ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1971

Seria: GÓRNICTWO z. 48 Nr kol. 313

MIROSŁAW CHUDEK, EMIL ŚWIST

CIŚNIENIE GÓROTWORU DZIAŁAJĄCE NA BUDOWĘ TUNELI I WYROBISK GÓRNICZYCH NA MAŁYCH GŁĘBOKOŚCIACH

Streszczenie. W pracy przedstawiono aktualny stan wiedzy w zakresie określania ciśnień górotworu na obudowę tuneli oraz wyrobisk drążonych na małych głębokościach.

W oparciu o rozważania teoretyczne autorzy podjęli próbę wyprowadzenia oryginalnych wzorów na określenie wielkości ciśnień górotworu na obudowę tego typu wyrobisk z uwzględnieniem parametru czasu.

1. Wstęp

Wyznaczenie obciążeń wyrobisk podziemnych wykonywanych w skałach sypkich lub spoistych na małych głębokościach jest jednym z ważniejszych zagadnień przy projektowaniu.

Wielu autorów jak Ritter, Kommerell, Suquet, Protodiakonow podaje wzory określające ciśnienie pionowe wywierane na strop wyrobisk przez zalegające nad nim skały, opierając się na teorii powstawania sklepień odciążających. Według tych teorii działa na obudowę ciężar odprężonego górotworu ograniczonego od góry linią naturalnego sklepienia u dołu stropem wyrobiska.

Autorzy jak Bierbaumer, Terzaghi rozpatrują równowagę wydzielonej bryły górotworu pionowymi płaszczyznami stanowiącymi płaszczyzny tarcia. Przy takim założeniu obciążenie stropu równa się ciężarowi wydzielonej bryły górotworu pomniejszonemu i siły tarcia wzdłuż płaszczyzn tarcia. W pracach nowszych Olszak, Sawin przyjmują sprężysty model górotworu i podają rozwiązanie zagadnienia ciśnień górotworu na obudowę na zasadzie teorii sprężystości.

Przyjęcie sprężystego modelu górotworu nie odzwierciedla w całości zjawisk jakie w nim zachodzą. W ośrodku sprężystym odkształcenia następują natychmiast po obciążeniu i są niezależne od czasu, tymczasem zjawiska zachodzące w górotworze są zależne od czasu.

Przy naruszeniu równowagi w górotworze dość powoli dochodzi do jej wyrównania. Dlatego też przy obserwowaniu górotworu w wyrobisku natychmiast po jego wydrążeniu nie stwierdzimy objawów działania ciśnienia, a które daje się zauważyć w pewnym czasie po jego wykonaniu.

Z upływem czasu skały otaczające wyrobisko ulegają odkształceniom i przemieszczeniom w kierunku do wyrobiska. Powierzchnie przekrojów poprzecznych wyrobisk zmniejszają się niekiedy bardzo znacznie. Powstaje wyciskanie wyrobisk i niszczenie obudowy.

Zjawiska występowania dużych ciśnień górotworu na obudowę nie można wytłumaczyć klasycznymi teoriami, dlatego też w ostatnim czasie do wyjaśnienia tych zjawisk opieramy się na zasadach reologii.

W pracy niniejszej podjęto próbę wyjaśnienia zjawiska ciśnienia górotworu na obudowę przyjmując górotwór jako ośrodek sprężysty oraz jako ośrodek reologiczny Kelvina.

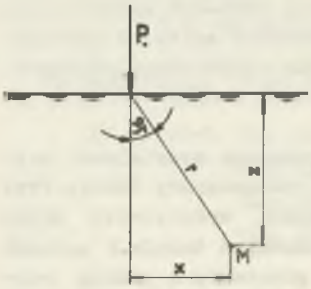
Wyprowadzone wzory mogą być wykorzystane przy projektowaniu wyrobisk korytarzowych na małych głębokościach.

2. Ciśnienie jako rozkład naprężeń w półpłaszczyźnie sprężystej i izotropowej

Do określenia rozkładu ciśnień górotworu na obudowę wyrobisk zastosowano zadanie Flamanta oraz zadanie Malana "O rozchodzeniu się siły z miejsca obciążonego" traktując ciśnienie nie jako parcie czynne w sensie parcia ziemi, lecz jako rozkład naprężeń w sprężystej i izotropowej półpłaszczyźnie.

Wzory na wielkość ciśnień górotworu wyprowadzono w oparciu o następujące założenia.

a) Skały mają własności ciał izotropowych.
b) Do skał ma zastosowanie prawo Hooke'a.
c) Działa prawo superpozycji.
d) Stałe sprężystości są jednakowe dla skał i obudowy.



Rys. 1. Siła P na krawędzi półpłaszczyzny

Zgodnie z zasadą Flamenta siła skupiona P przyłożona na krawędzi półpłaszczyzny sprężystej i nieograniczonej wywołuje promieniowy rozkład naprężeń.

Dowolny punkt M położony w odległości r od punktu przyłożenia siły skupionej P (rys. 1) poddany jest w kierunku promieniowym prostemu ściskaniu o wielkości

$$\sigma_r = -\frac{2P}{\pi} \cdot \frac{\cos\varphi}{r}$$

Naprężenia obwodowe i styczne równe są zero.

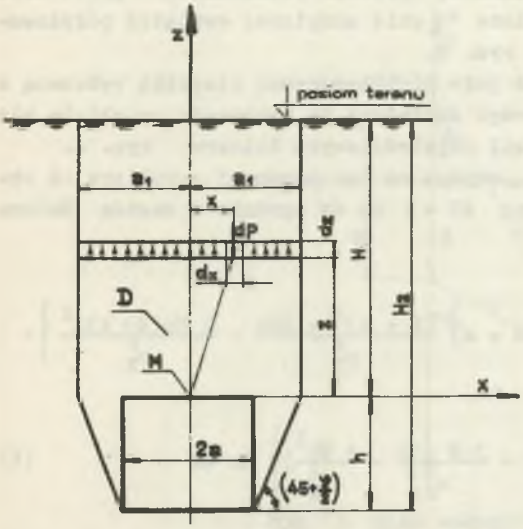
Rozwiązanie tego zagadnienia zostało otrzymane z rozwiązania trójwymiarowego zagadnienia Boussinesque'a (1878) przez Flamanta [5].

Składową normalną naprężenia w punkcie M półpłaszczyzny od obciążenia siłą skupioną P określa wzór

$$\sigma_z = -\frac{2P}{\pi} \frac{z^3}{(x^2+z^2)^2} \tag{2}$$

Przyjęto, że obudowa wyrobiska pozostaje pod wpływem obciążeń górotworu zawartego pomiędzy dwoma pionowymi płaszczyznami ograniczającymi poprowadzonymi w odległości a_1 od osi pionowej wyrobiska (rys. 2).

Każdy element obszaru D przedstawia małą siłę pionową, którą wywołuje promieniowy rozkład naprężeń w całej półpłaszczyźnie (tak wewnątrz jak i zewnątrz płaszczyzn ograniczających).



Rys. 2. Schemat obliczeniowy ciśnienia górotworu

Elementarna siła $dP = \gamma\, dx\, dz$ wywołuje w punkcie M rozkład naprężeń, który wyraża się wzorem:

$$d_{pz} = \frac{2\gamma}{\pi} \frac{z^3}{(x^2 + z^2)^2}\, dx \cdot dz \tag{3}$$

w którym γ - ciężar objętościowy skały.

Wzór (1) wyprowadzony dla sił powierzchniowych został w niniejszym zagadnieniu rozszerzony do elementarnych sił objętościowych wewnątrz obszaru D.

Całka wyrażenia (2) po obszarze D określa ciśnienie pionowe w punkcie M.

$$p_z = \frac{2\gamma}{\pi} \iint_D \frac{z^3}{(x^2 + z^2)^2}\, dx\, dz = \frac{2\gamma}{\pi} \int_0^H z^3 \left[\int_{-a_1}^{+a_1} \frac{dx}{(x^2 + z^2)^2} \right] dz \tag{4}$$

Po scałkowaniu i przekształceniu otrzymano:

$$p_z = \frac{2\gamma}{\pi} \left[\operatorname{Arcctg} \frac{H}{a_1} + a_1 \ln \left| \frac{a_1^2 + H^2}{a_1^2} \right| \right]$$

gdzie:

$a_1 = a + h \operatorname{tg} (45^\circ - \frac{\varphi}{2})$

a - połowa szerokości wyrobiska,
φ - kąt tarcia wewnętrznego skał,
h - wysokość wyrobiska,
H - głębokość.

Rozwiązanie (5) jest słuszne zarówno dla płaskiego stanu naprężenia (tarcza o małej grubości) jak i płaskiego stanu odkształcenia (przekrój półprzestrzeni).

Rozkład ciśnień pionowych wzdłuż poziomej płaszczyzny m - m przedstawia rys. 5 linia a.

Do obliczenia ciśnienia na obudowę wyrobisk podziemnych w górotworze spoistym zastosowano zadanie Melana "o sile skupionej wewnątrz półpłaszczyzny sprężystej i izotropowej" rys. 3.

Ośrodek górotworu potraktowano jako półpłaszczyznę nieważką wykonaną z materiału sprężystego i izotropowego obciążoną po wykonaniu wyrobiska elementarnymi siłami skupionymi od sił objętościowych obszaru rys. 4.

