DZIAŁ DRUGI.

MECHANIKA.

I. GEOMETRYCZNE PRAWA RUCHU.

A. Ruch punktu.

a. Ruch prostolinijny.

1. Prędkość. Punkt, przebywający równodługie drogi w równych odstępach czasu, porusza się **jednostajnie.** Iloraz:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{\text{droga}}{\text{czas odnośny}}$$

nosi miano prędkości ruchu.

W innych warunkach ruch będzie niejednostajnym czyli **zmiennym;** wówczas prędkość v w chwili t:

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

Zatem długość drogi $s - s_0$ w czasie t: $\quad s - s_0 = \int_0^t v \cdot dt;$

s_0 i s oznaczają odległości ruchomego punktu od dowolnego punktu stałego na prostej i to: s_0 na początku ruchu (w chwili $t = 0$), s na końcu ruchu, w chwili t.

2. Przyspieszenie. Jeżeli prędkość punktu zwiększa się, lub zmniejsza równomiernie, t. zn. o równe ilości w równych odstępach czasu, to ruch taki jest **równomiernie przyspieszonym** lub też **równomiernie zwolnionym.** Zmiana prędkości w jednostce czasu (w 1-ej sek.) nazywa się **przyspieszeniem,** względnie **zwolnieniem,** (zwolnienie = odjemne przyśpieszenie). Przyspieszenie:

$$p = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\text{zmiana prędkości}}{\text{odnośny czas}}.$$

Prędkość jest wówczas: $v = v_0 + pt$, a droga:

$$s = s_0 + \int_0^t v \cdot dt = s_0 + v_0 t + {}^1/_2 p t^2.$$

Związki między s, v, p i t.

Dane:	Poszukiwane: s	v	p	t
$s = f(t)$	$s = f(t)$	$f'(t) = \frac{ds}{dt}$	$f''(t) = \frac{d^2s}{dt^2}$	t
$v = f'(t)$	$s_0 + \int_0^t f(t)\,dt = s_0 + \int_0^t v \cdot dt$	$v = f'(t)$	$f'(t) = \frac{dv}{dt}$	t
$p = f(t)$	$s_0 + \int_0^t v \cdot dt$ (uprzednio trzeba oznaczyć v).	$v_0 + \int_0^t f(t)\,dt = v_0 + \int_0^t p \cdot dt$	$p = f(t)$	t
$p = f(s)$	s	$\sqrt{v_0^2 + 2\int_{s_0}^{s} f(s)\,ds} = \sqrt{v_0^2 + 2\int_{s_0}^{s} p \cdot ds}$	$p = f(s)$	$\int_{s_0}^{s} \frac{ds}{v}$ (uprzednio trzeba oznaczyć v).
$v = f'(s)$	s	$v = f(s)$	$f(s) \cdot f'(s) = v\frac{dv}{ds}$	$\int_{s_0}^{s} \frac{ds}{f'(s)} = \int_{s_0}^{s} \frac{ds}{v}$
$p = f(v)$	$s_0 + \int_{v_0}^{v} \frac{v}{f(v)}\,dv = s_0 + \int_{v_0}^{v} \frac{v}{p}\,dv$	v	$p = f(v)$	$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{f(v)} = \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{p}$

Przy ruchu **nierównomiernie przyspieszonym,** względnie nierównomiernie zwolnionym, przyspieszenie jest:

$$p = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

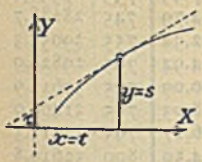
A stąd prędkość: $v = v_0 + \int_0^t p \cdot dt$, w razie, gdy v_0 oznacza prędkość w chwili $t = 0$.

Jeżeli przy prostolinijnym ruchu punktu jednę z czterech wielkości s, v, p i t znamy jako funkcyę którejkolwiek drugiej z nich, to możemy pozostałe dwie wyznaczyć przy pomocy równań poprzednich, lub tabelki, str. 144.

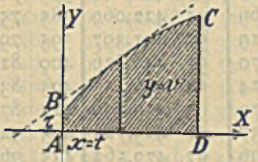
3. Uzmysłowienie za pomocą rysunku.

1. Wykreśliwszy (rys. 45) czasy t jako odcięte i drogi s jako rzędne, ujrzymy, że $v = \frac{ds}{dt} = \operatorname{tg} \tau$, będzie tem większe, im stromiej wzniesie się styczna odnośnego punktu krzywej. Dla ruchu jednostajnego krzywa staje się prostą: $s = s_0 + vt$ (wykreślne rozkłady kolejowe).

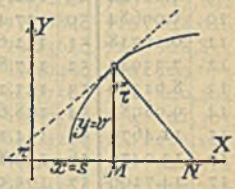
Rys. 45.



Rys. 46.



Rys. 47.



2. Jeżeli obierzemy (rys. 46) czasy t za odcięte, a prędkości v za rzędne, to przyspieszenie $p = \operatorname{tg} \tau$, a droga $s = \int v \cdot dt$ = powierzchni $ABCD$.

3. Biorąc (rys. 47) s za odcięte, v za rzędne, otrzymujemy przyspieszenie p = podnormalnej MN.

4. Spad swobodny w próżni.

Por. dział II, rozdział III B. a. 2.: Spad swobodny z uwzględnieniem oporu powietrza.

1. Dla nieznacznych wysokości przyspieszenie swobodnego spadu w m/sek.^{2} jest:

$$g = 9{,}806056 - 0{,}025028 \cos 2\varphi - 0{,}000003\, H;$$

we wzorze tym oznaczają: φ szerokość geograficzną, a H wysokość danego miejsca nad poziomem morza.*) Dla średniej szerokości $\varphi = 50^0$ i poziomu morza ($H = 0$):

$g = 9{,}81$ m/sek.^{2} ($= 32{,}18$ rosyjskich = angielskich stóp/sek.^{2}).

*) Inne wzory na g można znaleźć w: J. D. Everett. Illustrations of the C. G. S.-system of units, wydanie 4. str. 22: Londyn 1891. Macmillan & Co. (Tłomaczenie niemieckie przez P. Chappuis i D. Kreichgauer; Lipsk 1888. A. Barth).

(Ciąg dalszy na str. 148.)

Wysokości h w m, (spad lub ciśnienie) odpowiadające prędkościom końcowym od 0 do 1000 m/sek.

$h = v^2 : 2g$; $g = 9{,}81$ m/sek.^{2}.

v	h	v	h	v	h	v	h	v	h
0	0,00000	40	81,5494	80	326,198	285	4139,91	645	21204,1
1	0,05097	41	85,6779	81	334,404	295	4435,52	655	21866,7
2	0,20387	42	89,9083	82	342,712	300	4587,16	665	22539,5
3	0,45872	43	94,2406	83	351,121	305	4741,34	675	23222,5
4	0,81549	44	98,6748	84	359,633	315	5057,34	685	23915,7
5	1,27421	45	103,211	85	368,247	325	5383,54	695	24619,0
6	1,83486	46	107,849	86	376,962	335	5719,93	700	24974,5
7	2,49745	47	112,589	87	385,780	345	6066,51	705	25332,6
8	3,26198	48	117,431	88	394,699	355	6423,29	715	26056,3
9	4,12844	49	122,375	89	403,721	365	6790,26	725	26790,3
10	5,09684	50	127,421	90	412,844	375	7167,43	735	27534,4
11	6,16718	51	132,669	91	422,069	385	7554,79	745	28288,7
12	7,33945	52	137,819	92	431,397	395	7952,34	755	29053,3
13	8,61366	53	143,170	93	440,826	400	8154,94	765	29828,0
14	9,98981	54	148,624	94	450,357	405	8360,09	775	30612,9
15	11,4679	55	154,179	95	459,990	415	8778,03	785	31408,0
16	13,0479	56	159,837	96	469,725	425	9206,17	795	32213,3
17	14,7299	57	165,596	97	479,562	435	9644,50	800	32619,8
18	16,5138	58	171,458	98	489,501	445	10093,0	805	33028,8
19	18,3996	59	177,421	99	499,541	455	10551,7	815	33854,5
20	20,3874	60	183,486	100	509,684	465	11020,6	825	34690,4
21	22,4771	61	189,653	105	561,927	475	11499,7	835	35536,4
22	24,6687	62	195,923	115	674,057	485	11989,0	845	36392,7
23	26,9623	63	202,294	125	796,381	495	12488,5	855	37259,2
24	29,3578	64	208,767	135	928,899	500	12742,1	865	38135,8
25	31,8552	65	215,341	145	1071,61	505	12998,2	875	39022,7
26	34,4546	66	222,018	155	1224,52	515	13518,1	885	39919,7
27	37,1560	67	228,797	165	1387,61	525	14048,2	895	40827,0
28	39,9592	68	235,678	175	1560,91	535	14588,4	900	41284,4
29	42,8644	69	242,661	185	1744,39	545	15138,9	905	41744,4
30	45,8716	70	249,745	195	1938,07	555	15699,5	915	42672,0
31	48,9807	71	256,932	200	2038,74	565	16270,4	925	43609,8
32	52,1917	72	264,220	205	2141,95	575	16851,4	935	44557,8
33	55,5046	73	271,611	215	2356,01	585	17442,7	945	45516,1
34	58,9195	74	279,103	225	2574,34	595	18044,1	955	46484,5
35	62,4363	75	286,697	235	2814,73	600	18348,6	965	47463,1
36	66,0551	76	294,393	245	3059,38	605	18655,3	975	48451,8
37	69,7757	77	302,192	255	3314,22	615	19277,5	985	49450,8
38	73,5984	78	310,092	265	3579,26	625	19909,5	995	50460,0
39	77,5229	79	318,094	275	3854,48	635	20551,7	1000	50968,4

Prędkości końcowe v w m/sek., odpowiadające wysokościom (spad lub ciśnienie) h między 1 a 1000 m.

$v = \sqrt{2gh}$; $g = 9{,}81$ m/sek.^{2}.

h	v	h	v	h	v	h	v	h	v
1	4,42945	41	28,3623	81	39,8650	210	64,1888	610	109,399
2	6,26418	42	28,7061	82	40,1103	220	65,6993	620	110,292
3	7,67202	43	29,0458	83	40,3542	230	67,1759	630	111,435
4	8,85889	44	29,3816	84	40,5032	240	68,6207	640	112,057
5	9,90454	45	29,7136	85	40,8375	250	70,0357	650	112,929
6	10,8499	46	30,0420	86	41,0770	260	71,4227	660	113,795
7	11,7192	47	30,3668	87	41,3151	270	72,7832	670	114,653
8	12,5284	48	30,6881	88	41,5519	280	74,1188	680	115,506
9	13,2883	49	31,0061	89	41,7873	290	75,4308	690	116,352
10	14,0071	50	31,3209	90	42,0214	300	76,7202	700	117,192
11	14,6908	51	31,6326	91	42,2542	310	77.9884	710	118,026
12	15,3440	52	31,9412	92	42,4858	320	79,2364	720	118,855
13	15,9706	53	32,2469	93	42,7160	330	80,4649	730	119,677
14	16,5730	54	32,5497	94	42,9451	340	81,6750	740	120,494
15	17,1553	55	32,8496	95	43,1729	350	82,8673	750	121,305
16	17,7178	56	33,1469	96	43,3995	360	84,0429	760	122,111
17	18,2630	57	33,4416	97	43,6250	370	85,2021	770	122,912
18	18,7925	58	33,7337	98	43,8493	380	86,3458	780	123,708
19	19,3075	59	34,0232	99	44,0724	390	87,4746	790	124,498
20	19,8091	60	34,3105	100	44,2945	400	88,5889	800	125,284
21	20,2983	61	34,5951	105	45,3883	410	89,6895	810	126,064
22	20,7759	62	34,8775	110	46,4564	420	90,7767	820	126,840
23	21,2428	63	35,1577	115	47,5005	430	91,8510	830	127,611
24	21,6998	64	35,4356	120	48,5224	440	92,9129	840	128,378
25	22,1472	65	35,7113	125	49,5227	450	93,9627	850	129,140
26	22,5858	66	35,9850	130	50,5037	460	95,0010	860	129,897
27	23,0161	67	36,2566	135	51,4655	470	96,0281	870	130,650
28	23,4384	68	36,5262	140	52,4099	480	97,0443	880	131,399
29	23,8535	69	36,7938	145	53,3376	490	98,0500	890	132,143
30	24,2611	70	37,0594	150	54,2492	500	99,0454	900	132,883
31	24,6621	71	37,3232	155	55,1462	510	100,031	910	133,620
32	25,0567	72	37,5851	160	56,0284	520	101,007	920	134,352
33	25,4452	73	37,8452	165	56,8973	530	101,974	930	135,080
34	25,8279	74	38,1035	170	57,7529	540	102,931	940	135,804
35	26,2050	75	38,3601	175	58,5961	550	103,880	950	136,525
36	26,5767	76	38,6150	180	59,4272	560	104,820	960	137,241
37	26,9433	77	38,8682	185	60,2470	570	105,752	970	137,954
38	27,3049	78	39,1198	190	61,0555	580	106,675	980	138,664
39	27,6619	79	39,3698	195	61,8539	590	107,591	990	139,369
40	28,0143	80	39,6182	200	62,6418	600	108,499	1000	140,071

Przy biegunach (na poziomie morza) dla $\varphi = 90^0$ jest $g_p = 9{,}831$ m, na równiku (dla $\varphi = 0$) $g_a = 9{,}781$ m, a dla szerokości $\varphi = 45^0$, $g_m = 9{,}806$ m, tak, że w przybliżeniu: $g_p - g_a = {}^1/_{196}\, g_m$.

Wartości wyrazów algebraicznych, zawierające g, znajdują się na str. 40.

2. Dla ciała, rozpoczynającego spad z prędkością $v_0 = 0$ (ruch równomiernie przyspieszony):

$$h = \frac{gt^2}{2} = \frac{v^2}{2g}; \qquad v = gt = \sqrt{2gh}; \qquad t = \frac{v}{g} = \sqrt{\frac{2h}{g}};$$

w tych wzorach znaczy: h wysokość spadu, v prędkość w chwili t.

Z tabelek na str. 146 i 147 można wyznaczać dla danego v odpowiednie h i naodwrót. Również znaleść można, np. str. 146, dla $v = 0{,}02$ m/sek. $h = 0.000\,020\,387$ m (z $v = 2$ m/sek.): dla $v = 8{,}7$ m/sek. $h = 3{,}857\,80$ m (z $v = 87$ m/sek.); dalej, str. 147, dla $h = 0{,}13$ m, $v = 1.597\,06$ m/sek. (z $h = 13$ m); dla $h = 2{,}70$ m, $v = 7.278\,32$ m/sek. (z $h = 270$ m) i t. d.

3. Ciało, rzucone pionowo w górę z prędkością v_0 (ruch równomiernie zwalniany) ma:

wysokość podrzutu $h = \frac{v_0^2}{2g}$; $\qquad v = v_0 - gt$; $\qquad s = v_0 t - g\frac{t^2}{2}$;

we wzorach powyższych oznacza v i s prędkość i drogę w czasie t. Ciało, wznosząc się i opadając, osięga w jednem i tem samem miejscu toru równe, lecz przeciwnie skierowane prędkości.

b. Ruch krzywolinijny.

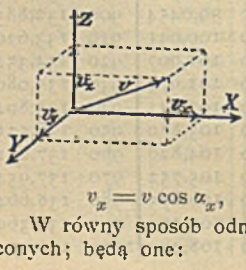
1. Rzut ruchu. Jeżeli z ruchomego punktu A, mającego w chwili t prędkość v i spółrzędne x, y, z nakreślimy prostopadłe do osi spółrzędnych, to ruchy podstaw tychże prostopadłych nazywają się ruchami rzuconymi punktu A. Ich prędkości są:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{ds}{dt}\cos\alpha_x = v\cos\alpha_x; \qquad v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{ds}{dt}\cos\alpha_y = v\cos\alpha_y;$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{ds}{dt}\cos\alpha_z = v\cos\alpha_z.$$

Wielkość i kierunek prędkości v wynika ze związków:

Rys. 48.



$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2},$$

$$\cos\alpha_x = \frac{v_x}{v}; \quad \cos\alpha_y = \frac{v_y}{v}; \quad \cos\alpha_z = \frac{v_z}{v}.$$

Wzory powyższe zawierają w sobie twierdzenie o równoległościanie prędkości (rys. 48).

Na odwrót, można rozłożyć v na trzy składowe:

$$v_x = v\cos\alpha_x, \qquad v_y = v\cos\alpha_y, \qquad v_z = v\cos\alpha_z.$$

W równy sposób odnaleść można przyspieszenie ruchów rzuconych; będą one:

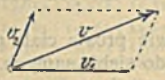
$$p_x = \frac{d^2x}{dt^2} = p\cos\beta_x, \quad p_y = \frac{d^2y}{dt^2} = p\cos\beta_y, \quad p_z = \frac{d^2z}{dt^2} = p\cos\beta_z$$

z powyższego: $p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}$,

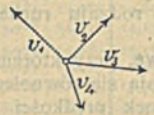
$$\cos\beta_x = \frac{p_x}{p}, \qquad \cos\beta_y = \frac{p_y}{p}, \qquad \cos\beta_z = \frac{p_z}{p}.$$

2. Równoległobok i wielobok prędkości i przyspieszeń. Kilka prędkości v_1, v_2, v_3 . . ., albo przyspieszeń p_1, p_2, p_3 . . ., można zastąpić jedną (wypadkową) prędkością v, lub przyspieszeniem p. Dla dwóch prędkości lub przyspieszeń wypadkową, tak co do wielkości, jak i kierunku, wyobraża przekątnia równoległoboku, którego boki przedstawiają wielkość i kierunek danych prędkości lub przyspieszeń (rys. 49).

Rys. 49.



Rys. 50.

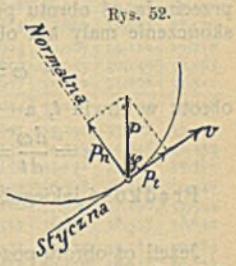


Rys. 51.

Wypadkową trzech prędkości lub przyspieszeń będzie przekątnia równoległościanu, wytworzonego z tych trzech wielkości danych. W sposób podobny wypadkową wielu prędkości lub przyspieszeń otrzymamy w postaci boku, zamykającego wielobok (przestrzenny), którego boki wyobrażają prędkości lub też przyspieszenia (rys. 50 i 51).

3. Przyspieszenie po stycznej i przyspieszenie po normalnej. Prosta, wskazująca kierunek prędkości $v = \frac{ds}{dt}$, jest styczną do toru, natomiast przyspieszenie całkowite p jest, ponajczęściej, ukośne do stycznej toru (rys. 52). Oznaczając promień krzywości toru przez ϱ i rozkładając p w kierunku stycznej i głównej normalnej na p_t i p_n, otrzymujemy:

Rys. 52.



przyspieszenie po stycznej $p_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$,

przyspieszenie po normalnej czyli **dośrodkowe** $p_n = \frac{v^2}{\varrho}$.

Z tego przyspieszenie całkowite:

$$p = \sqrt{p_t^2 + p_n^2};$$

dla kąta φ między v i p:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{p_n}{p_t} = \frac{v^2}{\varrho\frac{dv}{dt}}.$$

Przykład. Punkt, poruszający się po obwodzie koła o promieniu r z prędkością jednostajną v, ma stałe przyspieszenie po normalnej, czyli dośrodkowe, skierowane ku środkowi koła.

$$p_n = \frac{v^2}{r}.$$

4. Hodograf ruchu. Jeżeli wszystkie prędkości ruchu danego punktu wykreślimy co do ich wielkości i kierunku z jednego punktu w przestrzeni, to końce tych kres wytworzą krzywą, która nosi nazwę hodografu ruchu. Krzywa ta uzmysławia prawo zmiany prędkości, a jej styczne są równoległe do przyspieszeń całkowitych.

B. Ruch ciał sztywnych.

a. Ruchy cząstkowe.

Każdy nieskończenie mały ruch ciała nazywamy ruchem cząstkowym. *) Najprostszymi tego rodzaju ruchami, do których wszystkie inne można sprowadzić, są:

1. Przesunięcie cząstkowe, przy którem dwie proste ciała przecinające się nawzajem poruszają się równolegle do siebie samych. Przy tym ruchu wielkość i kierunek prędkości i przyspieszeń wszystkich punktów ciała są równe, a ich tory, przy przesunięciu skończonem, są zwrócone w jednym kierunku i przystają do siebie.

2. Obrót cząstkowy. Przy tym ruchu w danej chwili jedna z prostych ciała, t. zw. **oś obrotu**, znajduje się w stanie spokoju, a wszystkie inne punkty ciała poruszają się po krzywych, których płaszczyzny są prostopadłe do osi obrotu. Normalne torów wszystkich punktów ciała przecinają oś obrotu pod kątem prostym. Oznaczamy przez $d\varphi$ nieskończenie mały kąt obrotowy ciała w czasie dt i nazywamy:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$ **prędkością kątową**

obrotu w chwili t, a

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$ **przyspieszeniem kątowem.**

Prędkość jakiegobądź punktu ciała odległego o r od osi obrotu jest:

$$v = r\omega.$$

Jeżeli oś obrotu pozostaje przez pewien skończony czas w stanie spokoju, to tory wszystkich punktów ciała są liniami kołowemi, których środki leżą w osi obrotu. Wówczas jest:

Przyspieszenie po stycznej $p_t = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r\varepsilon.$

Przyspieszenie po normalnej $p_n = \frac{v^2}{r} = r\omega^2.$

*) Po niemiecku: Elementarbewegung, które to pojęcie odróżniać wypada od ruchu cząsteczkowego (Molekularbewegung) lub międzycząsteczkowego.

(Ciąg dalszy na str. 152.)

Prędkości kątowe ω dla $n = 0$ do 509 obrotów/min. *)

(por. str. następną).

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,0000	0,1047	0,2094	0,3142	0,4189	0,5236	0,6283	0,7330	0,8378	0,9425
10	1,0472	1,1519	1,2566	1,3614	1,4661	1,5708	1,6755	1,7802	1,8850	1,9897
20	2,0944	2,1991	2,3038	2,4086	2,5133	2,6180	2,7227	2,8274	2,9322	3,0369
30	3,1416	3,2463	3,3510	3,4558	3,5605	3,6652	3,7699	3,8746	3,9794	4,0841
40	4,1888	4,2935	4,3982	4,5029	4,6077	4,7124	4,8171	4,9218	5,0265	5,1313
50	5,2360	5,3407	5,4454	5,5501	5,6549	5,7596	5,8643	5,9690	6,0737	6,1785
60	6,2832	6,3879	6,4926	6,5973	6,7021	6,8068	6,9115	7,0162	7,1209	7,2257
70	7,3304	7,4351	7,5398	7,6445	7,7493	7,8540	7,9587	8,0634	8,1681	8,2729
80	8,3776	8,4823	8,5870	8,6917	8,7965	8,9012	9,0059	9,1106	9,2153	9,3201
90	9,4248	9,5295	9,6342	9,7389	9,8437	9,9484	10,053	10,158	10,263	10,367
100	10,472	10,577	10,681	10,786	10,891	10,996	11,100	11,205	11,310	11,414
110	11,519	11,624	11,729	11,833	11,938	12,043	12,147	12,252	12,357	12,462
120	12,566	12,671	12,776	12,881	12,985	13,090	13,195	13,299	13,404	13,509
130	13,614	13,718	13,823	13,928	14,032	14,137	14,242	14,347	14,451	14,556
140	14,661	14,765	14,870	14,975	15,080	15,184	15,289	15,394	15,499	15,603
150	15,708	15,813	15,917	16,022	16,127	16,232	16,336	16,441	16,546	16,650
160	16,755	16,860	16,965	17,069	17,174	17,279	17,383	17,488	17,593	17,698
170	17,802	17,907	18,012	18,117	18,221	18,326	18,431	18,535	18,640	18,745
180	18,850	18,954	19,059	19,164	19,268	19,373	19,478	19,583	19,687	19,792
190	19,897	20,001	20,106	20,211	20,316	20,420	20,525	20,630	20,735	20,839
200	20,944	21,049	21,153	21,258	21,363	21,468	21,572	21,677	21,782	21,886
210	21,991	22,096	22,201	22,305	22,410	22,515	22,619	22,724	22,829	22,934
220	23,038	23,143	23,248	23,353	23,457	23,562	23,667	23,771	23,876	23,981
230	24,086	24,190	24,295	24,400	24,504	24,609	24,714	24,819	24,923	25,028
240	25,133	25,237	25,342	25,447	25,552	25,656	25,761	25,866	25,970	26,075
250	26,180	26,285	26,389	26,494	26,599	26,704	26,808	26,913	27,018	27,122
260	27,227	27,332	27,437	27,541	27,646	27,751	27,855	27,960	28,065	28,170
270	28,274	28,379	28,484	28,588	28,693	28,798	28,903	29,007	29,112	29,217
280	29,322	29,426	29,531	29,636	29,740	29,845	29,950	30,055	30,159	30,264
290	30,369	30,473	30,578	30,683	30,788	30,892	30,997	31,102	31,206	31,311
300	31,416	31,521	31,625	31,730	31,835	31,940	32,044	32,149	32,254	32,358
310	32,463	32,568	32,673	32,777	32,882	32,987	33,091	33,196	33,301	33,406
320	33,510	33,615	33,720	33,824	33,929	34,034	34,139	34,243	34,348	34,453
330	34,558	34,662	34,767	34,872	34,976	35,081	35,186	35,291	35,395	35,500
340	35,605	35,709	35,814	35,919	36,024	36,128	36,233	36,338	36,442	36,547
350	36,652	36,757	36,861	36,966	37,071	37,176	37,280	37,385	37,490	37,594
360	37,699	37,804	37,909	38,013	38,118	38,223	38,327	38,432	38,537	38,642
370	38,746	38,851	38,956	39,060	39,165	39,270	39,375	39,479	39,584	39,689
380	39,794	39,898	40,003	40,108	40,212	40,317	40,422	40,527	40,631	40,736
390	40,841	40,945	41,050	41,155	41,260	41,364	41,469	41,574	41,678	41,783
400	41,888	41,993	42,097	42,202	42,307	42,412	42,516	42,621	42,726	42,830
410	42,935	43,040	43,145	43,249	43,354	43,459	43,563	43,668	43,773	43,878
420	43,982	44,087	44,192	44,296	44,401	44,506	44,611	44,715	44,820	44,925
430	45,029	45,134	45,239	45,344	45,448	45,553	45,658	45,763	45,867	45,972
440	46,077	46,181	46,286	46,391	46,496	46,600	46,705	46,810	46,914	47,019
450	47,124	47,229	47,333	47,438	47,543	47,647	47,752	47,857	47,962	48,066
460	48,171	48,276	48,381	48,485	48,590	48,695	48,799	48,904	49,009	49,114
470	49,218	49,323	49,428	49,532	49,637	49,742	49,847	49,951	50,056	50,161
480	50,265	50,370	50,475	50,580	50,684	50,789	50,894	50,999	51,103	51,208
490	51,313	51,417	51,522	51,627	51,732	51,836	51,941	52,046	52,150	52,255
500	52,360	52,465	52,569	52,674	52,779	52,883	52,988	53,093	53,198	53,302

*) Np. dla $n = 70$, $\omega = 7{,}3304$; dla $n = 368$, $\omega = 38{,}537$.

Przy stałem ε obrót ciała około osi jest równomiernie przyspieszony lub zwolniony. Jeżeli $\varepsilon = 0$, to ω stałe, t. zn., że ciało obraca się jednostajnie. Oznaczając w tym razie ilość obrotów/min. przez n, mamy:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = 0{,}10471976\, n = \frac{v}{r}; \quad n = \frac{60\omega}{2\pi} = 9{,}549296\,59\,\omega = \frac{60v}{2\pi r};$$

$$v = \frac{2\pi r n}{60} = 0{,}10471976\, rn = r\omega.$$

Wartość ω dla danego n patrz tabl. na str. poprzedniej.

3. Jeżeli ciało oprócz obrotu cząstkowego podlega jeszcze równocześnie przesunięciu cząstkowemu, to wykonywa ono cząstkowy ruch śrubowy. Przy prędkości kątowej obrotu ω i prędkości przesunięcia v_0, prędkość całkowita punktu odległego o r od osi obrotu jest:

$$v = \sqrt{(r\omega)^2 + v_0^2}.$$

Kąt pochylenia linii śrubowej, którą dany punkt zakreśla, wynika ze związku:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_0}{r\omega}.$$

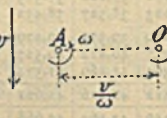
Każdy ruch cząstkowy ciała sztywnego, najogólniej pojęty, jest ruchem śrubowym.

b. Składanie i rozkładanie obrotów i przesunięć.

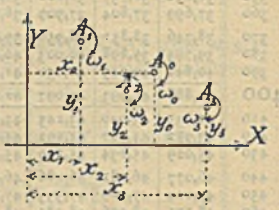
1. Wynikiem **złożenia dwóch przesunięć** jest znowu przesunięcie; jego prędkość da się oznaczyć przy pomocy równoległoboku prędkości jako wypadkowa obydwóch przesunięć składowych. Wogóle przy rozkładaniu i składaniu przesunięć można się posługiwać równoległobokiem lub też wielobokiem prędkości (por. str. 149).

2. **Obrót** około osi A (rys. 53), o prędkości kątowej ω, złożony z przesunięciem o prędkości v, **prostopadłem do osi obrotu,** daje jako

Rys. 53.



Rys. 54.



wynik obrót około osi O, leżącej w odległości $v : \omega$, równolegle do A, w jednej z nią płaszczyźnie, prostopadłej do v. Prędkość kątowa obrotu wypadkowego ma tę samą wielkość i kierunek, co ω.

Ze złożenia dowolnego przesunięcia z obrotem powstaje ruch śrubowy około osi, równoległej do osi obrotu.

3. Obroty około osi równoległych. Oznaczamy położenia osi spółrzędnemi $x_1 y_1$, $x_2 y_2$ . . . ich punktów przejścia A_1, A_2 . . . przez jakąbądź płaszczyznę (rys. 54). Prędkość kątowa obrotu wypadkowego jest $\omega_0 = \Sigma\omega$, a położenie równoległej osi obrotu A_0 otrzymujemy z wzorów:

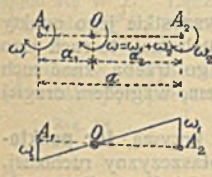
$$x_0 = \frac{\Sigma x\omega}{\Sigma\omega} \quad \text{i} \quad y_0 = \frac{\Sigma y\omega}{\Sigma\omega}.$$

Dwa obroty równokierunkowe około osi A_1 i A_2 z prędkościami ω_1 i ω_2, mają obrót wypadkowy z prędkością kątową $\omega = \omega_1 + \omega_2$ około osi O, która leży w płaszczyznie przełożonej przez A_1 i A_2. Odległości a_1 i a_2 wynikają z równań:

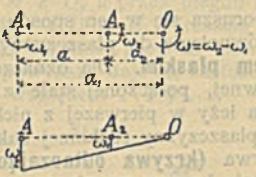
$$a_1 = \frac{\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} a \quad \text{i} \quad a_2 = \frac{\omega_1}{\omega_1 + \omega_2} a.$$

Wykreślne oznaczenie O patrz rys. 55.

Rys. 55.



Rys. 56.



Rys. 57.

Oś wypadkowa O dwóch obrotów (rys. 56) różnokierunkowych, około której odbywa się obrót z prędkością kątową $\omega = \omega_2 - \omega_1$, leży poza osiami A_1 i A_2, po stronie większej prędkości kątowej; odległości zaś a_1 i a_2 wynikają z wzorów:

$$a_1 = \frac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1} a \quad \text{i} \quad a_2 = \frac{\omega_1}{\omega_2 - \omega_1} a.$$

Wykreślenie patrz rys. 56. Jeżeli w tym wypadku $\omega_1 = \omega_2$, to ruch wypadkowy staje się przesunięciem równoległem, o prędkości $v = a\omega_1 = a\omega_2$, a mianowicie prostopadłem do płaszczyzny obydwóch osi.

4. Obroty około osi przecinających się nawzajem. Oś wypadkową obrotów około osi, które wszystkie przecinają się w jednym punkcie, oznacza się w sposób następujący: Biorąc punkt przecięcia O za początek, odcina się na osiach prędkości kątowe ω_1, ω_2 . . . w ten sposób, aby, patrząc ku O, mieć obroty w kierunku ruchu wskazówki zegara; z tych odcinków zestawia się wielobok, względnie (dla dwóch obrotów) równoległobok prędkości kątowych (rys. 57), jak to się robi ze siłami lub prędkościami.

5. Dwa obroty około osi A_1 i A_2 (mijających się w przestrzeni pod kątem α), złożone razem, dają **ruch śrubowy**. Kierunek osi

tego ruchu, oraz jego prędkość kątowa ω, wyznacza się z równoległoboku prędkości kątowych ω_1 i ω_2 obrotów składowych, których osie A_1 i A_2 przecinałyby się pod takimże kątem α (rys. 57, str. 153) jak kąt mijania się osi.

Oś wypadkowa przecina pion wspólny obydwóch danych osi, którego długość $= e$, w punkcie, oddalonym od osi A_1 i A_2 o:

$$e_1 = \frac{\omega_2 (\omega_2 + \omega_1 \cos \alpha)}{\omega^2} e \quad \text{i} \quad e_2 = \frac{\omega_1 (\omega_1 + \omega_2 \cos \alpha)}{\omega^2} e.$$

Prędkość przesunięcia v_0 wynosi:

$$v_0 = \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega} e \sin \alpha, \quad \text{gdzie } \omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1 \omega_2 \cos \alpha}.$$

c. Ruch płaski (Geometrya kinematyczna).

I. Stosunki ruchu płaszczyzny sztywnej.

α. Objaśnienia i zasady.

Jeżeli ciało porusza się w ten sposób, że wszystkie jego punkty zakreślają tory, równoległe do płaszczyzny nieruchomej, to ruch jego nazywa się **ruchem płaskim.** Dla oznaczenia go trzeba znać ruch płaszczyzny sztywnej, połączonej stale z ciałem, względem drugiej płaszczyzny, która leży w pierwszej z nich.

Każdy punkt płaszczyzny ruchomej zakreśla krzywą, **tor punktowy,** a każda krzywa **(krzywa odtaczająca)** płaszczyzny ruchomej, odtacza odpowiednią krzywą na płaszczyznie stałej **(tor odtoczony).**

Chwilowy punkt styczny krzywej odtoczonej z torem odtaczającym nazywa się **punktem ślizgania,** a ich wspólna normalna **normalną zetknięcia.**

Chwilowy ruch sztywnej płaszczyzny w płaszczyznie stałej zasadza się na ruchu cząstkowym około **chwilowego punktu obrotowego** czyli **biegunа.**

Przez biegun przechodzą normalne wszystkich torów punktowych, jak również normalne zetknięć wszystkich par krzywych odtaczających z torami odtoczonymi. Chwilowy zatem kierunek ruchu wszystkich punktów jest prostopadły do promieni normalnych czyli do prostych, łączących punkt dany z biegunem.

Do ścisłego wyznaczenia bieguna trzeba znać dwie pary krzywych odtaczających i torów odtoczonych, lub też dwa tory punktowe, a będzie nim punkt przecięcia się obydwóch normalnych zetknięcia lub też normalnych obydwóch torów punktowych.

Punkty płaszczyzny nieruchomej, na które po kolei przypada biegun, tworzą **nieruchomy tor bieguna,** a takie same punkty płaszczyzny ruchomej tworzą **ruchomy tor bieguna.**

Obydwa tory biegunowe stykają się każdorazowo w biegunie i toczą się wzajemnie po sobie. Dla każdego ruchu płaskiego istnieje tylko jedna para torów biegunowych.

Ruch względny płaszczyzny nieruchomej względem ruchomej, t. j. ruch odwrotny, daje te same tory biegunowe, wówczas jednak tor ruchomy staje się nieruchomym, a nieruchomy ruchomym. Dla każdej pary krzywych krzywa odtaczająca staje się torem odtoczonym i na odwrót.

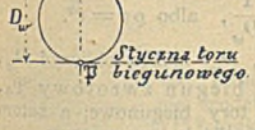
β. Stosunki krzywości.

Punkty płaszczyzny ruchomej, znajdujące się chwilowo w punktach zwrotnych W swego toru, t. j. w punktach zwrotnych płaszczyzny, leżą na kole, mającem średnicę D_w, na t. zw. **kole zwrotowem**, które styka się ze styczną toru biegunowego w biegunie $\mathfrak{P}$. Normalna toru biegunowego przecina koło zwrotowe w **biegunie zwrotowym** $\mathfrak{P}_0$, przez który przechodzą wszystkie styczne zwrotowe (rys. 58).

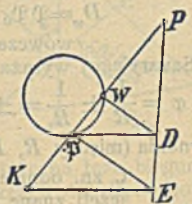
Posiłkując się punktem zwrotnym, można dla punktu P dowolnego toru punktowego wykreślić **środek krywości** K w sposób następujący (rys. 59):

$\mathfrak{P}$ = biegun, W = punkt zwrotny na promieniu normalnym $\mathfrak{P}P$. Przez biegun $\mathfrak{P}$ i punkt P kreślimy dwa dowolne promienie, przecinające się w D. Łączymy W z D, a przez biegun $\mathfrak{P}$ kreślimy równoległą do WD, która przetnie PD w E. Wreszcie przeprowadzona przez E równoległa do $D\mathfrak{P}$, przetnie promień normalny w środku krzywości K. (Wykreślenie powyższe daje się zastosować do wszystkich możliwych położeń W względem P i $\mathfrak{P}$).

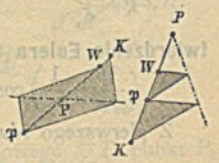
Rys. 58.



Rys. 59.



Rys. 60.



Ten sam rysunek, oznakowany w sposób odpowiedni, służy również do wykreślenia punktu P ze znanych W i środka krzywości K, lub też wreszcie do odnalezienia punktu zwrotnego W dla danego punktu P i przynależnego środka krzywości K.

Można zatem każdorazowo odnaleźć koło zwrotowe, znając dwa tory punktowe, albo też dwa tory odtoczone, o czem poniżej.

Punkt przecięcia się obydwóch normalnych jest biegunem $\mathfrak{P}$. Z pomocą poprzedniego wykreślenia oznaczyć możemy na obydwóch promieniach normalnych dwa punkty zwrotne W_1 i W_2; przez nie i przez biegun przechodzi koło zwrotowe. (Najdogodniejsze wykreślenie znajduje się na rys. 62, str. 156).

Uwaga. Przy zastosowaniu powyższego wykreślenia zważać należy na to, że sposób ten (rys. 60) zasadza się na wykreśleniu dwóch trójkątów podobnych na podstawach $\mathfrak{P}K$ i $\mathfrak{P}W$, które to trójkąty stykają się w biegunie $\mathfrak{P}$. Po

dwa wierzchołki każdego z nich leżą w jednej prostej, przechodzącej przez P. Znając P, prowadzimy tę linię dla wierzchołków przez P, wykreślamy obydwa podobne trójkąty i otrzymujemy przez to, mając W, środek krzywości K i na odwrót. Jeżeli zaś szukamy P, to rysujemy obydwa podobne trójkąty, a linia pociągnięta przez ich wierzchołki przetnie promień normalny w P.

Przy ruchu odwrotnym punkt P byłby środkiem krzywości toru punktowego, zakreślonego w danym razie przez środek krzywości K. Z tego powodu punkt i środek krzywości jego toru nazywają się **punktami skojarzonymi.**

Dla każdej pary torów odtoczonych środki krzywości są również punktami skojarzonymi w znaczeniu powyższem, t. zn., że wykreślenie podane służyć może również dla takich torów, jeżeli za punkt P uważać będziemy środek krzywości toru odtoczonego. (Położenie zatem środka krzywości toru odtoczonego nie zależy od położenia punktu ślizgania na promieniu normalnym). Również i **środki krzywości torów biegunowych** są punktami skojarzonymi.

Rys. 61.

W rysunku 61 oznaczają:

r odległość punku P od bieguna $\mathfrak{P}$,

r_1 odległość środka krzywości K od bieguna $\mathfrak{P}$,

z odległość punktu P od punktu zwrotnego W,

φ kąt między promieniem normalnym, a normalną toru biegunowego,

R i R_1 promienie krzywości obydwóch torów biegunowych,

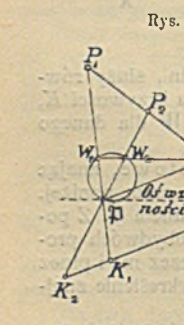
$D_w = \mathfrak{P}\mathfrak{P}_0$ średnicę koła zwrotowego, wówczas

twierdzenie Eulera (Savary'ego) wyraża się w postaci:

$$\left(\frac{1}{r} \pm \frac{1}{r_1}\right)\cos\varphi = \frac{1}{R} \pm \frac{1}{R_1} = \pm\frac{1}{D_w}, \quad \text{albo} \quad \varrho z = r^2.$$

Z pierwszego równania (między R, R_1, D_w) można obliczyć D_w, t. zn. odnaleść biegun zwrotowy $\mathfrak{P}_0$, jeżeli znane są tory biegunowe; a zatem można też wykreślić koło zwrotowe.

Rys. 62.



Znając dwa tory punktowe lub dwa tory odtoczone, można bardzo dogodnie zastosować wykreślenie rysunku 59 str. 155 do oznaczenia koła zwrotowego, a mianowicie najdogodniej w sposób następujący (rys. 62): Przez P_1 i P_2 oznaczamy punkty, zakreślające obydwa tory punktowe, wzgl. dnie środki krzywości krzywych odtaczających, przez K_1 i K_2 środki krzywości torów punktowych, względnie torów odtoczonych.

Wykreślimy P_1P_2 i K_1K_2, które się przecinają w E, a dalej $\mathfrak{P}D$ równolegle do K_1E, a przez D równoległą do $\mathfrak{P}E$, która przecina

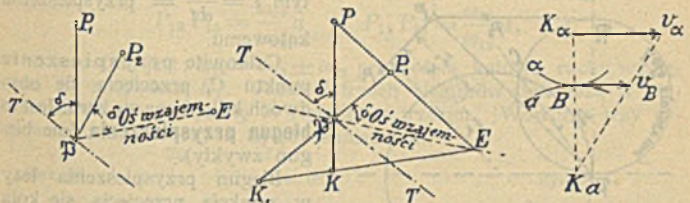
P_1K_1 i P_2K_2 w punktach zwrotnych W_1 i W_2. Koło zwrotowe przechodzi wówczas przez $\mathfrak{P}$, W_1 i W_2.

Koło zwrotowe ruchu odwrotnego nazywa się **kołem powrotowem.** Przystaje ono do koła zwrotowego i leży symetrycznie do niego względem stycznej torów biegunowych. Tory odtoczone, których środki krzywości leżą na kole powrotowem, mają w danej chwili w punktach zwrotnych wspólne punkty styczne z krzywemi odtaczającemi. W **biegunie powrotowym,** t. j. w punkcie koła powrotowego, leżącym na przeciwległym końcu średnicy, przełożonej przez biegun, przecinają się wszystkie te linie proste płaszczyzny ruchomej, które stykają się ze swymi torami odtoczonymi w punktach powrotnych (ostrzach); punkty te znowu leżą na kole powrotowem.

7. Wykreślenie Bobilliera.

Linia prosta $\mathfrak{P}E$ na rys. 62, str. 156 nazywa się osią wzajemności (kolineacyi). Promień normalny $\mathfrak{P}P_2$ (rys. 63) tworzy z nią kąt δ; tej samej wielkości kąt tworzy drugi promień normalny $\mathfrak{P}P_1$ ze styczną toru biegunowego $\mathfrak{P}T$. Na tej właściwości opiera się wykreślenie Bobilliera, służące do znalezienia środka krzywości K dla dowolnego

Rys. 63. Rys. 64. Rys. 65.



punktu P (rys. 64). Dane: styczna toru biegunowego $\mathfrak{P}T$, punkt P_1 i skojarzony z nim środek krzywości K_1. Do $P_1\mathfrak{P}$ dostawiamy kąt δ = kątowi $T\mathfrak{P}P$ i kreślimy linię PP_1; a natenczas linia łącząca E z K_1 przetnie promień normalny $P\mathfrak{P}$ w punkcie K.

2. Stosunki prędkości płaszczyzny sztywnej.

Prędkość v każdego punktu P jest prostopadłą do promienia normalnego $\mathfrak{P}P = r$ i wyraża się wzorem:

$$v = r\omega,$$

w którym ω oznacza prędkość kątową płaszczyzny w danej chwili. Dla punktu, znajdującego się w biegunie $\mathfrak{P}$, $v = 0$.

Jeżeli (rys. 65) K_α i K_a są środkami krzywości pary krzywych, odtaczającej i odtaczanej (α, a), a v_α prędkością środka K_α, to prosta $v_\alpha K_a$ odcina na stycznej obydwóch krzywych kresę Bv_B, która to

kresa wyobraża prędkość v_B punktu styczności B, t. zw. **prędkość wzajemną.**

Prędkość wzajemna u bieguna jest zatem równa i równoskierowana z prędkością bieguna zwrotowego $\mathfrak{P}_0$:

$$u = \omega D_w. \qquad (D_w = \text{średnica koła zwrotowego}).$$

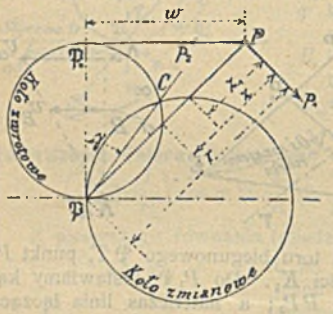
Punkty końcowe prędkości prostopadłych (t. j. prędkości obróconych o 90°) tworzą system punktów, który jest podobny i leży podobnie do systemu punktów samej płaszczyzny, mając za punkt podobieństwa biegun $\mathfrak{P}$ (np. dla prostej prosta równoległa).

3. Stosunki przyspieszenia płaszczyzny sztywnej.

a. Koło zwrotowe i koło wzajemne. Biegun przyspieszenia.

Punkty koła zwrotowego nie podlegają wcale przyspieszeniu po normalnej. Punkty, dla których przyspieszenie po stycznej równa się zeru, leżą na drugiem kole, tak zw. **kole zmianowem** (rys. 66), którego znów środek znajduje się na stycznej toru biegunowego; średnica tego koła $= \frac{u\omega}{\varepsilon} = \frac{\omega^2}{\varepsilon} D_w$. We wzorze tym $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$ = przyspieszeniu kątowemu.

Rys. 66.



Całkowite przyspieszenie punktu C, przecięcia się obydwóch kół, równa się zeru. Jest to **biegun przyspieszenia** (nie biegun zwykły).

Biegun przyspieszenia leży w punkcie przecięcia się koła zwrotowego z tym promieniem normalnym, który z normalną toru biegunowego tworzy kąt γ; $\operatorname{tg}\gamma = \varepsilon : \omega^2$.

β. Przyspieszenie całkowite p dowolnego punktu P systemu

wynika (rys. 66):

1. jako wypadkowa z przyspieszenia po normalnej $p_n = z\omega^2$ i przyspieszenia po stycznej . . . . . $p_t = z_1\varepsilon = z_1\frac{d\omega}{dt}$;

z i z_1 oznaczają tu odległości punktu P od koła zwrotowego i zmianowego;

2. jako wypadkowa przyspieszenia $p_1 = r\varepsilon$, prostopadłego do promienia normalnego i przyspieszenia $p_2 = w\omega^2$, w kierunku ku biegunowi zwrotowemu $\mathfrak{P}_0$ (w oznacza odległość punktu P od $\mathfrak{P}_0$. Biegun $\mathfrak{P}$ podlega przyspieszeniu $D_w\omega^2$ w kierunku ku $\mathfrak{P}_0$);

3. jako proporcyonalne do odległości punktu P od bieguna przyspieszenia C, a zarazem tworzące z PC kąt γ, przyczem $\operatorname{tg}\gamma = \varepsilon : \omega^2$; punkt leżący w odległości 1 od C ulega przyspieszeniu $\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$.

Końce przyspieszeń punktów, należących do **prostej**, leżą znowu w prostej.

4. Jeżeli v jest prędkością rzeczywistą, PV prędkością prostopadłą dowolnego punktu P (rys. 67), K zaś środkiem krzywości toru punktu P, a PR wreszcie kierunkiem całkowitego przyspieszenia p punktu P, znanym np. z hodografu (por. str. 150), to można wyznaczyć p, kreśląc VH prostopadle do PV, a VJ równolegle do KH; wówczas jest: $PJ = p$.

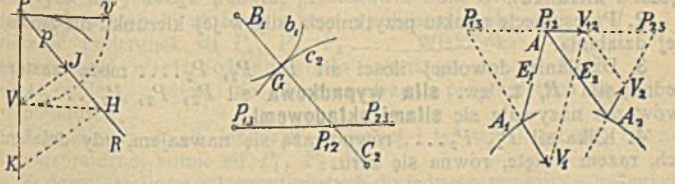
4. Ruch względny trzech płaszczyzn.

Trzy bieguny ruchu względnego trzech płaszczyzn, poruszających się we wspólnej płaszczyznie, leżą w jednej prostej. Jeżeli znamy bieguny P_{13} i P_{23}, oraz prędkości kątowe ω_{13} i ω_{23} ruchu względnego płaszczyzn E_1 i E_2 względem płaszczyzny E_3, to otrzymamy biegun P_{12} ruchu względnego E_2 względem E_1 w ten sam sposób, jak oś wypadkową O przy składaniu obrotów około osi równoległych (por. 3. str. 153). Długości prostych, łączących bieguny, są wówczas:

$$P_{12}P_{13} = \frac{\omega_{23}}{\omega_{12}}a \quad \text{i} \quad P_{12}P_{23} = \frac{\omega_{13}}{\omega_{12}}a,$$

we wzorze tym jest: $\omega_{12} = \omega_{13} \pm \omega_{23}$ prędkością kątową ruchu względnego E_2 względem E_1. Jeżeli z trzech biegunów dwa leżą w nieskończoności, to dzieje się to również z trzecim. Wówczas trzy ruchy względne płaszczyzn są przesunięciami.

Rys. 67. Rys. 68. Rys. 69.



Jeżeli zależność ruchów E_1 i E_2 warunkuje się parą krzywych b_1 i c_2 (rys. 68), to biegun P_{12} leży w przecięciu się prostej biegunowej $P_{13}P_{23}$ z normalną B_1C_2 puktu zetknięcia się tej pary.

Jeżeli płaszczyzny E_1 i E_2 łączą się ze sobą przegubowo w punkcie A (rys. 69), to punkt ten jest biegunem P_{12}. Punkt końcowy V_{12} prędkości prostopadłej $P_{12}V_{12}$ punktu P_{12} można oznaczyć z prędkości prostopadłych A_1V_1 punktu A_1 płaszczyzny E_1, względnie A_2V_2

punktu A_2 płaszczyzny E_2, przez wykreślenie $V_1 V_{12}$ równoległe do $A_1 A$ i $V_2 V_{12}$ równoległe do $A_2 A$. Biegun P_{13} leży wówczas na prostej $P_{12} V_{12}$, w jej przecięciu z $A_1 V_1$, a biegun P_{23} w przecięciu z $A_2 V_2$.

5. Ruch względny n płaszczyzn we wspólnej płaszczyźnie.

Ruch względny n takich płaszczyzn da się wogóle w zupełności oznaczyć przez:

$$k = 3n - 4$$

par zupełnie dowolnych krzywych odtaczających, z tym jednak warunkiem, żeby w każdej z n płaszczyzn leżały co najmniej trzy krzywe odtaczające.

Ilość wszystkich biegunów wynosi przytem $p = {}^1/_2\, n\,(n-1)$.

II. STATYKA CIAŁ SZTYWNYCH.

A. Składanie sił i par sił.

a. Zasady.

Jeżeli za objaw **działania siły** na ciało sztywne uważać będziemy pracę, którą taż siła przy dowolnym ruchu cząstkowym wykonywa, to musimy przyjąć następujące zasady:

1. Dla oznaczenia działania siły P należy znać jej wielkość, kierunek i położenie punktu jej przytknięcia. Siłę zatem można uzmysłowić sobie za pomocą rysunku jako kresę (prostą o oznaczonej długości i kierunku).

2. Przesunięcie punktu przytknięcia siły w jej kierunku nie zmienia jej działania.

3. Działanie dowolnej ilości sił P_1, P_2, P_3.... może zastąpić jedna siła R, t. zw. **siła wypadkowa** sił P_1, P_2, P_3...., które wówczas nazywają się **siłami składowemi.**

4. Kilka sił P_1, P_2.... równoważą się nawzajem, gdy działanie ich, razem wzięte, równa się zeru.

b. Siły przytknięte do jednego punktu.

1. Wielkość i kierunek **wypadkowej** R **dwóch sił** P_1 i P_2, **przytkniętych do jednego punktu**, wyobraża przekątnia równoległoboku, zbudowanego z P_1 i P_2. **(Równoległobok sił).**

Jeżeli kąt równoległoboku $\gamma = \alpha + \beta$, to (rys. 70) będzie:

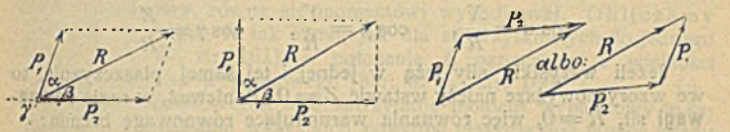
$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2 P_1 P_2 \cos\gamma},$$
$$\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = P_2 : P_1 : R.$$

Jeżeli $\gamma = \alpha + \beta = 90^0$ (rys. 71), to:

$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2}, \qquad \cos\alpha = \frac{P_1}{R}, \qquad \cos\beta = \frac{P_2}{R}, \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{P_1}{P_2}.$$

R **wykreśla się** najdogodniej za pomocą trójkąta sił (rys. 72): Kreśli się siły P_1 i P_2 bezpośrednio jednę za drugą z uwzględnieniem ich wielkości i kierunku; linia, zamykająca ten wielobok sił, daje wypadkową R.

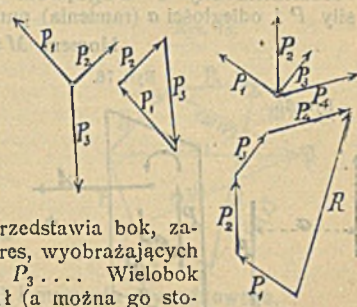
Rys. 70. Rys. 71. Rys. 72.



Naodwrót, można rozłożyć każdą siłę R na dwie siły składowe P_1 i P_2, leżące w dowolnym kierunku w tej samej płaszczyźnie, co R. W tym celu wykreśla się trójkąt sił z równoległych do obranych kierunków, przełożonych przez końce R; powstałe stąd boki trójkąta dają nam składowe P_1 i P_2.

Trzy siły P_1, P_2 i P_3, przytknięte do jednego punktu, równoważą się tylko wtedy, gdy leżą w jednej płaszczyźnie i dadzą się połączyć w trójkąt zamknięty, którego boki jeden za drugim ciągną się w jednym kierunku (rys. 73).

Rys. 73. Rys. 74.



2. Wielkość i kierunek **wypadkowej R większej ilości sił** P_1, P_2, P_3.... (rys. 74) **przytkniętych do jednego punktu,** przedstawia bok, zamykający wielobok, złożony z kres, wyobrażających wielkość i kierunek sił P_1, P_2, P_3.... Wielobok taki nazwano wielobokiem sił (a można go stosować ogólnie, a więc i do sił w przestrzeni, przytkniętych do jednego punktu).

Wypadkowa R sił, leżących w jednej i tej samej prostej, równa się algebraicznej sumie sił P_1, P_2, P_3....

Z dowolnej ilości sił, przytkniętych do jednego punktu, a będących w równowadze, można zawsze zestawić zamknięty wielobok sił.

Rachunkowo wyznaczamy siłę wypadkową n sił w sposób następujący: Rozkładamy każdą ze sił P_1, P_2, P_3... P_n na składowe w kierunku trzech prostopadłych osi spółrzędnych; oznaczając przez α_i, β_i, γ_i kąty, jakie tworzy siła P_i z osiami spółrzędnych, otrzymamy wzory składowych siły P_i:

$$X_i = P_i \cos\alpha_i, \qquad Y_i = P_i \cos\beta_i, \qquad Z_i = P_i \cos\gamma_i;$$

wstawiając w powyższe wzory po kolei: $i = 1, 2, 3, \ldots n$, otrzymujemy sumy algebraiczne:

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n = \Sigma(X_i),$$
$$Y = \Sigma(Y_i) \quad \text{i} \quad Z = \Sigma(Z_i),$$

z czego wynika wypadkowa:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Dla kątów α, β, γ, jakie tworzy R z osiami spółrzędnych:

$$\cos\alpha = \frac{X}{R}, \qquad \cos\beta = \frac{Y}{R}, \qquad \cos\gamma = \frac{Z}{R}.$$

Jeżeli wszystkie siły leżą w jednej i tej samej płaszczyznie, to we wzory powyższe należy wstawić $Z = 0$. Ponieważ, w razie **równowagi** sił, $R = 0$, więc równania warunkujące równowagę brzmią:

$$\Sigma(X_i) = 0, \qquad \Sigma(Y_i) = 0, \qquad \Sigma(Z_i) = 0.$$

c. Siły w jednej płaszczyznie.

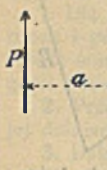
1. Objaśnienia.

1. Prostą, w której leży siła, nazwiemy **linią działania** siły.

Momentem siły P względem punktu O nazywamy iloczyn z siły P i odległości a (ramienia) punktu O od linii działania siły P:

$$\text{Moment } M = Pa.$$

Rys. 75.



Rys. 76.

Moment nazywamy dodatnym, gdy obrót odbywa się w kierunku ruchu wskazówki zegara, przy ruchu przeciwnym moment będzie odjemnym, przyczem wypada spoglądać na płaszczyznę zawsze z tej samej strony.

Jeżeli X i Y są składowemi siły P w kierunku osi spółrzędnych, a x i y spółrzędnemi punktu przytknięcia P, to moment względem początku spółrzędnych jest:

$$M = Pa = Yx - Xy.$$

2. **Parą sił** nazywamy dwie siły P równowielkie i do siebie równoległe, lecz przeciwnie skierowane (rys. 75). Iloczyn Pa z jednej siły P i wzajemnej ich odległości (ramienia) a nazywa się **momentem pary sił.** Dodatność albo odjemność tego momentu zależy od tego, czy obraca on płaszczyznę w kierunku ruchu wskazówki zegara, czy odwrotnie. Moment danej pary sił pozostaje wielkością stałą bez względu na to, dla którego punktu płaszczyzny oznaczymy wartość momentu obydwóch sił; można zatem parę sił w płaszczyznie dowolnie przemieszczać.

Osią pary sił nazywamy prostopadłą do płaszczyzny pary sił kresę $A = Pa$, która swą długością wyobraża wielkość momentu. Przyjęto, aby przystawiać te osie zawsze z tej strony płaszczyzny, z której widz uważałby moment jako dodatny.

2. Składanie sił.

1. Dowolną ilość sił, położonych w jednej płaszczyźnie, można zastąpić jedną wypadkową R. Względem każdego punktu płaszczyzny suma algebraiczna momentów wszystkich sił, czyli t. zw. **moment wypadkowy**, równa się momentowi wypadkowej. Obliczamy wielkość i kierunek R tak samo, jak dla sił przytkniętych do jednego punktu (por. **2.**, str. 161), a położenie R oznaczamy z wielkości i znaku momentu wypadkowego (por. **c. 2.**, str. 166).

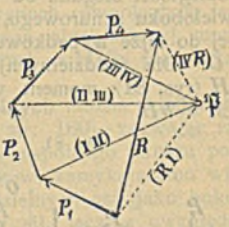
2. Dla wypadkowej $R = 0$ zatrzymuje moment wypadkowy tę samą wartość względem wszystkich punktów płaszczyzny; można wtedy zastąpić cały system sił **jedną wypadkową parą sił.**

3. Jeżeli nadto moment wypadkowy względem jakiegobądź punktu płaszczyzny będzie równy zeru, to cały system sił znajduje się w stanie równowagi.

4. **Wypadkowa sił równoległych** równa się algebraicznej sumie sił. Jej położenie wynika z momentu wypadkowego względem jakiegobądź punktu płaszczyzny.

Rys. 77.

Rys. 78.



3. Wykreślenie wypadkowej i momentu wypadkowego.

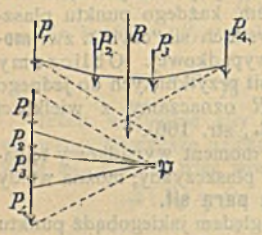
1 **Wypadkową R wielu sił** P_1, P_2, P_3... (rys. 77) będzie, tak co do wielkości, jak i kierunku, bok zamykający wielobok sił (rys. 78), podobnie jak pod **2.**, str. 161; położenie jej wyznaczamy zaś najdogodniej za pomocą wieloboku sznurowego (rys. 77).

W wieloboku czterech sił P_1, P_2, P_3, P_4 (rys. 78) przyjmujemy dowolny biegun Ψ, a w rys. 77, przedstawiającym położenie sił, kreślimy linię (12) między P_1 a P_2, równoległe do promienia (I II), tak samo (23) równolegle do (II III), (34) równolegle do (III IV) i wreszcie równolegle do (R I) i (IV R) prowadzimy proste (1 R) i (4 R), przecinające się w punkcie A; równoległa do R przez punkt A daje szukane położenie (linię działania) wypadkowej R.

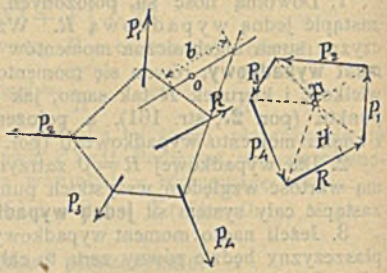
Położenie **wypadkowej sił równoległych** kreślimy za pomocą wieloboku sznurowego, w sposób wskazany w rys. 79.

2. **Wykreślanie momentów.** Szukając momentu wypadkowej sił P_1, P_2, P_3, P_4 względem punktu O (rys. 80), kreślimy wielobok sił, oraz sznurowy z dowolnie obranym biegunem $\mathfrak{P}$ i prowadzimy przez O równoległą do wypadkowej R. Oznaczywszy przez b kresę, odciętą

Rys. 79.



Rys. 80.

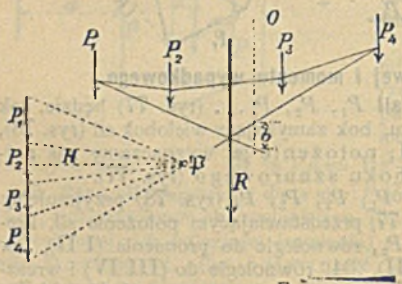


na tej równoległej przez obydwa boki zewnętrzne wieloboku sznurowego, a przez H odległość bieguna $\mathfrak{P}$ od wypadkowej R, otrzymamy jako **moment:**

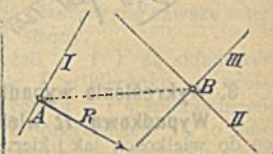
$$M = bH.$$

A zatem moment wypadkowej dowolnej ilości sił równa się iloczynowi z odległości bieguna od wypadkowej i z kresy, jaką odcinają dwa boki wieloboku sznurowego, zbiegające się na wypadkowej R, z równoległej do tejże wypadkowej, a poprowadzonej przez punkt momentowy O. Dla (oddzielnych) sił równoległych odległość bieguna jest stałą H (rys. 81); moment wypadkowej R względem O jest w tym razie $M = bH$.

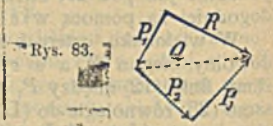
Rys. 81.



Rys. 82.



Rys. 83.



3. Dowolna ilość sił, leżących w jednej płaszczyźnie, znajduje się w stanie równowagi wtedy, gdy wszystkie siły można zestawić w jeden, zamknięty wielobok sił, a między ich linie działania wkreślić zamknięty wielobok sznurowy.

