsilon_\xi}{d\alpha} = 0.$$

Stąd:

$$\operatorname{tg} 2\varphi_\varepsilon \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}, \tag{3.4}$$

gdzie:

φ_ε – kąt między osią x, a kierunkiem głównym.

Równanie (3.4) określa dwa ortogonalne kierunki główne (poza przypadkiem, gdy każdy kierunek jest główny czyli, gdy $\varepsilon_x = \varepsilon_y$ i $\gamma_{xy} = 0$), wzdłuż których wystąpi najmniejsze i największe odkształcenie (co do wartości względnej).

Warto zauważyć, że równanie (3.4) można również otrzymać podstawiając $\gamma_{\xi\eta} = 0$, z czego wnioskujemy, że w kierunkach głównych nie występuje odkształcenie postaciowe.

Wielkości odkształceń głównych będziemy obliczać ze wzoru:

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2}. \tag{3.5}$$

Podstawiając we wzorze (3.4)

$$\operatorname{tg}\varphi_\varepsilon = \frac{dy}{dx}$$

otrzymamy równanie różniczkowe linii odkształceń głównych, czyli linii posiadających w każdym swym punkcie kierunek główny:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\,\frac{\varepsilon_x(x,y) - \varepsilon_y(x,y)}{\gamma_{xy}(x,y)} \cdot \frac{dy}{dx} - 1 = 0. \tag{3.6}$$

Równanie (3.6) określa ortogonalną siatkę linii odkształceń głównych.

Z kolei z równania

$$\varepsilon_\xi = 0$$

otrzymamy równanie różniczkowe linii odkształceń zerowych:

$$\varepsilon_y(x,y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \gamma_{xy}(x,y) \cdot \frac{dy}{dx} + \varepsilon_x(x,y) = 0. \tag{3.7}$$

Równanie (3.7) w przeciwieństwie do (3.6) może nie mieć rozwiązań. Zaistnieje to wtedy, gdy

$$\gamma_{xy}^2 - 4\,\varepsilon_x\,\varepsilon_y < 0 .$$

W równaniu (3.7) zastąpiono tangens kąta między osią x, a kierunkiem zerowego odkształcenia przez pochodną $\frac{dy}{dx}$. Może więc ono również służyć do znajdywania tego kierunku.

W punkcie następnym zostaną jeszcze omówione pewne zagadnienia związane z odkształceniem postaciowym, ponieważ ten wskaźnik deformacji ściśle wiąże się z wielkością obrotu poziomego elementu liniowego.

2.2. Wzory szczegółowe

Odkształcenia będziemy obliczać w punkcie bieżącym (x,y) dla ewentualnego wykorzystania wyprowadzonych wzorów w równaniach różniczkowych (3.6) i (3.7).

Obliczamy więc:

$$\varepsilon_x(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = -\frac{ag}{2\pi}\left[\int_{m-y}^{n-y} \frac{k-x}{(k-x)^2+t^2}\cdot\frac{\partial\varphi\left(\sqrt{(k-x)^2+t^2},\,z\right)}{\partial z}\,dt - \int_{m-y}^{n-y} \frac{l-x}{(l-x)^2+t^2}\cdot\frac{\partial\varphi\left(\sqrt{(l-x)^2+t^2},\,z\right)}{\partial z}\,dt\right]$$

$$\varepsilon_y(x,y) = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = -\frac{ag}{2\pi}\left[\int_{k-x}^{l-x} \frac{m-y}{s^2+(m-y)^2}\cdot\frac{\partial\varphi\left(\sqrt{s^2+(m-y)^2},\,z\right)}{\partial z}\,ds - \int_{k-x}^{l-x} \frac{n-y}{s^2+(n-y)^2}\cdot\frac{\partial\varphi\left(\sqrt{s^2+(n-y)^2},\,z\right)}{\partial z}\,ds\right] \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\frac{ag}{2\pi}\left[\int_{k-x}^{l-x} \frac{s}{s^2+(m-y)^2}\cdot\frac{\partial\varphi\left(\sqrt{s^2+(m-y)^2},\,z\right)}{\partial z}\,ds - \int_{k-x}^{l-x} \frac{s}{s^2+(n-y)^2}\cdot\frac{\partial\varphi\left(\sqrt{s^2+(n-y)^2},\,z\right)}{\partial z}\,ds\right]$$