Rozkład naprężeń w punkcie M stropu na osi pionowej wyrobiska od obciążenia elementarną siłą skupioną $dP = \gamma\ dx\ dz$ zgodnie z zasadą Melana [6] określa wzór:

$$dp_z = \frac{\gamma}{2\pi}\left\{(1+\nu')\left[\frac{(H-z)^3}{r_1^4} + (H+z)\frac{(H+z)^2+2Hz}{r_2^4} - \frac{8\,Hz(H+z)x^2}{r_2^6}\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1-\nu'}{2}\left(\frac{H-z}{r_1^2} + \frac{3H+z}{r_2^2} - \frac{4\,Hx^2}{r_2^4}\right)\right\} dx\ dz \qquad (6)$$

w którym

ν' - stała uogólniona, która oznacza:

a) w przypadku płaskiego stanu naprężenia

$$\nu' = \nu \qquad (7)$$

b) w przypadku płaskiego stanu odkształcenia

$$\nu' = \frac{\nu}{1-\nu} \qquad (8)$$

gdzie ν - liczba Poissona

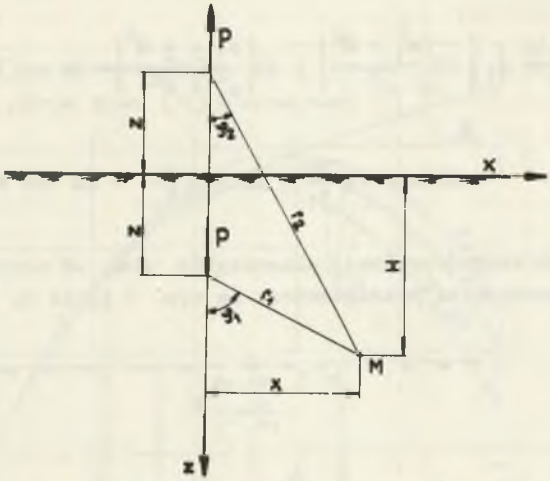
$$r_1^2 = (H-z)^2 + x^2$$

$$r_2^2 = (H+z)^2 + x^2$$

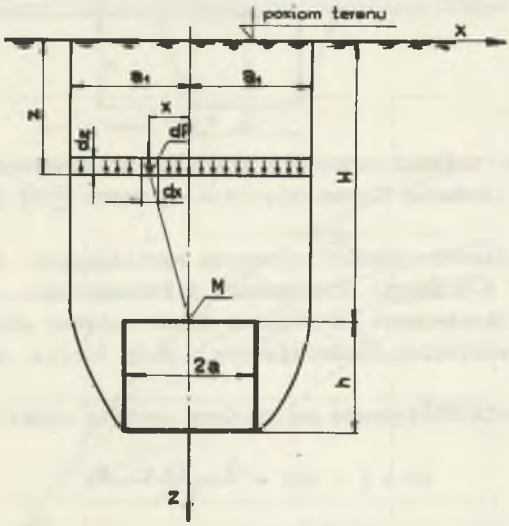
Suma wpływów elementarnych sił objętościowych dP obszaru D przedstawia wielkość ciśnienia pionowego na strop wyrobiska:

$$p_z = \frac{\gamma}{2\pi}\int_0^H\left\{\int_{-a_1}^{+a_1}\left[(1+\nu')\left(\frac{(H-z)^3}{\left[(H-z)^2+x^2\right]^2} + \frac{(H+z)\left[(H+z)^2+2Hz\right]}{\left[(H+z)^2+x^2\right]^2} - \frac{8\,Hz(H+z)^2x^2}{\left[(H+z)^2+x^2\right]^3}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(\frac{1-\nu'}{2}\right)\left(\frac{H-z}{(H-z)^2+x^2} + \frac{3H+z}{(H+z)^2+x^2} - \frac{4\,Hx^2}{\left[(H+z)^2+x^2\right]^2}\right)\right]dx\right\} dz \qquad (9)$$



Rys. 3. Siła wewnątrz półpłaszczyzny



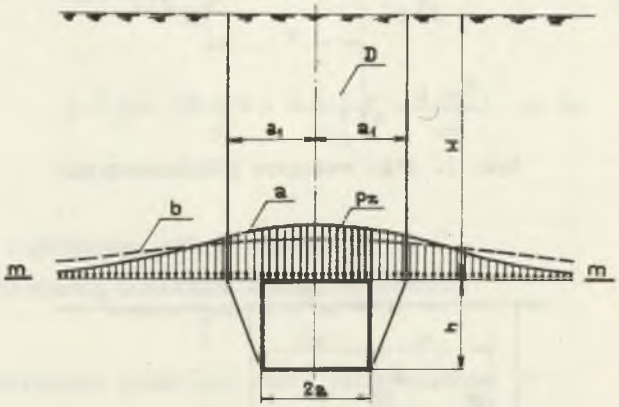
Rys. 4. Schemat obliczeniowy ciśnienia górotworu

Po scałkowaniu i licznych przekształceniach otrzymano:

$$pz = \frac{\gamma}{\pi}\left\{\frac{3+\nu'}{4}\, a_1 \left[\ln\left|\frac{a_1^2 + H^2}{a_1^2}\right| + \ln\left|\frac{a_1^2 + 4H^2}{a_1^2 + H^2}\right| - (1+\nu')\frac{a_1 \cdot H^2}{a_1^2 + 4H^2} + \right.\right.$$

$$\left. + 2H\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{2H}{a_1} - \operatorname{arc\,tg}\frac{H}{a_1}\right) + 2H \operatorname{arc\,ctg}\frac{2H}{a_1}\right\} \qquad (10)$$

Rozkład ciśnień wzdłuż poziomej płaszczyzny m-m od obciążenia bryłą górotworu nad wyrobiskiem przedstawiono na rys. 5 linia b.



Rys. 5. Rozkład ciśnień w poziomej płaszczyźnie m-m
a - wg wzoru [5] (zadanie Flamanta), b - wg wzoru [10] (zadanie Melana)

Porównanie wielkości ciśnień pionowych wynikających z wyprowadzonych wzorów (5) i (10) i z teorii Bierbaumera i Terzaghiego.

Według teorii Bierbaumera na obudowę działa ciężar słupa górotworu znajdujący się nad wyrobiskiem, pomniejszony o siły tarcia na płaszczyznach pionowych.

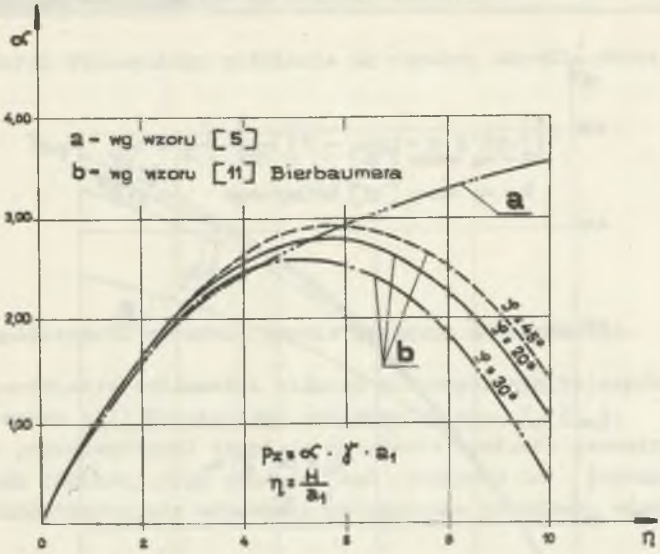
Według tej teorii obciążenie na obudowę określa wzór:

$$pz = \gamma \cdot H\left(1 - \frac{H \cdot \operatorname{tg}\varphi \cdot A}{2\, a_1}\right) \qquad (11)$$

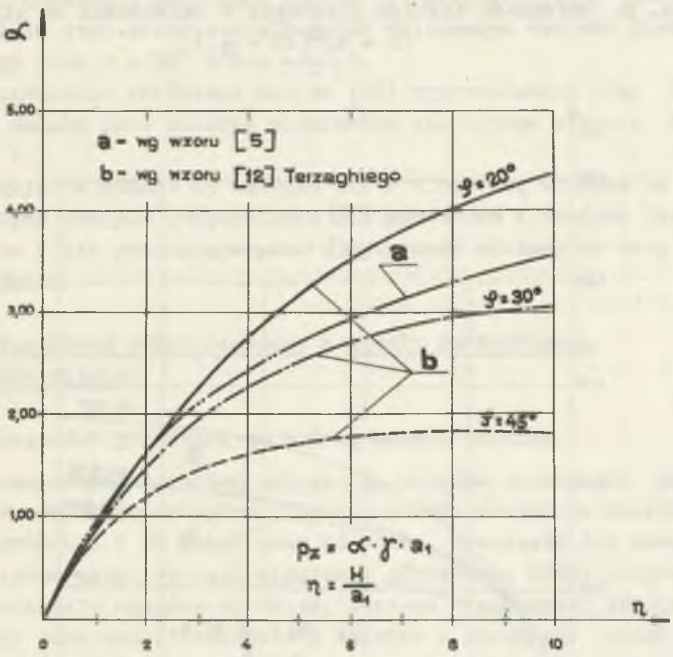
w którym

$$A = \operatorname{tg}^2\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)$$

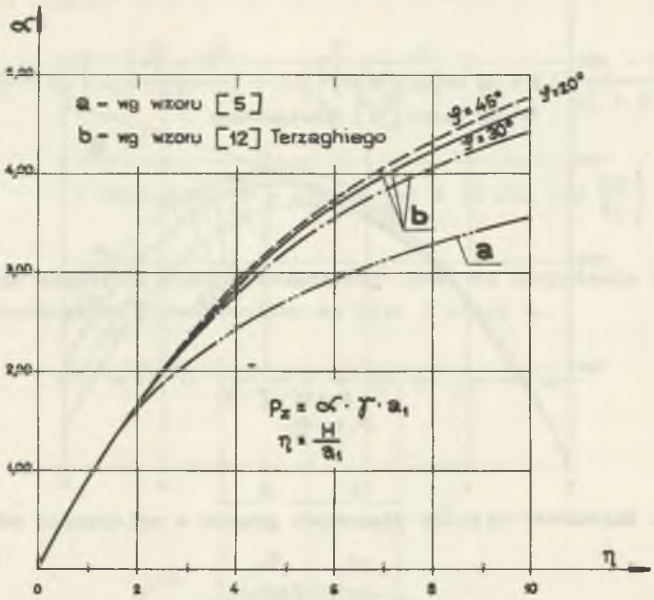
Graficzne porównanie zmienności ciśnień pionowych wynikających z wzoru (5) i wzoru (11) Bierbaumera pokazano na rys. 6.