4. Siłę R można rozłożyć na trzy siły składowe, leżące z nią w jednej wspólnej płaszczyźnie, a których dane linie działania nie przecinają się w jednym punkcie. Dane (rys. 82) R i kierunki I, II, III. Przedłużamy R aż do przecięcia się z I w A, tak samo II z III w B i prowadzimy AB. Rozkładamy R w kierunku I i AB na P_1 i Q (rys. 83), a następnie jeszcze Q w kierunku II i III na P_2 i P_3. (Sposób Culmanna).

Zadanie powyższe można również rozwiązać sposobem **A. Rittera:** Względem punktu przecięcia się dwóch linii działania moment trzeciej składowej musi równoważyć moment wypadkowej R; z warunku tego oznaczamy tę składową, a w sposób podobny kolejno drugą i pierwszą. (Por. dział XV Statyka budowlana).

d. Składanie par sił.

I. Zastąpienie danej pary sił inną.

1. Parę sił można przesuwać dowolnie we własnej jej płaszczyźnie, jak również przenosić ją w równoległe do niej płaszczyzny ciała sztywnego, czyli innemi słowy: oś pary sił może przesuwać się dowolnie, równolegle do siebie samej.

2. Dwie pary sił mają jednakową wartość, jeżeli, leżąc w płaszczyznach równoległych do siebie, posiadają równoznaczny obrót i jednakowe momenty (t. j. jeżeli ich **osie** są sobie równe i jednokierunkowe).

Przy obrocie różnoznacznym, stan równowagi między dwiema parami sił ciała sztywnego następuje wtedy, gdy momenty ich są równowielkie, a płaszczyzny równoległe.

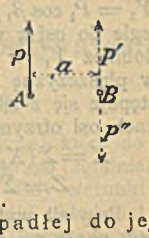
2. Wypadkową par sił w płaszczyznach równoległych jest taka para sił, której moment równa się sumie algebraicznej momentów wszystkich danych par, oddzielnie wziętych, a której płaszczyzna jest równoległa do ich płaszczyzn.

3. Pary sił w płaszczyznach dowolnych można składać, jak siły, przytknięte do jednego punktu (por. str. 160), zsuwając ich osie, równolegle do nich samych, do jednego wspólnego punktu początkowego. Oś wypadkowa równa się bokowi zamykającemu wielobok, t. zw. wielobok osiowy, złożony z oddzielnych osi, jako boków.

(Rachunkowe wyznaczenie, jak dla sił, lecz z uwzględnieniem właściwości par; por. **2.**, str. 161).

4. Równoległe przesunięcie siły. Aby siłę P przenieść z punktu przytknięcia A (rys. 84) do jakiegobądź punktu B, należy przytknąć do punktu B dwie siły P' i P'', równolegle do P i równej z nią wielkości, lecz różne między sobą co do kierunku. Zamiast siły P mamy natenczas siłę P' równowartą, lecz przytkniętą do punktu B i parę sił PP'', o momencie $= Pa$.

Rys. 84.



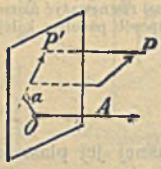
Naodwrót, można złożyć siłę P i parę sił, leżące w jednej i tej samej płaszczyźnie, w jednę wypadkową siłę przez odpowiednie przesunięcie pary.

Nie można złożyć pary sił i siły prostopadłej do jej płaszczyzny w jednę siłę lub w jednę parę sił.

c. Siły wobec ciała sztywnego.

1. Momenty sił względem prostej. Moment siły P względem prostej A (rys. 85), jest to iloczyn z rzutu P' siły P na płaszczyznę prostopadłą do tejże prostej i z oddalenia a punktu przejścia prostej przez płaszczyznę O od rzutu P' siły (a = najkrótsze oddalenie siły P od prostej A). Momenty są albo dodatne, albo odjemne, zależnie od tego, czy obrót ich, patrzącemu nań w kierunku osi dodatnej, przedstawia się zgodnie z kierunkiem obrotu wskazówki zegara, czy przeciwnie.

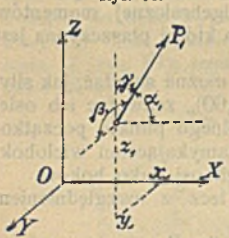
Rys. 85.



Suma algebraiczna momentów względem jednej dowolnej prostej, wziętych oddzielnie, nazywa się **momentem wypadkowym** sił względem tejże prostej

2. Składanie sił. Dowolną ilość dowolnie skierowanych sił, działających na dane ciało, można zawsze złożyć w jednę pojedyńczą siłę, przyłożoną do dowolnego punktu O ciała i jednę parę sił. W tym celu przesuwa się wszystkie siły do O i tam składa z nich jednę wypadkową (por. str. 161); powstałe wskutek tych przesunięć (por. d. 4., str. 165) pary sił należy połączyć w jednę wypadkową parę, zgodnie z d. 3., str. 165. Wielkość i kierunek wypadkowej R nie zależą od położenia punktu O.

Rys. 86.



Wogóle w każdem ciele znajduje się tylko jedna, jedyna prosta, będąca miejscem geometrycznem tych punktów, względem których płaszczyzna wypadkowej pary sił jest prostopadłą do wypadkowej siły R (czyli oś wypadkowej pary sił zlewa się z R). Ta prosta, biegnąca równolegle do R, nazywa się **osią centralną** układu sił. Moment odnośnej wypadkowej pary sił jest najmniejszością.

Wogóle istnieje niezliczone mnóstwo sposobów zastąpienia danego układu sił przez dwie mijające się siły.

Obliczenie siły wypadkowej R i pary sił (rys. 86):

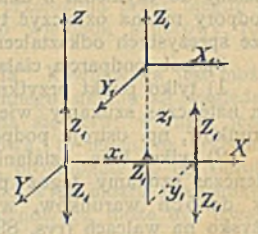
Przyjmujemy dowolny układ prostokątny osi spółrzędnych z początkiem w O, rozkładamy siłę P_1 w kierunkach tych osi na: $X_1 = P_1 \cos \alpha_1$, $Y_1 = P_1 \cos \beta_1$, $Z_1 = P_1 \cos \gamma_1$, następnie przesuwamy X_1 równolegle do osi z w płaszczyznę xy, a w niej równolegle w oś x; podobnież Y_1 w płaszczyznę yz i w niej w oś y; tak samo Z_1 w płaszczyznę zx, a następnie w oś z. W tenże sam sposób postępuje się z siłami P_2, P_3 . . . . Z tych sił składowych w kierunkach osi otrzymamy wypadkowe:

$$X = \Sigma(X_i) = \Sigma(P_i \cos \alpha_i); \qquad Y = \Sigma(Y_i) = \Sigma(P_i \cos \beta_i),$$
$$Z = \Sigma(Z_i) = \Sigma(P_i \cos \gamma_i); \qquad (i = 1, 2, 3 \ldots).$$

Pary sił, wytworzone przez przesunięcie sił, mają momenty z obrotem około osi x, y i z (rys. 87):

$$\left.\begin{aligned} L &= \Sigma(y_i Z_i - z_i Y_i) \\ M &= \Sigma(z_i X_i - x_i Z_i) \\ N &= \Sigma(x_i Y_i - y_i X_i) \end{aligned}\right\} (i=1, 2, 3 \ldots).$$

Rys. 87.



Wypadkowa trzech sił X, Y i Z jest:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2};$$

tworzy ona z osiami kąty α, β, γ, których:

$$\cos\alpha = \frac{X}{R}, \quad \cos\beta = \frac{Y}{R}, \quad \cos\gamma = \frac{Z}{R}.$$

Wypadkowa para trzech par sił:

$$G = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2};$$

oś jej tworzy z osiami spółrzędnych kąty λ, μ, ν, dla których:

$$\cos\lambda = \frac{L}{G}, \quad \cos\mu = \frac{M}{G}, \quad \cos\nu = \frac{N}{G}.$$

Wszystkie siły składają się w jednę siłę wypadkową bez pary sił (gdy $G = 0$), jeżeli:

$$XL + YM + ZN = 0,$$

a w wypadkową parę sił bez siły wypadkowej (gdy $R = 0$), jeżeli:

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = 0.$$

W płaskim układzie sił, w płaszczyznie xy jest:

$$L = 0; \qquad M = 0; \qquad Z = 0, \text{ a } G = N; \text{ i t. d.}$$

3. Równowaga sił. Ciało, będące pod działaniem dowolnej ilości sił P_1, P_2, P_3 . . ., pozostaje w stanie równowagi tylko w tym razie, gdy dla tych sił nie istnieje wcale, ani siła wypadkowa, ani wypadkowa para sił, t. zn. gdy wielkości te stają się zerami. Z powyższego zatem wynika sześć równań warunkujących równowagę sił, działających na ciało sztywne, swobodnie ruchome:

$$\Sigma(X_i) = 0, \qquad \Sigma(Y_i) = 0, \qquad \Sigma(Z_i) = 0;$$

$$\Sigma(y_i Z_i - z_i Y_i) = 0, \quad \Sigma(z_i X_i - x_i Z_i) = 0, \quad \Sigma(x_i Y_i - y_i X_i) = 0.$$

W płaskim układzie sił, w płaszczyznie xy jest:

$$\Sigma(X_i) = 0, \qquad \Sigma(Y_i) = 0, \qquad \Sigma(x_i Y_i - y_i X_i) = 0.$$

B. Równowaga sił w podpartych ciałach sztywnych.

a) Odpory (oddziaływania stałych podpór).

1. Siły oddziaływające podpór stałych (odpory, reakcye), które do obliczeń równowagi wprowadzić należy jako siły zewnętrzne (zgodnie z 7., str. 169), występują w zasadzie jako nieznajome. Gdy warunki równowagi wystarczają do oznaczenia odporów, to taki układ ciał (system) nazywa się: **statycznie oznaczalnym.** W razie przeciwnym

mamy do czynienia z układem **statycznie nieoznaczalnym**, w którym odpory można oznaczyć tylko przy pomocy warunków, wynikających ze sprężystych odkształceń ciała.

Sposób podparcia ciała może nam określać:

1) tylko punkt przytknięcia odporu (lecz nie jego linię działania); a natenczas szukamy wielkości i linii działania siły z dwóch warunków, np. ustroju podpory [np. łożysko przegibne (rys. 88)].

2) tylko linię działania (bez punktu przytknięcia) odporu, a natenczas szukamy tegoż punktu przytknięcia, oraz wielkości odporu z dwóch warunków, wynikających np. z ustroju podpory [np. łożysko na walcach (rys. 89)].

3) punkt przytknięcia i linię działania, a natenczas szukamy wielkości siły z jednego warunku, np. ustroju podpory [np. łożysko przegibne na walcach (rys. 90)].

4) nie znamy ani punktu przytknięcia, ani linii działania, ani wielkości siły; szukamy wszystkich trzech, do czego niezbędne trzy warunki dodatkowe.

Rys. 88.

Rys. 89.

Rys. 90.

2. Jedna podpora stała. Warunkowi równowagi staje się zadosyć, jeżeli wypadkowa sił zewnętrznych przechodzi przez punkt stały. Jedynie możliwe przez podparcie w sposób podany powyżej pod 1). Odpór równa się wypadkowej, ma jednak kierunek przeciwny. Równowagę nazywamy **trwałą** (stabil) lub **nietrwałą** (labil), zależnie od tego, czy para sił, wytworzona przy drobnej zmianie położenia ciała, stara się ciało powrócić do pierwotnego stanu równowagi, czy też oddalić je od niego; **obojętną** nazywamy równowagę wtedy, gdy nowe położenie ciała jest znów stanem równowagi.

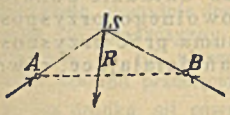
3. Podparcie płaszczyzny w dwóch punktach. W tym przypadku równowaga jest tylko wtedy możliwa, gdy wszystkie siły, leżące w tej płaszczyźnie, dadzą się złączyć w jednę wypadkową R, przechodzącą przez punkt przecięcia się S obydwóch odporów A i B (rys. 91). A i B są oznaczalne, jeżeli ze sposobu podparcia wynika położenie ich punktu przecięcia się S na R; ma to miejsce, np., gdy znane są linie działania odporów A i B, lub jeżeli A i B są równoległe do R. W ostatnim przypadku do oznaczenia odporów A i B służyć mogą momenty (str. 162) lub też wielobok sił i wielobok sznurowy (rys. 92) w sposób następujący: linie wieloboku sznurowego, równoległe do zewnętrznych promieni biegunowych a_1 i b_1, przecinają linie działa-

nia A i B w punktach A_1 i B_1. Prosta, przełożona przez biegun $\mathfrak{P}$, równoległe do boku A_1B_1, zamykającego wielobok sznurowy, rozdziela wypadkową $R(=\Sigma P)$ na A i B.

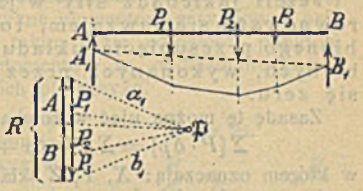
4. **Dwie podpory stałe wewnątrz ciała.** Równowaga jest możliwa, jeżeli moment wypadkowy przestrzennego układu sił względem osi obrotu (linii łączącej podpory) równa się zeru; w razie, jeżeli układ sił można zastąpić jedną wypadkową, to musi ona przecinać oś obrotu. Składowe obydwóch odporów, prostopadłe do osi obrotu, są statycznie oznaczalne; dla drugich składowych można z warunków równowagi znaleść tylko ich sumę. Równowaga może być trwała, nietrwała lub wreszcie obojętna.

5. **Trzy stałe podpory.** Ciało, podparte w trzech punktach, znajduje się zawsze w stanie równowagi. Obliczenie odporów jest możliwe

Rys. 91.



Rys. 92.



tylko wtedy, gdy trzy podparcia dają nam sześć warunków, np. dla trzech podpór, określających tylko punkty przytknięcia odporów; w innych warunkach obliczenie jest niemożliwe.

6. **Jeżeli ciało opiera się na więcej niż trzech punktach,** to odpory są statycznie nieoznaczalne. Proste, poprowadzone przez najskrajniejsze podpory, są krawędziami obrotowemi albo wywrotowemi. Dla zachowania **stateczności** ciała potrzeba, aby wypadkowa sił zewnętrznych nie wychodziła z pola, ograniczonego krawędziami obrotowemi. Stateczność ciała względem krawędzi wywrotowej jest tem większa, im większy jest moment wypadkowej **(moment stateczności ciała)** względem krawędzi wywrotowej. Praca, jakiej użyć potrzeba do przeprowadzenia ciała danego ze stanu równowagi trwałej w najbliższy stan równowagi nietrwałej (por. rozdział III. 2. działu niniejszego) nazywa się **dynamicznym momentem stateczności** i równa się $A = Gh$, gdzie G oznacza wagę ciała, a h wysokość, do której środek ciężkości podnieśćby należało (co do G por. rozdział III. 1. działu niniejszego).

7. **Przy zestawianiu warunków równowagi dla jakichbądź (ruchomych lub nieruchomych) połączeń ciał sztywnych, należy zawsze uważać odpory (oddziaływania podpór stałych) za siły zewnętrzne.**

6. Zasada przesunięć przysposobionych.

Ruchem lub też przesunięciem przysposobionem nazywamy nieskończenie małą zmianę położenia układu punktów, dowolnie

z sobą złączonych, a mianowicie zmianę położenia, możliwą ze względu na naturę samego układu. Nieskończenie mała droga ab (rys. 93), zakreślona pod wpływem siły P przez punkt a, nosi miano przesunięcia przysposobionego punktu a; rzut $ac = \delta p$ na kierunek siły P zwie się przesunięciem przysposobionem w kierunku P, a iloczyn $P \cdot \delta p$ pracą przysposobioną siły P.

Rys. 93.

Praca przysposobiona siły P równa się pracy przysposobionej jej sił składowych.

Jeżeli dla każdego ruchu przysposobionego jakiegobądź układu suma prac przysposobionych, wykonanych przez siły nań działające, jest równa zeru, to system ten znajduje się w stanie równowagi.

I naodwrót:

Jeżeli jakiebądź siły w jakimbądź układzie punktów równoważą się nawzajem, to dla dowolnego przysposobionego przesunięcia układu tego suma prac przysposobionych, wykonanych przez siły nań działające, równa się zeru.

Zasadę tę można ująć w równanie:

$$\Sigma [P \cdot \delta p] = \Sigma [X \cdot \delta x + Y \cdot \delta y + Z \cdot \delta z] = 0,$$

w którem oznaczają: X, Y, Z składowe w kierunku trzech osi spółrzędnych, a δx, δy, δz przesunięcia przysposobione punktów przytknięcia sił.

Jeżeli $\Sigma [X \cdot \delta x + Y \cdot \delta y + Z \cdot \delta z]$ jest pełną różniczką funkcyi spółrzędnych, to funkcya ta stajo się dla stanu równowagi maximum lub minimum, zależnie od tego, czy równowaga jest trwałą, czy nietrwałą.

W razie oznaczenia wzajemnego położenia m punktów przytknięcia sił w ich układzie w taki sposób, aby między $3m$ spółrzędnemi punktów przytknięcia istniało n równań: $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, ... $f_n = 0$, można na podstawie poprzedniej zasady otrzymać $3m$ warunków równowagi, rugując z $3m$ równań:

$$X_k + \lambda_1 \frac{\delta f_1}{\delta x_k} + \lambda_2 \frac{\delta f_2}{\delta x_k} + \cdots + \lambda_n \frac{\delta f_n}{\delta x_k} = 0,$$

$$Y_k + \lambda_1 \frac{\delta f_1}{\delta y_k} + \lambda_2 \frac{\delta f_2}{\delta y_k} + \cdots + \lambda_n \frac{\delta f_n}{\delta y_k} = 0,$$

$$Z_k + \lambda_1 \frac{\delta f_1}{\delta z_k} + \lambda_2 \frac{\delta f_2}{\delta z_k} + \cdots + \lambda_n \frac{\delta f_n}{\delta z_k} = 0,$$

spółczynniki nieoznaczone $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$. W równaniach powyższych oznaczają X_k, Y_k, Z_k składowe sił zewnętrznych, działających w punktach x_k, y_k, z_k. Otrzymane stąd $(3m - n)$ równań da nam, razem z n równaniami warunkowemi $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ . . . . , warunki równowagi.

C. Środek sił równoległych i środek ciężkości.

a. Momenty statyczne sił.

1. Siły równoległe, obracane w sposób, aby pozostały nawzajem równoległemi i nie zmieniały swych punktów przytknięcia, mają wy-

padkową, która również przechodzi zawsze przez jeden i ten sam punkt, przez t. zw. **środek sił równoległych.**

Dla spółrzędnych x_0, y_0, z_0 tego środka mamy, zgodnie z **3.**, str. 167, równania:

$$x_0 \Sigma(P) = \Sigma(Px), \quad y_0 \Sigma(P) = \Sigma(Py), \quad z_0 \Sigma(P) = \Sigma(Pz),$$

w których $P_1 P_2 \ldots$ oznaczają siły równoległe, a $x_1 y_1 z_1$, $x_2 y_2 z_2$ spółrzędne ich punktów przytknięcia.

2. Jeżeli **momentem statycznym siły względem jakiejbądź płaszczyzny** nazwiemy iloczyn z tej siły i odległości jej punktu przytknięcia od płaszczyzny, to możemy z równań powyższych wywieść twierdzenie:

Moment statyczny wypadkowej **sił równoległych**, względem jakiejbądź płaszczyzny, równa się sumie momentów statycznych tychże sił, względem tejże płaszczyzny.

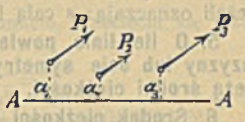
3. Mając do czynienia z **siłami równoległemi, leżącemi w jednej płaszczyźnie**, dogodnie jest płaszczyznę momentów przyjmować prostopadłą do płaszczyzny sił. W takim razie odległości punktów przytknięcia sił od płaszczyzny momentów są oddaleniami tychże punktów od linii przecięcia obydwóch płaszczyzn.

4. Dla środka sił równoległych, leżących w jednej płaszczyźnie, względem jakiejbądź prostej AA w tejże płaszczyźnie, (rys. 94) istnieje równanie:

$$a_0 \Sigma(P) = \Sigma(Pa),$$

w którem oznaczają: a_0 odległość środka sił równoległych od prostej AA, a iloczyn Pa moment statyczny siły P względem tejże prostej.

Rys. 94.



b. Ogólne uwagi nad środkiem ciężkości.

1. Siły ciążenia, działające na oddzielne cząstki masy ciała, stanowią układ sił równoległych, mają zatem (por. **a.**, **1.**, str. 170) wspólny środek, nazwany środkiem masy albo **środkiem ciężkości.**

2. Do oznaczenia środka ciężkości służą twierdzenia, podobne podanym pod **a.**

Suma momentów statycznych oddzielnych cząstek masy, względem jakiejbądź płaszczyzny, równa się momentowi statycznemu całej masy, względem tejże samej płaszczyzny (to zn. równa się iloczynowi z masy i odległości środka ciężkości od płaszczyzny).

Suma momentów statycznych cząstek masy względem płaszczyzny, przechodzącej przez środek ciężkości (płaszczyzna ciężkości), równa się zeru.

3. Oznaczmy przez:

x_1, y_1, z_1 spółrzędne cząstki masy m_1, ważącej γ_1,
x_2, y_2, z_2 „ „ „ m_2, „ γ_2 i t. d.,
x_0, y_0, z_0 „ środka ciężkości,

$M = \Sigma m$ całą masę,
$G = \Sigma \gamma$ wagę całego ciała,
a będzie: $x_0 M = \Sigma (xm)$, $y_0 M = \Sigma (ym)$, $z_0 M = \Sigma (zm)$; albo:
$x_0 G = \Sigma (x\gamma)$, $y_0 G = \Sigma (y\gamma)$, $z_0 G = \Sigma (z\gamma)$.

Równania powyższe nie zmieniają swego znaczenia, gdy m_1, m_2, m_3 . . . . oznaczają masy ciał (pól lub linii), a x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 . . . . spółrzędne ich środków ciężkości.

4. Do ciał **jednolitych**, a więc takich, których jednostka objętości ma wagę stałą, stosują się równania:

$$x_0 V = \int x \cdot dV; \qquad y_0 V = \int y \cdot dV; \qquad z_0 V = \int z \cdot dV,$$

w których oznaczają: V całą objętość ciała, a x, y, z spółrzędne cząstki dV.

Podobnie będzie dla **pól**, które sobie wyobrażamy, jako równomiernie pokryte masą:

$$x_0 F = \int x \cdot dF; \qquad y_0 F = \int y \cdot dF; \qquad z_0 F = \int z \cdot dF;$$

F oznacza tutaj całe pole, a x, y, z spółrzędne cząstki pola dF.

Również i dla **linii** jest:

$$x_0 s = \int x \cdot ds; \qquad y_0 s = \int y \cdot ds; \qquad z_0 s = \int z \cdot ds,$$

jeżeli oznaczają: s całą linię, a x, y, z spółrzędne cząstki linii ds.

5. O ile linie, powierzchnie, pola lub bryły posiadają płaszczyzny lub osie symetryi, albo punkty środkowe, to w nich też leżą środki ciężkości.

6. Środek ciężkości powierzchni obrotowej M lub **bryły obrotowej** V leży na osi obrotu *).

Jeżeli $y = f(x)$ jest w tym razie równaniem południka względem osi obrotowej, jako osi x, a $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ różniczką łuku południka i, jeżeli nadto M i V na obydwóch krańcach, w odległościach x_1 i x_2 od początku spółrzędnych, ograniczone są płaszczyznami prostopadłemi do osi x, to będzie:

dla M: $x_0 = \dfrac{\int_{x_1}^{x_2} xy \cdot ds}{\int_{x_1}^{x_2} y \cdot ds}$, a dla V: $x_0 = \dfrac{\int_{x_1}^{x_2} xy^2 \cdot dx}{\int_{x_1}^{x_2} y^2 \cdot dx}$.

7. Do wyznaczenia środka ciężkości krzywych lub pól, tworzących powierzchnie lub bryły obrotowe, można stosować odwrócenie zasady Guldina (Pappusa) (patrz str. 138), jeżeli pole tych powierzchni lub objętość takich brył jest znana.

*) Więcej w tym przedmiocie patrz F. Kosch, „Zur Lage des Schwerpunktes eines Rotations-Körpers". Zeitschr. f. Mathem. u. Physik 1891.

c. Położenia środków ciężkości.

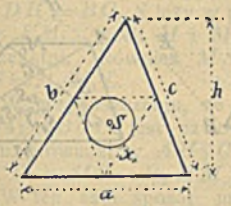
W rysunkach 95 do 110 S oznacza zawsze środek ciężkości.

α. Środek ciężkości linii.

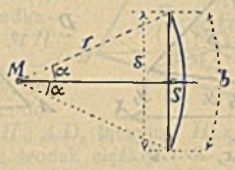
1. Kresa prosta. S leży w środku kresy.

2. Obwód trójkąta (rys. 95). S leży w środku koła, wpisanego w trójkąt, którego rogi leżą w środkach boków a, b i c danego trójkąta.

Rys. 95.



Rys. 96.



Odległość x_0 środka ciężkości od a jest:

$$x_0 = \frac{h}{2}\,\frac{b+c}{a+b+c}.$$

3. Obwód równoległoboku. S leży w punkcie przecięcia się wzajemnego przekątni.

4. Łuk koła (rys. 96). $MS = \frac{rs}{b} = \frac{r \sin \alpha}{\alpha^0}\,\frac{180}{\pi}$.

Łuk półkola: $MS = 2r : \pi = 0{,}636\,619\,772\,r.$

Łuk ćwierćkoła: $MS = 2r\sqrt{2} : \pi = 0{,}900\,316\,316\,r.$

Łuk szóstej części koła: $MS = 3r : \pi = 0{,}954\,929\,659\,r.$

β. Środek ciężkości pól (powierzchni).

1. Trójkąt. S leży w punkcie przecięcia się ośrodkowych (por. rys. 97). W tym celu (rys. 98, str. 174) prowadzi się przez C równoległą do AB, następnie $AD \parallel BC$ i $BE \parallel AC$, a BD i AE przetną się w S. Lub też: Jeżeli jeden bok trójkąta podzielimy na trzy równe części i z punktów podziałowych poprowadzimy równoległe do dwóch pozostałych boków, to równoległe te przetną się w S. *)

Oddalenie środka ciężkości od jednego z boków trójkąta równa się trzeciej części wysokości trójkąta, stojącej na tym boku.

W rys. 97:

$$x_0 = {}^1/_3\,(x_1 + x_2 + x_3), \quad \text{a} \quad y_0 = {}^1/_3\,(y_1 + y_2 + y_3);$$

zatem: Odległość środka ciężkości trójkąta od jakiejbądź prostej równa się średniej arytmetycznej odległości wierzchołków trójkąta od tejże prostej. To samo stosuje się i do odległości środka ciężkości trójkąta od jakiejbądź płaszczyzny.

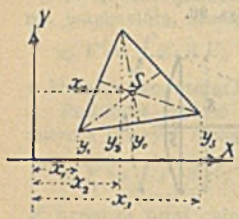
*) Por. objaśnienia Rob. Land w „Centralbl. d. Bauverw." 1894, str. 459.

2. Równoległobok. S leży w przecięciu się przekątni.

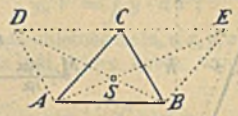
3. Trapez.*) 1. Prowadzimy (rys. 99) $AH \parallel CB$ a $BH \parallel AD$, następnie przedłużamy HG aż do M, HM będzie linią środkową trapezu, a $MS = {}^1/_3\, HM$.

2. Jeżeli (rys. 99) mamy daną linię środkową MM_1, to przedłużamy ją o $M_1H = GM_1$; $MS = {}^1/_3\, HM$ daje nam S.

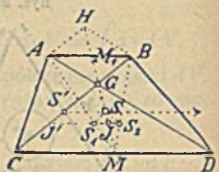
Rys. 97.



Rys. 98.



Rys. 99.



3. Odcinamy (rys. 99) $MJ = GM_1$, a $JS = {}^1/_3\, GJ$; GJ bywa najczęściej tak małe, że starczy podział na oko.

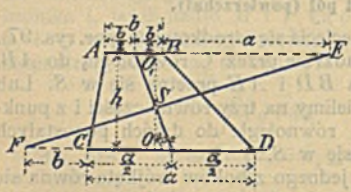
4. Jeżeli (rys. 99) $GJ' = BG$, a $J'S' = {}^1/_3\, J'G$, to przez S' przechodzi linia ciężkości, równoległa do podstaw trapezu.

5. Odcinamy (rys. 99) $MS_1 = {}^1/_3\, MA$, a $S_1S \parallel CB$ przetnie linię środkową MM_1 w S.

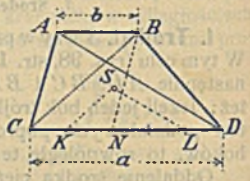
6. W rys. 99 S wpada na środek ciężkości trójkąta CHD (porównaj **1.**).

7. W rysunku 100 odcinamy na przedłużeniach podstaw: $BE = a$ i $CF = b$, prosta EF przetnie linię środkową trapezu w S.

Rys. 100.



Rys. 101.



8. Prowadzimy (rys. 101) $BN \parallel AC$, odcinamy $CK = DL = {}^1/_3\, DN = {}^1/_3\, (a - b)$, a natenczas $KS \parallel CB$ i $LS \parallel AD$ przetną się w S; jeżeli linia środkowa trapezu jest dana, to wystarcza poprowadzić samą KS lub LS.

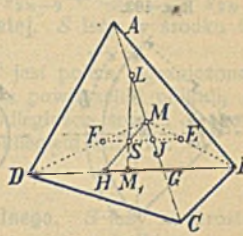
Odległości środka ciężkości od podstaw AB i CD (rys. 100) są:

*) Porówn. objaśnienia Land, Lewin, Tobien, Labes i Ellerbeck, „Centralbl. der Bauverw." 1894, str. 192. 280, 312, 458 i nast.

$$O_1S = \frac{h}{3}\frac{2a+b}{a+b} \quad \text{i} \quad OS = \frac{h}{3}\frac{a+2b}{a+b}.$$

4. Czworokąt. 1. (rys. 102). Łączymy M środek przekątni AC z B i D, odcinamy $MF = {}^1/_3 DM$, a $ME = {}^1/_3 BM$, następnie na EF (równoległej do BD) $FS = EJ$, a S będzie środkiem ciężkości.

Rys. 102.



2. Na przekątniach odcinamy $AL = CG$ i $DH = BG$, S leży w przecięciu się HM z LM_1, jeżeli M i M_1 są środkami przekątni. Również $MS = {}^1/_2 MH$ i $M_1S = {}^1/_3 M_1L$.

3. W przypuszczeniu, że (rys. 99, na str. 174) $ABCD$ jest czworokątem dowolnym, prowadzimy $AH \parallel CB$ i $BH \parallel AD$, łączymy H z M, środkiem CD, a $MS = {}^1/_3 HM$ da nam środek ciężkości S.

4. W ten sam sposób można (rys. 99) odciąć $MS_1 = {}^1/_3 MA$, poprowadzić $S_1S_2 \parallel AB$, $S_1S \parallel CB$ i $S_2S \parallel AD$, a otrzyma się S.

5. Prowadzimy przez wierzchołki czworokątu równoległe do przekątni i łączymy sąsiadujące wierzchołki powstałego stąd równoległoboku z przecięciem przekątni, przez co odcinamy środki najbliższych boków czworokąta; proste, łączące środki te z przeciwległemi wierzchołkami równoległoboku, przecinają się w S.

5. Wielokąt. Rozkładamy wielokąt na trójkąty lub inne części, dla których oznaczenie środków ciężkości nie przedstawia trudności; następnie oznaczamy ich momenty statyczne, względem dwóch osi spółrzędnych i dzielimy te momenty przez zawartość pola wielokąta (por. **3.**, str. 131), a otrzymamy stąd spółrzędne środka S.

Można również oznaczyć środek ciężkości wielokąta doświadczalnie, zawieszając na nitce wielokąt wycięty ze sztywnego, a możliwie równogrubego papieru za jeden, a następnie za inny punkt stosownie obrany, lub szukając jego równowagi przez podparcie w jednym punkcie (środku ciężkości) na ostrzu igły lub t. p.

Wielokąt prawidłowy. S leży w środku wpisanego lub opisanego koła.

6. Odcinek koła. Znakowanie jak w rys. 96, (str. 173). F = pole odcinka koła.

$$MS = \frac{s^3}{12F} = \frac{2}{3}\frac{r^3\sin^3\alpha}{F} = \frac{2}{3}\frac{r\sin^3\alpha}{\frac{\alpha^0\pi}{180} - \sin\alpha\cos\alpha}.$$

7. Wycinek koła (rys. 103, str. 176). F = polu wycinka koła.

$$MS = \frac{2}{3}\frac{180}{\pi}\frac{r\sin\alpha}{\alpha^0} = 38{,}197186\frac{r\sin\alpha}{\alpha^0} = \frac{2}{3}\frac{rs}{b} = \frac{r^2s}{3F}.$$

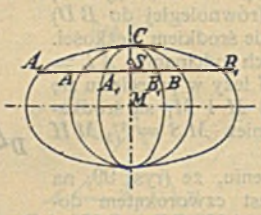
Pole półkola: $MS = \frac{4}{3}\frac{r}{\pi} = 0{,}424413182\,r.$

Czwarta część koła: $MS = \frac{4}{3}\frac{\sqrt{2}}{\pi} r = 0{,}600210877\, r.$

Szósta część koła: $MS = \frac{2r}{\pi} = 0{,}636619772\, r.$

Rys. 103.

Rys. 104.



Rys. 105.

8. Odcinek pola eliptycznego $A_1 B_1 C$. Cięciwa równoległa do osi głównej *) (rys. 104). Środek ciężkości schodzi się ze środkiem ciężkości tego odcinka koła ABC, który odcina cięciwa z koła, zakreślonego nad średnicą prostopadłą do tejże cięciwy, a równą drugiej głównej osi elipsy.

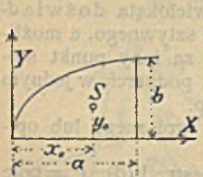
9. Pole pierścieniowe (rys. 105).

$$MS = \frac{2}{3}\frac{R^3 - r^3 \sin\alpha}{R^2 - r^2}\frac{180}{\alpha^0}\frac{}{\pi} = 38{,}197186\,\frac{R^3 - r^3 \sin\alpha}{R^2 - r^2}\frac{}{\alpha^0}.$$

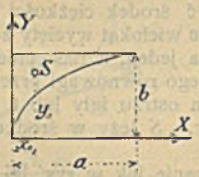
Pole pierścieniowe półkoliste: $MS = \frac{4}{3\pi}\frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}$.

10. Pole paraboliczne (rys. 106): $x_0 = {}^3/_5\, a$; $y_0 = {}^3/_8\, b$.
(rys. 107): $x_0 = {}^3/_{10}\, a$; $y_0 = {}^3/_4\, b$.

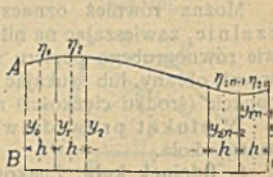
Rys. 106.



Rys. 107.



Rys. 108.



11. Pole dowolne $ABCD$ (rys. 108) ograniczone: krzywą AD, osią odciętych BC i dwiema krańcowemi rzędnemi AB (= oś rzędnych) i CD. Dzielimy pole na **parzystą** ilość $(2n)$ pasków o równej szerokości h, (zgodnie z regułą Simpsona, str. 132) spółrzędne ξ_0, η_0 środka ciężkości S będą w przybliżeniu:

*) Środek ciężkości dowolnego odcinka lub wycinka pola elipsy najdogodniej oznaczyć, uważając elipsę za rzut ukośnokątny koła, a środki ciężkości danych pól eliptycznych będą rzutami środków ciężkości odnośnych pól kołowych.

$$\xi_0 = h\,\frac{1\cdot 4y_1+2\cdot 2y_2+3\cdot 4y_3+4\cdot 2y_4+\cdots+(2n-2)\,2y_{2n-2}+(2n-1)\,4y_{2n-1}+2ny_{2n}}{y_0+4y_1+2y_2+4y_3+\cdots+2y_{2n-2}+4y_{2n-1}+y_{2n}}$$

$$\eta_0 = \frac{1}{2}\,\frac{y_0^2+4y_1^2+2y_2^2+4y_3^2+\cdots+2y_{2n-2}^2+4y_{2n-1}^2+y_{2n}^2}{y_0+4y_1+2y_2+4y_3+\cdots+2y_{2n-2}+4y_{2n-1}+y_{2n}}.$$

12. Powierzchnia pasa i czaszy kulistej. S leży w środku ich wysokości.

13. Dowolne pole na półkuli. Jeżeli F jest polem, ograniczonem przez dowolną, w sobie zamkniętą linię na powierzchni półkuli, F_1 rzutem tegoż pola na podstawę półkuli, x_0 odległością środka ciężkości powierzchni F od tejże podstawy, a r promieniem kuli, to:

$$x_0 = \frac{F_1}{F}\,r.$$

14. Płaszcz ostrosłupa lub stożka pełnego. S leży na prostej, łączącej środek ciężkości obwodu podstawy z wierzchołkiem, w odległości $^1/_3$ wysokości od podstawy.

15. Płaszcz stożka ściętego. Jeżeli h jest wysokością stożka, r promieniem górnej, a R dolnej płaszczyzny krańcowej, to odległość środka ciężkości od podstawy będzie:

$$x_0 = \frac{h}{3}\,\frac{R+2r}{R+r}.$$

16. Trójkąt kulisty (rys. 109). Jeżeli x_1 jest odległością środka ciężkości trójkąta kulistego od płaszczyzny OBC, x_2 odległością od OAC, a x_3 od OAB, to:

Rys. 109.

$$x_1 = \frac{a-b\cos\gamma-c\cos\beta}{\varepsilon}\,\frac{180}{\pi}\,\frac{r}{2},$$

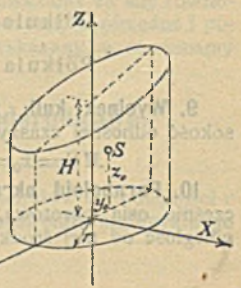
$$x_2 = \frac{b-c\cos\alpha-a\cos\gamma}{\varepsilon}\,\frac{180}{\pi}\,\frac{r}{2},$$

$$x_3 = \frac{c-a\cos\beta-b\cos\alpha}{\varepsilon}\,\frac{180}{\pi}\,\frac{r}{2},$$

gdzie $\varepsilon = \alpha+\beta+\gamma-180^0$ jest nadmiarem sferycznym (por. str. 66 i 136), a $r = OA = OB = OC$ promieniem kuli.

7. Środek ciężkości bryl.

Rys. 110.



1. Słup i walec prosto ścięte. S leży w połowie kresy, łączącej środki ciężkości podstaw.

2. Walec okrągły, ukośnie ścięty. Znakowanie (rys. 110):

yz płaszczyzna symetryi,
H długość osi,
r promień podstawy,
α kąt nachylenia płaszczyzny ścinającej, względem podstawy; spółrzędne środka ciężkości są:

$$y_0 = \frac{1}{4}\,\frac{r^2\operatorname{tg}\alpha}{H},\qquad z_0 = \frac{H}{2}+\frac{1}{8}\,\frac{r^2\operatorname{tg}^2\alpha}{H}.$$

3. Ostrosłup i stożek. S leży na osi ciężkości (por. **14.** na str. 177), w odległości $^1/_4$ wysokości od podstawy.

4. Ostrosłup prosto ścięty. Oznaczając przez h wysokość ostrosłupa, a przez A i B pola jego podstaw, otrzymamy odległość środka ciężkości od A:

$$x_0 = \frac{h}{4}\,\frac{A + 2\sqrt{AB} + 3B}{A + \sqrt{AB} + B}.$$

5. Stożek kołowy, prosto ścięty. Jeżeli h jest wysokością stożka, a R i r promieniami jego podstaw, to odległość środka ciężkości od podstawy o promieniu R będzie:

$$x_0 = \frac{h}{4}\,\frac{R^2 + 2Rr + 3r^2}{R^2 + Rr + r^2}.$$

6. Obelisk (rys. 35, str. 134). Odległość środka ciężkości od podstawy ab jest:

$$x_0 = \frac{h}{2}\,\frac{ab + ab_1 + a_1b + 3a_1b_1}{2ab + ab_1 + a_1b + 2a_1b_1}.$$

7. Klin (rys. 36, str. 134). Odległość środka ciężkości od podstawy ab jest:

$$x_0 = \frac{h}{2}\,\frac{a + a_1}{2a + a_1}.$$

8. Odcinek kuli. Znakowanie jak w rys. 96, str. 173.

$$MS = x_0 = \frac{3}{4}\,\frac{(2r - h)^2}{3r - h},$$

we wzorze tym h oznacza wysokość odcinka. Wzór powyższy stosuje się również do takiego **elipsoidu obrotowego,** którego oś obrotu jest równa średnicy kuli. Odległość środka ciężkości odcinka kuli od płaszczyzny odcinającej, kołowej o promieniu ϱ, jest:

$$x_1 = \frac{h}{2}\,\frac{h^2 + 2\varrho^2}{h^2 + 3\varrho^2} = \frac{h}{4}\,\frac{4r - h}{3r - h},$$

h oznacza tu wysokość odcinka.

Półkula: $x_0 = {}^3/_8\, r.$

Półkula wydrążona: $x_0 = \frac{3}{8}\,\frac{R^4 - r^4}{R^3 - r^3}.$

9. Wycinek kuli. Znakowanie jak na rys. 103, str. 176; h wysokość odnośnej czaszy kuli.

$$MS = x_0 = {}^3/_8\,(1 + \cos\alpha)\, r = {}^3/_8\,(2r - h).$$

10. Paraboloid okrągły. Jeżeli oś paraboli tworzącej jest jednocześnie osią obrotową, h odległością wierzchołka od podstawy, to odległość od niej środka ciężkości będzie:

$$x_0 = {}^1/_3\, h.$$

11. Elipsoid trójosiowy (por. str. 128 i rys. 127 na str. 190). Dla oktanta jest:

$$x_0 = {}^3/_8\, a; \qquad y_0 = {}^3/_8\, b, \qquad z_0 = {}^3/_8\, c.$$

12. Bryła kształtu dowolnego (por. wzór Simpsona, str. 133). Wzór dla ξ_0 w **11.**, str. 177, stosuje się w przybliżeniu również i do odległości środka ciężkości bryły od płaszczyzny, która ją ogranicza lub z nią się styka, wówczas, gdy rozdzielimy bryłę płaszczyznami równoległemi do pierwszej na **parzystą** ilość warstw o jednakowej grubości h, a we wzór zamiast y podstawimy pola odnośnych przekroi równoległych. Jeżeli pole przekroju równoległego da się wyrazić funkcyą jego odległości od dowolnego punktu stałego, lecz funkcyą co najwyżej drugiego stopnia (jak w **3.** do **9.**, str. 178), to wzór jest ściśle dokładny, a natenczas wystarcza wprowadzić w rachunek tylko równoległe płaszczyzny krańcowe i środkowy przekrój równoległy.

13. Jeżeli S jest wspólnym środkiem ciężkości dwóch mas M_1 i M_2, o środkach ciężkości S_1 i S_2, to:

$$SS_1 : SS_2 = M_2 : M_1.$$

Wspólny środek ciężkości dowolnej ilości mas da się oznaczyć przy pomocy powyższego wzoru odpowiednio zmienionego; w tym celu należy wyobrazić sobie, że masy M_1 i M_2 są złączone w S, następnie wyznacza się wspólny środek ciężkości mas $(M_1 + M_2)$ i M_3 i t. d. (Również można tutaj zastosować zasadę momentów statycznych, patrz **2.**, str. 171).

d. Wykreślanie środków ciężkości.

Środki ciężkości **linii** i **pól** łatwo wyznaczyć, rozkładając je na takie części, których położenie środków ciężkości znamy. Wielkość każdej części uważamy za siłę, działającą w jego środku ciężkości, równolegle do pewnego stałego kierunku. Przy pomocy wieloboku sił i wieloboku sznurowego wyznaczamy wypadkowe tych sił równoległych kolejno, naprzód dla jednego, potem dla drugiego stałego kierunku wszystkich sił. Punkt przecięcia się obydwóch wypadkowych jest środkiem ciężkości. Dla pewności i sprawdzenia dobrze jest wyznaczyć wypadkową jeszcze dla trzeciego kierunku.

Ciała rozkładamy na części, których wagi uważamy za siły równoległe; rzucamy następnie te siły na dwie płaszczyzny spółrzędne i postępujemy z rzutami sił w sposób powyżej wskazany, a otrzymamy obydwa rzuty środka ciężkości.

D. Momenty bezwładności i odśrodkowe.

a. Zasady ogólne.

Suma iloczynów z cząstek masy dM i kwadratów ich odległości r od danej osi nazywa się **momentem bezwładności ciała materyalnego** względem tej osi:

$$J = \int r^2 \cdot dM.$$

We wzorze $J = ma^2$ oznacza: a dowolną długość, a $m = J : a^2$ masę ciała, odniesioną do odległości a. Jeżeli $a = 1$, to $m = J$ (t. zn. masa odniesiona do odległości 1).

Nadając wzorowi naszemu formę:

$$J = Mi^2,$$

w którym M oznacza całą masę ciała, nazywamy i **ramieniem bezwładności** masy M.

Jeżeli ciało (bryła, powierzchnia, linia) składa się z wielu (n) części, to jego moment bezwładności równa się sumie momentów bezwładności części składowych, względem jednej i tej samej osi:

$$J = J_1 + J_2 + J_3 + \cdots J_n.$$

Jeżeli części te są jednolite, wzajemnie sobie równe i leżą symetrycznie względem osi, to:

$$J_1 = J_2 = J_3 = \cdots = J_n = (J : n).$$

Momentem odśrodkowym ciała materyalnego, względem dwóch osi, nazywa się wyraz:

$$J_{xy} = \int xy \cdot dM,$$

w którym x i y są spółrzędnemi cząstki masy dM.

2. Jeżeli na każdej z osi, przechodzących przez jakibądź punkt ciała, odetniemy kresę odwrotnie ustosunkowaną do ramienia bezwładności względem tejże osi, to wszystkie te punkty krańcowe będą leżały w powierzchni **elipsoidu bezwładności**, którego osiom głównym odpowiadają też **główne momenty bezwładności** (por. str. 128 i rys. 127 na str. 190). Jeżeli **momenty odśrodkowe** względem każdej pary osi spółrzędnych prostokątnych są równe zeru, czyli, jeżeli:

$$\int xy \cdot dM = \int xz \cdot dM = \int yz \cdot dM = 0,$$

to osie główne elipsoidu, czyli **główne osie bezwładności**, zlewają się z osiami spółrzędnych i naodwrót:

W prostokątnym układzie spółrzędnych, którego osiami są główne osie bezwładności, momenty odśrodkowe dla tych osi są równe zeru.

Jeżeli ciało posiada płaszczyznę symetryi, to każda prostopadła do niej jest jedną z głównych osi bezwładności. Jeżeli ciało posiada oś symetryi, to jest ona dla każdego ze swych punktów jedną z trzech osi głównych.

Jeżeli środek ciężkości jest początkiem spółrzędnych, to wówczas elipsoid bezwładności przybiera nazwę **elipsoidu centralnego**, a główne jego osie noszą w tym razie miano **osi swobodnych.**

3. Jeżeli główne momenty bezwładności względem dowolnego punktu równe są A, B, C, to **moment bezwładności** względem dowolnej osi, przechodzącej przez ten punkt i nachyłonej do osi głównych pod kątami α, β, γ, jest:

$$J = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma.$$

4. Moment bezwładności względem osi równoległych.

Jeżeli J_s jest momentem bezwładności ciała o masie M względem osi obrotowej, przechodzącej przez środek ciężkości, a J momen-

tem bezwładności względem innej osi, leżącej równolegle do pierwszej, w odległości e, to:

$$J = J_s + Me^2, \quad \text{a zatem również:} \quad J_s = J - Me^2.$$

Jeżeli J_1 i J_2 są momentami bezwładności dwóch ciał względem równoległych ich osi ciężkości, to moment bezwładności ciała złożonego z tych dwóch ciał względem osi, przechodzącej przez jego środek ciężkości, a równoległej do osi pierwszych, będzie:

$$J = J_1 + J_2 + \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} e^2;$$

e we wzorze powyższym oznacza odległość wzajemną równoległych osi ciężkości mas M_1 i M_2.

5. Wzorując się na ciałach jednolitych, możemy uważać **momenty bezwładności brył geometrycznych** względem danej osi, jako sumę iloczynów cząstek przestrzennych bryły i kwadratów ich odległości od osi.

Takie same znaczenie mają momenty bezwładności **powierzchni** i **linij** (z zastrzeżeniem ich jednolitości masowej).

6. Momenty bezwładności pól (powierzchni) płaskich.

1. **Równikowy moment bezwładności** pola płaskiego ma za oś prostą, leżącą w płaszczyźnie pola (oś równikowa); osią zaś **biegunowego momentu bezwładności** jest prosta, prostopadła do płaszczyzny pola (oś biegunowa).

Biegunowy moment bezwładności pola płaskiego równa się sumie dwóch równikowych momentów bezwładności względem dwóch dowolnych osi równikowych, przecinających się pod kątem prostym w osi biegunowej:

$$J_p = J_x + J_y.$$

2. Wyraz:

$$J_{xy} = \int xy \cdot dF,$$

nazywa się **momentem odśrodkowym** powierzchni F względem osi, leżących w jej płaszczyźnie; x i y są spółrzędnemi cząstki dF pola. Każde dwie osie, względem których $J_{xy} = 0$, nazywają się osiami **sprzężonemi**; jeżeli są one nadto do siebie prostopadłe, to przyjmują nazwę **osi głównych**. Oś symetryi, jeżeli taka się znajduje, i każda równoległa do kierunku symetryi, są zawsze osiami sprzężonemi. Jeżeli kierunek symetryi jest prostopadły do osi symetryi, to oś ta i każda równoległa do kierunku symetryi są zatem dwiema osiami głównemi.

3. Jeżeli na każdej osi, przechodzącej przez jeden punkt płaszczyzny, odetniemy kresę, odwrotnie ustosunkowaną do ramienia bezwładności odnośnego równikowego momentu bezwładności, to wszystkie punkty krańcowe tych kres znajdą się na obwodzie elipsy bezwładności; obydwom osiom głównym tej elipsy odpowiadają obydwa główne momenty bezwładności (por. 2., str. 180). Jedna z tych osi głównych, odnosząca się do głównego momentu bez-

władności: $J_{max} = A$, nazywa się pierwszą, druga zaś dla głównego momentu bezwładności $J_{min} = B$, drugą osią główną.

4. Jeżeli oznaczymy ramiona bezwładności obydwóch głównych momentów bezwładności przez a i b, to równanie elipsy względem osi głównych $b^2x^2 + a^2y^2 = k^2$ przyjmie najprostszą postać:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

jeżeli $k = ab$ (por. str. 103). Przy powyższem założeniu ramię bezwładności względem dowolnej osi równa się jej odległości od stycznej do elipsy bezwładności, poprowadzonej równolegle z ową osią. Głównemi półosiami są ramiona bezwładności a i b.

Jeżeli środek ciężkości S pola płaskiego jest równocześnie początkiem spółrzędnych O, to elipsa bezwładności przyjmuje miano **elipsy centralnej.**

5. Zmiana osi.

α) Obrót osi. Jeżeli momenty pola płaskiego względem dwóch dowolnych, wzajemnie do siebie prostopadłych osi OX i OY, oznaczymy przez J_x, J_y i J_{xy}, to względem nowej osi, nachylonej do osi OX pod kątem α, a przechodzącej przez tenże początek O, będzie:

$$J_\alpha = J_x \cos^2\alpha + J_y \sin^2\alpha - J_{xy} \sin 2\alpha.$$

Położenie osi głównych oznaczamy z obydwóch kątów α_0, jakie osie te tworzą z osią x, a określonych wzorem:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2J_{xy}}{J_y - J_x}.$$

Obrawszy natomiast osie główne za osie spółrzędnych, przyczem $J_{xy} = 0$ (por. 2.), a $J_x = A$, $J_y = B$ (por. 3.), otrzymamy wzór prostszy: $J_\alpha = A\cos^2\alpha + B\sin^2\alpha$.

β) Przesunięcie równoległe. Jeżeli J_s jest momentem bezwładności pola płaskiego F względem osi, przechodzącej przez jej środek ciężkości S, a J momentem bezwładności tegoż pola F względem innej osi, leżącej w odstępie e, równolegle do pierwszej, to będzie (por. 4., str. 180):

$J = J_s + Fe^2$, a zatem również: $J_s = J - Fe^2$.

6. Obliczenie J_{xy} względem dwóch osi do siebie prostopadłych.

α) Jeżeli moment odśrodkowy pola płaskiego F, względem dwóch prostopadłych do siebie osi ciężkości SX' i SY', jest J'_{xy}, to J_{xy} względem dwóch nowych osi OX i OY, przesuniętych równolegle do siebie o ξ, η, będzie: $J_{xy} = J'_{xy} + F\xi\eta$.

Ponieważ osie główne prostokąta (jako osie symetryi) mają $J'_{xy} = 0$, więc pole, złożone z samych prostokątów równoległych $f_1, f_2, f_3 \ldots$, będzie posiadało moment odśrodkowy względem dowolnej osi, równoległej do boków owych prostokątów, wyrażający się dokładnie wzorem:

$$J_{xy} = \Sigma f\xi\eta.$$

Dzieląc zatem dowolne pola płaskie na wązkie paski f, równoległe do osi OX lub OY, można uważać je za prostokąty i otrzymać w ten sposób z dostateczną ścisłością:

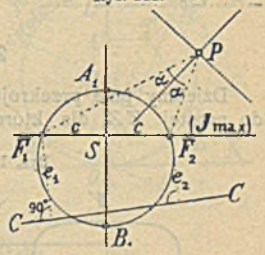
$$J_{xy} = \int xy \cdot df \backsim \Sigma f \xi \eta.$$

β) J_{xy} możemy też oznaczyć z równania pierwszego w 5. α., wyliczając bezpośrednio J_α względem osi, pochylonej pod kątem $\alpha = 45^0$; będzie wówczas:

$$J_{xy} = {}^1/_2 (J_x + J_y) - J_\alpha.$$

7. Odcinając na pierwszej osi głównej, przechodzącej przez środek ciężkości S (por. 3., str. 181) na obiedwie strony kresę c, określoną równaniem: $A - B = F c^2$ (rys. 111), otrzymamy dwa punkty F_1 i F_2, które nazwiemy **punktami stałej bezwładności** przekroju F. Dla tych punktów mają momenty bezwładności względem każdej dowolnej osi, przez jeden z nich przechodzącej, jedną i tę samą stałą wartość A. Wykreślamy zaś te punkty (podług Rob. Land), jako przecięcia się pierwszej osi głównej z kołem zatoczonem nad średnicą $A_1 B_1$. Końce średnicy $A_1 B_1$ znajdujemy zaś jako punkty drugiej osi głównej, określone związkami ich odległości od S, a mianowicie:

Rys. 111.



$$SA_1 = \frac{A - B}{n} \quad \text{i} \quad SB_1 = \frac{n}{F}.$$

(n jest dogodnie dobraną, dowolną wielkością trzeciego wymiaru).

Z pomocą punktów stałej bezwładności można oznaczyć moment bezwładności J względem dowolnej osi CC w płaszczyźnie przekroju F (rys. 111).

$$J = A + F e_1 e_2,$$

e_1 i e_2 oznaczają tu oddalenia punktów stałej bezwładności F_1 i F_2 od osi CC.

Dla dowolnego punktu P w płaszczyźnie osie główne, przez niego przechodzące, są dwójsiecznemi kątów, utworzonych przez proste PF_1 i PF_2.

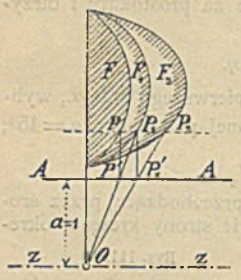
b. Wykreślanie momentów bezwładności.

I. Sposób Nehlsa. *)

Do osi ZZ (rys. 112), względem której mamy oznaczyć moment bezwładności pola płaskiego F, kreślimy równoległą AA w odległości

*) Porówn. Chr. Nehls, „Graphisch-mechanische Bestimmung von statischen und Trägheitsmomenten", Deutsche Bauztg. und Civilingenieur 1874; tego samego, „Ueber graphisch-mechanisches Integriren", Civilingenieur 1875; tego samego, „Ueber graphische Integration und ihre Anwendung in der graphischen Statik", Dresden 1877, G. Kühtmann Prócz tego artykuły Chr. Nehlsa w Zeitschr. f. Bauwesen 1879 i 1889.

Rys. 112.



$a = 1$; inne równoległe prowadzimy kolejno przez dowolne punkty P obwodu danego pola. $PP' \perp AA$ oznaczy nam prostą $OP'P_1$, a $P_1P_1' \perp AA$ prostą $OP_1'P_2$. Szeregi punktów rodzaju P_1 i P_2 wyznaczają nam dwie krzywe, które ograniczają pola F_1 i F_2. Momentem bezwładności pola F względem ZZ jest:

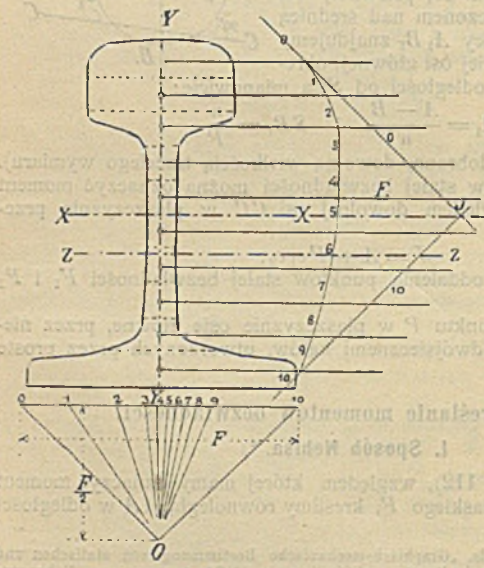
$$J_z = F_2,$$

podczas gdy pole F_1 przedstawia moment statyczny pola F_1 względem osi ZZ.

2. Sposób Mohra.

Dzielimy pole przekroju na dostateczną ilość pasów, równoległych do prostej ZZ, dla której, jako osi, mamy oznaczyć moment bezwładności. Pola tych pasów dodajemy do siebie, jako długości 01, 12, ... 910 na prostej, równoległej do ZZ i uważamy je za siły, działające na środki ciężkości pasów. Wykreśliwszy odległością biegunową $= {}^1/_2 F$ (F = całe pole) wielobok sił i wielobok sznurowy, otrzymamy w przecięciu się J boków zewnętrznych wieloboku sznurowego punkt osi ciężkości XX; pole F_0 zaś, ograniczone tymiż bokami i wielobokiem sznurowym, pomnożone przez F, da nam moment bezwładności względem osi ciężkości XX, a zatem $J_x = F \cdot F_0$. Ze znanego J_x można następnie wywieść J_z względem równoległej osi ZZ, według 5. β., str. 182.

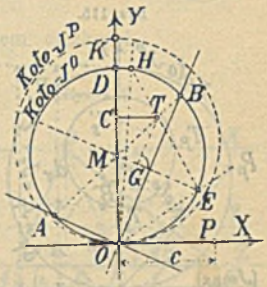
Rys. 113.



c. Koło bezwładności według Mohr-Landa. *)

Jeżeli dla prostopadłych na sobie osi OX i OY (rys. 114) znamy momenty bezwładności J_x i J_y, oraz moment odśrodkowy J_{xy} (por. 2., str. 181), to, odcinając na osi y (według Rob. Landa) $OC = J_x$ i $CD = J_y$, a następnie kreśląc $CT = J_{xy}$ równolegle do OX, otrzymamy w kole, zatoczonem nad średnicą OD ($= J_x + J_y = J_p$, biegunowemu momentowi bezwładności) tak zwane **koło bezwładności** dla punktu O, jako bieguna, t. j. dla wszystkich osi, przechodzących przez O; oznaczać je będziemy w skróceniu kołem J^0. Średnica jego, idąca przez T (główny punkt bezwładności) ATB (według Mohra), wyznaczy nam obiedwie główne osie bezwładności: OA z momentem $J_{max} = TA$ i OB z $J_{min} = TB$.

Rys. 114.



Moment bezwładności J_e względem dowolnej osi OE równa się EG, t. j. rzutowi kresy ET na średnicę EM.

Moment odśrodkowy względem dwóch osi dowolnych, przez O przechodzących, równa się prostopadłej, poprowadzonej z T na cięciwę, należącą do obydwóch osi (np. dla OE i osi do niej prostopadłej równa się on TG). Każda para osi sprzężonych, np. OE i OH, posiada cięciwę, przechodzącą przez T.

2. Zmiana bieguna osi (według Rob. Landa).

Jeżeli dla środka ciężkości S, jako bieguna osi i koła, mamy dane koło bezwładności z głównym punktem T, t. zn., jeżeli w rys. 114 O jest środkiem ciężkości pola F, to dla innego bieguna osiowego P na OX (t. j. dla wszystkich osi, przechodzących przez P) koło bezwładności (koło J^P), przynależne biegunowi kołowemu O, jest kołem, zatoczonem nad średnicą OK. (OK równa się biegunowemu momentowi bezwładności $J_p = J_s + Fc^2$; J_s jest tutaj biegunowym momentem bezwładności środka ciężkości $= J_x + J_y$, a $c = OP$). Główny punkt bezwładności T pozostaje bez zmiany; w celu wyznaczenia, zgodnie z powyższą metodą, wartości J z przynależnego koła J^P, trzeba wszystkie osie, przechodzące przez bieguna P, przesunąć równolegle do siebie samych do bieguna kołowego O.

---

*) Patrz Civilingenieur 1887, str. 43 i 1888 str. 123 (odbitka z tego wyszła u A. Felixa w Lipsku); oprócz tego Zeitschrift für Bauwesen 1892, str. 550 (odbitkę z tego otrzymać można za pośrednictwem Wilh. Ernst & Sohn w Berlinie).

2. Jeżeli SX i SY (rys. 115) są głównemi osiami bezwładności, przechodzącemi przez S z $J_{max} = A$ dla SX, oraz $J_{min} = B$ dla SY (por. 3., str. 181), i jeżeli wykreślimy dla zmiennego bieguna osiowego P przynależne koła JP, uważając zawsze S za biegun kołowy, a przynależne średnice $d_p = J_p$ (= biegunowemu momentowi bezwładności dla P) odetniemy na osi y, i jeżeli ponadto T'_s będzie punktem głównym dla koła JS, to otrzymamy poniższe warunki wzajemnej zależności:

Rys. 115.

Jeżeli P porusza się po kole, mającem środek w S, a promień $SP = r$, to przynależne koła JP zlewają się w jedno stałe koło o średnicy $d_p = J_p = J_s + Fr^2$. Przynależne punkty T_p zataczają inne koło, o średnicy $d_r = Fr^2$, odciętej na osi y z punktu T'_s; koło to odcina na średnicy koła JP na obie strony kresy A i B. Dla danego P otrzymujemy T_p, kreśląc $T_s T'_p \parallel PS$. Jeżeli P_p leży w przecięciu PS z kołem JP, to wszystkie proste $P_p T_p$ przecinają się w stałym punkcie T'_s na SY, który dzieli średnicę d_r w stosunku $A : B$.

d. Momenty bezwładności linii, pól i brył.

(Wyczerpujące dane o momentach bezwładności przekrojów, najczęściej używanych, podano w dziale IV, rozdział II B., wytrzymałość na gięcie; oraz w dziale VIII, rozdział II, w tablicach niemieckich profili normalnych).

We wzorach poniższych oznacza M całkowitą masę danego tworu. Twory wszystkie uważamy za jednolite, mające $\sigma = g$ (por. str. 192), M odpowiada zatem ich zawartości. (Por. dział I, rozdział VII).