$$\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = -\frac{ag}{2\pi}\left[\int_{m-y}^{n-y} \frac{t}{(k-x)^2+t^2} \cdot \frac{\partial\varphi(\sqrt{(k-x)^2+t^2},\, z)}{\partial z}\, dt - \right.$$

$$\left. - \int_{m-y}^{n-y} \frac{t}{(l-x)^2+t^2} \cdot \frac{\partial\varphi(\sqrt{(l-x)^2+t^2},\, z)}{\partial z}\, dt \right].$$

W codziennej praktyce obliczeniowej wymagana jest tylko znajomość wielkości odkształceń. W takim przypadku podstawiamy we wzorach (3.8) $x=y=0$, a za k, l, m, n przyjmujemy odległości poziome rozpatrywanego punktu górotworu od odpowiednich boków prostokąta eksploatacji.

W związku z równością (2.7) uproszczeniu ulega obliczanie odkształcenia postaciowego γ_{xy}. Mamy mianowicie:

$$\gamma_{xy} = 2 \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 2 \cdot \frac{\partial v}{\partial x}. \tag{3.9}$$

4. Obrót poziomego elementu liniowego

Przybliżone wielkości kątów obrotu elementów liniowych równoległych do osi układu współrzędnych (x,y) oblicza się następująco [1,5]:

$$\lambda_x = \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\lambda_y = -\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{4.1}$$

Dla dowolnego układu współrzędnych (ξ,η) będzie analogicznie:

$$\lambda_\xi = \frac{\partial u_\eta}{\partial \xi}$$

$$\lambda_\eta = -\frac{\partial u_\xi}{\partial \eta}.$$

Jeśli układ (ξ,η) będzie, jak poprzednio, obrócony względem układu (x,y) o kąt α, to w oparciu o wzory (2.3) i (3.2) otrzymamy wzory transformacyjne na obroty elementów liniowych równoległych do osi układu (ξ,η):

$$\lambda_\xi = -(\varepsilon_x - \varepsilon_y)\sin\alpha\cos\alpha + \lambda_x\cos^2\alpha + \lambda_y\sin^2\alpha$$

$$\lambda_\eta = (\varepsilon_x - \varepsilon_y)\sin\alpha\cos\alpha + \lambda_x\sin^2\alpha + \lambda_y\cos^2\alpha. \tag{4.2}$$

Kierunki ekstremalnych obrotów i odkształceń postaciowych znajdziemy z równania:

$$\frac{d\lambda_z}{d\alpha} = 0 .$$

Po kilku przekształceniach otrzymamy ([5] - str. 41 ów. 2):

$$tg\, 2\varphi_\lambda = -\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{\gamma_{xy}} , \qquad (4.3)$$

gdzie:

φ_λ - kąt między osią x, a kierunkiem ekstremalnego obrotu i odkształcenia postaciowego.

Wzór (4.3) określa (poza przypadkiem, gdy każdy kierunek jest kierunkiem głównym, co zachodzi np. nad środkiem kołowego filaru) dwa prostopadłe kierunki obrotów ekstremalnych. Nietrudno zauważyć, że jeden z tych kierunków stanowi dwusieczną kąta między kierunkami odkształceń głównych (wzór 3.4). Dla układu osi obróconych o kąt 45° względem kierunków głównych zachodzi zresztą maksimum odkształcenia postaciowego.

