

DZIAŁ CZWARTY.

WYTRZYMAŁOŚĆ MATERIAŁÓW.

Wszystkie siły w niniejszym rozdziale wyrażać będziemy w kg, długości w cm, naprężenia zaś w kg/cm².

I. PRAWA OGÓLNE I SPÓŁCZYNNIKI DOŚWIADCZALNE. *)

A. Objaśnienia i prawa ogólne.

Odształcenia (sprężyste), jakim podlega dane ciało pod wpływem działania sił zewnętrznych, polegają na zmianie rozmiarów liniowych oraz kątowych. Pierwsze są skutkiem działania sił normalnych σ , skierowanych prostopadłe na daną cząstkę przekroju, drugie zaś sił tnących, czyli przesuwających τ , występujących w płaszczyźnie danej cząstki przekroju.

a. Zmiany rozmiarów liniowych i naprężenia normalne.

1. Ciągnięcia. Dwie siły równe, lecz odwrotnie skierowane, działające w osi pręta walcowego, o długości l i średnicy d , na jego końce w ten sposób, że każda z sił będzie skierowana od końca pręta na zewnątrz, spowodują następujące odształcenia:

1) **Wydłużenie**, czyli **rozciągnięcie** długości l o λ , t. j. do $l + \lambda$.

2) **Zwężenie** przekroju pręta, t. j. zmianę średnicy d o δ na $d - \delta$.

Stosunek $\varepsilon = \frac{\text{rozciągnięcie}}{\text{długość pierwotną}} = \frac{\lambda}{l}$ nazywa się **rozciągnięciem jednostkowym**, a stosunek $\varepsilon_q = \frac{\delta}{d} = \frac{\varepsilon}{m}$ nazywa się **zwężeniem jednostkowym**.

Ilość $m = \varepsilon : \varepsilon_q$ zależy od materiału i równa się: dla materiałów jednolitych od 3 do 4; dla metali zaś, stosownie do obecnego stanu wyników doświadczalnych, podług C. v. Bach'a $m = 10/3$.

2. Rozciągnięcie jednostkowe $\varepsilon = \lambda : l$ następuje skutkiem sił P , lub też jeżeli F oznacza przekrój danego pręta w cm², skutkiem naprężenia (normalnego) ciągnącego czyli ciągnięcia $\sigma = P : F$.

*) C. v. Bach, die Maschinen-Elemente, 6 wyd.; Stuttgart 1897, A. Bergsträsser.

Stosunek $\frac{\text{rozciągnięcie jednostkowe}}{\text{ciągnięcie}} = \frac{\varepsilon}{\sigma} = \alpha = \frac{1}{E}$ nazywa się **spółczynnikiem rozciągliwości** (cm^2/kg), odwrotna zaś jego wartość $E = 1 : \alpha$ zwie się **spółczynnikiem sprężystości** (kg/cm^2).

Mamy zatem: $\frac{\lambda}{l} = \frac{\sigma}{E}$, $\lambda = \alpha l \sigma$,

oraz $\alpha = \frac{l \lambda}{Pl}$ i $E = \frac{Pl}{l \lambda}$.

Spółczynnik rozciągliwości α jest przeto rozciągnięciem w cm. jakiemu podlega dany pręt walcowy, o długości 1 cm i przekroju 1 cm^2 pod działaniem siły rozciągającej 1 kg. lub też, treściwiej się wyrażając, jest to rozciągnięcie jednostki długości pod działaniem ciągnięcia 1 kg. *)

Pojęcie współczynnika sprężystości E objaśniano dotychczas niewłaściwie jako naprężenie w kg/cm^2 , jakiemu należałoby poddać dane ciało, ażeby rozciągnięcie jego było równe pierwotnej długości ($\lambda = l$), gdyby podobne odkształcenie było możliwe przy niezmiennem α .

Wielkości α i E pozostają wogóle w pewnej zależności od naprężenia σ ; dla niektórych materiałów (szczególniej dla żelaza kutego i stali) są one jednak w pewnych granicach naprężeń wielkościami prawie stałymi; rozciągnięcia jednostkowe ε pozostają zatem w stosunku prostym do naprężeń σ ($\varepsilon = \alpha \sigma$, prawo Hook'a). Największe naprężenie σ_p , w kg/cm^2 , przy którym wyżej wzmiankowana proporcjonalność jest jeszcze zachowaną, nazywa się **granica proporcjonalności**.

Większość materiałów budowlanych nie posiada jednakże tej granicy, lecz podlega ogólnemu prawu o odkształceniach sprężystych podług wzoru C. v. Bach'a i W. Schüle'go: **)

$$\varepsilon = \alpha \sigma^n.$$

W tym wzorze α i n są wielkościami stałymi. Dla surowca, miedzi, odlewów cynkowych, granitu, piaskowca, cementu, zaprawy cementowej i betonu $n > 1$, dla skóry i lin konopnych $n < 1$.

Oznaczywszy przez α_σ zmienny współczynnik rozciągliwości, odpowiadający naprężeniu σ , otrzymamy:

$$\varepsilon = \alpha \sigma^n = \int_0^\sigma \alpha_\sigma \cdot d\sigma, \quad \text{a więc} \quad \alpha n \sigma^{n-1} \cdot d\sigma = \alpha_\sigma \cdot d\sigma,$$

$$\alpha_\sigma = (\alpha n) \sigma^{n-1}.$$

Poza granicami naprężeń proporcjonalnych σ_p dochodzimy do naprężenia σ_f (kg/cm^2), które nazywamy **granica ciastowatości**. Pod działaniem tych naprężeń pewne ciała podlegają bardzo szybkim odkształceniom trwałym, t. j. nie powracają już do kształtu pierwotnego.

Wytrzymałość na ciągnięcie lub też naprężenie rozrywające K_x (kg/cm^2) oznacza naprężenie, którego nieznaczne nawet powiększenie

*) Spółczynnik rozciągliwości α odpowiada współczynnikowi wydłużalności wskutek ciepła. Jak współczynnik rozciągliwości zależy od naprężenia, tak współczynnik wydłużalności cieplikowej od temperatury. Naprężenie więc i temperatura są poniekąd pojęciami pokrewnymi.

**) C. v. Bach, Maschinen-Elemente, 6 wyd., str. 686; Zeitschr. d. V. d. Ing. 1897 str. 248.

powodowałyby już rozerwanie danego ciała (pręta). Przy prętach rozerwanych (o długości l i przekroju F) należy oznaczać długość l_b po rozerwaniu i przekrój F_b w miejscu rozerwania. Na podstawie tych danych obliczamy:

$$\varphi = 100 \frac{l_b - l}{l} \text{ i nazywamy rozciągnięciem,}$$

$$\psi = 100 \frac{F - F_b}{F} \text{ - zwężeniem przekroju}$$

pręta rozerwanego, wyrażonym w odsetkach pierwotnej długości i pierwotnego przekroju; ψ jest miarą wisności materiału.

3. Jeżeli pręt, rozciągnięty o długość λ , odciążymy, to długość jego nie powróci do pierwotnej wielkości, lecz pozostanie większą o t. zw. rozciągnięcie trwałe λ_2 , czyli wyciągnięcie. Rozciągnięcie zaś znikające $\lambda_1 = \lambda - \lambda_2$ nazywa się **rozciągnięciem sprężystym**.

Przy małych naprężeniach rozciągnięcia trwałe λ_2 równają się 0, lub są znikomo małe. Naprężenia σ_e (kg/cm²), aż do których to zachodzi, nazywają się **granicy sprężystości**.

Przez kucie, wyciąganie lub walcowanie metali (przez hartowanie stali, przez zmniejszenie zawartości P i C w żelazie) granice sprężystości σ_e powiększają się, podobnie też, aczkolwiek w mniejszym stopniu, i wytrzymałość na ciągnięcie K_e , natomiast zmniejsza się wyciągliwość, t. j. rozciągnięcie trwałe λ_2 . Żarzenie daje skutki odwrotne.

Dane ciało jest tem więcej sprężyste, im większem jest rozciągnięcie sprężyste λ_1 , w stosunku do całego rozciągnięcia λ . Stosunek $\lambda_1 : \lambda$ służy (podług Hartig'a) za **miarę sprężystości** (przy pewnym stałym naprężeniu). Dla ciał doskonale sprężystych $\lambda_1 : \lambda = 1$; dla ciał niedoskonale sprężystych zaś stosunek ten jest ułamkiem właściwym.

4. Odształcenie, jakiemu pewne ciało ulega pod działaniem naprężania i odprężania, wymaga pewnego okresu czasu, podczas którego ujawnia się **skuteczność sprężystości**.

5. Wszystkie objaśnienia i prawa powyższe stosują się również i do ciał poddanych działaniu sił cisnących.

Naprężenie cisnące (czyli ciśnienie) σ powoduje jednak skrócenie czyli ściskanie λ pręta o długości pierwotnej l ; podobnie też będzie $\varepsilon = \lambda : l$; rozszerzenie zaś poprzeczne, czyli wypęczenie będzie $\varepsilon_q = \varepsilon : m$. Granica ciastowatości zjawia się, gdy materiał wyciska się w bok, nie tracąc swej spistości.

Wytrzymałość na ciśnienie K (kg/cm²) lub też ciśnienie roznigatające dany materiał zmniejsza się w miarę powiększającej się długości pręta.

6. **Praca mechaniczna przy zmianie długości**. Jeżeli siła powiększająca się podczas działania zwolna od 0 do P , a przytknięta na końcu pręta sprężystego, rozciąga go lub ściska, przyczem w przekroju F' (cm²), w oddaleniu x (cm) od końca, powstaje naprężenie normalne σ (kg/cm²), to na dokonanie odkształcenia zużywa się pewna praca mechaniczna (kg/cm), która wyrazi się wzorem:

$$A = \frac{1}{2E} \int_0^l \frac{P^2 \cdot dx}{F} = \frac{1}{2E} \int_0^l \sigma^2 F \cdot dx;$$

dla pręta graniastosłupowego, o stałym przekroju F , czyli objętości $V = Fl \text{ cm}^3$, wzór powyższy przekształca się na:

$$A = \frac{\sigma^2}{2E} Fl = \frac{\sigma^2}{2E} V = \frac{F}{2} \frac{\sigma}{E} l = \frac{1}{2} P \lambda,$$

jeżeli λ oznacza odkształcenie długości pręta, t. j. jego rozciągnięcie lub ściśnięcie.

Jeżeli rozciągnięcie λ składa się z rozciągnięcia sprężystego λ_1 i trwałego λ_2 (por. 3.), to podług F. Grashof'a mechaniczna praca rozciągania do $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ równać się będzie:

$$A = P \left(\frac{1}{2} \lambda_1 + \theta \lambda_2 \right),$$

w którym to wzorze współczynnik θ ma wartość leżącą między 0,75 a 1,0.

b. Naprężenia tnące i odkształcenia kątowe.

1. Jeżeli dwie cząstki powierzchni na sobie prostopadle, pod działaniem sił zewnętrznych się pochyla, a kąt prosty, między nimi zawarty, zmieni się o wielkość γ , mierzoną stosunkiem łuku do promienia, to ilość γ równą jest liczbie także długości wzajemnego przesunięcia się dwóch równoległych cząstek powierzchni, leżących w odległości $= 1$ od siebie. Przesunięcie to lub też odkształcenie kątowe γ danych cząstek jest skutkiem **naprężeń tnących** τ , zjawiających się zawsze parami w obydwóch prostopadle na sobie stojących cząstkach powierzchni.

$$\text{Stosunek: } \frac{\text{przesunięcie}}{\text{naprężenie tnące}} = \frac{\gamma}{\tau} = \beta = \frac{1}{G}$$

nazywa się **spółczynnikiem przesuwalności** (cm^2/kg), a wartość odwrotna ($G = 1 : \beta$) nazywa się **spółczynnikiem sprężystości na przesuwanie**.

Spółczynnik przesuwalności wyraża zatem w cm kresę, o którą przesuną się względem siebie dwie równoległe cząstki powierzchni, odległe od siebie o 1 cm, pod działaniem naprężenia tnącego 1 kg/cm^2 , lub też wyraża on łuk tego kąta, o który dwie cząstki, pierwotnie prostopadle na sobie stojące, zmieniają kąt wzajemnego nachylenia pod działaniem naprężenia tnącego 1 kg/cm^2 .

2. Pomiędzy współczynnikami rozciągliwości α i przesuwalności β , jak również między współczynnikami sprężystości normalnej E i na przesuwanie G , zachodzą następujące związki:

$$\beta = \frac{2(m+1)}{m} \alpha, \text{ oraz } G = \frac{m}{2(m+1)} E,$$

w które podstawiając $m = 10/3$ (p. str. 327), otrzymamy:

$$\beta = 2,6 \alpha \text{ i } G = 5/13 E = 0,385 E.$$

3. **Wytrzymałość na cięcie** K_s (kg/cm^2) równa się naprężeniu tnącemu (czyli cięciu) rozcinającemu dane ciało, a więc powodującemu rozczepienie się dwóch leżących na sobie powierzchni przekrojów.

τ_p (kg/cm^2) jest to naprężenie u granicy proporcjonalności przesunięć (p. str. 328).

4. Czysto praktyczne znaczenie posiada jeszcze **wytrzymałość na gięcie** K_b (kg/cm^2), jako naprężenie normalne, powodujące złamanie ciała przeginanego, oraz **wytrzymałość na skręcanie** K_d (kg/cm^2),

jako obliczone natężenie tnące, które powoduje ukłócenie (pęknięcie) ciała skręcanego.

c. Naprężenie bezpieczne i stopień bezpieczeństwa przeciw pęknięciu.

Naprężenie bezpieczne (k_t ciągnienie, k_c ciśnienie, k_b gięcie, k_s cięcie, k_d kręcenie) jest to naprężenie w kg/cm^2 , którego działaniu można dany pręt poddać bezpiecznie, t. j. bez obawy jego pęknięcia. Naprężenie bezpieczne przyjmujemy zazwyczaj mniejszem niż naprężenia u granic proporcjonalności i sprężystości.

Współczynnik bezpieczeństwa S jest to stosunek wytrzymałości do stosowanego naprężenia bezpiecznego. A więc współczynnik bezpieczeństwa na ciągnienie jest: $S = K_z : k_t$, na ciśnienie $S = K : k_c$ i t. d. Mówimy zatem o zastosowaniu S krotnem bezpieczeństwie.

B. Współczynniki sprężystości i wytrzymałości.

Wszystkie dane liczbowe wyrażamy w kg i cm^2 . Dalsze dane, dotyczące wytrzymałości innych materiałów podano w Dziale ósmym: Materiały budowlane.

a. Żelazo i stal. (Podług C. v. Bach'a.)

Gatunek żelaza	Współczynnik sprężystości	Współcz. sprężyst. na przesuwanie	Granica proporcjonalności	Granica ciastowatości	Wytrzymałość	
					na ciągnienie	na ciśnienie
	$E = \frac{1}{\alpha}$	$G = \frac{1}{\beta}$	σ_p	σ_f	K_z	K
Żelazo spawal. do włókien	2000000	770000	{ 1300 do 1700	{ 2200 do 2800	{ 3300 do 4000 ¹⁾	{ σ_f miarodajne
Żelazo zlewne.	2150000	830000	{ 2000 do 2400	{ 2500 do 3000	{ 3400 do 4400	{ σ_f miarodajne
Stal zlewna	2200000	850000	{ 2500 do 5000 ²⁾	{ 2800 i więc. Twardsza, nie ma granicy ciastowatości	{ 4500 do 10000 ²⁾	{ dla miękkiej miarodajne σ_f dla twardej $K \geq K_z$.
Stal sprężynowa, ni hartowana	2200000	850000	4000 i więc.	—	{ 7500 do 9000	—
„ hartowana	2200000	850000	7500 i więc.	—	8000 i więc.	—
Odlew stalowy	2150000	830000	2000 i więc.	{ jak stal zlewna nie istnieje	{ 3500 do 7000 ³⁾ i więcej	{ jak stal zlewna
Żelazo lane (żeliwo)	{ 750000 do 1050000	{ 290000 do 400000	{ ciągn: $\epsilon = \frac{1}{1140000} \sigma^{1.4}$ ciśn.: $\epsilon = \frac{1}{1400000} \sigma^{1.067}$	—	{ 1200 do 1800	{ 7000 do 8000

Uwagi p. str. nast.

1) Wartość ta dla żelaza spawalnego || do włókien: \perp zaś do włókien

$$K_z = 2600 \text{ do } 3500.$$

2) Stal nanikłona z 5% niklu: $\sigma_p = 4000$ do 5000 , $K_z = 8500$.

z 25% niklu: $\sigma_p = 3500$ do 6000 , $K_z = 7000$ do 8000 .

3) Wyżarzony odlew stalowy Fried. Krupp'a, jako odlew martynowski: $K_z = 4000$ do 4800 , jako odlew tyglowy: $K_z = 4500$ do 7000 .

Wymagania, jakim powinny zadośćczynić żelazo i stal pod względem wytrzymałości, rozciągliwości i zwężalności dla rozmaitych zastosowań, podano w Dziale ósmym: Materiały budowlane.

Wpływ temperatury. Podług doświadczeń Martens'a i Rauh'a^{*)} z żelazem zlewnem (I-go stopnia twardości), dla którego było:

w stanie niewyżarzonym: $K_z = 4100$, $\varphi = 26,9\%$, $\psi = 48,3\%$,

„ wyżarzonym: $K_z = 3850$, $\varphi = 30,4\%$, $\psi = 58,6\%$,

otrzymano dla temperatur od -20° do $+600^\circ$:

Temperatury. $t =$	-20^0	$+20^0$	100^0	200^0	300^0	400^0	500^0	600^0
Ciągnienie rozrywające K_z	4100	3850	3950	5100	4750	3300	1900	1070
1/1000 spółcz. sprężystości E	2070	2070	2010	1950	1880	1790	1510	1340
Rozciągnięcie %	37	37	22	19	23	45	66	99
Zwężenie przekroju %	57	58	51	41	23	56	78	90,5

$K_z \text{ min} = 3800$ przy $t = 50^\circ$; $K_z \text{ max} = 5150$ przy $t = 240^\circ$. $\varphi \text{ min} = 19\%$ przy $t = 100^\circ$.

$\psi \text{ min} = 23\%$ przy $t = 280^\circ$ (łamliwość żelaza zlewnego na niebiesko).

b. Miedź i jej stopy. (Podług C. v. Bach'a).

Rodzaj metalu	Spółczynnik sprężystości $E = \frac{1}{\alpha}$	Granica proporcjonalności σ_p	Ciągnienie rozrywające K_z	Rozciągnięcie φ %	Zwężenie przekroju ψ %
Blacha miedz. walcowana	1 100 000	200—400 ¹⁾	2000—2300 ²⁾	38	45—50
Mosiądz.	—	—	1500	—	—
Spiż	900 000	300	2000	—	—
Spiż na działa	1 100 000	300	3000	—	—
„ „ „ zbity	1 100 000	900	3200	—	—
Bronz nąfosforzony	—	—	4000	—	—
Metal Delta odlew surow.	—	—	3400—3700	—	—
„ „ twardo wale.	997 700	2200 ³⁾	5880 ³⁾	12,3	17,4
„ „ przekuty	—	1800	3600	—	—
Bronz Oerlikon }	—	2800	4400—5600 ¹⁾	15—25	—
Nr. A. przekuty }	—	—	—	—	—

1) Miedź, σ_p można podwoić, a nawet potroić przez powtarzane naprężania. $\sigma_s =$ prawie 0.

2) Miedź. Wytrzymałość na ciągnienie miedzi klepanej wynosi $K_z = 3000$; dla wyciąganej $K_z = 3150$; dla miedzi otrzymanej drogą elektrolityczną $K_z = 3800$.

Wytrzymałość na ciągnienie blachy miedzianej przy wyższych temperaturach wynosi: przy 50° 100° 150° 200° 250° 285° 367° 451° 556° tylko 98 95 91 85 79 75 66 51 33% wytrzymałości posiadanej przy temperaturze około 10° .

*) Mitteilungen aus den Königl. Tech. Versuchs-Anstalten zu Berlin, 1890; zeszyt IV, str. 159 i nast. Nadto A. Ledebur. Zeitschr. d. V. Ing. 1896, str. 565 i nast.

²⁾ **Metal Delta.** $\sigma_f = 3530$, ϵ_p (naprężenie tnące u granicy proporcjonalności) = 1030, K_d (naprężenie ukręcające) = 4070, walcowany i wyzarzony $K_s = 4300$.

¹⁾ Wytrzymałość różnych **bronzów i spiszów** podana w Centralbl. d. Bauv. 1885, str. 204.

c. Inne metale.

Glin (aluminium)

lany: $E = 675000$, $G = 260000$, $K_s = 1000$ do 1200, $\varphi = 3\%$;
walcowany lub kuty na zimno (nietemperowany): $K_s = 2300-2700$;
walcowany lub kuty na zimno (temperowany): $K_s = 800-1000$.

Bronz glinowy z 10% Al: $K_s = 6400$, $\varphi = 11\%$;

„ „ z 5,5% Al: $K_s = 4400$, $\varphi = 6\frac{1}{2}\%$.

Mosiądz glinowy z 3% Al: $K_s = 6000$, $\varphi = 7,5\%$;

„ „ z 1% Al: $K_s = 4000$, $\varphi = 5\%$.

Magnez: $K_s = 2320$, $K = 2720$, $K_b = 1600$, σ_p nie istnieje.

Cynk walcowany, przy 16°: $E = 150000$, $K_s = 1900$, $K = 1000$.

Cyna: $E = 400000$, $K_s = 350$.

Ołów miękki, walcowany lub lany: $E = 50000$, $K_s = 125$, $\sigma_f = 50$ do 150 (podług C. v. Bach'a zależnie od wysokości próbki).

Ołów twardy: $K_s = 300$, $\sigma_f = 300$.

Szkło: $E = 700000$, $K_s = 250$. Dla szkła dętego $K_b = 375$, dla szkła surowego $K_b = 200 + (1,5 - s)^2 \cdot 160$, przyczem s oznacza grubość szkła w cm.

Papier (w warstwach sklejaných): $K = 1500$.

d. Drzewo. (Podług J. Bausehinger'a i L. Telmajer'a).

Współczynniki wytrzymałości są zależne od stopnia wilgotności drzewa. Wytrzymałość zmniejsza się znacznie wraz z powiększającą się wilgotnością. Wytrzymałość na ciśnienie wzrasta znacznie dla drzewa odleżanego w miarę czasu odlegania się. Dane poniższe stosują się do całego przekroju drzewa, a więc rdzenia łącznie z białem.

Rodzaj naprężenia	Zawartość wilgoci w %	Współczynnik sprężystości E	Granica proporcjonalności σ_p	Wytrzymałość K	Zawartość wilgoci w %	Współczynnik sprężystości E	Granica proporcjonalności σ_p	Wytrzymałość K
Sosna, sośnina.				Dąb, dębina.				
Ciągnienie	13	90000	—	790	—	108000	475	965
Ciśnienie	18	96000	155	280	—	103000	150	345
Gięcie ¹⁾	23	108000	200	470	24	100000	215	600
Cięcie ²⁾	25	—	—	45	—	—	—	75
Jodła, jedlina.				Buk, buczyna.				
Ciągnienie	16	92000	—	750	—	180000	580	1340
Ciśnienie	19	99000	150	245	—	169000	100	320
Gięcie ¹⁾	29	111000	230	420	17	128000	240	670
Cięcie ²⁾	38	—	—	40	—	—	—	85

¹⁾ Rdzeń znajduje się w środku przekroju.

²⁾ Równoległe do włókien, w płaszczyznach przez oś pnia przechodzących.

e. Kamienie^{*)} i zaprawy.(Wytrzymałość na ciśnienie K , patrz poniżej).

Materiał	Wytrzymałość (pg. J. Bauschinger'a) na			Uwagi
	Ciągnienie	Gięcie	Cięcie	
Kamienie . . .	$K_s = 1/26 K$	$K_b = 1/6 K$	$K_s = 1/13 K$	—
Zapr. cement.	$K_s = 1/10 - 1/6 K$	$K_b = 1/4 K$	$K_s = 1/6 K$	$K_s \text{ min} = 16$
Zapr. wapien.	$K_s = 1/8 K$	—	—	—

Materiał	Ciśnienie rozgniatające K	Materiał	Ciśnienie rozgniatające K
Granit, ¹⁾ Dioryt, Syenit	800—2000	Zużel wielkopieczowy . . .	1000—2500
Porfir	1000—2600	Klinkier	300—800
Bazalt	1000—3200	Cegła średnio wypa- . . .	200—300
Trachit	500—1000	Cegła słabo lona . . .	150—200
Lawa bazaltowa	500	Mur z cegły	140
Wąka szara	500—1500	Cegła dziurkowata, pełna . . .	150
Piaskowiec węglowy	500—1800	Masa korkowa ²⁾	17
„ marglowy	700—1800	„ „ $K_b =$	7;2
„ uwarstwiony	300—1000	Cement bez piasku	250—270
Wapniak	500—1500	1 cz. ob. } + 1 cz. ob. piasku	200 { po 28 dniach. 180 { z nich 27 160 { pod wod.
Beton cementowy	60—140	cementu } + 2 „ „ „	
Sztuczny piaskowiec	450	portl } + 3 „ „ „	
„ „ $K_s =$	47	Dobra zapr. wapienna	40

¹⁾ Bach dla drobnziarnistego granitu niebieskiego oznaczył: $K = 1006$, $K_b = 84$, $K_s = 78$, $K_z = 45$.

²⁾ Z fabryki Grunzweig i Hartmann w Ludwigshafen nad Renem.

Spółczynnik sprężystości kamieni zależy w znacznej mierze od wielkości naprężenia: dla piaskowca np. otrzymał J. Bauschinger przy naprężeniu:

$\sigma = 0$ do 7 : $E = 68000$ } na ciśnieniu; $\sigma = 0$ do 3 : $E = 56000$ } na ciągnięciu.
 $\sigma = 75$ „ 100 : $E = 10000$ } $\sigma = 21$ „ 23 : $E = 25000$ }

Dla granitu podług C. v. Bach'a

na ciągnięciu: $\epsilon = \frac{1}{240000} \sigma^{1,4}$, na ciśnieniu: $\epsilon = \frac{1}{300000} \sigma^{1,2}$.

Spółczynnik sprężystości zapraw związanych bywa bardzo rozmaity, lecz wzrasta znacznie w miarę czasu wiązania.

E. Hartig otrzymał dla próbki z cementu portlandzkiego bez piasku, nasyconej wodą, w stanie nienaprężonym po 7, względnie 430-tu dniach: $E = 141000$, względnie $E = 318000$. Dla zwykłej zaprawy cementowej, wyschniętej na powietrzu było średnio $E = 257000$.

Dla betonu Monier'a bywa średnio $E = 66000$. W dobrym betonie cementowym z 1 cz. objęt. cementu, $2\frac{1}{2}$ —3 piasku i 5—6 żwiru E zmniejsza się od 320000 do 180000, w miarę jak się zwiększa ciśnienie od 0 do 40 kg/cm^2 .*)

Dla muru z klinkierów średnio $E = 28000$.

*1) Wyczerpujące dane o wytrzymałości kamieni naturalnych p. Hugo Koch, Die natürlichen Bausteine Deutschlands; Berlin 1892, Ernst Toeche.

**1) C. v. Bach, Versuche über die Elasticität von Beton, Zeitschr. d. V. d. Ing. 1895 str. 489.

f. Materiały na ciągnia.*)

(Porównaj str. 232 i nast.)

Podług doświadczeń Karmarsch'a ciągnięcie rozrywające druty zależy od ich średnicy. Jeżeli a i b oznaczają stałe podane w poniższej tabelicy dla rozmaitych gatunków drutu, a d jego średnicę w mm, to naprężenie rozrywające drut będzie w kg/cm^2 :

$$K_z = \frac{a}{d} + b.$$

Gatunek drutu	nieżarzony		wyżarzony		Gatunek drutu	nieżarzony		wyżarzony	
	a	b	a	b		a	b	a	b
Najlepszy drut żelaz.	1590	6370	380	3310	Drut mosiężny . .	1020	5480	700	2870
Zwykły drut żelazny	2290	4580	640	2870	Twardy drut ołow.	0	220	—	—
Drut stalowy . .	2670	6370	380	5730	Miękki	0	170	—	—
„ cynkowy . . .	220	1270	—	—	Drut platynowy . .	1210	2230	960	1850
„ miedziany . .	960	3500	0	2360	„ brązowy	1860	5030	—	—

Tablica poniższa podaje przybliżone wartości naprężeń zrywających druty, bez względu na ich średnice.

Material	Współczynnik sprężystości na ciągnięcie $E = \frac{1}{\alpha}$	Granica proporcjonalności na ciągnięcie σ_p	Współczynnik wytrzymałości na ciągnięcie K_z	Uwagi	
Drut (wyciąg. z polys. żelazny) { wyżarzony	— 2000000	4200 2000	5600 (do 7000) 4000 ¹⁾	Dla nowych lin drucianych E bywa około 0,35 razy większe, niż dla drutu z tego samego materiału.*)	
Drut ze stali { z polysk. besemerow. } wyżarz.	— 2150000	5200 2250	6500 4000—6000		
Drut ze stali tyglowej.	2150000	10000	9000—18000 ²⁾		
„ cynkowy	150000	—	1900		
„ miedziany . . .	1300000	1200	4000		
„ brązowy	—	—	4600—7100		
„ z brązu nakrzemionego . .	—	—	6500—8500		
„ z brązu dwoist.	—	—	7600		
Drut z metalu Höper'a } (ulepsz. brązu) } naosforzonego) } wyżarz.	— —	— —	14000 6300		$\varphi = 1\%$. $\varphi = 72\%$.
Drut z metalu Deita	—	—	do 9840		
„ mosiężny	1000000	1300	5000		
„ glinowy	—	—	2300—2700	przy $460^\circ K_s = 160$ $G = 26250$.	
„ ołowiany	70000	—	{ 220 twardy 170 miękki }		

*) Cięgnom nazywamy część konstrukcyjną, zdolną pracować wyłącznie tylko na ciągnięcie (liny, łańcuchy i t. p.).

Materyał	Spółczynnik sprężystości na ciągnięcie $E = \frac{1}{\alpha}$	Granica proporcjonalności na ciągnięcie σ_p	Spółczynnik wytrzymałości na ciągnięcie K_z	Uwagi
Pas skórzany, nowy	1250	160	} 250—450 ³⁾	Skóra na ciągnięcie. $\epsilon = \frac{1}{415} \sigma^{0.7}$
" " , używan.	2250	—		
Lina z konopi Manila, nowa	{ 8000 do 9500	—	} 1200 nowa	(podl. C. v. Bach'a).
Lina z konopi czesanych, nowa		{ 10500 do 12500		

¹⁾ Druć z żelaza zlewne go, wyżarzony, cynkowany dla telegrafów $K_z = 4000—4300$.

²⁾ J. Fowler & Co. w Leeds na wyrób lin drucianych, do przenoszenia pracy na maszyny rolnicze, używają drutu stalowego o współczynniku $K_z = 25300$; patrz Centralbl. d. Bauverw. 1880, str. 371.

³⁾ Przy szybkim rozrywaniu; natomiast przy obciążeniu długotrwałem (kilkumiesięcznem) wartość K_z obniża się do $\frac{2}{3}$ powyżej podanych.

⁴⁾ Wartość K_z dla lin drucianych podano też w Dziale piątym: Części maszyn.

C. Naprężenia bezpieczne.

a. Naprężenia bezpieczne dla maszyn.

Określenie pojęcia naprężeń bezpiecznych patrz str. 331.

W tabelicy poniższej *) podano po trzy naprężenia bezpieczne, oznaczone I. II. III., a przystosowane do trójakiego rodzaju obciążeń:

I. należy stosować przy obciążeniach stałych.

II. stosuje się, jeżeli naprężenie zmienia się dowolnie często, lecz sposobem ciągłym, w granicach od zera do pewnej największej wartości i z powrotem do zera, np. rozciągania, przeginięcia, skręcania i t. p. powtarzające się ustawicznie, lecz zawsze w tym samym kierunku.

III. stosują się wreszcie, gdy naprężenia zmieniają się sposobem ciągłym dowolnie często z pewnej największej wartości dodatniej przez zero do takiej samej wartości ujemnej, np. powtarzające się przeginięcia lub skręcania w kierunkach zmieniających się na odwrotne. (Naprężenia przemienne).

Do obciążeń, stanowiących rodzaj pośredni między powyższemi trzema zasadniczemi rodzajami obciążenia, wypada też dobrać stosowne współczynniki pośre nie.

Gdy wreszcie dana część konstrukcyjna ma znosić pracę rozpędu (uderzenia), wypada obliczać ją z uwzględnieniem tych warunków, w jakich ma pracować, a przynajmniej szacunkowo obniżyć naprężenia bezpieczne.

*) C. v. Bach, Elasticität und Festigkeit, 3 wyd.; Berlin 1898, J. Springer.

Dla stali sprężynowej niehartowanej podług C. v. Bach'a w wypadku II, $k_b = 3600$ kg/cm², dla hartowanej zaś $k_b = 4300$ kg/cm². Podług innych danych można stosować dla hartowanych resorów wagonowych $k_b = 6000$ do 8000, średnio $k_b = 6500$ kg/cm². Stambke zaleca $k_b = 5500$ do 5800 kg/cm².

Dla walcowanej blachy miedzianej C. v. Bach podaje ciągnięcie bezpieczne w wypadku I. $k_s = 600$ kg/cm², w II. zaś $k_s = 400$ kg/cm².

Naprężenia bezpieczne w kg/cm² podług C. v. Bach'a.

Rodzaj wytrzymałości i obciążenia	Żelazo sprężynowe ¹⁾	Żelazo zlewne ²⁾		Stal zlewna ²⁾		Odlew stalowy		Żelazo lane	Bronz nafosforzony	Spis na działa	
		od	do	od	do	od	do				
Ciągnięcie k_s	I.	900	900	1200	1200	1500	600	900	300	750	300
	II.	600	600	800	800	1000	400	600	200	500	200
	III.	300	300	400	400	500	200	300	100	250	100
Ciśnienie k_c	I.	900	900	1200	1200	1500	900	1200	900	—	—
	II.	600	600	800	800	1000	600	900	600	—	—
Gięcie k_b	I.	900	900	1200	1200	1500	750	1050	—	750	300
	II.	600	600	800	800	1000	500	700	— ³⁾	500	200
	III.	300	300	400	400	500	250	350	—	250	100
Cięcie k_s	I.	720	720	960	960	1200	480	840	300	—	—
	II.	480	480	640	640	800	320	560	200	—	—
	III.	240	240	320	320	400	160	280	100	—	—
Kręcenie k_d	I.	360	600	840	900	1200	480	840	—	300	—
	II.	240	400	560	600	800	320	560	— ⁴⁾	200	—
	III.	120	200	280	300	400	160	280	—	100	—

¹⁾ Dla najlepszych gatunków żelaza (drobnoziarnistego) można podane powyżej naprężenia bezpieczne powiększyć o $\frac{1}{3}$, o ile zwiększające się skutkiem tego ogólnie odkształcenia danej części maszyny uznać jeszcze można za właściwe dla danego przeznaczenia owej części. Gdyby zaś, przy zastosowaniu odpowiedniego naprężenia bezpiecznego, odkształcenia jakiegokolwiek części przekraczać miały granice, celowi danemu właściwe, to podstawą obliczenia powinno być odkształcenie, nie zaś naprężenie.

²⁾ Wyższe wartości z podanych tu naprężeń bezpiecznych można stosować tylko przy wyborowym i zupełnie pewnym, a niezbyt miękkim materiale, dla którego zatem $K_s = 3400$ do 4400, względnie 4500 do 10000; por. str. 331. Druty posiadają większą wytrzymałość na zerwanie, można zatem stosować do nich też większe wartości k_s ($k_s = \frac{1}{2} K_s$ do $\frac{1}{3} K_s$).

³⁾ Dla odlewów żelaznych, obrabionych (p. str. 353) podaje C. v. Bach jako bezpieczne naprężenie gnące:

$$k_b = \mu k_s \sqrt{\frac{e}{z_0}}$$

w którym to wzorze $\mu = 1.20$ do 1.33;

e oznacza zaś oddalenie najsilniej naprężonego włókna od poziomej osi ciężkości całego przekroju belki.

z_0 wreszcie oddalenie środka ciężkości części przekroju, leżącej po jednej stronie owej poziomej osi ciężkości całego przekroju, od tejże osi, przy czem przez kierunek poziomy rozumieć należy kierunek warstwy obojętnej w przekroju.

3. Obliczenia na wyboczenie części ściskanych, przy stosowaniu wzorów Euler'a, dokonywać należy z bezpieczeństwem przynajmniej 4-ro krotnem.

4. Dla nitów: Ciężar dozwolony 1000 kg/cm², a ciśnienie na ścianki dziury 2000 kg/cm².

δ) Naprężenia bezpieczne dla żelaza spawalnego i zlewne, na ciśnienia i ciągnięcia się powtarzające lub przemienne, podano na str. 343 i nast.

2. Drzewo.

Grubym drukiem oznaczono wartości przepisane przez berlińską policję budowlaną i przez oddział budowlany pruskiego ministerium robót publicznych.

Gatunek drzewa	Ciągnięcie k_z	Ciśnienie k_s	Cięcie k_s	Gatunek drzewa	Ciągnięcie k_z	Ciśnienie k_s	Cięcie k_s
Jesienina . .	100—120	66	—	Sośnina . .	100	60	10
Dębina i buczyna . .	100	80	20	a dla budowlitymczasowych .	120	70	15
a dla budowlitymczasowych .	120	90	20	Jedlina . .	60	50	—

3. Inne materiały budowlane.

Ciśnienia dozwolone k w kg/cm².