Wskaźnik przy J oznacza we wzorach poniższych oś, względem której obliczamy moment bezwładności J, a J' oznacza wszędzie biegunowy moment bezwładności. Dla brył oś biegunowa ZZ jest osią ciężkości, a oś równikowa QQ (z J_q) jest do niej prostopadłą w środku ciężkości.

1. Kresa prosta, długości $2l$, której środek znajduje się na osi obrotowej x, i która z tąż osią tworzy kąt α:

$$J_x = {}^1/_3 M(l \sin \alpha)^2 = {}^2/_3 l^3 \sin^2 \alpha.$$

Dla $\alpha = 90^0$ (t. j. $2l$ prostopadłe do osi):

$$J'_x = {}^1/_3 Ml^2 = {}^2/_3 l^3.$$

Dla kresy prostej l, której jeden koniec leży na osi obrotowej x, będzie odpowiednio:

$J_x = {}^1/_3 M(l \sin\alpha)^2 = {}^1/_3 l^3 \sin^2\alpha$, a $J'_x = {}^1/_3 Ml^2 = {}^1/_{\ldots} l^3$.

2. Obwód koła (rys. 116):

Rys. 116.

$J'_0 = Mr^2 = 2\pi r^3$; $J_d = {}^1/_2 J'_0$

Łuk koła. Jeżeli φ jest kątem środkowym w stopniach, to:

$J'_0 = Mr^2 = \pi r^3(\varphi : 180) = 0{,}01745\,\varphi r^3$.

Półkole: $J'_0 = Mr^2 = \pi r^3$.

3. Trójkąt (rys. 117). S jest środkiem ciężkości trójkąta.

Rys. 117.

$J_x = {}^1/_2 Mh^2 = {}^1/_4 bh^3$;

$J_y = {}^1/_{18} Mh^2 = {}^1/_{36} bh^3$;

$J_z = {}^1/_6 Mh^2 = {}^1/_{12} bh^3$;

$J'_B = {}^1/_4 bh^3 + {}^1/_{12}(b_1^3 + b_2^3)h$;

$J'_E = {}^1/_{12} bh^3 + {}^1/_4(b_1^3 + b_2^3)h - {}^1/_{24} bh[8(b_1^2 + b_2^2) - 3b^2]$;

$J'_S = {}^1/_{36} bh^3 + {}^1/_{12}(b_1^3 + b_2^3) - {}^1/_{18} bh[2(b_1^2 + b_2^2) - b^2]$.

4. Czworokąt (por. 2., str. 130 i rys. 32):

$J_D = {}^1/_{12} D(h_1^3 + h_2^3)$.

Równoległobok. (Znakowanie patrz str. 130 pod 2.).

$J_D = {}^1/_{48} D(D_1 \sin\varphi)^3$.

Ukośnik $J_D = {}^1/_{48} DD_1^3$.

5. Prostokąt (por. 2., str. 130 i rys. 118):

Rys. 118.

Rys. 119.

$J_D = {}^1/_{48} D^4 \sin^3\varphi$.

$J_x = {}^1/_{12} Mh^2 = {}^1/_{12} bh^3$;

$J_y = {}^1/_{12} Mb^2 = {}^1/_{12} b^3 h$.

$J'_0 = {}^1/_{12} M(b^2 + h^2) = {}^1/_{12}(b^3 h + bh^3)$;

$J_s = {}^1/_3 Mh^2 = {}^1/_3 bh^3$.

Równikowy moment bezwładności dla osi dowolnej wyznacza się przy pomocy punktów stałej bezwładności F_1 i F_2 (por. 7., str. 183). F_1 i F_2 oznacza się według rys. 119, kreśląc $AB = {}^1/_2 h$, a BF_1 i BF_2 pod 30° do YY.

Kwadrat. Długość boku $= h$:

$J_x = J_y = {}^1/_{12} h^4$; $J'_0 = {}^1/_6 h^4$; $J_s = {}^1/_3 h^4$; $J_D = {}^1/_{12} h^4 = J_x$.

6. Wielokąt prawidłowy. Jeżeli F oznacza pole, a bok, R promień opisanego, r promień wpisanego koła, to dla osi równikowej, przechodzącej przez środek O:

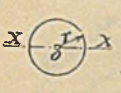
$$J_x = {}^1/_{24}\, M(6\,R^2 - a^2) = {}^1/_{48}\, M(12\,r^2 + a^2);$$

oraz: $J'_0 = 2\,J_x$. ($M = F$ patrz str. 131).

7. Pole koła (rys. 120). Średnica $= d$:

$$J_x = {}^1/_4\, Mr^2 = {}^1/_4\,\pi r^4 = {}^1/_{64}\,\pi d^4; \qquad J'_0 = {}^1/_2\, Mr^2 = {}^1/_2\,\pi r^4.$$

Rys. 120.



Rys. 121.

Pole półkola:

$$J_x = J_y = {}^1/_4\, Mr^2 = {}^1/_8\,\pi r^4.$$

Dla środka O:

$$J'_0 = {}^1/_2\, Mr^2 = {}^1/_4\,\pi r^4.$$

Dla środka ciężkości S:

$$J'_s = {}^1/_2\, Mr^2\left(1 - \frac{32}{9\pi^2}\right) = 0{,}6396\, Mr^2 = {}^1/_4\, r^4\left(\pi - \frac{32}{9\pi}\right) = 2{,}0098\, r^4.$$

8. Pole pierścieniowe (kołowe) (rys. 121).

Średni promień $= \varrho$, szerokość pierścienia $= \delta$:

$$J_x = {}^1/_4\, M(R^2 + r^2) = {}^1/_4\,\pi(R^4 - r^4) = \pi\varrho\delta(\varrho^2 + {}^1/_4\,\delta^2).$$

$$J'_0 = 2\,J_x = {}^1/_2 M(R^2 + r^2) = {}^1/_2\,\pi(R^4 - r^4).$$

Wycinek pola pierścieniowego kołowego (por. rys. 105 na str. 176). Średni promień $= \varrho$, szerokość pierścienia $= \delta$, połowa kąta środkowego $= \alpha$ w stopniach. Dla osi biegunowej w środku M:

$$J'_m = {}^1/_2\, M(R^2 + r^2) = \frac{\pi\alpha}{360}(R^4 - r^4).$$

$$= M(\varrho^2 + {}^1/_4\,\delta^2) = \frac{\pi\alpha}{90}\,\varrho\delta(\varrho^2 + {}^1/_4\,\delta^2).$$

Półkole pierścieniowe:

$$J'_m = {}^1/_2\, M(R^2 + r^2) = {}^1/_4\,\pi(R^4 - r^4) = \pi\varrho\delta(\varrho^2 + {}^1/_4\,\delta^2).$$

9. Odcinek pola kołowego. Znakowanie jak w rys. 96 na str. 173. Dla MS jako osi x:

$$J_x = {}^1/_4\, Mr^2\left(1 - \frac{2}{3}\,\frac{\sin^3\alpha\cos\alpha}{\frac{\pi\alpha}{180} - \sin\alpha\cos\alpha}\right)$$

Dla osi y, prostopadłej do MS w środku M:

$$J_y = {}^1/_4\, Mr^2\left(1 + \frac{2\sin^3\alpha\cos\alpha}{\frac{\pi\alpha}{180} - \sin\alpha\cos\alpha}\right);$$

prócz tego dla osi biegunowej w środku M: $J'_m = J_x + J_y$; dla środka ciężkości S: $J'_s = J'_m - M \cdot \overline{MS}^2$.

$M = F$ patrz str. 131; $\overline{MS}$ patrz str. 175 pod **6.**

10. Wycinek koła (por. rys. 103, str. 176).

Jeżeli wycinek stanowi n-tą część pola kołowego, a połowa kąta środkowego $= \alpha$ stopni, to dla osi biegunowej w środku M:

$$J'_m = {}^1/_2 Mr^2 = {}^1/_4 br^3 = \frac{\pi\alpha}{360} r^4 = \frac{\pi r^4}{2n};$$

dla osi biegunowej w środku ciężkości S:

$$J'_s = \frac{r^4}{4}\left(\frac{\pi\alpha}{90} - \frac{320\sin^2\alpha}{\pi\alpha}\right) = \frac{r^3}{4}\left(b - \frac{8}{9}\frac{s^2}{b}\right).$$

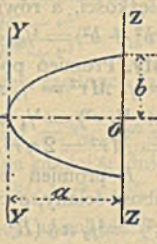
11. Pole elipsy (rys. 123):

$$J_x = {}^1/_4 Mb^2 = {}^1/_4 \pi a b^3; \qquad J_y = {}^1/_4 Ma^2 = {}^1/_4 \pi a^3 b;$$

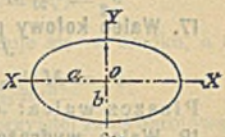
$$J'_0 = {}^1/_4 M(a^2 + b^2) = {}^1/_4 \pi a^3 b\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right).$$

Dla półelipsy i ćwierćelipsy momenty bezwładności względem tych samych osi wynoszą połowę, względnie czwartą część wartości powyższych.

Rys. 122.



Rys. 123.



12. Pole paraboli (rys. 122):

$$J_x = {}^1/_5 Mb^2 = {}^4/_{15} ab^3;$$

$$J_y = {}^3/_7 Ma^2 = {}^4/_7 a^3 b;$$

$$J_z = {}^8/_{35} Ma^2 = {}^{32}/_{105} a^3 b;$$

$$J'_0 = {}^1/_5 M({}^8/_7 a^2 + b^2) = {}^4/_{105} ab(8a^2 + 7b^2).$$

Dla półparaboli momenty bezwładności są o połowę mniejsze od powyższych.

Dla paraboli całkowitej względem osi biegunowej środka ciężkości S:

$$J'_s = {}^1/_{175} M(12a^2 + 35b^2) = {}^{16}/_{175} a^3 b + {}^4/_{15} ab^3;$$

to samo dla półparaboli:

$$J'_s = {}^1/_{175} M(12a^2 + 35b^2) - {}^9/_{64} Mb^2 = {}^8/_{175} a^3 b + {}^{19}/_{480} ab^3.$$

13. Pole dowolne $ABCD$ (patrz rys. 108, str. 176). BC jest osią x, AB osią y. Zgodnie z prawidłem Simpsona (str. 132) będzie w przybliżeniu:

$$J_x = {}^1/_9 h\left[y_0{}^3 + 4y_1{}^3 + 2y_2{}^3 + 4y_3{}^3 + \cdots + 4y_{2n-1}{}^3 + y_{2n}{}^3\right];$$

$$J_y = {}^1/_3 h^3\left[1^2 \cdot 4y_1 + 2^2 \cdot 2y_2 + 3^2 \cdot 4y_3 + 4^2 \cdot 2y_4 + \cdots + (2n-1)^2 \cdot 4y_{2n-1} + (2n)^2 \cdot y_{2n}\right].$$

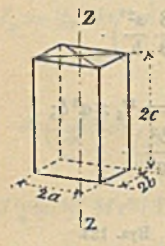
14. Słup i walec prosto ścięte, mające przekrój F prostopadły do boków i wysokość h. Podstawy są równoległe do siebie. Oś biegunowa ZZ przechodzi przez środek ciężkości bryły, równolegle do boków; oś równikowa QQ stoi w S prostopadle do ZZ. Oznaczmy

momenty bezwładności dla F przez i_q (względem QQ) i i'_z (względem ZZ), a dla całej bryły będzie:

$$J_q = {}^1/_{12} F h^3 + h i_q \quad \text{i} \quad J'_z = h i'_z.$$

15. Równoległościan prostokątny (rys. 124).

Rys. 124.



$$J'_z = {}^1/_3 M(a^2 + b^2) = {}^8/_3 abc(a^2 + b^2).$$

Dla osi równikowej QQ, przechodzącej przez środek ciężkości, a równoległej do $2a$, będzie:

$$J_q = {}^1/_3 M(b^2 + c^2) = {}^8/_3 abc(b^2 + c^2).$$

Sześcian (krawędź $= a$): $J'_z = J_q = {}^1/_6 a^5$.

16. Ostrosłup prostokątny. Podstawa prostokątna o bokach a i b; wysokość $= h$. Dla osi biegunowej ZZ:

$$J'_z = {}^1/_{20} M(a^2 + b^2) = {}^1/_{60} abh(a^2 + b^2).$$

Dla osi równikowej QQ, przechodzącej przez środek ciężkości, a równoległej do a:

$$J_q = {}^1/_{20} M({}^3/_4 h^2 + b^2) = {}^1/_{60} abh({}^3/_4 h^2 + b^2).$$

17. Walec kołowy prosty. Promień podstawy $= r$; wysokość $= h$.

$$J'_z = {}^1/_2 Mr^2 = {}^1/_2 \pi r^4 h,$$

$$J_q = M({}^1/_{12} h^2 + {}^1/_4 r^2) = {}^1/_4 \pi r^2 h({}^1/_3 h^2 + r^2).$$

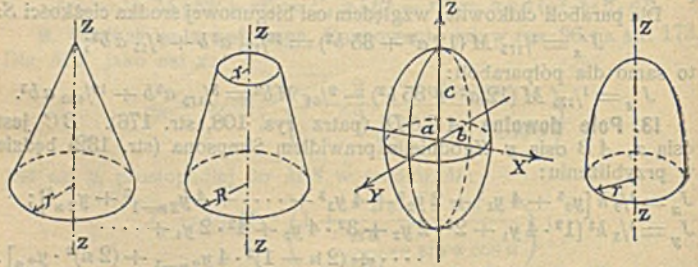
Płaszcz walca: $J'_z = Mr^2 = 2\pi r^3 h$; $J_q = {}^1/_2 M(r^2 + {}^1/_6 h^2)$.

18. Walec wydrążony. R promień zewnętrzny, r wewnętrzny, h wysokość, $s = R - r$ grubość ściany, $\varrho = {}^1/_2(R + r)$ promień średni.

$$J'_z = {}^1/_2 M(R^2 + r^2) = {}^1/_2 \pi h(R^4 - r^4)$$
$$= M(\varrho^2 + {}^1/_4 s^2) = 2\pi h s \varrho(\varrho^2 + {}^1/_4 s^2).$$

$$J_q = {}^1/_4 M(R^2 + r^2 + {}^1/_3 h^2) = {}^1/_8 M(4\varrho^2 + s^2 + {}^2/_3 h^2).$$

Rys. 125. Rys. 126. Rys. 127. Rys. 128.



19. Stożek kołowy, prosty (rys. 125).

Wysokość $= h$; tworząca (bok) $= s$.

$$J'_z = {}^3/_{10} Mr^2 = {}^1/_{10} \pi r^4 h.$$

Dla osi równikowej QQ, przechodzącej przez środek ciężkości:

$$J_q = {}^3/_{20}\, M(r^2 + {}^1/_4 h^2) = {}^1/_{20}\, \pi r^2 h\,(r^2 + {}^1/_4 h^2).$$

Płaszcz: $J'_z = {}^1/_2\, Mr^2 = {}^1/_2\, \pi s r^3$.

20. Stożek kołowy, prosto ścięty (rys. 126).

Wysokość $= h$; tworząca (bok) $= s$.

$$J'_z = {}^3/_{10}\, M\frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3} = {}^1/_{10}\, \pi h \frac{R^5 - r^5}{R - r}$$

$$= {}^1/_{10}\, \pi h\,(R^4 + R^3 r + R^2 r^2 + R r^3 + r^4).$$

Płaszcz: $J'_z = {}^1/_2\, M(R^2 + r^2) = {}^1/_2\, \pi s \frac{R^4 - r^4}{R - r}$

$$= {}^1/_2\, \pi s\,(R^3 + R^2 r + R r^2 + r^3).$$

21. Kula. Średnica $= r$. Dla każdej średnicy przyjętej za oś obrotową:

$$J = {}^2/_5\, Mr^2 = {}^8/_{15}\, \pi r^5.$$

Kula wydrążona. R promień zewnętrzny, r wewnętrzny:

$$J = {}^2/_5\, M\frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3} = {}^8/_{15}\, \pi (R^5 - r^5).$$

Półkula. Jeżeli początek rzędnych znajduje się w środku, a r jest promieniem, to:

$$J_x = J_y = J_z = {}^2/_5\, Mr^2 = {}^4/_{15}\, \pi r^5.$$

Powierzchnia kuli. Dla każdej średnicy, przyjętej za oś obrotową:

$$J = {}^2/_3\, Mr^2 = {}^8/_3\, \pi r^4.$$

22. Odcinek kuli, mający wysokość h; promień kuli $= r$. Względem osi symetryi:

$$J'_z = Mh\frac{2r^2 - 1{,}5rh + 0{,}3h^2}{3r - h} = {}^1/_3\, \pi h^3\,(2r^2 - 1{,}5rh + 0{,}3h^2).$$

23. Wycinek kuli. Wysokość czaszy $= h$; promień kuli $= r$. Względem osi symetryi jest:

$$J'_z = {}^1/_2\, M(3rh - h^2) = {}^2/_{15}\, \pi r^2 h^2 (3r - h).$$

24. Elipsoid trójosiowy (rys. 127) por. str. 128.

$$J_z = {}^1/_5\, M(a^2 + b^2) = {}^4/_{15}\, \pi abc\,(a^2 + b^2);$$

odpowiednio: $J_x = {}^1/_5\, M(b^2 + c^2)$ i $J_y = {}^1/_5\, M(a^2 + c^2)$.

25. Elipsoid kołowy (obrotowy). a i b półosie, będzie:

jeżeli $2a$ osią obrotową: $J_a = {}^2/_5\, Ma^2 = {}^8/_{15}\, \pi a^3 b^2$;

„ $2b$ „ „ : $J_b = {}^2/_5\, Mb^2 = {}^8/_{15}\, \pi a^2 b^3$.

26. Paraboloid kołowy (obrotowy) (rys. 128). Wysokość $= h$.

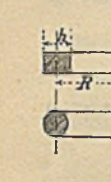
$$J'_z = {}^1/_3\, Mr^2 = {}^1/_6\, \pi r^4 h.$$

Dla osi równikowej QQ przez środek ciężkości:

$$J_q = {}^1/_6\, M(r^2 + {}^1/_2 h^2) = {}^1/_{36}\, \pi r^2 h\,(3r^2 + h^2).$$

27. Pierścień (rys. 129). Oś równikowa QQ, prostopadła w środku ciężkości pierścienia do ZZ.

Rys. 129.



Dla przekroju prostokątnego o bokach a i b:

$$J'_z = M(R^2 + {}^1/_4 h^2) = {}^1/_2 \pi b h R (4R^2 + h^2);$$
$$J_q = {}^1/_8 M(4R^2 + h^2 + {}^2/_3 b^2)$$
$$= {}^1/_4 \pi b h R (4R^2 + h^2 + {}^2/_3 b^2).$$

Dla przekroju kołowego, o średnicy r:

$$J'_z = M(R^2 + {}^3/_4 a^2) = {}^1/_2 \pi^2 R a^2 (4R^2 + 3a^2);$$
$$J_q = {}^1/_8 M(4R^2 + 5a^2) = \pi^2 R a^2 (R^2 + {}^5/_4 a^2).$$

Dla przekroju eliptycznego, mającego półosie a i b, z których $2b$ równoległa do ZZ:

$$J'_z = M(R^2 + {}^3/_4 a^2) = {}^1/_2 \pi^2 R a b (4R^2 + 3a^2);$$
$$J_q = {}^1/_8 M(4R^2 + 5b^2) = \pi^2 R a b (R^2 + {}^5/_4 b^2).$$

III. DYNAMIKA CIAŁ SZTYWNYCH. *)

A. Objaśnienia, miary i prawa zasadnicze.

1. Siła i masa.

Wielkość **siły** P, która masie m, swobodnie poruszać się mogącej, nadaje przyspieszenie p, równa się co do wartości iloczynowi mp. Można zatem napisać:

$$P = mp, \quad \text{t. zn.: } \textbf{siła} = \textbf{masa} \times \textbf{przyspieszenie}.$$

Pod wpływem ciężkości, czyli przyciągania ziemi, każde ciało podlega przyspieszeniu na prawach swobodnego spadu (patrz str. 145), a więc przyspieszeniu g; między wagą G, masą m i przyspieszeniem g zachodzi zatem stosunek:

$$G = mg,$$

t. zn.: waga = masa × przyspieszenie ciężkości.

Ponieważ na jednem i tem samem miejscu powierzchni ziemi g jest jednakowe dla wszystkich ciał (por. str. 145), więc masy ciał są w prostym stosunku do ich wag.

Jeżeli przez V oznaczymy objętość, a przez σ wagę jednostki objętości ciała jednolitego, to otrzymamy:

$$m = \frac{G}{g} = \frac{V\sigma}{g}.$$

*) T. j. ciał stałych bez uwzględnienia ich sprężystości.

Wszystkie pochodne wielkości mechaniki dadzą się wyrazić trzema **jednostkami zasadniczemi:** jednostką długości, jednostką czasu i jednostką masy (albo siły).

W fizycznym czyli **bezwzględnym układzie miar** *) jednostkami zasadniczemi są: **centymetr** (cm), **sekunda** (sek.) i **masa gramu,** t. j. masa ciała, ważącego 1 g, który znów równa się wadze 1 cm^3 wody czystej 4^0 C, ważonego w Paryżu. Jednostką siły jest **dyna,** t. j. siła, nadająca jednostce masy jednostkę przyspieszenia (1 cm/sek.^{2}, czyli 1 cm sek.$^{-2}$).

W **technicznym układzie miar** jednostkami zasadniczemi są **metr** (m) i **sekunda** (sek.), a za jednostkę siły służy **kilogram** (kg). 1 kg = wadze 1 l czystej wody przy 4^0 C pod szerokością geograficzną Paryża **). 1 kg = 981000 dyn. W technicznym układzie miar jednostką masy (ponieważ $m = G : g$) będzie zatem masa ciała, ważącego g kg = 9,81 kg.

2. Praca.

Iloczyn ze siły P, stałej tak pod względem kierunku, jako też i wielkości, i z drogi s, którą punkt przytknięcia tejże siły w jej kierunku przebył, nazywamy **pracą:**

$$A = Ps.$$

Długość drogi s wchodzi w rachunek jako ilość dodatna wówczas, gdy kierunek siły i kierunek rzutu drogi s na niego, są równoznaczne; w razie przeciwnym s jest ilością odjemną.

W bezwzględnym układzie miar **jednostką pracy** jest **erg,** t. j. praca 1 dyny na drodze = 1 cm. 1 **Joule** (wymawiaj Dżaul) = 10^7 ergów. W technicznym układzie miar jednostką pracy jest **kilogrammetr** (kgm), t. j. praca 1 kg na drodze = 1 m. 1 kgm = 9,81 Joule'ów, a naodwrót 1 Joule = 0,102 kgm. 1 kgm = 8,0114 rosyjskich stopofuntów = 6,3724 pruskich stopofuntów = 7,2331 angielskich stopofuntów = 5,6489 austryackich stopofuntów. (Patrz w dodatku tablicę porównawczą jednostek pracy).

Gdy podczas ruchu zmienia się wielkość i kierunek siły, to w każdej chwili należy przyjmować do obliczenia rzut różniczki drogi ds na kierunek siły. Jeżeli przez φ oznaczymy kąt zawarty między P i ds, to otrzymamy:

$$A = \int P \cos \varphi \cdot ds;$$

we wzorze powyższym całka rozciąga się na całą drogę. Gdy siła działa w kierunku prostopadłym do drogi, to jej praca równa się zeru.

*) Porówn. M. Grübler, Zeitschr. d. V. d. Ing. 1892, str. 830 i 1894, str. 1482.

**) Masa tak określonego kilograma jest zatem już niezależną od szerokości geograficznej, o ile do oznaczenia masy stosować będziemy gwichty paryskie i przyspieszenie 9,81 m/sek.^{2}.

Jeżeli na ciało działa wiele sił P_1, P_2 . . . , to praca ich równa się sumie iloczynów ze sił i rzutów cząsteczek drogi na odnośne kierunki sił:

$$A = \sum_1^n (P_i s \cos \varphi_i).$$

Praca, wykonywana podczas ruchu punktu materyalnego przez wypadkową wszystkich sił zewnętrznych, działających na ten punkt, równa się sumie wszystkich prac, jakie wykonywają przytem oddzielne siły.

Jeżeli składowe siły P w kierunkach trzech osi spółrzędnych oznaczymy przez X, Y, Z, a zmianę spółrzędnych, przy przesunięciu punktu przytknięcia siły o ds, przez dx, dy, dz, kąt zaś między ds i P przez φ, to różniczka pracy będzie:

$$dA = P \cos \varphi \cdot ds = X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz.$$

3. Moc *).

Mocą lub **efektem pewnej pracy** nazywamy stosunek pracy do czasu, w jakim się ona dokonała, a zatem:

$$E = \frac{Ps}{t} = Pv = \text{siła} \times \text{prędkość},$$

z tem jednak zastrzeżeniem, aby kierunki P i v leżały w jednej i tej samej prostej. Jeżeli wielkość i kierunek siły P są zmienne, to wzór powyższy przybiera kształt ogólniejszy:

$$E = \frac{dA}{dt} = Pv \cos \varphi.$$

W bezwzględnym układzie miar **jednostką mocy** jest **erg na sekundę**, albo też dogodniejsza, większa jednostka **watt** $= 10^7$ erg na sek. $=$ 1 Joule na sekundę. W technicznym układzie miar jednostką mocy jest **kilogram-metr** na sekundę (kgm/sek.), albo też **(metryczna) moc konia** $= 1$ M $= 75$ kgm/sek. $= 600{,}85$ ros. stopofuntów/sek. $=$ 542,47 ang. stopofuntów/sek. $= 477{,}93$ prus. stopofuntów/sek. $= 423{,}68$ austr. stopofuntów/sek. $= 735{,}75$ watt.

1 dawny rosyjski koń parowy $= 600$ rosyjskich stopofuntów/sek. $= 0{,}9986$ metr. M.

1 dawny angielski koń parowy $= 550$ angielskich stopofuntów/sek. $= 1{,}0139$ metr. M.

1 dawny pruski koń parowy $= 480$ pruskich stopofuntów/sek. $=$ 1,0043 metr. M.

1 dawny austryacki koń parowy $= 430$ austryackich stopofuntów/sek. $= 1{,}0149$ metr. M.

(Por. w dodatku tomu II V tablicę porównawczą koni mechanicznych).

*) **Mocą** silnicy nazywać będziemy ilość jej pracy wykonywanej w jednostce czasu, a więc np. kg m/sek. albo koni mechanicznych M, dotychczas parowymi zwanych—wobec coraz to szerszego stosowania silnic nieparowych nazwę koń mechaniczny uważamy za właściwą. Znak M jest skróceniem albo mocy konia, albo też konia mechanicznego.

4. Energia kinetyczna (praca rozpędu).

Energią kinetyczną masy, będącej w ruchu, albo jej **pracą rozpędu** *) nazywamy połowę iloczynu z tejże masy m i z kwadratu jej prędkości: $L = {}^1/_2 mv^2$.

Jednostką energii jest jednostka pracy (patrz pod **2.**, str. 193).

5. Równowartościowość energii kinetycznej i pracy. (Zasada pracy rozpędu).

Przy przejściu punktu masy, znajdującego się w ruchu, z jednego położenia w drugie, przyrost jego energii kinetycznej równa się pracy, dokonanej przez siły nań działające:

$$L - L_0 = \Sigma A = \Sigma \int (X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz).$$

(Porównaj str. 206. Zasada zachowania pracy rozpędu).

6. Wielkość rozpędu i napęd siły.

Wielkością rozpędu **) masy, będącej w ruchu, nazywamy iloczyn z masy i prędkości $= mv$.

Napędem siły nazywamy iloczyn ze siły i czasu trwania jej działania $= Pt$, albo też bardziej ogólnikowo $= \int P dt$.

7. Jeżeli P jest siłą stałą, co do swej wielkości i kierunku, s drogą, którą przebył w kierunku siły P punkt jej przyłożenia, v_0 prędkością na początku, a v prędkością na końcu czasu t, z jakimi masa m przebywa swą drogę w kierunku siły P, to:

$$Ps = {}^1/_2 m (v^2 - v_0^2) \quad \text{i} \quad Pt = m (v - v_0).$$

B. Ruch punktu materyalnego.

a. Ruch prostolinijny punktu materyalnego.

1. Jeżeli punkt materyalny o masie m ma się poruszać po prostej, to kierunek wypadkowej P wszystkich sił, na punkt ten działających, musi leżeć w tejże prostej. Skoro w każdem położeniu punktu materyalnego siła P jest nam znana jako funkcya drogi s, albo prędkości v, albo też czasu t, to możemy oznaczyć przyspieszenie ze stosunku (por. str. 192):

$$p = \frac{P}{m},$$

z którego znów można określić s, v i t (por. str. 144).

Poniższe ustępy **2.** i **3.** są przykładami prostolinijnego ruchu punktu materyalnego.

---

*) Dotychczas zwano wielkość tę zupełnie wadliwie siłą żywą, lecz nie jest to ani siła, ani też nie jest ona żywą, wprowadzamy tu nową, bardziej logiczną nazwę: praca rozpędu lub energia rozpędu.

**) Nazwano z niemiecka (Bewegungsgrösse) pojęcie ilość ruchu nazwaliśmy wielkością rozpędu, co lepiej obrazuje pojęcie. Niemieckie Antrieb tłomaczymy przez napęd, bo stosowany przez niektórych wyraz popęd, ze względu na ustalone swe znaczenie odmienne, nie zdawał się nam odpowiednim.

2. Swobodny spad ciała z uwzględnieniem oporu powietrza.

(Por. str. 145: Swobodny spad w próżni).

Przyjmujemy, że opór powietrza W rośnie w stosunku do kwadratu prędkości v (por. VII niniejszego działu: Mechanika gazów i par); a zatem:

$W = mgv^2 : k^2$; we wzorze tym k oznacza prędkość, przy której W staje się równem $G = mg$; m jest masą, G wagą punktu materyalnego.

Z założenia tego wynika:

1) Dla spadu ciała z wysokości h,

prędkość końcowa: $$v = k\sqrt{1 - e^{-\frac{2gh}{k^2}}}$$

a trwanie spadania, t. j. czas: $$t = \frac{k}{g}\,\text{ar tgh}\,\frac{v}{k} = \frac{k}{g}\ln\left\{e^{\frac{gh}{k^2}} + \sqrt{e^{\frac{2gh}{k^2}} - 1}\right\} = \frac{k}{g}\,\text{ar cosh}\left(\cosh\frac{gh}{k^2} + \sinh\frac{gh}{k^2}\right).$$

(Por. funkcye hyperboliczne str. 67; wartość e, str. 40).

2. Jeżeli ciało rzucone zostało w górę z prędkością c, to wysokość podrzutu będzie:

$$h_1 = \frac{k^2}{2g}\ln\left(1 + \frac{c^2}{k^2}\right),$$

a trwanie podrzutu:

$$t_1 = \frac{k}{g}\,\text{arc tg}\,\frac{c}{k}.$$

Jeżeli ciało powraca na dół po tej samej pionowej, to prędkość jego końcowa będzie:

$$v_1 = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{c^2}{k^2}}}.$$

Prędkość k w m/sek. określa się wzorem (por. VII działu niniejszego: Mechanika gazów i par, F):

$$k^2 = \frac{2g^2m}{\psi\gamma F} = \frac{2gG}{\psi\gamma F},$$

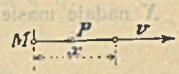
we wzorze tym oznaczają: F w m^2 największy przekrój ciała, prostopadły do kierunku ruchu, γ wagę 1 m^3 powietrza (= 1,293 kg), m masę ciała, G wagę jego w kg, ψ spółczynnik doświadczalny, zależny od kształtu ciała (dla ciał kulistych $\psi = 0{,}5$).

Przykład: Dla kuli z żelaza lanego (1 m^3 waży 7250 kg) o promieniu r (w m): $k = 541.6\sqrt{r}$ m/sek.

3. Oscylacye (drgania) prostolinijne.

Jeżeli na punkt materyalny o masie m działa przyciąganie P ku środkowi stałemu M, proporcyonalne do odległości x od tegoż środka, to punkt ten (patrz rys. 130) oscyluje, czyli drga prostolinijnie około M.

Rys. 130.



Przyjmijmy, że w odległości x od M będzie $P = cx$, oraz, że w punkcie M prędkość $= v_1$, a otrzymamy prędkość v (podług §., str. 195) z równania:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \int_0^x -P \cdot dx = -\int_0^x cx \cdot dx = \frac{-cx^2}{2};$$

$$v = \sqrt{v_1^2 - \frac{c}{m}x^2}.$$

Dla $x_0 = v_1\sqrt{\frac{m}{c}}$ staje się $v = 0$, tu zatem punkt zawraca ($x_0 =$ długość oscylacyi).

Podstawiając $\frac{c}{m} = \frac{v_1^2}{x_0^2}$ we wzór powyższy na v, otrzymamy:

Rys. 131.

$$v = v_1\sqrt{1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^2} = \frac{dx}{dt},$$

a z tego $dt = \dfrac{dx}{v_1\sqrt{1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^2}}$;

zatem: $t = \frac{x_0}{v_1}\arcsin\frac{x}{x_0}$, albo: $x = x_0 \sin\frac{tv_1}{x_0}$.

Jeżeli z M promieniem x_0 zakreślimy koło (rys. 131) i po obwodzie jego puścimy w ruch z prędkością v_1 punkt P, o masie m, to promień wodzący w czasie t zakreśli kąt $\alpha = \frac{tv_1}{x_0}$.

Można zatem uważać oscylacyę za rzut jednostajnego ruchu kołowego na stałą średnicę. Czas (trwanie) jednego drgnięcia, t. j. czas T, upływający między dwoma kolejnemi przejściami punktu ruchomego przez punkt przyciągający M, czyli pół całego okresu drgania:

$$T = \pi\frac{x_0}{v_1} = \pi\sqrt{\frac{m}{c}}. \quad (T \text{ nie zależy więc od } x_0).$$

Cały zaś okres trwa: $2T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}$.

b. Swobodny ruch krzywolinijny punktu materyalnego.

1. Oznaczmy spółrzędne punktu materyalnego o masie m w chwili t przez: x, y, z, prędkość jego przez v, a jej składowe w kierunku trzech osi spółrzędnych przez v_x, v_y, v_z. Wypadkową sił działających niech będzie P, a składowemi jej w kierunku trzech osi X, Y, Z.

X nadaje masie m w kierunku osi x przyspieszenie:

$$p_x = \frac{X}{m} = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2},$$

w podobny sposób Y w kierunku osi y:

$$p_y = \frac{Y}{m} = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2},$$

Z w kierunku osi z:

$$p_z = \frac{Z}{m} = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Te trzy równania wyznaczają ruch punktu w kierunkach trzech osi. (Dla ruchu w płaszczyznie, np. płaszczyznie xy, trzecie równanie odpada).

Jeżeli P rozłożymy na składowe w kierunku stycznej do toru i w kierunku głównej jego normalnej (w kierunku ku środkowi krzywości) czyli:

na **siłę styczną** P_t i **siłę normalną** czyli **dośrodkową** P_n, to, oznaczając promień krzywości toru przez ϱ, otrzymamy:

$$P_t = P\cos\varphi = m\frac{dv}{dt} \quad \text{i} \quad P_n = P\sin\varphi = m\frac{v^2}{\varrho},$$

we wzorze tym φ oznacza kąt między P i v.

P_t nadaje masie m przyspieszenie po stycznej:

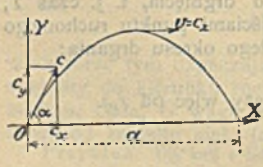
$$p_t = \frac{P_t}{m} = \frac{dv}{dt},$$

a P_n nadaje masie m przyspieszenie po normalnej:

$$p_n = \frac{P_n}{m} = \frac{v^2}{\varrho}.$$

2. Ruch ciała rzuconego (bez uwzględnienia oporu powietrza).

Rys. 132.



Punkt materyalny, rzucony z miejsca O (rys. 132) z prędkością początkową c w górę ukośnie pod kątem α do poziomu OX, zakreśli parabolę o osi pionowej. Równanie tej paraboli, odniesione do jej wierzchołka, jako początku spółrzędnych (por. str. 108), będzie:

$$x^2 = 2\frac{c_x^2}{g}y = 2\frac{(c\cos\alpha)^2}{g}y.$$

Równania ruchu (rys. 132):

$$p_x = 0; \qquad v_x = c_x; \qquad x = c_x t.$$

$$p_y = -g; \qquad v_y = c_y - gt; \qquad y = c_y t - \frac{gt^2}{2}.$$

Rugując t z równań dla x i y, otrzymamy równanie paraboli, odniesione do osi spółrzędnych (rys. 132) z początkiem w O.

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2 c^2 \cos^2 \alpha} x^2.$$

Prędkość v w chwili t jest:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{c^2 - 2 c_y g t + g^2 t^2} = \sqrt{c^2 - 2 g y}.$$

Dla wierzchołka (x', y') paraboli, ponieważ $v'_y = 0 = c_y - gt'$, otrzymamy:

$$t' = \frac{c_y}{g}; \qquad x' = \frac{c_x c_y}{g} = \frac{c^2 \sin 2\alpha}{2g}; \qquad y' = h = \frac{c_y^2}{2g} = \frac{c^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Przelot rzutu $a = 2x' = \dfrac{c^2 \sin 2\alpha}{g}$ staje się największością dla $\alpha = 45^0$:

$$a_{\max} = \frac{c^2}{g};$$

naodwrót, dla danego a i dla $\alpha = 45^0$:

$$c_{\min} = \sqrt{ag}.$$

Jeżeli rzut ma dosięgnąć miejsca, położonego na poziomej w odległości a, to musi być:

$$\sin 2\alpha = \frac{ga}{c^2}, \quad \text{czyli} \quad c^2 = \frac{ga}{\sin 2\alpha}.$$

Mamy też: $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{4h}{a}$, a trwanie rzutu $t_a = \sqrt{\dfrac{8h}{g}}$,

z czego możemy wyznaczyć h.

3. Ruch ciała rzuconego (z uwzględnieniem oporu powietrza).

Znakowanie, jak w 2. Co do wielkości k, patrz str. 196.

Kąt α przyjmujemy tak małym, że zamiast długości łuku możemy jako wartość przybliżoną podstawić jego rzut poziomy.

W takim razie w chwili t będzie:

$$x = \frac{k^2}{g} \ln\left(1 + \frac{g c_x}{k^2} t\right), \quad \text{więc:} \quad t = \frac{k^2}{g c_x}\left(e^{\frac{gx}{k^2}} - 1\right);$$

$$y = x\left\{\operatorname{tg} \alpha + \frac{k^2}{2 c_x^2}\right\} - \frac{k^4}{g c_x^2}\left(e^{\frac{2gx}{k^2}} - 1\right). \qquad \text{[e patrz str. 40.]}$$

Dla wierzchołka toru jest:

$$x' = \frac{k^2}{2g} \ln\left(1 + \frac{c_x c_y}{2k^2}\right); \qquad (t' \text{ i } y' \text{ jak w } \mathbf{2.})$$

Pocisk padnie na poziom OX w odległości a, jeżeli go rzucimy pod kątem α, który da się wyznaczyć ze wzoru:

$$\sin 2\alpha = \frac{k^4}{2g c^2 a}\left(e^{\frac{2ga}{k^2}} - \frac{2g}{k^2}a - 1\right).$$

4. Potencyał.

Jeżeli składowe X, Y, Z sił działających na punkt materyalny, rozłożone w kierunkach trzech osi spółrzędnych, są takiemi funkcyami spółrzędnych x, y, z danego punktu, że można je wyrazić jako częściowe pochodne względem x, y i z pewnej funkcyi $U = f(xyz)$, czyli jeżeli można wyrazić:

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad Z = \frac{\partial U}{\partial z},$$

to funkcya U otrzymuje miano **potencyału.**

Wobec tego praca A, wykonana przy dowolnem poruszeniu, będzie:

$$A = \int_{x_0, y_0, z_0}^{x_1, y_1, z_1} dA = \int (X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz) = \int_{U_0}^{U_1} dU = U_1 - U_0,$$

albo też według str. 195 przyrost energii kinetycznej:

$$L_1 - L_2 = {}^1/_2 m v_1^2 - {}^1/_2 m v_0^2 = U_1 - U_0.$$

Równanie $U = f(xyz) = U_1$, względnie $U = U_0$, jest równaniem powierzchni, którą nazywamy **powierzchnią równych potencyałów** lub krócej **równią.**

Siła, działająca na jakikolwiek punkt, jest zawsze prostopadłą do równi, przez punkt ten przechodzącej. Siła składowa w dowolnym kierunku równa się częściowej pochodnej funkcyi U względem tegoż kierunku.

Jeżeli punkt materyalny przechodzi dowolną drogą z jednej równi na drugą, to wykonywa on zawsze jednę i tę samą pracę, to znaczy: nabywa lub traci jednakową ilość energii kinetycznej. Dopóki punkt poruszający się pozostaje w tej samej równi, nie wykonywa on żadnej pracy i porusza się jednostajnie.

Potencyał istnieje zawsze, gdy np. siłą działającą jest przyciąganie lub odpychanie przez stały punkt O, będące funkcyą odległości r od tegoż punktu.

Jeżeli $P = f(r)$ jest siłą, skierowaną ku O, to:

$$U = \int f(r)\, dr.$$

Potencyał istnieje również i wtedy, gdy siła P, działająca na punkt materyalny, jest wypadkową wielu sił P_1, P_2 . . . . , z których każda posiada swój potencyał U_1, U_2 . . . . Wówczas:

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + \cdots = \Sigma(U_i); \quad (i = 1, 2, 3 \ldots).$$

Przykład. Dla punktu o masie m, położonego po za kulą ziemską, w odległości x od jej środka, gdy r jest promieniem kuli ziemskiej będzie:

$$U = \frac{mgr^2}{x}.$$

5. Zasada prędkości polowych.

Gdy punkt materyalny porusza się w płaszczyznie (patrz rys. 133), to w każdej chwili moment siły P, działającej na masę m poruszającego się punktu, względem dowolnego punktu O płaszczyzny, równa się prędkości, z jaką rośnie moment wielkości rozpędu względem tegoż punktu O:

$$Pa = \frac{d(mvr)}{dt}.$$

Rys. 133.

Rys. 134.

Jeżeli pole (rys. 134), zakreślone przez promień wodzący Om, oznaczymy przez f, to jego różniczka będzie:

$$df = \frac{v \cdot dt \cdot r}{2},$$

a zatem:

$$mvr = 2m\frac{df}{dt}, \quad \text{a} \quad \frac{d(mvr)}{dt} = 2m\frac{d^2f}{dt^2}.$$

$\frac{df}{dt}$ nazywa się **prędkością polową,**

$\frac{d^2f}{dt^2}$ nazywa się **przyspieszeniem polowem.**

Twierdzenie wstępne możemy zatem wyrazić odmiennie:

$$Pa = 2m\frac{d^2f}{dt^2},$$

t. zn. moment siły równa się przyspieszeniu polowemu, pomnożonemu przez $2m$.

Dla **ruchu ośrodkowego**, dla którego siła przechodzi zawsze przez stały punkt O, moment siły względem tego punktu jest zerem, gdyż $a = 0$, a zatem:

$$Pa = 2m\frac{d^2f}{dt^2} = 0, \qquad \text{czyli:} \qquad \frac{d^2f}{dt^2} = 0.$$

Przyspieszenie polowe równa się natenczas zeru, prędkość polowa jest zatem stała; w równych odstępach czasu zakreśla promień wodzący równe pola. (Dla ruchu planet twierdzenie to stanowi drugie prawo Keplera).

Rozszerzenie zasady prędkości polowych na cały system mas patrz str. 207. Objaśnienia i twierdzenia, podane na str. 162 i nast., zatrzymują pod względem treści swoje znaczenie, jeżeli w nich siły zastąpimy stale prędkościami, przyspieszeniami, albo wielkościami rozpędu.

c. Krępowany ruch punktu materyalnego.

1. Ruch punktu, prowadzonego po krzywej.

1. Zadanie sprowadzimy do ruchu swobodnego, rozpatrzonego pod **b.**, str. 198, jeżeli do sił działających dodamy, jako siłę zewnętrzną, opór toru prowadzącego. Opór ten da się rozłożyć na dwie siły składowe: N prostopadłą do toru i N_t w kierunku jego stycznej (por. tarcie w spokoju, str. 215); N_t będzie albo równe w przybliżeniu zeru (jeżeli punkt prowadzi się po danej krzywej za pośrednictwem mechanizmu), albo też, zależąc od oporu N toru, pozostawać będzie w stosunku prostym do tegoż oporu (jeżeli punkt musi iść po torze materyalnym): $N_t = \mu N$.

μ jest spółczynnikiem tarcia (por. str. 216).

Opór po normalnej N (=odpór krzywej) wyznacza się, jak następuje: siłę P, nachyloną do stycznej toru pod kątem φ, rozkładamy w kierunku tejże stycznej i prostopadle do niej, na $P_1 = P\cos\varphi$ i $P_2 = P\sin\varphi$. N i P_2 mają wówczas łączną wypadkową w kierunku promienia krzywości ϱ toru, równą **sile dośrodkowej:**

$$P_n = m\frac{v^2}{\varrho}.$$

2. Jeżeli torem jest **koło,** leżące w płaszczyźnie poziomej, to oznaczając: przez r w metrach promień koła, przez t czas jednego obiegu (w sek.), przez n ilość obiegów na minutę, przez v prędkość ruchu w m/sek., przez G wagę w kg. masy ruchomej m, przez ω prędkość kątową/sek., otrzymamy siłę C, z jaką punkt ruchomy ciśnie prostopadle na tor kołowy:

$$C = m\frac{v^2}{r} = m\omega^2 r = 4\pi^2 m\frac{r}{t^2} = \frac{4\pi^2}{3600} m r n^2,$$

$$= 0{,}10194\frac{Gv^2}{r} = 0{,}10194\, G\omega^2 r = 4{,}024304\frac{Gr}{t^2} = 0{,}0011179\, G r n^2;$$

przyczem: $\omega = \frac{v}{r} = \frac{2\pi}{t} = \frac{2\pi n}{60}$ (por. str. 150 i 152).

3. Jeżeli N jest znane, to **siła po stycznej:**

$$P_t = m p_t = m\frac{dv}{dt} = P_1 - N_t = P_1 - \mu N = P\cos\varphi - \mu N.$$

Gdy $N_t = 0$, to wynika bezpośrednio:

$$P_t = m p_t = P\cos\varphi.$$

Wówczas oznaczenie siły N dla określenia ruchu staje się zbytecznem. Przy założeniu $N_t = 0$, poleca się zastosowanie zasady pracy rozpędu (patrz **4.** i **5.**, str. 195). Z zasady tej, gdy X, Y, Z są składowemi siły P w kierunkach osi spółrzędnych, wysnuwa się równanie:

$$L - L_0 = \frac{m v^2}{2} - \frac{m v_0^2}{2} = \int_{x_0, y_0, z_0}^{x, y, z} (X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz),$$

ponieważ N nie wykonywa żadnej pracy.

2. Przykłady ruchu punktu po krzywej.

Rys. 135.

1. Zwyczajne wahadło kołowe. Punkt materyalny, zawieszony na nieważkiej nitce o długości l, odbywa ruch wahadłowy po łuku koła w płaszczyźnie pionowej (rys. 135). Oznaczamy:

przez α połowę kąta odchylenia,

przez h wysokość wznoszenia się, względnie spadu punktu wahającego się; czas wahnięcia, który upływa między dwoma przejściami przez pion, t. j. czas trwania jednego pojedyńczego wahnięcia:

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4 \frac{\alpha}{2} + \cdots \right].$$

Przy $\alpha < 8^0$ z wystarczającą dokładnością można napisać:

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

to znaczy: czas wahnięcia nie zależy od wielkości odchylenia. Długość **wahadła sekundowego** w metrach będzie zatem z uwzględnieniem wzoru dla g, str. 145:

$$l = \frac{g}{\pi^2} = 0{,}993563 - 0{,}002536 \cos 2\varphi - 0{,}0000003\, H.$$

Dla średniej szerokości $\varphi = 50^0$ i dla poziomu morza ($H = 0$) jest:

$l = \mathbf{0{,}994}$ **m** ($= 39^1/_8$ ros. czyli ang. cali $= 38$ prus. cali).

Przy biegunach (na poziomie morza) jest $\varphi = 90^0$, a $l_p = 0{,}996$ m, na równiku ($\varphi = 0^0$) $l_a = 0{,}991$, a dla szerokości $\varphi = 45^0$ $l_m = 0{,}994$ m tak, że w przybliżeniu:

$$l_p - l_a = {}^1/_{196}\, l_m.$$

Prędkość w punkcie najniższym $v = \sqrt{2gh}$, zatem siła S, naprężająca nić, na której wisi masa wahająca się m, musi być w punkcie najniższym największą i wynosi:

$$S = mg + m\frac{v^2}{l} = mg\,\frac{l + 2h}{l}.$$

Jeżeli $\alpha > {}^1/_2\pi$, to na wysokości ${}^2/_3(h-l)$ ponad punktem zawieszenia siła ta staje się $= 0$. Gdy prędkość w punkcie najniższym $\geq \sqrt{5lg}$, to masa wahająca się obiega całe koło z siłą wyprężającą nić w najwyższym punkcie koła ≥ 0, a w najniższym $\geq 6mg$.

2. **Wahadło cykloidalne.** Punkt wahający się biegnie po cykloidzie, a trwanie jednego wahnięcia jest dokładnie:

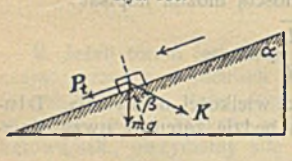
$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g}},$$

w powyższym wzorze r jest promieniem koła, kreślącego cykloidę (por. str. 112). Trwanie wahnięcia nie zależy zatem zupełnie od wielkości odchylenia; z tego powodu cykloidę nazywają „tautochroniczną".

Jeżeli w rys. 22, str. 112 pomyślimy sobie na lewo od AB obraz zwierciadlany cykloidy ADb, a następnie cały, tak uzupełniony rysunek obrócimy około AC o 180° w ten sposób, aby się obydwie gałęzie krzywych zwróciły ku dołowi, to utworzą one tory stałe. Jeżeli nić nieważką, długości $l = 4r$, zawiesimy w A, to punkt materyalny na jej końcu l, wahając się, zakreśli krzywą, która przystaje do cykloidy torowej, jako jej rozwijająca.

Oprócz powyższej posiada cykloida jeszcze i tę właściwość, że, o ile jej podstawa będzie poziomą, ciała toczące się po niej z jakiegokolwiek jej punktu do niżej położonego, przebywają swą drogę w czasie najkrótszym, t. j. krótszym, niż po jakiejbądź innej linii, łączącej owe dwa punkta. (Brachystochronizm).

Rys. 136.



3. **Spad po prostej pochylonej (płaszczyzna pochyła).** *) Zatrzymując poprzednie znakowanie, jak pod **1.**, str. 202, otrzymamy (rys. 136):

$$P_1 = mg\cos\alpha - K\sin\beta,$$
$$P_2 = mg\sin\alpha + K\cos\beta.$$

Ponieważ ruch odbywa się po prostej, więc $P_n = 0$, a zatem:

$$N = -P_2 = -(mg\sin\alpha + K\cos\beta), \text{ a}$$
$$P_t = P_1 - \mu P_2 = mg\cos\alpha - K\sin\beta - \mu(mg\sin\alpha + K\cos\beta);$$

μ jest spółczynnikiem tarcia przy ślizganiu (por. str. 216).

Z powyższego wynika przyspieszenie ruchu skierowanego w dół:

$$p = p_t = \frac{P_t}{m} = g(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) - \frac{K}{m}(\sin\beta + \mu\cos\beta)$$

i zwolnienie ruchu skierowanego w górę:

$$p = -g(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) + \frac{K}{m}(\sin\beta - \mu\cos\beta).$$

*) Zwana też równią pochyłą, wyrażenie to wypada jednak zarzucić, gdyż równią nazywamy powierzchnię równego potencyału i t. p.

3. Ruch punktu, przyczepionego do powierzchni.

Nie biorąc w rachubę tarcia i oznaczając równanie powierzchni przez $f(x, y, z) = 0$, otrzymujemy równania różniczkowe ruchu punktu materyalnego, rugując ilość λ z trzech równań:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X - \lambda\frac{\partial f}{\partial x}; \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y - \lambda\frac{\partial f}{\partial y}; \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z - \lambda\frac{\partial f}{\partial z}.$$

We wzorze tym X, Y, Z są składowemi sił działających. Zasada pracy rozpędu zatrzymuje swe znaczenie w tej samej formie, jak przy ruchu swobodnym, gdyż prostopadłe oddziaływanie powierzchni:

$$N = \lambda\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}$$

nie wykonywa żadnej pracy. — Za przykład służyć może:

Wahadło odśrodkowe (stożkowe).

Niechaj oznacza: α kąt między nicią a pionem,
h wysokość wahadła, t. j. odległość punktu zawieszenia od poziomej płaszczyzny krążenia punktu materyalnego,
r promień kołowego toru wahadła,
v prędkość punktu materyalnego,
m jego masę,
to w stanie równowagi wahadła jest:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v^2}{rg}, \quad \text{a} \quad h = g\frac{r^2}{v^2},$$

czas jednego obiegu: $T = 2\pi\frac{r}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}$,

siła naprężająca nić: $S = m\sqrt{g^2 + \frac{v^4}{r^2}}$.

C. Ruch systemu mas.

a. Zasady ogólne.

1. Zasada d'Alemberta.

Przy pomocy zasady d'Alemberta można sprowadzić każde zagadnienie dynamiki do poziomu zagadnienia statyki.

Z systemu punktów materyalnych, dowolnie się poruszających, którykolwiek z nich o masie m niechaj ma spółrzędne x, y, z. Pod wpływem wszystkich sił i warunków, systemem tym rządzących, m otrzymuje przyspieszenie p, którego składowemi w kierunku trzech osi spółrzędnych będą $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$ i $\frac{d^2z}{dt^2}$. Przyspieszeniu temu musi od-

powiadać siła przyspieszająca mp w kierunku p. Jeżeli dla wszystkich punktów systemu każdą z tych sił mp unicestwimy przez dodanie równej, lecz przeciwnie zwróconej siły, t. zw. siły bezwładności, to każdy punkt zosobna znajdzie się w stanie równowagi, a zatem i cały system. Stąd twierdzenie:

W każdym dowolnym systemie punktów materyalnych siły zewnętrzne i siły bezwładności utrzymują się wzajemnie w równowadze.

Jeżeli składowe sił, działających na cząstki masy (z wyłączeniem sił wewnętrznych systemu, pojawiających się w łącznikach punktów) w trzech kierunkach osi spółrzędnych, oznaczymy przez X, Y, Z, to przy pomocy zasady przesunięć przysposobionych (patrz str. 170) powyższe twierdzenie możemy wyrazić równaniem:

$$\Sigma\left\{\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right\} = 0.$$

W powyższem równaniu oznaczają δx, δy i δz zmiany spółrzędnych przy przysposobionem przesunięciu systemu. Równanie powyższe można uważać jako **podstawowe równanie mechaniki**, obejmuje ono bowiem w formie jaknajogólniejszej wszystkie możliwości ruchu i równowagi dowolnego systemu punktów materyalnych.

Jeżeli wypadkowe sił, rzeczywiście istniejących (zewnętrznych) i sił bezwładności nazwiemy siłami straconemi, to możemy zasadę d'Alemberta wypowiedzieć tak:

W każdym systemie punktów materyalnych, poruszanym przez siły dowolne, siły stracone znajdują się bez przerwy w równowadze.

2. Zachowanie energii.

Wyrażenie: $L = {}^1/_2 \Sigma(mv^2)$ oznacza pracę rozpędu albo energię kinetyczną systemu punktów materyalnych.

Jeżeli: $$A = \int \Sigma(X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz)$$

jest pracą sił systemu w czasie określonego ruchu, to zmiana pracy rozpędu systemu wynosi:

$${}^1/_2 \Sigma(mv^2) - {}^1/_2 \Sigma(mv_0^2) = A. \quad \text{(Zasada prac rozpędu).}$$

Jeżeli dla tych właśnie sił istnieje potencyał U (por. str. 200), to zmianę pracy rozpędu można wyrazić równaniem:

$${}^1/_2 \Sigma(mv^2) - {}^1/_2 \Sigma(mv_0^2) = A = U - U_0.$$

(Zasada zachowania pracy rozpędu albo energii kinetycznej).

3. Ruch środka ciężkości.

Środek ciężkości systemu punktów materyalnych porusza się w każdej chwili tak, jak gdyby skupiał w sobie wszystką masę całego systemu i, jak gdyby wszystkie siły zewnętrzne, przesunąwszy się równolegle do siebie samych ku niemu, na niego tylko działały.

W szczególności wynika z tego prawo zachowania ruchu środka ciężkości.

Jeżeli siły, które wystawiamy sobie jako działające na środek ciężkości systemu, utrzymują się w równowadze, to środek ciężkości porusza się jednostajnie po linii prostej, a pozostaje w stanie spokoju, jeżeli poprzednio w nim się znajdował.

Całkowita praca rozpędu systemu mas składa się z pracy rozpędu, odpowiadającej ruchowi środka ciężkości, oraz pracy rozpędu, przynależnej ruchowi względnemu systemu około środka ciężkości.

4. Zasada pól.

Prędkość, z jaką rośnie suma momentów wielkości rozpędu Σm, względem dowolnej prostej, równa się w każdej chwili sumie momentów ΣM sił działających (zewnętrznych) względem tej samej prostej, a zatem:

$$\frac{d(\Sigma m)}{dt} = \Sigma M.$$

W szczególowym przypadku, jeżeli wszystkie siły (zewnętrzne), działające na system, przechodzą przez jeden punkt (lub jeżeli wogóle nie działają żadne siły zewnętrzne), to suma momentów wielkości rozpędu względem każdej prostej, przez punkt ten przechodzącej, pozostaje stałą podczas całego ruchu.

Albo też w innej formie:

Jeżeli, z uwzględnieniem powyższego założenia, rzucimy snopem równoległych promieni rzutowych na dowolną płaszczyznę, wszystkie pola, zakreślone przez promienie wodzące, które poprowadzimy z pewnego danego punktu do wszystkich punktów materyalnych systemu i jeżeli każdy rzut zosobna pomnożymy przez masę odpowiedniego punktu, to suma tych iloczynów będzie w stosunku prostym do czasu trwania ruchu systemu.

Gdy wszystkie siły przechodzą przez jednę prostą, to twierdzenie powyższe stosuje się tylko, o ile snop promieni rzutowych będzie równoległy do owej prostej.

b. Ruch ciała sztywnego.

1. Ruch ciała swobodnego.

Każdy chwilowy ruch ciała sztywnego (por. str. 150 i nast.) da się sprowadzić: 1) do obrotu około pewnej osi i 2) do równoczesnego ruchu postępowego (przesuwania) w kierunku tejże osi.

Przez równoległe przesunięcie osi obrotowej tak się poruszającego ciała w jego środek ciężkości otrzymujemy: 1) obrót około osi ciężkości i 2) ruch postępowy, lecz w kierunku ukośnym do osi obrotu. Dwom tym ruchom odpowiadają: pojedyncza siła wypadkowa, działająca na środek ciężkości i para sił, działająca naokoło pewnej osi ciężkości.

Przyspieszenie p_s środka ciężkości jest (podług str. 192):

$$p_s = \frac{R}{m};$$

we wzorze tym oznacza R wypadkową wszystkich sił zewnętrznych, a m ogólną masę ciała. Wypadkowa wszystkich par sił wytwarza **przyspieszenie kątowe** $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$ około osi, która w ogólności jest pochyloną względem osi pary sił wypadkowej, a zlewa się z nią tylko w tym razie, gdy oś pary sił jest zarazem główną osią bezwładności ciała (por. str. 189). Natenczas jest:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{M}{J},$$

M oznacza tu wypadkową parę sił, a J moment bezwładności względem osi obrotu.

Dla dowolnego położenia wypadkowej pary sił wyznaczamy oś przyspieszenia kątowego, prowadząc do elipsoidu centralnego płaszczyznę styczną, równoległą do płaszczyzny pary sił. Prosta, łącząca punkt styczności ze środkiem ciężkości, będzie szukaną osią przyspieszenia.

Rozkładając parę sił w kierunku trzech głównych osi bezwładności na L, M, N, i oznaczając główne momenty bezwładności kolejno przez A, B, C, otrzymamy:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \sqrt{\left(\frac{L}{A}\right)^2 + \left(\frac{M}{B}\right)^2 + \left(\frac{N}{C}\right)^2}.$$

Pracę rozpędu masy sztywnej, poruszającej się dowolnie, można wyrazić przez sumę:

$$L = {}^1/_2\, m \cdot v_s^2 + {}^1/_2\, J\omega^2$$

we wzorze tym oznacza m całą masę, v_s prędkość postępową środka ciężkości, ω prędkość kątową, z którą w danej chwili cały system się obraca około osi przechodzącej przez środek ciężkości, a J moment bezwładności systemu względem tejże osi.

2. Wirowanie ciała około punktu stałego.

Przesuwamy siły działające do punktu stałego. Siłę wypadkową zrównoważy tam odpór punktu podporowego. Wypadkowa para sił, która powstanie skutkiem przesunięcia sił, wytwarza przyspieszenie kątowe ε, którego oś i wielkość wyznaczamy w ten sam sposób, jak pod **1.**, str. 207, jedynie główne momenty bezwładności dla środka ciężkości zastępujemy takimiż momentami dla punktu stałego.

3. Obrót ciała około osi stałej.

1. **Praca rozpędu masy, obracającej się około osi stałej,** jest:

$$L = {}^1/_2\, J\omega^2,$$

J jest momentem bezwładności masy względem osi obrotu (por. str. 179), a ω **prędkością kątową** obrotu. Por. prócz tego str. 150.

Jeżeli M jest momentem wypadkowym wszystkich sił zewnętrznych, to ich praca przy obrocie o kąt ψ:

$$A = \int_0^{\psi} M \cdot d\psi, \qquad \text{a moc ich } E = \frac{dA}{dt} = M\omega.$$

Przy stałem M, $A = M\psi$; w tym razie obrót jest jednostajnie przyspieszony lub zwolniony. Jeżeli $M = 0$, to praca staje się $A = 0$, a obrót jednostajnym (por. str. 150).

Przykład: Na walcu okrągły o promieniu r, mogący obracać się bez tarcia około swej osi poziomej, nawinięto nić, na której swobodnym końcu wisi ciężar $G = mg$, powodujący obrót walca (rys. 137). Jeżeli przez S oznaczymy siłę naprężającą nić, to moment obrotu będzie: $M = Sr$, zatem przyspieszenie kątowe:

Rys. 137.

$$\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon = \frac{M}{J} = \frac{S}{J} r,$$

w powyższym wzorze J oznacza moment bezwładności walca względem osi obrotu ($J = J_s$, patrz 17., str. 190). Przyspieszenie, z jakiem opada ciężar, otrzymamy z prędkości odnośnej $v = r\omega$; będzie ono:

$$\frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r\varepsilon = \frac{G - S}{m}.$$

Łącząc równanie to z poprzedniem, otrzymamy:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{Gr}{mr^2 + J}; \qquad S = \frac{J\varepsilon}{r} = \frac{JG}{mr^2 + J}.$$

Obrót jest zatem jednostajnie przyspieszony, a naprężenie S nici stałe. Jeżeli w przeciągu czasu t ciężar opadnie o h, to będzie (zasada pracy rozpędu):

$$A = Gh = J\frac{\omega^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = \frac{v^2}{2r^2}(J + mr^2);$$

z równania tego można wywieść v; nadto: $t = 2\frac{h}{v}$.