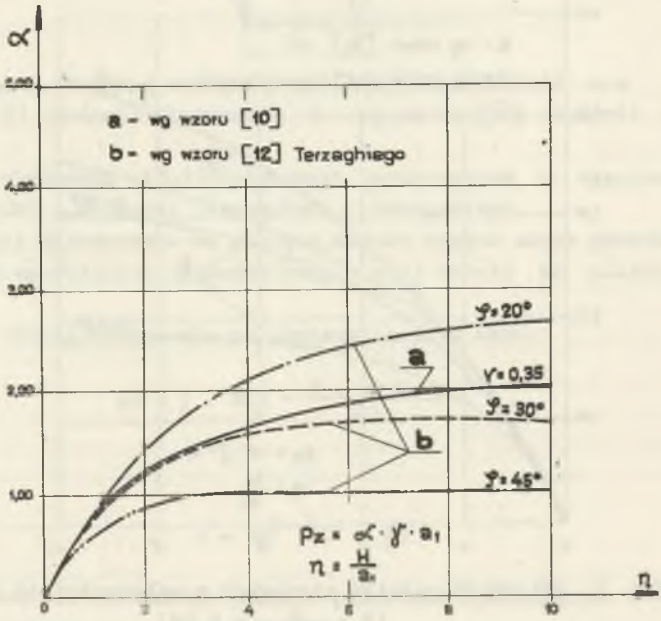
Rys. 6. Zmienność ciśnień pionowych gruntu w zależności od głębokości



Rys. 7. Zmienność ciśnień pionowych w zależności od głębokości
($K = \frac{\nu}{1-\nu} = 0,54$)



Rys. 8. Zmienność ciśnień pionowych w zależności od głębokości ($K = tg^2(45 - \frac{\varphi}{2})$)



Rys. 9. Zmienność ciśnień pionowych w zależności od głębokości ($\kappa = 1$; $\nu = 0,35$)

Według teorii Terzaghiego ciśnienia na obudowę określa wzór: [11]

$$p_z = \frac{\gamma\ a_1}{K \cdot tg\varphi}\left[1 - \exp(-\ n\ K\ tg\varphi)\right] \qquad (12)$$

w którym

$$n = \frac{H}{a_1}$$

$K \leqslant 1$ współczynnik stosunku parcia bocznego do pionowego.

Graficznie porównanie zmienności ciśnień pionowych wynikających z wzoru (5), (10) i wzoru (12) Terzaghiego pokazano na rys. 7, 8, 9.

Chociaż w poszczególnych teoriach przyjęcie wymiarów geometrycznych obszaru nadkładu obciążającego obudowę jest jednakowe to jednak parametry wyjściowe charakteryzujące własności mechaniczne górotworu odgrywają różną rolę.

W metodzie Bierbaumera kąt tarcia wewnętrznego φ ma bardzo mały wpływ na wielkość ciśnienia. Natomiast w metodzie Terzaghiego kąt tarcia wewnętrznego φ oraz współczynnik K mają duży wpływ na wielkość ciśnienia.

Ciśnienie górotworu obliczone wzorem (5) przy przyjęciu założeń podanych na wstępie jest bliskie wielkościom obliczonym wzorami Bierbaumera i i Terzaghiego (dla $\varphi = 30^{\circ}$ i $K = \frac{\nu}{1-\nu}$).

Również ciśnienie obliczone wzorem (10) wyprowadzonym przy zastosowaniu zadania Melana jest bliskie ciśnieniom obliczonym z wzoru Terzaghiego dla $K = 1$.

O ile przyjęcia podane na wstępie pkt 2 a,b,c są słuszne to wprowadzenie jednakowych stałych sprężystości dla górotworu i obudowy jest dużym przybliżeniem i jak pokazano w pkt. 4 sztywność obudowy ma duży wpływ na wielkość ciśnień.

4. Wpływ odkształceń półpłaszczyzny o modelu reologicznym na wielkość ciśnień

4.1. Opis własności górotworu za pomocą modelu Kelvina

W przeprowadzonych rozważaniach pkt 2, ośrodek traktowano jako ciało sprężyste. W ośrodku sprężystym przemieszczenia następują natychmiast po wykonaniu wyrobiska i są niezależne od czasu. Tymczasem jak obserwacje wykazują z upływem czasu wzrasta ciśnienie górotworu, które niejednokrotnie niszczy i deformuje obudowę wyrobisk. Dlatego w następnej kolejności przyjęto górotwór jako model reologiczny Kelvina i sprężysty model obudowy. Model reologiczny Kelvina opisany jest następującym związkiem czasem zależności między naprężeniem a odkształceniem [5]

$$D\sigma = 2GD\varepsilon + 2\eta D\dot{\varepsilon} \qquad (13)$$

gdzie:

$D\sigma$ - dewiator tensora naprężeń,
$D\varepsilon$ - dewiator tensora odkształceń,
$D\dot{\varepsilon}$ - dwiator tensora prędkości odkształceń.

Rozwiązaniem równania [5] jest:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{2G}\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{T}\right)\right] \tag{14}$$

gdzie:

$$T = \frac{\eta}{G}$$

Ośrodek opisany zależnością (13) ma w części cechy ciała sprężystego w części cieczy lepkiej. Oznacza to, że w ciałach tych odkształcenia następują nie od razu po obciążeniu lecz z pewnym opóźnieniem. Wzory na wielkość ciśnień górotworu o modelu reologicznym wyprowadzono w oparciu o następujące założenia.

a) Skały mają własność ciała lepkosprężystego Kelvina.
b) Do rozwiązania zadania reologicznego zastosowano zasadę Alfreya o analogii sprężysto lepkosprężystej.
c) Wykonanie obudowy następuje natychmiast po wydrążeniu wyrobiska, przy szczelnym wypełnieniu wolnych miejsc pomiędzy obudową a górotworem.
d) Obudowa wykonana jest z materiału sprężystego o współczynniku sztywności λ_{ob}.

4.2. Odkształcenie półpłaszczyzny (zadanie Flamanta)

Wzory na naprężenia w półpłaszczyźnie od siły skupionej na jej krawędzi przedstawiają się następująco:

$$\sigma_z = -\frac{2P}{\pi}\,\frac{z^2}{(x^2+z^2)^2} \tag{15}$$

$$\sigma_x = -\frac{2P}{\pi}\,\frac{x^2 \cdot z}{(x^2+z^2)^2}$$

$$\tau_{zx} = -\frac{2P}{\pi}\,\frac{x\,z^2}{(x^2+z^2)^2}$$

Odkształcenia jednostkowe we wspólnym ujęciu dla płaskiego stanu naprężenia i odkształcenia określają wzory:

$$\varepsilon_z = \frac{1}{2\,G(1+\nu')}\,(\sigma_z - \nu'\sigma_x)$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2\,G(1+\nu')}\,(\sigma_x - \nu'\sigma_z) \qquad (16)$$

$$\gamma_{zx} = -\frac{\tau_{zx}}{G}$$

Po podstawieniu wyrażeń (15) do pierwszego z równań (16) i scałkowaniu otrzymano przemieszczenie pionowe u punktu o współrzędnych (x,z).

$$u = -\frac{P}{2\pi\,G(1+\nu')}\left[\ln\frac{x^2+z^2}{b^2} + (1+\nu')\frac{x^2}{x^2+z^2}\right] \qquad (17)$$

gdzie:

b - odległość punktu ustalenia.

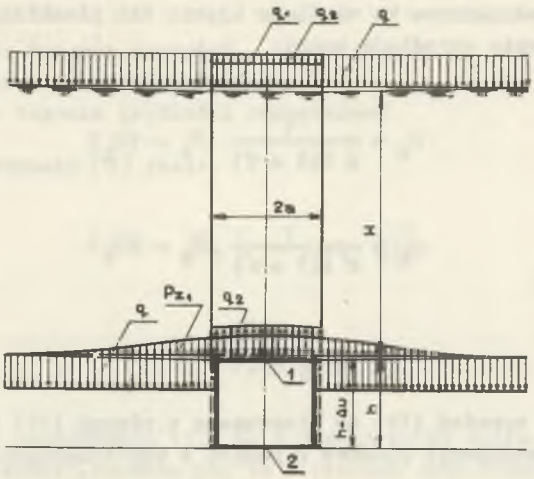
Przemieszczenie pionowe punktu leżącego na osi symetrii od obciążenia q równomiernie rozłożonego na długości 2 a otrzymano ze związku (17) wyprowadzonego dla siły skupionej, po zastąpieniu P przez q dx i scałkowaniu w granicach od - a do + a

$$u = -\frac{q}{2\pi\,G(1+\nu')}\int_{-a}^{+a}\left\{\ln\left|\frac{x^2+z^2}{b^2}\right| + (1+\nu')\frac{x^2}{x^2+z^2}\right\}dx \qquad (18)$$

Po scałkowaniu i przekształceniu otrzymano:

$$u = -\frac{q}{2\pi\,G(1+\nu)}\left\{2\,a\,\ln\left[\frac{a^2+z^2}{b^2}\right] - 2(1-\nu')\left(a - z.\mathrm{arc\,tg}\,\frac{a}{z}\right)\right\} \qquad (19)$$

Pod wpływem statycznego działania obciążenia q na odcinku 2 a wydzielona warstwa tarczy (rys. 10) o grubości h (równej wysokości wyrobiska) zmniejsza swoją grubość.