Grubym drukiem oznaczono wartości przepisane przez berlińską policję budowlaną i przez oddział budowlany pruskiego ministerium robót publicznych, wartości ujęte w nawiasy przepisuje natomiast tylko oddział budowlany pruskiego ministerium robót publicznych.

Materiał budowlany	Ciśnienie k	Materiał budowlany	Ciśnienie k
Bazalt	75	Mur z klinkiera najlep. } na zaprawie cement. }	12—14 (14—20)
Lawa bazaltowa	(40)	Mur z cegły dziurkowat.	3—6
Granit	45	Marmur	24
Piaskowiec zależn. od tward.	15—30	Piaskowiec sztuczny . .	45
średnio	20	Kamienie z cementu, piasku i żużla	12
Wapień z Rüdersdorfu w ciosach	25	Szkoło ¹⁾	25
Mur z wapieni na zaprawie wapiennej	5	Pale bite zależ. od rodz. gruntu	20—40
Zwykły mur z cegły na zaprawie wapiennej	7	Beton ²⁾	5—10
Takiż na zapraw. cement.	11 (12)	Beton wyborowy k_z do	1
		Dobry grunt budowl. ³⁾ .	2,5 (do 5)

¹⁾ Dla szkła dętego $k_b = 125$ kg/cm², dla szkła surowego (grub. od $s = 0,5$ do 1,5 cm) $k_b = \frac{1}{3} [200 + (1,5 - s)^2 \cdot 180]$ kg/cm².

²⁾ Dobry beton cementowy (1 objęt. cementu, 2 $\frac{1}{2}$ do 3 objęt. piasku i 5 do 6 objęt. żwiru) dla mostów betonowych $k = 20$ do 35 kg/cm².

³⁾ Grunt budowlany przy większym zagłębieniu spodu fundamentu można obciążać silniej (por. dział X, budownictwo).

II. W Rosyji. *)

I. Metale.

α) Zjazd inżynierów służby drogowej w r. 1896 postanowił, aby obliczać więzary dachowe na parcie wiatru 180 kg/m^2 pola prostopadłego do kierunku wiatru, przy 10° pochylenia tegoż kierunku względem poziomu, t. j. na parcie $180 \sin^2(\alpha + 10^\circ) \text{ kg/m}^2$ powierzchni dachu pochyłonego o α° do poziomu, oraz na obciążenie śniegiem 100 kg/m^2 planu (na dachach bardziej stromych niż 45° śnieg się obsuwa i nie zatrzymuje). Do obciążenia ciężarem stałym i ruchomym dołącza się: albo samo parcie wiatru, albo sam ciężar śniegu, albo wreszcie łącznie $\frac{2}{3}$ parcia wiatru i $\frac{1}{3}$ obciążenia śniegiem i z trzech tych przypadków wybiera się najmniej korzystny. Z tymi założeniami Zjazd dozwala napręzać: Żelazo zlewne ciągnieniem lub ciśnieniem 10 kg/mm^2 , a cięciem 8 kg/mm^2 ;
 „ spawalne „ „ „ „ 9 kg/mm^2 , „ $7,2 \text{ kg/mm}^2$.

β) Czasowa instrukcja Zarządu Dróg Skarbowych z 30. III 1896 Nr. 12008 do cyrkularza Ministra Dróg i Kom. z 15. I 1896 Nr. 753 dozwala napręzać wo więzarach mostowych:

1) Bez uwzględnienia parcia wiatru:

Żelazo zlewne: $700 + 2l \text{ kg/cm}^2$ ciągnienia lub ciśnienia;

„ spawalne: $650 + 2l \text{ kg/cm}^2$ „ „ „

Cięcie 75% ilości powyższych, przyczem l oznacza teoretyczną rozpiętość więzara w metrach.

2) Uwzględniając w obliczeniu parcie wiatru, można ciągnienia i ciśnienia dozwolone zwiększyć jeszcze o $2l$ z warunkiem jednakże, aby nie przekroczyły 1200 kg/cm^2 dla żelaza zlewne, a 1150 kg/cm^2 dla żelaza spawalnego.

3) Pręty naprężane przemiennie, t. j. rozciągane i ściskane naprzemiennie (oznaczając przez k naprężenia powyżej określone) dozwala się napręzać ciągnieniem lub ciśnieniem:

$$k' = \varphi \cdot k \left(1 - \frac{1 \text{ naprężenie najmniejsze}}{2 \text{ naprężenie największe}} \right),$$

w którym to wzorze φ oznacza współczynnik zmniejszenia naprężenia dozwolonego, przy możliwości wybożenia pręta, a wyraz ujęty nawiasem jest współczynnikiem przemienności naprężeń podług Weyrauch'a.

Jeżeli jednak z obliczenia wypadnie:

$$\frac{k'}{\varphi} < k - 100,$$

to można stosować:

$$\frac{k'}{\varphi} = (k - 100), \text{ czyli } k' = \varphi (k - 100) \text{ kg/cm}^2.$$

Naprężenia powyższe dozwolają się w przypuszczeniu, że podstawą obliczenia tak ciągnień jak i ciśnień będą przekroje użyteczne, t. j. z potrąceniem dziur nitowych i t. p. niewspółpracujących części przekroju.

Cięcie dozwala się do 80% wartości powyższych naprężeń normalnych, lecz w każdym razie nie więcej niż 800 kg/cm^2 dla łącznego działania ciężarów i parcia wiatru.

*) Efimowicz, podręcznik dla inż. Dróg i Kom. Petersburg. 1900. Nowsze przepisy p. Dział VIII rodz. II.

4. Części pomostowe można naprężyć:

Żelazo zlewne: 700 kg/cm^2 ciągnięcia lub ciśnienia, a 525 kg/cm^2 cięcia;

„ spawalne: 600 kg/cm^2 „ „ „ „ „ „ „ „ „ a 450 kg/cm^2 „

Ogólnie w nitach 600 kg/cm^2 , lecz w złączeniu podłużnic z poprzecznikami tylko 500 kg/cm^2 .

2. Drzewo.

Postanowienia Rady Inżynierskiej Nr. 24 z 8. XII 1894 i z 15. II 1895, oraz Nr. 50 z 18. III 1895 i z 12. IV 1895.

Rodzaj drzewa	Ciężnienie rozrywające przy próbie	Naprężenia dozwolone			Gięcio
		Ciążnienie	Ciśnienie w kierunku włókien	Ciśnienie w poprzek włókien	
Iglaste zwykłe (sośnina)	— —	101,6 (40)	50,8 (20)	15,2 (6)	63,5 (25)
Iglaste wyborowe . . .	812,5 (320)	114,3 (45)	63,5 (25)	20,3 (8)	76,2 (30)
Dębina	884,8 (380)	149,6 (55)	76,2 (30)	38,1 (15)	101,6 (40)

Cyfry górne, tłustym drukiem odbite, oznaczają naprężenia dozwolone w kg/cm^2 , a cyfry dolne, nawiasami ujęte, oznaczają te same naprężenia wyrażone w pudach na cal kw. angielski.

III. W Austrii. *)

Rozporządzenie austriackiego ministerium z r. 1887.

α) Mosty kolejowe:

Najniekorzystniejsze naprężenia, z uwzględnieniem wszelakich obciążeń, za wyłączeniem parcia wiatru, obliczone dla przekroju użytecznego, nie powinny przekraczać dla żelaza spawalnego:

1) Przy rozpiętościach do 40 m: 700 kg/cm^2 z dodatkiem 2 kg/cm^2 na każdy m rozpiętości.

2) Przy rozpiętości 40 m 780 kg/cm^2 ,

„ „ 80 m 840 kg/cm^2 ,

„ „ 120 m 880 kg/cm^2 ,

„ „ 160 m i wyżej 900 kg/cm^2 ,

przyczem dla rozpiętości pośrednich należy brać wartości pośrednie podług prawa linii prostej, a dla poprzecznic i podłużnic wartości odpowiadające ich rozpiętościom.

Wartości powyższe są dozwolone dla ciągnięcia i ciśnienia, a dla cięcia tylko w poprzek kierunku walcowania, natomiast cięcie w kierunku walcowania nie ma przewyższać 500 kg/cm^2 . Cięcie w nitach ciętych jednokierunkowo 600 kg/cm^2 , w ciętych różnokierunkowo 500 kg/cm^2 ; ciśnienie na ściankę dziury nitowej 1400 kg/cm^2 .

*) M. Thullie. Podręcznik Teorii Mostów. Lwów. 1889.

U w a g a. Żelazo spawalne w mostach drogowych (niekolejowych) można naprężyć na rozciąganie, ściskanie i ścinanie (w poprzek włókien) nieco wyżej, a mianowicie do 750 kg/cm^2 , z dodatkiem po 2 kg/cm^2 na każdy metr rozpiętości, nie przekraczając jednakże granicy obowiązującej dla mostów kolejowych, t. j. 900 kg/cm^2 . Poprzecznice i podłużnice obliczają się podług swej rozpiętości.

β) Żelazo lane:

ciśnienie 700 kg/cm^2 ,
ciągnięcie przy rozciąganiu 200 kg/cm^2 ,
ciągnięcie przy przeginananiu 300 kg/cm^2 .

γ) Drzewo:

ciągnięcie w kierunku włókien 80 kg/cm^2 .

II. WYTRZYMAŁOŚĆ PRĘTÓW PROSTYCH.

A. Wytrzymałość na ciągnięcie i na ciśnienie.

1. Obciążenie bezpieczne P w kg, jakie znosić może pręt o stałym przekroju $F \text{ cm}^2$, równa się:

$$P = Fk_z, \text{ względnie } P = Fk,$$

jeżeli k_z i k oznaczają ciągnięcie, względnie ciśnienie w kg/cm^2 , bezpieczne dla materiału pręta.

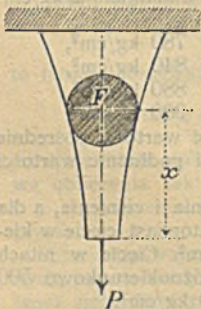
Jeżeli dany pręt nie posiada przekroju stałego, lecz zmienny, to dla jego wytrzymałości miarodajnym będzie przekrój najmniejszy.

Pręty ściskane, których długość w porównaniu z rozmiarami przekroju jest znaczna, należy obliczać i na wyboczenie (szczegóły patrz str. 345 i nast.).

Sprężyste rozciągnięcie (wydłużenie) lub **ściśnięcie** (skrócenie) λ pręta o stałym przekroju i długości l pod działaniem naprężenia σ lub siły P , obliczamy z wzoru [$\lambda : l = \epsilon$, patrz str. 327]:

$$\lambda = \frac{\sigma}{E} l, \text{ albo } \lambda = \frac{Pl}{FE}, \text{ przyczem } \frac{d\sigma}{d\epsilon} = E,$$

Rys. 198.



w którym to wzorze ilość E (założona stałą) oznacza współczynnik sprężystości na rozciąganie lub ściskanie. **Pracę mechaniczną** odkształcenia sprężystego określono pod **6.**, str. 329.

2. Kształt pręta, posiadającego w każdym przekroju **równą wytrzymałość** na ciągnięcie (albo ciśnienie), gdy siła P działa w osi pręta (rys. 198), określa się równaniem:

$$F = \frac{P}{k} e^{\frac{\gamma}{k} x},$$

$$\text{lub } \log F = \log \frac{P}{k} + 0,4343 \frac{\gamma}{k} x,$$

w którym oznacza:

F (w cm^2) pole przekroju pręta w dowolnej odległości x cm od końca pręta,

P obciążenie w kg, działające w końcu pręta,
 k = stałej, oznacza w kg/cm^2 bezpieczne ciągnięcie albo ciśnienie,
 γ ciężkość właściwą materiału pręta, wyrażoną w kg/cm^3 ,
 e podstawę logarytmów naturalnych (patrz str. 46 i 47).

Przybliżenie dokładny kształt pręta (rys. 199) składającego się z szeregu części o przekrojach stałych, a odpowiadającego warunkom powyższym, określamy z wzoru poniżej podanego, w którym oznacza:

l_n długość (w cm) n -tej części pręta, licząc od końca obciążonego,

F_n przekrój tejże części w cm^2 :

$$F_n = \frac{Pk^{n-1}}{(k - \gamma l_1)(k - \gamma l_2) \dots (k - \gamma l_n)}$$

Praca mechaniczna przy odkształceniu pręta o stałej wytrzymałości na ciągnięcie lub ciśnienie będzie:

$$A = \frac{P}{\gamma} \frac{k^2}{2E} \left(e^{\frac{\gamma}{k} x} - 1 \right);$$

a oznaczywszy przez l długość pręta, otrzymamy sprężyste odkształcenie długości pręta:

$$\lambda = \frac{kl}{E}$$

3. Wybór bezpiecznego ciągnięcia i ciśnienia.

Dla części budowli, podlegających stałemu obciążeniu, naprężenie bezpieczne k_z i k podano na str. 338 i 339.

Przy **obciążeniu zmiennem**, szczególnie przy budowie mostów żelaznych, należy oznaczać naprężenia bezpieczne zgodnie z danymi doświadczalnymi, otrzymanymi przez Wöhler'a *).

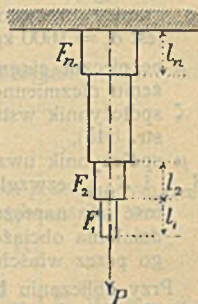
Podług tych doświadczeń wytrzymałość na obciążenia często się zmieniające jest mniejsza, aniżeli na stałe obciążenie jednorazowe. Właściwem będzie zatem, wartości naprężeń bezpiecznych oznaczać w zależności od granic, w jakich odbywa się zmiana obciążeń. Przy obliczeniu mostów należy nadto uwzględnić działanie uderzeń ciężarów będących w ruchu.

Przekroje prętów żelaznych, rozciąganych lub ściskanych, zwłaszcza prętów w dźwigarach mostowych, obliczamy zatem w sposób poniżej podany:

Oznaczmy przez:

F najmniejszy przekrój pręta w cm^2 ,

S_0 siłę naprężającą pręt w kg, a powstającą wyłącznie skutkiem **własnego ciężaru** mostu, t. j. skutkiem obciążenia stałego, nieruchomego,



Rys. 199.

*) A. Wöhler, Ueber die Festigkeitsversuche mit Eisen und Stahl, Zeitschr. f. Bauwesen, 1870.

- S_1 siłę podobną, powstającą wyłącznie skutkiem najbardziej niekorzystnego obciążenia ruchomego, siłę tego samego znaku co S_0 ,
- S_2 siłę o znaku przeciwnym, powstającą w pręcie wyłącznie skutkiem najbardziej niekorzystnego obciążenia ruchomego (S_2 będzie zatem siłą ściskającą, jeżeli S_0 i S_1 są siłami rozciągającymi i naodwrot),
- σ_e granicę sprężystości w kg/cm^2 (por. str. 330); dla żelaza spawalnego jest $\sigma_e = 1600 \text{ kg/cm}^2$, dla zlewne go conajmniej $\sigma_e = 2000 \text{ kg/cm}^2$,
- k bezpieczne ciągnięcie, względnie ciśnienie, w kg/cm^2 przy obciążeniu niezmiennem (stałym),
- ζ współczynnik wstrząsnień, t. j. uderzeń ciężaru ruchomego (patrz str. 345),
- μ współczynnik uwzględniający naprężenia postronne,*)

S_{\max} i S_{\min} bezwzględnie największą i bezwzględnie najmniejszą wartość siły naprężającej pręt, a pojawiającej się wskutek łącznego działania obciążenia stałego i obciążenia ruchomego, pomnożonego przez właściwy współczynnik wstrząsnień.

Przy obliczaniu **blachownic** (p. Dział piątnasty, Statyka budowlana) siły S_0 , S_1 , S_2 , S_{\max} i S_{\min} zastępujemy odnośnymi momentami przeginającymi, a przekrój I' cm^2 momentami wytrzymałości $W \text{ cm}^3$.

a) Wzory Th. Landsberg'a.**)

- 1) Dla prętów wyłącznie **tylko rozciąganych** lub **tylko ściskanych**.

$$F = \frac{S_0}{1050} + \frac{S_1}{700} \quad \left| \quad F = \frac{S_0}{1310} + \frac{S_1}{875} \right.$$

Żelazo spawalne. Żelazo zlewne.

- 2) Dla prętów **naprzemiany rozciąganych i ściskanych**, t. j. dla **naprężeń przemiennych**, o ile:

$$S_2 > -\frac{2}{3} S_0 \quad \text{i} \quad S_2 - S_1 < \frac{4}{3} S_0$$

$$F = \frac{S_0}{1575} + \frac{S_1}{700} + \frac{S_2}{2100} \quad \left| \quad F = \frac{S_0}{1970} + \frac{S_1}{875} + \frac{S_2}{2625} \right.$$

Żelazo spawalne. Żelazo zlewne.

- 3) Dla prętów **naprzemian rozciąganych i ściskanych**, o ile:

$$S_2 > -\frac{2}{3} S_0 \quad \text{i} \quad S_2 - S_1 > \frac{4}{3} S_0$$

*) Naprężenia postronne mogą być: **W** pierwszorzędne spowodowane parciem wiatru i obliczane zazwyczaj oddzielnie, w sposób podobny, jak naprężenia główne. (Również i obciążenie śniegiem).

D drugorzędne, powstające wskutek zmian temperatury.

T trzeciorzędne, wynikające ze sztywności połączeń, zwłaszcza w węzłach, które w obliczeniach przedstawiamy sobie jako ściśle przegibne.

C czwartorzędne, albo błędne, spowodowane przez błędy wykonania, jako to naprężenia błędne przy nitowaniu, spowodowane obniżeniem się podpory i t. p.

**) Zeitschr. d. hannov. Arch.- u. Ing.-V. 1888, str. 575.

Żelazo spawalne.

Żelazo zlewne.

$$F = -\frac{S_0}{1575} + \frac{S_1}{2100} + \frac{S_2}{700} \quad \Bigg| \quad F = -\frac{S_0}{1970} + \frac{S_1}{2625} + \frac{S_2}{875}$$

Podług R. Krohn'a powyższe wzory dla żelaza zlewego są miarodajne dla zasadowego żelaza zlewego, martynowskiego o $K_2 = 3700$ do 4400 kg/cm^2 .)

β) Wzory Haeseler'a.

Ogólnie będzie:
$$F = \frac{S_0 + S_1}{k}$$

Gdy dany pręt pracuje wyłącznie tylko na **rozciąganie**, albo tylko na **ściskanie** (bez wyboczenia), to:

$$k = \frac{\sigma_e S_0 + S_1}{\mu S_0 + \zeta S_1}$$

Jeżeli natomiast dany pręt podlega naprężeniom przemiennym, t. j. naprzemian **rozciągającym i ściskającym** (bez wybaczenia), to:

$$k = \frac{\sigma_e S_0 + S_1}{\mu S_0 + \zeta S_1} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{S_{\min}}{S_{\max}} \right) \dots$$

Spółczynnik wstrząszeń ζ . Gerber poleca $\zeta = 1,5$; Winkler dla mostów kolejowych $\zeta = 1,3$; dla mostów drogowych $\zeta = 1,2$; Haeseler czyni ζ zależnym od rozpiętości i podaje:

dla $l = 5$	10	15	20	40	60	80	100	150 m
$\zeta = 1,7$	1,6	1,5	1,3	1,3	1,25	1,2	1,2	1,2

Spółczynnik μ dla belek dwupodporowych.

Rodzaj belki	Naprężenia poboczne	Natężenia dodatkowe	Dodatek na obciążenie nadmierne	μ zatem współczynnik
	w procentach siły naprężającej S			$\mu =$
Blachownice	10	30	20	1,6
Kratownice:				
Węzły sztywne	40	30	20	1,9
Węzły przegibne	15	15	20	1,5

Naprężenia dozwolone dla mostów żelaznych i t. p. patrz Dział piętnasty: Statyka budowlana.

B. Wytrzymałość na wyboczenie.

I. Pręty ściskane, o ile ich długość w stosunku do rozmiarów przekroju jest znaczna, należy zabezpieczyć od wyboczenia. Przypuszczając, że siła cisnąca działa środkowo, t. j., że działa ona

*) Zeitschr. d. V. d. Ing. 1891, str. 1121.

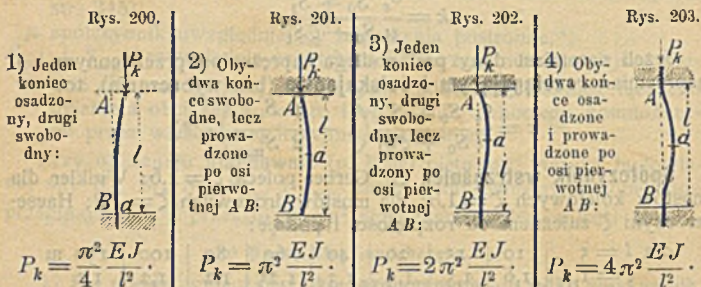
**) H. Müller-Breslau proponuje w tym wzorze zmianę współczynnika $\frac{1}{2}$ na $\frac{1}{3}$.

w punkcie ciężkości końcowego przekroju pręta prostego i w kierunku jego osi, oznaczmy przez:

- l w cm długość pręta pracującego na wyboczenie,
 J w cm^4 najmniejszy, równikowy moment bezwładności w najmniej-bezpieczniejszym przekroju a (rys. 200 do 203),
 E w kg/cm^2 współczynnik sprężystości danego materiału (patrz str. 331, 333 i nast.).

L. Euler podał, stosownie do sposobu osadzenia końcy pręta, poniższe wzory na:

Obciążenie wybaczące P_k w kg, gdy



Podług doświadczeń J. Bauschinger'a *) wielkości P_k są obciążeniami krańcowymi, wybaczącymi, t. zn., że przy nieznacznym nawet powiększeniu tego obciążenia, wyboczenie pręta następuje nagle i dochodzi odrazu do bardzo znacznych rozmiarów.

2. Obciążenie bezpieczne pręta pracującego na wyboczenie będzie tylko:

$$P = P_k : \mathcal{S},$$

przyczem \mathcal{S} oznacza stopień bezpieczeństwa przeciw wyboczeniu, jaki stosujemy w danym przypadku.

Pręt o najmniejszym przekroju $F \text{ cm}^2$, z materiału, dla którego ciśnienie bezpieczne jest $k \text{ kg/cm}^2$, znosi obciążenie bezpieczne:

$$P_0 = k \cdot F \text{ (kg)}.$$

Początkową długość wyboczenia l_0 otrzymamy, równając P i P_0 z wzorów powyższych, z uwzględnieniem sposobu osadzenia pręta przy wyborze jednego z 4-ch wzorów na P . Otrzymana z równania tego długość l_0 , oznacza tę długość pręta, przy której będzie on równo wytrzymały na ciśnienie proste jak i na wyboczenie. Nośność prętów krótszych niż l_0 oblicza się zatem wyłącznie na ciśnienie proste (P_0), a prętów dłuższych wyłącznie na wyboczenie (P).

*) Centralbl. d. Bauverw. 1886. str. 353 i nast.

Stosując wzór Euler'a do obliczeń wielkości przekroju, bez uprzedniego oznaczenia początkowej długości wybożenia l_0 , należy w każdym wypadku sprawdzić, czy nie przekraczamy ciśnienia bezpiecznego k .

Jeżeli $r = \sqrt{J/F}$ oznacza najmniejszy promień bezwładności danego przekroju w cm., to, podług doświadczeń Tetmajera *) wzory Euler'a można stosować tylko wtenczas, gdy stosunek $l : r$ większy jest niż 100 dla drzewa, niż 80 dla żelaza lanego, niż 112 dla żelaza spawalnego, wreszcie niż 105 dla żelaza zlewnego.

3. Tablica poniższa (str. 348) zawiera w sobie dla ważniejszych materiałów budowlanych czynniki najpotrzebniejsze do obliczenia wytrzymałości na wybożenie, a mianowicie: stopień bezpieczeństwa \mathcal{S} przeciw wybożeniu, wielkości niezbędnych momentów bezwładności w niebezpiecznych przekrojach prętów, pracujących na wybożenie przy 2-gim sposobie osadzenia końców, **) wreszcie wzmiankowane długości początkowe l_0 . Tablicę tę można stosować do konstrukcyi budowlanych, natomiast spólczynnik \mathcal{S} dla części maszyn podano w Dziale piątym: I Części maszyn. Tablicę obliczono, podstawiając zamiast π^2 wartość przybliżoną = 10.

W tablicy oznacza:

P obciążenie bezpieczne w kg , P_1 w t (tonach),

l długość prętów w m ,

b mniejszy bok prostokąta w m ,

d średnicę przekroju kołowego w m .

Przy obliczeniu słupów, stawianych jeden nad drugim (w budynkach wielopiętrowych), jako długość słupa l , pracującej na wybożenie, przyjmujemy wysokość jednego piętra, przyczem jednak nieodzownem jest, ażeby końce słupów przy obciążeniu nie mogły się przesuwać w kierunkach poziomych, co osiągamy przez umocowanie owych końcy za pomocą helkowania, za pomocą odpowiednich ściągów i t. p. Por. Słupy z żelaza lanego; Dział ósmy: Materiały budowlane.

Wielkość przekroju, obliczona z wzorów na wybożenie, przy sposobie osadzenia końcy podług Nr 2, niezbędną jest tylko w środku długości pręta, przy a , rys. 201. W końcach starczy przekrój obliczony podług prostego ciśnienia bezpiecznego k . Funkcya, podług której przekrój zmniejsza się ku końcom pręta, posiada względnie nieznaczny tylko wpływ na wytrzymałość pręta. **)

Moment bezwładności J dla sposobów osadzenia końcy pręta, wskazanych w przypadkach 1), 3) i 4) powinien być 4 razy, $1/2$ raza, wzgl. $1/1$ razy, większy od wielkości podanych w tablicy, początkowa długość wybożenia l_0 natomiast $1/2$ razy, 1,41 razy, wzgl. 2 razy większa niż podana w tablicy.

4. Stosowanie wzorów Euler'a prawie zawsze okaże się właściwym i celowym, jedynie krótkie pręty wypada obliczać na proste ciśnienie bezpieczne k . Natomiast wzory empiryczne Rankine'a, Schwarz'a, Lang'a, Schaeffer'a i innych (osnute na oznaczeniu bezpiecznego ciśnienia we włóknach skrajnych, obliczonego z pewnej, przypuszczalnej mimośrodkowości obciążenia i pewnego przegięcia) nie mają ani naukowej ani doświadczalnej podstawy, jak tego dowiodły wywoły teoretyczne H. Zimmermann'a †) i doświadczenia J. Bauschinger'a.

*) L. Tetmajer, Gesetze der Knickfestigkeit der technisch wichtigsten Baustoffe. Heft VIII der Mitteilungen der Züricher Materialprüfungsanstalt, 1890, Selbstverlag der Anstalt, — oraz Zeitschr. d. V. d. Ing. 1896, S. 1404.

**) W praktycznych zastosowaniach najczęściej natrafia się sposób osadzenia końcy podług Nr 2, rys. 201, z tego też powodu drugą część tablicy obliczono wyłącznie dla tego sposobu osadzenia, t. j. dla obydwu końcy swobodnych.

***) R. Bredt, Zeitschr. d. V. d. Ing. 1894, str. 845.

†) Centralblatt d. Bauverw. 1886, str. 217, 225, 243 i 353.

Oznaczenia	Żelazo lane (odlewy)	Żelazo spawalne	Żelazo zlewne	Stal zlewna	Sośnina	kg/cm ²
Wytrzymałość na ciśnienie $K =$	7500	3600	4000	5000	280	
Ciśnienie bezpieczne $k =$	500	750	875**)	1250	60	
Spółczynnik sprężystości $E =$	1000000	2000000	2150000	2200000	120000	
Stopień bezpieczeństwa przeciw wyoboczeniu $\mathcal{S} =$	8*)	5	5**)	4	10	

Sposób osadzenia № 2 (rys. 201 str. 346).

Niezbędny, naj- mniejszy, równiko- wy moment bezwład- ności w przekroju niebezpiecznym	$J =$	$\frac{Pl^2}{125} =$	$\frac{Pl^2}{400} =$	$\frac{Pl^2}{430} =$	$\frac{Pl^2}{550} =$	$\frac{Pl^2}{12} =$	cm ⁴
		$8P_1l^2$	$2,5P_1l^2$	$2,33P_1l^2$	$1,82P_1l^2$	$83,3P_1l^2$	
Początkowa długość wyoboczenia l_0 :							
Prostokąt: $\frac{l_0}{b} = \frac{\pi}{\sqrt{12}} \sqrt{\frac{E}{k\mathcal{S}}} =$	14,4	21,0	20,1	19,0	12,8		
Pole koła: $\frac{l_0}{d} = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{E}{k\mathcal{S}}} =$	12,4	18,1	17,4	16,4	11,1		
Pierścieni koła o na- lej szeroko- ści δ } $\frac{l_0}{d} = \frac{\pi}{\sqrt{8}} \sqrt{\frac{E}{k\mathcal{S}}} =$	17,6	25,6	24,5	23,3	—		

Gdy jednak wzór Rankine'a i Schwarz'a częste znajduje zastosowanie, podajemy go poniżej: ***)

*) Berlińska policja budowlana wymaga dla słupów z lanego żelaza $\mathcal{S} = 8$ przy ściśle środkowym obciążeniu. Jeżeli jednakże (jak zazwyczaj) część obciążenia działa mimośrodkowo (np. belki na wspornikach słupa), to przepisy wymagają albo stosowania wzoru na wyoboczenie: $J = 12 P_1 l^2$, t. zn. $\mathcal{S} = 12$ [dla drzewa zaś $J = 125 P_1 l^2$, t. zn. $\mathcal{S} = 15$] przy ciśnieniu normalnym, nieprzekraczającym $k = 330 \text{ kg/cm}^2$ [dla drzewa $k = 40 \text{ kg/cm}^2$] albo też, przy znanej mimośrodkowości, obliczenia słupa na wytrzymałość złożoną, t. j. na ciśnienie i gięcie podł. str. 400, z uwzględnieniem zmienności obciążeń ruchomych. (Por. Słupy lanożelazne w Dziale ósmym: Materiały budowlane).

**) Według R. Krohn'a, Zeitschr. d. V. d. Ing. 1891, str. 1121, dla zasadowego żelaza martynowskiego, o $K = 3700$ do 4000 kg/cm^2 .

***) R. Krohn, Centralblatt d. Bauverw. 1885, str. 400.

Zatrzymując oznaczenia uprzednie, kg i cm jako jednostki obciążeń i długości, wzór ten podaje obciążenie bezpieczne P słupa w obydwu końcach swobodnego (rys. 201, str. 346):

$$P = \frac{Fk}{1 + \mu l^2 \frac{F}{J}} = \frac{F'k}{1 + \mu \left(\frac{l}{r}\right)^2}$$

We wzorze tym $r = \sqrt{J/F}$ oznacza najmniejszy promień bezwładności, (p. str. 180) μ zaś współczynnik, który o ile przekroje końcowe będą płaskie, posiada wartości następujące: *)

dla żelaza lanego $\mu = 0,00016$ | dla stali (miękkiej) $\mu = 0,00004$
 dla żel. spawalnego $\mu = 0,00008$ | dla stali (twardej) $\mu = 0,00006$
 dla drzewa $\mu = 0,00015$.

1) Podług Schäffera **) dla 2-go sposobu osadzenia końcy będzie:

$$\mu = \frac{\mathfrak{S}k}{\pi^2 E}$$

Wartości \mathfrak{S} , E i k podano w tablicy str. 348. Dla sposobów osadzenia końcy podług 1), 3) i 4) μ jest $\frac{1}{4}$ raza, 2 razy, względnie 4 razy większe.

Podług doświadczeń L. Tetmajera ***) μ zależne jest od stosunku $l:r$, a mianowicie:

dla żelaza spawalnego $\mu = 0,0001 \sqrt{0,00867 (l:r) - 0,6936}$,

dla drzewa $\mu = 0,0001 \sqrt{0,05 (l:r) - 0,8}$.

3) R. Bredt †) poleca

dla żelaza spawalnego: $\mu = 0,00001 (l:r)$,

a więc dla 2-go sposobu osadzenia pręta (str. 346):

$$P = \frac{Fk}{1 + 0,00001 (l:r)^3}$$

C. Wytrzymałość na cięcie (przesuwanie).

Jeżeli wypadkowa Q sił zewnętrznych, działających na pewne ciało, znajdzie się w płaszczyźnie danego przekroju F , (rys. 204, str. 350) a mianowicie w jego osi symetrii OY , to siła Q staje się siłą tnącą albo też przesuwającą dany przekrój, który pracuje nataneczna na cięcie.

Naprężenie przesuwające, czyli cięcie τ , jakie pod wpływem siły Q pojawia się w punkcie P (rys. 204) nie tylko w przekroju samym, lecz równocześnie i prostopadle do niego, i to w obydwóch kierunkach, określamy wzorem:

*) R. Krohn, Zeitsch. d. V. d. Ing. 1891, str. 1122, podaje dla żelaza spawalnego $\mu = 0,0000435$ (przy $k = 700$), dla żelaza zlewne go $\mu = 0,0000769$ (przy $k = 875$).

**) Deutsche Bauzeitg. 1877, tom 10, Nr. 18.

***) Schweizerische Bauzeitg. 1887, tom 10, Nr. 16.

†) Zeitschr. d. V. d. Ing. 1894, S. 878.

$$\tau = \frac{Q S_y}{J z \cos \varphi}, \text{ przy czem powinno być: } \tau_{\max} \leq k_s.$$

We wzorze powyższym zastosowano oznaczenia wskazane w rys. 204, a nadto oznaczono przez J moment bezwładności całego przekroju względem osi ciężkości OX , prostopadłej do siły Q , a przez:

$$S_y = \int_y^a yz \cdot dy$$

moment statyczny zakreskowanej części przekroju względem tejże osi OX .

Składowa naprężenia τ , równoległa do osi OY , będzie:

$$\tau_y = \tau \cos \varphi = \frac{Q S_y}{J z},$$

a dla $y = e$, $\tau = 0$.

Rys. 204.



Rys. 205.

Rys. 206.



Rys. 207.



Rys. 208.



W przekroju prostokątnym bh (rys. 205) jest:

$$\tau = \frac{3}{2} \frac{Q}{bh} \left[1 - \left(\frac{2y}{h} \right)^2 \right]; \text{ a dla } y = 0:$$

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{Q}{bh} = \frac{3}{2} \frac{Q}{F}.$$

W połu kołowym, o promieniu r (rys. 206), jest:

$$\tau = \frac{4}{3} \frac{Q}{\pi r^2} \cos \varphi; \text{ a dla } y = 0:$$

$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \frac{Q}{\pi r^2} = \frac{4}{3} \frac{Q}{F}.$$

W pierścieniu kołowym, gdy grubość ścianki jest nieznaczna w porównaniu ze średnicą, otrzymamy w osi przekroju ($y = 0$):

$$\tau_{\max} = 2 \frac{Q}{F}.$$

W kwadracie na ukos leżącym (rys. 207), t. j. gdy przekątnia jego leży w kierunku siły tnącej Q , będzie:

$$\tau = \frac{Q\sqrt{2}}{a^2} \left[1 + \frac{y\sqrt{2}}{a} - 4 \left(\frac{y}{a} \right)^2 \right]; \text{ a dla } y = \frac{e}{4}:$$

$$\tau_{\max} = \frac{9}{4\sqrt{2}} \frac{Q}{a^2} = 1,591 \frac{Q}{F}.$$

W przekroju **dwuteownika** (rys. 208, str. 350) będzie

$$\text{dla } y = 0: \tau_{\max} = \frac{3}{4} \frac{Q}{a} \frac{b e^2 - (b - a) f^2}{b e^3 - (b - a) f^3}.$$

Uwaga: Wzór dość często stosowany:

$$\tau = \frac{Q}{F} \approx k_s$$

dalby we wszystkich wyżej wymienionych przypadkach wyniki nieprawidłowe, bo cięża τ za małe.

D. Wytrzymałość na przeginięcie.

a. Pojęcia ogólne o siłach zewnętrznych belek prostych.

Jeżeli wszystkie siły zewnętrzne, działające, na daną belkę prostą, a zatem i odpory podpór A i B (por. str. 167), nietylko przechodzą przez oś ciężkości belki, lecz nadto są do niej prostopadłe, czyli jeżeli siły te nie posiadają składowych w kierunku osi belki i nie skręcają belki, to w dowolnym przekroju belki otrzymamy następujące siły i momenty:

Siłę poprzeczną Q , która jest równą i równoległą do wypadkowej wszystkich sił zewnętrznych, znajdujących się po lewej stronie danego przekroju; nazywamy ją dodatnią, gdy skierowaną jest w górę, a więc dla prawej części belki będzie naodwrot dodatnią, gdy działa w dół.

Moment gnący, albo **przeginający** M wypadkowej sił, znajdujących się po lewej stronie danego przekroju, lub też algebraiczna suma momentów tychże sił względem tegoż przekroju. Moment nazywamy dodatnim, gdy okręca lewą część belki w prawo (a zatem, gdy prawą część okręca w lewo).

Niechaj belkę obciąża ciężar ciągły q kg/cm, a obierając oś podłużną belki za oś x , otrzymamy dla dowolnego przekroju belki w oddaleniu x :

$$Q = A - \int q \cdot dx; \quad dQ = -q \cdot dx; \quad \text{a zatem } \frac{dQ}{dx} = -q, \quad \text{I.}$$

$$dM = Q \cdot dx; \quad \text{czyli } \frac{dM}{dx} = Q, \quad \dots \quad \text{II.}$$

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = \frac{dQ}{dx} = -q \quad \dots \quad \text{III.}$$

Jeżeli od dowolnej poziomej, równoległej do belki, odetniemy wdół w punkcie każdego przekroju przynależne wielkości Q i M , to otrzymamy krzywe i pola Q i M , o następujących właściwościach, określonych wzorami powyższymi:

1) Styczna trygonometryczna linii Q w x jest $= -q$.