2. Jeżeli określona moc pracy N (w MK) osięga się przez to, że para sił, której momentem obrotu jest M_d (w kgm), obraca pewne ciało około stałej osi, ze stałą prędkością kątową ω, odpowiadającą n obrotom/min., lub też przez to, że siła P, działająca ramieniem r (w m), obraca się około osi ze stałą prędkością v, to **moment obrotu** będzie:

$$M_d = Pr = \frac{75\,N}{\omega} = \frac{60 \cdot 75}{2\pi}\frac{N}{n} = 716{,}197243\,9\,\frac{N}{n} \text{ kgm}.$$

Moc czyli efekt jest natomiast:

$$E = Pv = 75\,N = \frac{2\pi n Pr}{60} \text{ kgm/sek.} \qquad \text{(Por. str. 194).}$$

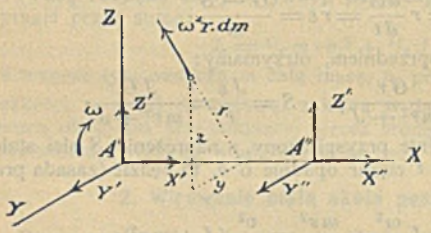
$(N:n)$ nazywamy **ilorazem mocy** (czyli efektu). Związki między ω, n, v, i r patrz str. 150. Wartości ω dla oznaczonego n patrz tablicę na str. 151.

Iloraz mocy i moment obrotu.

$\frac{N}{n}$	M_d kgm	$\frac{N}{n}$	M_d kgm	$\frac{N}{n}$	M_d kgm	$\frac{N}{n}$	M_d kgm	$\frac{N}{n}$	M_d kgm
0,005	3,581	0,08	57,296	0,7	501,338	1,5	1074,30	3,5	2506,69
0,01	7,162	0,09	64,458	0,8	572,958	1,6	1145,92	4	2864,79
0,02	14,324	0,1	71,620	0,9	644,578	1,7	1217,54	5	3580,99
0,03	21,486	0,2	143,239	1,0	716,197	1,8	1289,16	6	4297,18
0,04	28,648	0,3	214.859	1,1	787,817	1,9	1360,78	7	5013.38
0,05	35,810	0,4	286,479	1,2	859,437	2,0	1432,39	8	5729.58
0,06	42,972	0,5	358,099	1,3	931,056	2,5	1790,49	9	6445.78
0,07	50,134	0,6	429,718	1,4	1002,68	3,0	2148,59	10	7161,97

§3. Przypuśćmy, że ciało obraca się około linii, łączącej dwa punkty nieruchome (łożyska) A' i A'' (rys. 138); obieramy sobie A' za punkt początkowy prostokątnych spółrzędnych przestrzennych, a $A'A''$ za oś x. Jeżeli (jak przedtem, str. 167) X, Y, Z oznaczają siły składowe wypadkowej wszystkich sił zewnętrznych, a L, M, N momenty wypadkowe tychże sił dla osi x, y i z, to przyspieszenie kątowe ruchu obrotowego w chwili t będzie:

Rys. 138.



$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{L}{J} = \frac{1}{J}\Sigma(y_i Z_i - z_i Y_i),$$

(por. str. 167) J = moment bezwładności względem osi obrotu.

Zasada prac rozpędu daje związek następujący:

$$\tfrac{1}{2} J\omega^2 - \tfrac{1}{2} J\omega_0^2 = A = \int_0^{\varphi} L \cdot d\varphi,$$

w którym ω_0 oznacza wartość prędkości kątowej ω w chwili $t = 0$, a z którego to wzoru łatwo oznaczyć wartość ω.

Składowe odporów, t. j. oddziaływań łożysk w punktach nieruchomych A' i A'' osi obrotu w chwili t, dadzą się wyznaczyć z równań:

$$X' + X'' = -X; \quad Y' + Y'' = -Y - m\omega^2 y_0 - m\varepsilon z_0;$$
$$Z' + Z'' = -Z - m\omega^2 z_0 + m\varepsilon y_0;$$
$$Y'' = -\frac{1}{a}(N + J_{xy}\omega^2 + J_{xz}\varepsilon); \quad Z'' = \frac{1}{a}(M - J_{xz}\omega^2 + J_{xy}\varepsilon).$$

We wzorach tych oznaczają: J_{xy} i J_{xz} momenty odśrodkowe (por. str. 180), m całkowitą masę ciała, $a = A'A''$ odległość punktów nieruchomych, x_0, y_0, z_0 spółrzędne środka ciężkości ciała. Składowe X' i X'' nie dadzą się oznaczyć oddzielnie, lecz tylko ich suma. (W razie równowagi należy postawić $\varepsilon = \omega = 0$; por. str. 169 pod 4.).

Oś obrotu staje się **osią swobodną**, jeżeli

$$Y' = Y'' = Z' = Z'' = 0.$$

Dzieje się to, np. wówczas, gdy niema zupełnie sił zewnętrznych, gdy równocześnie środek ciężkości znajduje się w osi obrotu ($y_0 = z_0 = 0$), która powinna być zarazem główną osią bezwładności ($J_{xy} = J_{xz} = 0$).

4. Jeżeli dowolna cząstka masy dm znajduje się w odległości r od osi obrotu, to siła bezwładności tej cząstki, działająca w kierunku promienia r, jest równą $\omega^2 r \cdot dm$, a nosi ona nazwę **siły odśrodkowej**. Wypadkowa wszystkich tych sił nazywa się siłą odśrodkową ciała; jest ona prostopadłą do osi obrotu i ma w chwili t wartość:

$$C = m\omega^2 r_0,$$

gdzie m oznacza całkowitą masę, a r_0 odległość środka ciężkości ciała od osi obrotu. W równaniach pod 3. mamy do czynienia ze składowemi siły C, mianowicie $C_y = m\omega^2 y_0$ i $C_z = m\omega^2 z_0$. Tylko wtedy, gdy oś obrotu jest równocześnie główną osią bezwładności, można zastąpić siły odśrodkowe cząstek masy, jedną wypadkową, działającą w środku ciężkości, w prostopadłej do osi obrotu, a mającą wartość $C = m\omega^2 r_0$.

5. Za przykład obrotu ciała około osi nieruchomej może służyć **wahadło fizyczne**; czas jego wahań jest taki sam (por. str. 203) jak wahadła zwykłego, mającego długość:

$$l = \frac{J}{me},$$

J oznacza moment bezwładności masy wahającej się m względem osi obrotu, e odległość środka ciężkości masy od tejże osi, a l jest t. zw. długością zredukowaną wahadła. Jeżeli tak oznaczoną kresę l odetniemy z punktu zawieszenia na prostej przez środek ciężkości przechodzącej, to drugi koniec kresy tej będzie środkiem mas wahających się. Prosta pomyślana przez ten punkt, równolegle do osi zawieszenia, nazywa się osią mas wahających się. Związek między obiema temi osiami jest wzajemny, t. zn. czas wahnięć pozostaje ten sam, czy się zawiesi wahadło na jednej, czy na drugiej osi. Środek ciężkości wahadła leży zawsze między osią zawieszenia, a osią mas wahających się.

Wahadła fizycznego można używać do **oznaczania momentów bezwładności** ciał lub przekrojów nieforemnych *). Jeżeli w tym celu oznaczymy przez n ilość pojedynczych wahnięć/min., to moment bezwładności takiego ciała lub przekroju względem osi obrotu będzie:

$$J = g \frac{60^2}{\pi^2} \frac{me}{n^2} = \psi \frac{me}{n^2}.$$

Moment bezwładności względem równoległej osi ciężkości jest:

$$J_s = \psi \frac{me}{n^2} - me^2.$$ Dla **cm** jako jednostki $\psi = 357826$.

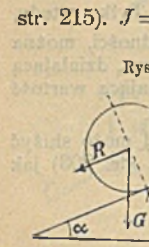
Dzwony kościolne i ich stolce. Jeżeli Q oznacza wagę dzwonu wraz z sercem, a przy zwykłym sposobie zawieszenia tak się silnie dzwoni, że linia środkowa dzwonu podnosi się o 20° ponad poziom osi zawieszenia, to podług Koepcke'go największe parcie poziome $H = 1{,}56\ Q$, a największe ciśnienie pionowe $V = 3{,}11\ Q$.

4. Obrót ciała około osi zmiennej.

Jeżeli ciało podczas ruchu pozostaje w zetknięciu z drugiem ciałem nieruchomem, to może ono albo toczyć się, albo ślizgać po niem, albo wreszcie odbywać równocześnie obydwa te ruchy. Ruch taki da się zawsze oznaczyć, jeżeli można go rozłożyć na ruch obrotowy około osi, niezmieniającej swego położenia względem ciała ruchomego, i na ruch postępowy (posuwanie), albo też na dwa ruchy obrotowe około osi stałych względem ciała ruchomego.

Przykład. Walec okrągły, o masie m i promieniu r, stacza się po płaszczyźnie pochyłej (rys. 139). Odpór normalny toru $= N$, opór toru w kierunku stycznej $= N_t$. Mamy $N = G \cos \alpha$, $N_t \leqq \mu N$ (por. str. 215). $J = J'_s$ (patrz str. 190, pod **17.**; dalsze znakowania patrz str. 207 i 208).

Rys. 139.



$$R = G \sin \alpha - N_t; \qquad \mathfrak{M} = N_t r;$$

$$p_s = \frac{G \sin \alpha - N_t}{m} = g \sin \alpha - \frac{N_t}{m};$$

$$\varepsilon = \frac{\mathfrak{M}}{J} = \frac{2 N_t r}{m r^2} = \frac{2 N_t}{m r}.$$

Przypadek I. Jeżeli walec ma się wyłącznie toczyć (bez ślizgania), to dla punktu podparcia otrzymamy warunki:

$$p_s t - \varepsilon r t = 0, \text{ więc } g \sin \alpha - \frac{N_t}{m} = \frac{2 N_t}{m r} r = \frac{2 N_t}{m};$$

$$N_t = \tfrac{1}{3} G \sin \alpha; \text{ albo:}$$

$$N_t = \tfrac{1}{3} G \sin \alpha < \mu N = \mu G \cos \alpha, \quad \text{t. j. } \operatorname{tg} \alpha < 3 \mu.$$

Wówczas będzie:

$$R = \frac{2}{3} G \sin \alpha; \qquad p_s = \frac{2}{3} g \sin \alpha \quad \text{i} \quad \varepsilon = \frac{2}{3} \frac{g \sin \alpha}{r}.$$

*) S. Kalep, Oznaczanie momentów bezwładności obracających się części maszyn (bębnów, kół pasowych i rozpędowych), Civilingenieur 1882, zeszyt 5, str. 380.

Przypadek II. Jeżeli $\operatorname{tg}\alpha > 3\mu$, to następuje równocześnie toczenie i ślizganie się.

A więc: $N_t = \mu N = \mu G \cos\alpha$; $R = G\sin\alpha - \mu G\cos\alpha$.

$$p_s = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha); \qquad \varepsilon = \frac{\mathfrak{M}}{J} = \frac{2\mu G\cos\alpha}{mr} = \frac{2\mu g\cos\alpha}{r}.$$

Dla ruchu walca po torze poziomym ($\alpha = 0$) warunek wyłącznego toczenia brzmi: Siła ciągnąca $Z < 3\mu G$.

D. Uderzenie.

Prostą prostopadłą do wspólnej płaszczyzny, stycznej w punkcie zetknięcia dwóch ciał zderzających się, nazywamy **osią zderzenia**. Jeżeli środki ciężkości ciał leżą na tej osi, to uderzenie nazywa się **środkowem**, w przeciwnym razie **mimośrodkowem**. Jeżeli kierunki ruchu obydwóch środków ciężkości są równoległe do osi zderzenia, to uderzenie nazywa się **prostem**, w razie przeciwnym zaś **ukośnem**.

a. Uderzenie proste, środkowe.

Dwie masy M_1 i M_2, poruszające się w jednym kierunku z prędkościami v_1 i v_2, spotykają się ze sobą. Po zderzeniu prędkości pierwotne przemieniają się na inne c_1 i c_2, między któremi, a prędkościami pierwotnemi v_1 i v_2 istnieje związek:

$$M_1 v_1 + M_2 v_2 = M_1 c_1 + M_2 c_2.$$

1. Zderzenie się ciał zupełnie niesprężystych.

Obiedwie masy poruszają się po zderzeniu z prędkością wspólną:

$$c = c_1 = c_2 = \frac{M_1 v_1 + M_2 v_2}{M_1 + M_2}.$$

Strata na pracy rozpędu (na możności pracy) wynosi:

$$L = \frac{1}{2}\frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}(v_1 - v_2)^2.$$

2. Zderzenie się ciał doskonale sprężystych.

Strata na pracy rozpędu jest równa zeru. Prędkości po zderzeniu wynoszą:

$$c_1 = \frac{(M_1 - M_2)v_1 + 2M_2 v_2}{M_1 + M_2}, \quad \text{a} \quad c_2 = \frac{(M_2 - M_1)v_2 + 2M_1 v_1}{M_1 + M_2}.$$

Dla $v_2 = 0$ będzie:

$$c_1 = \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2}v_1, \quad \text{a} \quad c_2 = \frac{2M_1}{M_1 + M_2}v_1.$$

Jeżeli $M_1 = M_2$, to staje się $c_1 = v_2$, a $c_2 = v_1$.

3. Zderzenie się ciał niedoskonale sprężystych.

Jeżeli spółczynnik sprężystości obydwóch ciał jest α, to:

$$c_1 = \frac{M_1 v_1 + M_2 v_2 - M_2 (v_1 - v_2) \sqrt{\alpha}}{M_1 + M_2},$$

$$c_2 = \frac{M_1 v_1 + M_2 v_2 + M_1 (v_1 - v_2) \sqrt{\alpha}}{M_1 + M_2},$$

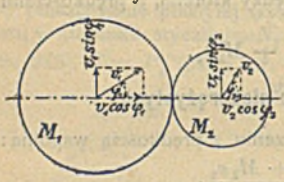
$$L = \frac{1}{2} \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} (v_1 - v_2)^2 (1 - \alpha).$$

Spółczynnik sprężystości α określa się stosunkiem: $\alpha = h_1 : h$; we wzorze tym oznacza h_1 wysokość, do której podskoczy kula, zrobiona z danego materyału, a spadająca swobodnie z wysokości h. Wielkość α pozostaje nadto w pewnej zależności od prędkości, z jaką kula uderza, a więc od wysokości h. Średnio można przyjąć dla kości słoniowej $\alpha = (8/9)^2$, dla stali i korka $\alpha = (5/9)^2$, dla szkła $\alpha = (15/16)^2$. Dla ciał niesprężystych $\alpha = 0$, dla ciał doskonale sprężystych $\alpha = 1$.

b. Uderzenie środkowe ukośne.

Rozkładamy prędkości pierwotne v_1 i v_2 na $v_1 \cos \varphi_1$ i $v_1 \sin \varphi_1$, względnie $v_2 \cos \varphi_2$ i $v_2 \sin \varphi_2$, w kierunku osi zderzenia i prostopadle do niej. Jeżeli tarcia nieuwzględniamy, to obiedwie prędkości $v_1 \sin \varphi_1$ i $v_2 \sin \varphi_2$ nie zmieniają się skutkiem zderzenia, natomiast $v_1 \cos \varphi_1$ i $v_2 \cos \varphi_2$ zmieniają się zgodnie z zasadami, rozwiniętemi przy zderzeniu się prostem, środkowem, na prędkości c'_1 i c'_2, które, złączone odnośnie z $v_1 \sin \varphi_1$ i $v_2 \sin \varphi_2$, dadzą nam prędkości obydwóch ciał po zderzeniu.

Rys. 140.

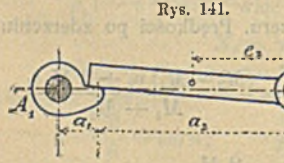


c. Uderzenie proste, mimośrodkowe.

Dwa ciała, obracające się około osi A_1 i A_2 do siebie równoległych (rys. 141), spotykają się ze sobą z prędkościami v_1 i v_2.

Momentami bezwładności ciał, względem przynależnej osi obrotu, niech będą $m_1 k_1^2$ i $m_2 k_2^2$. Wówczas w tym przypadku zastosować można wzory na uderzenie proste, środkowe (patrz str. 213), jeżeli zamiast mas rzeczywistych wstawimy masy sprowadzone do punktu zderzenia.

Rys. 141.



$$\frac{m_1 k_1^2}{a_1^2} \quad \text{i} \quad \frac{m_2 k_2^2}{a_2^2}.$$

Chcąc uniknąć oddziaływań zderzenia na jedną z osi (np. A_2), powinniśmy wytworzyć między punktem zderzenia a punktem obrotu A_2 taki

sam związek, jaki zachodzi między środkiem wahającym a punktem zawieszenia wahadła fizycznego (patrz str. 211), t. j. powinno być $a_2 = \frac{k_2^2}{e_2}$, jeżeli e_2 oznacza odległość środka ciężkości od osi obrotu.

d. Uderzenie ukośne, mimośrodkowe.

Podobnie jak w **b.** rozkładamy prędkości w kierunku osi zderzenia i prostopadle do niej. Tylko dwie pierwsze składowe wprowadzamy w rachunek, przy użyciu wzorów z pod **c.**

IV. OPORY SPOWODOWANE TARCIEM.

A. Spółczynniki tarcia.

a. Tarcie w spokoju.

Ciało, pozostające pod wpływem siły zewnętrznej, a wspierające się na drugiem ciele, może nawet jeszcze wtedy znajdować się w stanie równowagi, gdy siła nań działająca tworzyć będzie z normalną odporową (czyli normalną punktu zetknięcia) pewien kąt, o ile ten kąt będzie mniejszy, lub, co najwyżej, równy określonemu kątowi ϱ_0. Kąt ϱ_0, **kąt tarcia w spokoju** lub **kąt graniczny odporu tarcia** zależy od szorstkości powierzchni. Siła odporowa posiada zawsze tę samą wielkość, lecz odwrotny kierunek, co siła zewnętrzna. Rozkładając całkowitą siłę odporową w kierunku normalnej punktu zetknięcia i płaszczyzny stycznej, otrzymujemy normalną siłę odporową N i styczną siłę odporową N_t. Siła N_t jest przyczyną odporu stycznego, czyli odporu tarcia. Z poprzedniego wynika zatem, że zawsze będzie:

$$N_t \leq \mu_0 N,$$

jeżeli przez $\mu_0 = \operatorname{tg} \varrho$ oznaczymy **spółczynnik odporu tarcia**, czyli **spółczynnik tarcia w spokoju.**

Gdyby odchylenie siły zewnętrznej (może nią być również wypadkowa wielu sił) od normalnej było większe, niż kąt graniczny ϱ_0, to styczna siła odporowa nie mogłaby już wytworzyć stanu równowagi, lecz nadawałaby jednemu ciału pewien ruch względnie do drugiego.

Tablica spółczynników tarcia w spokoju dla różnych materyałów budowlanych znajduje się na str. 217 i 218.

b. Tarcie przy ślizganiu.

1. Jeżeli siła normalna N przyciska wzajemnie powierzchnie dwóch ciał, to przy ruchu względnym tych dwóch ciał trzeba przemódz pewien opór, działający w kierunku przeciwnym ruchowi, t. zw. **opór tarcia.**

Jeżeli ciała stykają się w powierzchni ograniczonej, to ruch ich względny polega wyłącznie na ślizganiu się, a opór tarcia nazywa się natenczas **tarciem przy ślizganiu.** Jeżeli natomiast ciała stykają się w linii, to ruch ich może być albo ślizganiem się, albo toczeniem się około linii styczności. Toczenie się jednego ciała po drugiem powoduje tarcie, które nazywamy **tarciem przy toczeniu** (patrz str. 220). Przy styczności w jednym tylko punkcie zjawia się oprócz powyższych jeszcze jedna możliwa, lecz praktycznie małoważna forma ruchu, t. j. ruch obrotowy około normalnej, któryby też świdrowym nazwać można.

2. Wielkość oporu tarcia W zależy przedewszystkiem od parcia normalnego N i od właściwości powierzchni, prócz tego od ciśnienia, wywieranego na jednostkę powierzchni, od prędkości, z jaką ruch się odbywa, wreszcie i od temperatury.

Jeżeli określimy:

$$W = \mu N,$$

to μ nazywa się **spółczynnikiem tarcia przy ślizganiu.**

Wypadkowa sił W i N tworzy z normalną zawsze kąt ϱ, t. zw. **kąt tarcia,** dla którego:

$$\operatorname{tg} \varrho = \mu.$$

3. Spółczynniki tarcia przy ślizganiu (μ) niektórych metali przy wysokiem ciśnieniu na jednostkę powierzchni i mało naoliwionych powierzchniach, według Rennie'go.

Uwaga. Przy doświadczeniach naoliwiono powierzchnie, a następnie wytarto je starannie, aby smar pozostały między niemi nie przeszkadzał szczelnemu zetknięciu się powierzchni.

Ciśnienie na powierzchnię w kg/cm²	Żelazo kute na żelazie kutem	Żelazo lane na żelazie kutem	Stal na żelazie lanem	Mosiądz na żelazie lanem	Ciśnienie na powierzchnię w kg/cm²	Żelazo kute na żelazie kutem	Żelazo lane na żelazie kutem	Stal na żelazie lanem	Mosiądz na żelazie lanem
	$\mu =$					$\mu =$			
8,79	0,140	0,174	0,166	0,157	34,10	0,403	0,366	0,356	0,221
13,08	0,250	0,275	0,300	0,225	36,77	0,409	0,366	0,357	0,223
15,75	0,271	0,292	0,333	0,219	39,37	Powierzchnie zdarte	0,367	0,358	0,233
18,28	0,285	0,321	0,340	0,214	42,18		0,367	0,359	0,234
20,95	0,297	0,329	0,344	0,211	44,58		0,367	0,367	0,235
23,62	0,312	0,333	0,347	0,215	47,25		0,376	0,403	0,233
26,22	0,350	0,351	0,351	0,206	49,92	—	0,434	Powierzchnie zdarte	0,234
27,42	0,376	0,363	0,353	0,205	55,12	—	Powierzchnie zdarte		0,232
31,50	0,395	0,365	0,354	0,208	57,65	—			0,273

4. Spółczynniki tarcia μ i μ_0 dla nieznacznych ciśnień na jednostkę powierzchni (0,96 do 1,37 kg/cm²) według Morin'a.

Ciała trące się	Kierunek włókien *)	Spółczynnik tarcia przy ślizganiu μ				Spółczynnik tarcia w spokoju μ_0			
		Na sucho	Skąpo smarow.	Obficie smarow.	We wodzie	Na sucho	Skąpo smarow.	Obficie smarow.	We wodzie
Metal o metal.									
Bronz o bronz	·	0,20	—	—	—	—	—	—	—
„ o żelazo lane	·	0,21	—	—	—	—	—	—	—
„ o żelazo kute	·	—	0,16	—	—	—	—	—	—
Żelazo lane o żelazo lane lub bronz	·	—	0,15	—	0,31	—	0,16	—	—
Żelazo kute o żelazo lane lub bronz	·	0,18	—	—	—	0,19	—	—	—
Żelazo kute o żelazo kute	·	0,44	—	—	—	—	0,13	—	—
Stal o stal	·	—	—	—	—	0,15	—	—	—
Ciała rozmaite.									
Żelazo lane o dąb	=	0,49	0,19	(Suche mydło)	0,22	—	—	—	0,65
Żelazo kute o dąb	=	—	—	0,08 (Łój)	0,26	—	—	0,11 (Łój)	0,65
Mosiądz o dąb	=	—	—	—	— (Mydło)	0,62	—	—	— (Suche mydło)
Dąb o dąb	=	0,48	—	0,16		0,62	—	0,44	
	⫩	0,34	—	—	0,25	0,54	—	—	0,71
	⊥	0,19	—	—	—	0,43	—	—	—
Skóra wołowa o dąb	Skóra na płask	—	—	—	—	0,61	—	—	—
	Skóra na storc	0,33	—	—	0,29	0,43	—	—	0,79
Skóra wołowa jako uszczeln. tłoka (p. s. 219)	Na płask	0,56	0,23 (Olej, mydło)	0,15	0,36	—	— (Olej, mydło)	0,12	0,62
Pasy skórzane o bęben dębowy	=	0,27	—	—	—	(P. s. 232).	0,47	—	—
„ o żelazo lane	Na płask	0,56	—	—	0,36		0,28	0,12	0,38
Liny konopne o drzewo szorstkie	·	—	—	—	—	0,50	—	—	—
„ wygładzone	·	—	—	—	—	0,33	—	—	—

*) Znak = oznacza ruch w kierunku włókien obydwóch ciał, znak ⫩ ruch prostopadły do kierunku włókien ciała ślizgającego się, a ⊥ ruch drzewa na storc w kierunku włókien drugiego.

Ciała trące się	Kierunek włókien	Spółczynnik tarcia przy ślizganiu μ				Spółczynnik tarcia w spokoju μ_0			
		Na sucho	Skąpo smarow.	Obficie smarow.	We wodzie	Na sucho	Skąpo smarow.	Obficie smarow.	We wodzie
Dąb, buk i drzewo gwajakowe o granit wygładzony lub mosiądz wygładzony (według C. Hoppe'go)	∥	—	—	—	—	—	—	Ciśnienie 3,25 kg/cm²	0,53
	⊥	—	—	—	—	—	—	∥ Drzew. gwaj.	0,49
								⊥	0,40
Kamienie lub cegły	·	wygładzone				0,53—0,73			(Na sucho)
o cegłę	·	w świeżej zaprawie				0,50—0,70		—	—
Kamienie i żwir o żelazo kute		—	—	—	—	0,42—0,49		—	—
Kamienie i żwir o drzewo		—	—	—	—	0,48—0,60		—	—
Mur o beton	·	—	—	—	—	0,76	—	—	—
Mur o ziemię niezruszoną	·	suchą i twardą				0,65	—	—	—
	·	średnią				0,45	—	—	—
	·	mokrą i iłowatą				0,30	—	—	—
Stal o lód	·	0,014	—	—	—	0,027	—	—	—

5. Spółczynniki tarcia w poszczególnych przypadkach.

1. **Mechanizmy** przenoszące pracę (opór ogólny), średnio $\mu = 0{,}05$.

2. Żelazne **obręcze kół** po suchych **szynach** żelaznych, według Poirée'go.

(Wagony kolejowe wagi od 3400 do 8400 kg).

Prędkość V w km/godz. =	16,56	26,28	31,68	51,48	72,00	79,20
Spółczynnik tarcia μ =	0,209	0,206	0,171	0,145	0,136	0,112.

3. Lano-żelazne **klocki hamulcowe** o **obręcze stalowe** według Galton'a.

Prędkość V w km/godz.: początek	7,56	15,84	39,96	72,36	96,48	
Spółczynnik tarcia μ =	0,330	0,273	0,242	0,166	0,127	0,074.

Nowe doświadczenia Wichert'a *) przy (niezmieniającej się) prędkości jazdy V km/godz. dały dla kloców hamulcowych ze stali lanej, trących się o obręcze stalowe, wynik następujący:

$$\mu = \beta \frac{1 + 0{,}0112\,V}{1 + 0{,}06\,V};$$

dla suchych, trących się powierzchni $\beta = 0{,}45$, dla mokrych $\beta = 0{,}25$. Jeżeli pociąg, idący przy rozpoczęciu działania hamulcy z prędkością V, ma się zatrzymać, to można przyjąć do obliczenia dla całego okresu hamowania przeciętny spółczynnik tarcia μ'. Dla rozmaitych prędkości V oznaczono następujące spółczynniki tarcia, przyczem dla μ' przyjęto warunki niekorzystne (szyny wilgotne):

*) Centralblatt der Bauverwaltung 1894, str. 73.

Prędkość V w km/godz.	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
Suche powierzchn. trące się μ=	0,450	0,313	0,250	0,215	0,192	0,176	0,164	0,154	0,147	0,141
Mokre powierzchn. trące się μ=	0,250	0,174	0,139	0,119	0,107	0,098	0,091	0,086	0,082	0,078
Średnia wartość. . . . μ'=	—	0,201	0,164	0,142	0,128	0,117	0,109	0,103	0,098	0,093

4. Stalowe **obręcze kół** po **szynach stalowych** według Galton'a.

Prędkość V w km/godz.: ruszanie z miejsca	11,16	54,72	96.48
Spółczynnik tarcia . . . . . μ = 0,242	0,088	0.065	0,027.

5. **Przyrządy, działające pod ciśnieniem wody,** według H. Lang'a.

a) Suwaki z bronzu lub drzewa gwajakowego po bronzie: μ jest stałe dla powolnego ruchu naprzód i wstecz, przy ciśnieniach od 2 do 100 atm.

Dla suwaków smarowanych bez przerwy . . . . . $\mu = 0{,}06$

Dla suwaków zwilżanych (nawadnianych) z pomocą licznych rowków . . . . . $\mu = 0{,}10$

Dla suwaków pracujących na sucho i z powodu tego skrzypiących . . . . . μ do 0,30

6. Dla dławnic uszczelnionych konopiami, bawełną lub też cholewą skórzaną: μ jest stałe przy ciśnieniach wody między 1 a 50 atm., a wartość jego niezależna od **długości** uszczelnienia. Tarcie w kg równa się $\mu \times$ ciśnienie wody w atm. $\times$ pole powierzchni uszczelniającej w cm.

α) **Bawełna** albo **konopie** luźne lub splecione w warkocz, nasycone gorącym łojem, zatrzymują nawet po miesiącach użycia, przy gładkim tłoku i niezbyt silnie wciśniętym dławiku . . . . . μ = 0,06 do 0,11;

β) **Bawełna** lub **konopie** przy trudnościach w uszczelnieniu (dławik ciężki, niekorzystnie położony i t. p.) . . . . . μ = do 0,25;

γ) **Uszczelnienie cholewą skórzaną:**
skóra miękka, wykonanie dokładne. . . . . μ = 0,03 do 0,07;
skóra twarda, mocno garbowana na surowo . . . . . μ = 0,10 do 0,13;
warunki niekorzystne (tłok szorstki, woda brudna i t. p.) . . . . . μ = do 0,20.

Dalsze szczegóły patrz Dział piąty: Części maszyn, rozd. V. Dławnice.

6. **Toczydła.** Spółczynnik tarcia piaskowca gruboziarnistego o żelazo lane μ = 0,21 do 0,24, o stal μ = 0,29, o żelazo kute μ = 0,41 do 0,46, zależnie od tego, czy kamień jest świeżo ostrzony, czy tępy; dla mokrego piaskowca drobnoziarnistego spółczynnik tarcia o żelazo lane średnio μ = 0,72, o stal μ = 0,94, o żelazo kute μ = 1,0.

7. **Spółczynniki tarcia całkowitego wozów.** *)

Tor z gładkich płyt granitowych	0,006.
Szyny kolei podjazdowych, średnio	0,006 do 0,008.
Dobry bruk asfaltowy	0,010.
Doskonały bruk kamienny	0,015.
Szosa z szabru, wybornie utrzymana	0,016.
Dobry bruk drewniany	0,018.
Dobry bruk kamienny	0,020.
Dobra szosa	0,023.

*) Handbuch d. Baukunde I, str. 552.—Por. Centralbl. d. Bauverw. 1888, str. 543.

Dobra szosa pokryta kurzem i t. p.	0,028.
Bruk kamienny, pośledniego gatunku	0,033.
Szosa wyjeżdżona, pokryta błotem	0,035.
Wyborne drogi polne	0,045.
Szosa źle utrzymana	0,050.
Drogi polne, zwykłe	0,080 do 0,160.
Piasek sypki	0,15 do 0,30.

8. **Spółczynniki tarcia μ sań.**

Włóki drewniane, niekute na gładkim torze drewnianym lub kamiennym.	niesmarowane	0,38.
	smarowane mydłem suchem	0,15.
	smarowane łojem	0,07.
Włóki drewniane, niekute na śniegu lub lodzie		0,035.
Włóki drewniane, kute na śniegu lub lodzie		0,02.

9. Opory tarcia pociągów kolejowych patrz Dział jedenasty. Opory tarcia okrętów patrz w dziale niniejszym pod VI: Dynamika cieczy, nadto Dział dwunasty: Budowa okrętów. Dla pociągów kolejowych (na torze prostym, poziomym) można średnio przyjąć za spółczynnik tarcia całkowitego 0,004 do 0,005, dla okrętów zaś 0,0003 do 0,0005.

c. Tarcie przy toczeniu.

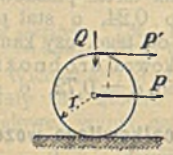
Jeżeli walec (rys. 142) toczący się bez ślizgania po równem, poziomem podłożu, do którego przyciska go siła Q (ciśnienie normalne), ma się obracać około linii podparcia, to musi on przemódz działanie pary sił, mającej moment: $M = Qf$.

Wielkość f (w **cm**), t. zw. ramię albo **spółczynnik tarcia przy toczeniu** jest np.:

dla drzewa gwajakowego po drzewie gwajakowem . $f = 0{,}047$ cm,
dla drzewa wiązowego (brzost.) po drzewie gwajak. $f = 0{,}081$ cm,
dla żelaza po żelazie (i stal po stali) średnio . . . $f = 0{,}050$ cm.

Rys. 142.

Rys. 143.



Rys. 144.

2. Jeżeli parę sił M przemoże np. siła P (rys. 143), działająca na środek ciężkości, to: $Pr = M = Qf$.

Jeżeli zaś siła P' działa na punkt obwodu przeciwległy linii podparcia walca (rys. 143), to: $P' 2r = M = Qf$.

3. Przy przesuwaniu ciężaru Q na walcu (rys. 144) będzie:

$$Pd = M = Qf' + (Q + G)f,$$

w którym to wzorze oznacza: f spółczynnik tarcia przy toczeniu się walca na podłożu, f' spółczynnik tarcia przy toczeniu się walca i ciężaru, G ciężar własny walca.

4. Walec, o promieniu r, zaczyna staczać się po płaszczyźnie pochyłej, jeżeli pochylenie jej $\operatorname{tg}\alpha = f : r$; z czego wynika: $f = r \operatorname{tg}\alpha$. (Por. jednakże przykład str. 212).

B. Stosunki siły i pracy w mechanizmach.

a. Zasady ogólne.

Jeżeli oznaczymy przez: Q opór pożytkowy mechanizmu w kg,
P rzeczywistą siłę pędzącą w kg,
q drogę, wzdłuż której działa Q, w m,
p drogę równoczesną siły P w m,

to: $$\eta = \frac{Qq}{Pp} = \frac{\text{praca pożyteczna}}{\text{praca włożona}}$$

będzie t. zw. **sprawnością** mechanizmu. **Praca zużyta przez tarcie** $A_r = Pp - Qq$.

Jeżeli przez P_0 oznaczymy w kg idealną siłę pędzącą, któraby, w razie nieistnienia oporów tarcia, utrzymywała w równowadze ciężar pożytkowy Q, a przez Q_0 idealny ciężar pożytkowy w kg, który mogłaby dźwignąć rzeczywista siła pędząca P, gdyby ruch odbywał się bez tarcia, to będzie również:

$$\eta = \frac{P_0}{P} = \frac{Q}{Q_0}.$$

Jeżeli dla ruchu powrotnego mechanizmu $\eta \leqq 0$, to mechanizm taki nazywa się **samohamownym**; z powodu oporów tarcia samodzielny ruch powrotny jest wówczas niemożliwy.

Jeżeli mechanizm składa się z wielu mechanizmów cząstkowych, o sprawnościach $\eta_1, \eta_2, \eta_3 \ldots$, to **całkowita sprawność** mechanizmu będzie: $\eta = \eta_1 \eta_2 \eta_3 \ldots$.*).

Stosunek pracy tarcia $A_r = Pp - Qq$ do pracy pożytecznej $A_n = Qq$ nazywa się **stratnością** $\mathfrak{V}$: **)

$$\mathfrak{V} = \frac{A_r}{A_n} = \frac{Pp}{Qq} - 1, \quad \text{a} \quad \eta = \frac{1}{1 + \mathfrak{V}}.$$

Rys. 145.

b. Kliny.

I. Ruch w łożach klinowych.

Klin, wciskany siłą Q w łoże klinowe, którego ściany tworzą kąt $= 2\alpha$, poruszając się wzdłuż swej osi, podlega oporowi tarcia:

$$W = Q \frac{\mu}{\sin\alpha} = Q\mu', \qquad \left(\mu' = \frac{\mu}{\sin\alpha} = \frac{\text{współczynnik tarcia}}{\text{klinów.}}\right)$$

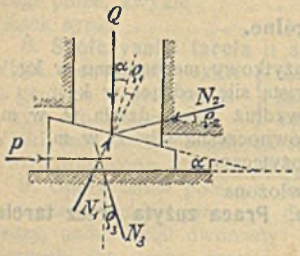
*) Wykreślenie ilości η patrz: G. Hermann, Zur graphischen Statik der Maschinengetriebe; Braunschweig 1879, F. Vieweg.

**) Stosunek zaś pracy straconej (przez tarcia i t. p.) do pracy włożonej nazwiemy stratą sprawności, bo sprawnością nazywamy stosunek pracy pożytecznej, wydanej przez mechanizm, do całej pracy włożonej w mechanizm.

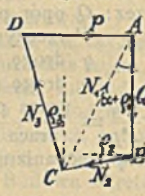
2. Łańcuch klinowy.

Klin, przesuwany w kierunku siły P (rys. 146), przemaga siłę Q. Odpory N_1, N_2 i N_3, jak również siłę P, wykreślamy podług rys. 147, wprowadzając ϱ_1, ϱ_2 i ϱ_3, jako odnośne kąty tarcia.

Rys. 146.



Rys. 147.



Kreślimy AC pod kątem $\alpha + \varrho_1$ do Q, BC równoległe do N_2, t. j. pod kątem ϱ_2 do poziomu; przez przecięcie C prowadzimy równoległą do N_3, t. j. pod kątem ϱ_3 do pionu. Pozioma przez A będzie wówczas $DA = P$. Obliczenie da nam zgodnie z powyższem:

$$N_1 : Q = \cos \varrho_2 : \cos (\alpha + \varrho_1 + \varrho_2),$$

$$P : N_1 = \sin (\alpha + \varrho_1 + \varrho_3) : \cos \varrho_3;$$ z tego wynika:

$$P : Q = \frac{\cos \varrho_2 \sin (\alpha + \varrho_1 + \varrho_3)}{\cos \varrho_3 \cos (\alpha + \varrho_1 + \varrho_2)}.$$

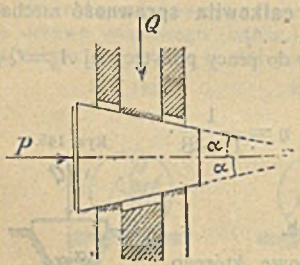
Np. dla $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3 = \varrho$: $P = Q \operatorname{tg} (2\varrho + \alpha)$.

Sprawność: $\eta = \operatorname{tg} \alpha : \operatorname{tg} (2\varrho + \alpha)$.

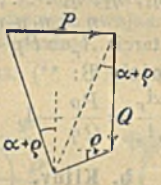
Siła P_1, potrzebna do zluzowania klina: $P_1 = Q \operatorname{tg} (2\varrho - \alpha)$.

Mechanizm hamuje się sam, póki $\alpha < 2\varrho$, względnie $\alpha < \varrho_1 + \varrho_3$.

Rys. 148.



Rys. 149.



Rys. 150.

Dla łańcucha klinowego rys. 148 będzie (por. rys. 149):

$$P = \frac{2Q \cos \varrho \sin (\alpha + \varrho)}{\cos (\alpha + 2\varrho)} = \frac{2Q \operatorname{tg} (\alpha + \varrho)}{1 - \operatorname{tg} \varrho \operatorname{tg} (\alpha + \varrho)} \approx 2Q \operatorname{tg} (\alpha + \varrho).$$

$$\eta = \operatorname{tg} \alpha : \operatorname{tg} (\alpha + \varrho). \qquad P_1 \approx 2Q \operatorname{tg} (\varrho - \alpha).$$

Mechanizm jest samohamowny, dopóki $\alpha < \varrho$, względnie $2\alpha < \varrho_1 + \varrho_3$.

3. Przebieg walcowania.

Aby walcowanie mogło się rozpocząć (rys. 150) musi być:

$$d - e \leq 2R (1 - \cos \varrho).$$

We wzorze powyższym $\operatorname{tg} \varrho = \mu$ (porówn. str. 216).

Np. dla żelaza rozżarzonego i walców lano-żelaznych (dla których $\mu = \operatorname{tg} \varrho = 0{,}1$) musi być: $d - e \lesssim 0{,}01\, R$.

c. Czopy.

I. Ciśnienie na powierzchnię i opór tarcia. *)

Jeżeli jest: P siłą cisnącą na czop w kg,
l długością, a $d = 2r$ średnicą czopa w cm,
df różniczką powierzchni czopa w cm^2,
y odległością tejże różniczki df od osi obrotowej w cm,
p normalnem ciśnieniem jednostkowem na df w kg/cm^2,
φ kątem normalnej na df i siły P,
μ spółczynnikiem tarcia przy ślizganiu (str. 216 i 217),
μ_1 spółczynnikiem tarcia czopowego, to będzie:

Moment tarcia czopa: $M = \mu \int p \cdot df \cdot y$ kgcm,

Praca tarcia przy jednym obrocie: $A_r = 2\pi M$ kgcm,

Moc **) tarcia czopa przy n obrotach/min.:

$$E = \frac{2\pi\mu n}{60} \int p \cdot df \cdot y = \frac{\pi n}{30} M \text{ kgcm/sek.}$$

Ciśnienie na jednostkę powierzchni p w czopach nowych jest dla wszystkich df stałe i od φ niezależne: $p = P : f$, jeżeli f oznacza rzut przyciskanej powierzchni czopa na płaszczyznę prostopadłą do kierunku siły. W czopach wytartych oznaczamy p, wychodząc z założenia, że zużycie, mierzone w kierunku P, jest dla wszystkich df jednakowe: $p = \text{stała} \cdot \frac{\cos \varphi}{y}$:

$$P = \int p \cdot df \cdot \cos \varphi = \text{stała} \int \frac{\cos^2 \varphi}{y}\, df.$$

$p_m = \frac{P}{2rl} = \frac{\pi}{4} p_{max} = 0{,}7854\, p_{max}$ jest **średniem ciśnieniem prostopadłem.** $p_r = \frac{2}{\pi} p_{max} = 0{,}81\, p_m$ jest **średniem ciśnieniem promiennem.**

Wyraz $\mu_1 = \frac{4}{\pi}\mu = 1{,}27324\, \mu$ (porówn. tablicę str. 225) nazwano **spółczynnikiem tarcia czopowego.** Wartość μ wyznacza się wprost z doświadczenia w sposób następujący: Ponieważ

$M = \mu_1 Pr$ (por. str. 225), a $E = \frac{\pi n}{30} M$ (patrz powyżej),

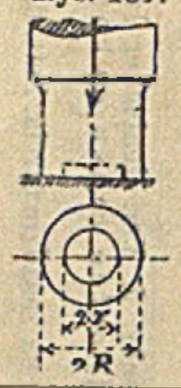
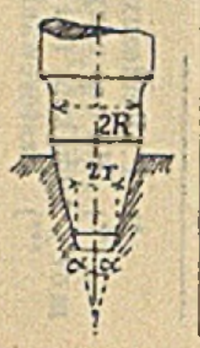
przeto: $\mu_1 = \frac{30}{\pi} \frac{E}{Prn} = 9{,}5493 \frac{E}{Prn}$. ***)

*) F. Reuleaux, Tarcie czopowe, Zeitschr. d. Ver. deutscher Ing. 1891, st. 932.

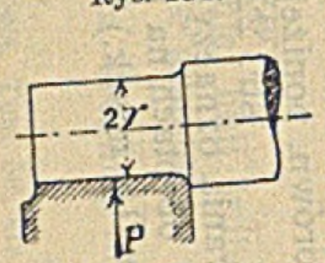
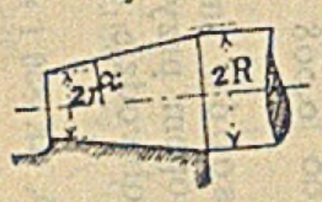
**) Mocą nazywamy pracę w jednostce czasu wykonaną, np. maszyna mocy 4-ch koni (nie siły!).

***) Zastosowanie wahadła polegającego na zasadzie tarcia. Zeit. d. V. d. Ing. 1891, 935

1. Czopy stojące. (Siła cisnąca P działa w kierunku osi).

Rodzaj czopa		Ciśnienie na jednostkę powierzchni p: Czop nowy	Czop wytarty p	Czop wytarty p_{max}	Moment tarcia M: Czop nowy	Czop wytarty
Rys. 151. 	Płaska powierzchnia pierścieniowa; czop grzebieniasty.	$\frac{P}{\pi (R^2-r^2)}$	$\frac{P}{2\pi (R-r)\,y}$	$\frac{P}{2\pi (R-r)\,r}$	$\frac{2}{3}\mu P \frac{R^3-r^3}{R^2-r^2}$	$\frac{1}{2}\mu P (R+r)$
	Czop pełny płaski	$\frac{P}{\pi R^2}$	$\frac{P}{2\pi R y}$	∞	$\frac{2}{3}\mu P R$	$\frac{1}{2}\mu P R$
Rys. 152.	Czaszka kulista $\left(\alpha = \frac{\alpha^\circ}{180}\pi\right)$	$\frac{P}{\pi R^2}$	$\frac{P(\alpha + \sin\alpha\cos\alpha)}{\pi R^2 \operatorname{tg}\varphi}$	∞	$\mu P R \frac{\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$	$\mu P R \frac{\sin^2\alpha}{\alpha + \sin\alpha\cos\alpha}$
	Półkula.	$\frac{P}{\pi R^2}$	$\frac{P}{2R^2 \operatorname{tg}\varphi}$	∞	$\frac{\pi}{2}\mu P R$	$\frac{2}{\pi}\mu P R$
Rys. 153. 	Stożek ścięty.	$\frac{P}{\pi (R^2-r^2)}$	$\frac{P}{2\pi (R-r)\,y}$	$\frac{P}{2\pi (R-r)\,r}$	$\frac{2}{3}\mu P \frac{R^3-r^3}{R^2-r^2}\frac{1}{\sin\alpha}$	$\frac{1}{2}\mu P \frac{R+r}{\sin\alpha}$
	Stożek pełny.	$\frac{P}{\pi R^2}$	$\frac{P}{2\pi R y}$	∞	$\frac{2}{3}\mu P \frac{R}{\sin\alpha}$	$\frac{1}{2}\mu P \frac{R}{\sin\alpha}$

2. Czopy leżące. (Siła cisnąca P działa prostopadle do osi.)

Czopy (długość czopa $= l$)		Ciśnienie p na jednostkę powierzchni: Czop nowy	Czop wytarty p	Czop wytarty p_{max}	Moment tarcia M: Czop nowy	Czop wytarty
Rys. 154. 	Walcowy, do połowy objęty.	$\frac{P}{2rl}$	$\frac{4}{\pi}\frac{P}{2rl}\cos\varphi$	$\frac{4}{\pi}\frac{P}{2rl} = \frac{4}{\pi}p_m$	$\frac{\pi}{2}\mu P r$	$\frac{4}{\pi}\mu P r = \mu_1 P r$
	Taki sam, lecz ciśnienie Q na górną panewkę.	$\frac{P+2Q}{2rl}$	$\frac{4}{\pi}\frac{P+2Q}{2rl}\cos\varphi$	$\frac{4}{\pi}\frac{P+2Q}{2rl}$	$\frac{\pi}{2}4(P+2Q)r$	$\mu_1 (P+2Q) r$
Rys. 155. 	Stożek ścięty.	Odpór D w kierunku osi, spowodowany dążeniem do ześlizgnięcia się stożka, wynosi: $D = {}^1/_2\,\pi P \operatorname{tg}\alpha$ (czop nowy), $D = (4:\pi) P \operatorname{tg}\alpha$ (czop wytarty).			$\frac{\pi}{3}\mu P \frac{R^3-r^3}{R^2-r^2}\frac{1}{\cos\alpha}$	$\frac{2}{\pi}\mu P \frac{R+r}{\cos\alpha}$
	Stożek pełny.				$\frac{\pi}{3}\mu P \frac{R}{\cos\alpha}$	$\frac{2}{\pi}\mu P \frac{R}{\cos\alpha}$

Do powyższego kształtu czopów odnoszą się obydwa następujące twierdzenia, tak do czopów nowych, jak i do wytartych.

α) Jeżeli na czop stożkowy lub stożkowaty działa siła P w kierunku osi, a siła P_1 prostopadle do niej, to ogólny moment tarcia należy obliczać tak, jak gdyby jedynie siła P działała na czop, jako na czop stojący, a siła P_1 wcale nie istniała. Dla czopa walcowego z płaską powierzchnią krańcową trzeba w tym razie momenty tarcia, spowodowane siłą P (dla płaskiej powierzchni krańcowej, jako czopa stojącego), i momenty tarcia, spowodowane siłą P_1 (dla powierzchni walcowej, jako dla czopa leżącego) obliczyć oddzielnie i dodać do siebie.

β) Jeżeli obydwa czopy leżące, stożkowe lub stożkowate u jednego wału leżącego są nawzajem sobie równe, a raczej symetryczne, i jeżeli na jeden z nich działa, prostopadle do osi, większa siła cisnąca P, na drugi zaś mniejsza P_1, to suma momentów tarcia obydwóch czopów jest równa momentowi, któryby wypadł dla takiegoż czopa, na który działało ciśnienie $2P$. Dla czopów walcowatych należy w tym razie zamiast $2P$ podstawić $P + P_1$.

Spółczynnik tarcia czopowego μ_1 zależy od rodzaju smaru. Przy obfitem smarowaniu olejem rzepakowym, tłuszczami i olejami mineralnymi lub ich mieszaninami z naftą, nie wykazują gładko szlifowane czopy stalowe, chodzące w panwiach bronzowych, wyższego μ_1 jak $= 0{,}003$ do $0{,}03$. Smarowanie niewłaściwe, szczególnie na otwartem powietrzu (przewody linowe, obrotnice i przesuwnice dróg żelaznych i t. p.), doprowadza wartość μ_1 do $0{,}08$ aż do $0{,}10$. (Porówn. też **2.** poniżej).

Czop pracuje tem korzystniej, im mniejszy ma moment tarcia i im mniej sam się ściera (zużywa).

Dla danej siły P i danego największego promienia R najmniejszy moment tarcia wykazuje, z pomiędzy wszystkich gatunków czopów, czop stojący płaski. Najmniej ściera się pełny czop stojący płaski i walcowy czop leżący.

Przy **wykreślnem** obliczaniu najdogodniej uwzględnić tarcie czopowe, prowadząc odpór łożyska nie przez oś czopa, lecz stycznie do t. zw. koła tarcia czopowego, którego promień dla czopa walcowego jest $a = \mu_1 r$, a którego środek leży w osi czopa; r jest tu promieniem czopa, a μ_1 spółczynnikiem tarcia czopowego.

2. Spółczynniki tarcia czopowego μ_1.

1. Według Tower'a i Thurston'a.

Przedmiot doświadczenia: czop stalowy, obciążony jednostronnie z góry, leżący poziomo w panewce bronzowej, zanurzonej w smarze. Wymiary: $d = 102$ mm, $l = 152$ mm.

Gatunek smaru	Prędkość	Ciśnienie średnie p_m	μ_1	Opór tarcia W w kg/cm² powierzchni ciśniętej, przy obfitem smarowaniu przez zanurzenie w smarze, przy 1,6 m/sek. prędkości obwodowej i $p_m = 7{,}0$ do 21,8 kg/cm²	
	m/sek.	kg/cm²		Gatunek smaru	W w kg/cm²
Oliwa	0,80	36,5	0,0008	Tłuszcz mineralny	0,0737
Olej zwierzęcy	1,06	36,5	0,0010	Oliwa	0,0460
Olej rzepakowy	2,13	36,5	0,0015	Olej zwierzęcy	0,0458
Tłuszcz mineralny	0,80	36,5	0,0010	Olej mineralny	0,0438
	2,13	36,5	0,0018	Olej rzepakowy	0,0360
Olbrot	0,80	29,2	0,0015	Olbrot	0,0340
	2,13	29,2	0,0021		
Olej mineralny	0,80	36,5	0,00123	Z tego wynika:	
	2,13	36,5	0,00178	$\mu_1 = \frac{W}{p_m}$.	
Tłuszcz miner.	2,13	7,00	0,014		
Oliwa Olej zwierzęcy	2,13	7,00	0,008	(Porówn. poniżej 3., odstęp 1., str. 227.)	

Wpływ rozmaitych sposobów smarowania oznaczył Tower z doświadczeń z powyższym czopem przy 150 obrotach na min. dla oleju rzepakowego (prędkość na obwodzie czopa 0,8 m/sek.) *):

*) Zeitschr. d. V. d. Ing. 1885, str. 836 i nast.

Czop zanurzony w oleju, przy . . $p_m = 18{,}5$ kg/cm^2 . $\mu_1 = 0{,}00139$.
Czop smarowany knotem, przy . . $p_m = 17{,}1$ kg/cm^2 . $\mu_1 = 0{,}00980$.
Czop smarowany poduszeczką, przy $p_m = 19{,}1$ kg/cm^2 . $\mu_1 = 0{,}00900$.

2. Według Morin'a.

Ciała trące się ($p_m = 2{,}5$ do 10 kg/cm^2)	Smarowanie zwykłe	Smarowanie bez przerwy
Bronz o bronz	0,10	—
Bronz o żelazo lane	0,09	0,045 do 0,052
Żelazo lane o bronz	0,075	—
Żelazo lane o żelazo lane	0,075	0,054
Żelazo lane o drzewo gwajakowe	(0,10 tłuszczem) 0,07	(0,28 wodą) 0,090
Drzewo gwajakowe o drzewo gwajakowe	—	0,07
Żelazo kute o żelazo lane lub bronz	(0,25 skąpo tłuszczem) 0,07	0,054; według Waltje i Ruhlmann'a 0,02 do 0,03
Żelazo kute o drzewo gwajakowe	(0,19 tłuszczem) 0,11	—

3. Według Brown'a*) z doświadczeń Tower'a i Thurston'a wynika:

1. Dla czopów smarowanych doskonale (zanurzonych w kąpieli olejnej): Współczynnik tarcia μ_1, przy umiarkowanych ciśnieniach i prędkościach, jest w przybliżeniu w stosunku odwrotnym do ciśnienia na jednostkę powierzchni, to zn., że tarcie na jednostkę pola powierzchni jest w przybliżeniu stałe. Tarcie wzmaga się (przy jednakowem ciśnieniu) w miarę zwiększania się pola powierzchni tarcia.

2. Dla tarcia **na sucho** μ_1 jest stałe, a wielkość tarcia nie jest zależna od pola powierzchni.

3. μ_1 zmniejsza się w miarę, jak prędkość tarcia się zwiększa z 0,05 na 0,5 m/sek. Mniej więcej przy 0,5 m/sek. następuje zmiana: powyżej tej granicy μ_1 rośnie w stosunku pierwiastka kwadratowego z prędkości, a więc przy prędkości 2 m/sek. wzrasta o 100%.

4 Podniesienie się temperatury w pewnych granicach (0° do 40°) powoduje zmniejszanie się ilości μ_1, mniej więcej w stosunku odwrotnym temperatury ponad zerem.

4. Kirchweger oznaczył dla osi wagonów kolejowych, których czopy ze stali zlewnej obracały się w panewkach z ołowiu twardego lub ze stopów cyny i były smarowane olejem rzepakowym przy pomocy poduszeczek i knota: $\mu_1 = 0{,}009$ do $0{,}01$; dla panewek bronzowych $\mu_1 = 0{,}014$. Przy doświadczeniach tych μ_1 okazało się niezależnem od obciążenia i prędkości, która zmieniała się od $n = 10$ do 360 obrotów/min.

d. Śruby.

I. Gwint płaski (prostokątny).

Oznaczymy przez:
r promień średniej linii śrubowej,
h skok lub krok gwintu,
α kąt pochylenia średniej linii śrubowej $\left(\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{2\pi r}\right)$,

*) Engineer 1884. Tom 58, str. 57 i nast.

$\mu_0 = \operatorname{tg} \varrho_0$ spółczynnik tarcia w spokoju (por. str. 215),
$\mu = \operatorname{tg} \varrho$ spółczynnik tarcia przy ślizganiu (por. str. 216).

Rys. 156.

1. **Równowaga** istnieje, póki

$$Q \operatorname{tg}(\alpha - \varrho_0) < P < Q \operatorname{tg}(\alpha + \varrho_0) = Q \frac{h + 2\pi r \mu_0}{2\pi r - \mu_0 h};$$

w powyższym wzorze założono, że siła P działa w płaszczyźnie prostopadłej do osi, w odległości r (rys. 156).

Ponieważ w rys. 156 $Pr = KR$,

więc siła $K = \frac{Pr}{R}$, działająca ramieniem R, jest równowarta z siłą P.

Samohamowność następuje, gdy $\alpha \leqq \varrho_0$.

2. Dla **ruchu** śruby (rys. 157):

$$P = Q \operatorname{tg}(\alpha \pm \varrho) = Q \frac{h \pm 2\pi r \mu}{2\pi r \mp \mu h};$$

znak dolny odnosi się do ruchu, przesuwającego śrubę w kierunku działania siły Q, znak górny do ruchu odwrotnego.

Sprawność: $\eta = \operatorname{tg} \alpha : \operatorname{tg}(\alpha + \varrho)$, względnie
$\eta = \operatorname{tg}(\alpha - \varrho) : \operatorname{tg} \alpha$.

η staje się największością dla $\alpha = 45° - {}^1/_2 \varrho$; np. przy $\mu = 0{,}1$, $\eta_{max} = 0{,}81$ dla $\alpha = 42°$. Ponieważ η wzrasta znacznie tylko do $\alpha \infty 20°$, przyjmuje się przeto po większej części $\alpha = 20°$, przyczem $\eta = 0{,}74$. Dla pras, u których chodzi głównie o znaczne przełożenie siły, przyjmuje się $\alpha = 3°$, przyczem $\eta = 0.27$.

(Porówn. też Dział szósty).

2. Gwint ostry (trójkątny).

Rys. 157.

β połowa kąta krawędziowego gwintu,
r promień średniej linii śrubowej,
h skok śruby,
α kąt pochylenia średniej linii śrubowej,

$$\left(\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{2\pi r}\right),$$

$\mu_0 = \operatorname{tg} \varrho_0$, a $\mu = \operatorname{tg} \varrho$, porówn. str. 215 i 216. Siły P i Q w tem samem znaczeniu, jak powyżej pod **1.**

1. **Równowaga** istnieje, póki

$$P < Q \frac{\sin \alpha \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta} + \mu_0}{\cos \alpha \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta} - \mu_0 \operatorname{tg} \alpha} \quad \text{i}$$

$$P > Q \frac{\sin \alpha \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta} - \mu_0}{\cos \alpha \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta} + \mu_0 \operatorname{tg} \alpha}.$$

Ponieważ α w porównaniu z β zwykle bywa bardzo małe, więc można założyć w przybliżeniu:

$$\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta} = 1 : \cos \beta.$$

Wyznaczywszy ϱ'_0 z $\operatorname{tg}\varrho'_0 = \mu_0 \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$, otrzymamy:

$$Q\operatorname{tg}(\alpha - \varrho'_0) < P < Q\operatorname{tg}(\alpha + \varrho'_0).$$

Samohamowność istnieje, gdy $\alpha < \varrho'_0$.

2. Dla **ruchu** śruby:

$$P = Q\frac{\sin\alpha\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta} \pm \mu}{\cos\alpha\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta} \mp \mu\operatorname{tg}\alpha}.$$

Wyznaczywszy ϱ' z:

$$\operatorname{tg}\varrho' = \frac{\mu}{\cos\alpha\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta}} = \frac{\mu}{\sqrt{1+\cos^2\alpha\operatorname{tg}^2\beta}},$$

albo z bardzo znacznem przybliżeniem: $\operatorname{tg}\varrho' = \frac{\mu\cos\beta}{\cos\alpha}$, otrzymujemy:

$$P = Q\operatorname{tg}(\alpha \pm \varrho').$$

Znak górny odnosi się do ruchu przeciwnego, a dolny do ruchu zgodnego z kierunkiem działania siły Q.

Sprawność: $\eta = \operatorname{tg}\alpha : \operatorname{tg}(\alpha + \varrho')$, względnie: $\eta = \operatorname{tg}(\alpha - \varrho') : \operatorname{tg}\alpha$.

Gwint trójkątny ma zatem sprawność większą, niż gwint prostokątny, ponieważ $\varrho' < \varrho$. Dla $\beta = 0$ staje się η najmniejszością.

Przykład. Dane: $\alpha = 2°\,10'$; $\beta = 27°\,30'$; $\mu = \operatorname{tg}\varrho = 0{,}16$, a zatem $\varrho = 9°\,5{,}5'$.

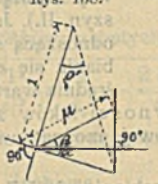
Będzie: $\operatorname{tg}\varrho' = \frac{0{,}16\cdot\cos 27°\,30'}{\cos 2°\,10'} = 0{,}14202$; a zatem $\varrho' = 8°\,5'$.

Więc: $P = Q\operatorname{tg}(\alpha+\varrho') = Q\operatorname{tg}10°\,15' = 0{,}181\,Q$; $\eta = \frac{\operatorname{tg}2°\,10'}{\operatorname{tg}10°\,15'} = 0{,}209$.

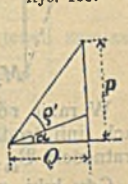
Dla gwintu prostokątnego byłoby:
$P = Q\operatorname{tg}(\alpha+\varrho) = 0{,}199\,Q$; $\eta = 0{,}190$.
Samohamowność istnieje w obydwóch razach.

Wykreślamy P, jak to wskazuje rys. 158 i 159, po uprzedniem wyznaczeniu wartości ϱ'.

Rys. 158.



Rys. 159.



3. Jeżeli u śruby z gwintem trójkątnym d oznacza zewnętrzną średnicę gwintu, d_1 średnicę rdzenia, a s_0 szerokość szczęki klucza (porówn. Dział piąty: Części maszyn, I. B.), to:

$$r = \frac{d+d_1}{4}; \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{2h}{\pi(d+d_1)}; \qquad \operatorname{tg}\varrho' = \frac{\mu\cos\beta}{\cos\alpha};$$

$$r_0 = \frac{d+s_0}{4} \sim 1{,}4\,r.$$

Wówczas potrzeba dla **przyciągnięcia mutry** wytworzyć moment obrotowy:

$$M = Pr + Qr_0\mu' = [\operatorname{tg}(\varrho' + \alpha) + 1{,}4\,\mu']\,Qr,$$

a dla **zluzowania mutry**:

$$M = [\operatorname{tg}(\varrho' - \alpha) + 1{,}4\,\mu']\,Qr;$$

μ' oznacza spółczynnik tarcia między mutrą a podkładką, r_0 zaś średni promień tej powierzchni, jaką mutra przylega do podkładki.

Przykład. Dla gwintu metrycznego (porówn. Dział piąty: Części maszyn, I. B.) niechaj będzie: $d = 20$ mm, $d_1 = 16{,}4$ mm, $h = 2{,}4$ mm, $2\beta = 53° 8'$; zatem $r = 9{,}1$ mm, $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}04197$, $\alpha = 2° 24' 13''$. Jeżeli $\mu = \mu' = 0{,}41$ (porównaj 3., str. 216), to $\varrho = 20° 9' 17''$.

Do przyciągnięcia mutry potrzeba:

$$M = (\operatorname{tg} 22° 33' 30'' + 1{,}4 \cdot 0{,}41)\, Qr = 0{,}989\, Qr = 9{,}0\, Q \text{ w kg mm.}$$

Do złuzowania mutry potrzeba:

$$M = (\operatorname{tg} 17° 45' 4'' + 1{,}4 \cdot 0{,}41)\, Qr = 0{,}894\, Qr = 8{,}1\, Q \text{ w kg mm.}$$

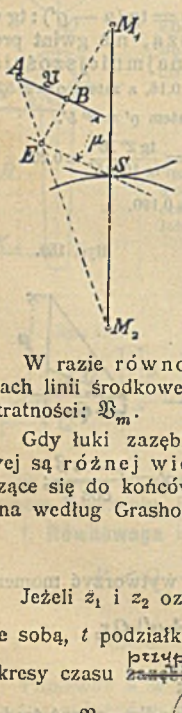
e. Koła zębate.