Rys. 10. Podział obciążeń dla $t > t_1$, $\Delta u = u_{ob}$, $q_1 + q_2 = q$

Zmianę grubości wydzielonej warstwy obliczono z różnicy przemieszczeń punktów (1) i (2):

$$\Delta u = \frac{q}{2\pi G(1+\nu')}\left[2a \ln\left|\frac{a^2+H_2^2}{a^2+H_1^2}\right| - 2(1-\nu')(H_1 \operatorname{arctg}\frac{a}{H_1} - H_2 \operatorname{arctg}\frac{a}{H_2})\right] \tag{20}$$

gdzie:

$\Delta u = u_1 - u_2$ zmiana grubości wydzielonej warstwy równej $h = H_2 - H_1$

H_1 - odległość górnego punktu obudowy od krawędzi półpłaszczyzny,

H_2 - odległość dolnego punktu obudowy od krawędzi półpłaszczyzny.

Odkształcenie półpłaszczyzny o modelu reologicznym obliczono przy zastosowaniu zasady Alfreya o analogii sprężysto lepkosprężystej.

Zgodnie z tą zasadą, przemieszczenie pionowe punktu leżącego na osi symetrii od obciążenia ciągłego q rozłożonego na odcinku 2a na krawędzi półpłaszczyzny o modelu reologicznym Kelvina obliczono mnożąc wyrażenie (19) przez czynnik $\left[1 - \exp(-\frac{t'}{T})\right]$

$$u = -\frac{q}{2\pi G(1+\nu')}\left\{2a \ln\left|\frac{a^2+z^2}{b^2}\right| - 2(1-\nu')(a - z \cdot \operatorname{arctg}\frac{a}{z})\right\}\left[1-\exp(-\frac{t}{T})\right] \tag{21}$$

Zmniejszenie grubości wydzielonej warstwy półpłaszczyzny od obciążenia ciągłego q obliczono mnożąc wyrażenie (20) przez czynnik $\left[1 - \exp(-\frac{t}{T})\right]$

$$\Delta u = \frac{q}{2\pi G(1+\nu')}\left[2a \ln\left|\frac{a^2+H_2^2}{a^2+H_1^2}\right| - 2(1-\nu')(H_1 \operatorname{arctg}\frac{a}{H_1} - H_2 \operatorname{arc\,tg}\frac{a}{H_2})\right]\cdot\left[1-\exp(-\frac{t}{T})\right] \tag{22}$$

4.2.1. Ciśnienie na strop obudowy od ciężaru warstw górotworu nad wyrobiskiem

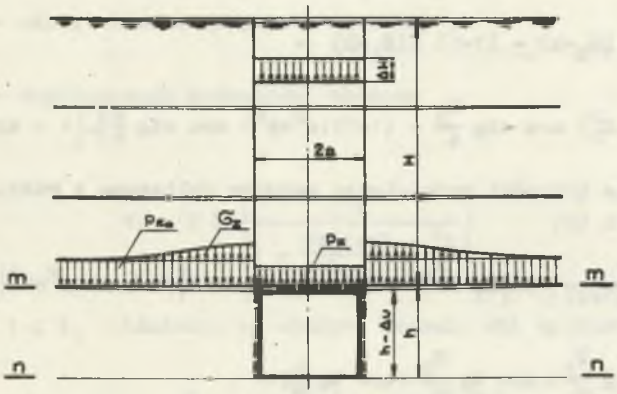
Rozpatrzono półpłaszczyznę w stanie naprężeń pierwotnych od ciężaru warstw położonych nad wyrobiskiem.

Przed drążeniem wyrobiska na głębokości H panują ciśnienia pierwotne równe:

$$pz_o = \gamma \cdot H \tag{23}$$

W czasie drążenia wyrobiska usunięte zostaje oddziaływanie rdzenia na półpłaszczyznę. Ciężar słupa górotworu nad wyrobiskiem rozkłada się na ociosy boczne półpłaszczyzny wg "promieniowego rozkładu naprężeń" (rysunek 11), powodując odkształcenie półpłaszczyzny.

Wydzielona warstwa półpłaszczyzny o grubości h, pod wpływem zwiększonych naprężeń zmniejsza swoją grubość (rys. 11) w miarę upływu czasu.



Rys. 11. Rozkład ciśnień pionowych i odkształcenia półpł. i obudowy

Zmniejszenie się grubości wydzielonej warstwy półpłaszczyzny obliczono z różnicy przemieszczeń punktów (1) i (2).

Przemieszczenie punktów (1) i (2) półpłaszczyzny od obciążenia ciężarem własnym górotworu nad wyrobiskiem, obliczono całkując wyrażenie (21) dla obciążenia ciągłego $q = \gamma\, dz$ względem zmiennej z w granicach od $z = 0$ do $z = H_1$ dla punktu (1) i od $z = h$ do $z = H_2$ dla punktu (2)

$$u_1 = -\frac{\gamma}{2\pi G(1+\nu)}\left[1-\exp\left(-\frac{t}{T}\right)\right]\int_0^{H_1}\left[2a\ln\left|\frac{a^2+z^2}{b^2}\right| - 2(1-\nu)\left(a - z\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{a}{z}\right)\right]dz$$

$$u_2 = -\frac{\gamma}{2\pi G(1+\nu)}\left[1-\exp\left(-\frac{t}{T}\right)\right]\int_0^{H_2}\left[2a\ln\left|\frac{a^2+z^2}{b^2}\right| - 2(1-\nu)\left(a - z\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{a}{z}\right)\right]dz \tag{24}$$

Po scałkowaniu i przekształceniu otrzymano

$$u_1 = -\frac{\gamma}{2\pi G(1+\nu)}\Big[2aH_1\ln\left|a^2+H_1^2\right| - 4aH_1 + 4a^2\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{H_1}{a} -$$

$$- 2aH_1\ln\left|b^2\right| - (1-\nu)aH_1 + (1-\nu)(a^2+H_1^2)\,\mathrm{arc\,ctg}\,\frac{H_1}{a}\Big]\cdot\left[1-\exp\left(-\frac{t}{T}\right)\right]$$

$$u_2 = -\frac{\gamma}{2\pi G(1+\nu)}\Big[2aH_2\ln\left|a^2+H_2^2\right| - 2ah\ln\left|a^2+h^2\right| -$$

$$- 4a(H_2-h) + 4a^2\left(\mathrm{arc\,tg}\,\frac{H_2}{a} - \mathrm{arc\,tg}\,\frac{h}{a}\right) - \tag{25}$$

$$- 2a\ln\left|b^2\right|(H_2-h) - (1-\nu)a(H_2-h) +$$

$$+(1-\nu)(a^2+H_2^2)\,\mathrm{arc\,ctg}\,\frac{H_2}{a} - (1-\nu)(a^2+h^2)\,\mathrm{arc\,ctg}\,\frac{h}{a}\Big]\cdot\left[1-\exp\left(\frac{t}{T}\right)\right]$$

Zmniejszenie grubości wydzielonej warstwy obliczono z różnicy pomieszczeń punktu (1) i (2)

$$\Delta u = \frac{\gamma}{2\pi G(1+\nu)}\Big\{2a\Big[H_2\ln\left|a^2+H_2^2\right| - H_1\ln\left|a^2+H_1^2\right| - h\ln\left|a^2+h^2\right|\Big] -$$

$$- 4a^2\left(\mathrm{arc\,tg}\,\frac{H_1}{a} - \mathrm{arc\,tg}\,\frac{H_2}{a} + \mathrm{arc\,tg}\,\frac{h}{a}\right) -$$

$$- (1 - \nu)\left[(a^2 + H_1^2) \operatorname{arc\,ctg} \frac{H_1}{a} - (a^2 + H_2^2) \operatorname{arc\,ctg} \frac{H_2}{a} + \right.$$

$$\left. + (a^2 + h^2) \operatorname{arc\,ctg} \frac{h}{a}\right]\Big\}\left[1 - \exp(- \frac{t}{T})\right] \tag{26}$$

Oznaczając wyrażenie w nawiasach $\{\ \}$ symbolem ϕ_1 otrzymano:

$$\Delta u = \frac{\gamma}{2\pi G(1+\nu)} \phi_1 \left[1 - \exp(- \frac{t}{T})\right] \tag{27}$$

Ciśnienie na budowę wyrobiska wzrasta proporcjonalnie do zmiany grubości wydzielonej warstwy półpłaszczyzny.

od wartości $p_z = 0$ dla $t = 0$

do wartości $p_z = \frac{\gamma}{\pi} \phi_2$ dla $t = t_1$

gdzie

$$\phi_2 = 2(H \operatorname{arc\,ctg} \frac{H}{a} + a \ln \left|\frac{a^2 + H^2}{a^2}\right| \tag{28}$$

Wartość t_1 obliczono z warunku jednakowych odkształceń półpłaszczyzny i obudowy, od obciążenia słupem górotworu rozchodzącego się promieniowo

$$\Delta u = u_{ob}$$

$$\frac{\gamma}{2\pi G(1+\nu)} \phi_1 \left[1 - \exp(- \frac{t}{T})\right] = \frac{\gamma}{\pi \lambda_{ob}} \phi_2 \tag{29}$$

gdzie

$u_{ob} = \frac{p_z}{\lambda_{ob}}$ - odkształcenie sprężyste obudowy,

λ_{ob} - współczynnik sztywności obudowy

stąd

$$t_1 = T \ln \left|\frac{1}{1 - \frac{2G(1+\nu)}{\lambda_{ob}} \cdot \frac{\phi_2}{\phi_1}}\right| \tag{30}$$

W czasie $0 < t \leqslant t_1$ ciśnienie na obudowę zmienia się wg wzoru:

$$p_z = \frac{\gamma}{2\pi G(1+\nu)} \frac{\phi_1}{\lambda_{ob}} \left[1 - \exp(- \frac{t}{T})\right] \tag{31}$$

W miarę dalszych odkształceń półpłaszczyzny (rys. 10) następuje podział obciążenia (rozpatrując obciążenie q rozłożone na odcinku $2a$) w taki sposób, że część obciążenia q_1 rozkłada się promieniowo na obudowę i półpłaszczyznę oraz część $q_2 = q - q_1$ które przekazuje się bezpośrednio na obudowę.