2) Styczna trygonometryczna linii M w x jest $= Q$.

3) $M_x = \int_0^x Q \cdot dx = [\text{pole } Q]_0^x$ [podług równ. II].

Z określenia 2 wynika, że (względne) M_{\max} pojawia się w każdym przekroju, w którym $Q = 0$, lub w którym Q z $+$ przechodzi na $-$.

Z 3-go wynika, że M staje się **zerem** dla każdego przekroju, dla którego pole Q (składające się z części $+$ i $-$) będzie równe zeru.

Siła poprzeczna Q powoduje naprężenia przesuwające, czyli cięcia τ w płaszczyźnie przekroju (por. str. 330 i 350), moment M zaś naprężenia normalne σ , prostopadłe do przekroju, oraz cięcia τ w płaszczyznach równoległych do osi belki.

b. Naprężenia.

Pojęcia ogólne. W belce przeginananej jedna tylko warstwa włókien, t. zw. **warstwa obojętna**, przechodząca przez oś ciężkości belki, zatrzymuje pierwotną swą długość. Przecięcie tej warstwy z przekrojem belki, prostopadłym do osi belkowej, jest t. zw. **osią obojętną** przekroju, przechodzącą przez środek ciężkości przekroju. Oś obojętna jest prostą i rozgranicza włókna ściskane od rozciąganych w ten sposób, że wielkość naprężeń (ciśnień i ciągnięć) wzrasta w prostym stosunku z oddaleniem włókna od osi obojętnej.

Każde dwa cięcia τ , działające w dwóch sąsiednich (przyległych) płaszczyznach dowolnej, nieskończonej małej kostki wyciętej z belki, a skierowane prostopadłe do wspólnej krawędzi owych płaszczyzn, są nie tylko sobie równe, lecz i równo skierowane względem tejże krawędzi, t. j. ku niej albo od niej (p. str. 350).

Uwaga. Niżej podane sposoby oznaczania naprężeń stosują się z dostateczną ścisłością i do prętów krzywych, a stosują się one tem ścisłej, im większym będzie promień krzywosci osi pręta w stosunku do wysokości przekroju.

1. Płaszczyzna momentów przechodzi przez jedną z osi głównych przekroju.

Natenczas druga oś główna przekroju staje się osią obojętną.

1. Naprężenie normalne.

Oznaczmy przez:

σ naprężenie normalne danego włókna w kg/cm^2 ,

y odległość danego włókna od osi obojętnej w cm ,

σ_1 naprężenie normalne dla $y = 1$ w kg/cm^2 , a więc $\sigma_1 = \sigma : y$,

e_1 i e_2 odległości od osi obojętnej skrajnych włókien (rozciąganych lub ściskanych),

e większą z tych dwóch odległości,

k_{c} ciągnięcie bezpieczne w kg/cm^2 ,

k ciśnienie bezpieczne w kg/cm^2 ,

k_b gięcie bezpieczne w kg/cm^2 ,

J moment bezwładności przekroju względem osi obojętnej w cm^4 ,

a otrzymamy **wzór zasadniczy**:

$$\sigma_1 = \frac{M}{J} = \frac{\text{Moment gnący}}{\text{Moment bezwładności}}, \quad \text{a zatem } \sigma = \frac{M}{J} y. \quad \text{IV.}$$

Jeżeli nie mamy przekroczyć naprężeń bezpiecznych, to powinno być:

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{J} e_1 < k_x \quad \text{i} \quad \sigma_{\min} = \frac{M}{J} e_2 < k.$$

Ilości J : $e_1 = W_1$ i J : $e_2 = W_2$ zwiemy **momentami wytrzymałości** danego przekroju dla strony rozciąganej, wzgl. ściskanej. Dochodzimy wreszcie do ogólnych **warunków wytrzymałości** na gięcie:

$$\frac{M}{W_1} \geq k_x; \quad \frac{M}{W_2} \geq k.$$

Gdy k_x i k nie są sobie równe, trzeba stosować obydwa wzory. Gdy zaś oś obojętna jest zarazem i osią symetrii przekroju, albo gdy przynajmniej $e_1 = e_2$, to $W_1 = W_2$, a natenczas stosujemy mniejszą z obydwóch wartości k_x i k .

Gdy natomiast ciągnięcia, ciśnienia i gięcia bezpieczne są sobie równe, $k_x = k = k_b$ (np. dla żelaza spawalnego i zlewne go, dla stali zlewnej), natenczas mniejszą z dwóch wartości W_1 i W_2 , a mianowicie $J : e = W$, nazywamy poprostu momentem wytrzymałości, a wzory wytrzymałości na gięcie będą:

$$\begin{array}{l} \text{do oznaczenia naprężenia:} \quad \sigma_{\max} = M : W \\ \text{do oznaczenia przekroju:} \quad W = M : k_b \end{array} \quad \text{V.}$$

(Tablica wartości W rozmaitych przekrojów p. str. 362 i nast.)

Wzory powyższe opierają się na założeniu, że odkształcenia długości są ściśle proporcjonalne do naprężeń, które to założenie jest szczególnym tylko przypadkiem ogólnego prawa Bach'a i Schüle'go, a mianowicie dla wartości $n = 1$, (p. str. 328). Lecz założenie to nie sprawdza się dla niektórych materiałów, zwłaszcza dla żelaza lane go, kamieni, cementu i betonu. *)

W tych materiałach zmiany długości rosną p r ę d z e j niż naprężenia, skutkiem czego rzeczywiście σ_{\max} są zawsze mniejsze aniżeli wyniki wzorów powyższych.

Wartości naprężeń (gięć) łamiących żelazo lane, obliczone z wyników przeginań próbnych na podstawie wzorów powyższych, zbliżają się tem bardziej do naprężeń rozrywających (ciągnięć), im bardziej wartość e_0 (t. j. odalenie środka ciężkości części przekroju, leżącej po jednej stronie poziomej osi ciężkości, od tejże osi) zbliża się do wartości e . Tak obliczone naprężenie łamiące przewyższa tem bardziej naprężenie rozrywające, im więcej materiału skupia się około owej poziomej osi ciężkości przekroju.

R. Latowski **) objaśnia, że w belce o przekroju prostokątnym, z materiałów w końcu wymienionych, warstwa obojętna (p. str. 352) zmienia swe położenie w przekroju przy obciążeniu z m i e n n e m; przy obciążeniu s t a ł e m warstwa ta jest stała, lecz ma w kierunku długości belki krzywość inną niż sama oś belki, a mianowicie: W środkowej części długości belki warstwa obojętna leży w przybliżeniu równoległe z osią belki, lecz p o n a d t ą osią; bliżej podpór warstwa obojętna zbliża się bardziej do osi belki, a nad samymi podporami warstwa obojętna przecina spodnią powierzchnię belki.

Obojętna przekroju przesuwają się zatem od poziomej osi ciężkości przekroju w stronę mniejszego rozciągania, w stronę większej wytrzymałości, t. j. w stronę ści-

*) C. v. Bach, Zeitschr. d. V. d. Ing. 1888 str. 193 i nast. oraz str. 1094 i nast.: Die Biegungslehre und das Gusseisen. Nadto tenże w tem samem czasopiśmie: 1896 str. 1381 i nast.; 1897 str. 241 i nast.; 1898 str. 35 i nast.

**) R. Latowski: Die Biegungselasticität bei Körpern von ungleicher Festigkeit. Zeitschr. d. V. d. Ing. 1897 str. 941.

skaną. Wielkość tego przesunięcia warunkują się nie tylko samym stosunkiem współczynników odkształceń α przy ciągnięciach i ciśnieniach, ale i zmiennością tych współczynników, pozostającą w zależności od wielkości naprężeń podług wzoru: $\varepsilon = \alpha \sigma^n$ (p. str. 326).

Podług L. Geusena *) dla żelaza lanego, granitu i t. p., i dla przekroju prostokątnego istotnie potrzebny moment wytrzymałości równa się: $W = M : 2 k_2$.

Przekrój niebezpieczny (rozłamujący się) belki, który jest miarodajnym dla obliczenia belki, określa się podług równania V z warunku:

$$\sigma_{\max} = M : W.$$

Dla belki o stałym przekroju ($W = \text{stałej}$) niebezpieczny przekrój znajdzie się zatem tam, gdzie M będzie największą, t. j. w tem miejscu, gdzie $Q = dM : dx = 0$, lub gdzie Q zmienia znak + na —. (Patrz str. 351 i 379.)

Belki o równomiernej wytrzymałości na gięcie (p. str. 389) muszą w każdym przekroju posiadać toż samo: $\sigma_{\max} = kb$; stosownie do równania V musimy zatem dopełnić warunku:

$$\sigma_{\max} = M : W = \text{stałej};$$

t. zn., że M i W dla całej belki powinny się zmieniać podług równego prawa zmienności.

2. Naprężenia przesuujące (cięcia.)

Sila tnąca na jednostkę bieżącą belki, w odległości y od warstwy obojętnej, stosownie do str. 350 (rys. 204) w kg/cm bież. jest:

$$T_y = \tau_y z = \frac{Q S_y}{J} \dots \dots \dots \text{VI.}$$

Szczegóły dla ważniejszych przekrojów podano na str. 350.

3. Naprężenia główne.

Jeżeli na cząstkę pola przekroju pręta działają naprężenia normalne i przesuujące (σ i τ), to łączne ich działanie wytwarza największe i najmniejsze naprężenie normalne (σ_{\max} i σ_{\min}), t. zw. **naprężenia główne**, a nadto w pewnych kierunkach największe i najmniejsze odkształcenie rozmiarów (ε_{\max} i ε_{\min}), t. j. największe rozciągnięcie i największe ściśnięcie, t. zw. **główne odkształcenia rozmiarów**, albo też **rozciągnięcie główne** i **ściśnięcie główne**. Chociaż dla ciał jednolitych zlewają się ze sobą kierunki obydwóch odkształceń głównych ε z kierunkami obydwóch naprężeń głównych σ , jednakże stosunek wzajemny ich wielkości nie stoi w prostym stosunku, jaki zachodzi między zwykłym naprężeniem normalnym, a przynależnym odkształceniem rozmiaru ($\varepsilon = \alpha \sigma$, p. str. 329.)

Pomyślimy sobie jednakże, iż ε_{\max} i ε_{\min} powstały skutkiem dwóch innych naprężeń normalnych: σ'_{\max} i σ'_{\min} , podlegających prawu proporcjonalności ($\varepsilon = \alpha \sigma$), to naprężenia te σ'_{\max} i σ'_{\min} nazwiemy **zastępczemi naprężeniami głównymi**, (podł. C. v. Bach'a są to największe ciągnięcia i ciśnienia w danym punkcie).

Każde z dwóch rzeczywistych naprężeń głównych σ_{\max} i σ_{\min} powoduje w swoim kierunku odkształcenie długości — lecz równocześnie w kierunku drugiego naprężenia (prostopadłym do pierwszego) odkształcenie rozmiaru poprzecznego. Możemy zatem

*) L. Geusen, Zeitschr. d. V. d. Ing. 1898, str. 463.

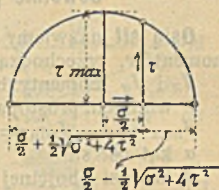
łącznie działanie naprężeń σ_{\max} i σ_{\min} zastąpić działaniem owych dwóch innych naprężeń zastępczych σ'_{\max} i σ'_{\min} , z których każde, oddzielnie wzięte, powodowałyby w swoim kierunku takie samo odkształcenie rozmiaru, jakie w istocie jest wynikiem łącznego działania obydwóch naprężeń σ_{\max} i σ_{\min} .

Naprężenia główne cząstki przekroju określają się z działającego naprężenia normalnego σ i przesuwanego τ wzorem:

$$\sigma_{\frac{\max}{\min}} = \frac{1}{2} \sigma \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

Jeżeli ciągnienie oznaczymy jako naprężenie dodatnie (+), a ciśnienie jako ujemne (-), to znak + wzoru odnosić się będzie do σ_{\max} , a znak - do σ_{\min} , przyczem σ_{\max} będzie zawsze ciągnieniem, σ_{\min} ciśnieniem, chociaż może być bezwzględnie $\sigma_{\min} > \sigma_{\max}$. Sposób wykreślenia naprężeń σ_{\max} i σ_{\min} objaśnia rys. 209.

Rys. 209.



Kąty ψ , pod którymi $\sigma_{\frac{\max}{\min}}$ pochylone są względem kierunku σ , określamy wzorem:

$$\operatorname{tg} 2\psi = \mp 2\tau : \sigma.$$

Kierunki naprężeń głównych są zatem na sobie prostopadłe.

Gdy $\tau = 0$ (np. w skrajnych włóknach rozciąganych belki, najbardziej oddalonych od warstwy obojętnej), będzie: $\varphi = 0$, $\sigma_{\max} = \sigma$, a $\sigma_{\min} = 0$; włókna te rozciągają się zatem najbardziej w kierunku osi belki. Natomiast jeżeli $\sigma = 0$ (np. w warstwie obojętnej belki), to będzie: $\varphi = \mp 45^\circ$, $\sigma_{\max} = +\tau$, a $\sigma_{\min} = -\tau$; a zatem samo naprężenie przesuwanące (cięcia) wytwarzają normalne naprężenia główne w płaszczyznach pochylonych pod kątami $\mp 45^\circ$ do warstwy obojętnej (osi) belki.

Zastępcze naprężenia główne (t. j. największe wyłężenia cząstki przekroju) będą:

$$\sigma'_{\frac{\max}{\min}} = \frac{m-1}{2m} \sigma \pm \frac{m+1}{2m} \sqrt{\sigma^2 + 4(\alpha_0 \tau)^2};$$

we wzorze tym $m = \frac{10}{3}$ (dla metali) oznacza stosunek $\varepsilon : \varepsilon_q$ (por. str. 327), α_0 zaś ma dwie wartości: dla σ'_{\max} będzie: $\alpha_0 = k_z : \frac{m+1}{m} k_s$,

dla σ'_{\min} zaś: $\alpha_0 = k : \frac{m+1}{m} k_s$; *) (podł. C. v. Bach'a) ilość α_0 nazwiemy stosunkiem wyłężania materiału.

Dla ciał zupełnie jednolitych $\alpha_0 = 1$; dla innych ciał można α_0 oznaczyć podług danych tablicy str. 337.

Dla metali ($m = \frac{10}{3}$) otrzymamy:

$$\sigma'_{\frac{\max}{\min}} = 0,35 \sigma \pm 0,65 \sqrt{\sigma^2 + 4(\alpha_0 \tau)^2},$$

*) Natężenia bezpieczne k_z , k i k_s są pewną częścią odnośnych wytrzymałości K_z , K i K_s , a nie zawsze stopień bezpieczeństwa bywa tak dobrany, aby dopełniony był warunek $\frac{k_z}{K_z} = \frac{k}{K} = \frac{k_s}{K_s}$; słuszniej byłoby zatem we wzorach powyższych na α_0 wielkości k_z , k i k_s zastąpić wielkościami K_z , K i K_s .

a wartości współczynnika wyężania będą:

$$\alpha_0 = k_s : 1,3 k_s, \text{ wzgl. } \alpha_0 = k : 1,3 k_s.$$

2. Płaszczyzna momentów przechodzi przez oś belki, lecz jest dowolnie pochyła względem osi przekroju.

Osią sił nazwiemy przecięcie się przekroju belki z płaszczyzną momentów, przechodzącą przez oś belki, a nadto oznaczymy przez: J_x i J_y momenty bezwładności przekroju względem dwóch dowolnych, prostopadle na sobie stojących osi ciężkości X, Y , $J_{\max} = J_I, J_{\min} = J_{II}$ główne momenty bezwładności, α kąt osi sił $\left. \begin{array}{l} \beta \text{ kąt osi obojętnej} \\ \delta \text{ kąt osi sił z osią obojętną.} \end{array} \right\}$ z pierwszą osią główną SI (dla J_I),

1. Związki między osią sił i osią obojętną.

Oś sił z osią obojętną stanowią parę osi sprzężonych przekroju, dla których moment odśrodkowy równa się zeru. Znając zatem jedną z tych osi, łatwo wyznaczyć drugą, posilkując się, np. kołem bezwładności (p. str. 185 rys. 114). Jeżeli zaś znamy osie główne przekroju, to i bez pomocy koła bezwładności możemy do znanej osi sił wykreślić przynależną oś obojętną (p. wykreszenie pod 2. str. 357). Obliczamy zaś β z pomocą wzoru:

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = J_I : J_{II}.$$

2. Oznaczenie naprężeń.

a) Dane są **osie główne** SI z $J_{\max} = J_I$, oraz SII z $J_{\min} = J_{II}$.

Obliczenie (por. rys. 210). Jeżeli:

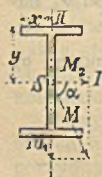
$M_1 = M \sin \alpha =$ składowa momentu, prostopadła do SI ,

$M_2 = M \cos \alpha =$ składowa momentu, prostopadła do SII ,

to naprężenie normalne w punkcie dowolnym, o spórzędnych $x \parallel SI$ i $y \parallel SII$ będzie:

Rys. 210.

$$\sigma = \frac{M_1}{J_I} y + \frac{M_2}{J_{II}} x.$$



σ_{\max} otrzymamy, podstawiając za x i y spórzędne punktu najbardziej odległego od właściwej osi obojętnej, np. najbardziej odległego skrajnego punktu przekroju. Oś obojętną wypada zazwyczaj wykreślić uprzednio podług rys. 211 albo 212. Dla przekrojów, dających się obwieść prostokątem tak, aby wierzchołki prostokąta były zarazem skrajnymi punktami przekroju, np. dla przekrojów kształtu I, L , mamy prościej:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_1}{W_1} + \frac{M_2}{W_2},$$

jeżeli W_1 i W_2 oznaczają momenty wytrzymałości względem osi głównych i najbardziej oddalonych punktów skrajnych przekroju.

Wykreślenie (podl. Rob. Land'a *) p. rys. 211:

SK niechaj będzie osią sił; na osi SII odcinamy $ST = J_1$, $TA = J_{11}$, a proste $KTN \parallel SI$ i $AN \perp SK$ przetną się w punkcie N , który jest jednym punktem osi obojętnej SN , stojącej prostopadle na KA .

Pole naprężeń. Na SI (rys. 211) odcinamy $SN' = AN$ (albo też na SII kresę $SK' = SK$); na prostej, przeprowadzonej przez N' (albo K') równolegle do SN , odcinamy w dowolnym miejscu wartość momentu M jako kresę, a promienie wyprowadzone z S do końców kresy M ograniczają żądane pole naprężeń: kresa σ , odcięta wspomnianymi promieniami z dowolnej równoległej do M (czyli do SN), przedstawia nam naprężenie σ , panujące we wszystkich punktach owej równoległej. Wykreślenie wielkości σ_{\max} i σ_{\min} wynika z powyższego. Podziałkę dla kres σ określa nam związek: $\sigma = (M : J) y$, w który zamiast wielkości M, J, y wprowadzamy jednostki podziałki użytych do ich wykreślenia, a otrzymamy jednostkę podziałki dla σ .

Przykład na obliczenie podziałki: Dla długości (y) 1 cm = 2 cm rzeczywistym, dla momentów (M) 1 cm = 5000 kgcm, dla momentów bezwładności (J) 1 cm = 100 cm⁴, a zatem dla naprężeń (σ) będzie: $1 \text{ cm.} = \frac{5000 \text{ kgcm} \cdot 2 \text{ cm}}{100 \text{ cm}^4} = 100 \text{ kg/cm}^2$.

3) Znanem jest **koło bezwładności** (oznaczone przez J_x, J_y i J_{xy} , względem dwóch dowolnych, na sobie prostopadłych osi SX i SY , por. str. 185), rys. 212. Oś obojętną wyznaczamy za pomocą cięgiwy KTN , jako oś sprzężoną z osią sił SK . Jeżeli kresa $TN = J'$, a przez v oznaczmy oddalenie dowolnego punktu przekroju od osi obojętnej, to naprężenie w tym punkcie podług Rob. Land'a będzie ogólnie: **)

$$\sigma = \frac{M}{J'} v, \text{ a } \sigma_{\max} = \frac{M}{J'} e,$$

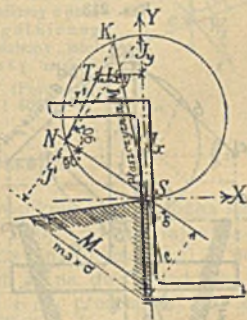
przyczem $e = v_{\max}$.

Pole naprężeń. Na równoległej do SN , przeprowadzonej w oddaleniu $J' = TN$, odcinamy kresę długości M , a dwa promienie, wyprowadzone z S przez końce tej kresy, ograniczają pole naprężeń, t. j. odcinają na dowolnej równoległej do SN

Rys. 211.



Rys. 212.



*) Centralbl. d. Bauverw., 1893, str. 465.

**) R. Land, Die Ermittlung der Spannungsverteilung i t. d., Zeitschr. f. Bauwesen. 1892, str. 554; jako odbitka u Wilh. Ernst & Sohn w Berlinie.

kresę przedstawiającą naprężenie w dowolnym punkcie tej równoległej. Cq do podziałki stosują się i tu objaśnienia podane pod α). — Wykreślenie to posiada tę zaletę, że odbywa się bez znajomości osi głównych.

Uwaga. Jeżeli przyległe części budowlane pozwalają na przegięcie się belki tylko w pewnym, określonym kierunku, to warunek ten określa nam oś obojętną SN , jako prostopadłą do płaszczyzny przegięcia, a z pomocą koła bezwładności ze znanego położenia SN określamy NTK , a więc i położenie płaszczyzny momentów SK , już z uwzględnieniem działania nieznanych nam jeszcze co do wielkości bocznych odporów przyległych części budowlanych.

3. Biegunowe pole wytrzymałości (podł. Rob. Land'a). *)

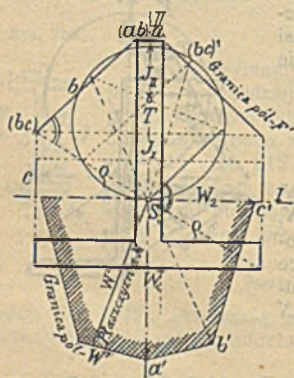
Poprzednio pod (2., β) mieliśmy: $\sigma_{\max} = \frac{M}{J'} e = \frac{M}{W'}$; wielkość:

$W' = \frac{J'}{e} = \frac{J}{e \sin \delta}$ nazwiemy **wielkością wytrzymałości** względem osi

obojętnej SN , przyczem J oznacza moment bezwładności względem tejże osi. Mamy zatem: $W' = W : \sin \delta$, jeżeli W jest momentem wytrzymałości dla osi SN (podł. str. 353). Odetnijmy z punktu S na każdej, przez niego przechodzącej osi sił, na obydwie strony, kresę przedstawiającą w dowolnej podziałce wartość W' , (odniesioną do osi obojętnej, sprzężonej z każdorazową osią sił), a końce tych kres (promieni wodzących) leżeć będą na obwodzie symetrycznego, biegunowego pola wytrzymałości, które w skróceniu nazwiemy: „polem W'' ” obwód jego zaś: „granicą W'' ”.

Uwaga. Dla każdej osi obojętnej mamy po dwa momenty wytrzymałości $W' = J : e$. ponieważ za e musimy podstawić raz $e_{\max} = e$, drugi raz $e_{\min} = e$, (po drugiej stronie osi obojętnej). Mamy zatem też po dwie wartości W'' , a mianowicie: $W'' = J : e$ i $W'' = J : e_1$, z których $W'' < W''_1$. Jeżeli więc na każdej przez S przechodzącej osi sił odetniemy jako kresy obydwie wartości W'' i W''_1 , przynależne do osi obojętnej, sprzężonej z daną osią sił, lecz odetniemy je, poczynając od S , w strony przeciwnie położeniom oddalen e i e_1 , względem osi obojętnej, to otrzymamy „uogólnione pole W'' ” zamiast powyższej opisanego symetrycznego „pola W'' ”.

Rys. 213.



Wykreślenie i właściwości „pola W'' ” (rys. 213). Z danego przekroju wykreślamy nasamprzód biegunowo symetryczne „pole F'' ”, w sposób następujący: Na każdym promieniu wodzącym, przechodzącym przez punkt S (ognisko), odcinamy symetrycznie, t. j. w stronę odwrotną, od S poczynając, kresę q , równą większemu odcinkowi promienia wodzącego po kraju (obwodzie skrajnym) **) przekroju, t. j. odcinkowi między S a krajem przekroju. Wielobok, obwodzący skrajnie to pole F'' , nazwiemy granicą, albo krajem F'' (t. j. boki a, b, c, \dots). Wykreśliwszy jeszcze koło bezwładności przekroju F' , otrzymamy poniższe związki między polem F'' , a polem W'' ($a'b'e' \dots$):

*) , Dodatek do: Deutscher Baukalender z r. 1894 i lat następujących, oraz R. Land. Zeitschr. d. V. d. Ing. 1898, str. 445.

**) Krajem przekroju nazywamy linię obwodzącą przekrój w ten sposób, że części

Każdy wierzchołek (bc) kraju I'' (jako przecięcie dwóch boków skrajnych bic) jest sprzężony z bokiem $b'c'$ (łączącym wierzchołek b' z c') pola W'' i naodwrot: Kierunki promienia Sb' i boku skrajnego b , (albo promienia Sc' i boku skrajnego c) są kierunkami tak samo sprzężonymi, jak kierunki osi sił i osi obojętnej. Podobnie sprzężeniami są też kierunki promieni $S(bc)$ pola I'' i boku skrajnego ($b'c'$) pola W'' . Związki te pozwalają wykreślić całe pole W'' z pomocą znanego kola bezwładności i jednej (obliczonej) wartości W'' .

Z powodu symetrii pola W' starczy wykreślenie jednej połowy. Obwód tego pola odcina na każdej osi głównej moment wytrzymałości W' przynależny do drugiej osi głównej, ponieważ w danym razie $\delta = 90^\circ$, a zatem $W'' = W' \sin \delta = W'$.

Oznaczenie naprężeń: Jeżeli W' jest promieniem wodzącym obwodu pola W' w kierunku osi sił, to z powyższego wynika:

$$\sigma_{\max} = M : W' \quad (\text{por. wzór V, str. 353}).$$

Przykład 1. W rys. 213 wykreślono symetryczno-biegunowe pole W' dla normalnego teownika 6×8 cm, dla którego mamy: $J_1 = 23,8$ cm⁴, $J_{11} = 12,2$ cm⁴, $W_1 = 5,48$ cm³, $W_2 = 4,05$ cm³. Podziałki w rysunku zastosowano następujące: 1 cm rysunku przedstawia: 2 cm rozmiarów przekroju ($1/2$ wielkości rzeczywistej), 20 cm⁴ dla J , a 3 cm³ dla W i W' . Jeżeli a, b, c , są proste kraju F' [z wierzchołkami: (ab), (bc)] a', b', c' zaś sprzężone z nimi wierzchołki pola W' , to odcinamy $Sa' = W_1$, $Sc' = W_2$, a kierunek $a'b'$ będzie sprzężony z promieniem $S(ab)$, kierunek zaś $c'b'$ sprzężony z promieniem $S(bc)$ [t. zn. równoległy do $S(bc)'$]. Dla sprawdzenia wykreślenia mamy nadto: Promień Sb' musi być sprzężony z kierunkiem boku skrajnego b pola F' , a promień $S(ac)$, poprowadzony do przecięcia boku a z c , sprzężony z kierunkiem $a'c'$. [By rysunku 213 nie zagmatwać, nie wrysowano w niego linii w końcu wspomnianych].

Przykład 2. Skośnie ułożony uownik obciąża się pionowo (rys. 214), a moment największy niechaj będzie M . Obwód pola W' otrzymamy, odcinając na każdej z dwóch osi głównych moment wytrzymałości, odnoszący się do drugiej, a więc $W_1 = S1 \perp S1$ i $W_2 = S2 \perp S2$ w dowolnej podziałce, np. 1 cm = 20 cm⁴. Prosta 12 jest krajem pola W'' , a pionowa oś sił przecina kraj ten w punkcie c , określającym nam wielkość $W'' = Sc$ (w podziałce dla W_1 i W_2). Ostatecznie otrzymamy: $\sigma_{\max} = M : W''$.

Uwaga. W sposób zupełnie podobny, jak obwód określonego na str. 358 symetryczno-biegunowego pola W'' wykreślamy z pomocą kraju pola F' , tak możemy też wykreślić obwód uogólnionego pola W'' z pomocą kraju danego przekroju, a będziemy mieli: $\sigma_{\min} = M : W''$, przyczem jako W'' , bierzemy większy z dwóch promieni wodzących odvodu W' , leżących na osi sił. (Porów. uwagę na str. 358, jako też: rdzeń przekroju str. 401 i 402).

Rys. 214.



4. Oznaczenie przekroju.

Przekroje często stosowanych kształtowników I i Γ można oznaczyć z wzoru podanego pod 2., α , (str. 356), podstawiając k_b za σ_{\max} , o ile znamy kierunek osi sił (płaszczyzny momentów) i położenie osi głównych. Rozkładamy moment M na dwa składowe: M_1 prostopadły do pierwszej osi głównej $S1$ i M_2 prostopadły do drugiej osi głównej $S2$ (por. rys. 210, str. 356), a otrzymamy:

$$W_1 = (M_1 + u M_2) : k_b, \quad \text{przyczem } u = W_1 : W_2.$$

wklęsłe obwodu zastępujemy liniami prostymi, łączącymi skrajne wierzchołki. lub stycznymi do skrajnych punktów krzywych części obwodu. Kraj przekroju nie posiada zatem już części wklęsłych lub wcinających się ku środkowi.

Dogodnym sposobem obliczenia będzie następujący: Obierając szacunkowo z tablic profilowych pewien profil, mogący w przybliżeniu odpowiadać warunkom, oznaczamy dla niego stosunek u i wprowadzamy go we wzór powyższy, przez co otrzymamy pierwszą, przybliżoną wartość W_1 . Podług niej dobieramy nowy profil, oznaczamy dla niego znów u i otrzymujemy z wzoru powyższego dokładniejszą wartość niezbędnego W_1 . Do pierwszego szacunku można stosować średnie wartości (dla niemieckich profili normalnych):

dla dwuteowników I $u = 9$, dla uowników E $u = 7$. *)

Przykład. Belkę dwuteownikową niechaj obciąża sklepienie jednostronnie, a więc ciężarem pionowym i parciem poziomem. Składowo momentów dla środka belki obliczyliśmy na: w płaszczyźnie pionowej $M_1 = 50\,000$ kgcm, a w płaszczyźnie poziomej $M_2 = 100\,000$ kgcm. Jeżeli $k_b = 1000$, to otrzymamy z wzoru powyższego:

$$W_1 = (50\,000 + 9 \cdot 100\,000) : 1000 = 950 \text{ cm}^3.$$

Najbliższym tej wartości będzie profil normalny Nr 36, mający $W_1 = 1088 \text{ cm}^3$, a stosunek $u = W_1 : W_2 = 9.53$. Dokładniej będzie zatem:

$W_1 = (50\,000 + 9.53 \cdot 100\,000) : 1000 = 1003 \text{ cm}^3$, czyli że dwuteownik Nr 36 wystarcza.

c. Sprężyste odkształcenie belek prostych.

Początek spólrzędnych obieramy w podporze, a dla belek o końcu niepodpartym w tymże końcu. Osią x niechaj będzie prosta pierwotnie oś ciężkości belki.

1. Jeżeli moment bezwładności J jest stały dla całej belki, to pochylenie się wzajemne dwóch przekrojów w x_1 i x_2 skutkiem przegięcia będzie:

$$\alpha = \int_{x_1}^{x_2} \frac{M \cdot dx}{EJ} = \frac{1}{EJ} \int_{x_1}^{x_2} M \cdot dx = \frac{1}{EJ} \cdot [\text{pole momentów}]_{x_1}^{x_2}.$$

E podług str. 328, 331 i nast.

Jeżeli zaś wartość J jest zmienną, np. $J = f(x)$, to albo wprowadzamy tę wartość we wzór powyższy, otrzymując:

$$\alpha = \int_{x_1}^{x_2} \frac{M dx}{E f(x)}$$

i całkujemy dla znanej funkcji $f(x)$ — albo też stosujemy sposób wykreślny, obliczając dowolną wartość J , najdogodniej największą wartość J_c , i wprowadzając ją we wzór powyższy, otrzymujemy:

$$\alpha = \frac{1}{EJ_c} [\text{przekształcone pole momentów}]_{x_1}^{x_2}$$

Przekształcenie pola momentów polega zaś na tem, że rzędne M zastępujemy rzędnymi:

$$M' = M (J_c : J).$$

2. Prosta pierwotnie oś (ciężkości) belki, po przegięciu się skutkiem sił i momentów na belkę działających, staje się krzywą, t. j.

*) Rob. Land, Zeitschr. d. V. d. Ing. 1895, str. 293 i 1007; 1898, str. 444. — Stosunki u dla niemieckich profili normalnych podano w Deutsches Normalprofilbuch 5 wydanie 1897.

osią sprężyste odkształconą, której nazwa skrócona będzie odkształcona, *) a jej promień krzywości ρ określa się wzorem:

$$\rho = \frac{EJ}{M} \dots \dots \dots \text{VII.}$$

Ponajczęściej oś belki przy ugięciu podlega nieznacznym tylko pochylem, możemy zatem we wzór ogólny na ρ (str. 98) z dostateczną ściślnością podstawić dx zamiast d_s , przez co otrzymamy uproszczone równanie różniczkowe odkształconej:

$$\pm \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EJ} = \frac{1}{\rho} \dots \dots \dots \text{VIII.}$$

Dwukrotne całkowanie powyższego doprowadzi nas do równania odkształconej, przyczem stałe całkowania określają się z każdorazowych warunków podparcia belki. Podpora stała, lub poziomo tylko przesuwalna, daje nam warunek $y = 0$; poziome osadzenie końca belki warunek: $dy : dx = 0$. Punkty zwrotne (p. str. 99) odkształconej pojawiają się w przekrojach, w których $M = 0$ (t. zn. $\rho = \infty$). Warunkiem, aby odkształcona była kołem, będzie równanie:

$$\frac{\rho}{E} = \frac{J}{M} = \text{stałej.}$$

Powyższe sposoby obliczeń są podatne tylko dla obciążeń mniej złożonych. — Równania odkształconych dla szczególnych przypadków obciążenia podano na str. 373—378.

3. Sposób Mohr'a nadaje się lepiej do ogólniejszych przypadków obciążenia. Ugięcie y w przekroju C równa się ($1 : EJ$)-krotnej wartości momentu, jaki powstanie w przekroju C , jeżeli belkę pomyślimy sobie obciążoną polem momentów, wykreślonym dla istotnego obciążenia belki. Gdy J nie jest stałym, lecz zmiennym, postępujemy w sposób wskazany już pod 1., zastępując J przez J_c , a pole momentów M przez przekształcone pole momentów $M' = M(J_c : J)$. — Odkształconą możemy natenczas pojmować jako wtórny rzędny krzywą momentów, a wykreślać jako wielobok (krzywą) sznurowy dla wspomnianego wyżej obciążenia polem momentów i przy odległości bieguna, równej EJ , względnie EJ_c .

4. Praca mechaniczna przeginięcia. Moment gnący M obraca (pochyla) cząstkę pręta długości dx o kąt $dx : \rho$, mierzony łukiem o promieniu 1; praca wykonana przy tym obrocie będzie zatem dla całej belki:

$$A = \frac{1}{2} \int_0^l M \frac{dx}{\rho} = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2 \cdot dx}{EJ}.$$





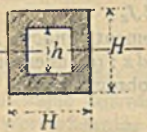

d. Momenty bezwładności i wytrzymałości.

Objaśnienia i ogólne prawa dotyczące momentów bezwładności p. str. 179 i nast.; ich wykreślanie p. str. 183 i nast.; oznaczenia zaś momentów bezwładności z doświadczeń wahadłowych p. str. 211.

*) Na wzór innych linii i krzywych, np. styczna, rozwijająca, rozwinięta itp. Dotychczasowe nazwy: linia sprężysta albo linia ugięcia nie określają należyście pojęcia.

Równikowe momenty bezwładności i momenty wytrzymałości najpowszeźniejszych przekrojów.

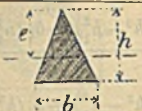
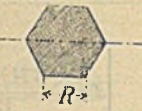

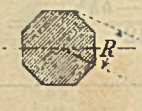


Dla niesymetrycznych przekrojów Nr. 7 i 12 podano tylko mniejszy (miarodajny) z dwóch momentów W_1 i W_2 (str. 353). Momenty bezwładności i wytrzymałości niemieckich profili normalnych podano w Dziale ósmym: Materiały budowlane, momenty bezwładności przekrojów blachownic zaś w Dziale piętnastym: Statyka budowlana; momenty bezwładności i wytrzymałości przekrojów szyn kolejowych w Dziale jedenastym: Kolejnictwo.

Nr.	Przekrój	Moment bezwładności	Moment wytrzymałości
1*)		$J = \frac{bh^3}{12}$	$W = \frac{bh^2}{6}$
2**)		$J = \frac{h^4}{12}$	$W = \frac{h^3}{6}$
3**)		$J = \frac{h^4}{12}$	$W = \frac{\sqrt{2}}{12} h^3$ $= 0,1179 h^3$
4		$J = \frac{b}{12} (H^3 - h^3)$	$W = \frac{b}{6} \frac{H^3 - h^3}{H}$
5***)		$J = \frac{H^4 - h^4}{12}$	$W = \frac{1}{6} \frac{H^4 - h^4}{H}$
6****)		$J = \frac{H^4 - h^4}{12}$	$W = \frac{\sqrt{2}}{12} \frac{H^4 - h^4}{H}$ $= 0,1179 \frac{H^4 - h^4}{H}$

*) Tablica szczegółowa podana na str. 369 i nast.; objaśnienia p. str. 187.