I. Koła zębate (zwykłe).

Oznaczenie stratności $\mathfrak{V}$ (por. str. 221).

Jeżeli profile dwóch zębów stykają się w E (rys. 160), przyczem ES jest wspólną normalną w punkcie zetknięcia, a M_1 i M_2 są środkami obydwóch kół, to otrzymamy stratność $\mathfrak{V}$ dla chwilowego położenia, prowadząc w odległości μ od ES równoległą do niej. Obydwa promienie M_1E i M_2E odcinają na tej równoległej kresę AB, która, wymierzona tą samą miarą, co μ, da nam wartość $\mathfrak{V}$. (μ jest spółczynnikiem tarcia przy ślizganiu).

Rys. 160.



Dla najczęściej używanych profili zębowych można ze znacznem przybliżeniem uważać stratność $\mathfrak{V}$, jako pozostającą w stosunku prostym do długości łuku e zazębiania się kół, przyczem łuk ten mierzy się po obu stronach linii środkowej M_1M_2. (Porówn. Dział piąty: Części maszyn, II.). Jeżeli $\mathfrak{V}_1$ oznacza wartość stratności $\mathfrak{V}$, odnoszącą się do punktu końcowego łuku zazębiania się e_1, to dopóki tylko jeden ząb pracuje, średnia wartość stratności $\mathfrak{V}$ będzie równa $^1/_2\,\mathfrak{V}_1$.

W razie równości łuków zazębiania się kół po obydwóch stronach linii środkowej, można uważać ilość $^1/_2\,\mathfrak{V}_1$ za średnią wartość stratności: $\mathfrak{V}_m$.

Gdy łuki zazębiania się kół po obydwóch stronach linii środkowej są różnej wielkości e_1 i e_2, to, oznaczywszy wartości, odnoszące się do końców tych łuków zazębiania się, przez $\mathfrak{V}_1$ i $\mathfrak{V}_2$, można według Grashof'a wyrazić wartość średnią przez:

$$\mathfrak{V}_m = \frac{\mathfrak{V}_1 e_1 + \mathfrak{V}_2 e_2}{2(e_1 + e_2)}.$$

Jeżeli z_1 i z_2 oznaczają ilość zębów dwóch kół zazębiających się ze sobą, t podziałkę ich zębów, a $\tau_1 = \frac{e_1}{t}$, $\tau_2 = \frac{e_2}{t}$, $\tau = \tau_1 + \tau_2$ okresy czasu przypadu zazębiania, to będzie również:

$$\mathfrak{V} = \pi\mu\left(\frac{1}{z_1} \pm \frac{1}{z_2}\right)\frac{\tau_1^2 + \tau_2^2}{\tau_1 + \tau_2} \sim \pi\mu\left(\frac{1}{z_1} \pm \frac{1}{z_2}\right)\frac{\tau}{2}.$$

Uwzględniając nadto, że dla wartości okresów czasu zazębienia się τ, leżących w granicach między 1 a 2, [illegible] na przemiany 1 ząb i 2 zęby, otrzymamy z większą dokładnością:

$$\mathfrak{B} = \pi\mu\left(\frac{1}{z_1} \pm \frac{1}{z_2}\right)(\tau_1^2 + \tau_2^2 - \tau_1 - \tau_2 + 1), \text{ lub też:}$$

$$\mathfrak{B} \sim \pi\mu\left(\frac{1}{z_1} \pm \frac{1}{z_2}\right)\left(\frac{\tau^2}{2} - \tau + 1\right) = \pi\mu\left(\frac{1}{z_1} \pm \frac{1}{z_2}\right)\psi.$$

Znak + odnosi się do kół zewnętrznie uzębionych, znak — do kół wewnętrznie uzębionych.

Przyjmując średnią wartość $\mu = 0{,}16$, czyli $\pi\mu = 0{,}5$, otrzymamy:

dla $\tau =$	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
$\psi =$	0,5	0,505	0,520	0,545	0,58	0,625	0,68	0,745	0,82	0,905	1,0.

Okresy τ_1 i τ_2 dla stosunków (proporcyi wymiarów) powszechnie używanych w zazębieniu cykloidalnem i ewolwentowem *) zależą wyłącznie od ilości zębów z_1 i z_2, a mianowicie dla:

zazębienia cykloidalnego:

$z_1 =$	7	10	15	20	30	40	50	∞
$\tau_1 =$	0,58	0,60	0,64	0,66	0,68	0,69	0,71	0,75

zazębienia ewolwentowego:

$z_1 =$	20	25	30	40	50	60	∞
$\tau_1 =$	0,84	0,90	0,92	0,97	0,99	1,02	1,24.

Jeżeli mamy rysunek kształtu zęba, to zaleca się użycie sposobu, podanego w Dziale piątym: Części maszyn, rozdział II. A. a.

Przy **wykreślnem** oznaczaniu strat, spowodowanych tarciem w kołach zębatych, można uwzględnić tarcie między zębami, kreśląc kierunek nacisku zębów nie przez sam punkt styczności S obydwóch kół podziałkowych, lecz przez punkt, przesunięty na linii środkowej z S ku środkowi koła pędzonego o $\xi = \mu\frac{\psi}{2}t$.

2. Stożki zębate.

Wzory pod **1.** stosują się i do stożków zębatych, jeżeli zamiast:

$$\frac{1}{z_1} \pm \frac{1}{z_2} \quad \text{podstawimy:} \quad \sqrt{\frac{1}{z_1^2} + \frac{1}{z_2^2} + \frac{2\cos\varepsilon}{z_1 z_2}};$$

ε oznacza kąt, który tworzą sobą osie obydwóch stożków.

3. Koła zębate śrubowe.

Do właściwego tarcia międzyzębnego przyłącza się tu jeszcze tarcie zazwyczaj o wiele większe, spowodowane ślizganiem się zębów w kierunku ich szerokości. Jeżeli oznaczymy przez γ i γ_1 kąty nachylenia obydwóch kół śrubowych, to stratność, spowodowana ślizganiem tem, wyniesie:

$$\mathfrak{B}_s = \frac{\sin\gamma_1 \sin(\gamma + \varrho)}{\sin\gamma \sin(\gamma_1 - \varrho)} - 1.$$

W szczególowym przypadku **śruby bez końca** (gdzie $\gamma_1 = 90 - \gamma$):

*) Przy zazębieniu ewolwentowem linia profilu zęba jest rozwijającą (ewolwentą) obwodu kołowego.

$$\mathfrak{W}_s = \frac{\operatorname{tg}(\gamma+\varrho)}{\operatorname{tg}\gamma} - 1 = \frac{1+\frac{2\pi r}{t}\mu}{1-\frac{t}{2\pi r}\mu} - 1,$$

jeżeli t oznacza podziałkę, r średni promień ślimaka, a $\mu = \operatorname{tg}\varrho$ spółczynnik tarcia przy ślizganiu.

Stratność, spowodowana właściwem tarciem międzyzębnem, wyniesie w tym przypadku:

$$\mathfrak{W} = \frac{\pi\mu}{z}\psi \quad (z = \text{ilości zębów koła śrubowego, } \psi \text{ patrz str. 231}).$$

f. Cięgna. *)

Wartości $e^{\mu_0 \alpha}$.

Stosunek łuku opiętego do całego obwodu $\frac{\alpha}{2\pi} = n$	Pasy skórzane na kołach pasowych				Liny konopne				Żelazne taśmy hamulcowe na kołach żelaznych
	drewn.	lanożelaznych							
	Stan pasa								
	nieco tłusty	bardzo tłusty	nieco tłusty	wilgotny	na bębnach żelaznych	na bębnach drewnianych	na drzewie szorstkiem	na drzewie wygładzonem	
	$\mu_0 =$ 0,47	0,12	0,28	0,38	$\mu_0=0{,}25$	$\mu_0=0{,}4$	$\mu_0=0{,}5$	$\mu_0=0{,}33$	$\mu_0=\mu=0{,}18$
0,1	1,34	1,01	1,19	1,27	1,17	1,29	1,37	1,23	1,12
0,2	1,81	1,16	1,42	1,61	1,37	1,65	1,87	1,51	1,25
0,3	2,43	1,25	1,69	2,05	1,60	2,13	2,57	1,86	1,40
0,4	3,26	1,35	2,02	2,60	1,87	2,73	3,51	2,29	1,57
0,425	3,51	1,38	2,11	2,76	1,95	2,91	3,80	2,41	1,62
0,45	3,78	1,40	2,21	2,93	2,03	3,10	4,11	2,54	1,66
0,475	4,07	1,43	2,31	3,11	2,11	3,30	4,45	2,68	1,71
0,5	4,38	1,46	2,41	3,30	2,19	3,51	4,81	2,82	1,76
0,525	4,71	1,49	2,52	3,50	2,28	3,74	5,20	2,97	1,81
0,55	5,63	1,51	2,63	3,72	2,37	3,98	5,63	3,13	1,86
0,6	5,88	1,57	2,81	4,19	2,57	4,52	6,59	3,47	1,97
0,7	7,90	1,66	3,43	5,32	3,00	5,81	9,00	4,27	2,21
0,8	10,6	1,83	4,09	6,75	3,51	7,47	12,34	5,25	2,47
0,9	14,3	1,97	4,87	8,57	4,11	9,60	16,90	6,46	2,77
1,0	19,2	2,12	5,81	10,9	4,81	12,35	23,14	7,95	3,10
1,5	—	—	—	—	10,55	43,38	111,16	22,42	5,45
2,0	—	—	—	—	23,14	152,4	535,47	63,23	9,60
2,5	—	—	—	—	50,75	535,5	2576,0	178,5	16,9
3,0	—	—	—	—	111,3	1881	12392	502,9	29,8
3,5	—	—	—	—	244,2	6611	59610	1418	52,4

*) Cięgno jest nazwą ogólną wszelkiego rodzaju części zdolnych pracować wyłącznie tylko na wyciąganie.

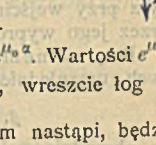
I. Stosunki sił.

W jakiemkolwiek cięgnie (pas, lina, taśma hamulcowa), nawiniętem na walec dowolny (rys. 161), panuje między siłami T_1 i T_2 równowaga, dopóki:

$$T_2 e^{-\mu_0 \alpha} \leqq T_1 \leqq T_2 e^{\mu_0 \alpha};$$

we wzorze powyższym oznaczają: α kąt łuku opiętego cięgnem, wyrażony w mierze łukowej, t. j. kąt pomiędzy normalnemi w końcach tegoż łuku, μ_0 spółczynnik tarcia w spokoju (patrz str. 215), a e podstawę logarytmów naturalnych (porówn. str. 40).

Rys. 161.



Siła obwodowa $P = T - t$, przenoszona na walec za pośrednictwem tarcia cięgna o niego, może być zatem nie większą niż:

$$P = \frac{e^{\mu_0 \alpha} - 1}{e^{\mu_0 \alpha}} T = (e^{\mu_0 \alpha} - 1)\, t;$$

T oznacza tu większą, a t mniejszą z sił wypręża-jących cięgno, przyczem granica stosunku $T : t = e^{\mu_0 \alpha}$. Wartości $e^{\mu_0 \alpha}$ podano w tablicy na stronie 232, a $e^{\pi} = 23{,}1407$, wreszcie log $e^{\pi} = 1{,}3643764$.

Gdy **ruch względny** między walcem i cięgnem nastąpi, będzie $T = te^{\mu \alpha}$, a **opór tarcia** na obwodzie walca, względnie na cięgnie, wyniesie:

$$W = \frac{e^{\mu \alpha} - 1}{e^{\mu \alpha}} T = (e^{\mu \alpha} - 1)\, t;$$

μ oznacza spółczynnik tarcia przy ślizganiu (patrz str. 216). Przy obliczeniach należy α wyrażać wszędzie miarą łukową:

$$\alpha = 2\pi \frac{\alpha^0}{360} = 2\pi n \text{ (patrz str. 232).}$$

2. Straty w pracy.

a. Straty spowodowane sztywnością cięgna.

1. Jeżeli oznacza:

P siłę naprężającą cięgno w miejscu jego schodzenia z walca w kg,
Q siłę naprężającą cięgno w miejscu jego wchodzenia na walec w kg,
d średnicę liny albo grubość żelaza w ogniwach łańcucha (względnie wałków w łańcuchu przegubowym) w cm,
R promień zawoju cięgna w cm,

to **sztywność z powodu tarcia wewnętrznego** w cięgnie powoduje przy jego zejściu (dla P) zmniejszenie ramienia działającego R o ξ_1 (w cm), a przy wejściu (dla Q) zwiększenie ramienia R o ξ_2 (w cm). Dla równocześnie zaś następującego odwijania i nawijania cięgna będzie zatem:

$$P(R - \xi_1) = Q(R + \xi_2).$$

W przybliżeniu $\xi_1 = \xi_2 = \xi$, a zatem $\xi_1 + \xi_2 = 2\xi$, tak, że z wystarczającą dokładnością będzie:

$$P = \left(1 + \frac{2\xi}{R}\right) Q.$$

Przy wyłącznem tylko nawijaniu niema ξ_1, a zatem:

$$P = \left(1 + \frac{\xi}{R}\right) Q.$$

Dla lin konopnych bywa, zależnie od gatunku liny, $\xi = 0{,}03\ d^2$ do $0{,}09\ d^2$.

Dla lin drucianych nie posiadamy dotychczas dostatecznych doświadczeń (porów. Dział szósty: II.).

Dla łańcuchów w przybliżeniu $2\xi = \mu d$, przyczem $\mu = 0{,}2$ do 0,3 jest spółczynnikiem tarcia ogniw łańcuchowych, albo wałków przegubowych.

2. Przy jednoczesnem nawijaniu i odwijaniu nie potrzeba uwzględniać **sztywności sprężystej** materyału, a więc pracy potrzebnej na odkształcenie cięgna, albowiem wskutek tej sztywności przy wejściu i zejściu ramię R zwiększa się o równą wielkość. Praca zatem, zużyta przy wejściu na zgięcie cięgna, odzyskuje się przy zejściu cięgna przez jego wyprostowanie się.

Przy samem tylko nawijaniu należy, szczególnie dla lin drucianych, uwzględnić stratę pracy, spowodowaną zginaniem cięgna.

β. Strata pracy, przez ślizganie się cięgna

po obwodzie wskutek wydłużenia, spowodowanego zmianą siły naprężającej między punktem wejścia i zejścia cięgna.

Jeżeli oznacza:
$P = T - t$ przenoszoną siłę obwodową w kg (por. str. 233),
F przekrój cięgna w cm^2,
$p = P : F$ mającą się przenieść siłę jednostkową w kg/cm^2,
$\alpha = (1 : E)$ spółczynnik wyciągania się cięgna w cm^2/kg i
$E = (1 : \alpha)$ spółczynnik sprężystości materyału cięgna w kg/cm^2,

(por. Dział czwarty: Nauka wytrzymałości I.), to dla pełnego mechanizmu krążkowego, złożonego z krążka pędzącego i pędzonego, stratność pracy lub prędkości wyniesie:

$$\mathfrak{B} = \frac{T - t}{F}\alpha = \frac{P}{F}\alpha = \frac{P}{FE} = \frac{p}{E}.$$

Średnie wartości E w kg/cm^2 *)

Pasy skórzane nowe	1 250
Pasy skórzane używane	2 250
Liny nowe z konopi „Manilla“, miękko skręcane, 50 do 55 mm grubości	8 000
Liny nowe z konopi „Manilla“, twardo skręcane, 50 do 55 mm grubości	9 500
Liny nowe z konopi badeńskich czesanych, miękko skręcane, 50 do 55 mm grubości	10 500
Liny nowe z konopi badeńskich czesanych, twardo skręcane, 50 do 55 mm grubości	12 500

*) Patrz: Versuche von C. v. Bach, Zeitschr. d. V. d. Ing. 1887, str. 221, 241 i 891; nadto C. v. Bach, Die Maschinen-Elemente, 6 wydanie; Stuttgart 1897.

(Dla nowych lin konopnych, grubości 35 do 40 mm, wypada cyfry powyższe zmniejszyć o 20%).

Liny nowe, druciane 700 000

Wartości, podane powyżej, odnoszą się do istotnego przekroju lin (t. zn. dla lin drucianych do sumy przekrojów wszystkich drutów, która wynosi z nadmiarem 40% wielkości $^1/_4 \pi d^2$, dla lin konopnych zaś do sumy przekrojów wszystkich postronków, z których linę skręcono, t. j. około 60% od $^1/_4 \pi d^2$). Wypada zaznaczyć, że (według C. v. Bach'a) dla lin konopnych i drucianych, jak również dla pasów skórzanych i plecionych, służących do przenoszenia pracy, spółczynnik E nie jest stały, lecz, że rośnie on w miarę zwiększającego się naprężenia.

Z wzoru: $\mathfrak{B} = \frac{p}{E}$ obliczamy stratność:

1. Dla pasów skórzanych, nowych z p=12,5 kg/cm² i E=1250 kg/cm²:
$$\mathfrak{B} = \frac{12{,}5}{1250} = 0{,}01, \text{ t. j. } 1\%.$$
2. Dla pasów skórzanych, używanych z p=10 kg/cm² i E=2250 kg/cm²:
$$\mathfrak{B} = \frac{10}{2250} = 0{,}0044, \text{ t. j. } 0{,}44\%.$$
3. Dla lin konopnych, nowych z $p = 10$ kg/cm² i $E = 8000$ kg/cm²:
$$\mathfrak{B} = \frac{10}{8000} = 0{,}00125, \text{ t. j. } 0{,}125\%.$$
4. Dla lin drucianych, nowych z p=350 kg/cm² i E=700 000 kg/cm²:
$$\mathfrak{B} = \frac{350}{700000} = 0{,}0005, \text{ t. j. } 0{,}05\%.$$

Wzajemny stosunek czterech tych wartości $\mathfrak{B}$ jest 20 : 8,8 : 2,5 : 1.

V. STATYKA CIECZY.

I. Prawo zasadnicze B. Pascal'a.

Jeżeli się ciecz jakakolwiek znajduje pod ciśnieniem, pozostając w równowadze, to ciśnienie rozprzestrzenia się w niej równomiernie we wszystkich kierunkach w ten sposób, iż każda cząstka cieczy podlega jednakowemu ciśnieniu.

2. Zasadnicze równania L. Euler'a.

Oznaczywszy przez:

x, y, z spółrzędne prostokątne punktu cieczy P,

X, Y, Z składowe w kierunkach trzech osi spółrzędnych siły przyspieszającej, działającej w P,

p ciśnienie na jednostkę powierzchni w P,

g przyspieszenie ciężkości = 9,81 m/sek.²,

γ wagę przestrzennej jednostki cieczy,

otrzymamy dla nieskończenie małego równoległościanu cieczy, o krawędziach dx, dy, dz, leżącego jednym rogiem w P i będącego w równowadze:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\gamma}{g} X; \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\gamma}{g} Y; \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\gamma}{g} Z;$$

$$dp = \frac{\gamma}{g}(X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz).$$

Dla otwartej powierzchni cieczy, jako też dla każdej **równi**, t. j. powierzchni jednakowego ciśnienia, będzie:

$$X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz = 0.$$

Wypadkowa trzech sił X, Y, Z jest w każdym punkcie prostopadłą do równi.

3. Ciśnienie hydrostatyczne.

Przyjmując za oś y prostą, w której się przecina płaski kawałek ścianki naczynia z poziomem cieczy, a za oś x prostopadłą do pierwszej, leżącą w płaszczyźnie ścianki naczynia, i oznaczywszy przez:

F pole dowolnego, płaskiego kawałka ścianki naczynia,
z_0 odległość pionową środka ciężkości pola F od poziomu cieczy,
x_0 odległość tegoż środka ciężkości od osi y,
S moment statyczny
J moment bezwładności } pola F względem osi y,
γ wagę przestrzennej jednostki cieczy,

otrzymamy **ciśnienie normalne** (parcie) na pole F:

$$D = \gamma F z_0,$$

a **współrzędne środka ciśnienia:**

$$\xi = \frac{J}{S} = \frac{J}{F x_0}; \qquad \eta = \frac{\iint xy \cdot dx \cdot dy}{S} = \frac{\iint xy \cdot dx \cdot dy}{F x_0}.$$

Jeżeli którakolwiek z linii największej pochyłości pola F jest jego osią symetryi, to na niej też znajdować się będzie środek ciśnień.

Też same wzory stosują się i do **parcia poziomego** na dowolną powierzchnię płaską lub krzywą, jeżeli F oznacza pole rzutu powierzchni, znajdującej się pod ciśnieniem, na płaszczyznę prostopadłą do kierunku parć.

1. Dla **trapezu**, o poziomych bokach równoległych B i b, przy znakowaniu wskazanem w rys. 162 (z lewej strony) określamy odległość (e) środka ciśnień od górnego boku B wzorem:

$$e = \xi - c = \frac{h}{2} \cdot \frac{2c(B+2b) + h(B+3b)}{3c(B+b) + h(B+2b)}.$$

Jeżeli $c = 0$, t. zn., jeżeli bok B znajduje się w poziomie cieczy, to:

$$\xi = \frac{h}{2} \cdot \frac{B+3b}{B+2b}.$$

2. Dla **trójkąta**, którego podstawa leży w poziomie cieczy:

$$\xi = {}^1/_2 h;$$

gdy wierzchołek trójkąta leży w poziomie cieczy, a przeciwległy bok jest poziomy, otrzymamy:

$$\xi = {}^3/_4 h.$$

3. Dla **prostokąta** (por. 1) o dwóch bokach poziomych:

$$e = \xi - c = \frac{h}{3}\,\frac{3c + 2h}{2c + h},$$

a jeżeli $c = 0$, to: $\xi = {}^2/_3 h$.

4. **Elipsa** (rys. 162) o osi poziomej $2b$ i pionowej $2a$, a której środek leży w oddaleniu d od osi y, ma środek ciśnień w oddaleniu od osi y:

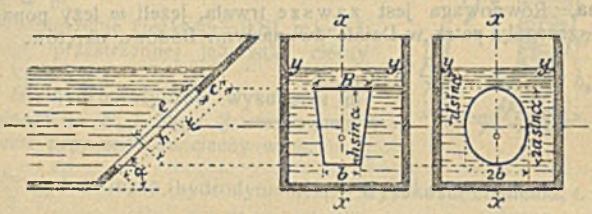
$$\xi = d + {}^1/_4 \frac{a^2}{d}.$$

Jeżeli $d = a$, t. zn., jeżeli elipsa dotyka poziomu cieczy, to:

$$\xi = {}^5/_4 a.$$

Te same wzory stosują się i do **koła** o promieniu a.

Rys. 162.



Parcie pionowe na dowolną powierzchnię płaską lub krzywą równa się wadze słupa cieczy, wznoszącego się pionowo nad powierzchnią, pozostającą pod ciśnieniem.

4. Wypór i metacentrum.

Ciało wagi K, zanurzone bądź to całkowicie, bądź też częściowo w cieczy, podlega parciu A, skierowanemu prostopadle ku górze, a działającemu w środku ciężkości cieczy, wypartej przez ciało. Ciśnienie to zwie się wyporem, a **wypór równa się wadze cieczy wypartej przez ciało.** (Prawo to stosuje się do wszelkich płynów, a więc zatrzymuje swą ważność, gdy ciecz zastąpimy gazem).

Jeżeli $A < K$, to ciało **tonie**, ponieważ wypadkowa $K - A$ jest skierowana w dół.

Jeżeli $A = K$, to ciało **zawisa** w cieczy (w dowolnem miejscu), ponieważ wypadkowa $K - A = 0$.

Jeżeli $A > K$, to ciało zanurzone **wznosi** się w cieczy, ponieważ wypadkowa $A - K$ jest skierowana w górę. Ciało, wznosząc się, przebija wreszcie powierzchnię cieczy; wypadkowa $A - K$ zmniejsza się aż do wartości zera, gdy ciało dojdzie do stanu równowagi ($A = K$). Wówczas ciało **pływa** po cieczy i zanurza się tylko tyle, aby waga cieczy przez nie wypartej równała się

wadze ciała pływającego. Objętość wody, wypartej przez ciało pływające (statek) lub wagę tej wody, nazywamy **wypornością** (déplacement) statku lub ciała pływającego. Głębokość zanurzenia obliczyć łatwo z danej wagi i kształtu ciała pływającego.

Ciało pływające znajduje się w stanie równowagi, gdy jego środek ciężkości s i środek ciężkości w cieczy wypartej leżą w jednym pionie. Pion ten sw nazywa się **osią pływania**. Jeżeli jakikolwiek obrót około punktu s wyprowadzi ciało pływające ze stanu równowagi, to, oznaczając przez a (poziomą) odległość kierunków sił (równych) K i A, otrzymamy parę sił (str. 164) o momencie Aa, która dąży albo do powrócenia pierwotnego stanu równowagi trwałej, albo też do dalszej zmiany pierwotnego stanu równowagi (nietrwałej).

Kierunek wyporu A przecina wówczas pochyloną oś pływania sw w punkcie m, t. zw. **metacentrum**. Jeżeli m leży powyżej s, to równowaga jest **trwała**, jeżeli poniżej s, to jest ona **nietrwała**, jeżeli wreszcie m i s wpadają na siebie (więc $Aa = 0$), to równowaga jest **obojętna**. Równowaga jest zawsze trwała, jeżeli w leży ponad s. Dalsze szczegóły patrz w Dziale dwunastym: Budowa okrętów.

VI. DYNAMIKA CIECZY.

A. Zasady ogólne.

a. Równania zasadnicze L. Euler'a.

Do znakowania na str. 235 dochodzą jeszcze u, v, w, oznaczające składowe prędkości cząstki cieczy w punkcie P, w chwili t, a mianowicie w kierunkach osi x, y i z; wówczas:

1. $$\frac{\varrho}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial x} = X - \frac{\partial u}{\partial t} - u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial y} - w\frac{\partial u}{\partial z},$$

2. $$\frac{\varrho}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial y} = Y - \frac{\partial v}{\partial t} - u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial v}{\partial y} - w\frac{\partial v}{\partial z},$$

3. $$\frac{\varrho}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial z} = Z - \frac{\partial w}{\partial t} - u\frac{\partial w}{\partial x} - v\frac{\partial w}{\partial y} - w\frac{\partial w}{\partial z}.$$

4. Z fizycznych właściwości cieczy wynika związek między p i γ. Dla cieczy nieściśliwych $\gamma =$ stała. Nadto mamy:

5. $$\frac{d\gamma}{dt} + \gamma\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0.$$ (Równanie nieprzerywalności).

Dla cieczy nieściśliwych przechodzi równanie nieprzerywalności w:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

b. Zasady ogólne przepływu, wypływu i oporów; spółczynniki hydrauliczne.

1. Przepływ przez przewód. Jeżeli oznaczymy (rys. 163) przez:

F_1 i F_2 dwa przekroje przewodu w m^2,

h_2 odległość pionową F_1 od F_2 w m,

v_1 i v_2 średnią prędkość cieczy w przekrojach F_1 i F_2 w m/sek.,

p_1 i p_2 nadciśnienia w F_1 i F_2 podczas ruchu cieczy w kg/m^2,

Rys. 163.

w_1 i w_2 wysokość oporu ruchu cieczy od początku przewodu aż do F_1, wzgl. F_2 w m,

g przyspieszenie ciężkości=9,81 m/sek.^{2},

γ wagę przestrzennej jednostki cieczy w kg/m^3,

H_1 i H_2 **hydrostatyczne wysokości ciśnienia** na F_1 i F_2, t. j. stany piezometru przy spokoju cieczy w m;

$\frac{p_1}{\gamma}$ i $\frac{p_2}{\gamma}$ **hydrauliczne** (hydrodynamiczne) **wysokości ciśnienia**, t. j. stany piezometru przy ruchu cieczy w m,

$\frac{v_1^2}{2g}$ i $\frac{v_2^2}{2g}$ **wysokości prędkości** (patrz str. 146) w m, to otrzymamy:

$$F_1 v_1 = F_2 v_2;$$

$$H_1 = \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + w_1 \quad \text{i} \quad H_2 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p^2}{\gamma} + w_2 = H_1 + h_2,$$

a zatem:

$$\frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + w_2 = \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + w_1 + h_2.$$

W stanie spokoju dotychczasowa wysokość prędkości przeradza się na wysokość ciśnienia.

W razie równości przekrojów będzie $v_1 = v_2$, a różnica stanów piezometru przy F_1 i F_2 staje się równą wysokości oporu $w_2 - w_1$ w części przewodu h_2. Jeżeli F_1 jest bardzo wielkie w porównaniu z F_2, to można zaniedbać v_1^2 w stosunku do v_2^2.

Nadciśnienia p_1 lub p_2 mogą się zmniejszać aż do bezwzględnej wartości ciśnienia na powierzchnię cieczy; jeżeli ich wartość zmniejszy się dalej, to słup wody w przewodzie przerywa się.

2. Wypływ z przewodu (rys. 164, str. 240). Jeżeli oznacza:

H_a wysokość ciśnienia zużytego na przepływ i wypływ cieczy w m,

h_a odległość pionową powierzchni od wylotu w m,

q_e ciśnienie na powierzchnię cieczy w kg/m^2,

q_a przeciwciśnienie na wylot w kg/m^2,

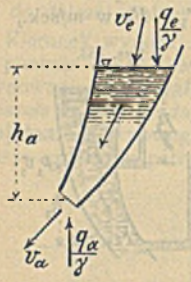
v_e składową prędkości przypływu na powierzchnię w kierunku prędkości przepływu tuż pod powierzchnią w m/sek.,

v_a prędkość wypływu w m/sek.,

Σw sumę wysokości oddzielnych oporów przewodu w m,

g i γ to samo, co powyżej pod **1.**, to będzie:

Rys. 164



$$H_a = h_a + \frac{v_e^2}{2g} + \frac{q_e}{\gamma} - \frac{q_a}{\gamma} = \frac{v_a^2}{2g} + \Sigma w.$$

Jeżeli wylot jest zanurzony, to:

$$h_a = \frac{q_a}{\gamma}$$

równa się odległości pionowej górnego poziomu cieczy od dolnego. Jeżeli pole poziomu górnego jest znacznie większe od przekroju wylotu, to można zaniedbać v_e^2 w stosunku do v_a^2.

3. Przepływ lub wypływ dławiony. Dławienie strumienia wypływającego pojawia się bezpośrednio za tem miejscem, w którem strumień napotyka na przekrój nagle zwężony, o krawędziach niedostatecznie zaokrąglonych. **Dławienie zupełne** zachodzi wtenczas, gdy krawędzie otworu, skierowane przeciw prądowi, są bardzo ostre, a równocześnie prędkość dopływu do przekroju zwężonego jest w porównaniu z prędkością przepływu (względnie wypływu) tak nieznaczna, że uwzględniać jej nie potrzeba.

Jeżeli oznaczymy przez:

F przekrój zwężony w świetle (czyli przekrój wylotu) w m^2,

v_0 prędkość średnią, jaką strumień mógłby osiągnąć w razie nieistnienia dławienia (prędkość teoretyczną) w przekroju F w m/sek.,

F_α przekrój najmniejszy strumienia dławionego w m^2,

v_α prędkość średnią w F_α, zmniejszoną skutkiem wpływu dławienia w m/sek.,

$Q_0 = Fv_0$ ilość teoretyczną cieczy wypływającej lub przepływającej w m^3/sek.,

$Q_\alpha = F_\alpha v_\alpha$ rzeczywistą ilość cieczy przepływającej lub wypływającej w m^3/sek.,

H wysokość ciśnienia działającego na przekrój F w m,

w opór w przewodzie (aż do F) wyrażony w metrach wysokości ciśnienia, zużywanego na przezwyciężanie oporu, zwany również **wysokością oporu**,

ζ **spółczynnik oporu**, odnoszący się do v_α,

to będzie teoretycznie dla cieczy (porówn. str. 146 i 147):

$$H = \frac{v_0^2}{2g}, \text{ czyli } v_0 = \sqrt{2gH} = 4{,}429\sqrt{H};$$

$\alpha = \frac{F_\alpha}{F}$ nazywa się **spółczynnikiem dławienia,**

$\varphi = \frac{v_\alpha}{v_0}$ nazywa się **spółczynnikiem prędkości,** a

$\mu = \frac{Q_\alpha}{Q_0} = \frac{F_\alpha v_\alpha}{F v_0} = \alpha\varphi$ } **spółczynnikiem przepływu** lub **wypływu** (sprawnością).

Nadto: $w = \zeta \frac{v_\alpha^2}{2g}$ i $H - w = \frac{v_\alpha^2}{2g}$,

a zatem: $H = (1 + \zeta)\frac{v_\alpha^2}{2g}$, a ponieważ $H = \frac{v_0^2}{2g}$,

więc stosunek wysokości ciśnienia traconego przy wypływie do wysokości prędkości rzeczywistej w przekroju dławionym F_α będzie:

$$\zeta = \left(\frac{v_0}{v_\alpha}\right)^2 - 1 = \frac{1}{\varphi^2} - 1.$$

W przypadku szczególnym, gdy $\alpha = 1$, będzie:

$$\zeta = \frac{1}{\mu^2} - 1, \quad \text{a} \quad \mu = \sqrt{\frac{1}{1+\zeta}},$$

wówczas dla μ i dla ζ otrzymamy poniższe wartości:

$\mu =$	1,00	0,95	0,90	0,85	0,80	0,75	0,70	0,65	0,60	0,55	0,50
$\zeta =$	0,00	0,10	0,23	0,38	0,56	0,78	1,04	1,37	1,78	2,31	3,00
$\mu =$	0,45	0,40	0,35	0,30	0,25	0,20	0,15	0,10	0,05	0,025	0,00
$\zeta =$	3,94	5,25	7,16	10,1	15,0	24,0	43,4	99,0	399	1599	∞

Dławienie niezupełne następuje, gdy się strumień zdławia nie ze wszystkich stron otworu (dławienie niewszechstronne).

Dławienie niedoskonałe ma miejsce przy niezupełnie ostrych krawędziach otworu wypływowego lub też gdy przekrój wylotu, względnie do przekroju ściany, w której się mieści, nie jest dostatecznie mały, aby było można uważać ciecz przed wylotem za nieruchomą.

Dla obydwóch powyższych rodzajów dławienia spółczynniki α i μ są wogóle większe, aniżeli dla dławienia wszechstronnego i zupełnego (patrz str. 240). Zwiększenie to pozostaje w zależności od przeróżnych czynników, jako to: od ukształtowania krawędzi wylotu, od formy jego przekroju, od wysokości poziomu cieczy nad wylotem, od prędkości dopływu do wylotu, od domieszki powietrza do strumienia wypływającego i t. p. Pewnych danych dla rozmaitych przypadków dotychczas nie posiadamy. *)

c. Wypływ teoretyczny przy stałej wysokości ciśnienia.

Jeżeli do znaków F, v_0, Q_0 i g ze str. 240 dodamy jeszcze: dx wysokość poziomego paska przekroju otworu pionowego, wypływowego,

*) S. J. Weisbach, Experimental-Hydraulik.

y szerokość tegoż paska,
x odległość tegoż paska od poziomu cieczy, to:

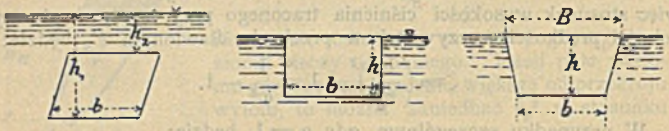
$$v_0 = \frac{Q_0}{F}, \quad \text{a} \quad Q_0 = \sqrt{2g} \int y x^{1/2} \cdot dx.$$

Poniżej wymiary rozmaitych wylotów podajemy w metrach.

Jeżeli wylot ma kształt **równoległoboku** (rys. 165), którego dwa boki przeciwległe leżą równolegle do poziomu cieczy i obydwa pod nim, to będzie:

$$v_0 = {}^2/_3 \sqrt{2g} \frac{h_1^{3/2} - h_2^{3/2}}{h_1 - h_2}; \quad Q_0 = {}^2/_3 \sqrt{2g} \left(h_1^{3/2} - h_2^{3/2}\right) b.$$

Rys. 165. Rys. 166. Rys. 167.



Przy **przelewie prostokątnym** (rys. 166):

$$v_0 = {}^2/_3 \sqrt{2gh}; \qquad Q_0 = {}^2/_3 \sqrt{2gh} \cdot bh.$$

Przy przelewie kształtu **trapezu** (rys. 167):

$$v_0 = {}^4/_{15} \frac{2B + 3b}{B + b} \sqrt{2gh}; \qquad Q_0 = {}^2/_{15} (2B + 3b) h \sqrt{2gh}.$$

Jeżeli wylot jest **okrągły** o promieniu r, a środek jego leży w odległości h od poziomu cieczy, to:

$$v_0 = \sqrt{2gh} \left[1 - \frac{1}{32}\left(\frac{r}{h}\right)^2 - \frac{5}{1024}\left(\frac{r}{h}\right)^4\right];$$

$$Q_0 = \pi r^2 \sqrt{2gh} \left[1 - \frac{1}{32}\left(\frac{r}{h}\right)^2 - \frac{5}{1024}\left(\frac{r}{h}\right)^4\right].$$

Gdy środek ciężkości otworu wylotowego leży o h' pod poziomem cieczy, to będzie w przybliżeniu:

dla równoległoboku: $Q_0 = b(h_1 - h_2)\sqrt{2gh'}$
dla koła: $Q_0 = \pi r^2 \sqrt{2gh'}$ $\Big\}$; $v_0 = \sqrt{2gh'}$.

Dla zastosowań praktycznych wzory te są dostatecznie dokładne, dopóki:

$$h' \geq 2(h_1 - h_2), \quad \text{względnie} \quad h' \geq 4r.$$

d. Wypływ teoretyczny przy zmiennej wysokości ciśnienia.

Oprócz znaków F, Q_0 i g ze str. 240 oznaczamy przez:

h początkową wysokość ciśnienia w m,
G stały przekrój poziomy naczynia, z którego ciecz wypływa, w m².

Jeżeli ilość cieczy dopływającej jest większa lub mniejsza od wypływającej: $Q_0 = F v_0 = F\sqrt{2gh}$, to poziom cieczy wznosi się lub

opada, dopóki wysokość ciśnienia na wylot nie stanie się równą: $\frac{1}{2g}\left(\frac{Q_0}{F}\right)^2$, a gdy to nastąpi, wysokość ciśnienia i prędkość wypływu stają się ustalonemi.

W braku dopływu do naczynia, poziom cieczy opada z równomiernem zwalnianiem, a **czas potrzebny do opróżnienia** naczynia, wyrażony w sekundach, będzie:

$$t = \frac{2Gh}{Q_0} = \frac{2Gh}{F\sqrt{2gh}} = 0{,}452\,\frac{G}{F}\sqrt{h}.$$

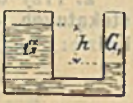
Czas, w którym wysokość ciśnienia na wylot z wartości h zmniejszy się do h' (w m), jest przy swobodnym wypływie:

$$t = \frac{2G}{F\sqrt{2g}}(\sqrt{h} - \sqrt{h'}) = 0{,}452\,\frac{G}{F}(\sqrt{h} - \sqrt{h'}),$$

a przy wypływie w naczynie złączone, o przekroju stałym G_1 (rys. 168):

Rys. 168.

$$t = \frac{2GG_1(\sqrt{h} - \sqrt{h'})}{F(G + G_1)\sqrt{2g}}.$$



B. Wypływ wody z otworów.

Poniżej oznacza Q (zamiast Q_α str. 240) ilość rzeczywistą wody wypływającej w m^3/sek.

a. Otwory wylotowe, o krawędziach zaostrzonych.

1. Do dławienia wszechstronnego i zupełnego, przy pełnem zaostrzeniu krawędzi wylotu, stosują się wartości średnie spółczynników (porówn. str. 241):

$$\alpha = 0{,}64, \qquad \varphi = 0{,}96, \qquad \mu = \alpha\varphi = 0{,}615, \qquad \zeta = 0{,}085.$$

Im krawędzie będą mniej dokładnie zaostrzone, tem większe będą wartości dla α i μ; natomiast ζ zmniejszy się podług wzoru:

$$\zeta = \left[1 : \left(\frac{\mu}{\alpha}\right)^2\right] - 1.$$

Rys. 169.

Według Poncelet'a i Lesbros'a do wypływu z otworów prostokątnych w ścianie pionowej, przy zaostrzeniu krawędzi wylotu i pod warunkiem, aby wysokość ciśnienia h_2 na górną krawędź otworu mierzono w dostatecznej odległości od otworu *) (rys. 169), stosują się następujące

*) Tuż ponad otworem, przy silnym zwłaszcza wypływie, poziom wody się obniża.

Wartości spółczynnika μ.

h_2	Wysokość otworu w m:						h_2	Wysokość otworu w m:					
m	0,20	0,10	0,05	0,03	0,02	0,01	m	0,20	0,10	0,05	0,03	0,02	0,01
0,05	0,58	0,60	0,62	0,64	0,66	0,68	1,0	0,61	0,62	0,63	0,63	0,63	0,63
0,1	0,59	0,61	0,63	0,64	0,65	0,67	1,3	0,60	0,61	0,62	0,62	0,63	0,62
0,3	0,60	0,62	0,63	0,63	0,64	0,65	1,5	0,60	0,61	0,62	0,62	0,62	0,61
0,5	0,60	0,62	0,63	0,63	0,64	0,64	2,0	0,60	0,61	0,61	0,61	0,61	0,61
0,8	0,60	0,62	0,63	0,63	0,64	0,64	3,0	0,60	0,60	0,61	0,61	0,61	0,61

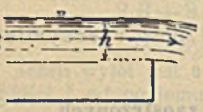
Uwaga: Wartości powyższej tablicy zatrzymują swą ważność bez względu na to, który bok otworu prostokątnego będzie podstawą, a który wysokością, jeżeli tylko długość boku większego nie przeniesie 20 razy długości boku mniejszego (według Lesbros'a).

Podług Weisbach'a wartości powyższe można stosować i do otworów okrągłych, a według Hachette'a nawet do otworów kształtu dowolnego, w których jednakże niema wyskoków wystających w przekrój.

2. Przy dławieniu niewszechstronnem dla **przelewów prostokątnych**, o przekroju $F = bh$ (zgodnie ze stroną 242 i rys. 166) będzie:

$$v_0 = \tfrac{2}{3}\sqrt{2gh}, \quad \text{więc} \quad Q = \tfrac{2}{3}\mu F\sqrt{2gh}.$$

Rys. 170.



1. Przy dławieniu zupełnem: Jeżeli prędkość dopływu bardzo nieznaczna, krawędzie wylotu zaostrzone, a nadto istnieje i dławienie z boków, to przy wysokościach, mierzonych w odległości co najmniej jednego metra od wylotu (rys. 170), spółczynniki μ zmieniają się (według Poncelet'a i Lesbros'a) w miarę zmienności rozmiarów h i b (patrz rys. 166 na str. 242), a mianowicie dla:

$b = 0{,}2$ m i $h =$	0,01	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,15	0,20 m
$\mu =$	0,636	0,626	0,611	0,602	0,596	0,593	0,590	0,585;
$b = 0{,}6$ m i $h =$	0,06	0,10	0,15	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60 m
$\mu =$	0,618	0,609	0,600	0,593	0,588	0,587	0,586	0,585.

2. Przy dławieniu niezupełnem i pionowej ścianie stawidłowej, oznaczając przez n stosunek między przekrojem wody odpływającej (mierzonym ponad progiem) a przekrojem kanału (mierzonym w pewnej odległości od stawidła), podaje Weisbach spółczynnik wypływu:

$\mu_1 = \mu(1 + 1{,}718\,n^4)$, jeżeli przelew jest węższy od kanału (dławienie z boków);

$\mu_2 = \mu(1{,}041 + 0{,}3693\,n^2)$, jeżeli przelew ma tę samą szerokość, co kanał (bez dławienia z boków).

Rys. 171.

przyczem μ oznacza się podług danych powyżej zamieszczonych.

Jeżeli stawidło jest pochyłe (rys. 171), to:

dla $\alpha = 45^0$ . . . . $\mu_3 = 0{,}70$,

„ $\alpha = 63\frac{1}{2}^0$ . . . $\mu_3 = 0{,}67$.

Z powyższych wzorów na μ_1 i μ_2 otrzymujemy wartości dla rozmaitych stosunków przekroju:

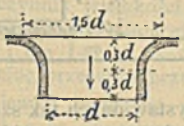
$n =$	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
$\frac{\mu_1}{\mu} =$	1,000	1,001	1,003	1,007	1,014	1,026	1,044	1,070	1,107
$\frac{\mu_2}{\mu} =$	1,045	1,049	1,056	1,064	1,074	1,086	1,100	1,116	1,133

b. Wypływ z wylotów krótkich, rurowych i żłobowych.

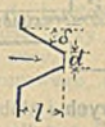
1. Wyloty krótkie.

Końcowa połowa wylotu (rys. 172) na długości $0{,}3\,d$ ma kształt walca; spółczynnik wypływu jest $\mu = 0{,}96$ do $0{,}998$, zależnie od gładkości i średnicy, a więc prawie 1.

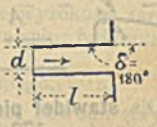
Rys. 172.



Rys. 173.



Rys. 174.



Przy wylotach, przedstawionych w rys. 173 i 174, jeżeli $l \sim 3d$, a krawędzie przepływu zaostrzone, będzie dla:

$\sphericalangle \delta =$	0^0	11^0	22^0	45^0	67^0	90^0	112^0	135^0	157^0	180^0
$\mu =$	0,96	0,92	0,90	0,75	0,68	0,63	0,60	0,58	0,56	0,54.

2. Wyloty rurowe.

1. Przy dławieniu zupełnem (a więc przy krawędziach ostrych i bardzo nieznacznej prędkości dopływowej) spółczynnikami wypływu będą:

dla $\varepsilon =$	1	2 do 3	12	24	36	48	60,
$\mu =$	0,88	0,82	0,77	0,73	0,68	0,63	0,60,

jeżeli ε oznacza stosunek długości do średnicy wylotu walcowato-rurowego.

Wyloty rurowe tego samego przekroju u wylotu, lecz stożkowate, jeżeli wylot się rozszerza, mają większy spółczynnik wypływu, jeżeli zaś wylot się zwęża, mniejszy, niż wyloty walcowate, przyczem wyloty łączą się ze ścianką w krawędziach ostrych. Gdy bok zwężającego się stożka tworzy z osią kąt $\delta = 13^1/_2{}^0$, a krawędzie na złączeniu ze ścianką są zaokrąglone, spółczynnik wypływu staje się największy, a mianowicie $\mu = 0{,}95$ do $0{,}97$.

Jeżeli dławienie jest niezupełne, a woda dopływa do przystawki z prędkością, której nie można zaniedbywać, to:

$$\mu' = \mu\,(1 + 0{,}102\,m + 0{,}067\,m^2 + 0{,}046\,m^3);$$

we wzorze tym m oznacza stosunek przekroju wylotu rurowego do pola ściany, μ zaś wyznacza się z danych wyżej umieszczonych.

Mamy dla:

$m =$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$\frac{\mu'}{\mu} =$	1,013	1,027	1,043	1,060	1,080	1,102	1,127	1,152	1,181

3. Jeżeli niema dławienia i przy zaokrąglonych krawędziach wlotowych, okrągły wylot rurowy, którego długość równa się potrójnej średnicy, ma spółczynnik $\mu \sim 0{,}90$.

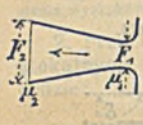
W wylocie, przedstawionym na rys. 175, gdy F_2 równa się mniej więcej $3{,}2\ F_1$, jest:

$\mu_1 \sim 1{,}55$ odnośnie do F_1, a $\mu_2 \sim 0{,}48$ odnośnie do F_2.

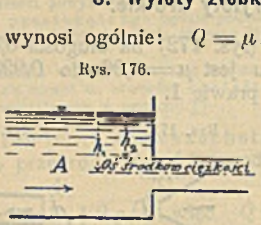
3. Wyloty żłobkowe.

Ilość wody wynosi ogólnie: $Q = \mu F \sqrt{2gh_1}$.

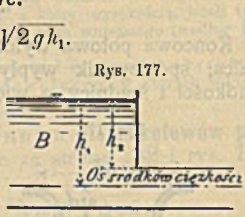
Rys. 175.



Rys. 176.



Rys. 177.



1. Dla **stawideł pionowych** i żłobów przystawionych tak szczelnie do otworów (rys. 176 i 177), że tylko z wierzchu otworu znajduje się ściana zaostrzona, z doświadczeń Lesbros'a wynikają poniższe spółczynniki wypływu μ:

Wysokość wylotu	Kształt wylotu	Wysokość ciśnienia h_1 ponad wierzchem otworu, mierzona w pewnem oddaleniu od wylotu w m: 0,02	0,05	0,1	0,2	0,5	1,0	1,5	2,0	3,0
0,20 m	A	0,480	0,511	0,542	0.574	0,599	0,601	0,601	0,601	0,601
	B	0,480	0,510	0,538	0,566	0,592	0,600	0,602	0,602	0,601
	B_1	0,527	0.553	0,574	0,592	0,607	0,610	0,610	0,609	0,608
0,05 m	A	0.488	0.577	0,624	0,631	0,625	0,624	0,619	0,613	0,606
	B	0,487	0,571	0,605	0,617	0,626	0,628	0,627	0.623	0,618
	B_1	0.585	0,614	0,632	0,645	0,652	0,651	0.650	0,650	0,649

Do doświadczeń swoich używał Lesbros wylotów 0,2 m szerokich i małych, względnie do przekroju kanału. Wyloty A i B miały żłoby poziome, 3 m długie, wylot B_1, zaś (kształtem podobny do B) miał żłób 2,5 m długi i pochylony o $^1/_{10}$ długości względem poziomu.

2. Dla **stawideł pochyłych**, niepowodujących dławienia, ani u dna, ani też po bokach otworu, gdy α oznacza w stopniach kąt pochylenia stawidła do poziomu, spółczynnik wypływu:

$$\mu = 0{,}944 - 0{,}0032\,\alpha.$$

Jeżeli np.:	$\alpha =$	40^0	45^0	50^0	55^0	60^0,
to:	$\mu =$	0,816	0,800	0,784	0,768	0,752.

C. Tarcie wody w przewodach rurowych.

a. Proste przewody rurowe.

W jakimkolwiekbądź miejscu prostego, dowolnie pochylonego przewodu rurowego, o stałym przekroju, oznaczamy przez:

F przekrój rury w prześwicie, w m²,
u obwód przekroju rurowego F, w m,
$r = F : u$, t. zw. promień hydrauliczny, w m (por. **D.**, str. 254),
l długość przewodu, który rozpatrujemy, w m,
v prędkość przepływu wody, w m/sek., } (por. str. 148).
g przyspieszenie ciężkości, w m/sek.², }
$Q = F v$ ilość wody przepływającej, w m³/sek.,
w wysokość tarcia (t. j. stratę na wysokości ciśnienia, powstałą wskutek tarcia), w m,
$i = w : l$, t. zw. pochyłość tarcia osi przewodu,
ϱ spółczynnik wysokości tarcia, t. j. stosunek wysokości tarcia do wysokości powodującej prędkość, przy promieniu hydraulicznym 1 m i dla 1-go m. b. długości rury,
d średnicę prześwitu przewodu rurowego, okrągłego, w m.

Ponieważ tarcie jest w stosunku prostym do obwodu rury i jej długości, a w odwrotnym do przekroju rury, więc ogólnie będzie:

$$w = \left(\varrho \frac{v^2}{2g}\right) \frac{u}{F} l,$$

a zatem $w = \varrho \frac{l}{r} \frac{v^2}{2g}$; $\quad i = \frac{w}{l} = \frac{\varrho}{r} \frac{v^2}{2g}$;

$$v = \sqrt{\frac{2g}{\varrho} ri} = \sqrt{\frac{2g}{\varrho}} \sqrt{ri} = c\sqrt{ri}.$$

W szczególe dla prostej **rury okrągłej**:

$$r = \frac{F}{u} = \frac{{}^1/_4 \pi d^2}{\pi d} = \frac{d}{4}; \qquad Q = \frac{\pi d^2}{4} v;$$

$$\frac{v^2}{2g} = \left(\frac{4Q}{\pi d^2}\right)^2 : 2g = 0{,}083 \frac{Q^2}{d^4}; \qquad w = 4\varrho \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}.$$

Zwykle zastępuje się 4ϱ przez λ, nazywając λ **spółczynnikiem tarcia** podczas ruchu wody w rurach; λ jest zależnem od v (według innych od d, porówn. str. 250). Będzie zatem:

$$w = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} = 0{,}083 \lambda l \frac{Q^2}{d^5};$$

$$i = \frac{w}{l} = \frac{\lambda}{d} \frac{v^2}{2g} = 0{,}083 \lambda \frac{Q^2}{d^5};$$

$v = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}} \cdot \sqrt{\frac{id}{4}}$, przyczem podstawiamy: $\sqrt{\frac{8g}{\lambda}} = \frac{8{,}859}{\sqrt{\lambda}} = c.$

(Ciąg dalszy na str. 250.)

Ilości wody

Średnice rury d w mm	Prędkość							
	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50
100	0,393	0,785	1,178	1,571	1,963	2,356	3,142	3,927
125	0,614	1,227	1,841	2,454	3,068	3,682	4,909	6,136
150	0,884	1,767	2,651	3,534	4,418	5,301	7,069	8,836
200	1,571	3,142	4,712	6,283	7,854	9,425	12,566	15,708
250	2,454	4,909	7,363	9,818	12,272	14,726	19,635	24,544
300	3,534	7,069	10,603	14,137	17,671	21,206	28,274	35,343
350	4,811	9,621	14,432	19,242	24,053	28,863	38,485	48,106
400	6,283	12,566	18,850	25,133	31,416	37,699	50,266	62,832
450	7,952	15,904	23,856	31,809	39,761	47,713	63,617	79,522
500	9,818	19,635	29,453	39,270	49,088	58,905	78,540	98,175
550	11,879	23,758	35,637	47,517	59,396	71,275	95,033	118,79
600	14,137	28,274	42,411	56,549	70,686	84,823	113,10	141,37
650	16,592	33,183	49,775	66,366	82,958	99,549	132,73	165,92
700	19,242	38,485	57,727	76,969	96,211	115,45	153,94	192,42
750	22,089	44,179	66,268	88,357	110,45	132,54	176,72	220,89
800	25,133	50,266	75,398	100,53	125,66	150,80	201,06	251,33
850	28,373	56,745	85,118	113,49	141,86	170,24	226,98	283,73
900	31,809	63,617	95,426	127,23	159,04	190,85	254,47	318,09
950	35,441	70,882	106,32	141,76	177,21	212,65	283,53	354,41
1000	39,270	78,540	117,81	157,08	196,35	235,62	314,16	392,70

Wysokości tarcia $w = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}$ w m, dla gładkich rur kielichowych,

100	0,0048	0,0166	0,0348	0,0590	0,0892	0,1252	0,2147	0,3269
125	0,0039	0,0133	0,0278	0,0472	0,0714	0,1019	0,1717	0,2615
150	0,0032	0,0111	0,0232	0,0393	0,0595	0,0835	0,1431	0,2179
200	0,0024	0,0083	0,0174	0,0295	0,0446	0,0626	0,1073	0,1635
250	0,0019	0,0067	0,0139	0,0236	0,0357	0,0509	0,0859	0,1308
300	0,0016	0,0055	0,0116	0,0197	0,0297	0,0417	0,0716	0,1090
350	0,0014	0,0048	0,0099	0,0169	0,0255	0,0358	0,0613	0,0934
400	0,0012	0,0042	0,0087	0,0148	0,0223	0,0313	0,0537	0,0817
450	0,0011	0,0037	0,0077	0,0131	0,0198	0,0278	0,0477	0,0726
500	0,0010	0,0033	0,0070	0,0118	0,0178	0,0250	0,0429	0,0654
550	0,0009	0,0030	0,0063	0,0107	0,0162	0,0228	0,0390	0,0594
600	0,0008	0,0028	0,0058	0,0098	0,0149	0,0209	0,0358	0,0545
650	0,0007	0,0026	0,0054	0,0091	0,0137	0,0193	0,0330	0,0503
700	0,0007	0,0024	0,0050	0,0084	0,0127	0,0179	0,0309	0,0467
750	0,0006	0,0022	0,0046	0,0079	0,0119	0,0167	0,0286	0,0436
800	0,0006	0,0021	0,0043	0,0074	0,0111	0,0157	0,0268	0,0409
850	0,0006	0,0020	0,0041	0,0069	0,0105	0,0147	0,0253	0,0385
900	0,0005	0,0018	0,0039	0,0066	0,0099	0,0139	0,0239	0,0363
950	0,0005	0,0018	0,0037	0,0062	0,0094	0,0132	0,0226	0,0344
1000	0,0005	0,0017	0,0035	0,0059	0,0089	0,0125	0,0215	0,0327

$Q = 1000 \frac{\pi d^2}{4} v$, w l/sek.

Średn. rury d w mm	prądu v, w m/sek.								
	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00
100	4,712	5,498	6,283	7,069	7,854	9,817	11,781	13,744	15,708
125	7,363	8,590	9,817	11,045	12,272	15,340	18,408	21,476	24,544
150	10,603	12,370	14,137	15,904	17,672	22,089	26,507	30,925	35,343
200	18,850	21,991	25,133	28,274	31,416	39,270	47,124	54,978	62,832
250	29,452	34,361	39,270	44,179	49,087	61,359	73,631	85,903	98,175
300	42,411	49,480	56,549	63,617	70,686	88,357	106,03	123,70	141,37
350	57,727	67,348	76,969	86,590	96,211	120,26	144,32	168,37	192,42
400	75,398	87,965	100,53	113,10	125,66	157,08	188,50	219,91	251,33
450	95,426	111,33	127,23	143,14	159,04	198,80	238,57	278,33	318,09
500	117,81	137,45	157,08	176,72	196,35	245,44	294,53	343,61	392,70
550	142,55	166,31	190,07	213,82	237,58	296,98	356,37	415,77	475,17
600	169,65	197,92	226,19	254,47	282,74	353,43	424,11	494,80	565,49
650	199,10	232,28	265,46	298,65	331,83	414,79	497,75	580,70	663,66
700	230,91	269,39	307,88	346,36	384,85	481,06	577,27	673,48	769,69
750	265,07	309,25	353,43	397,61	441,79	552,23	662,68	773,13	883,58
800	301,59	351,86	402,12	452,39	502,66	628,32	753,98	879,65	1005,3
850	340,47	397,22	453,96	510,71	567,45	709,31	851,18	993,04	1134,9
900	381,70	445,32	508,94	572,56	636,17	795,22	954,26	1113,3	1272,3
950	425,29	496,18	567,06	637,94	708,82	886,03	1063,2	1240,4	1417,6
1000	471,24	549,78	628,32	706,86	785,40	981,75	1178,1	1374,4	1570,8

żeliwnych przy $l = 100$ m $\left(\lambda = 0{,}02 + \frac{0{,}004}{\sqrt{v}}\right.$ podług H. Lang'a.$\left.\right)$

100	0.4617	0,6189	0,7983	0,9998	1,2232	1,8777	2,6681	3,5938	4,6541
125	0.3694	0,4951	0,6386	0,7998	0,9786	1,5021	2,1345	2,8750	3,7233
150	0.3078	0,4126	0,5322	0,6665	0,8155	1,2518	1,7787	2,3959	3,1027
200	0.2309	0,3094	0,3991	0,4999	0,6116	0,9388	1,3341	1,7969	2,3271
250	0,1847	0,2476	0,3193	0,3999	0,4893	0,7511	1,0672	1,4375	1,8616
300	0,1539	0,2063	0,2661	0,3333	0,4077	0,6259	0,8894	1,1979	1,5514
350	0.1319	0,1768	0,2281	0,2856	0,3495	0,5365	0,7623	1,0268	1,3297
400	0,1154	0,1547	0,1996	0,2499	0,3058	0,4694	0,6670	0,8985	1,1635
450	0,1026	0,1375	0,1774	0,2222	0,2718	0,4173	0,5929	0,7986	1,0342
500	0,0923	0,1238	0,1597	0,2000	0,2446	0,3755	0,5336	0,7188	0,9308
550	0,0839	0,1125	0,1451	0,1818	0,2224	0,3414	0,4851	0,6534	0,8462
600	0,0770	0,1031	0,1330	0,1666	0,2039	0,3129	0,4447	0,5990	0,7757
650	0,0700	0,0952	0,1228	0,1538	0,1882	0,2889	0,4105	0,5529	0,7160
700	0,0659	0,0884	0,1140	0,1428	0,1747	0,2682	0,3812	0,5134	0,6649
750	0,0616	0,0825	0,1064	0,1333	0,1631	0,2504	0,3557	0,4792	0,6205
800	0,0577	0,0774	0,0998	0,1250	0,1529	0,2347	0,3335	0,4492	0,5818
850	0,0543	0,0728	0,0939	0,1176	0,1439	0,2209	0,3139	0,4228	0,5475
900	0,0513	0,0688	0,0887	0,1111	0,1359	0,2086	0,2965	0,3993	0,5171
950	0,0486	0,0651	0,0840	0,1052	0,1288	0,1977	0,2809	0,3783	0,4899
1000	0,0462	0,0619	0,0798	0,1000	0,1223	0,1878	0,2668	0,3594	0,4654

W przewodach poziomych pochyłość tarcia i równa się pochyłość linii, łączącej stany piezometru.

Wartości Q (w l/sek.) i w (w m) zestawiono w tablicach na str. 248 i 249.

Dla **prostokątnego przekroju rury** o bokach a i b:

$$r = \frac{F}{u} = \frac{ab}{2(a+b)}, \text{ a więc } w = \lambda \frac{a+b}{2ab} l \frac{v^2}{2g}.$$

Spółczynnik tarcia λ dla wody.

1. Według doświadczeń **Weisbach'a** dla przewodów rurowych o przekroju kołowym:

$$\lambda = 0{,}01439 + \frac{0{,}0094711}{\sqrt{v}}.$$

Tablica Weisbach'owskich wartości λ dla $v = 0{,}02$ do 20 m/sek. znajduje się w dziale czternastym: Przewietrzanie i ogrzewanie.

2. Według doświadczeń **Darcy'ego**:

$$\lambda = \left(0{,}01989 + \frac{0{,}0005078}{d}\right)\sigma;$$

w powyższym wzorze spółczynnik $\sigma = 1$ odnosi się do rur o ściankach gładkich: dla rur, w których woda napotyka ściany chropowate wskutek rdzy i osadów, będzie w miarę mniejszej lub większej chropowatości $\sigma = 1$ do 2.

3. Według **Dupuit'a** dla wodociągów miejskich będzie:

$$\lambda = 0{,}03025.$$

Spółczynnik powyższy uwzględnia już wszystkie opory powodowane zagięciami, rozgałęzieniami, zmianami przekrojów i t. p. Wartość λ podług Dupuit'a równa się wartości λ wzoru Darcy'ego, zastosowanego do rur średnich przekrojów bez uwzględnienia powyższych oporów, przy podstawieniu $\sigma = 1{,}5$. Dla $\lambda = 0{,}03025$ będzie:

$$i = \left(\frac{Q}{20}\right)^2 \frac{1}{d^5}, \text{ albo: } d = 0{,}3017 \sqrt[5]{\frac{Q^2}{i}}.$$

4. **Weston** otrzymał (1889), porównywując dawne doświadczenia:

1. Dla rur zupełnie gładkich i czystych:

$$\lambda = 0{,}0126 + \frac{0{,}0173 - 0{,}1085\,d}{\sqrt{v}}.$$

2. Dla nowych rur żeliwnych lub rur podobnie się zachowujących: λ Darcy'ego.

3. Dla rur pokrytych wewnętrznie silnymi osadami:

gdy $d \gtrless 0{,}50$ m: $\lambda = 0{,}0156 + \frac{0{,}035}{v}$;

gdy $d = 0{,}50$ do $0{,}92$ m: $\lambda = \frac{0{,}048}{v} - 0{,}0143$ do $\lambda = \frac{0{,}055}{v} - 0{,}0225$.