Obciążenie obudowy pz_2 wzrastać będzie proporcjonalnie do odkształceń półpłaszczyzny

$$pz_2 = q_2 \left[1 - \exp\left(-\frac{t - t_1}{T}\right)\right] \tag{32}$$

Naprężenie w półpłaszczyźnie zmienia się wg wzoru:

$$pz_1 = \left\{q - q_2\left[1 - \exp\left(-\frac{t - t_1}{T}\right)\right]\right\}\frac{1}{\pi}\phi_4 \tag{33}$$

Podział obciążeń dokonuje się tak, że w każdej chwili $t > t_1$ zachodzi równość odkształceń półpłaszczyzny i obudowy. Nieznaną wielkość q_2 obliczono z końcowego podziału obciążenia dla $t = \infty$

Odkształcenie wydzielonej warstwy półpłaszczyzny od obciążenia q_1 dla $t = \infty$ wynosi:

$$\Delta u = \frac{q_1}{2\pi G(1+\nu)}\phi_3 = \frac{q - q_2}{2\pi G(1+\nu)}\phi_3 \tag{34}$$

gdzie

$$\phi_3 = 2a \ln\left|\frac{a^2 + H_2^2}{a^2 + H_1^2}\right| - 2(1 - \nu')(H_1 \operatorname{arc\,tg}\frac{a}{H_1} - H_2 \operatorname{arc\,tg}\frac{a}{H_2}) \tag{35}$$

Odkształcenie sprężyste obudowy

$$u_{ob} = \frac{q_1}{\pi\lambda_{ob}}\phi_4 + \frac{q_2}{\lambda_{ob}} = \frac{q - q_2}{\pi\lambda_{ob}}\phi_4 + \frac{q_2}{ob} \tag{36}$$

Z warunku jednakowych odkształceń półpłaszczyzny i obudowy obliczono wartość q_2

$$\Delta u = u_{ob}$$

$$\frac{q - q_2}{2\pi G(1+\nu)}\phi_3 = \frac{q - q_2}{\pi\lambda_{ob}}\phi_4 + \frac{q_2}{\lambda_{ob}} \tag{37}$$

stąd

$$q_2 = \frac{q(\phi_3 - \beta\phi_4)}{\phi_3 - \beta\phi_4 + \pi\beta} \tag{38}$$

gdzie

$$\beta = \frac{2G(1+\nu)}{\lambda_{ob}}$$

Rozpatrując podział obciążeń od ciężaru poszczególnej warstwy górotworu $q_i = \gamma \cdot \Delta H$ wg powyższego rozumowania, obliczono obciążenie przekazujące się bezpośrednio na obudowę od ciężaru i-tej warstwy dla $t > t_1$ ze wzoru:

$$pz_2(i) = \gamma\Delta H\, \psi_{(i)} \left[1 - \exp\left(-\frac{t - t_1}{T}\right)\right] \tag{39}$$

w którym

$$\psi_{(i)} = \frac{\phi_3(i) - \beta\phi_4(i)}{\phi_3(i) - \beta\phi_4(i) + \pi\beta} \tag{40}$$

Ciśnienie przekazujące się promieniowo na obudowę i półpłaszczyznę

$$q_1(i) = \gamma\Delta H \left\{1 - \psi_{(i)}\left[1 - \exp\left(-\frac{t - t_1}{T}\right)\right]\right\} \tag{41}$$

Sumując wpływy od poszczególnych warstw od i = 1 do i = n otrzymano całkowite ciśnienie na obudowę, które określa wzór

$$pz = \sum_{i=1}^{i=n} \left(q_1(i)\, \frac{1}{\pi}\, \phi_4(i) + pz_2(i)\right) \tag{42}$$

Po wprowadzeniu oznaczeń i przekształceniu otrzymano

$$pz = \gamma \cdot \Delta H \sum_{i=1}^{i=n} \left\{\left[1 - \psi_{(i)}\left[1 - \exp\left(-\frac{t-t_1}{T}\right)\right]\right] \frac{1}{\pi}\, \phi_4(i) + \psi_{(i)}\left[1 - \exp\left(\frac{t-t_1}{T}\right)\right]\right\} \tag{43}$$

gdzie

$n = \frac{H}{\Delta H}$ - ilość wydzielonych warstw,

i - numer warstwy.

4.3. Odkształcenie półpłaszczyzny (zadanie Melana)

Wyrażenia na naprężenia dla przypadku siły skupionej wewnątrz półpłaszczyzny rys. 12 przedstawiają się następująco:

$$\sigma_z = \frac{p}{2\pi}\left\{(1+\nu')\left[\frac{(z-d)^3}{r_1^4} + \frac{(z+d)\left[(z+d)^2 + 2d\,.\,z\right]}{r_2^4} - \frac{8d\,.\,z(d+z)x^2}{r_2^6}\right] + \right.$$

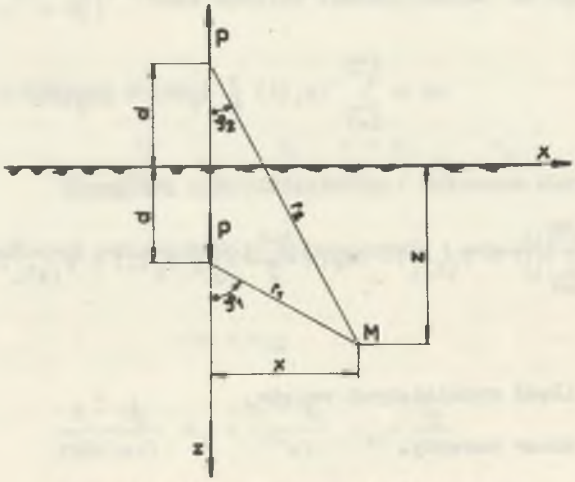
$$\left. + \left(\frac{1-\nu'}{2}\right)\left(\frac{z-d}{r_1^2} - \frac{3z+d}{r_2^2} - \frac{4z\,.\,x^2}{r_2^4}\right)\right\}$$

$$\sigma_x = \frac{p}{2\pi}\left\{(1+\nu')\left[\frac{(z-d)x^2}{r_1^4} + \frac{(z+d)(x^2+2d^2)-2dx^2}{r_2^4} + \frac{8d\,.\,z(d+z)x^2}{r_1^6}\right] + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1-\nu'}{2}\right)\left(-\frac{z-d}{r_1^2} + \frac{z+3d}{r_2^2} + \frac{4z\,x^2}{r_2^4}\right)\right\} \tag{44}$$

$$\tau_{xz} = \frac{p\,.\,x}{2\pi}\left\{(1+\nu')\left[\frac{(z-d)^2}{r_1^4} + \frac{z^2-2\,dz-d^2}{r_1^4} + \frac{8\,dz(d+z)^2}{r_2^6}\right] + \right.$$

$$+ \left(\frac{1-\nu'}{2}\right)\left[\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} + \frac{4z(d+z)}{r_2^4}\right]$$



Rys. 12. Siła wewnątrz półpłaszczyzny

Odkształcenia jednostkowe dla płaskiego stanu naprężenia i odkształcenia określają wzory (16).

Przemieszczenia U i V punktu o współrzędnych (x, z) obliczono całkując wyrażenia (16)

$$u = \int \frac{1}{2G(1+\nu')} (\sigma_z - \nu'\sigma_x)\, dz$$
$$v = \int \frac{1}{2G(1+\nu')} (\sigma_x - \nu'\sigma_z)\, dx \tag{45}$$

Po podstawieniu wyrażeń (44) do wzorów (45) i scałkowaniu otrzymano:

$$u = \frac{p}{2\pi G(1+\nu')}\Big\{(1+\nu')\Big[\ln|r_1 \cdot r_2| + \frac{x^2 - 4d \cdot z - 2d^2}{2r_2^2}\Big] + (1+\nu')^2\Big[\frac{x^2}{2r_1^2} + \frac{2dx^2 z}{r_2^4}\Big] +$$
$$+ \nu'(1+\nu')\Big[\frac{x^2 + 2d^2}{2r_2^2}\Big] + \frac{1}{2}(1-\nu'^2)\Big[\ln|r_1| + \frac{2(x^2 + d \cdot z + d^2)}{r_2^2}\Big]$$
$$+ \Big(\frac{1-\nu'}{2}\Big)(3-\nu') \cdot \ln|r_2|\Big\} \tag{46}$$

$$v = \frac{p}{2\pi G(1+\nu')}\Big\{(1+\nu')\Big[-\frac{x(z-d)}{2r_2^2} + \frac{dx(d^2 - z^2 + x^2)}{r_2^4}\Big] - (1+\nu')^2 \frac{x(z-d)}{2r_1^2} +$$
$$+ \frac{1}{2}(1-\nu'^2)\Big[\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{z+d} - \frac{2xz}{r_2^2}\Big] + \nu'(1+\nu')\Big[-\frac{x(z+d)}{2r_2^2} +$$
$$+ \frac{2(z+d)d \cdot x \cdot z}{r_2^4}\Big] + \frac{1}{2}(1-\nu')(3-\nu')\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{z+d}\Big\}$$