Natomiast w kierunkach głównych odkształcenie postaciowe nie występuje tj. wynosi zero. Gdy pole przemieszczeń jest polem potencjalnym, to w kierunkach głównych nie występują również obroty. Stąd wzór (3.4) określa kierunki w których odkształcenia postaciowe, a w polu potencjalnym również obroty, wynoszą zero. Z kolei równanie (3.6) jest równaniem różniczkowym krzywych mających w każdym swym punkcie kierunek, w którym występują zerowe wartości odkształcenia postaciowego, a w polu potencjalnym i obrotu.

Ponieważ według omawianej teorii pole przemieszczeń poziomych jest właśnie polem potencjalnym, pominiemy więc ogólniejsze rozważania w tym zakresie ograniczając się do wypowiedzianych wyżej twierdzeń dotyczących własności obrotu poziomego elementu liniowego w polu potencjalnym.

Jeśli we wzorze (4.3) podstawimy

$$tg\varphi_\lambda = \frac{dy}{dx}$$

to otrzymamy równanie różniczkowe krzywych, wzdłuż których w każdym ich punkcie zachodzą ekstremalne obroty i odkształcenia postaciowe

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{2 \cdot \gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} \frac{dy}{dx} - 1 = 0. \qquad (4.4)$$

Krzywe opisane równaniem (4.4) będą w każdym punkcie stanowić dwusieczne kątów między liniami odkształceń głównych (3.6).

Na podstawie wzorów (4.2) i (4.3) obliczamy wielkości obrotów ekstremalnych (podobnie jak w [1] - cz. II str. 131):

$$\lambda_{M,m} = \frac{1}{2}(\lambda_x + \lambda_y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \varphi_{xy}^2}\,, \tag{4.5}$$

gdzie:

λ_M, λ_m - największa i najmniejsza (co do wartości względnej) wielkość obrotu elementu liniowego w danym punkcie.

Interesujące i jak się wydaje, użyteczne w praktyce byłoby określenie zmiany kąta między dwoma dowolnymi kierunkami. Odpowiednie wzory podane są jednak w literaturze [5], a poza tym łatwo tę zmianę kąta obliczyć na podstawie wzorów (4.2).

Dla potencjalnego pola przemieszczeń podane wyżej wzory ulegają znacznemu uproszczeniu. Biorąc pod uwagę równość (2.7) oraz wzory (4.1) otrzymujemy:

$$\lambda_x = -\lambda_y = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \tag{4.1a}$$

$$\lambda_\xi = -\lambda_\eta = -\frac{1}{2}(\varepsilon_x - \varepsilon_y)\sin 2\alpha + \lambda_x \cos 2\alpha \tag{4.2a}$$

$$\lambda_{M,m} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \varphi^2_{xy}}\,. \tag{4.3a}$$

Wzór (4.3a) określa zarazem połowę ekstremalnych wielkości odkształcenia postaciowego w danym punkcie (w dowolnym polu przemieszczeń).

Wzorów szczegółowych tutaj nie przytaczamy ponieważ wszystkie wystąpiły już w punkcie 3.2.

5. Krzywizny poziome

5.1. Wzory ogólne

W wyniku ruchów górotworu każdy punkt ulega różnej wielkości i kierunku przesunięciom. Dlatego linia pozioma pierwotnie prosta przejdzie w pewną krzywą przestrzenną. Krzywiznę rzutu poziomego takiej krzywej nazwiemy krzywizną poziomą. Krzywizna pozioma jest więc wynikiem poziomych ruchów punktów górotworu.

Punkt (x,y,z) górotworu zmieni swe współrzędne poziome na (X,Y). Nowe współrzędne poziome punktu są określone wzorami:

$$\begin{aligned} X(x,y) &= x + u(x,y) \\ Y(x,y) &= y + v(x,y)\,. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Dostosowując znany z geometrii różniczkowej wzór na krzywiznę krzywej płaskiej określonej równaniami parametrycznymi do równań (5.1), otrzymamy następujący wzór na krzywiznę poziomą w kierunku równoległym do osi x:

$$k_x = \frac{\frac{\partial X}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial Y}{\partial x}}{\left[1 + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} : \frac{\partial X}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} \cdot \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^3} .$$

Ponieważ wyrażenie

$$\frac{\partial Y}{\partial x} : \frac{\partial X}{\partial x}$$

oznacza nachylenie rozpatrywanych krzywych do osi x, które jest wielkością małą, więc jego kwadrat możemy pominąć, popełniając niewielki błąd.