4. Dla rur wewnątrz nie nadmiernie zanieczyszczonych osadami:

$$\lambda = 0{,}03978 + \frac{0{,}01}{d}.$$

5. Doświadczenia **H. Lang'a** i innych potwierdziły prawidłowość kształtu wzorów Weisbach'a na λ i pierwszego wzoru Weston'a aż do pewnej, najniższej, granicznej prędkości v_k.

Dla rur okrągłych, prostych stawia H. Lang ogólnie, jeżeli $v > v_k$:

$$\lambda = \alpha + \frac{\beta}{\sqrt{v}}.$$

Granica prędkości v_k (w m/sek.) zależy od średnicy rury d (w m), a mianowicie;

dla $d =$	0,006	0,010	0,040	ponad 0,040 m,
$v_k =$	0,3 do 1,0	0,2 do 0,7	0,08 do 0,1	0 do 0,07 m/sek.

Spółczynniki zaś α i β mają następujące wartości średnie:

a) Dla rur gładkich, ołowianych, miedzianych, żelaznych ciągnionych, cynowych i szklanych, gładko przylegających do siebie na złączeniach (bez muf i bez chropowatego wnętrza, jakie się znachodzi u lanożelaznych):

$\alpha = 0{,}015$ dla $d \geq 0{,}006$ m, a $\beta = 0{,}009$ dla $d \geq 0{,}10$ m;

nadto zaś:

dla $d =$	0,006	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05 m,
$\beta =$	0.022	0,015	0,012	0,011	0,010	0,0095.

b) dla czystych, gładkich rur lanożelaznych, łączonych na mufy:

$\alpha = 0{,}02$ i $\beta = 0{,}004$ dla $d \geq 0{,}036$ m.

Tablica wartości w, zestawiona na podstawie powyższych wartości α i β, znajduje się na str. 248 i 249.

c) Dla rur lanożelaznych, zanieczyszczonych osadami, Darcy i Iben otrzymali $\beta = 0{,}004$, natomiast α zmiennem w zależności od d, a mianowicie:

dla $d =$	0,036	0,080	0,243	0,297	0,305 m,
$\alpha =$	0,074	0,048	0,026	0,023	0,125.

W czterech przewodach o $d = 0{,}036$ do 0,297 m (Darcy) znaleziono wewnątrz osady od 1 do 2 mm grubości. Natomiast w ostatnim przewodzie o $d = 0{,}305$ m (Iben) grubość osadu dochodziła do 30 mm; służył on już 22 lata. Przy obliczaniu α przyjęto średnicę pierwotną, czystego przewodu, skutkiem czego α wydaje się tak niepomiernie wielkiem.

Grubość osadów w rurach wzrasta w stosunku do długości strumienia, który przepłynął przez przewód. Odgałęzienia bez przepływu pozostają zatem wolne od osadów, a najsilniej oskorupiają się przewody główne.

b. Poszczególne opory w przewodach.

(Znakowanie patrz str. 247).

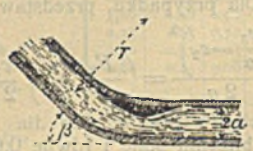
I. Kolana o przekroju kołowym.

1. Dla rys. 178 (dopływ wody z lewej strony):

$$w = \zeta \frac{v^2}{2g}; \text{ przyczem } \zeta = 0{,}9457 \sin^2 {}^1/_2\,\delta + 2{,}047 \sin^4 {}^1/_2\,\delta.$$

Rys. 178.

Rys. 179.



Dla $\delta =$	20°	40°	60°	80°	90°	100°	120°	140°
jest $\zeta =$	0,046	0,139	0,364	0,740	0,984	1,260	1,861	2,431.

2. Dla rysunku 179 (dopływ z lewej strony), jeżeli $r \gtrless 5a$:

$$w = \zeta' \frac{\beta^0}{90} \frac{v^2}{2g} = \zeta \frac{v^2}{2g}; \qquad \zeta' = 0{,}131 + 0{,}163 \left(\frac{2a}{r}\right)^{3{,}5}.$$

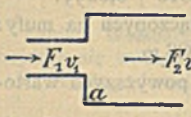
Dla $(2a : r) =$	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
$\zeta' =$	0,138	0,158	0,206	0,294	0,440	0,661	0,977	1,408	1,979.

2. Zmiany w przekrojach rur okrągłych.

1. Rys. 180. Doświadczenia Weisbach'a i Fliegner'a *) dały wynik:

$$w = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g} = \frac{v_1^2}{2g}\left[\frac{F_2}{F_1}\left(\frac{F_2}{F_1} - 1\right)\right]^2 = \frac{v_2^2}{2g}\left[\frac{F_2}{F_1} - 1\right]^2;$$

Rys. 180.

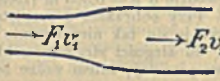


uwzględnione we wzorze powyższym zmniejszenie się wysokości oporu, powstałe skutkiem uderzeń, jest:

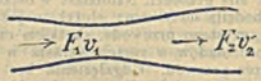
$$w_s = 2\frac{v_1^2}{2g}\frac{F_1}{F_2}\left(1 - \frac{F_1}{F_2}\right) = 2\frac{v_2^2}{2g}\left(\frac{F_2}{F_1} - 1\right).$$

Wzory powyższe stosować można tylko wtedy, gdy woda wypełnia zupełnie przekrój F_2, tak, że strumień wypływa z F_2 żyłami równoległemi (nie miotłowato rozchodzącemi się) i póki wysokość ssania przy a nie przewyższa 10 m. W przeciwnym razie przepływ odbywa się jako swobodny wypływ z F_1 (patrz str. 243).

Rys. 181.



Rys. 182.



2. Dla przypadku, przedstawionego w rys. 181, doświadczenia Fliegner'a wykazały, że stosownie do kształtu, oraz prędkości, wartość w nie jest większa jak 0,5 do 0,12 wartości w z pod 1.

Dla stosunków, przedstawionych na rys. 182, w staje się ~ 0.

3. Dla rys. 183: $w = \frac{v_2^2}{2g}\left(\frac{1}{a} - 1\right)^2 = \zeta_2 \frac{v_2^2}{2g}$,

przyczem dla $F_2 : F_1 =$ | 0,01 | 0,1 | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 1,0 |

jest w przybliżeniu $\begin{cases} a = \\ \zeta_2 = \end{cases}$ | 0,60 | 0,60 | 0.61 | 0,63 | 0,67 | 0,73 | 1,00 | 0,50 | 0,50 | 0,42 | 0,33 | 0,25 | 0,15 | 0,00.

4. Dla przypadku, przedstawionego na rys. 184:

$$w = \frac{\left(\frac{v_3}{a} - v_2\right)^2}{2g} = \left(\frac{F_2}{aF_3} - 1\right)^2 \frac{v_2^2}{2g} = \left(\frac{1}{a} - \frac{F_3}{F_2}\right)^2 \frac{v_3^2}{2g} = \zeta_2 \frac{v_2^2}{2g} = \zeta_3 \frac{v_3^2}{2g}.$$

Jeżeli $F_3 \lessgtr 0{,}1\, F_1$, to dla wszystkich stosunków $F_3 : F_2$ jest a w przybliżeniu stałe i równe 0,62; wówczas dla:

*) A. Fliegner w „Civilingenieur" 1875, str. 98.

$F_3 : F_2 =$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\zeta_3 =$	2,3	2,0	1,7	1,4	1,2	1,0	0,8	0,7	0,6	0,5.

Jeżeli $F_3 \geq 0{,}1\ F_1$, to dla:

$F_3 : F_1 =$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0.6	0,7	0.8	0,9	1,0
$\alpha =$	0,62	0,63	0,64	0,66	0,68	0,71	0,75	0,81	0,90	1,00.

Rys. 183.

Rys. 184.

5. W przypadku, przedstawionym na rysunku 185, w którym $F_1 = F_2$, we wzór poprzedni na w należy wstawić, jeżeli:

Rys. 185.

$F_3 : F_2 =$	0.1	0.2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\alpha =$	0,62	0,63	0,64	0,66	0,68	0,71	0,75	0,81	0,90	1,00
a zatem $\zeta_3 =$	2,3	2.0	1,6	1,2	1,0	0,65	0,4	0,2	0,05	0,00.

3. Zawieradła (szluzy, wentyle i t. p.).

(Według doświadczeń Weisbach'a, C. v. Bach'a i H. Lang'a).

Znaczenie F, F_1 i ζ_1 na stronie następnej.

Rodzaj zawieradła		$F_1 : F =$ 0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
		Średnie wartości ζ_1				
Grzybek zawora (wentyla) płaski, prowadzony górą, o dowolnej powierzchni spodniej.	Strumień skierowany przeciw spodniej powierzchni	1,2	1,6	2,0	2,5	3.0
Grzybek płaski z prowadnikiem żebrowym w gniezdzie		2.3	2,8	3.5	4.3	5.2
Grzybek stożkowaty, prowadzony górą, o płaskiej powierzchni spodniej		0,00	—0,14	0.20	0,65	1,16
Takiż o spodzie kulistym		0,00	—0,04	0,18	0,48	0,82
„ „ stożkowatym		—0,04	0.29	0,52	0,56	0,73
Grzybek kulisty z krawędzią uszczelniającą tylko 1 mm szeroką		1.9	2,2	2,5	3.6	5.0
Takiż, lecz strumień skierow. na wierzchnią powierzchnię.		1,6	1.8	2.2	3,2	4.4
Grzybek stożkowaty, bardzo wysmukły, stożek w kształcie dyszy, strumień na spodnią powierzchnię		0.2	0.4	—	—	—
Cienka zasuwa (szluza) w rurze prostokątnej		0,69	0,45	0,06	—0,10	0,00
„ „ „ „ okrągłej.		1,00	0,60	0,17	—0,05	0,00
Kurek z prostym przelotem prostokątnym		2,35	1,65	0,70	—0,02	0,00
Przepustnica prostokątna, zamknięcie przez obrót o 90°.		0,50	0,32	0,05	—0,04	0,00
„ okrągła, zamknięcie przez obrót o 90°. .		0,88	0,45	0,06	—0,03	0,00
Klapa prostokątna, zamknięcie przez obrót o 90°, w kierunku strumienia.		0,78	0,28	0,06	—0,04	0,00
Takaż, zamykana w kierunku przeciwnym		0.41	0,60	0,23	0,08	0,00
Suwak muszlowy z ostremi krawędziami przepływu i kańciastą muszlą	dopływ.	1.0	1,6	1,8	2,0	2,2
	odpływ.	3,0	2.9	2,8	2,7	2,6
Suwak muszlowy z zaokrąglonemi krawędziami przepływu	dopływ	0,11	0,18	0,21	0,23	0,24
	muszla kańciasta, odpływ	0,04	0,13	0,35	0,64	1,04
	„ zaokrąglona, odpływ	0,04	0,11	0,23	0,35	0,49

Wartości ζ dla zawieradeł zupełnie otwartych.

1)	Kadłub zawora (wentyla) kulistego smukły, średnica 25 mm	strumień z pod spodu:	$\zeta = 5{,}3$
		„ na wierzch:	$\zeta = 4{,}4$
2)	Kadłub zawora kulistego bardzo krótki, grzybek płaski, średnica 34 mm	strumień z pod spodu:	$\zeta = 16{,}6$
		„ na wierzch:	$\zeta = 12{,}5$
3)	Kadłub zawora kątowego, zboczenie strumienia o 90°, średnica 32 lub 22 mm	strumień z pod spodu:	$\zeta = 2{,}1$
		„ na wierzch*):	$\zeta = 2{,}6$
4)	Suwak uszczelniony na wewnętrznej krawędzi, średnica 34 mm		$\zeta = 0{,}3$

W danych powyższych (pod 3.) oznaczają:

F przekrój swobodny gniazda zaworowego lub rury,
F_1 przekrój przepływu w świetle, nastawiony w danej chwili,
ζ średni spółczynnik oporu (przy zawieradle zupełnie otwartem), odnoszący się do przekroju F,
ζ_1 spółczynnik oporu (bez uwzględnienia oporu kadłuba i gniazda), odnoszący się do zmiennego przekroju F_1.

D. Rzeki i kanały, oraz budowle w nich.

a. Ruch wody w rzekach i kanałach.

I. Ruch jednostajny.

Poniżej oznaczać będziemy przez:

Q ilość przepływu, t. j. przepływającą ilość wody w m^3/sek.,
F przekrój przepływu (przekrój poprzeczny) w m^2,
v średnią prędkość w przekroju poprzecznym F w m/sek.,
u obwód podwodny, t. j. tę część obwodu przekroju F, która nie styka się z powietrzem, w m,
b szerokość zwierciadła wody w m,
h (w m) spadek powierzchni wody na długości l (w m),
$i = h : l$ średnią pochyłość zwierciadła wody,
$t = F : b$ średnią głębokość wody w m,
$r = F : u$ średnią głębokość hydrauliczną, czyli średni promień hydrauliczny przekroju (porówn. str. 247) w m.

Jako v uważać trzeba tę średnią prędkość, którąby istnieć musiała we wszystkich punktach (x, y) przekroju F, aby w jednostce czasu przezeń przepłynąć mogła taż sama ilość wody Q; a zatem:

$$Q = Fv = \int\int v \cdot dx \cdot dy.$$ **)

Prędkość v oznacza się: 1) obliczeniem ze wzorów, wywiedzionych z dawnych pomiarów, albo 2) przez pomiary bezpośrednie w danym przekroju przepływowym F.

Średnia pochyłość rzek bywa: $i = 0{,}000005$ do $0{,}0006$; korzystne pochyłości dla kanałów patrz str. 258.

*) Grzybek w tym wypadku podnosił się tylko o 0,25 średnicy gniazda.
**) Porówn. R. Jasmund, „Die mittlere Geschwindigkeit im Stromquerschnitte", Centralbl. d. Bauverw. 1897, str. 101.

1. Obliczanie prędkości v. *) Przyjmując pewien spółczynnik doświadczalny c, możemy wyrazić prędkość v, jak przy przepływie wody przez przewody (patrz str. 247), wzorem ogólnym:

$$v = c\sqrt{ri}.$$

Bazin oznaczył na podstawie pomiarów w małych kanałach doświadczalnych:

$$c = \sqrt{\frac{1}{\alpha + \frac{\beta}{r}}}.$$

Wartości α i β zależą od chropowatości obwodu podwodnego; średnio:

Przypadek I. Dla drzewa heblowanego lub cementu. . $\alpha = 0.00015$, a $\beta = 0{,}0000045$,
„ II. „ ciosów i drzewa nieheblowanego . . $\alpha = 0{,}00019$, a $\beta = 0{,}0000133$,
„ III. „ muru z kamienia łamanego . . . . $\alpha = 0{,}00024$, a $\beta = 0{,}00006$,
„ IV. „ ziemi . . . . . $\alpha = 0{,}00028$, a $\beta = 0{,}00035$,
„ V. „ rumowiska (według Kuttera). . . . $\alpha = 0.00040$, a $\beta = 0{,}00070$.

Wartości c według Bazin'a.

$r =$	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,80	1,00	2,00	3,00	6,00 m
Przypadek I.	71,6	76,1	77,9	78,8	79,3	79,7	80,2	80,4	81,0	81,2	81,4
„ II.	55,6	62,4	65,3	66,9	67,9	68,7	69,6	70,1	71,3	71,7	72,1
„ III.	34,5	43,0	47,7	50,6	52,7	54,2	56,3	57,7	60,9	62,0	63,2
„ IV.	16,3	22,2	26,3	29,4	31,9	34,0	37,3	39,8	46,9	50,2	54,4
„ V.	11,5	16,0	19,1	21,6	23,6	25,3	28,0	30,2	36,5	39,7	44,0

Ganguillet i **Kutter** z pomiarów Bazin'a, jako też z pomiarów Abbot'a i Humphreys'a, dokonanych na Missisipi, oraz z wielu innych pomiarów rzek, wyprowadzili wzór następujący:

$$c = \frac{23 + \frac{1}{n} + \frac{0{,}00155}{i}}{1 + \left(23 + \frac{0{,}00155}{i}\right)\frac{n}{\sqrt{r}}}\ **),$$

w którym to wzorze średni spółczynnik chropowatości będzie:

	n	$1 : n$
dla kanałów z drzewa starannie heblowanego lub gładko cementowanych	0,010	100
dla kanałów z desek	0,012	83
dla kanałów z obrabianych ciosów lub dobrze fugowanej cegły	0,013	77
dla kanałów z kamienia łamanego	0,017	59
dla kanałów z ziemi, oraz dla rzek i strumieni . . .	0,025	40
dla wód płynących po głazach lub tamowanych roślinami wodnemi	0,030	33

*) Rozbiór krytyczny rozmaitych wzorów na v: patrz Moritz Rühlmann, Hydromechanik.

**) Wykreślne oznaczenie c: porówn. Zeitschr. d. österr. Arch.- u. Ing.-Vereines 1869 Bl. 9, rys. XIII, oprócz tego: Centralbl. d. Bauverw. 1889, str. 285.

W rzekach zmniejsza się zazwyczaj spółczynnik chropowatości n w miarą oddalenia od źródeł. Słabą stroną wzoru Ganguillet'a i Kutter'a jest trudność dobrania stosownej wartości dla n.

Pomiary górnego Dunaju i jego dopływów wykazały $n = 0{,}0226$ do 0,0284. — Pomiary Elby Pruskiej (1883 do 1886) dowiodły, że n nie jest niezmiennem nie tylko na całej długości rzeki, ale nawet w tym samym przekroju, i że wartość jego waha się między 0,021 a 0,032 w zależności tak od wartości i jako też od zwiększania się głębokości w przekroju. *) Przy pomiarach tych oznaczono średnią prędkość w przekroju: v w m/sek. na:

$$v = 46{,}91 \sqrt{i} \sqrt[3]{t},$$

dla ilości przepływu: Q od 90 do 430 m³/sek., pochyłości i od 0,00007 do 0,00023 i średniej głębokości t od 1 do 3 m.

2. **Oznaczanie v przez pomiary bezpośrednie.** Dzielimy przekrój F na n pasków pionowych $f_1, f_2, f_3, \ldots f_n$, o równej szerokości: $b : n$, oznaczamy dla każdego paska przynależną prędkość średnią $v_1, v_2 \ldots v_n$, a otrzymamy średnią prędkość całego przekroju:

$$v = \frac{f_1 v_1 + f_2 v_2 + \cdots + f_n v_n}{F}.$$

Żyłka wodna, posiadająca średnią prędkość v_i dowolnego paska f_i, leży w nim na głębokości równającej się 0,55 do 0,60 całej głębokości wody t_i (w m) danego paska f_i. Największa prędkość v_i' w pasku f_i (zależnie od wpływu wiatru) znachodzi się albo na powierzchni i równa się natenczas prędkości powierzchniowej v_i'', albo też pod powierzchnią, na głębokości a, nie przekraczającej $^1/_3$ całej głębokości t_i. (Głębokość a wyrażamy w m). Prędkość najmniejsza v_i''' panuje u dna. Według Sasse'go średnia prędkość v_i, dowolnego paska f_i, jest:

$$v_i = \frac{1}{3}\left[\left(2v_i' + v_i'''\right) + \frac{a}{t_i}\left(v_i'' - v_i'''\right)\right].$$

Jeżeli v_{max} jest średnią wartością prędkości największych, a v_{min} średnią wartością prędkości u dna całego przekroju, to im łożysko będzie płytsze i bardziej chropowate, tem mniejszem stanie się v i v_{min} względnie do v_{max} **). Wogóle jest:

$$\frac{v_{min}}{v_{max}} = 0{,}83 \text{ do } 0{,}40; \qquad \frac{v}{v_{max}} = 0{,}95 \text{ do } 0{,}78.$$

*) Porówn. Zeitschr. d. hannover. Arch.- u. Ing.-V. 1885. str. 621. Dalej: R. Jasmund. Zeitschr. f. Bauwesen 1886. str. 551; 1893. str. 121; 1897. str. 303, 465 i 586.—Również Teubert. die Verbesserung der Schiffbarkeit unserer Ströme durch Regulierung. Centralbl. d. Bauverw. 1894. str. 221; w osobnej odbitce wydane u Wilh. Ernst & Sohn, Berlin

**) Porówn. Annales des ponts et chaussées 1875, Bazin, Sur la distribution des vitesses.

Bazin daje wzór dokładniejszy: $\frac{v}{v_{max}} = \frac{1}{1 + 14\sqrt{\alpha + \frac{\beta}{r}}}$.

We wzorze powyższym α i β posiadają te same wartości i znaczenie, jak na str. 255; wzór powyższy da nam zatem:

Wartości Bazin'a dla $\frac{v}{v_{max}}$.

$r =$	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,80	1,00	2,00	3,00	6,00 m
Przypadek I.	0,84	0,85	0,85	0,85	0,85	0,85	0,85	0,85	0,85	0,85	0,85
„ II.	0,80	0,82	0,82	0,83	0,83	0,83	0,83	0,83	0,84	0,84	0,84
„ III.	0,71	0,76	0,77	0,78	0,79	0,80	0,80	0,81	0,81	0,82	0,82
„ IV.	0,54	0,61	0,65	0,68	0,70	0,71	0,72	0,74	0,77	0,78	0,80
„ V.	0,45	0,53	0,58	0,61	0,63	0,65	0,67	0,68	0,72	0,74	0,76

3. Jeżeli woda niema wymywać dna kanałowego, to prędkości (w m/sek.) niepowinny przekraczać granic poniżej podanych:

Dopuszczalne prędkości wody w kanałach.

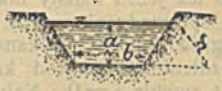
Rodzaj łożyska	v_{max}	v_{min}	Rodzaj łożyska	v_{max}	v_{min}
Szlam i brunatna glina garncarska	0,15	0,08	Żwir	1,22	0,70
Drobny piasek	0,20	0,10	Dno z głazów	1,52	0,94
Glina chuda lub tłusta (w złożach pierwotnych)	0,30	0,16	Mieszanina odłamów łupkowych	2,22	1,49
Tłusty piasek rzeczny	0,60	0,31	Skały uwarstwione	2,75	1,82
			Skały twarde, nieuwarstwione	4,27	3,14

Aby zapobiedz tworzeniu się osadów w kanałach, prędkości powinny być nie mniejsze niż: $v = 0{,}25$ m/sek., jeżeli woda unosi z sobą lekki szlam, a $v = 0{,}50$ m/sek., jeżeli jest obawa osadzania się piasku.

4. **Najkorzystniejsze przekroje kanałowe.** Dla najkorzystniejszego przekroju kanałowego F (w m²) obwód podwodny u (w m) staje się najmniejszością.

Jeżeli oznaczymy (rys. 186) przez:

Rys. 186.



a głębokość kanału w m,
b szerokość dna kanału w m,
δ kąt skarpy brzegu,

to najkorzystniejszy przekrój F, przedstawiający najmniej oporu, określają wzory:

$$a = \sqrt{\frac{F \sin \delta}{2 - \cos \delta}} \quad \text{i} \quad b = \frac{F}{a} - a \operatorname{ctg} \delta.$$

Szerokość poziomu wody będzie natenczas:

$$B = \frac{F}{a} + a \operatorname{ctg} \delta = b + 2a \operatorname{ctg} \delta,$$

a obwód podwodny $u = b + \frac{2a}{\sin \delta}$.

Dla $F = 1$ m² zestawiono w tablicy poniższej najkorzystniejsze wartości a, a ctg δ, b, B i u przy rozmaitych pochyłościach skarpy.

Dla przekroju F m² wartości te są $\sqrt{F}$ razy większe.

δ	ctg δ	a	a ctg δ	b	B	u
90°	0,000	0,707	0,000	1,414	1,414	2,828
60°	0,577	0,760	0,439	0,877	1,755	2,632
45°	1,000	0,740	0,740	0,613	2,092	2,704
40°	1,192	0,722	0,860	0,525	2,246	2,771
36° 52′	1,333	0,707	0,943	0,471	2,357	2,828
35°	1,428	0,697	0,995	0,439	2,430	2,870
33° 40′	1,501	0,689	1,034	0,418	2,485	2,904
30°	1,732	0,664	1,150	0,356	2,656	3,012
26° 34′	2,000	0,636	1,272	0,300	2,844	3,144
Półkole	∞	0,798	∞	0,000	1,596	2,507

Stosowne wartości kąta δ są:

dla kanałów murowanych . . . . . ctg $\delta = 0{,}5$,

dla kanałów kopanych w ziemi ścisłej, z umocnieniem brzegów (np. opaskami) . . . . . ctg $\delta = 1{,}0$,

dla kanałów kopanych w ziemi ścisłej, bez umocnienia brzegów . . . . . ctg $\delta = 1{,}5$,

dla kanałów w ziemi zruszonej, w piasku i t. p. . . ctg $\delta = 2{,}0$.

Jeżeli woda przepływa przez okrągłą rurę zamkniętą, a poziom jej coraz więcej się podnosi, to największa średnia prędkość przekrojowa v pojawi się wtedy, gdy kąt środkowy obwodu podwodnego wyniesie 257°. Największa zaś ilość wody Q przepływa wówczas, gdy kąt ten wynosi 308°.

5. Kanały poszczególnych rodzajów.

W **kanałach fabrycznych** stosują: $v = 0{,}4$ do $0{,}8$ m/sek.; odpowiednie temu pochyłości kanałów dopływowych są $i = 0{,}0005$ do $0{,}0004$, a kanałów odpływowych $i = 0{,}002$ do $0{,}001$.

Jeżeli dla oczyszczania **kanałów spławnych** woda ma się spuszczać, lub też jeżeli kanały takie służą równocześnie do owadniania lub też do sprowadzania wody dla nawadniania, albo do niżej położonych pogród, to pochyłość kanałów bywa średnio $i = 0{,}000005$ do $0{,}000040$. Pozatem dla pogród kanałów spławnych (1,5 do 75 km długich) jest zwykle $i = 0$. Największe, możliwe jeszcze dla żeglugi, pochyłości są 1 : 600 do 1 : 500, w każdym jednak razie lepiej nie przekraczać granicy 0,0002.

Parowanie wody wynosi w lecie średnio 100 mm miesięcznie; może ono jednak dojść w dniach upalnych, a wietrznych do 10 mm dziennie. Ubytek wody z powodu przesiąkania może przy dnie szczelinistym dosięgnąć 50%; zapobiedz temu można obniżeniem kanału poniżej poziomu wód gruntowych. Jako średnie wartości łącznych strat przez parowanie i przesiąkanie podają 0,15 do 0,18 m³/km w miesiącach letnich i 0,12 do 0,14 m³/km w pozostałych porach roku przy średnich wymiarach kanału.

Kongres żeglugi wewnętrznej (Wiedeń 1886), przyjmując za podstawę statki o nośności 450 ton, podał dla głównych kanałów spławnych i rzek skanalizowanych następujące najmniejsze wymiary:

Największy przekrój statku, zanurzonego na 1,75 m, nie powinien zajmować więcej jak 0,25 F.

Normalna głębokość wody na swobodnym szlaku. . = 2,0 m.
Głębokość normalna pod mostami, na mostach kanałowych i w tunelach . . . . . = 2,5 m.
Szerokość dna na prostym szlaku swobodnym . . . = 16,0 m.
Rozszerzenie dna na łukach (najmniejszy promień łuku = 200 m) równe podwójnej strzałce łuku, którego cięciwą jest największa długość statku.
Szerokość dna pod mostami . . . . . = 16,0 m.
Szerokość dna na mostach kanałowych i w tunelach = 7,5 m.
Wysokość w świetle pod mostami . . . . . = 4,5 m.
Normalny przepust (spławny) [szluza].
Głębokość progu pod poziomem normalnym . . = 2,5 m.
Szerokość w świetle w bramach przepustowych . = 7,0 m.
Długość komory między narożnikami progów . . = 75,5 m.

2. Ruch nierównomierny.

Równanie zasadnicze brzmi (por. znakowanie na str. 254).

$$dh = \frac{v \cdot dv}{g} + \frac{1}{r}\frac{v^2}{c^2}dl, \quad \text{albo} \quad h = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2g} + \int_{l_0}^{l_1} \frac{1}{r}\frac{v^2}{c^2}dl.$$

We wzorze tym $g = 9{,}81$ m/sek.^{2}. Równania te służą do badania podłużnego przekroju powierzchni wody (zwierciadła) powyżej budowli podpierającej (jazy, przewały, przyczółki i filary mostowe i t. p.).

1. W przypuszczeniu, że szerokość zwierciadła względnie do głębokości jest znaczna, i że ilości v, r, i, oraz F na badanym szlaku l były przed podparciem stałe, Rühlmann, podstawiając $r = t$, podaje wzór:

$$\frac{il}{t} = {}^1/_3 \ln\frac{Z}{z} + {}^2/_3\frac{Z-z}{t} + {}^1/_9\frac{Z^2-z^2}{t^2} - {}^1/_{27}\frac{Z^3-z^3}{t^3} + {}^1/_{108}\frac{Z^4-z^4}{t^4} - {}^1/_{168}\frac{Z^6-z^6}{t^6} + {}^1/_{567}\frac{Z^7-z^7}{t^7} - {}^1/_{972}\frac{Z^8-z^8}{t^8} = \Phi\left(\frac{Z}{t}\right) - \Phi\left(\frac{z}{t}\right),$$

w którym to wzorze oznacza:

Z wysokość podparcia, czyli podpór w dolnym końcu szlaku l w m, t. j. wysokość zwierciadła podpartego ponad pierwotnem,
z tę samą wysokość w górnym końcu szlaku l w m,
i średnią pochyłość pierwotną zwierciadła niepodpartego, względnie dna łożyska,
t średnią głębokość strumienia niepodpartego w m.

W przypuszczeniu, że, względnie do naturalnych wahań wysokości zwierciadła, możemy już zaniedbać podpór o wielkości $z : t = 0{,}01$, otrzymamy **dalekość podparcia:** $l = \frac{t}{i}\left[\Phi\left(\frac{Z}{t}\right) - 0{,}0067\right]$.

Tablica wartości funkcyi $\Phi\left(\frac{Z}{t}\right)$, względnie $\Phi\left(\frac{z}{t}\right)$.

$\frac{Z}{t}$	$\Phi\left(\frac{Z}{t}\right)$	$\frac{Z}{t}$	$\Phi\left(\frac{Z}{t}\right)$	$\frac{Z}{t}$	$\Phi\left(\frac{Z}{t}\right)$	$\frac{Z}{t}$	$\Phi\left(\frac{Z}{t}\right)$
0,01	0,0067	0,2	1,1361	1,2	2,5084	3,0	4,3844
0,02	0,2444	0,3	1,3428	1,3	2,6179	3,5	4,8911
0,03	0,3863	0,4	1,5119	1,4	2,7264	4,0	5,3958
0,04	0,4889	0,5	1,6611	1,5	2,8337	5,0	6,4019
0,05	0,5701	0,6	1,7980	1,6	2,9401	6,0	7,4056
0,06	0,6376	0,7	1,9266	1,7	3,0458	8,0	9,4097
0,07	0,6958	0,8	2,0495	1,8	3,1508	10,0	11,4117
0,08	0,7482	0,9	2,1683	1,9	3,2553	20,0	21,4147
0,09	0,7933	1,0	2,2841	2,0	3,3595	50,0	51,4157
0,10	0,8353	1,1	2,3971	2,5	3,8754	100,0	101,4158

Przykłady: 1. Jaz na rzece o średniej pochyłości 1 : 2500 i średniej głębokości 3,0 m ma podeprzeć zwierciadło wody o 2,1 m; pytanie: jak daleko sięgnie podparcie? Mamy: $t = 3{,}0$ m, $i = 0{,}0004$, $Z = 2{,}1$ m, $z = 0$; a więc:

$$l = \frac{3{,}0}{0{,}0004}\,\Phi\left(\frac{2{,}1}{3{,}0}\right) = 7500\,\Phi(0{,}7) = 7500 \cdot 1{,}9266 = 14450 \text{ m}.$$

2. Jaki będzie przytem podpór w oddaleniu 8500 m powyżej jazu?

$$\frac{0{,}0004 \cdot 8500}{3{,}0} = \Phi(0{,}7) - \Phi\left(\frac{z}{3{,}0}\right) = 1{,}9266 - \Phi\left(\frac{z}{3{,}0}\right).$$

$$\Phi\left(\frac{z}{3{,}0}\right) = 1{,}9266 - \frac{3{,}4}{3} = 1{,}9266 - 1{,}1333 = 0{,}7933.$$

Z tablicy powyższej otrzymamy: $\frac{z}{t} = \frac{z}{3{,}0} = 0{,}09$, a więc podpór $z = 0{,}27$ m.

Do obliczenia podporu Z między filarami mostowemi, tamami i innemi budowlami zacieśniającemi przekrój, służy wzór:

$$Q = {}^2/_3\,\mu b_1 \sqrt{2g}\left[\left(Z + \frac{v^2}{2g}\right)^{3/2} - \left(\frac{v^2}{2g}\right)^{3/2}\right] + \mu b_1 t \sqrt{2g}\sqrt{Z + \frac{v^2}{2g}},$$

w którym to wzorze, oprócz znakowań na str. 254 i 259 podanych, oznacza:

b_1 całą szerokość w świetle między filarami i t. p. w m,

μ spółczynnik przepływu i

$v = \frac{Q}{b(Z+t)}$ prędkość strumienia w m/sek.

Wielkość spółczynnika μ zależy od kształtu naczółków górnych i dolnych, które, sięgając ponad niski wodostan, mają chronić filary od podmycia, przez łagodne skierowanie strumieni wody z przed mostu pomiędzy filary. Naczółkom kształtu ostrołukowego lub ostrokątnego w planie (również i wydłużonoeliptycznego) odpowiada wartość $\mu = 0{,}95$, naczółkom półkolistym, płaskołukowym lub o krawędzi rozwartokątnej: $\mu = 0{,}90$; w braku naczółków, lub przy ścieśnieniu tamami poprzecznemi wartość μ bywa od 0,85 do 0,80.

3. Oznaczenie spływu Q z obszaru dorzecza. *)

Ilość spływu Q z danego obszaru źródeł, lub z danego dorzecza, zależy od położenia geograficznego, od wielkości obszaru, ukształtowania i właściwości gruntu danego obszaru, dalej od ilości opadów atmosferycznych (deszczu i śniegu) oraz od miejscowych warunków temperatury, wiatru, parowania, wreszcie i od pory roku.

1. Średnią **wysokość rocznych opadów** danego obszaru obliczamy, dzieląc przez powierzchnię całego obszaru sumę iloczynów z rocznych wysokości opadów oddzielnych spostrzegalni (stacyi meteorologicznych) i przynależnych im powierzchni (rejonów) przyczem, rozumie się, suma tych powierzchni musi stanowić cały dany obszar. Podług van Bebber'a wysokość rocznych opadów w Niemczech wynosi średnio 660 mm (na nizinie północno niemieckiej 613 mm, na wyżynie środkowo niemieckiej 690 mm, w Niemczech południowych 825 mm, w górach do 2000 mm), w Austryi 750 mm. Przeciętnie liczyć można 18% na zimę, 23% na wiosnę, 36% na lato (czerwiec, lipiec, sierpień), a 23% na jesień.

Stosunki opadów atmosferycznych w naszych okolicach objaśniają poniższe tablice, zestawione z spostrzeżeń do 1890 r. **)

Średnie opady atmosferyczne w mm.

Nazwa miasta	Długość geograficzna	Szerokość geograficzna	Wzniesienie nad pow. morza m	Lata spostrzeżeń	Styczeń	Luty	Marzec	Kwiecień	Maj	Czerwiec	Lipiec	Sierpień	Wrzesień	Październik	Listopad	Grudzień	Rocznie
Warszawa.	21°1′	53°13′	119	1813—1890	29	28	35	37	50	67	76	78	49	44	38	36	567
Kraków. .	19°57′	50°4′	220	1850,60 i 1862/90	26	27	34	41	64	88	91	84	58	50	37	37	637
Lwów. . .	24°1′	49°5′	298	1824/41 i 1852 90	35	34	47	47	73	94	92	78	51	44	44	41	686

Największe opady na dobę w mm
(z tych samych lat co powyżej).

Nazwa miasta	Styczeń	Luty	Marzec	Kwiecień	Maj	Czerwiec	Lipiec	Sierpień	Wrzesień	Październik	Listopad	Grudzień	Bezwzględnie największy opad na dobę	Data największego opadu na dobę
Warszawa.	22	15	22	37	39	52	87	73	47	35	27	25	87	18 lipca 1851 r.
Kraków. .	21	16	22	30	63	71	47	54	42	39	34	30	71	20 czerwca 1888 r.
Lwów. . .	29	35	30	32	61	58	80	74	39	53	30	18	80	27 lipca 1882 r.

*) Porówn. R. Lauterburg-Bern. Allg. Bauztg. 1887, zeszyt 2, 3, 4 i 12.

**) Zaczerpnięte z dzieła: H. Keller: Memel, Pregel u. Weichselstrom. Berlin 1899, podobnie jak i inne dane, dotyczące Wisły, Niemna i ich dopływów.

Największe i najmniejsze opady miesięczne i roczne

(wahania opadów).

Nazwa miasta	Największe lub najmniejsze opady	Styczeń	Luty	Marzec	Kwiecień	Maj	Czerwiec	Lipiec	Sierpień	Wrzesień	Październik	Listopad	Grudzień	Opady całoroczne	Rok
Warszawa.	Największe	71	77	100	91	118	164	174	184	139	115	85	84	847	1851
	Najmniejsze	8	1	10	5	6	8	6	15	9	2	6	7	381	1862
Kraków. .	Największe	82	74	109	103	164	233	230	206	175	108	83	77	993	1855
	Najmniejsze	3	3	10	2	18	23	20	16	14	5	3	4	428	1851

Opady miesięczne bywają zazwyczaj największe w czerwcu, lipcu i sierpniu, najmniejsze zaś w styczniu i lutym.

W Europie środkowej wysokości opadów bywają przy **deszczach długotrwałych** do 7 mm/godz., lecz 100 mm/dobę nie jest nadzwyczajnością, a przy **ulewnych nawałnicach** do 60 mm/godz., lecz ulewy takie bywają zazwyczaj krótkotrwałe (przeważnie mniej niż godzinę) i nie zajmują obszarów przenoszących 25 km². W Szwajcaryi spostrzeżono: w S. Gallen opady do 250 mm/dobę, a w Zurychu (1876) 2 mm/min.

2. Średnia **roczna wysokość parowania** wynosi 60 do 70% średniej wysokości opadów. W lutym bywa. ona względnie najmniejsza (35 do 40% opadów miesięcznych) w lipcu i sierpniu natomiast największa (85 do 90%). W czasach posuchy drugotrwałej wysokość parowania gruntu zmniejsza się zwolna, w miarę wysychania gruntu tak, że w czasie takiej nawet bardzo długotrwałej posuchy wyparowanie nie przenosi 20 do 25 mm. Według spostrzeżeń Ebermayer'a roczna wysokość parowania z gruntu pod otwartem niebem bywa 410 mm; w lesie pozbawionym podściółki 160 mm, z podściółką natomiast 70 mm. Powierzchnia wody, wystawiona na działanie wiatrów, paruje rocznie 600 do 1000 mm (por. str. 258).

3. **Ilość spływu** Q wynosi rocznie średnio 30 do 35% ilości opadów; spływ odbywa się jednakże nie równomiernie, lecz w zależności od wielkości opadów, wsiąkalności gruntu, stosunków parowania i ciepłoty i t. p. Ta nierównomierność spływu przejawia się w wodostanach rzek, jako: niski, średni i wysoki wodostan (N.W., S.W., W.W.). [Najniższy wodostan N.N.W. i najwyższy W.W.W.].

W mniejszych strumykach i potokach, w okolicach górzystych i pagórkowatych, ilość przepływu przy W.W. bywa 100 do 200 razy większa, niż przy N.W., w równinach zaś stosunek ten bywa znacznie mniejszy. Przepływy kilku rzek naszych podajemy w tablicy na stronie następnej:

Nazwa rzeki	Szlak rzeki	Przepływ Q w m^3/sek. przy			Stosunek przepływów przy			Spływ z 1 km^2 dorzecza w litrach na sek. przy		
		N.W.	S.W.	W.W.	N.W.	S.W.	W.W.	N.W.	S.W.	W.W.
Wisła . . .	przy ujściu	430	950	5030	1	2,2	11,6	2,8	13,5	41,2
Niemen. . .	dolny bieg	160	260	1250	1	1,6	7,8	1,4	2,3	11,2
Warta *) . .	pod Poznan.	28	47	168	1	1,7	3,6	1,12	1,88	6,72

Porównawcza tablica spływu i opadów.

Przedmiot i jednostka miar	Wisła powyżej odczepienia się Nogatu			Niemen pod Tylżą		
	półroczo letnie	półroczo zimowe	cały rok	półroczo letnie	półroczo zimowe	cały rok
Średni przepływ na sekundę w m^3	789	1447	1115	429	1009	717
Średni spływ z 1 km^2 dorzecza w litrach/sek. .	4,09	7,50	5,78	4,70	11,06	7,86
Wysokość spływu z całego dorzecza w mm słupa wodnego przez dany okres czasu . . .	65,0	117.4	182.4	74.8	173.1	247,9
Wysokość opadów (średnia) całego dorzecza w mm przez dany okres czasu	402.3	217,8	620,1	362.8	215.8	578.6
Stosunek spływu do opadów w procentach % .	16,1	53.9	29.4	20,6	80.2	42,8

Pochyłości zwierciadła rzek naszych.

Wisła.	Od źródeł do ujścia Białej Wisły	60,8‰
	Pod Krakowem	0,32‰
	Od ujścia Pilicy do Warszawy	0,165‰
	Od Warszawy do ujścia Narwi	0,334‰
	Przy ujściu do morza	0,118‰
	Średnio na całym biegu	1,05‰
Niemen.	Od źródeł do ujścia Loszy	1,297‰
	Szlak około Grodna	0,233‰
	Przy ujściu do morza	0,034‰
	Średnio na całym biegu	0,201‰
Wilja.	Górny bieg	0,488‰
	Blisko ujścia	0,330‰
	Średnio cały bieg	0,410‰
Dunajec.	53‰ do 0,566‰, średnio	5,47‰
San.	5,98‰ do 0,319‰, średnio	1,09‰
Wieprz.	1,54‰ do 0,258‰, średnio	0,558‰
Narew.	0,446‰ do 0,123‰, średnio	0,197‰
Bug.	3,44‰ do 0,217‰, średnio	0,312‰

b. Przelewy i przepływy w jazach, upustach i przepustach (szluzach).

I. Przelewy przez jazy o wąskim grzbiecie poziomym.

1. Gdy **możemy zaniedbać prędkość**, z jaką woda dopływa do jazu. Oznaczamy przez:

Q ilość przepływu przez jaz w m^3/sek.,

*) N.W. przy + 0.18 m. podczas gdy N.N.W. = — 0,18 m; S.W. przy + 0,58 m; W.W. przy + 2,14 m. t. j. przy normalnym wysokim wodostanie, a nie przy W.W.W.

b szerokość jazu w m,
h dla jazu przelewowego wysokość zwierciadła podpartego ponad grzbietem jazu w m,
h dla jazu zatopionego wysokość zwierciadła podpartego ponad niepodpartem w m, przez a zaś głębokość grzbietu jazowego pod zwierciadłem niepodpartem w m.

Dla **jazu przelewowego** *) (rys. 187), jeżeli $g = 9{,}81$ m/sek.^{2}, będzie:

$$Q = {}^2/_3 \mu_1 b h \sqrt{2gh},$$

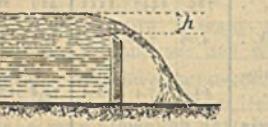
a dla **jazu zatopionego** (rys. 188):

$$Q = {}^2/_3 \mu_1 b h \sqrt{2gh} + \mu_2 b a \sqrt{2gh},$$

przyczem, podług Redtenbacher'a:

$${}^2/_3 \mu_1 = 0{,}57\ **), \quad \text{a} \quad \mu_2 = 0{,}62.$$

Rys. 187.



Rys. 188.

Znając ilości Q i b, oraz pożądany podpór h (wysokość podparcia zwierciadła) trzeba zbudować jaz zatopiony, jeżeli:

$$Q > 0{,}57 b h \sqrt{2gh},$$

w przeciwnym zaś razie, gdy Q jest mniejsze od owej ilości, jaz przelewowy. Jeżeli zaś:

$$Q = 0{,}57 b h \sqrt{2gh},$$

to grzbiet jazu leży dokładnie na wysokości zwierciadła niepodpartego.

2. Gdy **nie możemy zaniedbać prędkości** v w m/sek., z jaką woda dopływa do jazu.

Ilość wody przelewającej się przez grzbiet **jazu przelewowego** będzie: $Q = {}^2/_3 \mu_1 b \sqrt{2g} [(h+k)^{3}/_2 - k^{3}/_2]$,

a ilość wody przelewającej się przez grzbiet **jazu zatopionego (przewału)** będzie:

$$Q = {}^2/_3 \mu_1 b \sqrt{2g} [(h+k)^{3}/_2 - k^{3}/_2] + \mu_2 b a \sqrt{2g} \sqrt{h+k}.$$

Oprócz znakowań użytych w ustępie 1. mamy tu: $k = v^2 : 2g$ wysokość prędkości wody dopływającej w m/sek.

Dla jazów ukośnych należy prędkość v przemnażać przez wstawę kąta pochylenia jazu względem kierunku strumienia.

---

*) Centralbl. der Bauverwaltung 1892, str. 175. R. Maschke. Przepływy przez jazy przelewowe.

**) Podług Freese'go (Zeitschr. d. Verein deutsch. Ingen. 1890, str. 1285 i nast.) dla $h > 0{,}1$ m będzie: $\mu_1 = \left(0{,}615 + \frac{0{,}0021}{h}\right)\left[1 + 0{,}55\left(\frac{h}{t}\right)^2\right]$. ($t$ = głębokości kanału w m).
Wzór ważny dla przelewu doskonałego, bez dławienia bocznego.

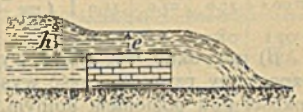
Wartość spółczynnika $^2/_3\,\mu_1 = 0{,}57$ i $\mu_2 = 0{,}62$, jeżeli grzbiet jazu leży wysoko ponad dnem strumienia; spółczynnik μ_2 wzrasta aż do wartości 0,83 w miarę, jak grzbiet jazu zbliża się coraz więcej do dna strumienia.

Dla danego położenia (wysokości) grzbietu jazowego, oraz ilości Q i b, obliczamy podpór h sposobem prób (nieznamy bowiem ilości k), a mianowicie: Zakładając $k = 0$, obliczamy pierwszą, przybliżoną wartość h, z wzorów powyższych. Następnie oznaczamy wartość k, przy podporze h. Z tych ilości k i h, obliczamy podług wzorów powyższych Q_1, które będzie większem od danego Q, a zmniejszając teraz h w stosunku właściwym, otrzymujemy drugą przybliżoną wartość h_1. Postępując tak dalej, możemy otrzymywać kolejno coraz to dokładniejsze wartości. □

2. Przelewy przez jazy stałe, o szerokim grzbiecie poziomym.

Żyły wodne nad grzbietem jazu nabierają w tym przypadku kierunku wzajemnie równoległego i poziomego, a głębokość e warstwy wodnej, płynącej po grzbiecie (rys. 189) będzie:

Rys. 189.



$$e = {}^2/_3\,(h + k),$$

ilość przepływu zaś:

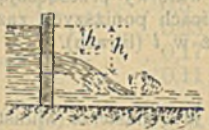
$$Q = 0{,}35\,b\,\sqrt{2g}\,(h + k)^{3}/_{2}.$$

[Znaczenia b, k i g podano na str. 264].

3. Wypływ wody z upustów.

Stosownie do tego, czy okno (otwór) upustu leży ponad dolnym poziomem (upust swobodny rys. 190), czy częściowo nad, częściowo pod nim (upust półzatopiony rys. 191), czy wreszcie zupełnie pod dolnym poziomem (upust zatopiony rys. 192), stosujemy wzory poniższe:

Rys. 190.



Rys. 191.

Rys. 192.

$$Q = {}^2/_3\,\mu b\,\sqrt{2g}\,[(h_1 + k)^{3}/_{2} - (h_0 + k)^{3}/_{2}] \quad \text{(Rys. 190)};$$

$$Q = {}^2/_3\,\mu b\,\sqrt{2g}\,[(h_1 + k)^{3}/_{2} - (h_0 + k)^{3}/_{2}] + \mu b a\,\sqrt{2g}\,\sqrt{h_1 + k} \quad \text{(Rys. 191)};$$

$$Q = \mu b a\,\sqrt{2g}\,\sqrt{h + k} \quad \text{(Rys. 192)}.$$

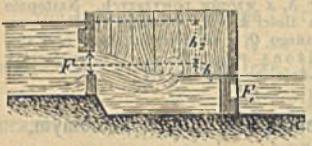
We wzorach powyższych znów będzie $k = v^2 : 2g$, jeżeli v (w m/sek.) jest prędkością wody dopływającej, a $g = 9{,}81$ m/sek.^{2}.

Wartość $\mu = 0{,}6$, jeżeli spód okna leży wysoko ponad dnem strumienia, zwiększa się ona w miarę zbliżania się okna ku dnu i przybiera wreszcie wartość 0,65 do 0,7, gdy spód okna leży na dnie.

4. Przepływ wody przez przepusty (szluzy) komorowe.

Oznaczamy przez:
h_1 wysokość dolnego poziomu pod środkiem okna stawidłowego w m,
h_2 wysokość górnego poziomu nad środkiem okna stawidłowego w m,

Rys. 193.



K pole zwierciadła w komorze w m^2,
F pole okna w górnej bramie w m^2,
F_1 pole okna w dolnej bramie w m^2,
a otrzymany czas t (w sek.) potrzebny na **napełnienie** komory:

$$t = \frac{(h_1 + 2h_2)K}{\mu F \sqrt{2gh_2}}.$$

A czas potrzebny na **opróżnienie** komory będzie:

α) gdy okno w bramie dolnej zupełnie zatopione pod dolnym poziomem:

$$t = \frac{2K\sqrt{h_1 + h_2}}{\mu F_1 \sqrt{2g}}.$$

β) gdy okno częściowo wystaje ponad poziom dolny, przyczem oznaczamy przez a_1 część wysokości okna nad, przez a_2 część wysokości pod poziomem dolnym, a przez b szerokość okna:

$$t = \frac{2K(h_1 + h_2)}{\mu b \sqrt{2g}\left[a_1\sqrt{h_1 + h_2} - \frac{1}{2}a_1 + a_2\sqrt{h_1 + h_2}\right]}.$$

E. Przesiąkanie wody przez rozmaite rodzaje gruntu.*)

I. Jeżeli poziom wody leży na H (w m) nad poziomem warstwy przesączającej, o grubości D (w m), to, w granicach do $H = 2{,}5$ m, ilość wody Q przesiąkającej na godz. przez 1 m^2 powierzchni będzie:

$$Q = a + bH.$$

Stała a zależy od rodzaju i grubości ziarna warstwy przesączającej, stała b zależy nadto od grubości D. W tablicach poniższych zaznaczono, czy Q rozumieć należy w m^3, czy też w l (litrach).

Stałe a i b.

1. Podług doświadczeń Komisyi Kanałowej w Monasterze (Münster). Powierzchnia przesączająca 1 m^2; H do 2,5 m; Q w l/godz. i na m^2.

Rodzaj i grubość ziarn warstwy przesączającej	a	b dla D =				
		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0 m
Piasek, ziarna 0,1 do 0,8 mm .	36	131	75	50	32	16
Piasek, ziarna 0,1 do 0,3 mm .	1,1	13	11	9,5	8,6	8,0
Piasek ze śladami gliny . . .	1,8	—	7,1	3,1	1,7	1,2
Margiel ubity na wilgotno . .	0,004	0,015	0,011	0,008	0,006	0,005
Glina	0,0018	0,006	0,005	0,003	0,003	0,002

*) Patrz: Centralbl. d. Bauverw. 1891, str. 229 i Zeitschr. für Bauwesen 1877, str. 351.

Uwagi. Gdy H zwiększano ponad 2,5 m, do 3,0 m, związek $Q = a + bH$ tracił swą ważność, a Q rosło w stosunku wyższych, lecz jeszcze nieznanych potęg wysokości H. Dla $D = 0{,}2$ m osiągano granicę tę przy $H \infty 2{,}5$ m, dla $D = 0{,}4$ m przy $H \infty 3{,}0$ m.

Wysokość ciśnienia hydraulicznego na różnych poziomach warstwy przesączającej okazała się dla czystego piasku równo wielką jak dla bardzo ciasnego przewodu rurowego, a więc wysokość oporu proporcyonalną do przesiąkanej grubości D. Dla gliny natomiast miarodajną była jedynie wysokość oporu w spodniej, 5 cm grubej warstwie, podczas gdy w warstwach wyższych hydrauliczna wysokość ciśnienia równą była hydrostatycznej. Wynika z tego, że glina nieobciążona rozmula się w wodzie, i że **mury oporowe**, zasypane gliną, znosić muszą w przybliżeniu pełen napór statyczny wody, o ile zawczasu nie zapewni się należytego owodnienia warstw gliny.

2. Podług doświadczeń Wieliczkowskiego.

Powierzchnia przesączająca 20 m²; H do 1,0 m; Q w m³/godz. i na m².

Rodzaj warstwy przesączającej i grubość ziarna	a	b dla $D =$ 0,25	0,50	0,75	1,00 m
Żwir średni, ziarna 4 do 7 mm . .	233	450	250	180	130
Żwirek drobny, ziarna 2 do 4 mm .	126	270	190	115	86
Piasek gruboziarnisty, ziarna 1 do 2 mm	21	79	38	24	17
Piasek średni, ziarna 0,33 do 1 mm .	1,9	8,9	3,9	2,4	1,7

3. Podług doświadczeń Wollny'ego.

Powierzchnia przesączająca 28 m²; H do 1,0 m; Q w tablicy.

Rodzaj warstwy przesączającej i grubość ziarn		a	b dla $D =$ 0,1	0,2	0,3 m	Q
Piasek	1,0 do 2,0 mm ziarna	5,0	50	38	34	w m³ / godz.m²
	0,5 „ 0,1 „ „	2,9	32	21	16	
	0,25 „ 0,50 „ „	0,9	12,8	7,6	5,6	
	0,17 „ 0,25 „ „	0,65	3,8	2,9	1,9	
	0,11 „ 0,17 „ „	0,54	2,0	1,2	0,4	
	0,01 „ 0,20 „ „	70	320	130	60	w l / godz.m²
	0,07 „ 0,11 „ „	50	240	100	50	
Oldenburski torf	0,01 „ 0,25 „ „	1,8	29,2	13,2	7,2	
Górnobawarski torf	0,01 „ 0,114 „ „	0,5	2,1	0,8	0,2	
Kaolina (glink. porc.)	0,01 „ 0,07 „ „	0,07	1,73	1,03	0,29	

4. Dla piasku **filtrów w Hamburgu** przy $H = 1{,}1$ m było:

$$Q = 60\,H \text{ w } l/\text{godz. i m}^2.$$

2. Jeżeli kilka warstw o różnej grubości ziarn leży nad sobą, to dla Q miarodajną jest warstwa o najmniejszem ziarnie, chociażby nawet jej grubość wynosiła zaledwie kilka cm.

W mieszaninach różnoziarnistych osiągamy najmniejszą przesiąkliwość, gdy mniejsze ziarna mogą (wypełniając je) ułożyć się w prze-

strzeniach, pozostających swobodnemi między ziarnami grubszemi; natenczas w przybliżeniu miarodajnem dla Q będzie grubość ziarn najmniejszych.

Glinka wysuszona pęcznieje w wodzie w przybliżeniu o 2,5-cio krotną swą objętość pierwotną. Do zasypywania murów swobodnie stojących wypada zatem glinkę układać zwilżoną i w cienkich warstwach, natomiast dla uszczelnienia gruntu przepuszczalnego trzeba ją ubijać w słabo wilgotnym stanie, obciążając ją nasypem piaskowym, który ochrania ją od wymulania. Przesiąkliwość gliny rozmulonej jest około 1000 razy większa niż glinki wilgotnie ubitej.

Przesiąkliwość rozmaitych gatunków ziemi zmniejsza się bardzo skutecznie przez przedzielające warstwy pęczniejące, np. gliny, tlenku żelazowego, czarnoziemiu i t. p., które to warstwy osiągają najwyższą swą skuteczność już przy grubości 5 cm. Uwzględniając jednakże możliwość osadzania się gruntu, lepiej grubość tę nieco powiększyć.

F. Wzlot i przelot swobodnych strumieni wodnych.

Oznaczamy przez:

H pożyteczną wysokość ciśnienia w wylocie w m (por. str. 239 i 240),

H_{max} największą wysokość ciśnienia przy doświadczeniach w m,

S pionowy wzlot (wysokość) strumienia w m,

W przelot (dalekonośność) strumienia pochylonego w m,

d średnicę końca wylotu w mm,

l długość wylotu w mm.

1. Weisbach *) przy $d = 10$ mm, z doświadczeń z poniżej opisanemi wylotami, otrzymał następnie podane wyniki:

Nr. I stożkowaty, w końcu walcowy,

„ II stożkowy, wewnątrz zaokrąglony $l = 40$ mm, dopływ 20 mm w świetle,

„ III w kształcie dyszy, wewnątrz zaokrąglony, $l = 145$ mm, nachylenie boczne $5^3/_4{}^0$,

„ IV jak Nr. III, lecz $l = 105$ mm,

„ V stożkowy, podobny do Nr. III, $l = 245$ mm,

„ VI rura okrągła, wewnątrz zaokrąglona, $l = 150$ mm.

Wylot Nr.	H_{max} w m	$\frac{S}{H}$ dla $H =$ 5 m	10 m	15 m	Wylot Nr.	H_{max} w m	$\frac{S}{H}$ dla $H =$ 5 m	10 m	15 m
I	17,8	0,950	0,887	0,801	IV	13,5	0,960	0,928	0,884
II	20,5	0,942	0,886	0,824	V	17,7	0,950	0,927	0,876
III	18,1	0,936	0,881	0,804	VI	19,4	0,753	0,718	0,672

Z powodu oporu powietrza, przy równych wysokościach ciśnienia H, wzlot S i przelot W rosną wraz ze średnicą wylotu d.

*) Zeitschr. d. Ver. d. Ing. 1861, str. 113.

2. **Freeman** *) z doświadczeń z wylotami węży przeciwpożarnych, o $d = 19$ i 35 mm, otrzymał poniższe wartości S i W (W przy pochyleniu wylotu na 32°).

Wzlot i przelot w m		Wysokość ciśnienia (tuż przed wylotem) H w m = 5	10	15	20	30	40	50	60	70	d w mm
S	strumienia jeszcze dobrze skupionego, przy średnim wiatrze.	3,7	7,3	11,0	14,4	16,2	21,6	23,6	24,4	25,4	19
		4,0	7,9	12,6	15,2	18,3	24,6	27,7	29,6	31,0	35
	skrajnych kropli (podczas ciszy bezwietrznej).	4,3	8,8	13,1	17,7	25,3	31,0	36,0	39,0	41,0	19
		4,6	9,5	14,0	18,3	27,8	36,0	43,0	48,0	50,0	35
W	strumienia jeszcze dobrze skupionego, przy średnim wiatrze.	4,3	7,0	9,5	11,0	14,0	15,8	17,7	19,5	20,8	19
		5,5	9,5	13,1	15,8	20,4	23,0	25,0	27,0	28,7	35
	skrajnych kropli (podczas ciszy bezwietrznej).	7,8	15,5	23,2	28,6	35,8	41,0	45,0	48,5	51,0	19
		8,8	17,4	26,6	34,2	47,0	55,0	62,0	67,0	72,0	35

Uwaga. Dobrze jest nadać końcom wylotów gładką, walcową powierzchnię wewnętrzną.

Najlepsze są wyloty: podług Freeman'a stożkowe z krótkim zakończeniem walcowem, długości 0,5 d i z zaokrągleniem miejsca przejściowego; podług Weisbach'a takie same, albo też wyloty stożkowe z pochyleniem bocznem około 6°, długości $l = 10\,d$.

Lepiej stosować jeden strumień większego przekroju, aniżeli dwa mniejsze równocześnie, większy strumień posiada bowiem większe wartości S i W, a nadto dozwala gasić pożar prędzej przez „biczowanie“ ognia.

G. Zderzenie się wody z ciałami stałemi.

a. Uderzenie strumienia wodnego.

Oznaczamy przez:

P siłę uderzenia, t. j. napór strumienia na powierzchnię w kg,

F przekrój strumienia wodnego w cm²,

v prędkość strumienia w m/sek.,

c prędkość, z jaką powierzchnia porusza się w kierunku prędkości v w m/sek.,

α kąt, o który strumień zostaje odchylony,

$h = v^2 : 2g$, wysokość odpowiadająca prędkości v w m (por. str. 146),

Q ilość wody uderzającej w m³/sek.; $Q = (v - c)\,F$, jeżeli zderzenie następuje zawsze z tą samą powierzchnią, a natomiast $Q = v\,F$, jeżeli (jak np. u kół wodnych) szereg powierzchni kolejno przeciwstawia się strumieniowi.

I. Uderzenie proste.

1. Wzór ogólny brzmi:

$$P = \frac{\gamma}{g}\,Q\,(v - c)\,(1 - \cos\alpha).$$

*) Freeman, Proceedings of the American Society of Civil Engineers. New-York, Novbr. 1890.

2. Na płaszczyznę prostopadłą do strumienia i dostatecznie wielką, by wszystkie żyły strumienia odchylić o $\alpha = 90^0$, napór będzie:

$$P = \frac{\gamma}{g} Q (v - c);$$

a jeżeli nadto płaszczyzna znajduje się w spokoju, t. j. gdy $c = 0$, to:

$$P = \gamma F \frac{v^2}{g} = 2\gamma F h.$$

Za $2\gamma Fh$ podstawiamy γFh, jeżeli płaszczyzna ma pole równe przekrojowi strumienia, a podstawiamy $1{,}5\,Fh$, jeżeli średnica płaszczyzny równa się przynajmniej podwójnej średnicy strumienia i znajduje się tuż przy wylocie.

Rys. 194.

3. Jeżeli powierzchnia jest na tyle wklęsłą, jak w rys. 194, że odchyla wszystkie żyły o $\alpha = 180^0$, t. j., że zmusza je do odpływania w kierunku wprost przeciwnym, to:

$$P = 2\frac{\gamma}{g} Q (v - c),$$

a jeżeli nadto powierzchnia znajduje się w spokoju, gdy więc $c = 0$, to:

$$P = 2\gamma F \frac{v^2}{g} = 4\gamma F h.$$

4. **Moc uderzenia** *) $E = Pc$ (w kgm/sek.) jest największą, gdy $c = {}^1/_2\, v$, a natenczas będzie:

w przypadku 2: $E = {}^1/_2 \frac{v^2}{2g} Q\gamma = {}^1/_2\, Qh\gamma$,

a w przypadku 3: $E = \frac{v^2}{2g} Q\gamma = Qh\gamma$.

2. Uderzenie ukośne.

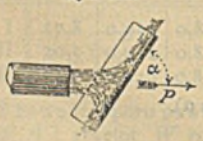
Jeżeli kierunek uderzenia względem płaszczyzny ma pochylenie α, to całe parcie w kierunku strumienia będzie, jak niżej podano, a mianowicie, gdy woda może usuwać się:

Rys. 195.