Przemieszczenie pionowe punktu leżącego na osi symetrii od obciążenia ciągłego równomiernie rozłożonego na odcinku 2a otrzymano ze związku (46) wyprowadzonego dla siły skupionej, po zastąpieniu P przez q dx i scałkowaniu w granicach od - a do + a.

$$u = \frac{q}{2\pi G(1+\nu)}\Big\{(1+\nu)\Big[a\ln\left|(z-d)^2+a^2\right| + a\ln\left|(z+d)^2+a^2\right|\Big] -$$

$$-(1+\nu)^2\left[\frac{2a\cdot d\cdot z}{(z+d)^2+a^2}\right] + \frac{1}{2}(1-\nu^2)\Big[a\ln\left|(z-d)^2+a^2\right| + 4(z-d)\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{z-d}$$

$$-2(z+d)\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{z+d}\Big] + \frac{1}{2}(1-\nu)(3-\nu)\Big[a\ln\left|(z+d)^2+a^2\right| +$$

$$+2(z+d)\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{z+d}\Big] - 4(1-\nu)a\Big\} \tag{47}$$

Zmianę grubości wydzielonej warstwy tarczy o grubości h (równej wysokości wyrobiska) obliczono z różnicy przemieszczeń punktów (1) i (2) (obliczonych z wzoru (47)).

$$\Delta u = \frac{q}{2\pi G(1+\nu)}\Big\{(1+\nu)\Big[a\ln\left|\frac{(H_1-d)^2+a^2}{(H_2-d)^2+a^2}\right| + a\ln\frac{(H_1+d)^2+a^2}{(H_2+d)^2+a^2}\Big]$$

$$-2a(1+\nu)^2\left[\frac{d\cdot H_1}{(H_1+d)^2+a^2} - \frac{d\cdot H_2}{(H_2+d)^2+a^2}\right]$$

$$+\frac{1}{2}(1-\nu^2)\Big[a\ln\left|\frac{(H_1-d)^2+a^2}{(H_2-d)^2+a^2}\right| + 4\Big[(H_1-d)\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{H_1-d} -$$

$$-(H_2-d)\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{H_2-d}\Big] - 2\Big[(H_1+d)\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{H_1+d} - (H_2+d)\operatorname{arc\,tg}-\frac{a}{H_2+d}\Big]\Big]\Big\}$$

$$+\frac{1}{2}(1-\nu)(3-\nu)\Big\{a\ln\frac{(H_1+d)^2+a^2}{(H_2+d)^2+a^2} + 2\Big[(H_1+d)\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{H_1+d} -$$

$$-(H_2+d)\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{H_2+d}\Big]\Big\}\Big\} \tag{48}$$

Przemieszczenie punktów (1) i (2) półpłaszczyzny od obciążenia ciężarem własnym warstw górotworu nad wyrobiskiem obliczono całkując wyrażenie (47) (dla obciążenia ciągłego q) względem zmiennej $\zeta = d$ w granicach od $\zeta = 0$ do $\zeta = H$,
gdzie

$$q = \gamma\cdot d\zeta$$

$$u_1 = \frac{\gamma}{2\pi G(1+\nu)}\Big\{(1+\nu)\, a\Big[-4\, H_1 + 2H_1 \ln\left|4\, H_1^2 + a^2\right| + 2\, a \operatorname{arc\,tg} \frac{2\, H_1}{a}\Big] -$$

$$-(1+\nu)^2 \cdot a \cdot H_1\Big[\ln\left|4\, H_1^2 + a^2\right| - \ln\left|H_1^2 + a^2\right| - \frac{2\, H_1}{a}\left(\operatorname{arc\,tg} \frac{2H_1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{H_1}{a}\right)\Big] +$$

$$+ \frac{1}{2}(1-\nu)\Big[-5a \cdot H_1 + a\, H_1 \cdot \ln\left|H_1^2 + a^2\right| + 2a^2 \operatorname{arc\,tg} \frac{H_1}{a} - (H_1^2 + a^2) \operatorname{arc\,ctg} \frac{H_1}{a}$$

$$- (4\, H_1^2 + a^2) \operatorname{arc\,ctg} \frac{2\, H_1}{a}\Big] + \frac{1}{2}(1-\nu)(3-\nu)\Big[2\, a\, H_1 \ln\left|4\, H_1^2 + a^2\right|$$

$$- a \cdot H_1 - a\, H_1 \ln\left|H_1^2 + a^2\right| + (4\, H_1^2 + a^2) \operatorname{arc\,ctg} \frac{2\, H_1}{a} - (H_1^2 + a^2) \operatorname{arc\,ctg} \frac{H_1}{a}$$

$$- 4(1-\nu)\, a \cdot H_1\Big\} \tag{49}$$

$$u_2 = \frac{\gamma}{2\pi G(1+\nu)}\Big\{(1+\nu)a\Big[-h \ln\left|h^2 + a^2\right| - 4H_1 + (H_1 + H_2)\ln\left|(H_1 + H_2)^2 + a^2\right| + 2a\Big(\operatorname{arc\,tg} \frac{H_1 + H_2}{a}$$

$$-\operatorname{arc\,tg} \frac{h}{a}\Big)\Big\} - (1+\nu)^2 a \cdot H_2\Big[\ln\left|(H_1 + H_2)^2 + a^2\right| - \ln\left|H_2^2 + a^2\right| - \frac{2H_2}{a}\Big(\operatorname{arc\,tg} \frac{H_1 + H_2}{a} - \operatorname{arc\,tg} \frac{H_2}{a}\Big)\Big]$$

$$+ \frac{1}{2}(1-\nu^2)\Big[a\, H_2 \ln\left|H_2^2 + a^2\right| - a\, h \ln\left|h^2 + a^2\right| - 5a\, H_1 -$$

$$- (H_2^2 + a^2) \operatorname{arc\,ctg} \frac{H_2}{a} - 2a\Big(\operatorname{arc\,tg} \frac{h}{a} - \operatorname{arc\,tg} \frac{H_2}{a}\Big)$$

$$+ 2(h^2 + a^2) \operatorname{arc\,ctg} \frac{h}{a} - ((H_1 + H_2)^2 + a^2) \operatorname{arc\,ctg} \frac{H_1 + H_2}{a}\Big] +$$

$$+ \frac{1}{2}(1-\nu)(3-\nu)\Big[a(H_1 + H_2) \ln\left|(H_1 + H_2)^2 + a^2\right| - a\, H_2 \ln\left|H_2^2 + a^2\right| - a \cdot H_1$$

$$+ 2a\Big(\operatorname{arc\,tg} \frac{H_1 + H_2}{a} - \operatorname{arc\,tg} \frac{H_2}{a}\Big) + \Big[(H_1 + H_2)^2 + a^2\Big] \operatorname{arc\,ctg} \frac{H_1 + H_2}{a}$$

$$- (H_2^2 + a^2) \operatorname{arc\,ctg} \frac{H_2}{a}\Big] - 4(1-\nu)\, a\, H_1\Big\}$$

Zmniejszenie się grubości wydzielonej warstwy półpłaszczyzny o grubości h obliczono z różnicy przemieszczeń punktów (1) i (2).

$$\Delta u = \frac{\gamma}{2\pi G(1+\nu)} \Big\{ (1+\nu) a \Big[2 H_1 \ln\left|4 H_1^2 + a^2\right| - (H_1+H_2) \ln\left|(H_1+H_2)^2 + a^2\right| +$$

$$+ h \ln\left|h^2+a^2\right| + 2a\left(\operatorname{arc\,tg} \frac{2 H_1}{a} - \operatorname{arc\,tg} \frac{H_1 + H_2}{a} + \operatorname{arc\,tg} \frac{h}{a}\right) \Big]$$

$$-(1+\nu)^2 a \Big[H_1 \ln\left|\frac{4H_1^2+a^2}{H_1^2+a^2}\right| - H_2 \ln\left|\frac{(H_1+H_2)^2+a^2}{H_2^2+a^2}\right| - \frac{2 H_1^2}{a} \left(\operatorname{arc\,tg} \frac{2H_1}{a} - \operatorname{arc\,tg} \frac{H_2}{a}\right.$$

$$\left. + \frac{2 H_2^2}{a} \left(\operatorname{arc\,tg} \frac{H_1 + H_2}{a} - \operatorname{arc\,tg} \frac{H_2}{a}\right)\right) \Big] + \frac{1}{2} (1-\nu^2) \Big[a H_1 \ln\left|H_1^2 + a^2\right| +$$

$$+ 2 a^2 \operatorname{arc\,tg} \frac{H_1}{a} - (H_1^2 + a^2) \operatorname{arc\,ctg} \frac{H_1}{a} - (4 H_1^2 + a^2) \operatorname{arc\,ctg} \frac{2 H_1}{a}$$

$$+ a h \ln\left|h^2+a^2\right| - a H_2 \ln\left|H_2^2+a^2\right| + \left|H_2^2+a^2\right| \operatorname{arc\,ctg} \frac{H_2}{a}$$

$$+2a\left(\operatorname{arc\,tg} \frac{h}{a} - \operatorname{arc\,tg} \frac{H_2}{a}\right) - 2(h^2+a^2) \operatorname{arc\,ctg} \frac{h}{a} + \left(\left[H_1+H_2\right]^2+a^2\right) \operatorname{arc\,ctg} \frac{H_1+H_2}{a} \Big]$$

$$+ \frac{1}{2}(1-\nu)(3-\nu) \Big[2 a H_1 \ln\left|4 H_1^2+a^2\right| - a H_1 \ln\left|+(4H_1^2+a^2) \operatorname{arc\,ctg} \frac{2 H_1}{a}\right.$$

$$-(H_1^2+a^2) \operatorname{arc\,ctg} \frac{H_1}{a} - a(H_1+H_2) \ln\left|(H_1+H_2)^2+a^2\right| + a H_2 \ln\left|H_2^2+a^2\right|$$

$$-2a\left(\operatorname{arc\,tg} \frac{H_1+H_2}{a} - \operatorname{arc\,tg} \frac{H_2}{a}\right) - \left[(H_1+H_2)^2 + a^2\right] \operatorname{arc\,ctg} \frac{H_1+H_2}{a}$$

$$\left. - (H_2^2 + a^2) \operatorname{arc\,ctg} \frac{H_2}{a} \Big] \Big\} \tag{50}$$

Oznaczając wyrażenie w nawiasach $\{\ \}$ wzór (50) symbolem ϕ_1 oraz stosując zasadę Alfreya otrzymano wzór na wielkość zmiany grubości warstwy półpłaszczyzny o modelu reologicznym Kelvina:

$$\Delta u = \frac{\gamma}{2\pi G(1+\nu)} \phi_1 \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{T}\right)\right] \tag{51}$$

Czas t_1, w którym odkształcenie wydzielonej warstwy i obudowy od obciążenia bryłą górotworu nad wyrobiskiem rozchodzącego się wg "promieniowego rozkładu" są jednakowe obliczono wg wzoru (30)
gdzie

ϕ_1 - wyrażenie w nawiasach $\{\ \}$ równania wzór (50),

ϕ_2 - " " $\{\ \}$ równania wzór (10).