***) Tablica szczegółowa str. 368, objaśnienia str. 187.

****) Można się posilkować tablicą str. 368.

Nr.	Przekrój	Moment bezwładności	Moment wytrzymałości
7*)		$J = \frac{bh^3}{36}$ $e = \frac{2}{3} h$	$W = \frac{bh^2}{24}$
8		$J = \frac{5\sqrt{3}}{16} R^4$ $= 0,5413 R^4$	$W = \frac{5}{8} R^3$
9			$W = 0,5413 R^3$
10**)		$J = \frac{1 + 2\sqrt{2}}{6} R^4$ $= 0,6381 R^4$	$W = 0,6906 R^3$
11	<p>Wielokąt prawidłowe. <i>F</i> jest polem, <i>a</i> bokiem wielokąta, <i>R</i> promieniem opisanego, <i>r</i> wpisanego koła. Oś dowolna, przechodząca przez środek***) (dalsze dane p. str. 35 i 131)</p>	$J = \frac{F}{24} (6R^2 - a^2)$ $= \frac{F}{48} (12r^2 + a^2)$ $J \approx \frac{FR^2}{4}$	$W \approx \frac{FR}{4}$
12		$J = \frac{6b^2 + 6bb_1 + b_1^2}{36(2b + b_1)} h^3$ $e = \frac{1}{3} \frac{3b + 2b_1}{2b + b_1} h$	$W = \frac{6b^2 + 6bb_1 + b_1^2}{12(3b + 2b_1)} h^2$
13		$J = \frac{bh^3 - (b - b_2)h_1^3 + b_1 h_2^3}{12}$	$W = \frac{bh^3 - (b - b_2)h_1^3 + b_1 h_2^3}{6h}$

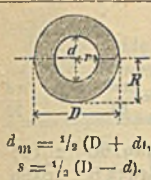







*) Dalsze dane p. str. 187.

***) Względem przekątnej $W = 0,8381 R^3$.

****) Moment bezwładności jest ściśle jednakowy dla dowolnej osi środkowej — wartości momentów wytrzymałości natomiast nieco zmienne, w zależności od zmieniającego się położenia osi w obrębie połowy kąta środkowego.

Nr.	Przekrój	Moment bezwładności	Moment wytrzymałości
14		$J = \frac{b(h^3 - h_1^3) + b_1(h_1^3 - h_2^3)}{12}$	$W = \frac{b(h^3 - h_1^3) + b_1(h_1^3 - h_2^3)}{6h}$
15		$J = \frac{B H^3 + b h^3}{12}$	$W = \frac{B H^3 + b h^3}{6 H}$
16		$J = \frac{B H^3 - b h^3}{12}$	$W = \frac{B H^3 - b h^3}{6 H}$
17		$J = \frac{1}{3} (B e_1^3 - b h^3 + a e_2^3)$ $e_1 = \frac{1}{2} \frac{a H^2 + b d^2}{a H + b d}$ $e_2 = H - e_1$	
18		$J = \frac{1}{3} [B (e_1^3 - h^3) + b (e_2^3 - h_1^3)]$ $e_1 = \frac{1}{2} \frac{B d^2 + b d_1 (2 H - d_1)}{B d + b d_1}; \quad e_2 = H - e_1$	
19		$J = \frac{1}{3} (B e_1^3 - B_1 h^3 + b e_2^3 - b_1 h_1^3)$ $e_1 = \frac{1}{2} \frac{a H^2 + B_1 d^2 + b_1 d_1 (2 H - d_1)}{a H + B_1 d + b_1 d_1}$	
20*)		$J = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi r^4}{4}$ $= 0,0491 d^4$ $= 0,7854 r^4$ $= F \left(\frac{r}{2} \right)^2 = \frac{F}{4} r^2$ $J \propto 0,05 d^4$	$W = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{\pi r^3}{4}$ $= 0,0982 d^3$ $= 0,7854 r^3$ $= \frac{F}{4} r$ $W \propto 0,1 d^3$

*) Tablica szczegółowa str. 366. Dalsze dane str. 188.

Nr.	Przekrój	Moment bezwładności	Moment wytrzymałości
21*)	 <p>$d_m = \frac{1}{2}(D + d)$ $s = \frac{1}{2}(D - d)$</p>	$J = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4)$ $= \frac{\pi}{4} (R^4 - r^4)$ $= \frac{1}{4} R^2 (R^2 + r^2)$ $J \sim 0,05 (D^4 - d^4)$	$W = \frac{\pi}{32} \frac{D^4 - d^4}{D}$ $= \frac{\pi}{4} \frac{R^4 - r^4}{R}$ $W \sim 0,8 d_m^2 s$
22		$J = r^4 \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi} \right)$ $= 0,1098 r^4$	$W_1 = 0,1908 r^3$ $W_2 = 0,2587 r^3$ $e_1 = 0,4244 r$
23		$J = 0,1098 (R^4 - r^4) - 0,283 R^2 r^2 (R - r)$ $\frac{R + r}{R + r}$ $J \sim 0,3 \delta r_1^3$	$e_1 = \frac{4}{3\pi} \frac{R^2 + Rr + r^2}{R + r}$ $e_2 = R - e_1$
24		$J = \frac{\pi a^3 b}{4} = 0,7854 a^2 b$	$W = \frac{\pi a^2 b}{4} = 0,7854 a^2 b$
25	<p>Pierścień eliptyczny. a i b zewnętrzne, a₁ i b₁ wewnętrzne półosie główne; a - a₁ = b - b₁ = delta = średnia grubość ścianki J i W względem osi 2 b.</p>	$J = \frac{\pi}{4} (a^3 b - a_1^3 b_1)$ $\sim \frac{\pi}{4} a^2 (a + 3b) \delta$	$W \sim \frac{\pi}{4} a (a + 3b) \delta$
26		$J = \frac{1}{12} \left(a^4 - \frac{3\pi}{16} d^4 \right)$	$W = \frac{1}{6a} \left(a^4 - \frac{3\pi}{16} d^4 \right)$
27		$J = \frac{1}{12} \left[\frac{3\pi}{16} d^4 + b (h^3 - d^3) + b^3 (h - d) \right]$ $W = \frac{1}{6h} \left[\frac{3\pi}{16} d^4 + b (h^3 - d^3) + b^3 (h - d) \right]$	
28		$J = \frac{\delta}{4} \left(\frac{\pi B^3}{16} + B^2 h + \frac{\pi B h^2}{2} + \frac{2}{3} h^3 \right)$ <p style="text-align: center;">przyczem $h = H - \frac{1}{2} B$.</p> $W = \frac{2J}{H + \delta}$	
29		$J = \frac{64}{105} (b_1 h_1^3 - b_2 h_2^3)$ <p style="text-align: center;">przyczem</p> $h_1 = \frac{1}{2}(H + \delta), \quad h_2 = \frac{1}{2}(H - \delta)$ $b_1 = \frac{1}{4}(B + 2,6 \delta), \quad b_2 = \frac{1}{4}(B - 2,6 \delta)$	$W = \frac{2J}{H + \delta}$

*) Tablica szczegółowa str. 367. Dalsze dane p. str. 188. — **) Dalsze dane, dotyczące blach falistych, w Dziale ósmym: Materiały budowlane, rozdział II.

1. Przekrój kołowy (pełny).


 $J =$ równikowy moment bezwładności,

 $W =$ moment wytrzymałości.

d	$J = \frac{\pi d^4}{64}$	$W = \frac{\pi d^3}{32}$	d	$J = \frac{\pi d^4}{64}$	$W = \frac{\pi d^3}{32}$	d	$J = \frac{\pi d^4}{64}$	$W = \frac{\pi d^3}{32}$
1	0,0491	0,0982	34	65597	3859	67	989166	29527
2	0,7854	0,7854	35	73662	4209	68	1049556	30869
3	3,976	2,651	36	82448	4580	69	1112660	32251
4	12,57	6,283	37	91998	4973	70	1178588	33674
5	30,68	12,27	38	102354	5387	71	1247393	35138
6	63,62	21,21	39	113561	5824	72	1319167	36644
7	117,9	33,67	40	125664	6283	73	1393995	38192
8	201,1	50,27	41	138709	6766	74	1471963	39783
9	322,1	71,57	42	152745	7274	75	1553156	41417
10	490,9	98,17	43	167820	7806	76	1637662	43096
11	718,7	130,7	44	183984	8363	77	1725571	44820
12	1018	169,6	45	201289	8946	78	1816972	46589
13	1402	215,7	46	219787	9556	79	1911967	48404
14	1886	269,4	47	239531	10193	80	2010619	50265
15	2485	331,3	48	260576	10857	81	2113051	52174
16	3217	402,1	49	282979	11550	82	2219347	54130
17	4100	482,3	50	306796	12272	83	2329605	56135
18	5153	572,6	51	332086	13023	84	2443920	58189
19	6397	673,4	52	358908	13804	85	2562392	60292
20	7854	785,4	53	387323	14616	86	2685120	62445
21	9547	909,2	54	417393	15459	87	2812205	64648
22	11499	1045	55	449180	16334	88	2943748	66903
23	13737	1194	56	482750	17241	89	3079853	69210
24	16286	1357	57	518166	18181	90	3220623	71569
25	19175	1534	58	555497	19155	91	3366165	73982
26	22432	1726	59	594810	20163	92	3516586	76448
27	26087	1932	60	636172	21206	93	3671992	78968
28	30172	2155	61	679651	22284	94	3832492	81542
29	34719	2394	62	725332	23398	95	3998198	84173
30	39761	2651	63	773272	24548	96	4169220	86859
31	45333	2925	64	823550	25736	97	4345671	89601
32	51472	3217	65	876240	26961	98	4527664	92401
33	58214	3528	66	931420	28225	99	4715315	95259
						100	4908738	98175

$\pi : 64 = 0,0490874;$

$\log (\pi : 64) = 0,6909699 - 2.$

$\pi : 32 = 0,0981748;$

$\log (\pi : 32) = 0,9919999 - 2.$

2. Pierścień kołowy.



Wagi jednostkowe g (w kg/m. b.) stosują się do gładkich rur (słupów) lanożelaznych. 1 m³ żelaza lanego waży 7250 kg. Dla żelaza spawalnego ilości g trzeba pomnożyć przez 1,076, dla żelaza zlewne go przez 1,083, dla stali zlewnej. walcowanej lub lanej przez 1,084.

D = Średnica zewnętrzna mm	t = grubość ścianki mm	F = Przekrój cm ²	W = Moment wytrzymałości cm ³	J = Moment bezwładności cm ⁴	g = Waga rury lanożelaznej kg/m. b.	D = Średnica wewnętrzna mm	t = grubość ścianki mm	F = Przekrój cm ²	W = Moment wytrzymałości cm ³	J = Moment bezwładności cm ⁴	g = Waga rury lanożelaznej kg/m. b.
100	10	28,27	57,96	289,81	20,50	170	25	113,88	362,6	3082	82,57
	12	33,18	65,42	327,1	24,05		28	124,91	384,8	3271	90,56
	15	40,06	74,59	373,0	29,04		30	131,95	397,8	3381	95,66
	18	46,37	81,70	408,5	33,62		15	77,75	296,4	2668	56,38
	20	50,27	85,45	427,3	36,44			18	91,61	338,0	3042
110	12	36,95	81,85	450,2	26,79	180	20	100,53	363,0	3267	72,88
	15	44,77	94,11	517,6	32,46		22	109,20	386,1	3475	79,17
	18	52,02	103,90	571,5	37,72		25	121,74	416,8	3751	88,26
	20	56,55	109,2	602,8	40,99		28	133,71	443,6	3992	96,94
		12	40,71	102,2	601,0		29,52	30	141,37	459,5	4135
15	49,48		116,0	695,8	35,88	35	159,44	492,7	4434	115,59	
	18	57,68	128,9	773,5	41,82	15	82,47	334,8	3180	59,79	
		20	62,83	136,1	816,8		45,56	18	97,26	382,8	3636
130	12	44,48	120,3	782,3	32,25		20	106,81	411,8	3912	77,44
	15	54,19	140,2	911,1	39,29		22	116,11	438,7	4168	84,18
	18	63,33	156,8	1019	45,92		25	129,59	474,9	4511	93,95
	20	69,11	166,1	1080	50,11	28	142,50	506,8	4814	103,31	
	22	74,64	174,4	1134	54,12	30	150,80	525,8	4995	109,33	
25	82,47	184,8	1201	59,79	35	170,43	566,2	5379	123,56		
140	12	48,26	142,4	997	34,98	200	15	87,18	375,4	3754	63,20
	15	58,90	166,7	1167	42,70		18	102,92	430,3	4303	74,62
	18	68,99	187,4	1311	50,02		20	113,10	463,7	4637	82,00
	20	75,40	199,3	1395	54,66		25	137,44	536,9	5369	99,65
	22	81,56	209,9	1469	59,13		28	151,30	574,3	5743	109,69
	25	90,32	223,4	1564	65,49		30	160,22	596,8	5968	116,16
150	15	63,62	195,6	1467	46,12	250	15	181,43	645,2	6452	131,53
	18	74,65	220,8	1656	54,12		20	128,81	607,2	6831	93,38
	20	81,68	235,5	1766	59,22		25	157,08	709,0	7977	113,88
	22	88,47	248,8	1866	64,14		30	183,78	794,9	8942	133,24
	25	98,18	265,9	1994	71,17		35	208,92	866,4	9747	151,46
	28	107,32	280,2	2102	77,80		22	157,58	827,0	10334	114,25
160	15	68,33	226,9	1815	49,54	250	25	176,72	905,7	11320	128,12
	18	80,30	257,1	2056	58,22		30	207,35	1022	12778	150,33
	20	87,97	274,9	2199	63,77		35	236,41	1122	14022	171,39
	22	95,38	291,1	2329	69,15		25	196,35	1127	15493	142,35
	25	106,03	312,3	2498	76,87	275	30	230,91	1279	17585	167,41
	28	116,11	330,3	2643	84,18		35	263,89	1411	19397	191,32
30	122,52	340,8	2726	88,83	300	28	239,26	1491	22359	173,47	
170	15	73,04	262,5	2214		52,96	30	254,47	1565	23472	184,49
	18	85,95	296,1	2517		62,32	35	291,38	1735	26021	211,25
	20	94,25	317,4	2698	68,33	350	30	301,59	2225	38938	218,56
22	102,29	336,8	2863	74,16	35		346,36	2485	43484	251,11	

3. Przekrój kwadratowy.

$J = \frac{h^4}{12} =$ moment bezwładności względem dowolnej osi ciężkości.

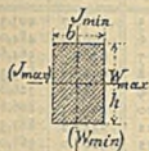
$W = \frac{h^3}{6} =$ moment wytrzymałości względem osi ciężkości równoległej, do jednego z boków.

$W_1 = \frac{\sqrt{2}}{12} h^3 = 0,117851130 h^3 =$ moment wytrzymałości względem przekątnej.



h	J	W	W_1	h	J	W	W_1
1	0,0833	0,1667	0,1179	31	76960	4965,2	3510,9
2	1,3333	1,3333	0,9428	32	87381	5461,3	3861,7
3	6,7500	4,5000	3,1820	33	98827	5989,5	4235,2
4	21,333	10,667	7,5425	34	111361	6550,7	4632,0
5	52,083	20,833	14,731	35	125052	7145,8	5052,8
6	108,00	36,000	25,456	36	139968	7776,0	5498,4
7	200,08	57,167	40,423	37	156180	8442,2	5969,5
8	341,33	85,333	60,340	38	173761	9145,3	6466,7
9	546,75	121,50	85,913	39	192787	9886,5	6990,7
10	833,33	166,67	117,85	40	213333	10667	7542,5
11	1220,1	221,83	156,86	41	235486	11487	8122,3
12	1728,0	288,00	203,64	42	259308	12348	8731,3
13	2380,1	366,17	258,92	43	284900	13251	9369,9
14	3201,3	457,33	323,38	44	312341	14197	10039
15	4218,8	562,50	397,74	45	341719	15188	10739
16	5461,3	682,67	482,71	46	373121	16223	11471
17	6960,1	818,83	579,00	47	406640	17304	12236
18	8748,0	972,00	687,30	48	442368	18432	13033
19	10860	1143,2	808,33	49	480400	19608	13865
20	13333	1333,3	942,81	50	520833	20833	14731
21	16207	1543,5	1091,4	51	563767	22109	15633
22	19521	1774,7	1254,9	52	609301	23435	16571
23	23320	2027,8	1433,9	53	657540	24813	17545
24	27648	2304,0	1629,2	54	708588	26244	18557
25	32552	2604,2	1841,4	55	762552	27729	19607
26	38081	2929,3	2071,3	56	819541	29269	20696
27	44287	3280,5	2319,6	57	879667	30866	21825
28	51221	3658,7	2587,0	58	943041	32519	22994
29	58940	4064,8	2874,2	59	1009780	34230	24204
30	67500	4500,0	3182,0	60	1080000	36000	25456

4. Przekrój prostokątny.



$$J_{min} = \frac{b^3 h}{12}$$

$$W_{max} = \frac{b h^2}{6}$$

Uwaga. $J_{max} = \frac{b h^3}{12}$ otrzymamy, mnożąc wartość W_{max} z tablicy przez $\frac{h}{2}$.

$W_{min} = \frac{b^2 h}{6}$ otrzymamy, dzieląc wartość J_{min} z tablicy przez $\frac{h}{2}$.

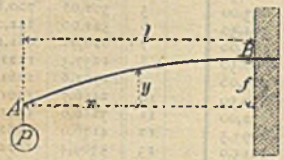
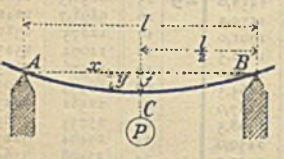
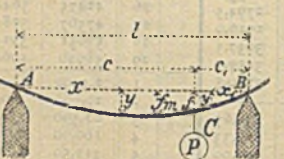
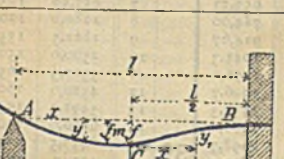
Przekrój		J_{min}	W_{max}	Przekrój		J_{min}	W_{max}	Przekrój		J_{min}	W_{max}			
h	b			h	b			h	b					
1	1	0,0833	0,1667	4	4	48,000	54,000	3	3	29,250	84,500			
2	1	0,1667	0,6667	9	5	93,750	67,500	4	4	69,333	112,67			
	2	1,3333	2,3333		6	6	162,00	81,000	5	5	135,42	140,83		
3	1	0,2500	1,5000		7	7	257,25	94,500	6	6	234,00	169,00		
	2	2,0000	3,0000		8	8	384,00	108,00	7	7	371,58	197,17		
	3	6,7500	4,5000		9	9	546,75	121,50	8	8	554,67	225,33		
4	1	0,3333	2,6667	10	1	0,8333	16,667	13	9	789,75	253,50			
	2	2,6667	5,3333		2	2	6,6667		33,333	10	10	1083,3	281,67	
	3	9,0000	8,0000		3	3	22,500		50,000	11	11	1441,9	309,83	
	4	21,333	10,667		4	4	53,333		66,667	12	12	1872,0	338,00	
5	1	0,4167	4,1667		5	5	104,17		83,333	14	13	2380,1	366,17	
	2	3,3333	8,3333		6	6	180,00		100,00		1	1	1,1667	32,667
	3	11,250	12,500		7	7	285,83		116,67		2	2	9,3333	65,333
	4	26,667	16,667		8	8	426,67		133,33		3	3	31,500	98,000
	5	52,083	20,833		9	9	607,50		150,00		4	4	74,667	130,67
6	1	0,5000	6,0000		11	10	833,33		166,67		5	5	145,83	163,33
	2	4,0000	12,000	1		1	0,9167		20,167		6	6	252,00	196,00
	3	13,500	18,000	2		2	7,3333		40,333		7	7	400,17	228,67
	4	32,000	24,000	3		3	24,750		60,500		8	8	597,33	261,33
	5	62,500	30,000	4		4	58,667	80,667	9		9	850,50	294,00	
	6	108,00	36,000	5		5	114,58	100,83	10		10	1166,7	326,67	
7	1	0,5833	8,1667	6		6	198,00	121,00	11		11	1552,8	359,33	
	2	4,6667	16,333	7		7	314,42	141,17	12		12	2016,0	392,00	
	3	15,750	24,500	8		8	469,33	161,33	13		13	2563,2	424,67	
	4	37,333	32,667	9		9	668,25	181,50	14	14	3201,3	457,33		
	5	72,917	40,833	10		10	916,67	201,67	1	1	1,2500	37,500		
	6	126,00	49,000	11	11	1220,1	221,83	2	2	10,000	75,000			
	7	200,08	57,167	1	1	1,0000	24,000	3	3	33,750	112,50			
8	1	0,6667	10,667	2	2	8,0000	48,000	4	4	80,000	150,00			
	2	5,3333	21,333	3	3	27,000	72,000	5	5	156,25	187,50			
	3	18,000	32,000	4	4	64,000	96,000	6	6	270,00	225,00			
	4	42,667	42,667	5	5	125,00	120,00	7	7	428,75	262,50			
	5	83,333	53,333	6	6	216,00	144,00	8	8	640,00	300,00			
	6	144,00	64,000	7	7	343,00	168,00	9	9	911,25	337,50			
	7	228,67	74,667	8	8	512,00	192,00	10	10	1250,0	375,00			
	8	341,33	85,333	9	9	729,00	216,00	11	11	1663,8	412,50			
9	1	0,7500	13,500	10	10	1000,0	240,00	12	12	2160,0	450,00			
	2	6,0000	27,000	11	11	1331,0	264,00	13	13	2746,3	487,50			
	3	20,250	40,500	12	12	1728,0	288,00	14	14	3430,0	525,00			
					1	1,0833	28,167	15	15	4218,8	562,50			
13	2	8,6667	56,333		13	1	1,0833	28,167	16	1	1,3333	42,667		

Przekrój		J_{min}	W_{max}	Przekrój		J_{min}	W_{max}	Przekrój		J_{min}	W_{max}	
h	b			h	b			h	b			
16	1	10,667	85,333	19	8	810,67	481,33	22	5	229,17	403,33	
	2	36,000	128,00		9	1154,3	541,50		6	396,00	484,00	
	3	85,333	170,67		10	1583,3	601,67		7	628,83	564,67	
	4	166,67	213,33		11	2107,4	661,83		8	938,67	645,33	
	5	288,00	256,00		12	2736,0	722,00		9	1336,5	726,00	
	6	457,33	298,67		13	3478,6	782,17		10	1833,3	806,67	
	7	682,67	341,33		14	4344,7	842,33		11	2440,2	887,33	
	8	972,00	384,00		15	5343,8	902,50		12	3168,0	968,00	
	9	1333,3	426,67		16	6485,3	962,67		13	4027,8	1048,7	
	10	1774,7	469,33		17	7778,9	1022,8		14	5030,7	1129,3	
	11	2304,0	512,00		18	9234,0	1083,0		15	6187,5	1210,0	
	12	2929,3	554,67		19	10860	1143,2		16	7509,3	1290,7	
	13	3658,7	597,33		20	1	1,6667		66,667	17	9007,2	1371,3
	14	4500,0	640,00			2	13,333		133,33	18	10692	1452,0
	15	5461,3	682,67			3	45,000		200,00	19	12575	1532,7
	17	1	1,4167			48,167	4		106,67	266,67	20	14667
2		11,333	96,333	5		208,33	333,33	21	16979	1694,0		
3		38,250	144,50	6		360,00	400,00	22	19521	1774,7		
4		90,667	192,67	7		571,67	466,67	23	1	1,9167	88,167	
5		177,08	240,83	8		853,33	533,33		2	15,333	176,33	
6		306,00	289,00	9		1215,0	600,00		3	51,750	264,50	
7		485,92	337,17	10		1666,7	666,67		4	122,67	352,67	
8		725,33	385,33	11		2218,5	733,33		5	239,58	440,83	
9		1032,8	433,50	12		2880,0	800,00		6	414,00	529,00	
10		1416,7	481,67	13		3661,7	866,67		7	657,42	617,17	
11		1885,6	529,83	14		4573,3	933,33		8	981,33	705,33	
12		2448,0	578,00	15		5625,0	1000,0		9	1397,3	793,50	
13		3112,4	626,17	16		6826,7	1066,7		10	1916,7	881,67	
14		3887,3	674,33	17	8188,3	1133,3	11		2551,1	969,83		
15		4781,3	722,50	18	9720,0	1200,0	12		3312,0	1058,0		
16		5802,7	770,67	19	11432	1266,7	13		4210,9	1146,2		
17	6960,1	818,83	20	13333	1333,3	14	5259,3		1234,3			
18	1	1,5000	54,000	21	1	1,7500	73,500		15	6468,8	1322,5	
	2	12,000	108,00		2	14,000	147,00		16	7850,7	1410,7	
	3	40,500	162,00		3	47,250	220,50	17	9416,6	1498,8		
	4	96,000	216,00		4	112,00	294,00	18	11178	1587,0		
	5	187,50	270,00		5	218,75	367,50	19	13146	1675,2		
	6	324,00	324,00		6	378,00	441,00	20	15333	1763,3		
	7	514,50	378,00		7	600,25	514,50	21	17750	1851,5		
	8	768,00	432,00		8	896,00	588,00	22	20409	1939,7		
	9	1093,5	486,00		9	1275,8	661,50	23	23320	2027,8		
	10	1500,0	540,00		10	1750,0	735,00	24	1	2,0000	96,000	
	11	1996,5	594,00		11	2329,3	808,50		2	16,000	192,00	
	12	2592,0	648,00		12	3024,0	882,00		3	54,000	288,00	
	13	3295,5	702,00		13	3844,8	955,50		4	128,00	384,00	
	14	4116,0	756,00		14	4802,0	1029,0		5	250,00	480,00	
	15	5062,5	810,00		15	5906,3	1102,5		6	432,00	576,00	
	16	6144,0	864,00		16	7168,0	1176,0		7	686,00	672,00	
17	7369,5	918,00	17	8597,8	1249,5	8	1024,0		768,00			
18	8748,0	972,00	18	10206	1323,0	9	1458,0		864,00			
19	1	1,5833	60,167	22	1	1,8333	80,667		10	2000,0	960,00	
	2	12,667	120,33		2	14,667	161,33		11	2662,0	1056,0	
	3	42,750	180,50		3	49,500	242,00		12	3456,0	1152,0	
	4	101,33	240,67		4	117,33	322,67		13	4394,0	1248,0	
	5	197,92	300,83		23	1	1,7500		73,500	14	5488,0	1344,0
	6	342,00	361,00			2	14,000		147,00	15	6750,0	1440,0
	20	1	1,5000			54,000	3		47,250	220,50	16	8192,0
2		12,000	108,00	4		112,00	294,00	24	1	2,0000	96,000	
3		40,500	162,00	5	218,75	367,50	2		16,000	192,00		
4		96,000	216,00	6	378,00	441,00	3		54,000	288,00		
5	187,50	270,00	7	600,25	514,50	4	128,00		384,00			
6	324,00	324,00	8	896,00	588,00	5	250,00	480,00				
7	514,50	378,00	9	1275,8	661,50	6	432,00	576,00				
8	768,00	432,00	10	1750,0	735,00	7	686,00	672,00				
9	1093,5	486,00	11	2329,3	808,50	8	1024,0	768,00				
10	1500,0	540,00	12	3024,0	882,00	9	1458,0	864,00				
11	1996,5	594,00	13	3844,8	955,50	10	2000,0	960,00				
12	2592,0	648,00	14	4802,0	1029,0	11	2662,0	1056,0				
13	3295,5	702,00	15	5906,3	1102,5	12	3456,0	1152,0				
14	4116,0	756,00	16	7168,0	1176,0	13	4394,0	1248,0				
15	5062,5	810,00	17	8597,8	1249,5	14	5488,0	1344,0				
16	6144,0	864,00	18	10206	1323,0	15	6750,0	1440,0				
17	7369,5	918,00	19	12003	1396,5	16	8192,0	1536,0				
18	8748,0	972,00	20	14000	1470,0							
			21	16207	1543,5							

Przekrój		J _{min}	W _{max}	Przekrój		J _{min}	W _{max}	Przekrój		J _{min}	W _{max}	
h	b			h	b			h	b			
24	17	9826,0	1632,0	26	25	33854	2816,7	29	1	2,4167	140,17	
	18	11664	1728,0		26	26	38081		2929,3	2	19,333	280,33
	19	13718	1824,0		27	1	2,2500		121,50	3	65,250	420,50
	20	16000	1920,0			2	18,000		243,00	4	154,67	560,67
	21	18522	2016,0			3	60,750		364,50	5	302,08	700,83
	22	21296	2112,0			4	144,00		486,00	6	522,00	841,00
	23	24334	2208,0	5	281,25	607,50	7		828,92	981,17		
24	27648	2304,0	6	486,00	729,00	8	1237,3		1121,3			
25	1	2,0833	104,17	27	7	771,75	850,50		9	1761,8	1261,5	
	2	16,667	208,33		8	1152,0	972,00		10	2416,7	1401,7	
	3	56,250	312,50		9	1640,3	1093,5		11	3216,6	1541,8	
	4	133,33	416,67		10	2250,0	1215,0		12	4176,0	1682,0	
	5	260,42	520,83		11	2994,8	1336,5		13	5309,4	1822,2	
	6	450,00	625,00		12	3888,0	1458,0		14	6631,3	1962,3	
	7	714,58	729,17		13	4943,3	1579,5		15	8156,3	2102,5	
	8	1066,7	833,33		14	6174,0	1701,0		16	9898,7	2242,7	
	9	1518,8	937,50		15	7593,8	1822,5		17	11873	2382,8	
	10	2083,3	1041,7		16	9216,0	1944,0		18	14094	2523,0	
	11	2772,9	1145,8		17	11054	2065,5		19	16576	2663,2	
	12	3600,0	1250,0		18	13122	2187,0		20	19333	2803,3	
	13	4577,1	1354,2		19	15433	2308,5		21	22383	2943,5	
	14	5716,7	1458,3		20	18000	2430,0		22	25733	3083,7	
	15	7031,3	1562,5		21	20837	2551,5		23	29404	3223,8	
16	8533,3	1666,7	22	23958	2673,0	24	33408		3364,0			
17	10235	1770,8	23	27376	2794,5	25	37760		3504,2			
18	12150	1875,0	24	31104	2916,0	26	42475		3644,3			
19	14290	1979,2	25	35156	3037,5	27	47567		3784,5			
20	16667	2083,3	26	39546	3159,0	28	53051		3924,7			
21	19294	2187,5	27	44287	3280,5	29	58948		4064,8			
22	22183	2291,7	28	1	2,3333	130,67	30		1	2,5000	150,00	
23	25348	2395,8		2	18,667	261,33		2	20,000	300,00		
24	28800	2500,0		3	63,000	392,00		3	67,500	450,00		
25	32552	2604,2		4	149,33	522,67		4	160,000	600,00		
26	1	2,1667		112,67	5	291,67		653,33	5	312,50	750,00	
	2	17,333		225,33	6	504,00		784,00	6	540,00	900,00	
	3	58,500		338,00	7	800,33		914,67	7	857,50	1050,0	
	4	138,67		450,67	8	1194,7		1045,3	8	1280,0	1200,0	
	5	270,83		563,33	9	1701,0		1176,0	9	1822,5	1350,0	
	6	468,00		676,00	10	2333,3		1306,7	10	2500,0	1500,0	
	7	743,17		788,67	11	3105,7		1437,3	11	3327,5	1650,0	
	8	1109,3		901,33	12	4032,0		1568,0	12	4320,0	1800,0	
	9	1579,5		1014,0	13	5126,3		1698,7	13	5492,5	1950,0	
	10	2166,7		1126,7	14	6402,7		1829,3	14	6860,0	2100,0	
	11	2883,8		1239,3	15	7875,0		1960,0	15	8437,5	2250,0	
	12	3744,0	1352,0	16	9557,3	2090,7		16	10240	2400,0		
	13	4760,2	1464,7	17	11464	2221,3		17	12283	2550,0		
	14	5945,3	1577,3	18	13608	2352,0		18	14580	2700,0		
	15	7312,5	1690,0	19	16004	2482,7		19	17148	2850,0		
16	8874,7	1802,7	20	18667	2613,3	20		20000	3000,0			
17	10645	1915,3	21	21609	2744,0	21		23153	3150,0			
18	12626	2028,0	22	24845	2874,7	22		26620	3300,0			
19	14861	2140,7	23	28390	3005,3	23		30418	3450,0			
20	17333	2253,3	24	32256	3136,0	24		34560	3600,0			
21	20066	2366,0	25	36458	3266,7	25		39063	3750,0			
22	23071	2478,7	26	41011	3397,3	26		43940	3900,0			
23	26362	2591,3	27	45927	3528,0	27		49208	4050,0			
24	29952	2704,0	28	51221	3658,7	28		54880	4200,0			
						29		60973	4350,0			
						30		67500	4500,0			

c. Belka o stałym

W tablicach poniższych zastosowano następujące jednostki miar: dla rozpiętości l , zewnętrznych A, B, P, Q i t. d. — kg ; gięcie bezpiecznie k_b (p. str. 330, 336 i nast.) oraz tyżwładności J przekrojów względem poziomej osi przegięcia w cm^4 ; a zresztą

Nr.	Sposób obciążenia	Odpory podpór A, B . Momenty gnące M	Nośność P . Potrzebny moment wytrzymałości W
1.		$B = P$. $M = Px$. $M_{max} = Pl$.	$P = \frac{k_b W}{l}$. $W = \frac{Pl}{k_b}$.
2.		$A = B = \frac{P}{2}$. $M = \frac{Px}{2}$. $M_{max} = \frac{Pl}{4}$.	$P = 4 \frac{k_b W}{l}$. $W = \frac{Pl}{4k_b}$.
3.		$A = \frac{Pc_1}{l}$; $B = \frac{Pc_2}{l}$. Dla AC: $M = \frac{Pc_1 x}{l}$; dla BC: $M = \frac{Pc_2 x_1}{l}$. $M_{max} = \frac{Pc_1 c_2}{l}$.	$P = k_b W \frac{l}{c_1}$. $W = \frac{Pc_1 c_2}{lk_b}$.
4.	 Porównaj sposób Nr. 23, str. 382.	$A = \frac{5}{16} P$; $B = \frac{11}{16} P$. Dla AC: $M = \frac{5}{16} Px$; dla C: $M = \frac{5}{32} Pl$; dla BC: $M = Pl \left(\frac{5}{32} - \frac{11x_1}{16l} \right)$. $M_{max} = \frac{3Pl}{16}$.	$P = \frac{16 k_b W}{3 l}$. $W = \frac{3 Pl}{16 k_b}$.

Uwagi ogólne do str. 372 do 382.

Wzory na odpory podpór i momenty gnące stosują się również i do belek o przekroju zmiennym.

Zo względu większej pewności i bezpieczeństwa, końce belek wmurowanych wypada uważać nie za osadzone, lecz jako swobodne; do końców tak obmurowanych nie wypada zatem stosować sposobów obciążenia Nr. 4 (str. 372 — 373) 5, 9 (str. 374 — 375) i 10 (str. 376 — 377).

przekroju.

wysokości belek h , dla rzędnych x i y i w ogóle dla wszelkich długości — cm ; dla sil współczynnik sprężystości E (p. str. 328, 331 i nast.) oznaczono w kg/cm^2 , momenty przynależne momenty wytrzymałości W w cm^3 . Ogólnie jest: $k_b W = M_{max}$.

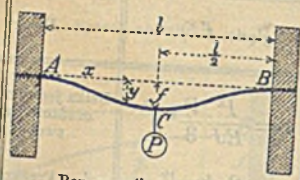

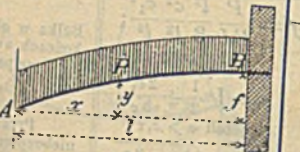

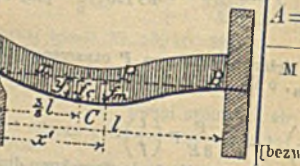
Równanie odkształconej	Ugięcie f^*	Uwagi
$y = \frac{Pl^3}{2 EJ} \left(\frac{x}{l} - \frac{1}{3} \frac{x^3}{l^3} \right)$	$f = \frac{P l^3}{EJ 3}$ $= \frac{2 k_b l^2}{3 E h}$	Belka jednym końcem osadzona, zresztą swobodna. Przekrój niebezpieczny w B.
$y = \frac{Pl^3}{16 EJ} \left(\frac{x}{l} - \frac{4}{3} \frac{x^3}{l^3} \right)$	$f = \frac{P l^3}{EJ 48}$ $= \frac{1 k_b l^2}{6 E h}$ (p. str. 383).	Belka w obojdwóch końcach swobodnie podparta. Przekrój niebezpieczny w środku.
$y = \frac{P c^2 c_1^2}{EJ 6l} \left(2 \frac{x}{c} + \frac{x}{c_1} - \frac{x^3}{c^2 c_1} \right)$ $y_1 = \frac{P c_1^2 c^2}{EJ 6l} \left(2 \frac{x_1}{c_1} + \frac{x_1}{c} - \frac{x_1^3}{c_1^2 c} \right)$	$f = \frac{P l^3 c^2 c_1^2}{EJ 3 l^2 l^2}$; f_{max} przy: $x = c \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2c_1}{3c}}$, jeżeli $c > c_1$; $x_1 = c_1 \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2c}{3c_1}}$, jeżeli $c < c_1$.	Belka w obojdwóch końcach swobodnie podparta. Przekrój niebezpieczny w C.
$y = \frac{P l^3}{EJ 92} \left(\frac{x}{l} - \frac{5}{3} \frac{x^3}{l^3} \right)$ $y_1 = \frac{P l^3}{EJ 92} \left(\frac{1}{4} \frac{x_1}{l} + \frac{5}{2} \frac{x_1^2}{l^2} - \frac{11}{3} \frac{x_1^3}{l^3} \right)$	$f = \frac{P 7 l^3}{EJ 768}$; dla $x = l \sqrt{1/5}$ będzie $f_{max} = \sqrt{1/5} \frac{Pl^3}{48 EJ}$.	Belka jednym końcem osadzona, w drugim swobodnie podparta. Przekrój niebezpieczny w B. Punkt zwrotny przy $x_1 = 1/2 l$.