1. tylko w jednę stronę (rys. 195).

$$P = (1 - \cos\alpha) \frac{v - c}{g} Q\gamma;$$

Rys. 196.



2. na dwie strony (rys. 196).

$$P = \sin^2\alpha \frac{v - c}{g} Q\gamma;$$

3. na wszystkie strony:

$$P = \frac{2\sin^2\alpha}{1 + \sin^2\alpha} \frac{v - c}{g} Q\gamma.$$

*) Przypominamy, że moc jest pojęciem pracy na jednostkę czasu i nie jest siłą.

Parcie boczne S w kg w kierunku prostopadłym do strumienia, a leżącym w płaszczyznie kąta pochylenia α, dla przypadku 1 i 2 będzie:

$$S = \sin 2\alpha \frac{v - c}{2g} Q\gamma.$$

b. Uderzenie wody nieograniczonej.

Oznaczamy przez:

P siłę uderzenia (t. j. napór hydrauliczny) wody w kg,
F największy przekrój ciała, wystawiony na uderzenie wody w m^2,
v średnią prędkość, z jaką woda uderza na przekrój F, w m/sek.,
ψ spółczynnik zależny od kształtu i wielkości ciała zanurzonego,
l długość ciała w m,
(γ i g zatrzymują znaczenie jak pod a.), a będzie ogólnie:

$$P = \psi\gamma F \frac{v^2}{2g}.$$

Dubuat i Duchemin podają następujące wartości spółczynnika ψ:

1. dla **ciała graniastosłupowego z tępemi zakończeniami:**

Gdy stosunek . . . . . $\frac{l}{\sqrt{F}} =$	0,03	1,0	2,0	3,0
to dla ciała w spokoju . . . $\psi =$	1,86	1,47	1,35	1,33.
a dla ciała w ruchu . . . . $\psi =$	1,43	1,17	1,12	1,10.

2. dla **ciała graniastosłupowego z zaostrzonemi zakończeniami:**

W przypuszczeniu, że długość ciała równa się 5 do 6-cio krotnej szerokości i podstawiając ψ_1 za ψ we wzorze, Bossut i d'Alembert oznaczyli stosunek $\psi_1 : \psi$, gdy ψ oznacza wartości tablicy powyższej:

1. **Przód** zaostrzony:

gdy połowa kąta ostrza =	90^0	78^0	66^0	54^0	42^0	30^0	6^0,
to stosunek $\psi_1 : \psi =$	1,00	0,96	0,85	0,69	0,54	0,44	0,40.

2. **Tył** zaostrzony:

gdy połowa kąta ostrza =	69^0	48^0	24^0	12^0.
to stosunek $\psi_1 : \psi =$	0,94	0,89	0,86	0,84.

Pomiary (1842 do 1880) naporu **fal morskich** wykazały napory do 32 t/m^2. Przy latarni morskiej pod Sherry fale zerwały bloki ważące 13 t. z wysokości 22 m ponad S.W.

Najwyższe fale morskie w czasie orkanów około 14 m., przy długościach fali 150 do 200 m, a prędkości do 61 km/godz. Na angielskim statku wojennym „Penguin“ spostrzegano na oceanie Północno-Atlantyckim fale wysokości 13,1 m. na oceanie Spokojnym 9,8 m, Południowo-Atlantyckim 6.2 m. przy Cap Horn 9,4 m. na morzu Śródziemnem 4,5 m, na morzu Niemieckiem 4,1 m.

c. Opór statków w rzekach i kanałach. *)

Oznaczmy przez:

W opór statku w kg,
F największy przekrój zanurzony statku w m^2,
v_1 prędkość statku w m/sek.,
v_2 prędkość wody w m/sek.,
n stosunek podwodnego przekroju kanałowego do F,
ψ, γ i g wartości te same jak na str. 271, a otrzymamy ogólnie:

$$W = \psi \gamma F \frac{(v_1 \pm v_2)^2}{2g},$$

przyczem znak + stosuje się do jazdy pod wodę, a — z wodą.

Podług Bellingrath'a jest ściślej:

$$W = \psi \gamma F \frac{(v_1 \pm v_2)^2}{2g} \left(\frac{n}{n-1}\right)^2,$$

z warunkiem, aby: $v_{1\,max} = 4$ m/sek.; $v_{2\,max} = 3$ m/sek.; $n \geq 4$.

W prawidłowo zbudowanych parowcach rzecznych bywa $\psi = 0{,}16$ do 0,20, dla prawidłowo zbudowanych statków rzecznych i kanałowych $\psi = 0{,}21$ do 0,27, dla zwykłych berlinek $\psi = 0{,}35$ do 0,40, dla gabarów i t. p. $\psi = 0{,}4$ do 0,5, wreszcie dla kuli $\psi = 0{,}7886$.

Wymiary statków rzecznych i kanałowych.

Rodzaj statku (łodzi)	Długość m	Szerokość m	Zanurzenie m	F m^2	Nośność ton
Łódź normalna na Odrze i Łabie . .	55	8	1,75	14	400
Wielka łódź na Łabie	62,5	7,5—8	1,75	13—14	500
Największe łodzie na Renie	80	10	2,4	24	1300

Przeciętny stosunek zanurzenia, szerokości i długości jak 1 : 4 : 30.

Dalsze szczegóły o oporach statków z uwzględnieniem powierzchni zanurzonej i kształtu statku w Dziale dwunastym: Budowa okrętów.

H. Pomiary wodne.

a. Oznaczanie wysokości ciśnienia w przewodach rurowych.

Przy małych ciśnieniach najdogodniej i najpewniej **piezometrem**, w którym woda sama się wznosi.

Dla większych ciśnień stosują się **przyrządy mierzące różnicę wysokości słupów cieczy** (wody, rtęci i t. p.) często starczą **manometry sprężynowe**, dobrze wykonane.

*) Nowsze prace nad oporem statków w ograniczonych szlakach wodnych: Schmidt: Opis projektu kanału ze Strasburga do Speyer. Graevell, Civiling. 1887, str. 97; Dietze, Zeitschr. d. V. d. Ing. 1889, str. 559; de Mas, Opór statków, 1892.

Piezometr łączy się z przewodem rurowym za pośrednictwem otworu 1 do 2 mm średnicy, wywierconego w ściance rury, prostopadle do kierunku strumienia. Dla prawidłowego pomiaru trzeba usunąć nietylko zadry na obwodzie otworu, ale przedewszystkiem powietrze ze wszystkich części piezometru. Wysokość oporu przewodu mierzy się różnicą wysokości ciśnień hydraulicznych przynajmniej dwóch piezometrów, przyczem wypada ustawić piezometry w miejscach o równych przekrojach przepływu, w których strumień nie podlega dławieniu.

b. Oznaczanie prędkości prądu wody.

1. **W większych strumieniach i rzekach** do oznaczania prędkości na powierzchni stosują się **pływaki powierzchniowe,** niezanurzające się ponad 0,3 m. Przy dowolnych głębokościach używa się **pływaków rurowych,** t. j. rury blaszanej ($d \lesssim 2$ cm) z dnem i wiekiem, obciążonej śrutem do pożądanej głębokości zanurzenia. Zastosowanie takiego pływaka warunkuje się dość jednostajnym przekrojem strumienia. Prędkość pływaka równa się drodze przepłyniętej (w m), podzielonej przez czas na to zużyty (w sek.). Prędkość średnia w płaszczyźnie pionowej, przełożonej przez linię, jaką pływak przebiegł, równa się 0,78 do 0,95, średnio około 0,85 prędkości, mierzonej bezpośrednio pływakiem powierzchniowym, podczas gdy pływak rurowy, dostatecznie zanurzony, mierzy wprost ową prędkość średnią, co prawda z dokładnością tylko przybliżoną.

Młynek Woltmanowski, który **Amsler** i **Harlacher** udoskonalili przez dodanie licznika elektrycznego, a **Wagner** *) przez dodanie sygnału dźwiękowego, stosuje się z korzyścią przy prędkościach nieprzekraczających 1,5 m/sek. i głębokościach do 8-miu m. Prędkość v pozostaje w pewnej zależności od ilości obrotów łopatek (u) i określa się wzorem:

$$v = \alpha u + \beta,$$

w którym stałe α i β, właściwe danemu młynkowi, oznaczają się doświadczalnie przez poruszanie młynka ze znaną prędkością w wodzie stojącej. **)

Rurka Pitot-Darcy'ego jest to kolanko rurkowe, o długiem ramieniu pionowem, a krótkiem ramieniu poziomem; ramię poziome kierujemy raz pod wodę, drugi raz w kierunku z wodą i odczytujemy h_1 i h_2, t. j. wysokości wodostanów w rurce ponad zwierciadłem strumienia, a prędkość prądu będzie:

$$v = \varphi \sqrt{2g(h_1 + h_2)} = \varphi_1 \sqrt{h_1 + h_2}.$$

Spółczynniki φ lub φ_1 oznaczamy doświadczalnie; przy $v = 1{,}65$ m/sek. będzie w przybliżeniu $\varphi = 0{,}89$, a $\varphi_1 = 3{,}94$. Przyrząd ten jest dogodny do mierzenia prędkości u dna. W ustroju udoskonalonym przez **Frank'a** rurką tą można oznaczać jednym pomiarem wprost średnią prędkość w danym pionie ***) (p. str. 256).

2. Do mierzenia prędkości w **rurach** i **strumieniach wytryskujących** używa się rurka Pitot'a (por. powyżej), której ramię poziome

*) Wochenbl. f. Arch. u. Ing. 1882, str. 479.
**) Wochenbl. f. Baukunde 1887, str. 382; Centralbl. d. Bauverw. 1897, str. 489.
***) Deutsche Bauztg. 1888, str. 609.

jest wyciągnięte w ostrze cienkie jak igła; ustawiając ten koniec pod prąd strumienia wytryskującego, odczytujemy bezpośrednio wysokość prędkości, albowiem żyłki sąsiednie, zbaczające łagodnie wzdłuż ostrza, nie zdołają wywierać ciśnienia bocznego. Z oddzielnych wysokości prędkości, mierzonych w różnych punktach przekroju, oznaczamy same prędkości, a podług str. 256 prędkość średnią (doświadczenia Freeman'a, Bazin'a i t. p.). Darcy zastosował rurkę Pitot'a do zamkniętych przewodów rurowych, umieszczając ją przesuwalnie w dławnicach, założonych na obwodzie rury.

W przewodach rurowych, o większej średnicy d, znając w przybliżeniu spółczynniki mającej się oznaczyć prędkości v, (por. str. 247) ze stanów piezometrów, ustawionych w oddaleniu l na rurze, można oznaczyć prędkość v w sposób następujący: Jeżeli przez w oznaczymy w m różnicę stanów piezometrów, to otrzymamy w przybliżeniu:

$$w = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}, \text{ a zatem: } v = 4{,}43 \sqrt{\frac{w d}{\lambda l}}.$$

c. Oznaczanie ilości przepływu.

1. Do **większych strumieni** stosujemy zasady podane na str. 254 i następnych. Jeżeli F oznacza przekrój podwodny strumienia, prostopadle do prądu skierowany, w m^2, a v średnią prędkość w przekroju w m/sek., oznaczoną z pomiarów lub z obliczenia, to ilość przepływu $Q = Fv$ w m^3/sek.

2. Dla strumyków i pogródek używano do mierzenia ilości przepływu naczyń oznaczonej objętości, jako też t. zw. **cala wodnego.** Calem wodnym nazywano ilość wody, przepływającej pełnym jeszcze strumieniem przy możliwie najmniejszem ciśnieniu przez otwór o średnicy jednego cala. Warunku tego dopełnimy, jeżeli poziom wody będzie na wysokości górnej krawędzi otworu — a po drugiej stronie otworu zapewnimy strumieniowi odpływ swobodny. Stawiamy w pogrodzie lub strumyku przegrodę, w której wywiercono poziomy szereg otworów calowej średnicy (w razie potrzeby i $^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_8$ cala średnicy) i podpieramy przegrodą zwierciadło wody. Zatykamy następnie korkami tyle otworów, aby przez pozostałe odpływała właśnie taka ilość wody, przy której podparte zwierciadło wody stale by się trzymało dokładnie na poziomie górnych krawędzi otworów. Każdy otwór calowy, przez który płynie natenczas pełny strumień, przy możliwie małem ciśnieniu, przepuszcza ilość wody równą jednemu calowi wodnemu. Jeden **cal wodny angielski** równa się 10,53 l/min. czyli 15,16 m^3/dobę.

Cal wodny jednakże nie przedstawia dogodnej jednostki; pomiary jego są bowiem wielce niepewne, ponieważ sposób obrobienia krawędzi otworu i małe chybienie w wysokości poziomu oddziaływają już bardzo dotkliwie na wielkość przepływu Q.

3. Do przewodów rurowych, jako też do mniejszych potoków, strumyków i pogródek, można stosować **sposób pomiarów Brauer'a**

i **Hansena** *), polegający na podziale całej ilości przepływu Q na dwie bardzo nierówne części. Wodę odprowadzamy przez dwa starannie wygładzone i zaokrąglone wyloty (p. rys. 172 na str. 245) o jednakowych spółczynnikach wypływu $\mu \sim 0{,}99$, lecz bardzo nierównych średnicach przelotu. Wyloty ustawiamy pionowo pod jednakowem ciśnieniem, i wypuszczając wodę z większego wylotu swobodnie, mierzymy w podstawionem naczyniu tylko wypływ wylotu mniejszego, gdy wysokość ciśnienia, a zatem i wielkość wypływu już się ustali. Niemierzony wypływ wylotu większego obliczamy bez trudu, w danych bowiem warunkach ilości wypływów z obydwu wylotów pozostają w stosunku prostym do wielkości ich przekrojów.

Mniejsze ilości wody Q w l/sek. można oznaczyć, **ważąc** je w naczyniach.

VII. MECHANIKA GAZÓW I PAR.

(Jako zastosowanie mechanicznej teoryi ciepła, patrz str. 324).

A. Wiadomości ogólne.

Wszystkie gazy (pary) można doprowadzić do stanu ciekłego przez stosowne zwiększanie ciśnienia i obniżanie temperatury.

Dla każdego gazu istnieje jednak pewna temperatura, t. zw. **temperatura krytyczna**, będąca granicą możności jego skroplenia; przy temperaturach wyższych ponad krytyczną wszelakie zwiększenie ciśnienia nie doprowadzi gazu do stanu ciekłego. Temperatura krytyczna dla kwasu siarkawego wynosi np. $+156^0$, dla amoniaku $+131^0$, dla bezwodnika węglowego (kwasu węglanego) $+31{,}3^0$, dla tlenu -118^0, dla azotu -146^0, dla powietrza -140^0. **)

Parę dowolnej cieczy zwiemy **nasyconą**, jeżeli, przy zachowaniu pozostałych warunków bez zmiany, nieskończenie małe obniżenie jej temperatury już wystarcza do tego, by para zaczęła się skraplać, **przegrzaną** zaś, jeżeli jej skroplenie wymaga pewnego, skończonego obniżenia temperatury. Silnie przegrzane pary nazywają się **gazami**.

Ciśnienie gazów i par **określamy** wysokością słupa wody w milimetrach (lub metrach), słupa rtęci w mm, albo też stosunkami kg/m^2, kg/cm^2, funt/cal^2, wreszcie wyrażamy je w atmosferach. ***)

1 atm. metryczna †) . . $= 1$ **kg/cm**$^2 = 735{,}51$ mm sł. rt. $= 27{,}171$ cali paryskich sł. rt. $= 30{,}646$ cali

*) Zeitschr. d. V. d. Ing. 1892, str. 1493 i 1610.

**) Szczegóły p. Zeitschr. d. V. d. Ing. 1896, str. 681.

***) W dalszym ciągu oznacza „sł. wod.“ lub „sł. w.“ w skróceniu **wysokość słupa wodnego**, „sł. rt.“ **słup rtęci**. Ciężar właściwy rtęci przy 0° przyjęto wszędzie $\sigma = 13{,}596$. Dokładniej jest $\sigma = 13{,}5956$.

†) Skrócenie „atm.“ oznacza w dalszym ciągu stale **atmosferę metryczną**.

nowopolsk. sł. rt. = 28,958 cali ang.
sł. rt. = 28,122 cali prusk. sł. rt.
= 10,0 m sł. w.
= 15,753 funt. ros./cal²
= 14,223 funt. ang./cal²
= 13,681 funt. prusk./cal²
= 0,967777 dawnych atmosfer.

1 dawna atmosfera . . = **760 mm sł. rt.** = 28,075 cali parysk. sł. rt. = 31,667 cali nowopolsk. sł. rt. = 29,922 cali ang. sł. rt. = 29,058 cali prusk. sł. rt. = 1,033296 kg/cm²
= 10,333 m sł. w.
= 16,277 funt. ros./cal²
= 14,696 funt. ang./cal²
= 14,136 funt. prusk./cal²
= 1,033296 atm. metrycznej.

$$1 \text{ mm sł. w.} = \frac{1}{13{,}596} = 0{,}073551 \text{ mm sł. rt.}$$

1 mm sł. rt. = 13,596 mm sł. w. = 0,0013596 atm. metr.
= 0,0013158 dawnej atmosfery.

Do zamiany mm sł. rt. na atm. metryczne można posługiwać się tablicą na str. 286 i 287, rubryką 1-szą i 2-gą.

Średni stan barometru przy temperaturze 0° i dla wzniesienia się ponad poziom morza:

0	100	200	300	400	500	m
wynosi: 760	750,6	741,2	732,0	722,9	713,9	mm sł. rt.

Przy temperaturze 0° i $n \cdot 100$ m wzniesienia ponad poziom morza, średni stan barometru jest w przybliżeniu: $760 \cdot 0{,}987\,567^n$ mm sł. rt., przyczem log. 760 = 2,880 813 6. log 0,987 567 = 0,994 566 6 — 1. Szczegóły w dziale dziewiątym: Pomiary barometryczne wysokości.

B. Równania stanu.

a. Równania stanu gazów i par przegrzanych.

Prawo Mariotte'a i Gay-Lussac'a.

Jest ono dostatecznie ścisłe dla gazów, znajdujących się w stanie dalekim od punktu skroplenia.

I. Jeżeli dla danego stanu gazu oznacza:

p ciśnienie w kg/m² (prężność właściwą),
v objętość 1 kg gazu w m³ (objętość właściwą),
$\gamma = 1 : v$ wagę 1 m³ gazu w kg (gęstość),
t temperaturę, $T = a + t$ **temperaturę bezwzględną** przyczem $\frac{1}{a} = \alpha$

jest spółczynnikiem rozszerzalności gazu; jeżeli nadto p_1, v_1, γ_1, t_1, T_1 będą wartościami ilości p, v, γ, t, T dla dowolnego innego stanu tegoż gazu, to podług Mariotte'a i Gay-Lussac'a będzie:

$$\frac{pv}{p_1 v_1} = \frac{1+\alpha t}{1+\alpha t_1} = \frac{\frac{1}{\alpha}+t}{\frac{1}{\alpha}+t_1} = \frac{a+t}{a+t_1} = \frac{T}{T_1};$$

a zatem: $\frac{pv}{T} = \frac{p_1 v_1}{T_1} = \text{stałej} = R$, albo $pv = RT = \frac{p}{\gamma}$ . . . I.

Spółczynnik rozszerzalności dla wszystkich gazów i przy wszelkich temperaturach jest prawie stałym (por. str. 316):

$$\alpha = 0{,}003665 = \frac{1}{273}; \qquad \text{a zatem } a = \frac{1}{\alpha} = 273.$$

2. W bliskości punktu skroplenia wartość α różni się mniej lub więcej od wartości powyżej podanej, a prawo Mariotte'a i Gay-Lussac'a daje wówczas tylko przybliżenie zgodne wartości, ponieważ R przestaje być stałem. Porównaj dane Dühring'a na str. 278.

Liczby wyróżnione drobniejszym drukiem w tablicy poniższej, są wartościami średniemi dla R przy różnych stanach gazu.

Gaz lub para	Stała R	γ przy 760 mm sł. rt. i $t=0^o$	γ przy $p=1$ kg/cm² i $t=0^o$	Ciężkość właściwa, jeżeli ciężkość właściwa suchego powietrza = 1	Stosunek cieplików właściwych *) $n = c_p : c_v$
	kgm/kg	kg/m³	kg/m³	przy 0°	przy 0°
Powietrze suche .	29,27	1,2932**)	1,2515	1,0000	1,41
Powietrze średnio wilgotne . . .	29,4	1,2874	1,2459	0,9955	1,41
Tlen	26,47	1,4298	1,3837	1,1056	1,40
Azot	30,13	1,2562	1,2157	0,9714	1,41
Wodór	422,59	0,08957	0,08668	0,06927	1,41
Tlenek węgla . .	30,26	1,2509	1,2106	0,9673	1,41
Para wodna . . .	46,95	0,8062	0,7802	0,6233	1,30
Amoniak	52,64	0,7655	0,7408	0,5920	1,30
Bezwodnik węglowy .	19,20	1,9774	1,9136	1,5291	—

Dla **przegrzanej pary wodnej** G. Schmidt (na zasadzie doświadczeń Hirn'a) do prawa Mariotte'a i Gay-Lussac'a podał następujące dane dokładniejsze:

$$a = 263 \quad \text{i} \quad R = 46{,}83.$$

Zeuner zaleca dla przegrzanej pary wodnej wzór:

$$pv = 50{,}9\,T - 192{,}5\,\sqrt[4]{p}.$$

a dla **przegrzanej pary amoniaku:**

$$pv = 52{,}642\,T - 29{,}783\,p^{0{,}3655}.$$

*) Porówn. Dział trzeci: Ciepło, rozdział: cieplik właściwy, str. 316.

**) Dla powietrza suchego z uwzględnieniem wartości Regnault'a $\gamma = 1{,}293187$ kg/m³ (przy 0° i 760 mm sł. rt.) będzie dokładniej: $R = 29{,}26853$ kgm/kg, a $\log R = 1{,}4664009$.

Dla bezwodnika węglowego (kwasu węglanego)w stanie gazowym wystarcza wogóle prawo Mariotte'a i Gay-Lussac'a; dokładniejsze wyniki daje jednakże wzór Clausius'a (podług doświadczeń Andrews'a): *)

$$p = \frac{0{,}003688\,T}{v - 0{,}000843} - \frac{2{,}0935}{T(v + 0{,}000977)^2}.$$

3. Przypadki szczególne.

Jeżeli w równaniu $vp = RT$ założymy, że prężność właściwa p jest stałą, to otrzymamy **prawo Gay-Lussac'a:**

$$v = T \cdot \text{stała},$$

z którego: $\frac{v}{v_1} = \frac{T}{T_1}$ lub $\frac{v}{v_1} = \frac{1 + \alpha t}{1 + \alpha t_1}$,

t. zn. przy stałych ciśnieniach objętości gazów zmieniają się w stosunku prostym do temperatur bezwzględnych.

Z założenia $T =$ stałej wynika **prawo Mariotte'a:**

$$pv = \text{stałej}, \quad \text{czyli} \quad \frac{v}{v_1} = \frac{p_1}{p},$$

t. zn. przy stałej temperaturze objętości gazów są odwrotnie ustosunkowane do ciśnień.

Podług Dühring'a, **) przy zwiększeniu ciśnienia lub obniżeniu temperatury gazu zmniejsza się jedynie w odpowiednim stosunku przestrzeń międzycząsteczkowa, podczas gdy objętości cząsteczek pozostają niezmienne przy wszelakiem ciśnieniu i temperaturze. **Prawo Mariotte-Dühring'a** wyraża się więc wzorem:

$$\frac{v - x}{v_1 - x} = \frac{p_1}{p},$$

w którym x oznacza objętość cząsteczek w stosunku do całkowitej objętości v_0 gazu przy ciśnieniu 1 atm. Prawo to sprawdza się najdokładniej przy wysokich ciśnieniach, kiedy objętość cząsteczek stanowi już znaczną część ogólnej objętości gazu, a przyciągające siły międzycząsteczkowe, przeciwdziałające rozszerzaniu się gazu pod wpływem prężności spowodowanej przez ciepło, stają się bardzo małemi w porównaniu z ową prężnością. Dla wodoru $x \infty {}^1/_{1600}\, v_0$ do ${}^1/_{2000}\, v_0$, dla tlenu $x \infty {}^1/_{1300}\, v_0$, a dla azotu $x \infty {}^1/_{910}\, v_0$.

Jeżeli prawo Gay-Lussac'a zastosujemy wyłącznie do przestrzeni międzycząsteczkowych, to spółczynnik rozszerzalności α będzie podług Dühring'a stałym.

4. Właściwości stałej R. Prawo Dalton'a.

Stałe R dla rozmaitych gazów pozostają w stosunku odwrotnym do ich wag cząsteczkowych, jakoteż do ich gęstości:

$$\frac{R}{R_1} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} = \frac{\gamma_1}{\gamma};$$

*) Zeitschr. d. Vereins d. Ing. 1886, str. 110, gdzie podano zbiór wartości p.

**) E. Dühring: „Neue Grundsätze zur rationellen Physik und Chemie". Lipsk 1878 i 1886, oraz Zeitschr. d. V. d. Ing. 1895, str. 227.

ε i ε_1 oznaczają wagi cząsteczkowe, zaś γ i γ_1 gęstości odpowiadające gazowi ze stałą R lub R_1.

Dla **mieszanin gazów** stałą R określamy wzorem:

$$R_m = \frac{\Sigma(RG)}{\Sigma(G)} \quad \ldots\ldots\ldots \text{II},$$

w którym G oznacza poszczególne wagi, R zaś stałe rozmaitych gazów, wchodzących w skład mieszaniny; równanie stanu dla mieszanin gazów będzie zatem:

$$pv = \frac{\Sigma(RG)}{\Sigma(G)} T = R_m T.$$

Jest to **prawo Dalton'a**, które orzeka:

Ciśnienie właściwe mieszaniny gazów równa się sumie poszczególnych ciśnień właściwych, jakieby wywierały oddzielne gazy, w skład mieszaniny wchodzące, gdyby każdy z nich sam zajmował przestrzeń równą całej przestrzeni zajętej przez mieszaninę. *)

Przykład. Oznaczyć stałą gazów odchodnych **silnicy gazowej** następującego składu na wagę:

Bezwodnika (kwasu) węglowego 11%, pary wodnej 9%, tlenu 6%, azotu 74%.

Podług tablicy, str. 277 otrzymamy:

$$R_m = \frac{19{,}20 \cdot 11 + 46{,}95 \cdot 9 + 26{,}47 \cdot 6 + 30{,}13 \cdot 74}{100} = 30{,}22 \text{ kgm/kg},$$

a po skropleniu pary wodnej:

$$R_m = \frac{19{,}20 \cdot 11 + 26{,}47 \cdot 6 + 30{,}13 \cdot 74}{91} = 28{,}57 \text{ kgm/kg}.$$

5. Ciężkość, objętość, gęstość i wilgotność powietrza.

Ciężkości właściwe gazów i par przy $t = 0°$ i przy ciśnieniu 760 mm sł. rt., p. tabl. str. 277 i Dział VIII: Materyały.

Waga 1 m³ **gazu** lub **mieszaniny gazów**, przy znanem ciśnieniu właściwem p, oraz temperaturze t, wynosi w kg:

$$\gamma = \frac{p}{RT} = \frac{p}{R(273 + t)},$$

o ile p podane w kg/m².

Jeżeli zaś ciśnienie p' jest wyrażone w mm sł. rt., to:

$$\gamma = 13{,}596 \frac{p'}{RT} = 13{,}596 \frac{p'}{R(273 + t)}.$$

Waga G (w kg) **suchego powietrza** objętości V m³, o temperaturze $t°$, będzie zatem:

$$G = 0{,}034166 \frac{pV}{273 + t}, \quad \text{albo} \quad G = 0{,}464526 \frac{p'V}{273 + t}.$$

Jeżeli przytem $p = 10000$ kg/m² $= 1$ metrycznej (nowej) atm., a $p' = 760$ mm sł. rt. $= 1$ dawnej atmosferze, to:

$$G = \frac{1{,}251516}{1 + \alpha t} V, \text{ względnie } G = \frac{1{,}293187}{1 + \alpha t} V.$$

*) Zeitschr. d. V. d. Ing. 1895, str. 228.

Do **powietrza wilgotnego**, jako do mieszaniny powietrza i pary wodnej, stosować należy wzór II dla mieszanin gazów (p. str. 279.)

Przykład. Ile waży 1 m³ powietrza wilgotnego z 4% na wagę wody, przy temperaturze 50° i 750 mm ciśnienia barometrycznego? Podług wzoru II na str. 279 i tabl. na str. 277 będzie:

$$R_m = \frac{4 \cdot 46{,}95 + 96 \cdot 29{,}27}{100} = 29{,}08 \text{ kgm/kg.}$$

a więc: $$\gamma = 13{,}596 \frac{750}{29{,}08\,(273 + 50)} = 1{,}053 \text{ kg.}$$

Dla obliczeń szacunkowych powietrza średnio wilgotnego wystarczy wzór:

$$\gamma = 1{,}3 - 0{,}004\,t \text{ kg/m}^3.$$

Waga G (w kg) powietrza, objętości V m³, nasyconego parą wodną, przy temperaturze t^0, prężności pary p_1 mm sł. rt. i ciśnieniu powietrza p' mm sł. rt. będzie:

$$G = \frac{1{,}2932\,(p' - 0{,}377\,p_1)}{(1 + \alpha t)\,760}\,V.$$

Powietrze wilgotne jest zatem zawsze l ż e j s z e od suchego.

Ilość kg pary wodnej, zawartej w 1 m³, względnie w 1 kg powietrza nasyconego, przy $p' = 760$ mm sł. rt. i temperaturze t^0, jeżeli p_1 oznacza prężność pary w mm sł. rt., będzie:

$$w' = \frac{0{,}00106\,p_1}{1 + \alpha t}, \quad \text{względnie } w'' = \frac{0{,}00106\,p_1}{1{,}2932}.$$

Jeżeli 1 m³ powietrza, któryby przy t^0 w stanie nasyconym zawierał w kg wody, ma tylko $z^0/_0$ tej wilgoci, to, po jego ogrzaniu do temperatury $t_1{}^0$, przy której do nasycenia potrzebaby w_1 kg wody, powietrze będzie miało procent nawilżenia:

$$z_1 = \frac{z\,w\,(1 + \alpha t)}{w_1\,(1 + \alpha t_1)}.$$

Jeżeli naodwrót przy ochłodzeniu wypadnie $z_1 > 100$, to powietrze będzie przesycone wilgocią, skutkiem czego nadmiar pary wodnej w ilości $(z_1 - 100)^0/_0$ ulegnie skropleniu.

Nawilżeniem bezwzględnem powietrza nazywamy wagę wody, zawartej w jednostce objętości powietrza, a wyrażamy ją zazwyczaj w g/m³. **Nawilżeniem względnem** powietrza jest stosunek ilości wody istotnie w powietrzu zawartej do ilości, jaką się powietrze w danej temperaturze zupełnie nasyca. Stokrotnie wzięte nawilżenie względne oznacza nam s t o p i e ń n a w i l ż e n i a w procentach.

Tablice I, II i III na str. 281 i 282 ułatwiają stosowanie wzorów powyższych.

W tablicy II podano objętości właściwe $v = 1 : \gamma$ dla powietrza średnio nawilżonego przy rozmaitych temperaturach t i stanach barometru p'.

Wartości β w tablicy III wyrażają stosunek ciężkości właściwej powietrza średnio nawilżonego, przy rozmaitych temperaturach t i sta-

(Ciąg dalszy na str. 283.)

Tablica I. Waga, gęstość i zawartość wilgoci powietrza. *)

Temperatura w stopn.	Waga suchego powietrza przy 760 mm sł. rt. w kg/m³	Stosunek objętości suchego powietrza przy t^0 i przy 0^0	Stosunek ciężkości suchego powietrza przy t^0 i przy 0^0	Zawartość wody w powietrzu nasyconem w kg/m³	Zawartość wody w powietrzu nasyconem w kg/kg	Prężność pary wodnej w mm sł. rt.
t	γ	$1+\alpha t$	$\frac{1}{1+\alpha t}$	w'	w''	p_t
— 20	1,3955	0,9267	1,0791	0,001060	0,00076	0,927
— 18	1,3845	0,9340	1,0706	0,001267	0,00091	1,116
— 16	1,3738	0,9414	1,0623	0,001473	0,00107	1,308
— 14	1,3631	0,9487	1,0541	0,001731	0,00127	1,549
— 12	1,3527	0,9560	1,0460	0,002028	0,00149	1.831
— 10	1,3424	0,9634	1,0380	0,002303	0,00171	2,093
— 8	1,3323	0,9707	1,0302	0,002680	0,00201	2.455
— 6	1,3223	0,9780	1,0225	0,003117	0,00235	2,876
— 4	1,3124	0,9853	1,0149	0,003623	0,00276	3,368
— 2	1,3027	0,9927	1,0074	0,004209	0,00323	3,941
0	1,2932	1,0000	1.0000	0,004876	0,00377	4,600
+ 2	1,2838	1,0073	0,9927	0,005580	0,00438	5,302
4	1,2748	1,0147	0,9856	0,006370	0,00498	6.097
6	1,2654	1,0220	0,9785	0,007259	0,00573	6,998
8	1,2564	1,0293	0,9715	0,008257	0,00657	8,017
10	1,2475	1,0367	0,9647	0,009372	0,0075	9,165
12	1,2387	1,0440	0,9579	0,010618	0,0085	10,457
14	1,2301	1,0513	0,9512	0,012007	0,0097	11,908
16	1,2216	1,0587	0,9446	0,013554	0,0112	13,536
18	1,2131	1,0660	0,9381	0,015270	0,0127	15,357
20	1,2049	1,0733	0,9317	0,017177	0,0144	17,391
22	1,1967	1,0806	0,9254	0,019286	0,0163	19,659
24	1,1888	1,0880	0,9192	0,021617	0,0184	22,184
25	1,1847	1,0916	0,9161	0,022870	0,0195	23,550
26	1,1807	1,0953	0,9130	0,024168	0,0207	24,988
28	1,1728	1,1026	0,9069	0,027016	0,0234	28,101
30	1,1650	1,1100	0,9009	0,030130	0,0263	31,548
32	1,1574	1,1173	0,8950	0,033548	0,0295	35,359
34	1,1497	1,1246	0,8892	0,037288	0,0331	39,565
36	1,1424	1,1319	0,8834	0,041393	0,0370	44,201
38	1,1352	1,1393	0,8778	0,045878	0,0414	49,302
40	1,1279	1,1466	0,8722	0,050766	0,0463	54,906
42	1,1208	1,1539	0,8667	0,056096	0,0516	61,055
44	1,1136	1,1613	0,8611	0,061881	0,0575	67,790
46	1,1066	1,1686	0,8557	0,068176	0,0640	75,158
48	1,0997	1,1759	0,8504	0,075008	0,0711	83,204
50	1,0929	1,1833	0,8451	0,082404	0,0790	91,980
52	1,0862	1,1906	0,8399	0,090410	0,0877	101,543
54	1,0795	1,1979	0,8348	0,099067	0,0972	111,945
56	1,0730	1,2052	0.8297	0,108399	0,1076	123,244
58	1,0665	1,2126	0,8247	0,118465	0,1191	135,505
60	1,0600	1,2199	0,8197	0,129292	0,1317	148,786
65	1,0444	1,2382	0,8076	0,160348	0,1689	186,938
70	1,0291	1,2566	0,7958	0,196640	0,2161	233.082
75	1,0144	1,2749	0,7844	0,239910	0,2760	288.500
80	1,0000	1.2932	0,7733	0.290723	0,3528	354,616
85	0,9861	1,3115	0.7625	0,350033	0,4521	433,002
90	9.9725	1,3299	0.7520	0,418832	0,5825	525,392
95	0,9593	1,3482	0,7418	0.498317	0,7576	633,692
100	0,9464	1,3665	0,7318	0,5895S5	1,0000	760,000

*) Podług Rietschel, Lüftungs und Heizungs-Anlagen. II wyd., Berlin 1894, J. Springer.

Tablica II. Objętości właściwe v średnio wilgotnego powietrza.
(Objętość 1 kg powietrza w m^3).

p' mm sł. rt.	$t =$									
	-10^0	-5^0	0^0	$+5^0$	10^0	15^0	20^0	25^0	30^0	35^0
800	0,711	0,724	0,738	0,751	0,765	0,778	0,792	0,805	0,819	0,832
790	0,720	0,733	0,747	0,761	0,774	0,788	0,802	0,815	0,829	0,843
780	0,729	0,743	0,757	0,770	0,784	0,798	0,812	0,826	0,840	0,854
770	0.738	0,752	0,766	0,781	0,795	0,809	0,823	0,837	0,851	0,865
760	0,748	0.762	0,777	0,791	0,805	0,819	0,833	0,848	0,862	0,876
750	0,758	0,773	0,787	0,801	0,816	0,830	0,845	0,859	0,873	0,888
740	0,768	0,783	0,798	0,812	0,827	0,841	0,856	0,871	0,885	0,900
730	0,779	0,794	0,808	0,823	0,838	0,853	0,868	0,883	0,897	0,912
720	0.790	0.805	0,820	0,835	0,850	0,865	0,880	0,895	0,910	0,925
710	0.801	0,816	0,831	0,847	0,862	0,877	0,892	0,907	0,923	0,938
700	0,812	0.826	0,843	0,859	0,874	0,889	0,905	0,920	0,936	0.951
690	0.824	0,840	0,855	0,871	0,887	0,902	0,918	0,934	0,949	0,965
680	0,836	0 852	0,868	0,884	0,900	0,916	0,932	0,947	0,963	0,979
670	0,849	0,865	0,881	0,897	0,913	0,929	0,945	0,962	0 978	0,994
660	0,861	0,878	0,894	0,911	0,927	0,943	0,960	0,976	0,993	1.009
650	0,875	0.891	0,908	0,925	0,941	0,958	0,975	0,991	1,008	1,024
640	0,888	0,905	0,922	0,939	0,956	0,973	0,990	1,007	1,024	1,040

Tablica III. Wartości stosunku β dla średnio wilgotnego powietrza

p' mm sł. rt.	$t =$									
	-10^0	-5^0	0^0	$+5^0$	10^0	15^0	20^0	25^0	30^0	35^0
800	1,093	1,072	1,053	1,034	1,015	0,998	0,981	0,964	0,949	0,933
790	1,079	1,059	1,039	1,021	1,003	0,985	0,969	0,952	0,937	0,921
780	1,065	1,045	1,026	1,008	0,990	0,973	0,956	0,940	0,925	0,910
770	1,052	1,032	1,013	0,995	0,977	0,960	0,944	0,928	0,913	0,898
760	1,038	1,019	1,000	0,982	0,965	0,948	0,932	0,916	0,901	0,886
750	1,024	1,005	0,987	0,969	0,952	0,935	0,920	0,904	0,889	0,875
740	1,011	0,992	0,974	0,956	0,939	0,923	0,907	0,892	0,877	0,863
730	0,997	0,978	0,961	0,943	0,927	0,911	0,895	0,880	0,865	0,851
720	0,983	0,965	0,947	0,930	0,914	0,898	0,883	0,868	0,854	0,840
710	0,970	0,952	0,934	0,917	0,901	0,886	0,870	0,856	0,842	0,828
700	0,956	0,938	0,921	0,905	0,889	0,873	0,858	0,844	0,830	0,816
690	0,942	0,925	0,908	0,892	0,876	0.861	0,846	0,832	0,818	0,805
680	0.929	0,911	0,895	0,879	0,863	0,848	0,834	0,820	0,806	0,793
670	0,915	0,898	0,882	0,866	0,850	0,836	0,821	0,808	0,794	0,781
660	0,901	0,885	0,868	0,853	0,838	0,823	0,809	0,796	0,782	0,770
650	0,888	0,872	0,855	0,840	0,825	0,811	0,797	0,784	0,771	0,758
640	0,874	0,858	0,842	0,827	0,812	0,798	0,785	0,771	0,759	0,746

nach barometru p', do ciężkości właściwej takiegoż powietrza przy 0^0 i stanie barometru 760 mm. Dalsze dane dla powietrza średnio nawilżonego znajdują się w tablicy na str. 277.

b. Równania stanu par nasyconych.

1. Wiadomości ogólne.

Ciśnienie par nasyconych jest niezależne od objętości właściwej, jest ono zatem wyłącznie funkcyą temperatury:

$$p = f(t),$$

która to funkcya jest jednakże nader zawiła. Z doświadczeń Regnault'a wyprowadzono wiele wzorów, z których najbardziej używanym jest wzór Biot'a:

$$\log p = a + b\alpha^{t-t_0} + c\beta^{t-t_0}.$$

We wzorze tym a, b, c, α, β, t_0 są stałe; t_0 oznacza dowolnie obraną temperaturę, odpowiadającą najniższemu ciśnieniu danego szeregu doświadczeń.

Zazwyczaj jednak używa się tablic obliczonych na podstawie powyższego lub pokrewnego wzoru (por. tablice 286 do 288, obliczone na podstawie wzoru powyższego).

Oprócz znaków p, v, γ, t, T, objaśnionych już na str. 276, oznaczymy dodatkowo przez:

A równoważnik cieplikowy jednostki pracy $= \frac{1}{428}$ cpł./kgm *) (por. w Dziale trzecim: mechaniczną teoryę ciepła, str. 324),

q **cieplik cieczy** w cpł./kg., t. j. ilość ciepła, potrzebną do ogrzania jednego kg cieczy z 0^0 do t^0, bez zmiany jej stanu skupienia. Ciśnienie zewnętrzne jest w danym razie obojętne, ponieważ wobec stosunkowo nader nieznacznej rozszerzalności cieczy, pominąć można pracę zewnętrzną,

c **cieplik właściwy** cieczy,

r **cieplik parowania** w cpł./kg, zwany też ciepłem **utajonem**; jest to ilość ciepła, potrzebna do przemiany 1 kg cieczy o temperaturze t^0 na parę tejże samej temperatury pod stałem ciśnieniem zewnętrznem,

λ **cieplik całkowity**, t. j. ogólną ilość ciepła w cpł./kg, czyli sumę cieplika cieczy i cieplika parowania; przypuszczamy, iż ciecz o temperaturze 0^0 odrazu podlega już ciśnieniu, odpowiadającemu temperaturze t^0 i że pod tem ciśnieniem ogrzewa się ona naprzód do t^0, a potem dopiero przemienia się w parę temperatury t^0,

ϱ **wewnętrzny cieplik parowania** w cpł./kg, t. j. tę część cieplika parowania, która się zużywa na powiększenie ciepła wewnętrznego,

*) Przez cpł. oznaczamy tu i poniżej **ciepłostkę** por. Dział trzeci: Ciepło, str. 316

J **cieplik pary** w cpl./kg, t. j. różnicę pomiędzy ilościami ciepła, zawartemi w 1 kg pary o t^0 i w 1 kg cieczy o 0^0,
w objętość 1 kg cieczy w m^3,
u różnicę $v - w$ w m^3/kg.

Dla **pary nasyconej** dowolna z wielkości γ (albo v) p i t określa zupełnie wszystkie pozostałe.

Wartość cieplikowa pracy, zużytej dla przezwyciężenia stałego ciśnienia zewnętrznego p przy odparowaniu jednego kg cieczy, równa się Apu. W przeciwstawieniu do ϱ nazywa się ta ilość ciepła **zewnętrznym cieplikiem parowania.**

Mamy:

$$\lambda = q + \varrho + Apu; \quad \ldots \quad 1)$$
$$r = \varrho + Apu; \quad \ldots \quad 2)$$
$$J = q + \varrho, \quad \ldots \quad 3)$$

co możemy przedstawić poglądowo:

$$\overbrace{\underbrace{q}_{J} \quad \underbrace{\varrho \quad Apu}_{r}}^{\lambda}$$

Do obliczenia ilości Apu służy **równanie Clapeyron'a:**

$$Apu = \frac{pr}{T\frac{\partial p}{\partial t}}; \quad \ldots \quad 4)$$

wartość u otrzymujemy, mnożąc powyższe wyrażenie przez $\frac{428}{p}$.

Cieplik cieczy $q = \int_0^t c \cdot dt.$ $\ldots \quad 5)$

Prężność par nasyconych w mm sł. rt.

(Podług Regnault'a).

Temperatura w stopniach t	Bezwodnik (kwas) węglowy	Amoniak	Bezwodnik (kwas) siarkawy	Eter	Alkohol
— 30	11138,62	876,28	288,04	—	—
— 20	15142,44	1397,64	473,56	68,89	3,34
— 10	20340,20	2149,28	762,28	114,69	6,47
0	26906,60	3197,32	1165,08	184,39	12,70
+ 10	34998,65	4612,44	1719,88	286,83	24,23
20	44716,58	6466,84	2461,73	432,78	44,60
30	56179,05	8832,72	3431,40	634,80	78,52
40	—	11748,84	4672,20	907,04	133,69
60	—	—	—	1725,01	350,21
80	—	—	—	3022,79	812,91
100	—	—	—	4953,30	1697,55
120	—	—	—	7719,20	3231,73

2. Zastosowanie do nasyconej pary wodnej.

Cieplik właściwy wody o t^0 jest podług Regnault'a:

$$c = 1 + 0{,}00004\,t + 0{,}0000009\,t^2, \text{ *)}$$

a zatem cieplik cieczy będzie:

$$q = \int_0^t c \cdot dt = t + 0{,}00002\,t^2 + 0{,}0000003\,t^3.$$

Cieplik całkowity pary wodnej jest podług Regnault'a:

$$\lambda = 606{,}5 + 0{,}305\,t,$$

a wewnętrzny cieplik parowania otrzymujemy z wzoru:

$$\varrho = \lambda - q - Apu.$$

A że w możemy uważać za, w przybliżeniu, niezależne od temperatury, czyli za stałe i równe 0,001, więc:

$$v = u + 0{,}001$$

i

$$\gamma = \frac{1}{u + 0{,}001}.$$

Równania powyższe, łącznie z podanemi pod **1.** (str. 283) równaniami ogólnemi, wystarczają do obliczenia wartości zestawionych w tablicach na str. 286 i następnych.

Ponieważ obliczanie wartości Apu z równania Clapeyron'a jest mozolne z powodu zawiłości funkcyi $p = f(t)$, więc Zeuner ułożył poniższy wzór empiryczny:

$$\varrho = 575{,}40 - 0{,}791\,t;$$

a zatem: $$Apu = \lambda - \varrho - q = 31{,}10 + 1{,}096\,t - q;$$

$$\gamma = 0{,}5877\,p^{0{,}9393},$$

w którym to wzorze p oznacza ciśnienie w kg/cm².

C. Zmiany w stanach.

a. Wiadomości ogólne.

1. Oprócz znakowań, podanych na str. 276, wprowadzamy jeszcze:

Q, ilość ciepła, przybywająca do jednego kg gazu albo pary przy ich zmianie stanu (cpł./kg),

L, praca zewnętrzna, wykonana przy tej zmianie stanu (kgm/kg),

U, praca wewnętrzna, zawarta w kilogramie gazu, pary lub mieszaniny pary z cieczą (kgm/kg),

$AU = {}^1/_{428}\,U$, wartość cieplikowa tej pracy w cpł./kg (porównaj: Mechaniczną teoryę ciepła str. 324),

x, ilość pary zawartej w jednym kg mieszaniny cieczy i pary, t. zw. ilość właściwą pary,

*) W obliczeniach technicznych przyjmują często c = stała = 1,0224.

(Ciąg dalszy na str. 289.)

Tablica dla nasyconej pary wodnej *)

Prężność w Atm. metrycznych kg/cm² p	Prężność w mm sł. rt. p_1	Temperatura w stopniach t	Ciepłik cieczy w cyl. q	Wewnętrzny ciepłik parowania w cyl. ϱ	Zewnętrzny ciepłik parowania w cyl. Apu	Różnica objętości właściwych pary i wody w m³/kg $w=v-w$	Wartość ilości $\frac{\varrho}{u}$	Waga pary w kg/m³ $\gamma=\frac{1}{v}$
0,10	73,6	45,58	45,649	539,634	35,119	15,0309	35,90	0,0665
0,20	147,1	59,76	59,890	528,347	36,488	7,8084	67,66	0,1281
0,30	220,7	68,74	68,934	521,175	37,357	5,3296	97,79	0,1876
0,40	294,2	75,47	75,710	515,808	37,999	4,0659	126,86	0,2459
0,50	367,8	80,90	81,189	511,476	38,509	3,2964	155,17	0,3033
0,60	441,3	85,48	85,818	507,826	38,929	2,7769	182,88	0,3600
0,70	514,9	89,47	89,844	504,659	39,285	2,4020	210,09	0,4161
0,80	588,4	93,00	93,427	501,847	39,592	2,1182	236,93	0,4719
0,90	662,0	96,19	96,639	497,337	39,861	1,8956	263,41	0,5273
1,00	735,5	99,09	99,576	497,048	40,098	1,7162	289,62	0,5823
1,10	809,1	101,76	102,281	494,899	40,356	1,5702	315,18	0,6365
1,20	882,6	104,24	104,792	492,934	40,566	1,4469	340,69	0,6907
1,30	956,2	106,55	107,138	491,098	40,761	1,3420	365,95	0,7446
1,40	1029,7	108,72	109,339	489,378	40,942	1,2517	390,98	0,7983
1,50	1103,3	110,76	111,416	487,756	41,111	1,1730	415,80	0,8518
1,60	1176,8	112,70	113,382	486,221	41,270	1,1040	440,43	0,9050
1,70	1250,4	114,54	115,252	484,762	41,420	1,0428	464,86	0,9580
1,80	1323,9	116,29	117,032	483,375	41,561	0,9882	489,12	1,0109
1,90	1397,5	117,97	118,837	481,955	41,688	0,9391	513,23	1,0637
2,00	1471,0	119,57	120,369	480,776	41,824	0,8950	537,16	1,1161
2,10	1544,6	121,11	121,935	479,557	41,946	0,8549	560,95	1,1684
2,20	1618,1	122,59	123,443	478,385	42,062	0,8183	584,61	1,2206
2,30	1691,7	124,02	124,897	477,254	42,174	0,7848	608,12	1,2726
2,40	1765,2	125,39	126,301	476,163	42,281	0,7540	631,51	1,3245
2,50	1838,8	126,73	127,658	475,109	42,384	0,7256	654,76	1,3763
2,60	1912,3	128,02	128,972	474,090	42,483	0,6993	677,90	1,4280
2,70	1985,9	129,26	130,246	473,101	42,579	0,6750	700,94	1,4793
2,80	2059,4	130,48	131,483	472,141	42,671	0,6523	723,86	1,5307
2,90	2133,0	131,65	132,684	471,210	42,760	0,6311	746,68	1,5820
3,00	2206,5	132,80	133,853	470,304	42,846	0,6113	769,40	1,6332
3,10	2280,1	133,91	134,992	469,422	42,929	0,5927	792,00	1,6843
3,20	2353,6	135,00	136,102	468,563	43,010	0,5753	814,53	1,7352
3,30	2427,2	136,06	137,183	467,726	43,088	0,5588	836,96	1,7864
3,40	2500,7	137,09	138,239	466,908	43,165	0,5434	859,30	1,8369
3,50	2574,3	138,10	139,271	466,111	43,238	0,5287	881,53	1,8879
3,60	2647,8	139,08	140,279	465,331	43,311	0,5149	903,70	1,9384
3,70	2721,4	140,05	141,265	464,569	43,381	0,5018	925,79	1,9889
3,80	2794,9	140,99	142,230	463,824	43,449	0,4894	947,79	2,0392
3,90	2868,5	141,92	143,175	463,093	43,516	0,4776	969,72	2,0894
4,00	2942,0	142,82	144,102	462,377	43,581	0,4663	991,55	2,1400
4,10	3015,6	143,71	145,010	461,677	43,644	0,4556	1013,3	2,1901
4,20	3089,1	144,58	145,901	460,989	43,706	0,4454	1035,0	2,2401
4,30	3162,7	145,43	146,775	460,315	43,766	0,4356	1056,7	2,2904
4,40	3236,2	146,27	147,663	459,653	43,825	0,4263	1078,2	2,3403
4,50	3309,8	147,09	148,475	459,004	43,883	0,4174	1099,8	2,3901
4,60	3383,3	147,90	149,303	458,365	43,940	0,4088	1121,2	2,4402
4,70	3456,9	148,69	150,117	457,738	43,995	0,4006	1142,6	2,4900
4,80	3530,4	149,47	150,918	457,121	44,049	0,3928	1163,9	2,5394
4,90	3604,0	150,24	151,705	456,514	44,103	0,3852	1185,0	2,5893

*) Podług Fliegner'a, Civilingenieur 1874.

Wartości kolumn u, $\frac{\varrho}{u}$ i γ przeliczono na podstawie mechanicznego równoważnika

(podług prężności wzrastającej ułożona).

Prężność w Atm. metrycznych kg/cm²	Prężność w mm sł. rt.	Temperatura w stopniach	Ciepłik cieczy w cpl.	Wewnętrzny ciepłik parowania w cpl.	Zewnętrzny ciepłik parowania w cpl.	Różnica objętości właściwych pary i wody w m³/kg	Wartość ilości	Waga pary w kg/m³
p	p_1	t	q	ϱ	Apu	$u=v-w$	$\frac{\varrho}{u}$	$\gamma=\frac{1}{v}$
5,00	3677,6	150,99	152,480	455,917	44,155	0,3780	1206,2	2,6412
5,10	3751,1	151,73	153,242	455,331	44,206	0,3710	1227,3	2,6882
5,20	3824,7	152,47	153,993	454,753	44,256	0,3643	1248,4	2,7375
5,30	3898,2	153,19	154,733	454,183	44,305	0,3578	1269,1	2,7871
5,40	3971,8	153,90	155,462	453,623	44,353	0,3515	1290,4	2,8369
5,50	4045,3	154,59	156,180	453,071	44,400	0,3455	1311,3	2,8860
5,60	4118,9	155,28	156,888	452,526	44,447	0,3397	1332,1	2,9351
5,70	4192,4	155,96	157,586	451,989	44,493	0,3341	1352,9	2,9842
5,80	4266,0	156,63	158,274	451,460	44,538	0,3287	1373,6	3,0331
5,90	4339,5	157,29	158,954	450,938	44,582	0,3234	1394,4	3,0816
6,00	4413,1	157,94	159,625	450,423	44,625	0,3183	1415,0	3,1319
6,10	4486,6	158,59	160,287	449,914	44,668	0,3134	1435,5	3,1807
6,20	4560,2	159,22	160,940	449,413	44,710	0,3086	1456,1	3,2300
6,30	4633,7	159,85	161,585	448,918	44,751	0,3040	1476,6	3,2787
6,40	4707,3	160,47	161,222	448,428	44,792	0,2995	1497,1	3,3278
6,50	4780,8	161,08	162,852	447,945	44,832	0,2952	1517,4	3,3761
6,60	4854,4	161,68	163,474	447,468	44,871	0,2910	1537,8	3,4247
6,70	4927,9	162,28	164,088	446,997	44,910	0,2869	1558,1	3,4734
6,80	5001,5	162,87	164,696	446,530	44,949	0,2829	1578,4	3,5224
6,90	5075,0	163,45	165,296	446,070	44,987	0,2790	1598,5	3,5714
7,00	5148,6	164,03	165,890	445,615	45,024	0,2753	1618,7	3,6193
7,25	5332,4	165,44	167,347	444,498	45,115	0,2663	1668,9	3,7411
7,50	5516,3	166,82	168,764	443,413	45,202	0,2580	1718,9	3,8610
7,75	5700,2	168,15	170,146	442,354	45,287	0,2501	1768,6	3,9825
8,00	5884,1	169,46	171,493	441,323	45,369	0,2427	1818,3	4,1034
8,25	6068,0	170,73	172,808	440,316	45,449	0,2358	1867,5	4,2230
8,50	6251,8	171,98	174,093	439,334	45,526	0,2292	1916,6	4,3440
8,75	6435,7	173,19	175,349	438,373	45,601	0,2231	1965,4	4,4623
9,00	6619,6	174,38	176,578	437,434	45,674	0,2172	2013,9	4,5830
9,25	6803,5	175,54	177,780	436,515	45,745	0,2117	2062,3	4,7015
9,50	6987,4	176,68	178,958	435,616	45,813	0,2064	2110,5	4,8216
9,75	7171,2	177,79	180,111	434,735	45,881	0,2014	2158,5	4,9407
10,00	7355,1	178,89	181,243	433,871	45,946	0,1966	2206,4	5,0607
10,25	7539,0	179,96	182,353	433,024	46,010	0,1921	2254,0	5,1787
10,50	7722,9	181,01	183,442	432,193	46,072	0,1878	2301,3	5,2966
10,75	7906,7	182,04	184,513	431,376	46,133	0,1837	2348,6	5,4142
11,00	8090,6	183,05	185,563	430,576	46,192	0,1797	2395,7	5,5340
11,25	8274,5	184,05	186,597	429,788	46,250	0,1760	2442,6	5,6497
11,50	8458,4	185,03	187,612	429,015	46,306	0,1723	2489,4	5,7703
11,75	8642,2	185,99	188,611	428,255	46,361	0,1689	2535,9	5,8858
12,00	8826,1	186,94	189,594	427,506	46,415	0,1655	2582,4	6,0060
12,25	9010,1	187,87	190,561	426,770	46,468	0,1624	2628,6	6,1200
12,50	9193,9	188,78	191,513	426,046	46,520	0,1593	2674,8	6,2383
12,75	9377,8	189,68	192,452	425,331	46,571	0,1563	2720,6	6,3573
13,00	9561,6	190,57	193,376	424,629	46,620	0,1535	2766,5	6,4725
13,50	9929,4	192,31	195,184	423,254	46,717	0,1481	2857,6	6,7069
14,00	10297,1	194,00	196,944	421,916	46,810	0,1431	2948,3	6,9396
14,50	10664,9	195,64	198,656	420,615	46,900	0,1384	3038,5	7,1737
15,00	11032,7	197,24	200,324	419,349	46,986	0,1341	3128,0	7,4019

$\frac{1}{A}=428$ kgm/cpl. (podczas gdy Fliegner obliczał na podstawie: $\frac{1}{A}=430$ kgm/cpl.).

Tablica dla nasyconej pary wodnej *)

(podług temperatur wzrastających ułożona).

Temperatura w stopn.	Prężność w mm sł. rt.	Ciepłik całkowity w cpł.	Ciepłik cieczy w cpł.	Ciepłik utajony w cpł.	Wewnętrzny ciepłik parowania w cpł.	Zewn. ciepłik parowania w cpł.	Różnica objętości pary i wody w m^3/kg	Waga pary w kg/m^3
t	p_1	λ	q	$r=\lambda-q$	ϱ	$Ap\,u$	$u=v-w$	$\gamma=\frac{1}{v}$
−20	0,927	600,400	−19,994	620,394	590,824	29,570	1004,17	0,000996
−15	1,400	601,925	−14,996	616,921	586,994	29,927	672,83	0,001486
−10	2,093	603,450	− 9,998	613,448	583,152	30,296	455,68	0,002195
− 5	3,113	604,975	− 4,999	609,974	579,297	30,677	310,23	0,003223
0	4,600	606,500	0,000	606,500	575,429	31,071	212,67	0,004702
+ 5	6,534	608,025	+ 5,000	603,025	571,550	31,475	151,66	0,006594
10	9,165	609,550	10,002	599,548	567,656	31,892	109,54	0,009125
15	12,699	611,075	15,005	596,070	563,752	32,318	80,103	0,01248
20	17,391	612,600	20,010	592,590	559,845	32,755	59,281	0,01687
25	23,550	614,125	25,017	589,108	555,907	33,201	44,382	0,02253
30	31,548	615,650	30,026	585,624	551,968	33,656	35,583	0,02978
35	41,827	617,175	35,037	582,138	548,019	34,119	25,678	0,03894
40	54,906	618,700	40,051	578,649	544,061	34,588	19,831	0,05042
45	71,390	620,225	45,068	575,157	540,093	35,064	15,460	0,06468
50	91,980	621,750	50,087	571,663	536,119	35,544	12,164	0,08220
55	117,475	623,275	55,110	568,165	532,138	36,027	9,6524	0,10359
60	148,786	624,800	60,137	564,663	528,151	36,512	7,7260	0,12942
65	186,938	626,325	65,167	561,158	524,162	36,996	6,2299	0,16049
70	233,082	627,850	70,201	557,649	520,171	37,478	5,0617	0,19752
75	288,500	629,375	75,239	554,136	516,181	37,955	4,1415	0,24140
80	354,616	630,900	80,282	550,618	512,193	38,425	3,4111	0,29308
85	433,002	632,425	85,329	547,096	508,211	38,885	2,8270	0,35360
90	525,392	633,950	90,381	543,569	504,237	39,332	2,3566	0,42416
95	633,692	635,475	95,438	540,037	500,275	39,762	1,9753	0,50600
100	760,000	637,000	100,500	536,500	496,295	40,205	1,6654	0,60011
105	906,410	638,525	105,568	532,957	492,326	40,631	1,4111	0,70816
110	1075,370	640,050	110,641	529,409	488,361	41,048	1,2016	0,83153
115	1269,410	641,575	115,721	525,854	484,397	41,457	1,0281	0,97173
120	1491,280	643,100	120,806	522,294	480,436	41,858	0,8836	1,1304
125	1743,880	644,625	125,898	518,727	476,477	42,250	0,7627	1,3094
130	2030,280	646,150	130,997	515,153	472,519	42,634	0,6611	1,5104
135	2353,730	647,675	136,103	511,572	468,562	43,010	0,5753	1,7353
140	2717,630	649,200	141,215	507,985	464,608	43,377	0,5024	1,9865
145	3125,550	650,725	146,334	504,391	460,656	43,735	0,4402	2,2654
150	3581,230	652,250	151,462	500,788	456,702	44,086	0,3875	2,5739
155	4088,560	653,775	156,598	497,177	452,749	44,428	0,3420	2,9155
160	4651,620	655,300	161,741	493,559	448,798	44,761	0,3029	3,2902
165	5274,540	656,825	166,892	489,933	444,847	45,086	0,2690	3,7036
170	5961,660	658,350	172,052	486,298	440,895	45,403	0,2397	4,1546
175	6717,430	659,875	177,220	482,655	436,944	45,711	0,2142	4,6468
180	7546,390	661,400	182,398	479,002	432,990	46,012	0,1919	5,1843
185	8453,230	662,925	187,584	475,341	429,037	46,304	0,1724	5,7667
190	9442,700	664,450	192,780	471,670	425,081	46,589	0,1553	6,4000
195	10519,630	665,975	197,985	467,990	421,126	46,864	0,1402	7,0817
200	11688,960	667,500	203,200	464,300	417,167	47,133	0,1269	7,8198

*) Podług Zeuner'a, Technische Thermodynamik, III wydanie 1888. Rubryki u i γ przeliczono na podstawie wartości mechanicznego równoważnika ciepła $1 : A = 428$ kgm/cpł., podczas, gdy w źródle podanym przyjmowano $1 : A = 424$ kgm/cpł.

c_v, cieplik właściwy gazu lub pary przy stałej objętości (p. str. 317),
c_p, cieplik właściwy przy stałem ciśnieniu (por. str. 317),
$n = c_p : c_v$ (por. tabl., str. 277 i 317).

2. Gdy się zmienia jedna lub więcej z trzech wielkości: ciśnienie, objętość i temperatura, natenczas zachodzi to, co nazywamy **zmianą stanu.** Przy mieszaninach cieczy z parą nasyconą, właściwa ilość pary przybywa jeszcze jako czwarta zmienna. Zmianie objętości odpowiada praca:

$$L = \int p \cdot dv.$$

Do oznaczenia pracy przy dowolnej zmianie stanu znajomość funkcyi $p = F(v)$ jest zatem niezbędną; rodzaj tej funkcyi zależy zaś od prawa, podług którego ciepło przybywa lub ubywa.