Pozostałe wyrażenia wzoru rozwijamy otrzymując:

$$k_x = \frac{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \cdot \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}}{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^3} .$$

W dalszym ciągu pomijamy iloczyn pochodnych w liczniku, jako wielkość małą wyższego rzędu. Mamy więc:

$$k_x = \frac{\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}}{(1 + \varepsilon_x)^2} . \tag{5.2}$$

Na ogół będzie można również przyjmować mianownik równy jedności, co np. przy odkształceniu $\varepsilon_x = 10\,‰$ spowoduje błąd obliczenia w wysokości ok. 2%.

$$k_x = \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} . \tag{5.2a}$$

Analogiczny wzór wyjściowy mamy dla kierunku równoległego do osi y:

$$k_y = \frac{\frac{\partial X}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial Y}{\partial y}}{\left[\left(\frac{\partial X}{\partial y} : \frac{\partial Y}{\partial y}\right)^2 + 1\right]^{\frac{3}{2}} \cdot \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)^3} ,$$

gdzie wyrażenie

$$\frac{\partial X}{\partial y} : \frac{\partial Y}{\partial y}$$

oznacza nachylenie rozpatrywanych krzywych do osi y.

Przyjmując uproszczenia jak wyżej dochodzimy do wzoru:

$$k_y = \frac{-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}{(1 + \varepsilon_y)^2} \tag{5.3}$$

lub, po dalszym uproszczeniu:

$$k_y = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \tag{5.3a}$$

Do dalszych rozważań przyjmujemy wzory na krzywiznę w najbardziej uproszczonej wersji.

Dla osi układu współrzędnych (ξ,η) będzie:

$$k_\xi = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$$

$$k_\eta = \frac{-\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

Jeśli układ (ξ,η) będzie obrócony względem (x,y) o kąt α, to uwzględniając wzory (2.3) i (3.2) otrzymamy:

$$k_\xi = k_x \cos^3\alpha + 2\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\sin\alpha\cos^2\alpha + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\sin^2\alpha\cos\alpha - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\sin\alpha\cos^2\alpha -$$

$$- 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\sin^2\alpha\cos\alpha + k_y \sin^3\alpha \tag{5.4}$$

$$k_\eta = - k_x \sin^3\alpha + 2\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\sin^2\alpha\cos\alpha - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\sin\alpha\cos^2\alpha -$$

$$- \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\sin^2\alpha\cos\alpha + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\sin\alpha\cos^2\alpha + k_y \cos^3\alpha.$$

Kierunki ekstremalnych i zerowych wielkości krzywizn oraz ich wielkości ekstremalne można znaleźć podobnie jak w przypadku innych deformacji. Odpowiednie wzory pominiemy jednak ze względu na ich skomplikowaną postać i małe znaczenie praktyczne.

W potencjalnym polu przemieszczeń (wzór 2.7) będzie:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = k_x$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = - k_y \tag{5.5}$$

w związku z czym wzory transformacyjne (5.4) ulegną uproszczeniu:

$$k_\xi = k_x \cdot \cos\alpha \cdot (3 \cos^2\alpha - 2) + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \sin^2\alpha \cos\alpha - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sin\alpha \cos^2\alpha +$$

$$+ k_y \cdot \sin\alpha \cdot (3 \sin^2\alpha - 2)$$

$$k_\eta = - k_x \cdot \sin\alpha (3 \sin^2\alpha - 2) - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \sin\alpha \cos^2\alpha - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sin^2\alpha \cos\alpha + \tag{5.4a}$$

$$+ k_y \cos\alpha \cdot (3 \cos^2\alpha - 2).$$

5.2. Wzory szczegółowe

Poszczególne pochodne obliczymy w punkcie A $(x = 0,\ y = 0)$:

$$k_x = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = - \frac{ag}{2\pi} \left[\frac{k}{k^2+m^2} \cdot \frac{\partial \varphi(\sqrt{k^2+m^2},\ z)}{\partial z} - \frac{k}{k^2+n^2} \cdot \frac{\partial \varphi(\sqrt{k^2+n^2},\ z)}{\partial z} - \right.$$

$$\left. - \frac{l}{l^2+m^2} \cdot \frac{\partial \varphi(\sqrt{l^2+m^2},\ z)}{\partial z} + \frac{l}{l^2+n^2} \cdot \frac{\partial \varphi(\sqrt{l^2+n^2},\ z)}{\partial z} \right]$$

$$k_y = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = - \frac{ag}{2\pi} \left[\frac{n}{k^2+n^2} \frac{\partial \varphi(\sqrt{k^2+n^2},\ z)}{\partial z} - \frac{n}{l^2+n^2} \frac{\partial \varphi(\sqrt{l^2+n^2},\ z)}{\partial z} \right.$$

$$\left. - \frac{m}{k^2+m^2} \frac{\partial \varphi(\sqrt{k^2+m^2},\ z)}{\partial z} + \frac{m}{l^2+m^2} \frac{\partial \varphi(\sqrt{l^2+m^2},\ z)}{\partial z} \right] \tag{5.6}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = - \frac{ag}{2\pi} \left\{ \int_m^n \frac{k^2 - t^2}{(k^2+t^2)^2} \frac{\partial \varphi(\sqrt{k^2+t^2},\ z)}{\partial z} dt - \int_m^n \frac{l^2 - t^2}{(l^2+t^2)^2} \frac{\partial \varphi(\sqrt{l^2+t^2},\ z)}{\partial z} dt - \right.$$

$$- 2\pi \int_m^n \frac{k^2}{k^2+t^2} \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\exp\left[-\left(\frac{\sqrt{k^2+t^2}}{r_0}\right)^b\right]}{r_0^2 \cdot C(b)}\right] dt +$$

$$+ 2\pi \int_m^n \frac{l^2}{l^2+t^2} \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\exp\left[-\left(\frac{\sqrt{l^2+t^2}}{r_0}\right)^b\right]}{r_0^2 \cdot C(b)}\right] dt \Bigg\}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = - \frac{ag}{2\pi}\Bigg\{\int_k^l \frac{m^2 - s^2}{(s^2+m^2)^2} \frac{\partial\varphi(\sqrt{m^2+s^2}, z)}{\partial z} ds - \int_k^l \frac{n^2 - s^2}{(n^2+s^2)^2} \frac{\partial\varphi(\sqrt{n^2+s^2}, z)}{\partial z} ds -$$

$$- 2\pi \int_k^l \frac{m^2}{s^2+m^2} \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\exp -\left[\left(\frac{\sqrt{s^2+m^2}}{r_0}\right)^b\right]}{r_0^2 \cdot C(b)}\right] ds +$$

$$+ 2\pi \int_k^l \frac{n^2}{s^2+n^2} \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\exp\left[-\left(\frac{\sqrt{s^2+n^2}}{r_0}\right)^b\right]}{r_0^2 \cdot C(b)}\right] ds \Bigg\},$$

gdzie:

$$C(b) = 2\pi \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda^b} d\lambda .$$

W oparciu o reguły de L'Hospitala łatwo wykazać następujące:

$$\lim_{\substack{k \to 0 \\ m \to 0}} \frac{k}{k^2+m^2} \cdot \frac{\partial\varphi(\sqrt{k^2+m^2}, z)}{\partial z} = 0 .$$

Ewentualne osobliwości funkcji pocałkowych w powyższych wzorach są więc osobliwościami pozornymi (skończone granice i nieciągłości usuwalne), dla tego funkcje te są całkowalne w dowolnych przedziałach. Ta sama uwaga dotyczy wszystkich wyprowadzonych dotąd wzorów.