* Ugięcie w punkcie przytknięcia ciężaru oddzielnego P oznaczono przez f , największe zaś ugięcie przez f_{max} albo f_m , o ile ugięcie f samo nie jest już największem.

** Z powyższego wynika:

$$P = 3E \frac{J}{F} \left(\frac{f}{l} \right) \text{ i } J = \frac{P}{3E} l^3 \left(\frac{l}{f} \right).$$

Wzór powyższy stosują, przy sposobie obciążenia Nr. 1, do stosunkowo długich, a mało obciążonych belek, z warunkiem aby ugięcie względne nie przekraczało pewnych granic, np. $l : f = 600$ do 1000 . Dla innych sposobów obciążenia możemy otrzymać wzory podobne. Dalsze dane dotyczące sposobów obciążenia Nr. 2 i 6 p. str. 383, Nr. 25.

Nr.	Sposób obciążenia	Odpory podpór A, B , Moment gnący M	Nośność P . Po- trzebny moment wytrzymałości W
5.	 Por. sposób 24 str. 383.	$A = B = \frac{P}{2}$ dla AC: $M = \frac{Pl}{2} \left(\frac{x}{l} - \frac{1}{4} \right)$ dla CB: $M = \frac{Pl}{2} \left(\frac{x}{l} - \frac{3}{4} \right)$ $M_{\max} = \frac{Pl}{8}$	$P = 8 \frac{k_b W}{l}$ $W = \frac{Pl}{8 k_b}$
6.		$A = B = P$ dla AB: $M = Pc = \text{stałej}$	$P = \frac{k_b W}{c}$ $W = \frac{Pc}{k_b}$
7.		$B = P$ $M = \frac{Px^2}{2l}$ $M_{\max} = \frac{Pl}{2}$	$P = 2 \frac{k_b W}{l}$ $W = \frac{Pl}{2 k_b}$
8.		$A = B = \frac{P}{2}$ $M = \frac{Px}{2} \left(1 - \frac{x}{l} \right)$ $M_{\max} = \frac{Pl}{8}$	$P = 8 \frac{k_b W}{l}$ $W = \frac{Pl}{8 k_b}$
9.		$A = \frac{3}{8} P, B = \frac{5}{8} P$ $M = \frac{Px}{2} \left(\frac{3}{4} - \frac{x}{l} \right)$ $M_{\max} = \frac{Pl}{8}$ [bezwzględnie największy]. $M_C = \frac{9}{128} Pl$ [względnie największy].	$P = 8 \frac{k_b W}{l}$ $W = \frac{Pl}{8 k_b}$

Równanie odkształconej	Ugięcie f	Uwagi
$y = \frac{P l^3}{EJ 16} \left(\frac{x^2}{l^2} - \frac{4}{3} \frac{x^3}{l^3} \right)$	$f = \frac{P l^3}{EJ 192}$ $= \frac{1 k_b l^2}{12 E h}$	Belka obydwu końcami osadzona. Przekroje niebezpieczne A, B i C. Punkty zwrotne przy $x = \frac{1}{4} l$ i $x = \frac{3}{4} l$.
$y = f_1 - [q - \sqrt{q^2 - (1/2 l - x)^2}]$, przyczem: $q = \frac{EJ}{Pc} = \text{stałej}$. —Odkształcona pomiędzy A i B jest łukiem koła o promieniu ρ .	f_1 w pośrodku rozpiętości $f_1 = \frac{P l^3 c}{EJ 8 l}$ $= \frac{1 k_b l^2}{4 E h} = \frac{l^2}{8 q}$ $f_2 = \frac{P}{EJ} \left(\frac{c^3}{3} + \frac{c^2 l}{2} \right)$	Belka przewieszająca się obydwu końcami. Przekrój niebezpieczny w dowolnym miejscu pomiędzy A i B.
$y = \frac{P l^3}{EJ 6} \left(\frac{x}{l} - \frac{1}{4} \frac{x^4}{l^4} \right)$	$f = \frac{P l^3}{EJ 8}$ $= \frac{1 k_b l^2}{2 E h}$	Belka jednym końcem osadzona. Przekrój niebezpieczny w B.
$y = \frac{P l^3}{EJ 24} \left(\frac{x}{l} - 2 \frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4} \right)$	$f = \frac{P 5 l^3}{EJ 384}$ $= \frac{5 k_b l^2}{24 E h}$ (Por. str. 363).	Belka w obydwóch końcach swobodnie podparta. Przekrój niebezpieczny w pośrodku.
$y = \frac{P l^3}{EJ 48} \left(\frac{x}{l} - 3 \frac{x^3}{l^3} + 2 \frac{x^4}{l^4} \right)$	$f_{\max} = \frac{P l^3}{EJ 185}$ $\frac{1}{185} = \frac{78 + 110 \sqrt{33}}{2 \cdot 16^4}$ $f_C = \frac{175}{8^4} \frac{P}{EJ} l^3$ $= \frac{P}{EJ 187}$	Belka jednym końcem osadzona, a w drugim swobodnie podparta. Przekrój niebezpieczny w B. Ugięcie f_{\max} dla $x' = \frac{1}{16} l$ (1 + $\sqrt{33}$) $= 0,4215 l$. Punkt zwrotny dla $x = \frac{3}{4} l$.

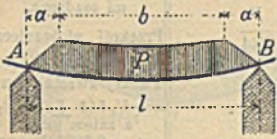
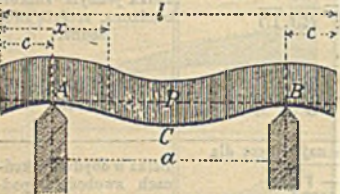

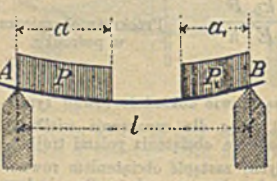
Nr.	Sposób obciążenia	Odpory podpór A, B . Moment gnący M	Nośność P . Potrzebny moment wytrzymałości W
10.		$A = B = \frac{P}{2}$ $M = \frac{Pl}{6} \left(\frac{x}{l} + \frac{x^3}{l^3} \right)$ $M_{\max} = \frac{1}{12} Pl$ (bezwzględnie największy). $M_C = \frac{1}{24} Pl$ (względnie największy).	$P = 12 \frac{k_b W}{l}$ $W = \frac{Pl}{12 k_b}$
11.		$B = P$ $M = \frac{P x^3}{3 l}$ $M_{\max} = \frac{Pl}{3}$	$P = 3 \frac{k_b W}{l}$ $W = \frac{Pl}{3 k_b}$
12.		$A = \frac{1}{3} P; B = \frac{2}{3} P$ $M = \frac{P}{3} x \left(1 - \frac{x^2}{l^2} \right)$ $M_{\max} = \frac{2}{9\sqrt{3}} Pl$ $= 0,128 Pl$	$P = \frac{9\sqrt{3} k_b W}{2 l}$ $= 7,794 \frac{k_b W}{l}$ $W = \frac{Pl}{7,794 k_b}$
13.		$A = B = \frac{P}{2}$ $M = Px \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{l} + \frac{2x^3}{3l^3} \right)$ $M_{\max} = \frac{Pl}{12}$	$P = 12 \frac{k_b W}{l}$ $W = \frac{Pl}{12 k_b}$
14.		$A = B = \frac{P}{2}$ $M = Px \left(\frac{1}{2} - \frac{2x^2}{3l} \right)$ $M_{\max} = \frac{Pl}{6}$	$P = 6 \frac{k_b W}{l}$ $W = \frac{Pl}{6 k_b}$ *)

*) Jeżeli w Nr. 14 pole obciążające nie jest trójkątne, lecz paraboliczne, z wierzchołkiem w pośrodku belki, to będzie:

$$P = 6,4 \frac{k_b W}{l}, \text{ a } W = \frac{5 Pl}{32 k_b}$$

Równanie odkształconej	Ugięcie f	Uwagi
$y = \frac{P l^3}{EJ 24} \left(\frac{x^2}{l^2} - 2 \frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4} \right)$	$f = \frac{P l^3}{EJ 384}$ $= \frac{1 k_b l^2}{16 E h}$	Belka obydwu końcami osadzona. Przekrój niebezpieczny w A i B . Punkty zwrotne przy $x = \frac{1}{2} l (1 \pm \sqrt{1/3})$, a zatem przy: $x_1 = 0,1887 l$, oraz $x_2 = 0,2113 l$.
$y = \frac{P l^3}{EJ 12} \left(\frac{x}{l} - \frac{1}{5} \frac{x^5}{l^5} \right)$	$f = \frac{P l^3}{EJ 15}$ $= \frac{2 k_b l^2}{5 E h}$	Belka jednym końcem osadzona, zresztą swobodna. Przekrój niebezpieczny w B .
$y = \frac{P l^3}{EJ 180} \left(7 \frac{x}{l} - 10 \frac{x^3}{l^3} + 3 \frac{x^5}{l^5} \right)$	Ugięcie największe dla $x = l \sqrt{1 - \sqrt{9/15}} = 0,5193 l$; $f = \frac{Pl^3}{EJ} \frac{2 + 5 \sqrt{8/15}}{225}$ $= \frac{Pl^3}{EJ} \frac{\sqrt{1 - \sqrt{8/15}}}{225}$ $= 0,01304 \frac{Pl^3}{EJ}$ *)	Belka w obydwóch końcach swobodnie podparta. Przekrój niebezpieczny przy $x = \frac{l}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} l \sqrt{3} = 0,5774 l$.
$y = \frac{P l^3}{EJ 12} \left(\frac{3}{8} \frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4} - \frac{2}{5} \frac{x^5}{l^5} \right)$	$f = \frac{P l^3}{EJ 320}$ $= \frac{9 k_b l^2}{40 E h}$	Belka w obydwóch końcach swobodnie podparta. Przekrój niebezpieczny w pośrodku.
$y = \frac{P l^3}{EJ 12} \left(\frac{5}{8} \frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3} + \frac{2}{5} \frac{x^5}{l^5} \right)$	$f = \frac{P l^3}{EJ 60}$ $= \frac{1 k_b l^2}{5 E h}$	Belka w obydwóch końcach swobodnie podparta. Przekrój niebezpieczny w pośrodku.

*) Ponieważ wartości M_{\max} i f w sposobie 12 są prawie dokładnie równe tymże wartościom przy sposobie obciążenia 8 (str. 374, 375), więc dla oznaczenia wielkości M_{\max} i f możemy zazwyczaj bez dotkliwego błędu podobne obciążenia polami trójkątnymi lub trapezowymi (o pionowych bokach równoległych) zastąpić obciążeniem równomiernie rozłożonym. Natomiast różnica w wielkościach odporów podpór dla obydwu sposobów obciążenia [12 i 8] dochodzi do $\frac{1}{6}$ całego obciążenia, odpory te wypadają zatem obliczać podług istotnego obciążenia.

Nr.	Sposób obciążenia	Odpory podpór A, B	Największy moment gnący $M_{\max} = Wk_b$
15.		$A = B = \frac{P}{2}$	$Wk_b = \frac{8a^2 + 3b(4a + b)P}{24(a + b)}$
16.	 <p>Przekrój niebezpieczny w A, B i C.</p> <p>Punkty zwrotne przy</p> $x = \frac{l}{2} \pm \sqrt{\frac{l^2}{4} - cl}$	$A = B = \frac{P}{2}$	<p>Dla AB:</p> $M_x = \frac{Px}{2} \left(1 - \frac{c}{x} - \frac{x}{l}\right);$ <p>dla $x \geq c$:</p> $M_x = -\frac{Px^2}{2l}$ <p>Bezwzględnie największe wartości $M_A = M_B = \frac{Pc^2}{2l}$ i (dla środka belki) $M_C = \frac{P}{2} \left(\frac{l}{4} - c\right)$ są równe, jeżeli $c = (\sqrt{1/2} - 1/2)l = 0,207l$, a mianowicie $M_A = M_C = M_{\max} = 0,021447Pl \propto 1/41Pl$; z rozmaitych wartości dla c powyższe M_{\max} jest względnie najmniejsze, a w takim razie, t. j. gdy $a = 0,586l$, będzie:</p> $W = \frac{Pl}{47k_b}, \text{ a } P = 47 \frac{k_b W}{l},$ <p>czyli że nośność takiej belki, jest prawie 6 razy większa, niż przy sposobie obciążenia Nr. 8 (str. 374).</p>
17.		$A = \frac{P(2c + b)}{2l};$ $B = \frac{P(2a + b)}{2l}$ <p>Gdy $a = c$, będzie:</p> $A = B = \frac{P}{2}$	$Wk_b = A \left(a + \frac{bA}{2P}\right)$ <p>Gdy $a = c$, będzie:</p> $Wk_b = \frac{P}{2} \left(\frac{l}{2} - \frac{b}{4}\right)$
18.		$A = \frac{P(2l - a) + P_1 a_1}{2l};$ $B = \frac{P_1(2l - a_1) + Pa}{2l}$	<p>Gdy $A < P$:</p> $Wk_b = \frac{A^2 a}{2P};$ <p>gdy $B < P_1$:</p> $Wk_b = \frac{B^2 a_1}{2P_1}$ <p>Jeżeli oznaczymy: $P + P_1 = Q$ i $l - (a + a_1) = b$, to, gdy $P = P_1$ i $a = a_1$, otrzymamy:</p> $A = B = P = 1/2 Q, \text{ oraz}$ $Wk_b = 1/2 Pa = 1/8 Q(l - b).$

Jeżeli belkę obciążamy jednocześnie kilku sposobami powyżej wyliczonych obciążeń, to tak momenty, jako też i rzędne odkształconej, wynikające z oddzielnych obciążeń, sumują się prosto. Przez proste dodawanie poszczególnych wartości otrzymamy zatem $M_{\max} = Wk_b$, oraz dla dowolnego x przynależne ugięcie ogólne y , z którego łatwo już oznaczyć f_{\max} , szukając największości dla y .

Dla belek o stałym przekroju, podpartych swobodnie w obydwu końcach, otrzymamy następujący:

Sposób obliczenia.

1) **Oznaczenie odporów (podpór):** Odpór A otrzymamy, dzieląc przez rozpiętość l belki sumę iloczynów z oddzielnych ciężarów i ich odległości od podpory B (dla ciężarów rozłożonych na pewną długość belki bierzemy odległość środka ciężkości tego obciążenia). Odpór B jest po prostu różnicą całego obciążenia i odporu A ; można go jednakże (w celu sprawdzenia się) obliczyć w sposób podobny, jak podano dla odporu A .

2) **Przekrój niebezpieczny** odnajdziemy, dodając kolejno wszystkie obciążenia, począwszy od jednej z podpór i postępując dalej, dopóki suma tych obciążeń nie dorówna odporowi podpory, od której rozpoczęliśmy dodawanie obciążeń. Obciążenia ciągle uważamy przytem jako sumę oddzielnych obciążeń na jednostkę długości belki (na każdy cm).

Jeżeli przekrój niebezpieczny wypadnie właśnie pod ciężarem oddzielnym, to zachodzą trzy możliwe przypadki: a) suma ciężarów równa się dokładnie odporowi — a belka w miejscu tem nieobciążona obciążeniem ciągłym, natenczas przekrój równo niebezpieczny znachodzi się na całej części belki od tego punktu aż do najbliższego, następnego obciążenia; b) suma dokładnie równa się odporowi, lecz belka obciążona w tem miejscu dodatkowo i obciążeniem ciągłym, natenczas jedynie ten przekrój jest niebezpiecznym; c) suma przed wspomnianym ciężarem jest mniejsza, za nim staje się większa niż odpór, natenczas znów jedynie przekrój pod tym ciężarem się znajdujący jest przekrojem niebezpiecznym.

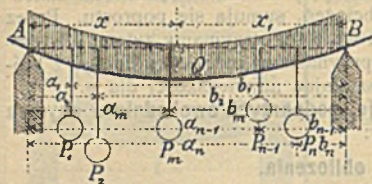
W przypadku w końcu wspomnianym (c), dla poniżej podanego sposobu obliczenia M_{\max} , przyjmować należy do obrachunku tylko tę część ciężaru (znachodzącego się nad przekrojem niebezpiecznym), która sumę obciążeń właśnie dopełni do wartości odporu, resztę zaś uważa się za obciążenie pozostałej części belki.

3) M_{\max} (w cmkg) otrzymamy, mnożąc kolejno wszystkie oddzielne obciążenia (w kg), znajdujące się pomiędzy podporą a przekrojem niebezpiecznym, przez odległości (w cm) punktów ich przytknięcia od tejże podpory (przy obciążeniach ciągłych odległości środków ciężkości, j. w.). Suma tych iloczynów da nam M_{\max} , które dzieląc przez k_b (kg/cm²), otrzymamy moment wytrzymałości W w cm³. Przy ciężarach oddzielnych należy mieć na uwadze zastrzeżenie, zrobione powyżej pod 2 (c) co do podziału ciężaru, znajdującego się właśnie nad przekrojem niebezpiecznym.

W ten sposób otrzymana wartość momentu największego zgadza się najzupełniej z M_{\max} , jakibyśmy otrzymali, stosując sposób ogólny, podany na str. 351.

19. Sposób obciążenia Nr. 3, kilkakrotnie powtórzony, łącznie ze sposobem Nr. 8 (rys. 215).

Rys. 215.



Odpór podpory:

$$A = \Sigma \left(\frac{Pb}{l} \right) + \frac{Q}{2},$$

$$B = \Sigma \left(\frac{Pa}{l} \right) + \frac{Q}{2}.$$

$$\text{Jeżeli } \Sigma_1^{m-1} P + \frac{Q}{l} a_m - 1 < A$$

$$\text{i jednocześnie } \Sigma_1^{m-1} P + \frac{Q}{l} a_m > A,$$

to przekrój niebezpieczny leży pomiędzy P_{m-1} a P_m , a odległość jego od podpory A oznacza się z wzoru:

$$x = \left(A - \Sigma_1^{m-1} P \right) : \frac{Q}{l}, \text{ poczem otrzymamy:}$$

$$M_{\max} = Wkb = \Sigma_1^{m-1} Pa + \frac{Q}{2l} x^2.$$

$$\text{Jeżeli } \Sigma_1^{m-1} P + \frac{Q}{l} a_m < A < \Sigma_1^m P + \frac{Q}{l} a_m, \text{ a}$$

$$A - \left[\Sigma_1^{m-1} P + \frac{Q}{l} a_m \right] = P'_m$$

oznacza tę część ciężaru P_m , która dopełnia sumę obciążeń, znajdujących się pomiędzy podporą i przekrojem niebezpiecznym, do wielkości odporu podpory A (p. str 379, 2 c.), to przekrój niebezpieczny znajduje się w P_m (t. j. $x = a_m$), a

$$M_{\max} = Wkb = \Sigma_1^{m-1} Pa + P'_m a_m + \frac{Q}{2l} a_m^2.$$

Jeżeli w rys. 215 $Q = 0$, to przekrój niebezpieczny wypada pod ciężarem P_m , o ile

$$\Sigma_1^{m-1} P < \Sigma \left(\frac{Pb}{l} \right) < \Sigma_1^m P; \text{ a oznaczywszy } \Sigma \left(\frac{Pb}{l} \right) - \Sigma_1^{m-1} P = P'_m,$$

t. j. przez P'_m tę część ciężaru P_m , która dopełnia sumę ciężarów pomiędzy podporą a przekrojem niebezpiecznym do wartości odporu podpory, otrzymamy

$$M_{\max} = Wkb = \Sigma_1^{m-1} Pa + P'_m a_m.$$

Rys. 216.



20. Sposób obciążenia Nr. 3 złączony z Nr. 8 (rys. 216). Niechaj $a < b$, a otrzymamy:

$$A = P \frac{b}{l} + \frac{Q}{2},$$

$$B = P \frac{a}{l} + \frac{Q}{2}.$$

Oznaczywszy przez x_1 odległość przekroju niebezpiecznego od podpory B , otrzymamy, jeżeli:

$$\begin{array}{l} \text{a)} \quad \frac{P}{Q} < \frac{b-a}{2a} \\ \quad \quad \quad x_1 = B : \frac{Q}{l} = \frac{P}{Q} a + \frac{l}{2}, \\ \quad \quad \quad M_{\max} = Wk_b = B \cdot \frac{x_1}{2} = \frac{B^2 l}{2Q}. \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{b)} \quad \frac{P}{Q} > \frac{b-a}{2a} : \\ \quad \quad \quad x_1 = b, \\ \quad \quad \quad M_{\max} = Wk_b = \left(P + \frac{Q}{2} \right) \frac{ab}{l}. \end{array} \right.$$

Ugięcie w punkcie przytknięcia ciężaru P będzie:

$$f = \left(P + \frac{l^2 + ab}{8ab} Q \right) \frac{a^2 b^2}{8EJl}.$$

W przypadku szczególnym, gdy $a = b = \frac{1}{2}l$ (łącznie obciążenie sposobem 2 i 8), będzie:

$$A = B = \frac{1}{2}(P + Q), \quad M_{\max} = Wk_b = \frac{1}{8}(2P + Q)l.$$

$$x_1 = \frac{1}{2}l, \quad \text{a} \quad f_{\max} = \frac{P + \frac{5}{8}Q}{EJ} \frac{l^3}{48}$$

21. Sposób obciążenia Nr. 8 z obciążeniem ciągłym nad częścią rozpiętości (rys. 217).

$$A = \frac{P}{2} + P_1 \left(1 - \frac{a}{2l} \right),$$

$$B = \frac{P}{2} + P_1 \frac{a}{2l} = P + P_1 - A.$$

Jeżeli $\frac{P}{P_1} < \frac{a}{l-2a}$, to odległość przekroju niebezpiecznego od podpory A będzie:

$$x = \frac{A}{\frac{P}{l} + \frac{P_1}{a}}, \quad \text{a} \quad M_{\max} = Wk_b = A \frac{x}{2} = \frac{A^2 a l}{2(Pa + P_1 l)}.$$

Jeżeli $\frac{P}{P_1} = \frac{a}{l-2a}$, to przekrój niebezpieczny leży w punkcie C . (a więc $x = a$) i wtedy $M_{\max} = Wk_b = \frac{1}{2} A a = \frac{1}{2} B b$.

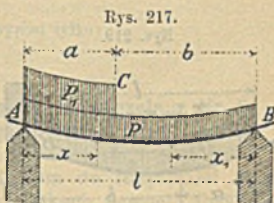
Jeżeli $\frac{P}{P_1} > \frac{a}{l-2a}$, to odległość przekroju niebezpiecznego od podpory B będzie:

$$x_1 = B : \frac{P}{l} = \frac{l}{2} + \frac{P_1}{P} \frac{a}{2}, \quad \text{a} \quad M_{\max} = Wk_b = B \frac{x_1}{2} = \frac{B^2 l}{2P}.$$

W przypadku szczególnym, gdy $a = b = \frac{1}{2}l$, a $P_1 = \frac{1}{2}P$, będzie:

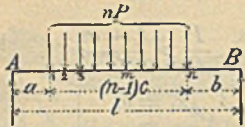
$$A = \frac{1}{8}P \quad \text{i} \quad B = \frac{5}{8}P, \quad \text{dalej} \quad x = \frac{1}{16}l, \quad \text{a} \quad M_{\max} = Wk_b = A \frac{x}{2} = \frac{49}{256} P l.$$

22. Belka obydwu końcami swobodnie podparta, a obciążona przez n równych ciężarów P , w $(n-1)$ równych odstępach (rys. 218).



Rys. 217.

Rys. 218.



$$A = \frac{nP}{l} \left(b + \frac{n-1}{2} c \right),$$

$$B = \frac{nP}{l} \left(a + \frac{n-1}{2} c \right).$$

Przekrój niebezpieczny leży pod m tym ciężarem, gdy $P > (mP - A) > 0$, a natenczas

$$M_{\max} = Wk_b = Aa + (m-1) \left(A - \frac{1}{2} mP \right) c.$$

W przypadku szczególnym, gdy $a = b$, będzie $A = B = \frac{1}{2} nP$, jeżeli nadto punkty przytknięcia n sił P dzielą całą rozpiętość belki l na $n_1 = n + 1$ równych części o długości $(l : n_1) = a = b$, to otrzymamy:

gdy n_1 jest liczbą parzystą: $M_{\max} = Wk_b = \frac{n_1}{8} Pl,$

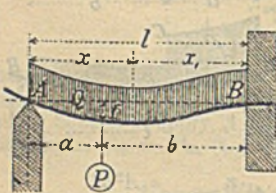
gdy n_1 jest liczbą nieparzystą: $M_{\max} = Wk_b = \frac{n_1^2 - 1}{8n_1} Pl.$

Gdy $n_1 = 3$ $Wk_b = \frac{1}{8} Pl,$
 „ $n_1 = 4$ $Wk_b = \frac{1}{8} Pl,$
 „ $n_1 = 5$ $Wk_b = \frac{3}{8} Pl,$

Gdy $n_1 = 6$ $Wk_b = \frac{3}{8} Pl,$
 „ $n_1 = 7$ $Wk_b = \frac{1}{8} Pl,$
 „ $n_1 = 8$ $Wk_b = Pl.$

23. Sposób obciążenia Nr. 9, łącznie z uogólnionym Nr. 4 (rys. 219).

Rys. 219.



$$A = P \frac{b^2(3a+2b)}{2l^3} + \frac{3}{8} Q,$$

$$B = P \frac{(2a^2 + 6ab + 3b^2)a}{2l^3} + \frac{5}{8} Q;$$

$$M_{\max} = Wk_b = P \frac{ab(2a+b)}{2l^2} + Q \frac{l}{8},$$

gdy $x < a$;

$$M_{\max} = Wk_b = P \frac{ab^2(3a+2b)}{2l^3} + Q \frac{(3b-a)a}{8l}, \text{ gdy } x_1 < b.$$

Z powyższych dwóch wzorów należy stosować ten, który daje większe wymiary przekroju belki.

Ugięcie w punkcie pod ciężarem P określa się równaniem:

$$EJf = P \frac{a^2 b^3 (4a+3b)}{12l^3} + Q \frac{ab^2(3a+b)}{48l}.$$

Odległość przekroju niebezpiecznego jest: $x = \frac{P b^2(3a+2b)}{Q} \frac{1}{2l^2} + \frac{3}{8} l < a,$

gdy $\frac{P}{Q} < \frac{l^2(5a-3b)}{4b^2(3a+2b)}$;

a $x_1 = \frac{P(2a^2 + 6ab + 3b^2)a}{Q} \frac{1}{2l^2} + \frac{5}{8} l < b,$

gdy $\frac{P}{Q} < \frac{l^2(3b-5a)}{4a(2a^2 + 6ab + 3b^2)}$.

24. Sposób obciążenia Nr. 10, łącznie z uogólnionym Nr. 5

(rys. 220).

$$a < b.$$

$$A = P \frac{(3a + b)b^2}{l^3} + \frac{Q}{2};$$

$$B = P \frac{(a + 3b)a^2}{l^3} + \frac{Q}{2};$$

$$M_{\max} = Wkb = P \frac{ab^2}{i^2} + \frac{Ql}{12}.$$

Przekrój niebezpieczny w *A*.Ugięcie w punkcie pod ciężarem *P*:

$$f = \frac{1}{EJ} \left(P \frac{a^3 b^3}{3 l^3} + Q \frac{a^2 b^2}{24 l} \right).$$

W przypadku szczególnym, gdy $Q=0$, ugięcie największe będzie:

$$f_{\max} = \frac{P}{EJ} \frac{2 a^2 b^3}{3(a + 3b)^2},$$

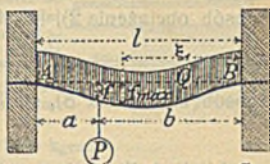
a wypada ono w odległości ξ_1 od *B*, przyczem:

$$\xi_1 = \frac{2b}{a + 3b} l,$$

gdy tymczasem ugięcie w punkcie pod ciężarem *P* wynosi tylko:

$$f = \frac{P}{EJ} \frac{a^2 b^3}{3 l^3}.$$

Rys. 220.



25. Ugięcie przy sposobie obciążenia Nr. 2, łącznie z Nr. 8,

p. str. 372 i 374.

Stosunek ugięcia f pod danym obciążeniem do rozpiętości belki l niepowinien przekraczać w zwykłych warunkach pewnej, doświadczonym stwierdzonej ilości, np. $1/600$ do $1/1000$, (por. uwagę u dołu str. 373).

Powyższy warunek zostaje zawsze zachowany dla belek żelaznych ($E \approx 2000000 \text{ kg/cm}^2$) o dowolnym, lecz stałym przekroju i przy najczęściej zachodzącym sposobie obciążenia Nr. 2 lub Nr. 8, gdy przekrój belki posiada moment wytrzymałości (p. str. 372 i 374), przystosowany do naprężenia bezpiecznego k_b i gdy równocześnie wysokość belki będzie:

$$h \approx \zeta l.$$

Spółczynniki ζ podano w tablicy poniższej w zależności od pożądanego stosunku ugięcia i od zastosowanego naprężenia bezpiecznego k_b .

Jeżeliby obliczenie dało wynik $h < \zeta l$, to ze względu na ugięcie f należy wybrać większy przekrój belki, którego moment bezwładności J (w cm^4) odpowiadałby warunkowi:

$$J \approx \eta Wl.$$

W tym wzorze moment wytrzymałości W , odpowiadający naprężeniu bezpiecznemu k_b , wyrazić należy w cm^3 , a rozpiętość l w m, współczynnik zaś η (przystosowany do k_b i f) wybrać z drugostronnej tablicy. (Por. przykład 4, str. 387).

Największe ugięcie		$f = \frac{1}{600} l$		$f = \frac{1}{1000} l$	
Gięcie (naprężenie) bezpieczne k_b w kg/cm^2 :		750	1000	750	1000
Sposób obciążenia 2), str. 372.	$\zeta =$	$\frac{3}{80}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{12}$
	$\eta =$	$\frac{15}{8}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{25}{8}$	$\frac{25}{6}$
Sposób obciążenia 8), str. 374.	$\zeta =$	$\frac{3}{64}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{5}{64}$	$\frac{5}{48}$
	$\eta =$	$\frac{75}{32}$	$\frac{25}{8}$	$\frac{125}{32}$	$\frac{125}{24}$

„ Jeżeli belkę żelazną obciążamy jednocześnie w sposób Nr. 2 i Nr. 8, to, oznaczywszy przez P obciążenie ciągłe, a przez P_1 ciężar oddzielny w pośrodku belki, podstawiamy we wzór $J \geq \eta W l$ (l w m) wartość momentu wytrzymałości

$$W = \frac{5/8 P + P_1}{4 k_b} l \quad (\text{tutaj } l \text{ w cm}),$$

a wielkość współczynnika η z tablicy, lecz odpowiadającą obciążeniu Nr. 2, przez co uwzględnimy już odmienny wpływ ciężarów P i P_1 na ugięcie belki. (Por. przykład 5, na str. 388).

Gdybyśmy omawianą belkę, obciążoną jak poprzednio przez P i P_1 , obliczali wyłącznie na wytrzymałość, t. j. tylko w ten sposób, iżby odpowiadała naprężeniu bezpiecznemu k_b , to moment wytrzymałości przekroju byłby mniejszy, a mianowicie (p. przypadek szczególny pod 20, str. 381):

Rys. 221.

$$W = \frac{1/2 P + P_1}{4 k_b} l.$$

Przykłady.

Uwaga. Belki w przykładach poniższych są dwuteownikami normalnych profili niemieckich, z żelaza spawalnego, o $k_b = 1000 \text{ kg/cm}^2$.

Przykład 1. Belkę, jednym końcem osadzoną, w drugim swobodną, 1.50 m rozpiętości, obciążamy podług rys. 221, a mianowicie: $900 + 450 + 600 + 150 = 2300 \text{ kg}$; ciężar własny belki zaniedbujemy. W punkcie C powinno być:

$$W = \frac{500 \cdot 50 + (0.5 \cdot 1.5) \cdot 900 \cdot 25}{1000} = 47,5 \text{ cm}^3.$$

$$\text{a w } B: W = \frac{600 \cdot 150 + 150 \cdot 30 + 900 \cdot \frac{1}{2} \cdot 150 + 450 \cdot \frac{1}{2} \cdot 100}{1000} = \frac{207000}{1000} = 207 \text{ cm}^3.$$

Rys. 222.



Rys. 223.



Dla AC starczy I-Nr. 12, o $W = 54,5 \text{ cm}^3$.
Dla BC natomiast możemy wybierać:

2 I-Nr. 16, o $W = 2 \cdot 117 = 234 \text{ cm}^3$; albo
I-Nr. 20, o $W = 214 \text{ cm}^3$; albo (p. rys. 222):
3 I-Nr. 14, o $W = 3 \cdot 81,7 = 245 \text{ cm}^3$; albo
(rys. 223) 2 I-Nr. 14 i I-Nr. 12, o $W = 2 \cdot 81,7 + \frac{12}{11} \cdot 54,5 = 210 \text{ cm}^3$.

[Ponieważ słabszy I-Nr. 12 w tem połączeniu nie może się bardziej przginać, niż każdy z silniejszych I-Nr 14, przyczem słabszy I nie wyteża się całkowicie, więc toż jego $W = 54,5 \text{ cm}^3$ wprowadzamy w wartości zmniejszonej w stosunku wysokości profili].

Jeżeli osadzenie belki w murze ma zapobiegać jej obruszeniu się, to koniecznym jest: 1) aby dążności belki do obrotu, pod wpływem momentu obrotowego, przeciwdziałał moment dostatecznego przeciwcieżaru, t. zw. moment statyczności (patrz str. 169); 2) aby podpora belki znosiła bezpiecznie i obciążenie belką i przeciwcieżar. Jeżeli przyjmiemy oś obrotu belki na $\frac{1}{3}$ szerokości podkładki (rys. 224) ($26 : 3 \approx 9 \text{ cm}$), licząc od krawędzi skrajnej B, to moment wywracający będzie:

$$M = 207\,000 + 9 \cdot 2300 = 227\,700 \text{ kgcm.}$$

A że przeciwcieżar działa na ramię $38,5 - 9 = 29,5$, więc waga jego powinna być: $G > 227\,700 : 29,5 = 7720 \text{ kg}$.

Podkładka w B, 26 cm szeroka, a 39 cm długa (p. rys. 224), wywiera na znajdujący się pod nią mur z klinkieru na zaprawie cementowej średnie ciśnienie:

$$k = \frac{2300 + 7720}{26 \cdot 39} = 10 \text{ kg/cm}^2,$$

które można uznać za bezpiecznie, zgodnie z tablicą 3, str. 339. Nakładkę przy D: $26 \cdot 26 \text{ cm}$. dodano w celu lepszego rozłożenia ciśnienia na nadmurówkę.

[Dla belek osadzonych w ścianach, przy obliczaniu momentu statyczności przeciwcieżaru, uwzględniamy tylko ciężar własny części obciążających, t. j. ścian, belek i t. p. bez ciężarów użytkowych. W budynkach liczą zazwyczaj ścianki podokienne w pełnej grubości ściany, potrącając wzajemnie pełne otwory okienne. Ciężar belek liczy się jako działający na środek pola podparcia; otwory w ścianach, przewidziane na przyszłość, potrąca się zaraz w obliczeniu; ciężar cieńszych ścianek przedziałowych, lub przegród, jako mogących ulec usunięciu w przyszłości, nie uwzględnia się jako przeciwcieżaru użytkowego.]

Przykład 2. Balkon przedstawiony w rys. 225 posiada posadzkę z blachy falistej, ważącą $250 +$ obciążenie użytkowe 400 , razem 650 kg/m^2 . Waga poręczy z żelaza spawalnego = 50 kg/mb. ; $k_b = 1000 \text{ kg/cm}^2$.

Na belkę a, wzdłuż ściany frontowej ułożoną, wypada $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 2,8^2 = 1,54 \text{ m}^2$ po $650 \text{ kg/m}^2 \approx 1000 \text{ kg}$.

Odległość punktu ciężkości połowy obciążenia (czwarta część elipsy, por. czwartą część koła str. 176) od podpory będzie:

$$140 (1 - \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot 0,0) = 81 \text{ cm.}$$

Potrzebny moment wytrzymałości:

$$W = \frac{500 \cdot 81}{1000} = 40,5 \text{ cm}^3,$$

dla belki a wybieramy I-Nr. 11, o $W = 43,3 \text{ cm}^3$.

Belka obrzeżna b znosi następujące obciążenia:

- 1) Ciężar podłogi $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 2,8^2 = 1,54 \text{ m}^2$ po $650 \text{ kg/m}^2 \dots \approx 1000 \text{ kg}$
środek ciężkości sierpiastego pola obciążenia leży od osi obrotu,
t. j. od zewnętrznej krawędzi muru, (p. str. 176) w oddaleniu:

$$(2 - \frac{1}{2}) \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{140}{\pi} = 0,4244 \cdot 210 = 89 \text{ cm;}$$

- 2) Ciężar poręczy $\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 2,8 = 4,4 \text{ m}$ po $50 \text{ kg/mb.} \dots = 220$
środek ciężkości od osi obrotu (str. 173): $0,637 \cdot 140 = 89 \text{ cm;}$

- 3) Odpór podpory belki a, działający 3 cm przed osią obrotu, razem \dots 1000

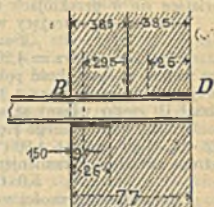
Obciążenie ogólne 2220 kg.

$$\text{Potrzeba zatem: } W = \frac{(1000 + 220) \cdot 89 + 1000 \cdot 3}{1000} = \frac{111580}{1000} = 112 \text{ cm}^3;$$

dla belki b wybieramy: I-Nr. 13, posiadający w dwóch przekrojach, w osi obrotu leżących, razem:

$$W = 2 \cdot 67 = 134 \text{ cm}^3,$$

Rys. 224.