Całkowite ciśnienie pionowe na obudowę

dla $t \leqslant t_1$ określa wzór

$$pz = \frac{\gamma}{2\pi G(1+\nu)} \frac{\phi_1}{\lambda_{ob}} \left[1 - \exp(-\frac{t}{p})\right] \tag{52}$$

dla $t > t_1$ określa wzór

$$pz = \gamma \cdot \Delta H \sum_{i=1}^{i=n} \left\{ \left[1 - \psi_{(i)} \left[1 - \exp(-\frac{t - t_1}{T})\right]\right] \frac{1}{\pi} \phi_{4(i)} + \right.$$

$$\left. + \psi_{(i)} \left[1 - \exp(\frac{t - t_1}{T})\right]\right\} \tag{53}$$

w którym

$$\psi_{(i)} = \frac{\phi_3(i) - \beta\phi_4(i)}{\phi_3(i) - \beta\phi_4(i) + \pi\beta} \tag{54}$$

gdzie

$\phi_3(i)$ - wyrażenie w nawiasach równania wzór (48), przedstawiające współczynnik zmiany grubości warstwy od obciążenia $q_{(i)}$

$$\phi_4(i) = \left\{(1+\nu)\left[\frac{(H_1-d_{(i)}))\ a_1}{2\left[(H_1-d_{(i)})^2+a^2\right]} + \frac{2\ H_1\ d_{(i)}(H_1+d_{(i)})a}{\left[(H_1+d_{(i)})^2+a^2\right]} + \frac{d_{(i)}\ a}{2\left[(H_1+d_{(i)})^2+a^2\right]}\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{(3-\nu)H_1 \cdot a}{2\left[(H_1+d_{(i)}+a^2\right]} + \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{H_1+d_{(i)}} + \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{H_1+d_{(i)}} \right\} \tag{55}$$

$\phi_4(i)$ - współczynnik rozkładu naprężeń od obciążenia $q_{(i)}$ równomiernie rozłożonego na głębokości $d_{(i)}$.

4.4. Przybliżony sposób określania ciśnień bocznych

Przy drążeniu wyrobisk tunelowych spotykamy się z zagadnieniem deformacji warstw przy jednej płaszczyźnie odsłonięcia w kierunku, której skały głównie ulegają odkształceniu.

Elementarny sześcian górotworu na ociosie wyrobiska znajduje się przed wykonaniem wyrobiska w trójosiowym stanie napięcia.

Z chwilą drążenia wyrobiska usunięte zostaje naprężenie poziome zaś ciśnienie pionowe na ociosie wyrobiska przyjmuje wartość

$$p_z = \gamma \cdot H + p_{z_1} \tag{56}$$

W związku z tym, że wydzielony sześcian nie może odkształcać się poprzecznie (w kierunku długości wyrobiska) wyrażenie na jednostkowe odkształcenie poziome zgodnie z prawem Hooke'a wyraża się wzorem

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[(1-\nu^2)\, p_x - \nu\,(1+\nu)\, p_z\right] \tag{57}$$

gdzie E - moduł sprężystości górotworu.

Przemieszczenie w kierunku wyrobiska obliczono całkując wyrażenie (57)

$$\Delta l = \frac{1}{E}\int_0^l \left[(1-\nu^2)\, p_x - \nu\,(1+\nu)\, p_z\right] d_x$$

Po scałkowaniu otrzymano:

$$\Delta l = \frac{1}{E}\left[(1-\nu^2)\, p_x \cdot l - \nu\,(1+\nu)\, p_z\, l\right. \tag{58}$$

gdzie l - głębokość strefy odkształcenia, określona doświadczalnie.

Przemieszczenie poziome dla ośrodka Kelvina zgodnie z zasadą Alfreya wyraża się wzorem:

$$\Delta l = \frac{1}{2G(1+\nu)}\left[(1-\nu^2)\, p_x\, l - \nu\,(1+\nu)\, p_z\, l\right]\cdot\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{T}\right)\right] \tag{59}$$

gdzie $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ - moduł odkształcenia postaciowego.

W miarę odkształcenia się górotworu wzrasta ciśnienie na obudowę

$$px_{ob} = - px$$

ponieważ

$$\Delta u_{ob} = \Delta l$$

stąd

$$\Delta l = \frac{p_x}{\lambda_{ob}} \tag{60}$$

Podstawiając wyrażenia (60) do (59) i przekształceniu otrzymano:

$$p_x = \frac{\nu(1+\nu)\, p_z \cdot l\left[1 - \exp(-\frac{t}{T})\right]}{\beta + (1-\nu^2)\, l\left[1 - \exp(-\frac{t}{T})\right]} \tag{61}$$

w którym

$$\beta = \frac{2G(1+\nu)}{\lambda_{ob}}$$

Końcowa wielkość ciśnienia dla $t \to \infty$ zależy od wartości współczynnika λ_{ob} (sztywności obudowy)

$$\text{gdy } \lambda_{ob} = 0 \text{ to } p_x = 0$$

$$\text{gdy } \lambda_{ob} \to \infty \text{ to } p_x = \frac{\nu}{1-\nu}\, p_z \tag{62}$$

Wyrażenie (62) jest identyczne z wyrażeniem wyprowadzonym z warunku niemożliwości odkształcania się kostki na boki.

5. Porównanie wielkości ciśnień wynikających z wyprowadzonych wzorów z ciśnieniami z badań zagranicznych

Badania nad ciśnieniem górotworu spoistego na obudowę tuneli prowadzone były w warunkach naturalnych w czasie robót przy budowie metra w Detroit i Chicago oraz tunelu w Londynie.

Wg badań prowadzonych przez Housela [7] przy budowie tuneli w Detroit, ciśnienie końcowe na tunel przebiegający w iłach plastycznych i twardo plastycznych na głębokości 18 m wynosi 85% ciężaru nadkładu. Badano ciśnienie na obudowę tunelu o przekroju kołowym w obudowie żelbetowej średnicy zewnętrznej 3,88 m. Mierzono ciśnienia na obu końcach pionowej i poziomej średnicy tunelu oraz dodatkowo w 6 punktach na obwodzie. Stwierdzono wzrost ciśnienia z upływem czasu oraz zakończenie przebiegu narastania ciśnień po 5 latach. Po tym okresie ciśnienie już nie wzrastało. Ciśnienie obliczone wg wzoru (43) (przy przyjęciu współczynnika $\frac{2G(1+\nu)}{\lambda_{ob}} = 0{,}10a$, liczby Poissona $\nu = 0{,}35$) dla współczynnika głębokości $n = \frac{H}{a} = 9{,}25$ wynosi 76% ciężaru nadkładu.

W Londynie badania nad ciśnieniem górotworu spoistego prowadzili L. Cooling i W. Ward [7].

W 1942 r. wykonano pomiary ciśnień na obudowę tunelu o średnicy zewnętrznej 3,66 m wykonanym na głębokości 33 m w iłach plastycznych. Dwa inne tunele, badane w roku 1952 mają średnicę 7,65 m i przebiegają w iłach na głębokości 27 i 30 m. Badania wykazały, że na obudowę działa ciśnienie równe 60-70% ciężaru nadkładu.

Ciśnienie obliczone wg wyprowadzonego wzoru (43) wynosi 60-80% ciężaru nadkładu. Z porównań wynika, że wielkości ciśnień obliczone wg wzoru (43) są bardzo bliskie wartościom otrzymanym z badań zagranicznych w warunkach naturalnych. Zestawienie wyników podano w tablicy 1.