Przy obliczaniu krzywizny k_x i k_y według wzorów:

$$k_x = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad \text{i} \quad k_y = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

należy skorzystać z tożsamości typu (dowód jej uzyskamy całkując lewą stronę przez części):

$$\int_m^n \frac{2kt}{(k^2+t^2)^2} \cdot \frac{\partial\varphi(\sqrt{k^2+t^2}, z)}{\partial z}\, dt = \frac{k}{k^2+m^2} \cdot \frac{\partial\varphi(\sqrt{k^2+m^2}, z)}{\partial z} -$$

$$- \frac{k}{k^2+n^2} \cdot \frac{\partial\varphi(\sqrt{k^2+n^2}, z)}{\partial z} + 2\pi \int_m^n \frac{kt}{k^2+t^2} \cdot \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\exp\left[-\left(\frac{\sqrt{k^2+t^2}}{r_o}\right)^b\right]}{r_o^2 \cdot C(b)}\right] dt.$$

W ten sposób właśnie można udowodnić wzory (5.5), a tym samym równość (2.7).

6. Zakończenie

Obliczanie obrotów i krzywizn poziomych, jako nowych wskaźników deformacji górotworu, zaproponowano po raz pierwszy w pracy [3]. W pracy tej podane zostały również odpowiednie wzory dla obliczenia tych deformacji. W niniejszym opracowaniu zaprezentowano odmienną metodę wyprowadzenia wzorów na poszczególne deformacje oraz podano wzory stereomechaniki dotyczące tych deformacji uzupełnione przez autora – częściowo, jeśli chodzi o obroty elementów liniowych i prawie całkowicie, jeśli chodzi o krzywizny poziome.

LITERATURA

[1] Huber M.: Teoria sprężystości", PWN – Warszawa 1954 r.

[2] Kochmański T.: Obliczanie ruchów punktów górotworu pod wpływem eksploatacji górniczej", PWN – Warszawa 1956 r.

[3] Magdziorz J.: Nowe metody obliczania ruchów górotworu nad eksploatacją. Ochrona terenów górniczych nr 11, 1970 r.

[4] Średniawa B., Weyssenhoff J.: Mechanika środowisk rozciągłych, PWN – Warszawa 1967 r.

[5] Timoshenko S., Goodier J.N.: Teoria sprężystości, Wydawnictwo"Arkady" Warszawa 1962 r.

[6] Drzęźla B.: Pionowe deformacje górotworu przy eksploatacji górniczej, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, seria Górnictwo zeszyt nr 37.

[7] Drzęźla B.: Komunikat o wynikach pracy nad nowym ujęciem zagadnienia obliczania poziomych deformacji górotworu przy eksploatacji, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, seria Górnictwo zeszyt nr 41.

ГОРИЗОНТАЛЬНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ ГОРНЫХ ПОРОД ПРИ ГОРНОЙ ЭКСПЛУАТАЦИИ

Р е з ю м е

Основываясь на дифференциальной формуле теории Т. Кохманского горизонтального сдвижения точки в направлении разработанного элементарного пространства выведены формулы горизонтального сдвижения, горизонтального относительного сопромата, горизонтального поворота линейного элемента а также горизонтальной кривизны при эксплуатации в виде прямоугольника. Кроме того, основываясь на формулах зачерпнутых из литературы, а также выведенных частично автором, подан способ определения величин этих деформаций в произвольном направлении.

HORIZONTAL ROCK DEFORMATIONS RESULTING FROM THE EXPLOITATION OF COAL MINES

S u m m a r y

Basing on the differential formula of T. Kochmański's theory, concerning the horizontal shift of a point towards an exploited elementary space, there have been developed formulae for the horizontal shift, the horizontal deformation proper, the torsion of the horizontal linear element and for the horizontal curvature brought about by rectangular exploitation.

Besides, basing on formulae taken from literature and partly developed by the author himself, a method has been presented of determining the magnitude of such deformations in any optional direction.