Rys. 225.



$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = \sigma_x + \sigma_y = 562,5 + 502,2 = 1064,7 \text{ kg/cm}^2.$$

Jest to naprężenie większe niż dozwolone (p. str. 338 i nast.), mimo to można uznać je jeszcze za bezpieczne, bo ciężar własny wynosi połowę obciążenia ogólnego, a zresztą przez lekkie złuzowanie dwóch ściągów skrajnych, możnaby zmniejszyć znacznie σ_y w sposób podobny, jak to wskazano dla belki dwuprzęsłowej na str. 396 pod 2.

Belka podestowa rozpiętości 3,10 m, obciążona równomiernie połową podestu: $3,1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,5 \cdot 1000 = 2325 \text{ kg}$, a nadto jako podpora dwóch schodnic środkowych (biegu wznoszącego się i spadającego) wywiera odpory na każdą schodnicę $\frac{1}{2} \cdot 2250 \text{ kg}$. (a więc na obydwie $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2250 = 2250 \text{ kg}$), które działają w oddaleniu 150 cm od podpór. Licząc na to, że parcie sklepienia podestowego przenosi się na sklepienie biegów, obliczamy belkę podestową tylko na obciążenie pionowe i otrzymamy, przy $k_0 = 1000 \text{ kg/cm}^2$:

$$W = \frac{2325 \cdot 310}{8 \cdot 1000} + \frac{\frac{1}{2} \cdot 2250 \cdot 150}{1000} = 90 + 160 = 250 \text{ cm}^3,$$

na co starczy I-Nr. 22, o $W = 278 \text{ cm}^3$.

Jeżeli końce belki podestowej zamurowano na 30 cm, to nie potrzeba podkładki, bo przy odporze: $\frac{1}{2} \cdot 2325 + 2250 = 3413 \text{ kg}$, rozkładającym się na $9,8 \times 30 = 294 \text{ cm}^2$, otrzymamy ciśnienie na mur: $3413 : 294 = 11,6 \text{ kg/cm}^2$, które dobry mur z klinkierów na zaprawę cementową bezpiecznie znieśie.

[Zastępując sklepienia blachą falistą, usuwamy parcie boczne na schodnice i zmniejszamy ciężar własny z 500 kg na 300 kg/m², czyli całe obciążenie z 1000 na 800 kg/m² planu, t. j. 0,8 razy.

$$M_x = 0,8 \cdot 84375 = 67500 \text{ kgcm}.$$

$$W_x = \frac{67500}{1000} = 67,5 \text{ cm}^3, \text{ na co starczy C-Nr. 14, o } W = 86,4 \text{ cm}^3.$$

Dla blachy falistej, o rozpiętości 1,5 m, obciążenie na 1 m szerokości w kierunku prostopadłym do schodnic wynosi:

$$1,5 \cdot 1,0 \cdot \frac{800}{1,14} = 1053 \text{ kg}.$$

potrzeba zatem:
$$W = \frac{1053 \cdot 150}{8 \cdot 1000} = 19,7 \text{ cm}^3.$$

Profil blachy falistej $B = 75 \text{ mm}$, $H = 50 \text{ mm}$, $\delta = 1 \text{ mm}$ ma, podług wzoru 28, str. 365, na 1 m szerokości arkusza $W = 2 \cdot 57,6 : 5,1 = 22,6 \text{ cm}^3$. (W Berlinie przepis policji budowlanej nakazuje pogrubiać falistą blachę dźwigarową o 1 mm, ze względu na rdzewienie, tak że grubość blachy wypadaloby oznaczyć na $\delta = 2 \text{ mm}$). I belki podestowo wypadłyby lżejsze, a mianowicie, w przypuszczeniu że ciężar własny podestów się nie zmniejszy: $W = 90 + 0,8 \cdot 169 = 225 \text{ cm}^3$, tak że I-Nr. 21, o $W = 244 \text{ cm}^3$, zupełnie starczy.

Jeżeli biegi podsklepiamy sklepieniami wznoszącymi się, spoczywającymi na belkach podestowych, to schodnice stają się zbyteczne, a całe obciążenie biegu liczy się zazwyczaj na dolną belkę podestową, podczas gdy górna wyrównywa tylko parcia sklepień (poziomego podestu i pochyłego biegu), a natenczas obliczenie belki podestowej prowadzi się do sposobu 2), na str. 381.

W danym przypadku, stosując oznaczenia rys. 217, str. 381, mamy: $l = 310 \text{ cm}$, $a = 150 \text{ cm}$, $b = 160 \text{ cm}$, $P = 2325 \text{ kg}$ i $P_1 = 1,5 \cdot 30 \cdot 1000 = 4500 \text{ kg}$.

$$\text{A zatem } A = \frac{2325}{2} + 4500 \left(1 - \frac{150}{2 \cdot 310}\right) = 4575 \text{ kg}; \quad B = 2250 \text{ kg}.$$

A że $P : P_1 < 150 : (310 - 2 \cdot 150)$, więc przekrój niebezpieczny określa się:

$$x = \frac{4575}{(2325 : 310) + (4500 : 150)} = \frac{4575}{7,5 + 30} = 122 \text{ cm}$$

i potrzeba

$$W = \frac{4575 \cdot 122}{2 \cdot 1000} = 279 \text{ cm}^3,$$

na co starczy I-Nr. 23, o $W = 314 \text{ cm}^3$.

Przy dobrym murze z klinkierów na zaprawie cementowej ($k = 14 \text{ kg/cm}^2$ p. str. 339) podkładki okażą się zbytecznymi, jeżeli końce belki zapuszczimy w ściany na 35 cm.

[Niezbędny moment wytrzymałości W możemy też obliczyć, bez uprzedniego wyznaczenia wartości x , a mianowicie podług wzoru podanego na str. 381:

$$W = \frac{4575^2 \cdot 150 \cdot 310}{750 \cdot 2(2325 \cdot 150 + 4500 \cdot 310)} = 279 \text{ cm}^3.]$$

Przykład 4. Belki walcowane, stropu ogniotrwałego, znacznej rozpiętości 10,5 m; odstępy belek 1,95; ciężar własny stropu, łącznie z belkami, 400 kg/m²; obciążenie użytkowe 250 kg/m². Sposób obciążenia Nr. 8 str. 374.

Obciążenie jednej belki:

$$P = 10,5 \cdot 1,95 = 20,5 \text{ m}^2 \text{ po } 650 \text{ kg/m}^2 = 13325 \text{ kg.}$$

Bez względu na wielkość ugięcia potrzeba;

$$W = \frac{13325 \cdot 1050}{8 \cdot 1000} = 1749 \text{ cm}^3,$$

a zatem I-Nr. 42^{1/2}, o $W = 1739 \text{ cm}^3$, mógłby już wystarczyć. Jeżeli jednak ugięcie największe nie ma przenosić $\frac{1}{600}$ rozpiętości, czyli $f < 1050 : 600 = 1,75 \text{ cm}$, to podług str. 371 I-Nr. 42^{1/2} jest za niski, ponieważ wysokość jego $h = 42,5 \text{ cm}$ jest mniejsza niż $\zeta l = \frac{1}{16} \cdot 1050 = 65,6 \text{ cm}$. A zatem niezbędny moment bezwładności będzie:

$$J \geq \eta W l = \frac{25}{8} \cdot 1749 \cdot 10,5 = 57389 \text{ cm}^4;$$

dobieramy I-Nr. 50, o $J = 68730 \text{ cm}^4$, a podług str. 375 dla I-Nr. 50 otrzymamy:

$$f = \frac{5}{384} \frac{13325 \cdot 1050^3}{2000000 \cdot 68730} = 1,46 \text{ cm,}$$

z którego to ugięcia część, t. j. $\frac{400}{650} \cdot 1,46 = 0,9 \text{ cm}$ jest ugięciem stałym.

Podkładki 26 · 26 cm wystarczą dla $\frac{1}{2} \cdot 13325 = 6660 \text{ kg}$ obciążenia podpór.

Przykład 5. Obydwie belki, podtrzymujące chodnik zawieszony nad sceną, posiadają rozpiętość po 12 m; szerokość chodnika 1,0 m. Największe obciążenie użytkowe w pośrodku chodnika:

Przyrząd oświetlający z trojgiem ludzi do obsługi — razem najwyżej . . . 450 kg, a zatem na każdą belkę $\frac{1}{2} \cdot 450 = 225 \text{ kg}$.

Ciężar własny chodnika na mb.

1) belki (szacunkowo) $2 \cdot 42 =$	84 kg,
2) pokład z bali 3 cm grubych, $1,0 \cdot 1,0 \cdot 0,03 = 0,03 \text{ m}^3$ po $600 \text{ kg/m}^3 =$	18 "
3) poręcze, śruby i t. p. =	8 "
	razem 110 kg.

Na każdą z belek wypada zatem ciężar stały $12,0 \cdot \frac{110}{2} =$ 660 kg.

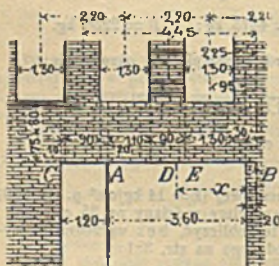
Bez względu na wielkość ugięcia [p. przypadek szczególny pod 20) str. 381] potrzeba:

$$W = \frac{(\frac{1}{2} \cdot 660 + 225) 1200}{4 \cdot 1000} = 166,5 \text{ cm}^3,$$

tak że I-Nr. 19, o $W = 185 \text{ cm}^3$, aż nadto by wystarczał. Jeżeli jednak ugięcie największe nie ma przenosić $\frac{1}{600}$ rozpiętości, czyli jeżeli ma być $f < 2 \text{ cm}$, to podług str. 384 powinny być:

$$W = \frac{(\frac{1}{2} \cdot 660 + 225) 1200}{4 \cdot 1000} = 191 \text{ cm}^3,$$

Rys. 227.



a $J = \eta W l = \frac{3}{2} \cdot 191 \cdot 12 = 5730 \text{ cm}^4$; dobraliśmy zatem I-Nr. 26, o $J = 5735 \text{ cm}^4$, a ugięcie byłoby natenczas:

$$f = \frac{1200 \cdot 5730}{600 \cdot 5735} \approx 2 \text{ cm,}$$

z którego: $\frac{1}{2} \cdot 660$ z którego: $\frac{1}{2} \cdot 660 + 225$ · 2 = 1,3 cm byłoby ugięciem stałym.

Dla I-Nr. 19 największe ugięcie byłoby natomiast:

$$f = \frac{1200 \cdot 5730}{600 \cdot 1739} = 6,5 \text{ cm.}$$

Przykład 6. (Rys. 227). Dźwigar CAB nad oknem wystawowym, wsparty swobodnie na podporach A (słup lanożelazny) i B , przewieszca się swobodnie częścią AC , bo muru przy C nie możemy dodatkowo obciążać.

Wysokość ścian: parter 0,75 m (od spodu dźwigara do wierzchu belkowania), pierwsze piętro 4,50 m, drugie 4,20 m, trzecie — 3,90 m, czwarte — 3,60, nadpiętrze (drem-pel) 1,5 m. Grubości ścian: 0,65 m, 0,52 m, 0,52 m, 0,39 m, 0,39 m, 0,26 m.

Wysokość okien: 2,80 m, 2,60 m, 2,40 m, 2,20; wysokość parapetów 0,80 m; — głębokość pokojów w świetle: 5,50 m, 5,63 m, 5,76 m, 5,89 m, 6,02 m, obciążająca szerokość dachu 8 m. Ciężary właściwe: ścian — 1600 kg/m³, sufitów — 500 kg/m², dachu 250 kg/m².

Dozwolone gięcie żelaza walcowanego (naprężenie gnące)

$$k_b = 1000 \text{ kg/cm}^2.$$

Obciążenia a) rozłożone równomiernie na 4,80 m długości:

$$4,80 [(0,75 \cdot 0,65 + 0,80 \cdot 0,52) 1600 + \frac{1}{2} \cdot 5,50 \cdot 500] = 4,80 \cdot 2820 = 13540 \text{ kg};$$

b) na dwóch kresach po 0,90 długich (filary międzyokienne) po:

$$2,20 \left\{ (4,50 - 0,80 + 4,20) 0,52 + (3,90 + 3,60) 0,39 + 1,5 \cdot 0,26 \right\} 1600$$

$$+ \frac{1}{2} [(5,63 + 5,76 + 5,89 + 6,02) 500 + 8,0 \cdot 250] \left. \right\} = 2,2 \cdot 18700 = 41140 \text{ kg}$$

z tego schodzi:

$$1,30 [(2,80 + 2,60) 0,52 + (2,40 + 2,20) 0,39] 1600 = 9570 \text{ „}$$

pozostaje 31570 kg

c) na długości 0,30 m 0,95 · 18700 = 17865 kg

1/2 · 9570 = 12080 kg

Jeżeli (dla większego bezpieczeństwa) punkt przytknięcia odporu podpory B przesuniemy o 0,20 m od krawędzi filaru w głąb, to siła cisnąca na słup będzie:

$$A = \frac{1}{3,80} [13540 \cdot 2,60 + 31570 (4,45 + 2,25) + 12980 \cdot 0,35] = 66120 \text{ kg,}$$

a zatem $B = 13540 + 2 \cdot 31570 + 12980 - 66120 = \dots = 23540 \text{ kg.}$

W przekroju belki, leżącym w odległości x cm od B, moment gnący będzie:

$$M = 23540 x - \left[\frac{2820 (x - 20)^2}{100} + \frac{31570 (x - 180)^2}{90} + 12980 (x - 35) \right].$$

Siła poprzeczna będzie zatem zerem: $Q = \frac{dM}{dx} = 0$ (p. str. 354) dla

$$23540 = \frac{2820}{100} (x - 20) + \frac{31570}{90} (x - 180) + 12980,$$

t. zn., że przy $x = \frac{74264}{28,2 + 350,8} = 196 \text{ cm}$, znajduje się przekrój niebezpieczny D.

[Przekrój D możemy też odnaleźć sposobem obliczenia, wskazanym na str. 379, a mianowicie: Na 1,80 m od B, a więc w E, mamy: $Q = 23540 - (1,6 \cdot 2820 + 12980) = 6050 \text{ kg}$, a więc Q stanie się zerem przy:

$$x = 180 + \frac{6050}{(31570 : 90) + (2820 : 100)} = 180 + \frac{6050}{350,8 + 28,2} = 196 \text{ cm}].$$

Dla takiej wartości x z wzoru na moment otrzymamy:

$$M_{\max} = 2042396 \text{ kgcm, a więc } W = \frac{2042396}{1000} = 2042 \text{ cm}^3.$$

Drugi przekrój niebezpieczny leży w A, gdzie powinno być:

$$W = \frac{1,20 \cdot 2820 \cdot 60 + 31570 \cdot 65}{1000} = 2255 \text{ cm}^3$$

Ten potrzebny moment wytrzymałości, jako bezwzględnie największy, jest miarodajnym dla wyboru przekroju. Jeżeli, w celu dogodniejszego ustawienia skrzynki pomieszczonej żaluzję zwiniętą, oddzielna belka ma przejąć na sobie ciężar stropu parterowego, t. j. podeprzeć konce belek nad parterem, oraz pas muru 0,65 — 0,52 = 0,13 m grubo, a 0,75 m wysoki, to dla tej belki, przy rozpiętości 4,8 m i obciążeniu $4,8 (0,75 \cdot 0,13 \cdot 1000 + \frac{1}{2} \cdot 5,5 \cdot 500) = 4,8 \cdot 1530 = 7350 \text{ kg}$, potrzebaby

$$W = \frac{7350 \cdot 480}{8 \cdot 1000} = 441 \text{ cm}^3.$$

Dla tej belki dobieramy I-Nr. 20, o $W = 441 \text{ cm}^3$, a dla trzech pozostałych belek frontowych — I-Nr. 30, o $W = 652 \text{ cm}^3$, tak że ogółem będziemy mieli:

$$W = 3 \cdot 652 + 441 = 1956 + 441 = 2397 \text{ cm}^3.$$

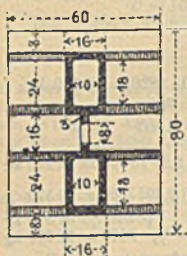
Podkładki: Odpór w B wynosił 23540 kg, obciążenie podpory (przy szerokości podkładki 39 cm) zwiększa się jeszcze co najwyżej o

$$\frac{0,39}{0,90 - 0,30} (31570 - 12980) = 12080 \text{ kg.}$$

tak że przy 65 cm długości podkładki i najlepszym murze z klinkieru na zaprawie cementowej ($k = 14 \text{ kg/cm}^2$ str. 339), szerokość podkładki

$$\frac{23\,540 + 12\,080}{85 \cdot 14} = \frac{35\,620}{910} = 39 \text{ cm wystarczy.}$$

Rys. 228.



Śłup A wysokości 5,0 m, ważący szacunkowo 880 kg, znosi ogólne obciążenie 67 t, a zatem podług str. 348 potrzeba:

$$J_{\min} = 8 \cdot 67 \cdot 5,0^3 = 13\,400 \text{ cm}^4, \text{ a}$$

$$F = 67\,000 : 500 = 134 \text{ cm}^2.$$

Przekrój przedstawiony w rys. 228 (miary w cm.) ma [podług tablic str. 369 do 371]

$$J_{\min} = 2(8192 - 1500 + 9) = 13\,402 \text{ cm}^4, \text{ a}$$

$$F = 2(24 \cdot 16 - 18 \cdot 10 + 4 \cdot 3) = 432 \text{ cm}^2.$$

Dla płyty podstawowej starczą wymiary 80 · 60 cm, ponieważ $80 \cdot 60 \cdot 14 = 67\,200 \text{ kg}$.

Przykład 7. Belki drewniane stropu w mieszkaniu mają rozpiętość 6,6 m. Na 1 m szerokości wypada obciążenie 6,6 · 1,0 · 500 = 3300 kg, dla którego, przy $k_b = 60 \text{ kg/cm}^2$, potrzeba:

$$W = \frac{3300 \cdot 660}{8 \cdot 60} = 4538 \text{ cm}^3.$$

Podług tablicy str. 371 belka o przekroju 26 · 30 cm ma $W = 3900 \text{ cm}^3$, a zatem takie belki możnaby układać w odstępach: $l = 3900 : 4538 = 0,86 \text{ m}$ środek od środka.

[Berlińska policja budowlana dozwala dla belek niżej 6-ciu m rozpiętości odstępy o $\frac{2}{3}$ większe, czyli dozwala napręzać drzewo do $k_b = 80 \text{ kg/cm}^2$. (p. Dział X, rozdział IV b · 1).

f. Belki o stałej wytrzymałości na gięcie.

Jeżeli największe wartości gięcia (naprężenia gnącego)

$$\sigma_{\max} (= k_b) = M : W$$

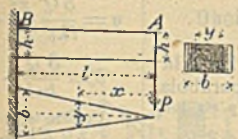
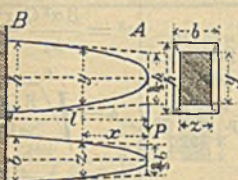
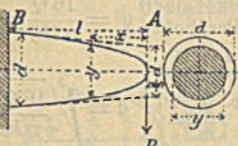
są w każdym przekroju równe, czyli dla całej belki stałe, to belkę nazywamy belką o stałej wytrzymałości (p. str. 354). Kilka więcej używanych i podatnych kształtów tego rodzaju belek podano poniżej. Linie przerywane określają przybliżenie dokładny przekrój podłużny belki, otoczony stycznymi do obwodu ściśle odpowiadającego założeniu, a oznaczonego liniami nieprzerywanymi.

W przypadkach 5, 9, 10 i 11, jako też w 1^b, oś x jest zarazem osią symetrii przekroju podłużnego.

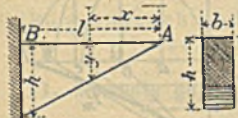
Podłużny i poprzeczny przekrój belki	Kształt przekroju poprzecznego	Rodzaj ograniczenia przekroju podłużnego	Wzory na rozmiar przekrojów
--------------------------------------	--------------------------------	--	-----------------------------

Ciążar P na końcu belki.

1a).		1 a). Górny kraj prosty; dolny — zwykła parabola.	$y^2 = \frac{6P}{hkb} x.$	
1b).		Prostokąty jednakowej szerokości b i zmiennej wysokości y .	1 b). Zwykła parabola. (str. 108).	$h = \sqrt{\frac{6Pl}{hkb}}$ Ugięcie w A : $f = \frac{8P}{bE} \left(\frac{l}{h}\right)^3.$

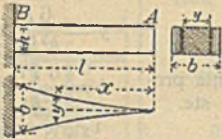
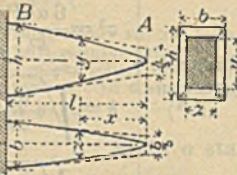

Podłużny i poprzeczny przekrój belki	Kształt przekroju poprzecznego	Rodzaj ograniczenia przekroju podłużnego	Wzory na rozmiary przekrojów
<p>2.</p>  <p>(Odształcona jest łukiem koła).</p>	<p>Prostokąty jednakowej wysokości h i zmiennej szerokości y.</p>	<p>Linie proste.</p>	$y = \frac{6P}{h^2 kb} x.$ $b = \frac{6Pl}{h^2 kb}.$ <p>Ugięcie w A:</p> $f = \frac{6P}{bE} \left(\frac{l}{h}\right)^3.$
<p>3.</p> 	<p>Prostokąty podobne, wysokości y i szerokości z; stosunek boków: $z:y = \alpha =$ stałej.</p>	<p>Parabola sześcienna.*)</p>	$y^3 = \frac{6P}{\alpha kb} x.$ $z^3 = \frac{6\alpha^2 P}{kb} x.$ $h = \sqrt[3]{\frac{6Pl}{\alpha kb}}.$ $b = \sqrt[3]{\frac{6\alpha^2 Pl}{kb}}.$
<p>4.</p> 	<p>Koła o średnicy y.</p>	<p>Parabola sześcienna.*)</p>	$y^3 = \frac{32P}{\pi kb} x.$ $d = \sqrt[3]{\frac{32Pl}{\pi kb}}.$

Obciążenie Q , równomiernie rozłożone na całą rozpiętość belki.

<p>5.</p> 	<p>Prostokąty o jednakowej szerokości b i zmiennej wysokości y.</p>	<p>Linie proste.</p>	$y = x \sqrt{\frac{3Q}{blkb}}.$ $h = \sqrt{\frac{3Ql}{bkb}}.$
--	---	----------------------	---

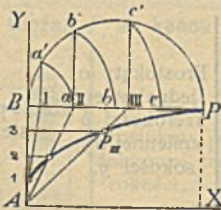
*) Wykreślenie paraboli sześciennej (kubicznej) i półsześciennej (półkubicznej) (rys. 229 i 230 str. 392). Dane: wierzchołek paraboli A, oś AX i dowolny punkt P.

(ciąg dalszy uwagi p. str. 392).

Podłużny i poprzeczny przekrój belki	Kształt przekroju poprzecznego	Rodzaj ograniczenia przekroju podłużnego	Wzory na rozmiary przekrojów.
<p>6.</p>  <p>(Odształcona jest łukiem koła).</p>	<p>Prostokąty o jednakowej wysokości h i zmiennej szerokości y.</p>	<p>Zwykła parabola. (p. str. 108)</p>	$y = \frac{3Q}{lkb} \frac{x^2}{h^2}$ $b = \frac{3Ql}{kbh^2}$ <p>Ugięcie w A:</p> $f = \frac{3Q}{bE} \left(\frac{l}{h}\right)^3$
<p>7.</p> 	<p>Prostokąty podobne wysokości y i szerokości z. Stosunek boków: $z:y = \alpha =$ stałej.</p>	<p>Parabola półsześcienna. (p. str. 391 i 302).</p>	$y^3 = \frac{3Q}{akb} \frac{x^2}{l}$ $z^3 = \frac{3\alpha^2 Q}{kb} \frac{x^2}{l}$ $h = \sqrt[3]{\frac{3Ql}{akb}}$ $b = \sqrt[3]{\frac{3\alpha^2 Ql}{kb}}$
<p>8.</p> 	<p>Koła o średnicy y.</p>	<p>Parabola półsześcienna. (p. str. 301 i 302).</p>	$y^3 = \frac{16Q}{\pi lkb} x^2$ $d = \sqrt[3]{\frac{16Ql}{\pi kb}}$

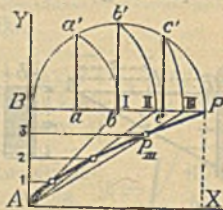
Rys. 229.

Parabola sześcienna.



Rys. 230.

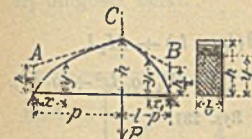
Parabola półsześcienna.



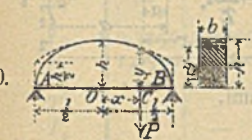
Kreślmy: $AB \perp AX$, $PB \perp AB$; dzielimy AB (w punktach 1, 2, 3) i BP (w punktach a, b, c) na dowolną ilość (w rys. na 4) równych części i zataczamy nad BP , jako średnicą, półkoło. Potem w rys. 229 zataczamy około B , jako środka, łuki kół: aa' , bb' , cc' i kreślimy: $a'I$, $b'II$, $c'III$, prostopadłe na BP . w rys. 230 zaś naodwrot, kreślimy naprzód: aa' , bb' , cc' , prostopadłe do BP , a potem zataczamy około B , jako środka, łuki kół $a'I$, $b'II$, $c'III$. Wreszcie w obydwu rysunkach kreślimy równoległe do BP przez punkty: 1, 2, 3, a przecięcia się tych równoległych: 1 z $a'I$, 2 z $a'II$ i 3 z $a'III$ będą punktami żądanych parabol. W sposób podobny oznacza się i inne punkty krzywych.

Podłużny i poprzeczny przekrój belki	Kształt przekroju poprzecznego	Rodzaj ograniczenia przekroju podłużnego	Wzory na rozmiary przekroju
--------------------------------------	--------------------------------	--	-----------------------------


Obciążenie P działa w C .

9. 	Prostokąty o jednakowej szerokości b i zmiennej wysokości y .	Kraj górny: dwie parabole zwykle. (p. str. 108).	$y^2 = \frac{6P(l-p)}{b l k b} x.$ $y_1^2 = \frac{6Pp}{b l k b} x_1.$ $h = \sqrt{\frac{6P(l-p)p}{b l k b}}$
---	---	--	---

Ciężar P ruchomy wzdłuż belki.

10. 	Prostokąty o jednakowej szerokości b i zmiennej wysokości y .	Kraj górny: elipsa. (p. str. 103 i 106).	$\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{y^2}{\frac{3Pl}{2bk b}} = 1.$ $h = \sqrt{\frac{3Pl}{2bk b}}$
--	---	--	--

Obciążenie Q równomiernie rozłożone.

11. 	Prostokąty o jednakowej szerokości b i zmiennej wysokości y .	Kraj górny: elipsa. (p. str. 103 i 106).	$\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{y^2}{\frac{3Ql}{4bk b}} = 1.$ $h = \sqrt{\frac{3Ql}{4bk b}}$
--	---	--	--

g. Belki wielopręsłowe.

Belka w końcach podparta lub osadzona spoczywa nadto jeszcze na pewnej liczbie podpór.

1. Momenty gnące nad podporami (Momenty podporowe).

Oznaczmy (rys. 231) przez:

M_0, M_1, M_2 momenty nad trzema dowolnymi, kolejno po sobie następującymi podporami 0, 1, 2,

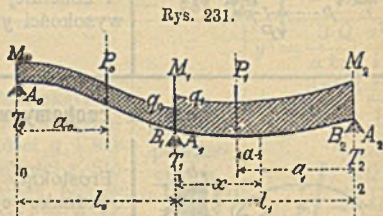
y_0, y_1, y_2 wysokości punktów podpornych 0, 1, 2, nad dowolnym poziomem, a otrzymamy:

$$1) 6 EJ \left(\frac{y_1 - y_0}{l_0} + \frac{y_1 - y_2}{l_1} \right) = M_0 l_0 + 2 M_1 (l_0 + l_1) + M_2 l_1 + \frac{\sum P a_0 (l_0^2 - a_0^2)}{l_0} + \frac{\sum P a_1 (l_1^2 - a_1^2)}{l_1} + \frac{1}{4} (q_0 l_0^3 + q_1 l_1^3).$$

Dla belki obciążonej wyłącznie tylko obciążeniami ciągłymi $q_0, q_1, q_2 \dots$, rozłożonemi równomiernie na oddzielne przęsła, otrzymamy znane **równanie Clapeyron'a**

$$2) 6 EJ \left(\frac{y_1 - y_0}{l_0} + \frac{y_1 - y_2}{l_1} \right) = M_0 l_0 + 2 M_1 (l_0 + l_1) + M_2 l_1 + \frac{1}{4} (q_0 l_0^3 + q_1 l_1^3).$$

Jeżeli mamy n przęseł, a więc $n + 1$ podpór, to możemy zestawić $n - 1$ równań 1-szej lub 2-giej postaci. Te równania, łącznie z dwoma równaniami, określającymi sposób podparcia skrajnych końców belki (np. $M_0 = M_n = 0$ i t. p.), starczą do obliczenia $n + 1$ momentów podporowych, pojawiających się nad $n + 1$ podpórmi.



Rys. 231.

2. Odpory (podpór).

1. Niech oznaczą:

$A_0, A_1 \dots A_{n-1}$ części oddzielnych odporów całkowitych, powstające pod wpływem przęseł leżących na prawo od danej podpory,

$B_1, B_2 \dots B_n$ także części odporów, pochodzące od przęseł leżących na lewo od podpory,

$T_0, T_1 \dots T_n$ odpory całkowite, a będzie:

$$T_0 = A_0,$$

$$T_1 = A_1 + B_1,$$

$$\dots$$

$$T_n = B_n.$$

Moment w dowolnem miejscu, w odległości x od podpory 1, będzie:

$$M = M_1 - \frac{q_1 x^2}{2} - \sum_0^x P_1 a + A_1 x;$$

podstawiając $x = l_1$ i $M = M_2$, otrzymamy z powyższego:

$$A_1 = \frac{M_2 - M_1}{l_1} + \frac{q_1 l_1}{2} + \frac{\sum P_1 a_1}{l_1}.$$

Podobnie możemy wywieść:

$$B_1 = \frac{M_0 - M_1}{l_0} + \frac{q_0 l_0}{2} + \frac{\sum P_0 a_0}{l_0};$$

a zatem **odpór całkowity** podpory 1 będzie:

$$T_1 = \frac{q_0 l_0 + q_1 l_1}{2} - M_1 \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_0} \right) + \frac{M_2}{l_1} + \frac{M_0}{l_0} + \frac{\sum P_1 a_1}{l_1} + \frac{\sum P_0 a_0}{l_0}$$

W tablicy poniższej zestawiono wyniki ostateczne dla belek, spoczywających na trzech do dziewięciu **równowysokich podporach**, dla **przęsł równowielkich i równomiernie i ciągle obciążonych** na całej długości belki.

Belki wieloprzęsłowe.

Wielkości	Ilość podpór							Jednostka
	3	4	5	6	7	8	9	
M_1	0,1250	0,1000	0,1071	0,1053	0,1058	0,1056	0,1057	$q l^2$
M_2	—	—	0,0714	0,0789	0,0769	0,0775	0,0773	"
M_3	—	—	—	—	0,0865	0,0845	0,0850	"
M_4	—	—	—	—	—	—	0,0825	"
T_0	0,3750	0,4000	0,3929	0,3947	0,3942	0,3944	0,3943	$q l$
T_1	1,2500	1,1000	1,1428	1,1317	1,1346	1,1337	1,1340	"
T_2	—	—	0,9286	0,9736	0,9616	0,9649	0,9640	"
T_3	—	—	—	—	1,0192	1,0070	1,0103	"
T_4	—	—	—	—	—	—	0,9948	"
M_{1max}	0,0703	0,0800	0,0772	0,0779	0,0777	0,0778	0,0777	$q l^2$
M_{2max}	—	0,0250	0,0364	0,0332	0,0340	0,0338	0,0339	"
M_{3max}	—	—	—	0,0461	0,0433	0,0440	0,0438	"
M_{4max}	—	—	—	—	—	0,0405	0,0412	"
x_1	0,375	0,4000	0,3930	0,3947	0,3942	0,3944	0,3943	l
x_2	—	0,5000	0,5357	0,5264	0,5327	0,5281	0,5283	"
x_3	—	—	—	0,5000	0,4904	0,4930	0,4923	"
x_4	—	—	—	—	—	0,5000	0,5026	"
ξ_1	0,750	0,8000	0,7860	0,7894	0,7884	0,7887	0,7887	"
ξ_2 {	—	0,2760	0,2659	0,2680	0,2675	0,2680	0,2680	"
	—	0,7240	0,8055	0,7830	0,7899	0,7884	0,7890	"
ξ_3 {	—	—	—	0,1964	0,1960	0,1962	0,1960	"
	—	—	—	0,8036	0,7850	0,7897	0,7880	"
ξ_4 {	—	—	—	—	—	0,2153	0,2150	"
	—	—	—	—	—	0,7847	0,7900	"

W tablicy powyższej oznaczają:

$T_0, T_1 \dots$ odpory oddzielnych podpór,

$M_1, M_2 \dots$ momenty (odjemne) nad podporami,

$M_{1max}, M_{2max} \dots$ momenty największe w oddzielnych przęsłach,

$x_1, x_2 \dots$ odległości przekrojów o momentach $M_{1max} \dots$ od poprzedzającej podpory, t. j. leżącej na lewo od przekroju,

$\xi_1, \xi_2 \dots$ odległości punktów zwrotnych odkształconej od tychże podpór,

l — długość każdego przęsła,
 q — obciążenie na jednostkę długości belki.

Ponieważ w układach powyższych panuje zupełna symetria względem środka belki, więc tablicą objęto tylko dane aż do tego środka.

2. Mając belkę rozpiętości ogólnej $2l$ cm, o dwóch równych przęsłach l cm, spoczywającą na trzech równowysokich podporach, a obciążoną równomiernie na całej rozpiętości, możemy zwiększyć jej nośność (lub wytrzymałość) 1,457 razy, obniżając podporę środkową względem zewnętrznych o

$$f = 0,0131 \frac{q l^4}{EJ} \text{ cm.}$$

Nośność belki osiąga natenczas swej największości, gdyż moment nad podporą środkową równa się ilościowo momentom największym każdego z przęsł:

$$M_1 = M_{\text{max}} = 0,0858 q l^2; \quad T_0 = 0,4142 q l; \quad T_1 = 1,1716 q l.$$

Obliczenie belek wieloprzęsłowych ze zmiennem obciążeniem — p. Dział XV, Statyka budowlana.

E. Wytrzymałość na skręcanie.

Na rozpatrywany przekrój pręta przyzmatycznego działa para sił w płaszczyźnie prostopadłej do osi pręta.

Oznaczmy przez:

M_d — moment kręcącej pary sił w kgcm,

$G = 1; \beta = \frac{5}{13} E = 0,385 E$ — współczynnik sprężystości na przesuwaniu w kg/cm^2 (str. 330),

τ_{max} — największe cięcie (naprężenie przesuwające) w przekroju w kg/cm^2 ,

k_d — dozwolone kręcenie, t. j. naprężenie skręcające materiał pręta, w kg/cm^2 ,

l — długość pręta skręcanego w cm,







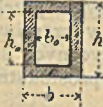
ϑ — względny kąt skręcenia (pod działaniem M_d) dwóch przekrojów pręta, znajdujących się we wzajemnej odległości 1-go cm, mierzony w cm łuku koła o promieniu 1 cm.


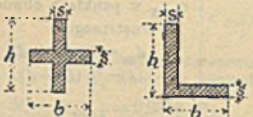
Punktem środkowym wszystkich tych łuków skręcenia, którego to punktu moment M_d wcale nie przesuwają, będzie środek ciężkości przekroju, a w danym przypadku zwie się on środkiem skręcania, albo punktem obojętnym przekroju.

a. Bezpieczny moment skręcający.

Przy kręceniu bezpiecznym k_d (w kg/cm^2) (natężeniu skręcającym) skręcający moment bezpieczny dla ważniejszych przekrojów podług C. v. Bach'a nie powinien przekraczać wartości poniższych:

[Wartości k_d podano na str. 337, szczególne dla żelaza lanego nadto na str. 338].

Nr.	Przekrój	Bezpieczny moment skręcający	Uwagi
1		$M_d = \frac{\pi}{16} d^3 k d.$	τ_{\max} w punktach obwodu. W odległości ρ od osi będzie: $\tau = (2 \rho : d) \tau_{\max}.$
2		$M_d = \frac{\pi}{16} \frac{D^4 - d^4}{D} k d.$ $M_d \approx 1.6 d_m^2 s k d.$	τ_{\max} w punktach obwodu zewnętrznego. $d_m = \frac{1}{2}(D + d);$ $s = \frac{1}{2}(D - d).$
3		$M_d = \frac{\pi}{16} b^2 h k d.$ $(h > b).$	Przekrój eliptyczny. τ_{\max} na końcach małej osi b . Na końcach wielkiej osi mamy zaś: $\tau = \frac{16}{\pi} \frac{M_d}{h^2 b}.$
4		$M_d = \frac{\pi}{16} \frac{b^3 h - b_0^3 h_0}{b} k d.$ $(h_0 : h = b_0 : b; h > b).$	Pierścień eliptyczny. τ_{\max} na końcach małej osi b .
5		$M_d = \frac{2}{9} b^3 h k d.$ $(h > b).$	τ_{\max} w pośrodku boków h . W pośrodku boków b mamy zaś: $\tau = \frac{9}{2 b h^2} M_d.$
6		$M_d = \frac{2}{9} h^3 k d.$	τ_{\max} w pośrodku boków.
7		$M_d = \frac{2}{9} \frac{b^3 h - b_0^3 h_0}{b} k d.$ $(h_0 : h = b_0 : b).$	τ_{\max} w pośrodku boków h .