Tablica 1

Zestawienie wyników otrzymanych wg wzoru (43) dla $\beta = 0{,}10$ a, $\nu = 0{,}35$ oraz z badań zagranicznych wg [7]

Miejsce badań (wg danych)	Wyrobisko	Szerokość wyrobiska (średnica) 2a (m)	Głębokość H (m)	$n = \frac{H}{a}$	Ciśnienie w % ciężaru nadkładu	
					z obliczeń	z badań
Detroit wg W.S. Housela	tunel	3,88	18	9,25	76,5	85
Londyn wg L. Coolinga i W. Warda	tunel	3,66	33	18,0	63	
	tunel	7,65	30	7,85	79	
	tunel	7,65	27	7,05	80	60-70
	rurociąg	2,70	27	20,00	60,5	

Wg Sałustowicza [9] wielkość ciśnienia górotworu na kołowy pierścień obudowy przy wszechstronnym obciążeniu określa wzór

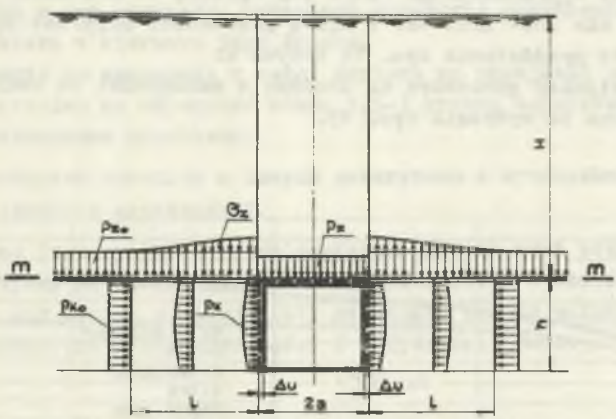
$$p_z = \frac{\gamma H}{1 + \frac{2G}{\lambda_{ob}\, a}} \left[1 - \exp(-\omega t)\right] \tag{63}$$

w którym

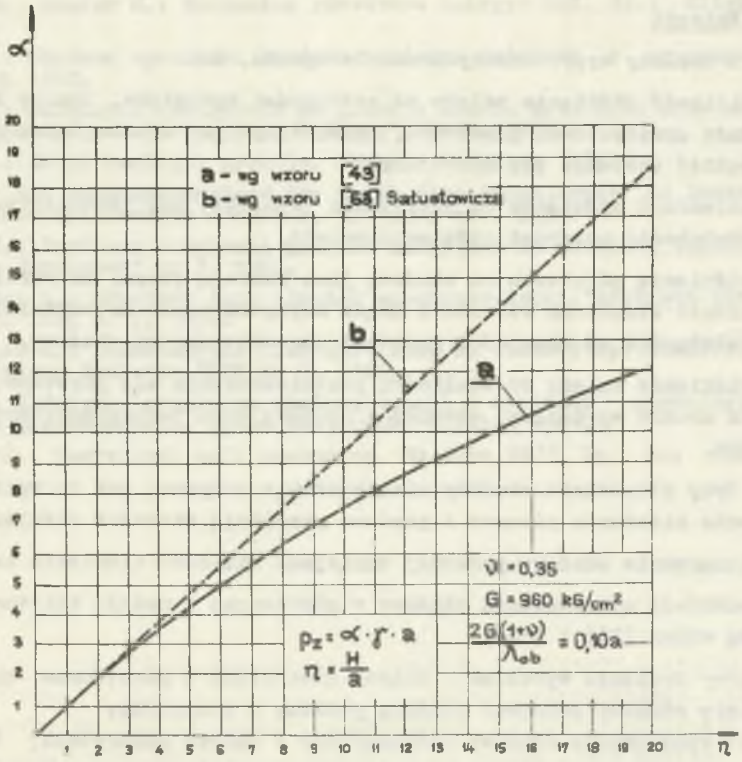
$$\omega = \frac{2G + \lambda_{ob}\, a}{2\eta}$$

Sałustowicz rozpatruje górotwór jako ośrodek jednorodny i nieściśliwy o modelu reologicznym Kelvina.

Z analizy wzoru (63) Sałustowicza wynika, że ciśnienie końcowe zmienia się liniowo w zależności od głębokości. Zależność tę przedstawia rys. 13 i 14 krzywa b.



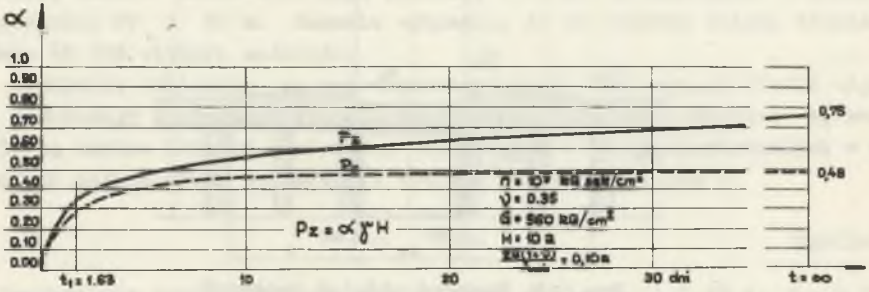
Rys. 13. Rozkład ciśnień bocznych



Rys. 14. Zależność ciśnienia od głębokości dla ośrodka reologicznego Kelvina

Z analizy wyprowadzonego wzoru (43 wynika, że zależność ciśnienia od głębokości nie jest liniowa. W miarę głębokości przyrost ciśnienia maleje Zależność tę przedstawia rys. 14 krzywa a.

Zmianę ciśnień górotworu na obudowę w zależności od czasu wg wzoru (43) przedstawiono na wykresie rys. 15.



Rys. 15. Zależność ciśnień od czasu (model Kelvina)

6. Wnioski

Z analizy wyprowadzonych wzorów wynika, że

- wielkość ciśnienia zależy od szerokości wyrobiska, liczby Poissona i modułu sprężystości górotworu, charakterystyki obudowy oraz głębokości na jakiej znajduje się wyrobisko,
- zależność ciśnienia od głębokości (rys. 14) nie jest liniowa. W miarę głębokości przyrost ciśnienia maleje,
- ciśnienie górotworu na obudowę jest funkcją czasu. Ze wzrostem czasu ciśnienie stopniowo wzrasta i zdąża asymptotycznie do wartości końcowej, zależności od własności gruntu i charakterystyki obudowy,
- ciśnienie zależy od wielkości przemieszczenia się górotworu w kierunku do środka wyrobiska, własności obudowy oraz technologii prowadzenia robót.

Przy stosowaniu obudowy nieskończenie sztywnej jak to wynika z analizy wzorów ciśnienia pionowe i poziome przyjmują wartości ciśnień pierwotnych

- stosowanie obudowy podatnej zmniejsza wielkość ciśnienia ostatecznego,
- wielkość upodatnienia obudowy w górotworze o modelu Kelvina oblicza się wg wzoru (26) i (58),
- przy drążeniu wyrobisk o dużych gabarytach w górotworze sprężystym należy również stosować obudowę podatną w przypadku:
  1) wykonywanie obudowy (szczególnie o dużych gabarytach) tuż za czołem przodku w górotworze jeszcze nieodkształconych sprężyście.

Czoło przodku w tym przypadku ogranicza sprężyste przemieszczenie się obrysu wyrobiska w kierunku jego środka.
Przemieszczenie to występuje w pełni dopiero po przejściu naprzód z robotami w przodku na odległość równą 1,5-3 krotną największemu wymiarowi poprzecznemu wyrobiska.

2) Wykonania połączeń wyrobisk o dużych gabarytach z wyrobiskami już wykonanymi w obudowie ostatecznej.

- Ciśnienie boczne jest wynikiem przemieszczenia się na boki poziomej warstwy półpłaszczyzny po naruszeniu równowagi pierwotnej w czasie drążenia wyrobiska. Jak wynika z wzoru (61) ciśnienie boczne zależy od ciśnienia pierwotnego, na danej głębokości i sztywności obudowy.

LITERATURA

[1] Borecki M., Szczurowski A.: Obciążenie i praca obudowy wyrobisk chodnikowych. Przegląd Górniczy nr 3, 1954.

[2] Borecki M., Chudek M.: Mechanika górotworu (skrypt Pol. Śl.) Gliwice, 1968.

[3] Chudek M.: Obudowa wyrobisk. Obudowa kamienna metalowa i mieszana. Wyd. Śląsk 1968.

[4] Kisiel J.: Działanie obciążenia na grunt o modelu M/V. Siła skupiona na półpłaszczyźnie. "Arch. Inż. Lądowej", nr 2, 1964.

[5] Kisiel J.: Zarys reologii gruntów. Arkady. Warszawa 1966.

[6] Melan E.: Der spannungszustand der durch eine Einzelkraft im Innern beanspruchte Halbscheibe ZAMM.XII, G, 1932, str. 343.

[7] Rossman J.: Problemy ciśnienia gruntów spoistych na obudowę tuneli. "Archiwum Górnictwa" nr 3, 1963.

[8] Sałustowicz A.: Górotwór jako ośrodek sprężysto-lepki. "Archiwum Górnictwa" t. III, z. 2, 1958.

[9] Sałustowicz A.: Deformacyjne ciśnienie skał na obudowę wyrobisk. Projekty Problemy Biuletyn BPPW nr 7, 1965.

[10] Świst E.: Ciśnienie gruntu na obudowę tuneli i wyrobisk górniczych na małych głębokościach. Praca doktorska. Gliwice 1969.

[11] Terzaghi K.: Teoretical soil mechanics. Mo Graw Hill Co, New Jork 1948.

ДАВЛЕНИЕ ГОРНОГО МАССИВА, ДЕЙСТВУЮЩЕЕ НА КРЕПЛЕНИЕ ТУННЕЛЕЙ И ГОРНЫХ ВЫРАБОТОК НА МАЛЫХ ГЛУБИНАХ

Р е з ю м е

В работе представлен актуальный уровень знаний в области определения давлении массива горных пород на крепление туннелей, а также выработок при проходке штреками на малых глубинах. Основываясь на теоретические рассуждения, авторы сделали попытку вывести оригинальные формулы для определения величины давлений горного массива на крепление выработок этого типа с учётом параметра времени.

THE ROCK MASS PREASURE ACTIVITY IN ACTION ON TIMBER LINING IN MINING TUNEL DRIFTS O SMALL DEPTHNESS

S u m m a r y

In this work was introduce actual knowledge situation in sphere defining about rock mass preasure on tomber lining in tunel drifts, and pasage excavations which wears the stone on small depthness. In theoritic consideration the authors were undertake the origunal formula test on defining of rock mass large preasure on timber lining on this type excavations with time parametric into account.