Dla większości zmian w stanach gazów, par, lub mieszanin cieczy z parą, można funkcyę tę z dostateczną dokładnością wyrazić wzorem:

$$p v^m = p_0 v_0^m = \text{stałej},$$

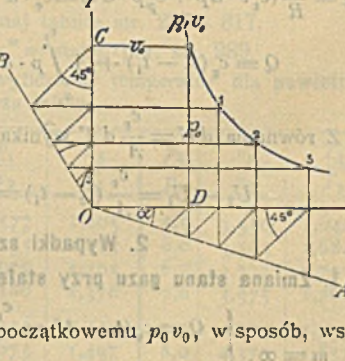
w którym m oznacza również ilość stałą, zależną od sposobu przybywania ciepła, a p_0 i v_0 wartości p i v, odpowiadające stanowi początkowemu. Krzywa, przedstawiona przez równanie powyższe w spółrzędnych prostokątnych, zwie się **krzywą politropiczną.**

3. Sześć najważniejszych zmian stanu określa się następującemi sześciu warunkami:

1. Ciśnienie pozostaje stałem.
2. Objętość pozostaje stałą.
3. Temperatura pozostaje stałą (izotermiczna zmiana stanu).
4. Ciepła nie przybywa, ani nie ubywa (adiabatyczna zmiana stanu).
5. Ciepło wewnętrzne pozostaje niezmiennem (izodynamiczna zmiana stanu).
6. Przybytek lub ubytek ciepła pozostaje w stosunku prostym do zmiany temperatury, t. zn.:

$$\frac{dQ}{dT} = \text{stałej}.$$

Rys. 197.



4. Wykreślenie krzywej politropicznej *) (rys. 197). Wykreśliwszy OA, pochyloną pod dowolnym kątem α do osi x, oznaczamy kąt $YOB = \beta$ z równania:

$$(1 + \operatorname{tg}\beta) = (1 + \operatorname{tg}\alpha)^m;$$

poczem z punktów C i D, odpowiadających danemu stanowi początkowemu $p_0 v_0$, w sposób, wska-

*) Podług E. Brauer'a; Zeitschr. d. V. d. Ing. 1885, str. 433.

zany w rys. 197, kreślimy linie kolejno prostopadłe i pod kątem 45° do osi spółrzędnych pochylone, a punkty 1, 2, 3 będą punktami żądanej krzywej.

5. Badanie krzywej rozprężania.

(Oznaczenie stałej m).

Jeżeli v_1 i v_2 są objętościami bezwzględnemi dla dwóch stanów, a p_1 i p_2 odpowiedniemi ciśnieniami właściwemi, to:

$$m = \frac{\log p_1 - \log p_2}{\log v_2 - \log v_1}.$$

Obliczenie ilości m dla większej liczby punktów, niż dla dwóch, wskaże nam, czy i w jakich granicach można m uważać za niezmienne i o ile przypuścić można, że zmiana stanu odbywa się podług krzywej politropicznej. Wartość $m = 1$ odpowiada **hyperboli równobocznej** (krzywa Mariotte'a), p. str. 105.

Praca, odpowiadająca krzywej politropicznej, będzie:

$$L = \frac{p_1 v_1}{m-1}\left[1 - \left(\frac{v_1}{v}\right)^{m-1}\right] = \frac{p_1 v_1}{m-1}\left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{m-1}{m}}\right].$$

b. Zmiany stanów gazów i par przegrzanych.

1. Zasady ogólne.

$$A = \frac{c_p - c_v}{R}, \text{ czyli } R = \frac{c_p - c_v}{A}.$$

W powyższem A jest równoważnikiem cieplikowym jednostki pracy ($A = {}^1/_{423}$ cpł./kgm), R zaś stałą prawa Mariotte'a i Gay-Lussac'a (p. str. 277).

Przybytek lub ubytek ciepła wynika z równania:

$$dQ = \frac{1}{R}(c_v v \cdot dp + c_p p \cdot dv) = c_v \cdot dT + Ap \cdot dv = c_v \cdot dT + A \cdot dL;$$

$$Q = c_v(t_2 - t_1) + A\int_{v_1}^{v_2} p \cdot dv = c_v(t_2 - t_1) + AL.$$

Z równania $dU = \frac{c_v}{A} dT$ wynika przyrost pracy wewnętrznej:

$$U_2 - U_1 = \frac{c_v}{A}(t_2 - t_1) = \frac{c_v}{AR}(p_2 v_2 - p_1 v_1).$$

2. Wypadki szczególne.

1. **Zmiana stanu gazu przy stałej objętości v_1.**

$$m = \infty. \quad \begin{cases} Q = c_v(t_2 - t_1) = \frac{c_v v_1}{R}(p_2 - p_1); \\ L = 0; \qquad U_2 - U_1 = \frac{Q}{A}. \end{cases}$$

2. **Zmiana stanu gazu przy stałem ciśnieniu** p_1.

$m = 0.$

$$Q = c_p (t_2 - t_1) = \frac{c_p p_1}{R} (v_2 - v_1);$$
$$L = p_1 (v_2 - v_1) = R (t_2 - t_1);$$
$$U_2 - U_1 = \frac{c_v}{A} (t_2 - t_1).$$

3. **Zmiana stanu gazu przy stałej temperaturze bezwzględnej** T_1 (izotermiczna zmiana stanu).

$m = 1.$

$$p v = p_0 v_0;$$
$$Q = A R T_1 \ln \frac{p_1}{p_2} = A R T_1 \ln \frac{v_2}{v_1};$$
$$L = R T_1 \ln \frac{p_1}{p_2} = R T_1 \ln \frac{v_2}{v_1};$$
$$U_2 - U_1 = 0.$$

4. **Zmiana stanu gazu bez przybytku lub ubytku ciepła** (adiabatyczna zmiana stanu).

$m = n$

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^n; \qquad p_2 v_2^n = p_1 v_1^n;$$
$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{n-1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}.$$

Powyższe związki nazywają się **równaniami Poisson'a.**

$$Q = 0; \qquad L = \frac{c_v}{A} (t_1 - t_2), \quad \text{albo:}$$
$$L = \frac{p_1 v_1}{n-1} \left[1 - \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{n-1}\right] = \frac{p_1 v_1}{n-1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right];$$
$$U_2 - U_1 = -L.$$

Co do wartości dla n porównaj tablice str. 277 i 317.

Dla wykreślenia krzywej $p_2 v_2^n =$ stałej, por. str. 289.

Wykreślenia krzywej, oraz wyliczenia temperatur dla **powietrza atmosferycznego** ułatwia poniższa tablica.

$\frac{p_2}{p_1}$	$\frac{v_1}{v_2}$	$\frac{T_2}{T_1}$	$\frac{p_2}{p_1}$	$\frac{v_1}{v_2}$	$\frac{T_2}{T_1}$	$\frac{p_2}{p_1}$	$\frac{v_1}{v_2}$	$\frac{T_2}{T_1}$
1,1	1,070	1,028	1,9	1,577	1,205	5,5	3,350	1,642
1,2	1,138	1,054	2,0	1,635	1,223	6,0	3,564	1,684
1,3	1,205	1,079	2,5	1,915	1,305	6,5	3,772	1,723
1,4	1,270	1,103	3,0	2,180	1,376	7,0	3,975	1,761
1,5	1,333	1,125	3,5	2,431	1,440	7,5	4,174	1,797
1,6	1,395	1,147	4,0	2,673	1,497	8,0	4,370	1,831
1,7	1,457	1,167	4,5	2,906	1,549	9,0	4,751	1,894
1,8	1,518	1,186	5,0	3,131	1,597	10,0	5,119	1,953

Dla **par przegrzanych** związki powyższe (po wprowadzeniu wartości z tabl. na str. 277) są tylko w przybliżeniu ważne (dokładne równania stanu p. str. 277).

c. Zmiany stanu mieszaniu pary z cieczą.

Oznaczenia por. str. 283.

W zamkniętej przestrzeni niechaj się znajduje 1 kg mieszaniny cieczy z parą. Niechaj waga tej pary będzie x, a więc waga cieczy $(1 - x)$, to przy dowolnej, nieskończenie małej zmianie stanu **zmiana ciepła wewnętrznego** mieszaniny będzie:

$$A \cdot dU = dq + d(xQ);$$

a **ciepło z zewnątrz przybywające:**

$$dQ = dq + T \cdot d\left(\frac{xr}{T}\right);$$

wreszcie **ciepło przemienione na pracę zewnętrzną:**

$$A \cdot dL = T \cdot d\left(\frac{xr}{T}\right) - d(xQ).$$

Ostatnie dwa równania można stosować tylko wtedy, gdy zmiana stanu mieszaniny odbywa się pod ciśnieniem zewnętrznem, wciąż równem jej prężności.

1. **Zmiana stanu, podczas której wzajemny stosunek ilości cieczy i pary pozostaje niezmiennym.**

$$A \cdot dU = dq + x \cdot dQ;$$

$$dQ = dq + xT \cdot d\left(\frac{r}{T}\right);$$

$$A \cdot dL = x\left[T \cdot d\left(\frac{r}{T}\right) - dQ\right].$$

Jeżeli $x = 1$, to: $dQ = \left(c_v + \frac{dr}{dT} - \frac{r}{T}\right) dT.$

Wyraz, ujęty końcowym nawiasem, zwie się **termiczną funkcyą Clausius'a**; dla pary wodnej w granicach temperatur, stosowanych zazwyczaj w technice, wyraz ten ma wartość odjemną. Należy zatem doprowadzać ciepło, jeżeli przy rozprężaniu czystej pary nasyconej nie ma nastąpić częściowe jej skraplanie i naodwrót, odprowadzać ciepło, jeżeli przy ściskaniu para taka nie ma się przegrzewać.

2. **Zmiana stanu bez przybytku lub ubytku ciepła.** (Adiabatyczna zmiana stanu).

Oznaczając zmienne wielkości dla stanu początkowego skaźnikiem 1, a dla stanu końcowego skaźnikiem 2, otrzymujemy:

$$x_2 = \left(\frac{x_1 r_1}{T_1} - r_2 + r_1 \frac{T_2}{r_2}\right),$$

a jeżeli w równaniu tem c oznaczać będzie cieplik właściwy cieczy (patrz str. 317), to:

$$\tau_1 = \int_0^{T_1} \frac{c \cdot dT}{T} = \int_0^{T_1} \frac{dq}{T}; \qquad \tau_2 = \int_0^{T_2} \frac{c \cdot dT}{T} = \int_0^{T_2} \frac{dq}{T},$$

albo w przybliżeniu dla pary wodnej:

$$\tau_2 - \tau_1 = 1{,}0224 \ln \frac{T_2}{T_1}.$$

Ilość pary, **skraplająca się przy rozprężaniu:**

$$x_1 - x_2 = \frac{T_2}{r_2}\left[x_1\left(\frac{r_2}{T_2} - \frac{r_1}{T_1}\right) + \tau_2 - \tau_1\right].$$

Wreszcie: $L = U_1 - U_2$; $AL = q_1 - q_2 + x_1\varrho_1 - x_2\varrho_2$.

3. **Temperatura mieszaniny zmienia się z $t_1{}^0$ na $t_2{}^0$ bez zmiany jej objętości.**

Pierwotna waga pary x_1 zmieni się natenczas na:

$$x_2 = \frac{x_1 u_1}{u_2},$$

a niezbędny **przybytek ciepła** z zewnątrz będzie:

$$Q = c(t_2 - t_1) + x_1 u_1\left(\frac{\varrho_2}{u_2} - \frac{\varrho_1}{u_1}\right).$$

Znaczenia: u_1, u_2, ϱ_1, ϱ_2 i c por. str. 284 i 285.

Temperatura t', przy której cała ilość cieczy przemieni się w parę, określa się z równania:

$$u' = x_1 u_1,$$

a dla wody z tablic podanych na str. 286 do 288.

Czas Z w sek., w ciągu którego przy ilości cieczy i pary wagi ogólnej G kg, zamkniętej w przestrzeni niezmiennej, ciśnienie zmieni się z p_1 na p_2, określa wzór:

$$Z = \frac{GQ}{Q'},$$

w którym Q' oznacza ilość ciepła w cpł., przybywającą do mieszaniny w ciągu każdej sekundy.

4. **Temperatura mieszaniny pozostaje niezmienną.** (Izotermiczna zmiana stanu).

p = stałej, co znaczy, że izoterma wilgotnych par nasyconych jest równoległą do osi odciętych, a

$$Q = r_1(x_2 - x_1) \quad \text{i} \quad L = pu(x_2 - x_1).$$

d. Zastosowanie do pary wodnej i silnicy parowej.

Przy obliczeniach, dotyczących pary wodnej, w ogólne równania powyższe wprowadza się wartości z tablic, str. 286 i następnych.

Przypadek 1, na str. 292, przy $x = 1$, odpowiada dawnej teoryi Pambour'a o silnicach parowych: sucha w początku para pozostaje też

i w czasie rozprężania się suchą i nasyconą; jak już wyżej zaznaczono, doprowadzanie ciepła staje się natenczas niezbędnem.

Równanie krzywej ciśnień przy powyższem założeniu będzie:

$$pv^{1.0646} = \text{stałej.}$$

(Wykreślenie krzywej: $pv^m = \text{stałej}$, patrz str. 289).

Adiabatycznej zmianie stanu pary wodnej odpowiada według Zeuner'a z dostateczną dokładnością:

$$pv^{m_1} = \text{stałej, przyczem } m_1 = 1{,}035 + 0{,}1x,$$

a gdzie x odnosi się do stanu początkowego.

Z tego wynika: $$L = \frac{p_1 v_1}{m_1 - 1}\left[1 - \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{m_1 - 1}\right],$$

lub, jeżeli stosunek rozprężenia $\frac{v_2}{v_1}$ oznaczymy przez $\frac{1}{\varepsilon}$:

$$L = \frac{p_1 v_1}{m_1 - 1}\left(1 - \varepsilon^{m_1 - 1}\right).$$

Z powodu znacznego chłodzenia się pary o ścianki cylindra, niewłaściwem byłoby przypuszczenie, iż w zwykłym cylindrze silnicy parowej zachodzi rozprężanie adiabatyczne.

Dla krzywej rozprężania stosuje się najczęściej: $m_1 = 1$, przyczem otrzymuje się hyperbolę równoboczną. Natomiast dla krzywej ściskania oprócz hyperboli stosują też często adiabatę.

D. Wypływ gazów i par z naczyń.

a. Wypływ gazów z naczyń.

Oznaczamy przez:

p_0 (bezwzględną) prężność właściwą w kg/m² w naczyniu znacznych rozmiarów, do którego nieustannie dopływa gaz w ilości odpowiadającej wypływowi,

p stałą prężność właściwą w kg/m² w przestrzeni, do której gaz wypływa,

t_0 temperaturę gazu w naczyniu w stopniach,

v_0 objętość właściwą w m³/kg, przy prężności p_0 i temperaturze t_0 ($v_0 = 1 : \gamma_0$), *)

$n = c_p : c_v$ (por. tabl. str. 277 i 317),

F przekrój wylotu w m²,

α spółczynnik dławienia (w wylocie),

φ spółczynnik prędkości,

μ spółczynnik wypływu,

} (Por. str. 241 i tabl. str. 296).

g przyspieszenie ciężkości = 9,81 m/sek.²,

R stała prawa Mariotte'a i Gay-Lussac'a w kgm/kg (por. str. 277).

*) W niniejszym rozdziale D, oraz w następnym E, wyjątkowo oznaczono prędkość gazu lub pary przez u, zachowując znak v na objętość właściwą.

1. **Prędkość** gazu wypływającego podług Grashof'a:

$$u = \varphi \sqrt{2g \frac{n}{n-1} p_0 v_0 \left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]},$$

przyczem dla **powietrza** atmosferycznego: $\sqrt{2 g p_0 v_0} = 23{,}96 \sqrt{273 + t_0}$.

Dla $\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{n-1}{n}}$ por. tabl. str. 291, a dla $\frac{u^2}{2g}$ tabl. str. 146.

Temperatura t gazu wypływającego:

$$t = t_0 - \frac{u^2}{2gR} \frac{n-1}{n};$$

przy $\varphi = 1$ będzie: $t = (273 + t_0)\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{n-1}{n}} - 273.$

Objętość właściwa v gazu wypływającego:

$$v = \frac{R(273 + t)}{p}.$$

Ilość wypływu Q_0 w m³/sek., mierzona przy prężności p_0 i temperaturze t_0, wynosi:

$$Q_0 = \mu F \sqrt{2g \frac{n}{n-1} p_0 v_0 \left[\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{2}{n}} - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right]},$$

a dla **powietrza atmosferycznego** (przy $n = 1{,}41$):

$$Q = 44{,}4\, \mu F \sqrt{273 + t_0} \sqrt{\left(\frac{p}{p_0}\right)^{1{,}41844} - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{1{,}70922}}.$$

Wzór ten (dla powietrza) ważny jest tylko, dopóki:

$$p \geq 0{,}527\, p_0.$$

2. Podług Zeuner'a w sposób podobny dla nasyconej pary wodnej (patrz pod **b.**, str. 296) będz e:

$$Q_0 = \alpha F \sqrt{2g \frac{n}{n-1} p_0 v_0 \left[\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{2}{m}} - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{m+1}{m}}\right]},$$

lecz już ogólnie dla wszelkich wartości $\frac{p}{p_0}$. We wzorze tym wartość n byłaby np. dla powietrza 1,41; ogólnie zaś wykładnik wypływu będzie: $m = \frac{n(1+\zeta)}{1+n\zeta}$, jeżeli przez ζ oznaczymy pewien spółczynnik oporu (por. str. 240).

3. Przy różnicy ciśnień nieznacznej w stosunku do prężności w przestrzeni, do której następuje wypływ, jest **w przybliżeniu:**

$$\frac{u^2}{2g} = \varphi^2 \frac{1}{\gamma_0}(p_0 - p),$$

lub po wprowadzeniu wartości: $\gamma_0 = \frac{p_0}{R(273 + t_0)}$ (por. str. 279):

$$\frac{u^2}{2g} = \varphi^2 R (273 + t_0)\left(1 - \frac{p}{p_0}\right).$$

Dla średnio wilgotnego powietrza będzie zatem ogólnie:

$$u = 24\varphi \sqrt{(273 + t_0)\left(1 - \frac{p}{p_0}\right)},$$

lub, gdy przewyżka ciśnienia h, wyrażona jest w mm sł. wod., a powietrze wypływa w atmosferę przy średniem ciśnieniu barometrycznem (p. str. 276):

$$u = 0{,}24\,\varphi \sqrt{(273 + t_0)\,h},$$

a

$$Q_0 = \alpha F u.$$

Wzory powyższe są dostatecznie dokładne dla potrzeb praktyki, dopóki $1 - \frac{p}{p_0} \leq 0{,}1$, błąd nie przekracza natenczas 2%.

Dla wartości: $p = 0{,}5\,p_0$ do $p = p_0$ podług Weisbach'a i Grashof'a *) będzie:

Rodzaj otworu wypływowego	μ	α	φ	ζ	m	Uwagi
Otwór okrągły, średnicy 14 mm, w cienkiej ściance płaskiej	0,64	0,65	0,981	0,04	1,388	—
Krótka przystawka rurowa, 14 mm średnicy, bez zaokrąglenia krawędzi wewnętrznej	0,815	1	0,821	0,490	1,243	przy $p_0 : p = 1{,}08$
	0,813	1	0,838	0,444	1,252	„ $p_0 : p = 1{,}41$
	0,831	1	0,866	0,362	1,271	„ $p_0 : p = 1{,}70$
Krótka przystawka stożkowa, o wylocie 10 mm średnicy	0,97	1	0,974	0,034	1,392	—

Podług v. Hauer'a dla **stożkowych otworów dyszy dmuchowych** $\mu = 0{,}86$, a dla **okrągłych przystawek rurowych** przy dmuchawkach pesemerni $\mu = 0{,}78$.

b. Wypływ nasyconej pary wodnej z naczyń. **)

1. Naczynie niechaj będzie tak wielkie, iżby prędkość w niem można było uważać za równą zeru.

Oznaczamy przez:

p_0 bezwzględną prężność (właściwą) wewnątrz naczynia w kg/m²,
v_0 odpowiednią objętość (właściwą) w m³/kg (por. str. 284 i nast.),
p prężność (właściwą) w przestrzeni zewnętrznej w kg/m²,
F przekrój wylotu w m²,
α spółczynnik dławienia w wylocie,

*) Grashof, Theoretische Maschinenlehre, tom I, str. 580 do 592.
**) Grashof, Theoretische Maschinenlehre, tom I, § 111 do 113.

ζ spółczynnik oporu w wylocie,
G ilość wypływu w kg/sek.,
$Q_0 = G v_0$ objętość wypływu w m³/sek. (mierzoną przy prężności p_0),
u prędkość wypływu w m/sek.,
g przyspieszenie ciężkości 9,81 m/sek.²

Ilość wody, zawartej w jednem kg **wilgotnej pary wodnej**, niechaj będzie $(1 - x)$ w kg, a wykładnik wypływu: $m = \frac{m_1 (1 + \zeta)}{1 + m_1 \zeta}$, w którym to wzorze: $m_1 = 1{,}035 + 0{,}1\, x$.

Przy założeniach powyższych i gdy para wypływająca nie jest przegrzaną (a nie będzie nią, dopóki tylko $\zeta < 0{,}96$, nawet dla wartości $x = 1$, a tem mniej dla $x < 1$), i gdy wreszcie:

$$p \geqq p_0 \left(\frac{2}{m+1}\right)^{\frac{m}{m-1}},$$ otrzymamy wzory:

$$\frac{u^2}{2g} = \frac{m_1}{m_1 - 1} p_0 v_0 \left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{m-1}{m}}\right], \quad *)$$

$$G = \frac{Q_0}{v_0} = \alpha F \sqrt{2g \frac{m_1}{m_1 - 1} \frac{p_0}{v_0} \left[\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{2}{m}} - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{m+1}{m}}\right]};$$

a dla $p < p_0 \left(\frac{2}{m+1}\right)^{\frac{m}{m-1}}$:

$$\frac{u^2}{2g} = \frac{1}{1+\zeta} \frac{m}{m+1} p_0 v_0; \quad *)$$

$$G = \frac{Q_0}{v_0} = \alpha F \sqrt{\frac{gm}{1+\zeta} \left(\frac{2}{m+1}\right)^{\frac{m+1}{m-1}} \frac{p_0}{v_0}}.$$

W szczególności dla **suchej pary wodnej** $x = 1$ i $m_1 = 1{,}135$; a więc:

Dla $\zeta =$	0	0,05	0,1	0,25	0,5
$m =$	1,135	1,128	1,121	1,105	1,086
$\frac{p_0}{p} = \left(\frac{m+1}{2}\right)^{\frac{m}{m-1}} =$	1,7319	1,7274	1,7232	1,7138	1,7021

W tych wypadkach ilość wypływu będzie: $G = \alpha C F p_0^{0{,}97}$, w którym to wzorze, **wyrażając p_0 w atm.**, otrzymamy dla:

$\zeta =$	0	0,05	0,1	0,25	0,5
$C =$	152,6	148,6	144,9	135,2	122,6

*) Do obliczenia prędkości u z $\frac{u^2}{2g}$ dogodna jest tablica na str. 147.

Wartości $p_0^{0,97}$.

p_0 =	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5
$p_0^{0,97}$ =	1,48	1,96	2,43	2,90	3,37	3,83	4,30	4,76	5,22	5,68	6,14
p_0 =	7	7,5	8	8,5	9	9,5	10	10,5	11	11,5	12
$p_0^{0,97}$ =	6,60	7,05	7,51	7,96	8,42	8,87	9,32	9,77	10,22	10,67	11,12

W braku oddzielnych doświadczeń przyjmuje się wartości spółczynników α i ζ dla wzorów powyższych podobne jak dla wody, lecz α nieco większe, a ζ nieco mniejsze, niż dla wody (por. str. 243 i następne).

W przybliżeniu podług Navier'a

dla $p_0 < 2p$: . . . . $G = \nu F \sqrt{\frac{(p_0 - p)p}{p_0 v_0}}$,

dla $p_0 > 2p$: . . . . $G = 0{,}5\, \nu F \sqrt{\frac{p_0}{v_0}}$,

jeżeli przez ν oznaczymy pewien spółczynnik, którego wartość dla prężności p_0 i p, wyrażonych w atmosferach, wynosi:

dla wylotu okrągłego w cienkiej ściance: . . . . . $\nu = 382$,

a dla krótkiej przystawki rurowej, z zaokrągloną krawędzią wewnętrzną . . . . . $\nu = 420$.

2. Dla **zawora (wentyla) bezpieczeństwa na kotle parowym** podaje Kolster poniższy wzór na ilość pary, wypuszczanej w kg/sek., jeżeli d oznacza średnicę zawora w m, a h jego skok w m:

$$G = 595.2 \frac{h}{d} \frac{\pi d^2}{4} p_0^{0,97}.$$ (Wartości dla $p_0^{0,97}$ p. tabl. powyższą.)

Przekrój F zawora bezpieczeństwa, który:

1) przy prężności pary p_0 atm. ma zacząć wypuszczać parę, a
2) przy podniesieniu się prężności pary do p_1 atm. ma wypuszczać G kg pary/sek. będzie:

$$F = \frac{56\, G}{\left(1 - \sqrt{\frac{p_0}{p_1}}\right) p_1^{0,97}} \text{ cm}^2.$$

Przekrój F rozumieć należy w świetle, t. j. bez doliczenia powierzchni ściętej krawędzi gniazda, która to powierzchnia powinnaby być możliwie mała. Oznaczmy poziomy rzut tej powierzchni przez a w cm^2, a otrzymamy niezbędne obciążenie K zawora, łącznie z jego ciężarem własnym:

$$K = (F + 0{,}6\, a)(p_0 - 1) \text{ kg}.$$

Jeżeli przy najwyższej dozwolonej prężności pary p_1 zawór ma wypuszczać całkowitą ilość pary G, jaką wytwarza kocioł przy na-

tężonem opalaniu, to przyjmując $p_0 = 0{,}8\,p_1$, otrzymamy przekrój zaworu:

$$F = \frac{531\,G}{p_1^{0{,}97}}\ \text{cm}^2.$$

Ponieważ ilość pary G, oprócz stopnia natężania paleniska, zależy przedewszystkiem od powierzchni ogrzewalnej H kotła, więc też w praktyce określają przekrój zawora bezpieczeństwa, niezbędny na każdy m² powierzchni ogrzewalnej, a mianowicie:

$$f = \frac{F}{H} = \varphi(p_1).$$

(Por. Dział siódmy. Silnice, pod IV. IV. b.)

E. Przepływ gazów i par przez przewody rurowe.*)

a. Równania zasadnicze.

Oznaczmy przez:

F przekrój rury nieruchomej w dowolnem miejscu w m²,
dl różniczkę długości tegoż przewodu rurowego w m,
u prędkość w m/sek, z którą wszystkie cząstki gazu lub pary przepływają przez przekrój F,
ψ kąt, jaki u tworzy z kierunkiem siły ciężkości,
G stałą wagę gazu, przepływającego przez F, w kg/sek.,
p bezwzględne ciśnienie właściwe w przekroju F w kg/m²,
v objętość właściwą w m³/kg,
$\frac{1}{A}$ mechaniczny równoważnik ciepła = 428 kgm/cpł.,
R stałą prawa Mariotte'a i Gay-Lussac'a (p. str. 276),
g przyspieszenie ciężkości = 9,81 m/sek²,
dT zmianę temperatury na długości dl przewodu rurowego,
dQ ilość ciepła, przybywającą do gazu na tejże długości dl,
dB pracę mechaniczną na przezwyciężenie oporów zewnętrznych i wewnętrznych na tejże długości dl,

a otrzymamy **równania zasadnicze jednostajnego ruchu** gazu lub pary:**)

1) równanie nieprzerywalności (ciągłości): $Fu = Gv$;

2) równanie całkowitej możności pracy:

$$\frac{u \cdot du}{g} + \frac{R \cdot dT}{n-1} = \cos\psi \cdot dl - d(pv) + \frac{dQ}{A};\ (n \text{ p. str. } 277 \text{ i } 317);$$

3) Równanie ciepła:

$$\frac{dQ}{A} + dB = \frac{R \cdot dT}{n-1} + p \cdot dv;$$

4) Równanie zewnętrznej możności pracy:

$$\frac{u \cdot du}{g} = \cos\psi \cdot dl - v \cdot dp - dB.$$

*) Dla strat ciśnienia w przewodach gazu oświetlającego por. Dział XVII Technologia, rozdział III.

**) Grashof, Theoretische Maschinenlehre, tom I, str. 60.

Ilość $\frac{R \cdot dT}{n-1}$ oznacza tu zmianę wewnętrznej możności pracy, a

$p \cdot dv$ pracę rozprężania.

b. Przepływ powietrza przez przewody rurowe. Strata ciśnienia.

1. Podług doświadczeń szczegółowych **A. Riedler'a** i **M. Gutermuth'a**, dokonanych na przewodach przedsiębiorstwa powietrza ściśnionego w Paryżu, *) strata ciśnienia z, między początkiem a końcem przewodu rurowego, wynosi:

$$z = \frac{533}{10^{10}} \gamma \frac{l}{d} u^2 = \frac{864}{10^{10}} \gamma l \frac{Q^2}{d^5} \text{ kg/cm}^2.$$

We wzorze tym oznacza:

γ średnią wagę jednego m³ powietrza w przewodzie w kg,
l długość, a d średnicę w świetle przewodu w m,
u średnią prędkość powietrza w m/sek.,
Q przepływającą ilość powietrza w m³/sek, przy średniej prężności i temperaturze przewodu.

Co do γ por. str. 279 i nast.; γ zależy od p_m i T (p. poniżej).

Doświadczenia wykonywano przy $u \sim 0{,}5$ m/sek., $d = 0{,}300$ m i przy długości przewodów do 16 500 m. Na każde 1000 m długości przewodu, przy prędkości powietrza 6,5 m/sek., strata ciśnienia wynosiła średnio 0,05 kg/cm², czem objęte jednak już straty i w syfonach owodniających i w zasuwach rozdzielczych.

Z uwzględnieniem strat w czterech większych zbiornikach odwadniających (z których każdy powodował straty ciśnienia od 0,07 do 0,17 atm., przy $u = 5{,}58$ do 8,70 m/sek.) ogólna strata ciśnienia podniosłaby się do 0,07 kg/cm² na każde 1000 m przewodu.

Związki między ciśnieniem właściwem, objętością i temperaturą patrz str. 279.

2. Podług doświadczeń **Stockalper'a**, dokonanych przy tunelu Gotardzkim, **) których wyniki jednakże z powodu szczupłej ich liczby nie są pewne, ***) strata ciśnienia z (w atm.) między początkiem a końcem długiego przewodu z rur lano-żelaznych, średnicy w świetle od 0,15 do 0,20 m, wynosiła dla powietrza (przy znakowaniu powyżej już określonem):

$$z = \frac{785}{10^{11}} \gamma \frac{l}{d} \left(5 + \frac{1}{d}\right) u^2 = \frac{1273}{10^{11}} \gamma l \left(5 + \frac{1}{d}\right) \frac{Q^2}{d^5} \text{ kg/m}^2.$$

3. Podług doświadczeń **H. Lorenz'a** †) do przewodów powietrznych stosuje się wzór:

$$\frac{z}{p_m} = \frac{0{,}52}{D^{1{,}30933}} \frac{T_0}{T} L u^2 = \frac{1676}{10^8} \frac{l u^2}{T' d^{1{,}30933}},$$

*) Zeitschr. d. V. d. Ing. 1891, str. 188.
**) Dinglers Politechn. Journal, wrzesień 1880.
***) Zeitschr. d. V. d. Ing. 1892, str. 1529.
†) Zeitschr. d. V. d. Ing. 1892, str. 627 i 836.

w którym to wzorze oznacza:

u średnią prędkość powietrza w przewodzie w m/sek.,
p_1 bezwzględną prężność początkową powietrza kg/cm^2,
p_2 bezwzględną prężność końcową powietrza kg/cm^2,
$p_m = {}^1/_2 (p_1 + p_2)$ bezwzględną średnią prężność powietrza w kg/cm^2,
$z = p_1 - p_2$ stratę ciśnienia między początkiem a końcem przewodu powietrznego w kg/cm^2,
L długość przewodu w km,
D średnicę przewodu w świetle w mm, lub l długość, a d średnicę w świetle przewodu w m,
$T = 273 + t$ przeciętną temperaturę bezwzględną powietrza w przewodzie w stopniach, przyczem $T_0 = 273^0$.

c. Przepływ pary wodnej przez przewody.

Obliczenie długich przewodów parowych. *)

Dla określenia najodpowiedniejszej średnicy przewodu parowego wypada uwzględniać straty ciśnienia wskutek oporu w przewodzie i straty wskutek ochłodzenia zewnętrznego.

Zmniejszenie średnicy rury, powiększając opór przewodu, zmniejsza jednak ochładzanie zewnętrzne.

I. Opór przewodu.

1. Z doświadczeń, dokonanych na przewodach parowych w szybach, wyprowadzono wzór na stratę ciśnienia z między początkiem a końcem przewodu:

$$z = \frac{15}{10^8} \gamma \frac{l}{d} u^2 = \frac{187{,}63}{10^{16}} \frac{l}{\gamma} \frac{G_s^2}{d^5} \text{ kg/cm}^2,$$

w którym to wzorze oznacza:

γ wagę pary w kg/m^3 przy średniej prężności bezwzględnej p kg/cm^2, panującej w przewodzie (p. tabl. Fliegner'a, str. 286 i 287),
l długość, a d średnicę w świetle przewodu w m,
u przeciętną prędkość pary w m/sek.,
G_s przeciętną wagę pary przepływającej przez przewód w kg/godz., czyli:

$$G_s = 3600\, u \gamma \frac{\pi d^2}{4}, \text{ a zatem: } \frac{G_s}{u} = 2827{,}43\, \gamma d^2.$$

Podstawiając we wzór pierwszy: $\varphi = 0{,}15 \frac{\gamma}{d}$, otrzymamy:

$$z = \varphi \frac{l}{100} \left(\frac{u}{100} \right)^2.$$

*) Podług M. F. Gutermuth'a, Zeitschr. d. V. d. Ing. 1887. str. 670 i nast.

(Ciąg dalszy na str. 304.)

Wartości $G_s : u$.

p Atm. bezwzgl.	γ kg/m³	d w m									
		0,010	0,013	0,019	0,025	0,032	0,038	0,045	0,051	0,063	0,069 m
1,0	0,5823	0,16464	0,27824	0,59436	1,0290	1,6859	2,3774	3,3339	4,2823	6,5347	7,8386
1,2	0,6907	0,19529	0,33004	0,70500	1,2206	1,9998	2,8200	3,9546	5,0795	7,7512	9,2978
1,5	0,8518	0,24084	0,40701	0,86944	1,5052	2,4662	3,4777	4,8769	6,2642	9,5591	11,466
2,0	1,1161	0,31557	0,53330	1,1392	1,9723	3,2314	4,5568	6,3902	8,2079	12,525	15,024
2,5	1,3763	0,38914	0,65763	1,4048	2,4321	3,9848	5,6191	7,8799	10,121	15,445	18,527
3,0	1,6332	0,46178	0,78039	1,6670	2,8861	4,7286	6,6680	9,3508	12,011	18,328	21,985
3,5	1,8879	0,53379	0,90209	1,9270	3,3362	5,4660	7,7078	10,809	13,884	21,187	25,414
4,0	2,1400	0,60507	1,0226	2,1843	3,7817	6,1959	8,7371	12,252	15,738	24,016	28,808
4,5	2,3901	0,67579	1,1421	2,4396	4,2236	6,9201	9,7582	13,684	17,577	26,822	32,174
5,0	2,6412	0,74678	1,2620	2,6959	4,6673	7,6471	10,783	15,122	19,424	29,640	35,554
5,5	2,8860	0,81600	1,3790	2,9458	5,0999	8,3558	11,783	16,524	21,224	32,388	38,850
6,0	3,1319	0,88553	1,4965	3,1968	5,5345	9,0678	12,787	17,932	23,032	35,147	42,160
7,0	3,6193	1,0233	1,7294	3,6942	6,3956	10,479	14,777	20,723	26,617	40,616	48,721
8,0	4,1034	1,1602	1,9608	4,1884	7,2512	11,881	16,753	23,494	30,177	46,049	55,238
9,0	4,5830	1,2958	2,1899	4,6779	8,0988	13,269	18,712	26,240	33,704	51,431	61,694

p Atm. bezwzgl.	γ kg/m³	d w m									
		0,075	0,100	0,125	0,150	0,175	0,200	0,225	0,250	0,275	0,300 m
1,0	0,5823	9,2610	16,464	25,725	37,044	50,421	65,856	83,349	102,90	124,51	148,18
1,2	0,6907	10,985	19,529	30,514	43,940	59,808	78,116	99,150	122,06	147,69	175,76
1,5	0,8518	13,547	24,084	37,631	54,189	73,757	96,336	122,93	150,52	182,13	216,76
2,0	1,1161	17,751	31,557	49,308	71,003	96,643	126,23	159,76	197,23	238,65	284,01
2,5	1,3763	21,889	38,914	60,803	87,557	119,17	155,66	197,00	243,21	294,29	350,23
3,0	1,6332	25,975	46,178	72,153	103,90	141,42	184,71	233,78	288,61	349,22	415,60
3,5	1,8879	30,026	53,379	83,405	120,10	163,47	213,52	270,23	333,62	403,68	480,41
4,0	2,1400	34,035	60,507	94,542	136,14	185,30	242,03	306,32	378,17	457,59	544,56
4,5	2,3901	38,013	67,579	105,59	152,05	206,96	270,31	342,12	422,36	511,06	608,21
5,0	2,6412	42,006	74,678	116,69	168,03	228,70	298,71	378,06	466,73	564,76	672,10
5,5	2,8860	45,900	81,600	127,50	183,60	249,90	326,40	413,10	509,99	617,10	669,68
6,0	3,1319	49,811	88,553	138,36	199,24	271,19	354,21	448,30	553,45	734,10	796,97
7,0	3,6193	57,563	102,33	159,89	230,25	313,40	409,33	518,07	639,56	773,90	921,00
8,0	4,1034	65,262	116,02	181,28	261,05	355,31	464,08	587,36	725,12	877,41	1044,2
9,0	4,5830	72,889	129,58	202,47	291,58	396,84	518,32	656,00	809,88	979,96	1166,2

Wartości $\varphi = 0{,}15\,\frac{\gamma}{d}$.

p Atm. bezwzgl.	γ kg/m³	d w m									
		0,010	0,013	0,019	0,025	0,032	0,038	0,045	0,051	0,063	0,069 m
1,0	0,5823	8,735	6,719	4,597	3,494	2,730	2,299	1,941	1,713	1,386	1,266
1,2	0,6907	10,36	7,970	5,453	4,144	3,238	2,726	2,302	2,032	1,645	1,502
1,5	0,8518	12,78	9,829	6,725	5,111	3,993	3,362	2,839	2,505	2,028	1,852
2,0	1,1161	16,74	12,88	8,811	6,697	5,232	4,406	3,720	3,283	2,657	2,426
2,5	1,3763	20,64	15,88	10,87	8,258	6,451	5,433	4,588	4,048	3,277	2,992
3,0	1,6332	24,50	18,84	12,89	9,799	7,656	6,447	5,444	4,804	3,889	3,550
3,5	1,8879	28,32	21,78	14,90	11,33	8,850	7,452	6,293	5,553	4,495	4,104
4,0	2,1400	32,10	24,69	16,89	12,84	10,03	8,447	7,133	6,294	5,095	4,652
4,5	2,3901	35,85	27,58	18,87	14,34	11,20	9,435	7,967	7,030	5,691	5,196
5,0	2,6412	39,62	30,48	20,85	15,85	12,38	10,43	8,804	7,768	6,289	5,742
5,5	2,8860	43,29	33,30	22,78	17,32	13,53	11,39	9,620	8.488	6,871	6,274
6,0	3,1319	46,98	36,14	24,73	18,79	14,68	12,36	10,44	9,212	7,457	6,809
7,0	3,6193	54,29	41,76	28,57	21,72	16,97	14,29	12,06	10,65	8,617	7,868
8,0	4,1034	61,55	47,35	32,40	24,62	19,23	16,20	13,68	12,07	9,770	8,920
9,0	4,5830	68,75	52,88	36,18	27,50	21,48	18,09	15,28	13,48	10,91	9,963

p Atm. bezwzgl.	γ kg/m³	d w m									
		0,075	0,100	0,125	0,150	0,175	0,200	0,225	0,250	0,275	0,300 m
1,0	0.5823	1,165	0,873	0,699	0,582	0.499	0,437	0,388	0,349	0,344	0,291
1,2	0,6907	1,381	1,036	0,829	0,691	0,592	0,518	0,460	0,414	0,408	0,345
1,5	0,8518	1,704	1,278	1,022	0,852	0,730	0,639	0,568	0,511	0,503	0,426
2,0	1,1161	2,232	1,674	1,339	1,116	0,957	0,837	0,744	0,670	0,660	0,558
2,5	1,3763	2,753	2,064	1,652	1,376	1,180	1,032	0,918	0,826	0,813	0,688
3,0	1,6332	3,266	2,450	1,960	1,633	1,400	1,225	1,089	0,980	0,891	0,817
3,5	1,8879	3,776	2,832	2,265	1,888	1,618	1,416	1,259	1,133	1,030	0,944
4,0	2,1400	4,280	3,210	2,568	2,140	1,834	1,605	1,427	1,284	1,167	1,070
4,5	2,3901	4,780	3,585	2,868	2,390	2,049	1,793	1,593	1.434	1,304	1,195
5,0	2,6412	5,282	3,962	3,169	2,641	2,264	1,981	1,761	1,585	1,441	1,320
5,5	2,8860	5,772	4,329	3,463	2,886	2,474	2,165	1,924	1,732	1,574	1,443
6,0	3,1319	6,264	4,698	3,758	3,132	2,684	2.349	2,088	1,879	1,708	1,566
7,0	3,6193	7,239	5,429	4,343	3,619	3,102	2,714	2,413	2,172	2,139	1,809
8,0	4,1034	8,207	6,155	4,924	4,103	3,517	3,078	2,736	2,462	2,425	2,052
9,0	4,5830	9,166	6,875	5,500	4,583	3,928	3,437	3,055	2,750	2,708	2,292

Wartości z, $G_s : u$ i φ dogodniej oznaczać z obydwóch tablic, podanych na str. 302 i 303.

Ponajczęściej dane są G_s i p, należy zaś obliczyć d i z. Dobieramy stosowną wartość dla u, a obliczywszy $G_s : u$ i wyszukawszy dla danego p w tablicy str. 302 wartość $G_s : u$, jaknajbardziej zbliżoną do obliczonej, otrzymamy wprost z tablicy średnicę d. Z drugiej tablicy dla wartości φ (str. 303) można odszukać wartość φ, odpowiadającą danemu p i oznaczonej już średnicy d; wartość ta φ, podstawiona we wzór ostatni, daje stratę ciśnienia z w kg/cm². W sposób podobny postępujemy, jeżeli zadane są dwie inne wielkości.

2. Przy stracie ciśnienia, przekraczającej dwie atm. i przy szybkościach pary ponad 20 m/sek., wzór powyższy na z wystarcza tylko do grubego szacowania. Dla dokładniejszych obliczeń podaje H. Fischer *) wzory na stratę ciśnienia między początkiem a końcem przewodu parowego w atm. (kg/cm²), a mianowicie:

$$z = p_1 - p_2, \text{ przyczem:}$$

$$p_2 = \sqrt{(0{,}12 + p_1)^2 - \frac{Kl}{10^{10} \cdot 4000\, d^5}} - 0{,}12, \text{ jeżeli } p_1 < 3{,}6 \text{ kg/cm}^2,$$

$$p_2 = \sqrt{(0{,}3 + p_1)^2 - \frac{Kl}{10^{10} \cdot 3766\, d^5}} - 0{,}3, \text{ jeżeli } p_1 > 3{,}6 \text{ kg/cm}^2.$$

We wzorach powyższych oznacza:

$K = 3\, G_s^2 + (3\, G_s + \pi d l k)\, \pi d l k$,

p_1 bezwzględną prężność pary w kg/cm² na początku przewodu,

p_2 bezwzględną prężność pary w kg/cm² na końcu przewodu,

l długość, a d średnicę w świetle przewodu w m,

G_s wagę pary wypływającej z przewodu w kg/godz.,

k ilość wody skraplającej się na godzinę w kg/m² wewnętrznej powierzchni przewodu (p. str. 305),

$\pi d l k$ ilość wody skroplonej w całym przewodzie w kg/godz.

2. Ochładzanie zewnętrzne.

Wielkość straty pary przez ochładzanie zewnętrzne nie tyle zależy od materyału użytego na osłonięcie przewodów, jak raczej od sposobu i staranności wykonania osłony. Strata pary wzrasta wraz z powiększeniem ciśnienia pary, oraz ze zmniejszeniem grubości osłony.

O istotnej wysokości strat, powodowanych przez skraplanie się pary, daje pojęcie poniższe zestawienie wyników z prób, dokonanych na rozmaitych przewodach i z przeróżnemi materyałami osłaniającymi (p. tabl. str. 305). Próby te dokonywano przy tak odmiennych warunkach zewnętrznych, że nie można bezpośrednio porównywać nawzajem liczb, podanych dla rozmaitych materyałów osłaniających.

3. Znając ilość pary i jej ciśnienie, potrzebne w końcu przewodu danej długości, obliczamy najwłaściwszą jego średnicę, z uwzględnie-

*) Dinglers Politechn. Journal, tom 236, str. 356.

(Ciąg dalszy na str. 306.)

Ilość wody k, skroplonej na godzinę w kg/m² wewnętrznej powierzchni rur.

Rodzaj przewodu parowego	Rodzaj osłony przewodu	Ciśnienie pary w atm. ponad barometryczne (nadciśnienie)	k Kołnierze rur nieosłonięto	k Kołnierze rur osłonięto	Uwagi
Przewód lanożelazny: $l = 323$ m, $d = 0{,}140$ m.	Masa osłaniająca korkowa Grünzweig & Hartmann'a 20 mm grubości + 10 mm płaszcza z pilśni i blachy.	3,0	1,03	—	Przewody szybowe.
		4,0	1,09	—	
		5,0	1,21	—	
		6,0	1,33	—	
Takiż przewód: $l = 365$ m, $d = 0{,}294$ m.	Łupiny korkowe 40 mm + 8 mm masy azbestowej.	5,2	0,732	—	
Przewód kutożelazny: $l = 330$ m, $d = 0{,}075$ m.	Masa osłaniająca korkowa, Grünzweig & Hartmann'a, 20 mm gr. + 10 mm pilśni.	3,0	1,10	—	
		4,0	1,21	—	
		5,0	1,29	—	
		6,0	1,35	—	
Przewód kutożelazny: $l = 22$ m, $d = 0{,}120$ m.	Stary sznur z masą krzemionkową, 25 mm grubości.	3,0	1,11	—	Przewody poziome.
		5,0	1,24	—	
	Nowy sznur z masą krzemionkową, 30 mm grubości.	3,0	0,93	—	
		5,0	1,13	—	
	Masa Knoch'a, 30 mm grubości.	3,0	0,93	—	
		5,0	1,128	—	
	Przewód nieosłonięty.	3,0	3,39	—	
		5,0	4,17	—	
	Oertgen & Schulte. Masa krzemionkowa, 20 mm grubości.	3,0	0,96	0,85	
		5,0	1,128	0,956	
	Płyty torfowe, 35 mm grubości, z podkładem azbestowym.	3,0	0,62	0,54	
		5,0	0,70	0,64	
	Łupiny azbestowo-jedwabne, 26 mm grub., z podkładem azbestowym.	3,0	0,71	—	
		5,0	0,812	—	

niem wzajemnej zależności pomiędzy oporem, stratą pary i średnicą rury w sposób następujący:

1. Jeżeli zadanem jest ciśnienie pary w kotle, to określa ono zarazem i spadek ciśnienia w przewodzie, a natenczas szybkość przepływu pary i średnica przewodu wynikają wyłącznie ze wzoru na opór w przewodzie, bez względu na to, czy stosunki skraplania się pary w przewodzie ułożą się mniej lub więcej korzystnie. Stratę wskutek skraplania moglibyśmy zmniejszyć jedynie przez zmniejszenie średnicy przewodu, co wymagałoby jednak większego spadku ciśnienia, którym w danym wypadku nie rozporządzamy.

2. Jeżeli ciśnienie pary w kotle nie jest przepisane, to obliczenia średnicy przewodu dokonywamy z uwzględnieniem możliwie najmniejszego całkowitego zużycia pary, t. j. przez silnicę parową łącznie z przewodem. Obliczenia porównawcze dla znaczniejszych lub mniejszych spadków ciśnienia, czyli dla mniejszych lub większych średnic przewodu, dozwalają nam wybrać najwłaściwsze, przyczem należy uwzględniać i wymagania praktyczne, jakim silnica ma czynić zadość.

Ze względu na sam koszt pary korzystniejszym zawsze będzie znaczny spadek ciśnienia z ciasnym przewodem, aniżeli nieznaczny spadek ciśnienia z obszernym przewodem.

Zasadniczo błędnem byłoby oznaczanie średnicy przewodów doprowadzających i odprowadzających parę przy silnicy parowej wprost podług przekroju kanałów parowych przy cylindrze.

F. Parcie wiatru i opór powietrza.

a. Parcie wiatru na powierzchnię nieruchomą.

I. Powierzchnia prostopadła do kierunku wiatru.

Jeżeli oznacza:

F pole nieruchomej powierzchni płaskiej w m²,

P parcie wiatru prostopadłe na F w kg,

v szybkość wiatru w m/sek., *)

g przyspieszenie ciężkości $= 9{,}81$ m/sek.²,

ψ spółczynnik doświadczalny, który ze wzrostem pola F zmniejsza się z 1,97 do 1,86,

γ wagę jednego m³ powietrza w kg (p. str. 277 i 279),

to (podobnie jak dla uderzenia wody nieograniczonej, p. str. 271) będzie i tu:

$$P = \psi \gamma F \frac{v^2}{2g},$$

a jednostkowe parcie wiatru w kg/m²:

$$p = \frac{P}{F} = \psi \gamma \frac{v^2}{2g}.$$

*) W czasie orkanu 12 lutego 1894 r. zmierzono następujące największe szybkości wiatru: wyspy Orkneyskie $v = 43$ m/sek., Holyhead $v = 39$ do 40 m/sek., Fleetwood uderzenie wiatru $v = 54$ m/sek., Hamburg $v = 42$ m/sek.

Szybkość wiatru v (a więc i jego parcie p) wzrasta wraz z oddaleniem od powierzchni ziemi; prawa jednak rządzącego temi objawami dotychczas nie znamy. Por. też dane w Zeitschr. d. V. d. Ing. 1896, str. 1125, oraz 1897, str. 291.

Jeżeli $\psi = 1{,}86$, a $\gamma = 1{,}293$ kg/m³ (dla suchego powietrza przy 0° i 760 mm sl. rt.), to otrzymamy wzory:

$$P = 0{,}12248\, F v^2 \quad \text{i} \quad p = 0{,}12248\, v^2,$$

podług których obliczono tablicę poniższą:

v	2	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	m/sek.
p	0,5	1,1	4,4	9,9	17,6	27,6	39,7	54,0	70,6	89,3	110,2	133,4	158,7	186,3	216,1	kg/m².

Podług tychże wzorów obliczono parcie wiatrów w **„Międzynarodowej skali siły wiatru"** Beaufort'a (p. Dział XII, Budowa okrętów).

Dla $\psi = 1{,}97$ będzie $P = 0{,}13\, F v^2$, a $p = 0{,}13\, v^2$.

Też same wzory i równania stosują się i do oporu, jaki nieruchome powietrze przedstawia powierzchni płaskiej, poruszającej się prostopadle do swej płaszczyzny. Spółczynnik ψ zależy wówczas od v i od przyspieszenia ruchu. *)

2. Powierzchnia pochylona do kierunku wiatru.

Gdy wiatr uderza w nieruchomą powierzchnię F, która z kierunkiem wiatru tworzy kąt α, wówczas parcie wiatru, prostopadłe do powierzchni, będzie:

$$P = p_1 F;$$

wartość p_1 wyrażamy zaś w parciu jednostkowem p, tej samej wartości jak w **1.**

1) podług I. Newton'a: $p_1 = p \sin^2 \alpha$,

2) podług F. R. v. Lössl'a: $p_1 = p \sin \alpha$,

3) podług Rayleigh'a i Gerlach'a: $p_1 = p \dfrac{(4 + \pi) \sin \alpha}{4 + \pi \sin \alpha}$. **)

Brak dotąd dostatecznych doświadczeń do orzeczenia, który z tych trzech wzorów jest najbliższy prawdy. Wzór 1) daje najmniejsze, wzór 3) największe parcia. Obliczenia, dokonane na podstawie wzoru 1) przez H. Müller'a z Wrocławia dla balonu „La France", okazały się zgodnemi z doświadczeniem przy tej sposobności nabytem.

Według przepisów ministeryum komunikacyi z r. 1884 w Rosyi, przy obliczaniu mostów przyjmuje się ciśnienie wiatru:

a) most niecbciążony 264 kg/m² (1¹/₂ puda na st. kw.).

b) most obciążony 132 kg/m² (³/₄ puda na st. kw.).

Król. Prusk. akademia budowlana ***) orzeczeniem z dnia 13 Lipca 1889 r. uznała, że dla Niemiec w obliczeniach stateczności wysokich budowli starczy przyjąć parcie wiatru $p = 125$ kg/m², a $p_1 = p \sin^2 \alpha$. †) przyczem jednakże uwzględnianie szczególnych warunków miejscowych bynajmniej się nie wyklucza. Np. dla latarni morskich przyjmowano w niektórych wypadkach $p = 330$ kg/m².

---

*) Handb. d. Baukunde I, str. 844.

**) Centralbl. d. Bauverw. 1885, str. 203. Tamże podane wykreślne porównanie wyników tych trzech wzorów.

***) Centralbl. d. Bauverw. 1889, str. 279.

†) Zgodnie z temże orzeczeniem wypadkowa z najniebezpieczniejszego parcia wiatru i ciężaru własnego tej części budowli, która obciąża przekrój niebezpieczny, powinna leżeć nietylko w obrębie muru, lecz jeszcze tak daleko od jego krawędzi zewnętrznej, aby natężenie krańcowe nie przekraczało dozwolonej wytrzymałości materyału na ciśnienie, nawet w tym przypadku, gdyby spoiny od strony wiatru miały się rozwierać. J. Goebel (w Zeitschr. d. v. d. Ing. 1898, str. 181) zaleca dla wysokich kominów w wewnętrznych okolicach Niemiec stosowanie wzoru 1) i wartości $p = 200$ kg/m².

Pruskie ministeryum robót publicznych w przepisach z dnia 16 maja 1890 r. naznacza $p \geq 125$ kg/m² (zwiększając je dla budowli odosobnionych do wartości $p = 250$ kg/m²) kierunek wiatru poziomy i obliczanie parcia ukośnego podług wzoru $p_1 = p \sin \alpha$.

Toż samo ministeryum w przepisach z września 1895 r. naznacza dla **mostów**: parcie wiatru na most obciążony $p = 150$ kg/m², a na most nieobciążony dla obliczeń jego stateczności: $p = 250$ kg/m².

Przepisy budowlane dla Wiednia i Austryi (p. Dział VII, Kotły parowe) wymagają dla **kominów** przynajmniej dwukrotnego bezpieczeństwa przeciw wywróceniu przy parciu wiatru $p = 150$ kg/m². Nadto powinna być przewidziana możność podwyższenia w przyszłości komina przynajmniej do 35 m.; ciśnienie zaś spowodowane przez ciężar własny nie powinno w żadnym punkcie pierścieniowatych przekrojów muru przekroczyć $k = 8$ kg/cm².

Dla budowli otwartych, hal, szop i t. p. wypada nadto uwzględniać w obliczeniach parcie wiatru z wewnątrz na zewnątrz, które to parcie liczyć można po 60 kg/m² w kierunku poziomym.

Parcie normalne $P = p_1 F$ rozkłada się na dwie siły składowe:

w kierunku wiatru . . . . . $P_1 = p_1 F \sin \alpha$,
prostopadle do tego kierunku . . $P_2 = p_1 F \cos \alpha$,

3. Parcie wiatru (w kg) na **okrągły walec**, którego oś jest prostopadła do kierunku wiatru, wylicza się:

podług wzoru 1) na: $P_1 = {}^2/_3\, p F = 0{,}667\, p F = 0{,}667\, p d h$,
podług wzoru 2) na: $P_1 = {}^1/_4\, \pi p F = 0{,}785\, p F = 0{,}785\, p d h$,

w powyższem oznacza d średnicę, a h wysokość walca w m, $F = d \cdot h$ rzut powierzchni walca, prostopadły do kierunku wiatru, w m². *)

4. Parcie wiatru (w kg) na prawidłowy **graniastosłup ośmiokątny**, o osi prostopadłej do kierunku wiatru, wynosi conajwyżej:

podług wzoru 1) . . . . $P_1 = 0{,}707\, p F = 0{,}707\, p D h$,
podług wzoru 2) . . . . $P_1 = 0{,}828\, p F = 0{,}828\, p D h$,

jeżeli D oznacza średnicę koła wpisanego w podstawę, a h wysokość graniastosłupa w m, zaś $F = D h$.

Podobnie dla prawidłowego **graniastosłupa sześciokątnego** otrzymamy parcie wiatru:

podług wzoru 1) . . . . $P_1 = 0{,}75\, p F = 0{,}75\, p D h$,
podług wzoru 2) . . . . $P_1 = 0{,}866\, p F = 0{,}866\, p D h$.

5. Parcie wiatru (w kg) na **graniastosłup kwadratowy**, o wysokości h i długości boku kwadratu $= a$ (w m) będzie:

a) dla wiatru w kierunku prostopadłym do jednej z bocznych płaszczyzn: $P_1 = p a h$,

b) dla wiatru w kierunku prostopadłym do jednej z przekątni:

podług wzoru 1) . . . . $P_1 = 0{,}707\, p a h$,
podług wzoru 2) . . . . $P_1 = p a h$.

6. W literaturze natrafiamy na wiele danych, częstokroć znacznie się różniących od powyżej podanych dla parcia wiatru na powierzchnie ciał o przekroju okrągłym lub wielokątnym. Niedawno Irminger z Kopenhagi obliczył dla walca okrągłego: $P_1 = 0{,}57\, p d h$, dla graniastosłupa kwadratowego w przypadku 5. a: $P_1 = 0{,}95\, p a h$, a w przypadku 5. b.: $P_1 = 0{,}79\, p a h$, dla kuli $P_1 = 0{,}31\, p \cdot {}^1/_4\, \pi D^2$. Fr. Ritter z Wiednia oblicza **) dla walca okrągłego $P_1 = 0{,}45\, p d h$, a dla kuli $P_1 = 0{,}33\, p \cdot {}^1/_4\, \pi D^2$.

*) Wykreślanie tych paré p. Centralbl. d. Bauverw. 1884, str. 534 i 1885, str. 60.
**) Fr. Ritter, Parcie wiatru na powierzchnie walcowe i kulisto, Zeitschr. f. Luftschiffahrt und Physik d. Atm., kwiecień, maj 1896.

7. Przy obliczaniu **obciążenia dachów** parciem wiatru, uwzględnia się niekiedy, że wiatr może wiać w kierunku pochylonym do 10^0 względem poziomu, a mianowicie z góry w dół. [Podług Lilienthal'a *) miewa jednak wiatr niekiedy nawet kierunek pochylony do poziomu o 3^0 z dołu w górę].

Jeżeli β oznacza kąt pochyłości dachu względem poziomu, to według wzoru 1) i przypuszczając pochylenie wiatru na 10^0 w dół, otrzymamy:

a) obciążenie wiatrem, prostopadłe do płaszczyzny dachu:
$= p \sin^2(\beta + 10^0)$ kg/m² pochyłej powierzchni dachu;
b) pionowe obciążenie dachu przez wiatr:
$= p \sin^2(\beta + 10^0)$ kg/m² rzutu poziomego płaszczyzny dachu;
c) poziome obciążenie dachu przez wiatr:
$= p \sin^2(\beta + 10^0)$ kg/m² rzutu pionowego płaszczyzny dachu;

a więc równe obciążenia jednostkowe we wszystkich tych trzech przypadkach.

b. Parcie wiatru na powierzchnie ruchome (śmigi wiatraków).

Jeżeli oznacza:

v szybkość wiatru w kierunku osi wiatraka w m/sek.,
ω szybkość kątową śmig czyli skrzydeł (por. str. 150 i nast.),
$u_x = x\omega$ szybkość obwodową cząstki dF powierzchni śmigi, w odległości x (w m) od osi, w m/sek.,
l długość śmigi w m,
u_l szybkość obwodową, w odległości l od osi, w m/sek.,
b stałą szerokość śmigi w m,
a liczbę śmig,
φ zmienną wartość kąta pochylenia powierzchni śmigi do kierunku wiatru, wzrastającą od $\varphi = \beta$ do $\varphi = \alpha$,
i jeżeli znaki γ, g i ψ zatrzymują znaczenia podane na str. 306),

to **pędzące parcie** na cząstkę dF powierzchni śmigi, w oddaleniu x od osi, będzie:

$$dP = \psi\gamma \cdot dF \frac{(v \sin\varphi - u_x \cos\varphi)^2}{2g} \cos\varphi.$$

Wyrażenie to staje się największością, gdy:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{3}{2}\frac{u_x}{v} + \sqrt{2 + \left(\frac{3}{2}\frac{u_x}{v}\right)^2}.$$

Sprawdzono spostrzeżeniami, że dla **kół wiatrakowych**, o długości śmig $l = 12$ m, przy ich liczbie $a = 4$, było:

$$\frac{u_l}{v} = \frac{l\omega}{v} = 2{,}32, \quad \text{a więc} \quad \frac{u_x}{v} = \frac{x\omega}{v} = (2{,}32 : 12)x = 0{,}193\,x.$$

*) S. Lilienthal, Der Vogelflug; Berlin 1889, R. Gärtner.

Przy pomocy powyższego wzoru na tg φ obliczono tablicę poniższą:

$x =$	1 m	2 m	3 m	4 m	5 m	6 m
$\varphi =$	60^0	$64^0\,39'$	$68^0\,27'$	$71^0\,30'$	$73^0\,57'$	$75^0\,24'$
$x =$	7 m	8 m	9 m	10 m	11 m	12 m
$\varphi =$	$77^0\,29'$	$78^0\,48'$	$79^0\,50'$	$80^0\,54'$	$81^0\,29'$	$82^0\,8'$

Moc pracy przeniesionej przez parcie wiatru na śmigi, jest:

$$E = \frac{8}{81}\psi\gamma\frac{bv^4}{\omega g}\left(\Phi(\alpha) - \Phi(\beta)\right) \text{ kgm/sek.,}$$

jeżeli $$\Phi(\varphi) = \frac{1}{\cos\varphi} + \frac{\cos^3\varphi + \cos\varphi}{2\sin^4\varphi} + \frac{3}{2}\ln\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}.$$

Parcie wiatru na koło (śmigi) wiatrakowe w **kierunku jego osi**:

$$D = \frac{8}{27}\psi\gamma\frac{bv^3}{\omega g}\left(\Omega(\alpha) - \Omega(\beta)\right) \text{ kg,}$$

jeżeli $$\Omega(\varphi) = \frac{1 - 2\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi\cos\varphi} + 2\ln\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}.$$

Dla wyżej podanych śmig wiatraka, których b=12 m, będzie: $\Phi(60^0)$= 1,378, $\Omega(60^0) = 0{,}036$, oraz $\Phi(82^0\,8') = 7{,}172$, $\Omega(82^0\,8') = 6{,}891$.

Szacunkowo moc pracy wiatraka wyrażamy wzorem:

$$E = 0{,}0302\,F_n v^3 \text{ kgm/sek.,}$$

albo: $$N = \frac{E}{75} = \frac{F_n v^3}{2500} M\zeta \text{ (koni mechanicznych),}$$

w których F_n oznacza sumę powierzchni śmig w m².