Nr.	Przekroje	Bezpieczny moment skręcający	Uwagi
8		$M_d = \frac{2}{9} s^2 (h + 2b_0) k_d.$	Z warunkiem, aby dla przekroju Γ $s \geq 0,2 h$, a b_0 nie było znacznie większe od s .
9		$M_d = \frac{2}{9} s^2 (h + b - s) k_d.$	Dla przekroju L warunek: $s \geq 0,2 h$.

Mnożnik ilości k_d , w powyższych wzorach na M_d , zwie się **momentem wytrzymałości na skręcenie**, a oznaczamy go przez W_d . Dla przekrojów kolistych lub do koła zbliżonych (w sposób podobny jak przy gięciu) będzie:

$$W_d = \frac{J_p}{e},$$

jeżeli przez $J_p = J_x + J_y$ oznaczymy biegunowy moment bezwładności przekroju, a przez e odległość punktu najbardziej oddalonego od osi obojętnej (osi ciężkości)

Do przekrojów kanciastych zasada ta się nie stosuje.

b. Kąt skręcenia.

Względny kąt skręcenia, t. j. łuk koła o promieniu 1 cm, mierzący względne skręcenie dwóch, o 1 cm wzajemnie od siebie odległych przekrojów, określa się wzorem:

$$\vartheta = \zeta \frac{J_x + J_y}{4 J_x J_y} \frac{M_d}{G} = \zeta \frac{J_p}{4 J_x J_y} \frac{M_d}{G}.$$

Wartości współczynnika ζ podług Grashof'a są:

$\zeta = 1$ dla przekrojów kołowych i kolisto-pierścieniowych,






$\zeta = 1,2$ dla przekrojów kwadratowych i eliptycznych,

$\zeta = 1,2 - 1,5$ dla przekrojów podłużnych i prostokątnych.

Kąt skręcania φ dla całej długości pręta l (skręcenie wzajemne przekrojów końcowych) wynosi:

$$\varphi = l \vartheta.$$

Podług doświadczeń C. v. Bach'a ϑ dla ważniejszych przekrojów posiada wartości poniżej podane. Wartości te (w przeciwieństwie do Grashof'a) odpowiadają dla przekrojów eliptycznych współczynniki $\zeta = 1$, dla wszystkich zaś przekrojów prostokątnych $\zeta = 1,2$.

Nr.	Przekrój	Względny kąt skręcenia ϑ , dla danego: momentu skręcającego M_d w kg cm	największego cięcia (napręż. ściskającego) τ_{\max} w kg/cm ²
1		$\vartheta = \frac{M_d}{G J_p} = \frac{32}{\pi d^4} \frac{M_d}{G}$	$\vartheta = 2 \frac{\tau_{\max}}{G} \frac{1}{d}$
2		$\vartheta = \frac{M_d}{G J_p} = \frac{32}{\pi (D^4 - d^4)} \frac{M_d}{G}$	$\vartheta = 2 \frac{\tau_{\max}}{G} \frac{1}{D}$
3		$\vartheta = \frac{16}{\pi} \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} \frac{M_d}{G}$	$\vartheta = \frac{\tau_{\max}}{G} \frac{b^2 + h^2}{b h^2}$
4		$\vartheta = 3,6 \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} \frac{M_d}{G}$	$\vartheta = 0,8 \frac{\tau_{\max}}{G} \frac{b^2 + h^2}{b h^2}$
5		$\vartheta = 7,2 \frac{1}{h^4} \frac{M_d}{G}$	$\vartheta = 1,6 \frac{\tau_{\max}}{G} \frac{1}{h}$

F. Wytrzymałość złożona.

Stosować będziemy oznaczenia następujące:

l — długość pręta w cm,

F — przekrój poprzeczny pręta w cm²,

S — punkt ciężkości przekroju,

J_1 — największy moment bezwładności przekroju w cm⁴,

J_{11} — najmniejszy „ „ „ „

P — siła rozciągająca lub ściskająca pręt (siła w osi) w kg,

Q — siła tnąca pręt (siła poprzeczna) w kg,

M — moment gnący w kg cm,

E — spóliczynnik sprężystości w kg/cm² (str. 328),

m ($= \frac{10}{3}$) stosunek wydłużenia do zwięzienia jednostkowego

(str. 327).

Naprężenia normalne (prostopadłe).

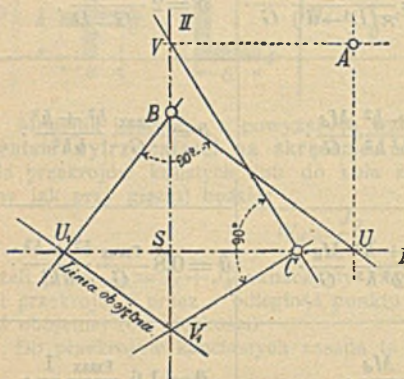
Ciężnienie (lub ciśnienie) i gięcie.

I. Materiał jest wytrzymały i na ciężnienie i na ciśnienie.

Moment gnący M i siłę P w osi pręta możemy złożyć w jedną równoległą i równowielką siłę P , działającą w punkcie A , t. nazw. **środku sił**, który leży na osi sił w przekroju, w oddaleniu $p = M: P$ od jego środka ciężkości, przyczem będzie $M = Pp$.

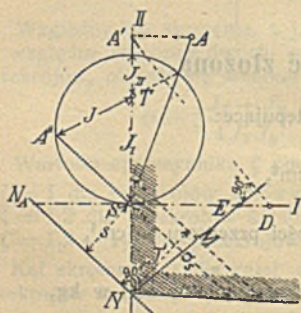
1. Wykreślenie linii obojętnej *) dla danego środka sił A . **)

Rys. 232.



1) **Podług Mohr'a**, (rys 232) z pomocą głównych promieni bezwładności a, b : Na głównych osiach przekroju odcinamy: na SI (przynależnej do J_1) $SC = b$, a na SII (przyn. do J_2) $SB = a$; kreślimy $AU \perp SI$, $AV \perp SII$, łączymy C z V , a B z U , poczem wyprowadzamy prostopadłe $BU_1 \perp BU$, oraz $CV_1 \perp CV$, których przecięcia się z osiami głównymi, t. j. punkty U_1 i V_1 , leżą na linii obojętnej, wyznaczając ją w zupełności.

Rys. 233.



2) **Podług Rob. Landa'a**, ***) posługując się kołem bezwładności (r. 233). Linia obojętna jest równoległą do osi SA'' , przechodzącej przez środek ciężkości i sprzężonej z osią sił SA , a leży ona w oddaleniu $s = J': I'p$ od SA'' . Najdogodniej określić położenie linii obojętnej jej przecięciem się N z osią główną. Koło bezwładności zataczamy w ten sposób, aby stykało się z jedną osią główną, np. z SI w S , a natenczas główny punkt bezwładności T' (p. str. 185) wpadnie na drugą oś główną SII .

*) Linie obojętne dla gięcia niezłożonego, nazywaliśmy osiami obojętnymi, bo przechodziły one przez środek przekroju.

**) Środek sił zewnętrznych jest zarazem środkiem naprężeń, na przekrój działających, gdyż muszą one równoważyć owe siły zewnętrzne.

***) R. Land: die Ermittlung der Spannungsverteilung it. d., Zeitschr. f. Bauwesen 1892, str. 552 i nast., w odbitce u Wilh. Ernst & Sohn, w Berlinie.

Na osi SI odcinamy, od S począwszy, stałe kresy $SE = J_1:n$ i $SD = J_2:n$, w podziałce pozostałego rysunku, przyczem dobieramy jako n dowolną, lecz podatnie oznaczoną wielkość trzeciego wymiaru (np. 100 cm³). Jeżeli poprowadzimy $AA' \parallel SI$ i $EN \perp DA'$, to punkt przecięcia N , prostej EN z osią główną SII , będzie jednym punktem linii obojętnej NN_A , która zatem, jako równoległa do SA'' , jest już w zupełności oznaczona. Sposób ten okaże się osobliwie celowym przy poniższem oznaczaniu naprężeń pod 2. lub 3., 1).

Sposoby postępowania, odwrotne względem wskazanych pod 1) i 2), dadzą nam dla danej linii obojętnej przynależny środek (A) sił.

2. Oznaczenie naprężeń. Naprężenie σ_s w środku ciężkości jest niezależne od położenia środka sił, a więc również niezależne od wielkości momentu $M = Pp$; zawsze będzie $\sigma_s = P:F$ (czyli równe średniemu naprężeniu całego przekroju), a znak jego będzie ten sam, co siły P (σ_s będzie więc ciśnieniem, gdy P jest siłą cisnącą i naodwrot).

Jeżeli (podobnie jak na str. 357) przez v oznaczymy odległość dowolnego punktu przekroju od wykreślonej uprzednio już linii obojętnej NN_A , a przez $J' = J$ kresę TA'' (rys. 233), to naprężenie w owym punkcie będzie:

$\sigma = \frac{M}{J'} v$. Wykreślenie rozkładu naprężeń na przekrój możemy uskutecznić w sposób podobny temu, jaki podano w rys. 212 (str. 357), jednakże punkt zerowy pola naprężeń musiałby leżeć obecnie nie na osi obojętnej, lecz na nowej linii obojętnej NN_A . Naprężenie skrajne (największe) można bądź to odmierzyć z rysunku, bądź też obliczyć z wzoru:

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{J'} e, \text{ jeżeli } e = v_{\max}.$$

3. Naprężenia skrajne (σ_{\max} i σ_{\min}), bez wykreślenia linii obojętnej, podług Rob. Land'a: σ_{\max} niechaj będzie większą, σ_{\min} zaś mniejszą z dwóch wartości mających się poniżej oznaczyć.

1) Z pomocą koła bezwładności. Kreślimy oś ciężkości SA'' , sprzężoną z osią sił SA , rys. 233 (w rys. 212 str. 357 byłoby SN , sprzężone z SK) i oznaczamy odmierzone z rysunku oddalenia obustronnych skrajnych punktów przekroju od tejże osi SA'' przez e' w stronę punktu A (t. j. w stronę siły P) a przez e'' w stronę przeciwną. Kresie e' nadajemy ten sam znak, jaki posiada siła P (a więc + dla siły ciągnącej, — dla cisnącej), kresie e'' zaś znak przeciwny. Żądane naprężenia oznaczamy z wzorów:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \sigma_s + \sigma' = \frac{P}{F} + \frac{M}{J'} e' \text{ i} \\ \sigma_s + \sigma'' = \frac{P}{F} + \frac{M}{J'} e'' \end{array} \right.$$

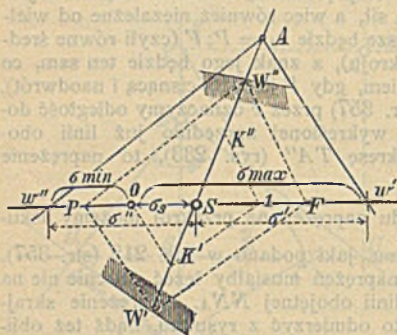
2) Za pomocą uogólnionego pola wytrzymałości (uogólnione pole H'' p. str. 358) i wzorów:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \sigma_s + \sigma' = \frac{P}{F} + \frac{M}{W'} \quad i \\ \sigma_s + \sigma'' = \frac{P}{F} + \frac{M}{W''} \end{array} \right.$$

w których W'' , wzgl. W' , oznacza (rys. 234) promień wodzący kraju pola W' , leżący na osi SA , względnie na jej przedłużeniu. W' otrzymuje ten sam znak, co siła P , W'' znak przeciwny. ($M = Pp$).

Wykreślenie. Dana oś sił SA przecina kraj pola W' w punktach W' i W'' ; na dowolnej osi ciężkości odcinamy: $SP =$ siłę P i w tę

Rys. 234.



samą stronę $SO = \sigma_s =$ średniemu naprężeniu całego przekroju = naprężeniu w środku ciężkości S . Równoległe do PW' i PW'' , przełożone przez A , odcinają na osi SP kresy: $Sw' = \sigma'$ (posiadającą ten sam znak, co P i σ_s), oraz $Sw'' = \sigma''$ (o znaku przeciwnym). Otrzymujemy w ten sposób dwie kresy: Ow' i Ow'' , z których większa przedstawia nam σ_{\max} , mniejsza zaś σ_{\min} , rozumiesz w podziałce, jaką zastosowaliśmy do σ_s , a która wynika z podziałki, obranej dla P i W' , oraz

z podziałki samego rysunku podług wzoru: $\sigma' = \frac{Pp}{W'}$, w który zamiast wielkości podstawiamy ich jednostki podziałkowe (p. str. 357).

W przekrojach **symetrycznych** będzie zawsze:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{F} + \frac{M}{W'} \quad i \quad \sigma_{\min} = \frac{P}{F} + \frac{M}{W''}.$$

3) Najprostsze wzory na naprężenia skrajne otrzymamy, podług W. Ritter'a, jeżeli, nakreśliwszy rdzeń przekroju (p. pod 5., str. 403), i oznaczywszy przecięcia się promieni SW' i SW'' z obwodem rdzenia (t. zw. **punkty rdzenne** na tych promieniach leżące) przez K' i K'' , wytworzymy momenty: $M_{k'} = P \cdot AK'$ i $M_{k''} = P \cdot AK''$, a mianowicie:

$$\sigma_{\max} = M_{k'} : W', \quad \text{względnie} = M_{k''} : W''.$$

We wzorze tym $W' = SW'$, a $W'' = SW''$, t. zn. są one równe promieniom wodzącym kraju pola W' , leżącym w osi sił.

W przekrojach **symetrycznych** mamy zawsze:

$$\sigma_{\max} = M_{k'} : W' \quad i \quad \sigma_{\min} = M_{k''} : W''.$$

Wykreślenie punktów rdzennych K' i K'' , rys. 234. Na dowolnej osi ciężkości odcinamy: $SE = F =$ polu przekroju i $S1 =$ liczbie 1. Kreśląc dalej $1K' \parallel F'W'$ i $1K'' \parallel F'W''$, odcinamy na osi sił SA żą-

dane punkty rdzenne. Podobnie też jest $OK' \parallel PW'$ i $OK'' \parallel PW''$, gdyż $\sigma : 1 = P : F'$. Podziałki dla wielkości W' , F' i dla liczby 1, o ile $SK' = r'$ i $SK'' = r''$ mają wypaść w podziałce rysunku, powinny zadość czynić warunkowi: $W' : F' = r' : 1$, przyczem w równanie to podstawiamy zamiast wielkości ich jednostki podziałkowe.

4. Związki między środkiem sił, czyli środkiem naprężeń, a linią obojętną. Środek naprężeń i linia obojętna są utworami nawzajem skojarzonymi przez następujące związki: Środek naprężeń leży zawsze na osi sprzężonej z kierunkiem linii obojętnej. Gdy środek naprężeń znajduje się w środku ciężkości, linia obojętna leży w nieskończoności i naodwrot, gdy linia obojętna, przechodząc przez środek ciężkości, staje się osią obojętną, środek naprężeń odsuwa się w nieskończoność. Gdy środek naprężeń zbliża się ku środkowi ciężkości, linia obojętna oddala się od środka ciężkości i naodwrot. Gdy środek naprężeń posuwa się po dowolnej prostej, linia obojętna obraca się około pewnego punktu, który jest znów środkiem naprężeń, skojarzonym w ten sam sposób z ową prostą, jako linią obojętną; i naodwrot, gdy linia obojętna obraca się około pewnego punktu, skojarzony z nią środek naprężeń przebiega po prostej, będącej linią obojętną dla owego punktu. Gdy środek naprężeń przebiega dowolną krzywą, skojarzona z nią linia obojętna obwija inną krzywą, skojarzoną w sposób odwracalny z pierwszą, t. zn., że, gdy środek naprężeń poruszać się będzie po drugiej krzywej, linia obojętna obwijać będzie pierwszą krzywą. Kraj dowolnego przekroju, t. j. jego obwód, którego części wklęsłe zastąpiono prostymi stycznymi, i obwód jego rdzenia są dwiema krzywymi w ten sam sposób skojarzonymi. Każda prosta kraju przekroju jest zatem skojarzona z punktem (wierzchołkiem) rdzenia, każdy wierzchołek kraju przekroju jest skojarzony z prostą obwodu rdzenia, każdej krzywej kraju przekroju odpowiada skojarzona z nią krzywa rdzenia i naodwrot. Gdy środek naprężeń znajduje się w obrębie rdzenia, linia obojętna leży poza przekrojem, nie przecinając go, i nawzajem, a natenczas cały przekrój podlega naprężeniom jednogatunkowym; gdy środek naprężeń wyjdzie poza rdzeń, pozostając jednakże w obrębie kraju przekroju, linia obojętna pozostaje również poza rdzeniem, t. j. nie nacina go, przecinając jednak przekrój, który natenczas podlega i ciśnieniom i ciągnięciom. Dopiero gdy środek naprężeń wysunie się poza kraj przekroju, linia obojętna przecina już nie tylko sam przekrój, lecz i rdzeń jego itp. itp. *)

5. Związki między rdzeniem, a uogólnionem polem wytrzymałości (polem W' , p. str. 358). Obwód rdzenia jest biegunowo podobny obwodowi uogólnionego pola W' względem środka ciężkości S , jako bieguną, ze stosunkiem podobieństwa $1 : I'$, t. zn.: każdemu promieniowi wodzącemu W' obwodu pola W' odpowiada równoskierowany promień wodzący r' obwodu rdzenia; promień rdzenia $r' = W' : I'$. Ze znanego pola W' łatwo zatem wykreślić rdzeń, porówn. 3. 3).

*) Dalsze szczegóły p. K. Obrębowicz: Oznaczenia naprężeń wywołanych działaniem sił prostopadłych do przekroju. Przegl. Techniczny 1884, zeszyt III, IV, V, VI, VII, VIII, IX i X.

Uwaga: Ponieważ uogólniono pole W' możemy nakreślić w dowolnie wielkim wymiarze, można więc z jego pomocą dokładniej i łatwiej rozwiązywać przeróżne zagadnienia, dotyczące gięcia złożonego z ciśnieniem lub ciągnięciem, aniżeli za pomocą rdzenia, którego wymiary są względnie małe. Z tej też przyczyny posiłkowanie się polem W' zaleca się bardziej.

6. Rdzeń i najmniejszy promień rdzenia r_{\min} kilku przekrojów.

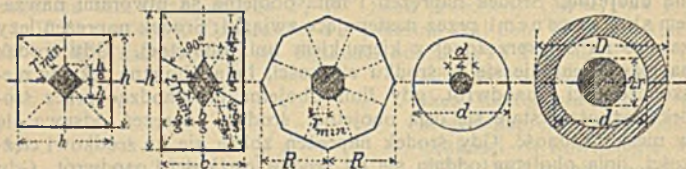
Rys. 235.

Rys. 236.

Rys. 237.

Rys. 238.

Rys. 239.



1. Kwadrat (rys. 235). $r_{\min} = \frac{h}{6} \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,1179 h.$

Przekątne rdzenia $= \frac{1}{3} h.$

2. Prostokąt (rys. 236). $r_{\min} = \frac{bh}{6\sqrt{b^2 + h^2}}.$

Przekątne rdzenia $= \frac{1}{3} h$ i $\frac{1}{3} b.$

3. Ośmiokąt (rys. 237). $r_{\min} = 0,2256 R.$

4. Koło (rys. 238). $r = \frac{d}{8} = \text{stałej}.$

5. Kwadrat wydrążony (bok zewnętrzny $= H$, wewnętrzny $= h$). Rdzeń jest kwadratem, podobnie położonym, jak w rys. 235.

$$r_{\min} = \frac{H}{6} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[1 + \left(\frac{h}{H} \right)^2 \right] = 0,1179 H \left[1 + \left(\frac{h}{H} \right)^2 \right].$$

6. Ośmiokąt wydrążony. [Promienie obydwu kół opisanych $= R_a$ i R_i , grubość ścianek $= 0,9239 (R_a - R_i)$].

Rdzeń jest ośmiokątem w położeniu podobnym, jak na rys. 237.

$$r_{\min} = 0,2256 R_a \left[1 + \left(\frac{R_i}{R_a} \right)^2 \right].$$

7. Pierścień kołowy (rys. 239). $r = \frac{D}{8} \left[1 + \left(\frac{d}{D} \right)^2 \right] = \text{stałej}.$

7. Wzajemność naprężeń i sił, podług Rob. Land'a. Siła normalna P , działająca na przekrój w dowolnym punkcie A , powoduje w dowolnym punkcie B przekroju takie same naprężenie, jakieby powstało w punkcie A pod wpływem tejże siły P , działającej jednak w punkcie B . (Z tej wzajemności wynikają związki, określone powyżej pod 4.)

8. Powierzchnia oznaczna naprężeń. Jeżeli, dla dowolnego stanu naprężenia przekroju, w każdym jego punkcie odetniemy panujące w nim naprężenie σ , z uwzględnieniem znaku, jako kresy prostopadłe do przekroju, to krańce tych kres określą **powierzchnię bryły naprężeń**, którą możemy rysunkowo przedstawiać rzutami bocznymi, (p. rys. 240).

Jeżeli zaś, naodwrot, pomyślimy sobie, że siła jednostkowa $P=1 t$ kolejno działa w każdym punkcie przekroju i że w każdym z nich na prostopadłej do przekroju odcinamy naprężenie σ_A , jakie siła ta P w danej chwili powoduje w pewnym stałym punkcie A przekroju, to otrzymamy **powierzchnię oznaczną** dla σ_A , którą w skróceniu oznaczamy jako powierzchnię σ_A . Z 7. wynika jednakże, iż powierzchnia oznaczna naprężeń σ_A równa się powierzchni bryły naprężeń dla stałej siły $P=1 t$ w A . Wykreślić możemy tę powierzchnię w sposób podany w rys. 233, str. 400, zakładając $M=1 t \cdot SA$.

Skutek momentu M tem $= (M \text{ cm}) \cdot (1 t)$, przedstawia się zatem jako skutek siły $P=1 t$, działającej ramieniem M cm. Znając więc powierzchnię σ_A , rys. 240, i chcąc oznaczyć naprężenie, powstające w A pod wpływem momentu M tem, odcinamy z punktu zerowego O , powierzchni σ_A , kresę $OR = M$ cm, równoległe do działania momentu, a przynależna do R rzędna $\sigma_{A(M)}$ powierzchni σ_A będzie żądanym naprężeniem w A . Jeżeli działa

Rys. 240.



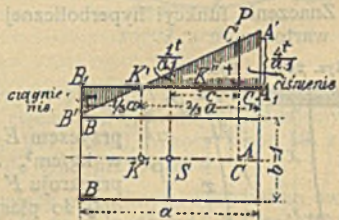
na przekrój tylko moment M , czyli para sił, to możemy ją dowolnie przesuwac równoległe do niej samej, bez zmiany skutku; podobnie też, jeżeli na przekrój działa tylko moment M , możemy powierzchnię σ_A przesuwac dowolnie, równoległe do niej samej, np. tak, aby punkt jej zerowy O wpadł na srodek ciężkości S , poczem będzie ona w położeniu podobnym, jak przedstawiona w rys. 212, str. 357.

Powierzchnią oznaczną naprężenia skrajnego σ_A dla **prostokątów** (długości a i szerokości $b=1$ m) można dogodnie posilkować się przy obliczeniach przekrojów murów i sklepień, rys. 241.

Jednostką siły niechaj będzie 1 t. Ograniczająca prosta $A'K'B'$ powierzchni σ_A , liczącej się od podstawy A_1B_1 , przechodzi przez skojarzony z krajem A przekroju punkt rdzenny K' ($K'A_1 = \frac{2}{3} a$) i odcina w S rzędną $\sigma_s = 1 t : (a \cdot 1)$, a w punkcie skrajnym A rzędną $4 t : (a \cdot 1)$, które wykreślamy według podziałki na σ .

Jeżeli cały przekrój ma podlegac wyłącznie tylko ciśnieniu, to siła cisnąca P musi działać w środkowej trzeciej części $K'K''$ długości a przekroju.

Rys. 241.



Naprężenia skrajne obliczamy z wzorów:

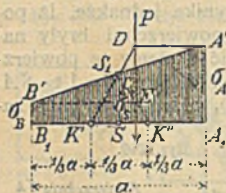
$$\sigma_A = \frac{6 M_{K'}}{a^2} \quad \text{i} \quad \sigma_B = \frac{6 M_{K''}}{a^2},$$

w których to wzorach $M_{K'}$ i $M_{K''}$ są momentami siły P względem punktów rdzennych K' i K'' . Jeżeli siła P działa w C (na AS rys. 241), to, oznaczając $SC = c$, otrzymamy:

$$\frac{\sigma_A}{\sigma_B} = \sigma \frac{\max}{\min} = \frac{P}{a^2} (a \pm 6c).$$

A że dla przekroju prostokątnego $a \cdot b$, gdy $b = 1$, mamy:

Rys. 242.



$$\frac{\sigma_A}{\sigma_S} = \left(\frac{a}{6} + c \right) : \frac{a}{6},$$

więc otrzymujemy następujący prosty sposób wykreślenia naprężeń, rys. 242. W środku ciężkości S kreślimy $SS_1 = \sigma_s = P : a$ prostopadle do A_1B_1 , dalej $K'S_1$ aż do przecięcia się D z siłą P , następnie DA' równoległe do B_1A_1 , a rzędne punktów prostej $A'S_1B'$ wyznaczają nam naprężenia dowolnego punktu przekroju. (Pole naprężeń $A_1B_1B'S_1A'$ zakreślano w rysunku). A_1A' i B_1B' są naprężeniami skrajnymi (w krawędziach).

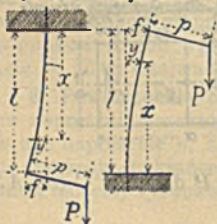
B' możemy też wykreślić bezpośrednio: Prosta $K''S_1$ przecina siłę P w E , a EB' jest równoległa do A_1B_1 . Zasada wykreśleń powyższych stosuje się i wtenczas, gdy siła P działa na przekrój poza obrębem rdzenia, o ile tylko pozostaje w osi głównej prostokąta.

9. Dla długich prętów, które ulegają przegięciu bocznemu pod wpływem siły, działającej w kierunku osi, lecz mimośrodkowo, mamy wzory:

Wzór na	Rozciąganie mimośrodkowe (rys. 243)	Ściskanie mimośrodkowe (rys. 244)
Równanie odkształconej.	$y = \frac{P}{\cosh \omega l} (\cosh \omega x - 1).$	$y = -\frac{P}{\cos \omega l} (1 - \cos \omega x).$
Największe przegięcie (boczne).	$f = p \left(1 - \frac{1}{\cosh \omega l} \right).$	$f = p \left(\frac{1}{\cos \omega l} - 1 \right).$
Moment giący.	$M_x = Pp \frac{\cosh \omega x}{\cosh \omega l}.$ Przy $x = l$ będzie: $M_{\max} = Pp.$	$M_x = Pp \frac{\cos \omega x}{\cos \omega l}.$ Przy $x = 0$ będzie: $M_{\max} = \frac{Pp}{\cos \omega l}.$
Największe naprężenia.	$\sigma \frac{\max}{\min} = \sigma_s \left(1 \pm \frac{pF}{W} \right).$	$\sigma \frac{\max}{\min} = \sigma_s \left(1 \mp \frac{pF}{W \cos \omega l} \right).$

Znaczenie funkcji hyperbolicznej \cosh — patrz str. 67. Ilość ω zaś ma wartość:

Rys. 243. Rys. 244.



$$\omega = \sqrt{\frac{P}{EJ}},$$

przyczem E oznacza spólczynnik sprężystości w kg/cm^2 , J (w cm^4) moment bezwładności przekroju F względem osi ciężkości, prostopadłej do płaszczyzny przeginięcia. W oznacza w cm^3 moment wytrzymałości przynależny do J .

Wzory przybliżone otrzymamy, podstawiając w powyżej podane wzory wartości przybliżone:

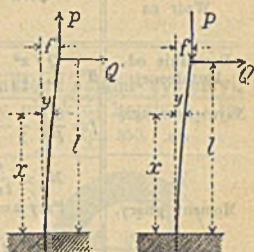
$$\cosh \omega l = 1 + \frac{P l^2}{2 E J}$$

$$\text{i } \cos \omega l = 1 - \frac{P l^2}{2 E J}$$

10. Zamiast siły P , działającej mimośrodowo, (por. 9.), niechaj pręt podlega działaniu dwóch sił: siły P w kierunku osi, oraz siły poprzecznej Q , przytkniętej w końcu pręta (rys. 245 i 246). Znaczenie funkcji hyperbolicznych \sinh , \cosh i \tgh p. str. 67, wartość ω zaś ta sama, jak pod 9.

Rys. 245.

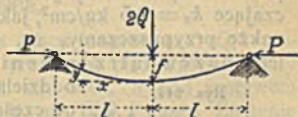
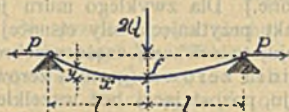
Rys. 246.



Wzór na	Siła ciągnąca P : (rys. 245)	Siła cisnąca P : (rys. 246)
Równanie odkształconej.	$\frac{Q}{P} \left(x - \frac{1}{\omega} \frac{\sinh \omega l - \sinh \omega(l-x)}{\cosh \omega l} \right)$	$\frac{Q}{P} \left(-x + \frac{1}{\omega} \frac{\sin \omega l - \sin \omega(l-x)}{\cos \omega l} \right)$
Największe przebiegnięcie (boczne).	$f = \frac{Q}{P} \left(l - \frac{\tgh \omega l}{\omega} \right)$	$f = \frac{Q}{P} \left(\frac{\tg \omega l}{\omega} - l \right)$
Moment gnący.	$M_x = \frac{Q}{\omega} \frac{\sinh \omega(l-x)}{\cosh \omega l}$ Przy $x=0$ będzie: $M_{\max} = \frac{Q}{\omega} \tgh \omega l$	$M_x = \frac{Q}{\omega} \frac{\sin \omega(l-x)}{\cos \omega l}$ Przy $x=0$ będzie: $M_{\max} = \frac{Q}{\omega} \tg \omega l$
Największe naprężenia.	$\sigma_{\max/\min} = \frac{P}{F} \pm \frac{M_{\max}}{W}$	$\sigma_{\max/\min} = -\frac{P}{F} \pm \frac{M_{\max}}{W}$

Rys. 247.

Rys. 248.



11. Pręt długości $2l$, spoczywający przegibnymi końcami na dwóch podporach, obciążamy pośrodku ciężarem $2Q$, a nadto poddajemy go działaniu siły osiowej $\pm P$ (rys. 247 i 248). Wzory z pod 10. znajdują bezpośrednie zastosowanie do tych przypadków.

12. Pręt długości $2l$, spoczywający przegibnymi końcami na dwóch podporach, obciążamy równomiernie na całą długość $2l$ rozłożonym obciążeniem $2Q$, a nadto poddajemy go działaniu siły osiowej $\pm P$. Oznaczenia, jak w rys. 247 i 248.

Wzór na	Siła ciągnąca P : (rys. 247)	Siła cisnąca P : (rys. 248)
Równanie odkształconej.	$y = \frac{Q}{P} \left(\frac{x^2}{2l} - \frac{1}{l\omega^2} \frac{\cosh \omega x - 1}{\cosh l\omega} \right)$	$y = \frac{Q}{P} \left(-\frac{x^2}{2l} + \frac{1}{l\omega^2} \frac{1 - \cos \omega x}{\cos \omega l} \right)$
Największe ugięcie.	$f = \frac{Q}{P} \left[\frac{l}{2} - \frac{1}{l\omega^2} \left(1 - \frac{1}{\cosh \omega l} \right) \right]$	$f = \frac{Q}{P} \left[-\frac{l}{2} + \frac{1}{l\omega^2} \left(\frac{1}{\cos \omega l} - 1 \right) \right]$
Moment gnący.	$M_x = \frac{Q}{l\omega^2} \left(1 - \frac{\cosh \omega x}{\cosh \omega l} \right)$ Przy $x=0$ będzie: $M_{\max} = \frac{Q}{l\omega^2} \left(1 - \frac{1}{\cosh \omega l} \right)$	$M_x = \frac{Q}{l\omega^2} \left(\frac{\cos \omega x}{\cos \omega l} - 1 \right)$ Przy $x=0$ będzie: $M_{\max} = \frac{Q}{l\omega^2} \left(\frac{1}{\cos \omega l} - 1 \right)$
Największe naprężenie.	$\sigma_{\min}^{\max} = \frac{P}{F} \pm \frac{M_{\max}}{W}$	$\sigma_{\min}^{\max} = -\frac{P}{F} \pm \frac{M_{\max}}{W}$

U w a g a. Wartość $M_{\max} = \frac{Q}{l\omega^2} \left(1 - \frac{1}{\cosh \omega l} \right)$ dla dłuższych prętów zbliża się szybko do granicy wartości $M_0 = \frac{Q}{l\omega^2}$, odpowiadającej największemu gięciu $\sigma_{\max} = \frac{M_0}{W} = \frac{Q}{l} \frac{E}{P} \frac{J}{W} = q \frac{E}{P} e$, przyczem q oznacza obciążenie na 1 cm biegnący pręt, a e odległość najbardziej rozciąganych włókien od linii obojętnej przekroju.

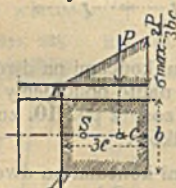
Granica wartości σ_{\max} jest naprężeniem, któremu podlegały pręt, nie posiadający wcale sztywności i zwieszający się w postaci parabolicznej linii łańcuchowej. To naprężenie graniczne jest niezależnem od rozpiętości podpór $2l$.)

II. Materiał wytrzymały wyłącznie tylko na ciśnienie (a nie na ciągnięcie).

To niekorzystne przypuszczenie robimy ze względów bezpieczeństwa przy zwykłym murze, gdyż można się obawiać, że pod działaniem ciągnięcia spoiny muru będą się raczej rozwierały, a nie będą zdolne przenosić ciągnięcia za pośrednictwem zaprawy. [Przy najlepszym murze z klinkieru na zaprawie cementowej (z $k=14$ do 20 kg/cm² p. str. 339) możnaby jeszcze niekiedy uznać ciągnięcie nieprzekraczające $k_z=2,5$ kg/cm², jako dozwolone.] Dla zwykłego muru jednakże przypuszczamy, że, jeżeli punkt przytknięcia siły cisnącej P leży na zewnątrz rdzenia przekroju, to ścisnącą część przekroju odziela prosta linia zerowa (granica zerowa) od części przekroju, pozostającej bez wszelkiego naprężenia wskutek rozwarcia się spoiny. Dalej przypuszczamy, że naprężenia w linii zerowej są zerem, a ciśnienia w dowolnym punkcie części ścisanej przekroju są prosto ustosunkowane do odległości punktu od tejże linii zerowej.

Prostokąt rys. 249. Jeżeli P leży na osi głównej w odległości e od najbliższej krawędzi, to

Rys. 249.



*) Dalsze szczegóły p. M. Tolle, Die steife Kettenlinie, Zeitschr. d. V. d. Ing. 1897, str. 855 i nast.

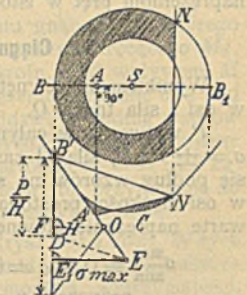
ciśnienie rozkłada się na szerokości $3c$ (linia zerowa $= NN$), a w krawędzi mamy:

$$\sigma_{\max} = \frac{2P}{3bc}$$

Przekrój symetryczny z dwiema prostopadłymi osiami symetrii, podług Mohr'a, *) rys. 250 (np. pierścieniowy przekrój kolumny). Je-

Rys. 250.

żeli P działa w punkcie A , na osi symetrii BSB_1 , to wykreślamy wielobok (krzywą) sznurowy $B'CN$, przynależny do pola całkowitego przekroju P , jako pola obciążającego, obierając przytem kierunek sił prostopadły do BB_1 i dowolną odległość biegunową H . Kreślimy dalej $AA' \perp BB_1$ aż do przecięcia się A' ze styczną końcową BA' wieloboku (krzywej) sznurowego, oraz przekładamy przez A' prostą $A'N$ w taki sposób, aby pole trójkąta $B'NA'$ równało się polu $B'CNB'$ (między wielobokiem sznurowym a prostą $B'N$), czyli, aby dwa zakreskowane w rysunku pola były sobie równe. Wtedy prosta, przechodząca przez N , a prostopadła do BB_1 , będzie szukaną linią zerową.



Odcinając na BB' kresę: $B'D = P:H = \text{Siła} : \text{pole}$ (H w podziałce, stosowanej dla pola F przy wykreślaniu wieloboku sił) i kreśląc $DE \parallel B'N$, oraz $EE_1 \perp B'D$, otrzymamy: naprężenie skrajne w B , mierząc EE_1 podziałką, użytą do wielkości $P:H$, a więc $\sigma_{\max} = EE_1$.

Obliczenie σ_{\max} dla kolumn fabrycznych z naprężenia średniego $\sigma = P:F$ (z pomocą tablicy) p. Dział VII, rozdział IV, A. d.

b. Naprężenia tnące (cięcia).

Cięcie i kręcenie.

Na przekrój pręta niechaj działa siła tnąca (poprzeczna) Q i moment kręjący Ma . W dowolnej części przekroju pod wpływem siły Q powstaje cięcie τ_s (do obliczenia podł. str. 350), a pod wpływem momentu Ma cięcie τ_d (do obliczenia podł. str. 396 i nast.) Złożenie cięć τ_s i τ_d (podług równoległoboku sił) doprowadza nas do cięcia złożonego τ , naprężającego istotnie daną cząstkę przekroju. W żadnym punkcie nie powinno być $\tau > kd$.

c. Naprężenia normalne i cięcia.

Jeżeli na cząstkę przekroju działają równocześnie naprężenie normalne σ i cięcie τ , to składamy obydwa w jedno naprężenie równo-

*) Obliczenia innych przekrojów, zapomocą t. zw. linii wyznacznych przekroju p. K. Obrębowicz: Oznaczenie naprężeń wywołanych działaniem sił prostopadłych do przekroju. Przegl. Techn. 1884, zeszyty III, IV, V, VI, VII, VIII, IX i X.

warte σ_1 podł. str. 355, a mianowicie przy wartości $m = 10/3$ będzie:

$$\sigma_1 = 0,35 \sigma \pm 0,65 \sqrt{\sigma^2 + 4 (\alpha_0 \tau)^2};$$

w żadnym punkcie nie powinno być $\sigma_1 > k_n$.

Oznaczenia powyżej stosowane znaczą: $\alpha_0 = k_n : 1,3 k_s$ stosunek wyężania materiału, przyczem przez k_n rozumiemy dowolne, bezpieczne naprężenie normalne, a więc: k_s (ciągnięcie), k (ciśnienie), lub k_b (gięcie), przez k_s natomiast albo istotne bezpieczne k_s (cięcie proste) albo też k_d (kręcenie). Baczyc naturalnie trzeba jakiego rodzaju naprężeniom pręt w istocie podlega.

1. Ciągnięcie (lub ciśnienie) i cięcie.

Wynikiem sił zewnętrznych dla przekroju P niechaj będą: siła P w osi i siła tnąca Q .

P wytwarza w całym przekroju jednakowe naprężenie normalne $\sigma = \pm P : P$, siła Q zaś cięcia, z których największe τ_{\max} wylicza się podług wzorów na str. 350 i 351; (τ_{\max} zachodzi ponajczęściej w osi ciężkości, prostopadłej do kierunku siły Q). Największe, równowarte naprężenie główne w przekroju będzie:

$$\sigma_{\frac{\max}{\min}} = 0,35 \sigma \pm 0,65 \sqrt{\sigma^2 + 4 \sigma_0^2 \tau_{\max}^2} \leq k_s, \text{ wzgl. } k.$$

przyczem $\alpha_0 = k_s : 1,3 k_s$, lub $\alpha_0 = k : 1,3 k_s$.

2. Gięcie i cięcie.

Przekrój niechaj podlega łącznemu działaniu momentu gnącego M , powodującego naprężenia normalne σ , oraz siły tnącej Q , leżącej w płaszczyźnie momentu M i powodującej cięcia τ .

Należy stosować podane powyżej pod c równanie zasadnicze, z wartością $\alpha_0 = k_b : 1,3 k_s$, a dla σ i τ dobrać te przynależne do siebie wartości, dla których równowarte naprężenie główne stanie się największością.

Dla belki jednym końcem osadzonej sposobem 1) str. 372, o długości l , jeżeli $\alpha_0 = 1$, to, podług C. v. Bach'a, starczy w obliczeniu uwzględnić:

1) przy przekroju kołowym o średnicy d :

$$\begin{array}{ll} \text{tylko gięcie, gdy} & \dots \dots \dots l \geq 0,25 d, \\ \text{tylko cięcie, gdy} & \dots \dots \dots l < 0,25 d; \end{array}$$

2) przy przekroju prostokątnym, o wysokości h (równoległej do Q) zastępujemy powyższą wartość $0,25 d$ przez $0,325 h$.

Ugięcie f pręta, obciążonego pośrodku ciężarem P (sposób 2, str. 372) z uwzględnieniem wpływu siły tnącej będzie:

dla przekroju kołowego:

$$f = \frac{P}{E} \frac{l}{\pi d^3} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{l}{d} \right)^3 + 0,77 \right],$$

dla przekroju prostokątnego:

$$f = \frac{P}{E} \frac{l}{bh^3} \left[0,25 \left(\frac{l}{h} \right)^3 + 0,78 \right].$$

(Określenie E z doświadczeń nad przeginaniami).

*) Dla przekroju I p. Rob. Land, Wpływ sił tnących i t. d. Zeitsch. f. Bauwesen 1894, str. 611 i nast.

3. Ciągnięcie (lub ciśnienie) i kręcenie.

Postępujemy tak, jak wskazano pod 1., zastępując jednakże siłę Q i cięcie proste τ_s momentem kręcącym M_d i powstającym pod jego wpływem kręceniem τ_d . Bezpieczne cięcia k_s zastępujemy takimiż kręczeniami k_d .

4. Gięcie i kręcenie. *)

Przekrój niechaj podlega działaniu momentu gnącego M , którego płaszczyzna stoi prostopadle na przekroju, i momentu kręcącego M_d , którego płaszczyzna jest równoległą do przekroju. Pod wpływem M powstaje w dowolnej części przekroju naprężenie normalne σ , a pod wpływem M_d kręcenie τ , które oznaczamy oddzielnie podług wzorów i sposobów na właściwym miejscu już podanych, poczem stosujemy wzór zasadniczy, podany pod c (str. 410) z wartością $\alpha_0 = k_b : 1,3 k_d$, łącząc w jedno równowarte naprężenie główne σ_1 te, przynależne do siebie wartości σ i τ , których wynik σ_1 byłby największością.

1) **Przekrój kołowy i pierścień kołowy** (rys. 251 i 252). W tych przekrojach punkty mające σ_{\max} mają zarazem i τ_{\max} , co upraszcza obliczenie. Oznaczmy przez W niezbędny moment wytrzymałości, a więc (p. str. 364, wzgl. 365).

$$W = \frac{\pi d^3}{32}, \text{ wzgl. } W = \frac{\pi D^3}{32} \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right], \quad \text{Rys. 251.} \quad \text{Rys. 252.}$$

a obliczywszy:

$$M_i = 0,35 M + 0,65 \sqrt{M^2 + (\alpha_0 M_d)^2},$$

$$\text{oznaczymy:} \quad W = \frac{M_i}{k_b}.$$



2) **Przekrój eliptyczny** (rys. 253). Moment gnący M rozkładamy na M_1 , obracający około osi 1 i M_2 około osi 2.

Dokładne wyliczenie największego naprężenia głównego jest możliwe. **) Dla określenia przekroju wystarcza obliczenie wielkości h i b z poniższych dwóch równań:

$$\frac{\pi}{32} b h^2 k_b \geq M_i' = 0,35 M_1 + 0,65 \sqrt{M_1^2 + (\alpha_0 M_d)^2},$$

$$\frac{\pi}{32} b^2 h k_b \geq M_i'' = 0,35 M_2 + 0,65 \sqrt{M_2^2 + (\alpha_0 M_d)^2},$$

w których wartość: $\alpha_0 = k_b : 1,3 k_d$.

Rys. 253.



Największe naprężenia zachodzą równocześnie w 4-ech punktach obwodu, leżących nie w końcach osi głównych 1 lub 2, lecz między nimi.

*) Dla przekroju I p. E. Haeseler, Centralbl. d. Bauverw. 1895, str. 233 i 234.

**) C. v. Bach—Elasticität und Festigkeit, 3 wyd. Berlin 1898, J. Springer.

3) **Przekrój prostokątny** (rys. 254). M_1 i M_2 mają to samo znaczenie, co i poprzednio pod 2), mamy zatem:

Rys. 254.

$$\frac{1}{6} b h^2 k_b \geq M_1' = 0,35 M_1 + 0,65 \sqrt{M_1^2 + (\frac{3}{2} \alpha_0 M d)^2},$$

$$\frac{1}{6} b^2 h k_b \geq M_1'' = 0,35 M_2 + 0,65 \sqrt{M_2^2 + (\frac{3}{2} \alpha_0 M d)^2}.$$

Należy obliczyć i sprawdzić, czy

$$\frac{M_1}{\frac{1}{6} b h^2} + \frac{M_2}{\frac{1}{6} b^2 h} \leq k_b \quad (\text{por str. 356}).$$



III. WYTRZYMAŁOŚĆ SPRĘŻYN.

Dane ogólne.

Oznaczamy przez:

P —obciążenie (nośność) bezpieczne sprężyny w kg,

f —ugięcie, odpowiadające obciążeniu P , lub też bezpiecznemu naprężeniu k_b albo k_d , w cm,

l —długość sprężyny w cm,

n —ilość warstw albo zwojów,

V —objętość sprężyny w cm^3 ,

k_b —bezpieczne gięcie (naprężenie) w kg/cm^2 ,

k_d —bezpieczne kręcenie (naprężenie) w kg/cm^2 ,

Wielkość E i G (p. str. 328 i 330), a pozostałe oznaczenia podano na rysunkach w cm.

Praca mechaniczna w kgecm , jaką sprężyna przejmuje, uginając się od 0 do f , (t. zw. „praca sprężynowania“) wynosi:

$$A = \frac{P f}{2} = \frac{1}{c} \frac{k_b^2}{E} V.$$

Przypuszczamy, że E jest tu wielkością stałą, i że siła P w miarę uginania sprężyny, wzrastała ciągle od 0 do P . Spółczynnik stały c zależy jedynie od kształtu sprężyny, a wyraża on t. zw. stosunek objętościowy (t. j. stosunek użytego materiału) sprężyn z jednakowego materiału, lecz rozmaitego kształtu, które, przejmując równe prace mechaniczne, podlegają też równym naprężeniom. Sprężyny zatem równego kształtu i z jednakowego materiału przy równym naprężeniu i równej pracy mechanicznej mają też jedną i tę samą wagę.

Okres drgania T (w. sek.) sprężyny, którą uważalibyśmy za nieważką, równałby się okresowi drgania zwykłego wahadła, o długości równej ugięciu f (w m) sprężyny, spowodowanemu przez obciążenie P :

$$T = \pi \sqrt{\frac{f}{g}} \quad (\text{p. str. 203}).$$

a. Sprężyny giętkie. (giętkie)

1. Sprężyny giętkie proste.

[P. sposób 1) str. 372 i 373. Tablica na $\frac{1}{6}bh^2$ i $\frac{1}{12}bh^3$ p. str. 369 i nast.]

1. Sprężyna prostokątna (rys. 255).

$$P = \frac{bh^2 kb}{6 l}; \quad J = \frac{bh^3}{12};$$

$$f = \frac{P l^3}{EJ 3} = 4 \frac{l^3 P}{bh^3 E} = \frac{2 l^2 kb}{3 h E};$$

$$A = \frac{P f}{2} = \frac{1 kb^2}{18 E} V.$$



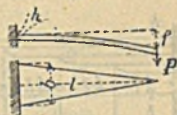
Rys. 255.

2. Sprężyna trójkątna (rys. 256) tworzy belkę stałej wytrzymałości na gięcie, (por. str. 354 i 390), gdyż $M:IV = \text{stałej}$. Odształcona jest łukiem koła (p. str. 361).

$$P = \frac{bh^2 kb}{6 l}; \quad J = \frac{bh^3}{12};$$

$$f = \frac{P l^3}{EJ 2} = 6 \frac{l^3 P}{bh^3 E} = \frac{l^2 kb}{h E};$$

$$A = \frac{P f}{2} = \frac{1 kb^2}{6 E} V.$$



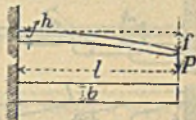
Rys. 256.

3. Sprężyna prostokątna, zaokrąglona według profilu paraboli sześcienniej (rys. 257). Odształcona jest łukiem koła (p. str. 361).

$$P = \frac{bh^2 kb}{6 l}; \quad J = \frac{bh^3}{12};$$

$$f = \frac{P l^3}{EJ 2} = 6 \frac{l^3 P}{bh^3 E} = \frac{l^2 kb}{h E};$$

$$A = \frac{P f}{2} = \frac{1 kb^2}{9 E} V.$$



Rys. 257.

2. Sprężyny giętkie, złożone.

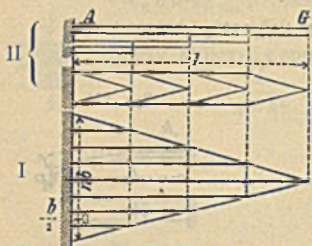
Jeżeli położymy kilka warstw sprężyn, opisanych powyżej pod 1., na siebie, to otrzymamy sprężynę wiązkową. Główne warunki dobroci sprężyny wiązkowej są następujące:

- 1) sprężyna taka powinna być beleczką złożoną, o możliwie stałej wytrzymałości na gięcie.
- 2) Warstwy sprężyny nie powinny się rozierać przy uginaniu, t. j. nie oddalać jedna od drugiej; odształcona powinna zatem być łukiem koła.

Z objaśnień podanych pod 1. wynika, że obu powyższym warunkom z niżej podanych rodzajów sprężyn czyni zadość tylko rodzaj pierwszy, pozostałe zaś sprężyny dopełniają tylko warunku 2).

1) **Trójkątna sprężyna uwarstwiona.** Jeżeli sprężynę trójkątną w planie (rys. 258 I), szerokości $n b$, pomyślimy sobie pociętą na pewną ilość parzystą $2n$ pasków, np. na 8, każdy szerokości $\frac{1}{2} b$, i potem symetryczne paski złączymy ze sobą w n , np. 4, pasy podwójnej szerokości, t. j. b , i nałożymy je na siebie, by utworzyły wiązkę sprężyn, jak w rys. 258 II, to otrzymamy sprężynę wiązkową, uwarstwowaną, dokładnie tejsamej wytrzymałości na gięcie, co pierwotna trójkątna, mianowicie:

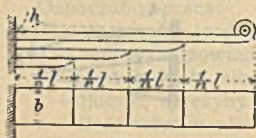
Rys. 258.



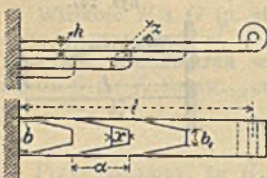
$$P = n \frac{b h^2 k_b}{6 l}; \text{ czyli } n = \frac{P l}{\frac{1}{6} b h^2 k_b}.$$

2. **Sprężyna uwarstwiona, prostokątna, zaostzona według paraboli sześcienniej** (rys. 259). Zamiast nadawania końcom oddzielnych warstw kształtu trójkątnego w planie, można je zostawić w pełnej szerokości, zaostżając natomiast końce w profilu według paraboli sześcienniej (p. str. 392).

Rys. 259.



Rys. 260.



3. **Sprężyna uwarstwiona z końcami kształtu trapezoidalnego, z zaostżeniem.** Końcom pojedynczych warstw sprężyny nadaje się w planie kształt trapezu, dodając w profilu pewne zaostżenie określone wzorem poniższym (oznaczenia podług rys. 260):

$$z = \frac{h}{\sqrt[3]{1 + \frac{b_1}{b} \left(\frac{\alpha}{x} - 1 \right)}}.$$

4. Zazwyczaj dwie, symetryczne względem siebie, sprężyny jednego z powyższych rodzajów zestawiają się w sprężynę dwustronną i łączą przewiązką we wiązkę sprężynową (pasy oddzielnych warstw przechodzą w całości przez całą długość danej warstwy, bez spojeń pod przewiązką). Tak otrzymanej sprężynie wiązkowej nadaje się (w stanie nieobciążenia) krzywość podług łuku koła, ze strzałką pierwotną p_0 (w cm). Obciążenie stałe $2P$ działające na przewiązkę (i 2 odpory P w końcach) zmniejsza strzałkę pierwotną p_0 do p (w cm), przyczem ugięcie będzie (w cm):

$$f = p_0 - p.$$

W resorach (sprężynach nośnych) powozów kolejowych (p. Dział XI, rozdz. II. B. d. 3. i C. c. 6.), obciążonych w przewiązce ciężarem $2P$, siłą rozciągającą $\frac{P}{\cos \alpha}$, jaka się pojawia w pochylonych wieszakach końcowych, rozkłada się w sworzniu na pionową P i poziomą $P \operatorname{tg} \alpha$, które łącznie wtworząją moment gnący $M = P(l + p \operatorname{tg} \alpha)$. Do sprężyn zakrzywionych stosują się również wzory podane pod 1., a zatem, zatrzymując oznaczenia ze str. 412, otrzymamy:

nośność:

$$2P = 2n \frac{bh^3}{6} \frac{k_b}{l + p \operatorname{tg} \alpha}$$

ugięcie:

$$f = 3 \frac{l^2}{n b h^3} \frac{P(l + p \operatorname{tg} \alpha)}{E} = \frac{l^2}{h} \frac{k_b}{E}$$

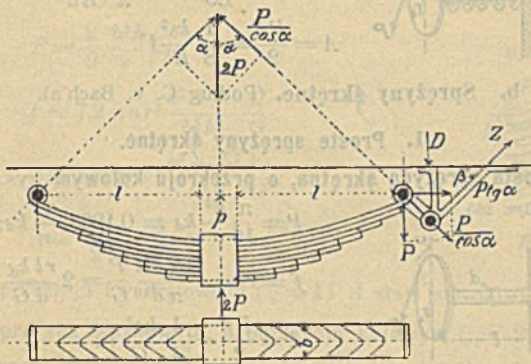
Za p możemy podstawić w przybliżeniu p_0 , chociaż ściślej byłoby: $p = p_0 - f$.

Gięcia bezpiecznie k_b , dla hartowanych resorów ze stali zlewnej, resorowej, p. str. 337.

Wierzchnia warstwa sprężyny, oprócz gięcia, znosi jeszcze siłę ciągnącą $P \operatorname{tg} \alpha$, oraz siłę tnącą P , które powodują tam naprężenia dodatkowe: $\sigma = P \operatorname{tg} \alpha : bh$, oraz cięcie τ (wypada obliczyć podług str. 350).

Obliczając sprężyny, należałoby uwzględnić zwiększanie się obciążenia wskutek ugięcia sprężyny w czasie jazdy, drgań, uderzeń i t. p. Zaleca się zatem (zwłaszcza, jeżeliby się zaniedbywało w obliczeniu naprężenia powyższe σ i τ) wo wzory na nośność (przy obciążeniu spokojnym) wprowadzać względnie niskie współczynniki k_b , w granicach 5800 do 6500 kg/cm^2 .

Rys. 261.



Koziołek resorowy (p. rys. 261). Oznaczając przez D siłę cisnącą w części pionowej, a przez Z siłę ciągnącą w części pochylej, otrzymamy:

$$D = P(1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta) \quad \text{i} \quad Z = \frac{P \operatorname{tg} \alpha}{\cos \beta}$$

3. Zwijane sprężyny giętkie. (giętkie)

[Tabl. na $\frac{1}{6} bh^3$ i $\frac{1}{12} bh^3$ — str. 369 i nast.; tabl. na $\frac{1}{32} \pi d^3$ i $\frac{1}{64} \pi d^3$ str. 360].

l oznacza długość sprężyny rozwiniętej.

1. Sprężyna zwijana na płask (spiralna) o przekroju prostokątnym (rys. 262).

$$P = \frac{bh^2 k_b}{6} \frac{1}{r}; \quad J = \frac{bh^3}{12};$$

$$f = r \omega = \frac{P}{EJ} l r^2 = 12 \frac{P l r^2}{E b h^3} = 2 \frac{r l k_b}{h E};$$

$$A = \frac{P f}{2} = \frac{1}{6} \frac{k_b^2}{E} V.$$

Rys. 262.



2. Sprężyna zwijana śrubowo, o przekroju prostokątnym (rys. 263).

Rys. 263.



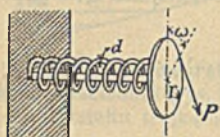
$$P = \frac{bh^2 kb}{6r}; \quad J = \frac{bh^3}{12};$$

$$f = r\omega = \frac{P}{EJ} lr^2 = 12 \frac{Plr^2}{Ebh^3} = 2 \frac{rl kb}{h E};$$

$$A = \frac{Pf}{2} = \frac{1}{6} \frac{kb^2}{E} V.$$

3. Sprężyna zwijana śrubowo, o przekroju kołowym (rys. 264).

Rys. 264.



$$P = \frac{\pi d^3 kb}{32r}; \quad J = \frac{\pi d^4}{64};$$

$$f = r\omega = \frac{P}{EJ} lr^2 = \frac{64 Plr^2}{\pi Ed^4} = 2 \frac{rl kb}{d E};$$

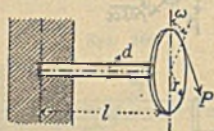
$$A = \frac{Pf}{2} = \frac{1}{8} \frac{kb^2}{E} V.$$

b. Sprężyny śkrętne. (Podług C. v. Bach'a).

1. Proste sprężyny śkrętne.

1. Prosta sprężyna śkrętna, o przekroju kołowym (rys. 265).

Rys. 265.



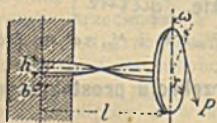
$$P = \frac{\pi d^3}{16r} kd = 0,1963 \frac{d^3}{r} kd;$$

$$f = r\omega = \frac{32r^2 l P}{\pi d^4 G} = 2 \frac{rl kd}{d G};$$

$$A = \frac{Pf}{2} = \frac{1}{4} \frac{kd^2}{G} V.$$

2. Prosta sprężyna śkrętna, o przekroju prostokątnym (rys. 266).
ξ oznacza stosunek $b:h$, przy czym $b < h$.

Rys. 266.



$$P = \frac{2 b^2 h}{9r} kd;$$

$$f = r\omega = 3,6 r^2 l \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} \frac{P}{G};$$

$$= 0,8 r l \frac{b^2 + h^2}{b h^2} \frac{kd}{G};$$

$$A = \frac{Pf}{2} = \frac{4}{45} (\xi^2 + 1) \frac{kd^2}{G} V.$$

Dla przekroju kwadratowego ($\xi = 1$) A staje się największością.

2. Zwijane sprężyny śkrętne.

W rys. 267 do 270 r oznacza promień średni zwoju, t. j. sięgający do środka ciężkości przekroju sprężyny.

1. Sprężyna walcowata, zwijana śrubowo, o przekroju kołowym *) (rys. 267). n oznacza liczbę zwojów.

Rys. 267.

$$P = \frac{\pi d^3}{16 r} k_d = 0,1963 \frac{d^3}{r} k_d;$$

$$f = \frac{64 n r^3}{d^4} \frac{P}{G} = \frac{4 \pi n r^2}{d} \frac{k_d}{G};$$

$$A = \frac{P f}{2} = \frac{1}{4} \frac{k_d^2}{G} V.$$



2. Sprężyna walcowata, zwijana śrubowo, o przekroju prostokątnym (rys. 268). ξ oznacza stosunek $b : h$, przyczem $b < h$.

Rys. 268.

$$P = \frac{2 b^2 h}{9 r} k_d;$$

$$f = 7,2 \pi n r^3 \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} \frac{P}{G}$$

$$= 1,6 \pi n r^2 \frac{b^2 + h^2}{b h^2} \frac{k_d}{G};$$

$$A = \frac{P f}{2} = \frac{4}{45} (\xi^2 + 1) \frac{k_d^2}{G} V.$$



Dla przekroju kwadratowego ($\xi = 1$) A staje się największością.

3. Sprężyna stożkowa, o przekroju kołowym (rys. 269).

l oznacza długość sprężyny rozwiniętej, d średnicę przekroju sprężyny, a r zmniejsza się ciągle aż do 0.

Rys. 269.

$$P = \frac{\pi d^3}{16 r} k_d = 0,1963 \frac{d^3}{r} k_d;$$

$$f = \frac{16 r^2 l}{\pi d^4} \frac{P}{G} = \frac{r l}{d} \frac{k_d}{G}$$

$$= 16 n \frac{r^3}{d^4} \frac{P}{G} = \pi n \frac{r^2}{d} \frac{k_d}{G};$$

$$A = \frac{P f}{2} = \frac{1}{8} \frac{k_d^2}{G} V.$$



*) Szczegółowa tablica nośności takich sprężyn podana w Zeitschr. d. V. d. Ing. 1891, str. 1398. Tablica opracowana na zasadzie $k_d = 4500 \text{ kg/cm}^2$ (dla dobrej, hartowanej stali resorowej, przy nieznacznie zmiennym obciążeniu) i $G = 750000 \text{ kg/cm}^2$.

4. Sprężyna stożkowa, o przekroju prostokątnym (rys. 270).
 $\xi = b : h$, przyczem $b < h$.



$$P = \frac{2}{9} \frac{b^2 h}{r} k_d;$$

$$f = 1,8 r^2 l \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} \frac{P}{G}$$

$$= 0,4 r l \frac{b^2 + h^2}{b h^2} \frac{k_d}{G}$$

$$= 1,8 \pi n r^3 \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} \frac{P}{G}$$

$$= 0,4 \pi n r^2 \frac{b^2 + h^2}{b h^2} \frac{k_d}{G};$$

$$A = \frac{P f}{2} = \frac{2}{45} (\xi^2 + 1) \frac{k_d^2}{G} P.$$

Dla przekroju kwadratowego ($\xi = 1$), A staje się największą.

Uwaga do 3 i 4. Do sprężyn kształtu stożka ściętego, o promieniach podstaw r i r_0 , przyczem $r > r_0$, stosują się powyżej podane wzory na nośność P , bez wszelkiej zmiany; natomiast w pierwsze i czwarte wzory na ugięcia f trzeba podstawić: $r^2 + r_0^2$ zamiast r^2 , oraz $\pi n (r + r_0)$ zamiast l , wzorów zaś drugich i trzecich nie stosować.

IV. WYTRZYMAŁOŚĆ PŁYT I NACZYŃ.

(Posiłkując się wszystkimi wzorami
 poniższymi, trzeba uwzględnić uwagę końcową ze str. 422).

a. Płyty płaskie.

Oznaczamy przez:

s grubość płyty w cm,

f jej ugięcie się w środku w cm,

σ_{\max} największe naprężenie normalne w płycie w kg/cm^2 ,

k_b bezpieczne gięcie (naprężenie) materiału w kg/cm^2 ,

E spólczynnik sprężystości w kg/cm^2 (p. str. 328 i 331),

Wreszcie φ i ψ oznaczają dwa spólczynniki, obliczone teoretycznie przez G. Grashof'a *) dla obu krańcowych wypadków, a mianowicie:

- płytę podparto na obwodzie swobodnie, bez uszczelnienia,
- płytę osadzono na obwodzie niewzruszenie.

Podług doświadczeń C. v. Bach'a **) zaś wielkość tych spólczynników (φ i ψ) zależy (oprócz sposobu umocowania ich obwodu) jeszcze i od wielkości siły ściskającej płytę, w celu jej uszczelnienia na ciśnienie płynu, od rodzaju tego uszczelnienia, od jakości powierzchni płyty tak w miejscu, gdzie się ona styka z materiałem uszczelniającym, jak i w miejscu, gdzie się drugą stroną opiera na powierzchni podpoiy i t. p.

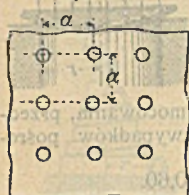
*) F. Grashof, Theoric der Elasticität und Festigkeit; Berlin 1878.

**) C. v. Bach, Elasticität und Festigkeit, 3 Aufl.; Berlin 1898, J. Springer; tenże: Versuche über die Widerstandsfähigkeit ebener Platten; Berlin 1891 (również: Zeitschr. d. V. d. Ing. 1890, str. 1041 i nast.).

Nadto: Ph. Forchheimer, Die Berechnung ebener und gekrümmter Behälterböden. Zeitschr. für Bauwesen 1894, str. 450 i nast.

5. Płyta eliptyczna, na obwodzie swobodnie podparta, a pośrodku obciążona przez P kg. Oznaczenia, jak pod 4. Podług C. v. Bach'a będzie:

Rys. 275.



$$\sigma_{\max} = \frac{8}{\pi 5} \varphi \frac{8 + 4 \xi^2 + 3 \xi^4}{3 + 2 \xi^2 + 3 \xi^4} \xi \frac{P}{s^2} \leq k_b,$$

przyczem $\varphi = 1,50$ do $1,67$.

6. Płyta dowolnej wielkości, obciążona równomiernie ciśnieniem P kg/cm², a podparta w punktach, które dzielą ją na pola kwadratowe, o boku a (rys. 275).

Podług F. Grashof'a w każdym oddzielnym polu mamy:

$$\sigma_{\max} = 0,2275 \frac{a^2}{s^2} p \leq k_b; \quad f = 0,0284 \frac{a^4}{s^2} \frac{p}{E}.$$

7. Płyta prostokątna, na obwodzie swobodnie podparta i równomiernie obciążona ciśnieniem płynu: p kg/cm².

a i b oznaczają boki płyty prostokątnej. Podług C. v. Bach'a będzie:

$$\sigma_{\max} = 0,5 \varphi \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \frac{p}{s^2} \leq k_b,$$

a zatem, gdy $b = a$ (płyta kwadratowa):

$$\sigma_{\max} = 0,25 \varphi \frac{a^2}{s^2} p \leq k_b.$$

We wzorach tych $\varphi = 0,75$ do $1,125$ (por. pod 1.).

8. Płyta prostokątna, na obwodzie swobodnie podparta, a pośrodku obciążona siłą P kg.

a i b oznaczają boki płyty prostokątnej. Podług C. v. Bach'a będzie:

$$\sigma_{\max} = 1,5 \varphi \frac{ab}{a^2 + b^2} \frac{P}{s^2} \leq k_b,$$

przyczem $\varphi = 1,75$ do $2,00$.

b. Płaskie dna okrągłe, z wywiniętymi kołnierzami walcowymi. Podług C. v. Bach'a będzie: *)

$$k_b \geq p \left\{ \mu \frac{k}{s} + \psi \left(\frac{r - 0,5k \left(1 + \frac{k}{r} \right)^2}{s} \right)^2 \right\},$$

w którym to wzorze oznacza: s grubość dna, k wewnętrzny promień zaokrąglenia w wywinięciu i r promień dna w świetle, wszystko w cm, a wreszcie p ciśnienie wewnętrzne w kg/cm²; k_b p. str. 418. Wartości współczynników μ i ψ dla den z żelaza zlewne, zanitowanych w takiej części rurowate (kotły i t. p.) są: $\mu = 0,5$ i $\psi = 0,33$ do $0,375$, a dla lanożelaznych, odlanych łącznie z częścią rurowatą: $\mu = \psi = 0,8$.

c. Walec wydrażony (rury i t. p.). (Podł. C. v. Bach'a).

Oznaczamy przez:

*) Masch.-Elem., 6 wyd., str. 686 i Zeitschr. d. V. d. Ing. 1897, str. 1224 i nast.

r_i promień wewnętrzny w cm, $s = r_a - r_i$
 r_a promień zewnętrzny w cm, f grubość ściany w cm,
 k_z bezpieczne ciągnięcie materiału w kg/cm^2 ,
 k bezpieczne ciśnienie materiału w kg/cm^2 ,
 $m = \sqrt[10]{3}$ stosunek rozciągnięcia jednostkowego do takiegoż zwięzienia.

1. Wewnętrzne nadciśnienie płynu: p_i w kg/cm^2 . Mamy:

$$r_a = r_i \sqrt{\frac{m k_z + (m - 2) p_i}{m k_z - (m + 1) p_i}} = r_i \sqrt{\frac{k_z + 0,4 p_i}{k_z - 1,3 p_i}} \quad \text{I.}$$

przyczem największe naprężenie pojawia się na wewnętrznej powierzchni walca wydrążonego, w kierunku obwodowym. W kierunku zaś osi walca, naprężenie materiału (przez siłę $\pi r_i^2 p_i$) jest o wiele mniejsze, a przy nieznaczej grubości ścian — dwa razy mniejsze, niż w kierunku obwodowym.

Możliwe są tylko takie stosunki, przy których $p_i < (k_z : 1,3)$, czyli $(p_i : k_z) < 0,77$. Zestawiamy przynależne stosunki $p_i : k_z$ i $r_a : r_i$:

$p_i : k_z =$	0,05	0,1	0,15	0,2	0,3	0,375	0,4	0,5	0,6	0,65	0,7	0,75
$r_a : r_i =$	1,044	1,093	1,148	1,208	1,355	1,498	1,555	1,852	2,374	2,851	3,771	7,211

Dla ścian małej grubości będzie z dokładnością dostateczną:

$$s = r_i \frac{p_i}{k_z} \quad \text{II.}$$

Uwaga. Przy złączeniach na nity i t. p. trzeba również sprawdzić i wytrzymałość połączeń.

Przykład. Lanożelazny cylinder tłoczni, średnicy 40 cm w świetle, z tłokiem 36 cm średnicy, ma służyć do podniesienia ciężaru (mostu) 220 t. Jaką powinna być grubość ścianki przy $k_z = 800 \text{ kg/cm}^2$?

Przy 36 cm średnicy, pole tłoka zawiera około 1018 cm^2 , a więc ciśnienie wody w cylindrze będzie: $p_i = 220\,000 : 1018 = 225 \text{ kg/cm}^2$. Mamy zatem: $p_i : k_z = 225 : 800 = 0,375$, a z tabliczki powyżej podanej dobieramy przynależną wartość: $r_a : r_i = 1,498$. A że $r_i = \frac{1}{2} \cdot 40 = 20 \text{ cm}$, więc $r_a = 1,498 \cdot 20 \approx 30 \text{ cm}$; niezbędna zaś grubość ścianki $s = r_a - r_i = 30 - 20 = 10 \text{ cm}$.

Obliczenie grubości ścian walcowych kotłów parowych z wewnętrznym nadciśnieniem p. Normy Hamburgskie 1898, w Dziale VII, rozdz. IV, C. b.

2. Zewnętrzne nadciśnienie p_a w kg/cm^2 . Gdy niema obawy wgniecenia się ścianek, to będzie:

$$r_a = r_i \sqrt{\frac{m k}{m k - (2 m - 1) p_a}} = r_i \sqrt{\frac{k}{k - 1,7 p_a}} \quad \text{III.}$$

Z powyższego równania wynika, że możliwymi są tylko takie stosunki, w których $p_a < (k : 1,7)$, czyli $(p_a : k) < 0,588$.

Uwaga pod 1 (p. w.), dotycząca połączeń, stosuje się w danym przypadku.

Dla ścian nieznaczej grubości mamy z dokładnością dostateczną:

$$s = r_a \frac{p_a}{k} \quad \text{IV.}$$

Dodatniego wpływu den i szwów poprzecznych na wytrzymałość walca nie uwzględniano we wzorach pod 1. i 2. Szacunkowo możnaby wpływ ten uwzględnić, podwyższając odpowiednio wartości naprężeń bezpiecznych materiału. Wpływ ten będzie tem znaczniejszy, im krótszym będzie walec w stosunku do swej średnicy.

Oznaczenie grubości ścianek rurowych, z naciśnięciem od zewnątrz, których wgniecenia należy się obawiać (**rury płomienne kotłów parowych**), podano podł. C. v. Bach'a w Normach Hamburskich 1898, p. Dział VII, rozdz. IV, C. b.

d. Kule wydrążone. (podług C. v. Bach'a).

Oznaczenia, jak wyżej pod c, patrz str. 420.

1. Naciśnięcie wewnętrzne p_i w kg/cm². Mamy:

$$r_a = r_i \sqrt[3]{\frac{2mk_z + 2(m-2)p_i}{2mk_z - (m+1)p_i}} = r_i \sqrt[3]{\frac{k_z + 0,4 p_i}{k_z - 0,65 p_i}} \quad \text{V.}$$

Z powyższego równania wnioskujemy, że możliwe są tylko takie stosunki, w których: $p_i < (k_z : 0,65)$, czyli $(p_i : k_z) < 1,54$.

Największe ciągnięcie pojawia się na powierzchni wewnętrznej w kierunku koła wielkiego.

Dla ścian nieznacznej grubości będzie z dokładnością dostateczną:

$$s = \frac{1}{2} r_i \frac{p_i}{k_z} \quad \text{VI.}$$

Uwaga. Jeżeli kulę wykonano na złączenia nitowe, lub t. p., to trzeba sprawdzić i wytrzymałość tych połączeń.

2. Naciśnięcie zewnętrzne p_a w kg/cm². Gdy niema obawy, aby ścianki mogły uleść wgnieceniu, natenczas będzie:

$$r_a = r_i \sqrt[3]{\frac{2mk}{2mk - 3(m-1)p_a}} = r_i \sqrt[3]{\frac{k}{k - 1,05 p_a}} \quad \text{VII.}$$

Z równania tego wynika, że możliwe są tylko takie stosunki, dla których będzie: $p_a < (k : 1,05)$, czyli $(p_a : k) < 0,95$.

Uwaga pod 1. (p. w.) stosuje się i tutaj.

Dla ścian nieznacznej grubości mamy z dokładnością dostateczną:

$$s = \frac{1}{2} r_a \frac{p_a}{k} \quad \text{VIII.}$$

Uwagi końcowe.

Płaskie płyty z materiału dostatecznie wisnego (ciągliwego), gdy się raz wygięły pod wpływem obciążenia, skutkiem tej nabranej w kłęśności stają się bardziej wytrzymałymi, niż w stanie pierwotnym, kiedy były płaskie.

Gdy zachodzi obawa, że płyta lub naczynie zużywać się będzie, np. przez rdzewienie, to grubości, obliczone podług wzorów, należy zwiększyć stosownie do przewidywanego zużywania się materiału. Jeżeliby wreszcie, ze względu na wyrób, odstawę, ustawienie naczyń lub płyt, ze względu na zmiany temperatur i t. p. okazała się potrzeba większej grubości ścianek, niż wykazują równania powyższe, to praktyczne te względy powinny rozstrzygać.