ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Nr 76 Elektryka z.14 1963

ZYGMUNT NOWOMIEJSKI

Katedra Podstaw Elektrotechniki

WPŁYW WAHAŃ CZĘSTOTLIWOŚCI NA MOC BIERNĄ[x)]

Streszczenie. W pracy zajęto się obliczeniem energii pola elektromagnetycznego, którego źródłami są funkcje gęstości o przebiegach prawie monochromatycznych. Funkcje te otrzymujemy przez modulację amplitudy i fazy oraz przy założeniu wahania częstotliwości wokół pewnej częstotliwości podstawowej.

Wychodząc z równań pola i określenia funkcji gęstości prądu oraz ładunku elektrycznego w układzie o przebiegach prawie monochromatycznych dochodzi się do równań określających wielkość energii magnetycznej i elektrycznej zawartej w polu a zależnej od pulsacji przebiegów.

Poniżej przedstawiona praca jest poświęcona obliczeniu energii w polu elektromagnetycznym, którego źródłem są funkcje gęstości o przebiegu prawie monochromatycznym.

Licząc w wymiarowym układzie MKSA, mamy:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \bar{H} &= \bar{j} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \bar{K} &= - \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \end{aligned} \tag{1}$$

gdzie $\bar{B}, \bar{K}, \bar{H}, \bar{D}$ są podstawowymi wektorami pola a $\bar{j}$ jest funkcją gęstości prądu elektrycznego w $\left[\frac{A}{m^2}\right]$.

x) Referat wygłoszony na V seminarium maszyn, napędów i urządzeń elektrycznych [p. Elektryka 13/62].

Jeśli φ i $\bar{A}$ są potencjałami pola, to:

$$- \operatorname{grad} \varphi = \vec{K} + \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \bar{A} = \bar{B} \tag{2}$$

Interesują nas obwody elektryczne zasilane generatorami prądu zmiennego, które posiadają tę własność, iż utrzymują oddzielone i prawie okresowo się zmieniające koncentracje dodatnich i ujemnych naboi między końcówkami. Wewnętrzną własność generatora, która jest odpowiedzialna za utrzymanie dodatnich i ujemnych naboi jest SEM. Może ona być przedstawiona przez pole elektryczne (zewnętrzne) $\bar{K}_g$ w obszarze generującym. Rzeczywisty generator może być aproksymowany przez obszar pola, w którym wektorowe prawo Ohma: $\bar{j} = \gamma \bar{K}$ (γ = przewodność właściwa obszaru) jest uogólnione przez dodanie pola zewnętrznego, tj. zachodzi:

$$\bar{j} = (\bar{K} + \bar{K}_g) \tag{3}$$

Na podstawie (2) i (3), otrzymamy:

$$\bar{K}_g = \frac{\bar{j}}{\gamma} + \operatorname{grad} \varphi + \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \tag{4}$$

Całkowity przyrost energii w rozpatrywanym obszarze τ wynosi:

$$\frac{dw}{dt} = \iiint_{\tau} \bar{K}_g \cdot \bar{j} \, dz \tag{5}$$

(Kładziemy: $\frac{\partial \bar{D}}{\partial t} = 0$).

Stąd:

$$\frac{dW}{dt} = \iiint\limits_{\tau} \frac{\bar{j} \cdot \bar{j}}{\gamma} d\tau - \iiint\limits_{\tau} \bar{j} \cdot K \, d\tau$$

$$= \iiint\limits_{\tau} \frac{\bar{j} \cdot \bar{j}}{\gamma} d\tau + \iiint \bar{j} \cdot \operatorname{grad} \varphi \, d\tau + \iiint\limits_{\tau} \bar{j} \cdot \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} d\tau \quad (6)$$

Mamy:

$$\operatorname{div} \bar{j}\varphi = \varphi \operatorname{div} \bar{j} + \bar{j} \cdot \operatorname{grad} \varphi$$

oraz:

$$\iiint\limits_{\tau} \operatorname{div} \bar{j}\varphi \, d\tau = \iint\limits_{S} \bar{n} \cdot \bar{j}\varphi \, dS$$

gdzie: $\bar{n}$ jest normalnym wektorem jednostkowym a S jest powierzchnią otaczającą τ. W naszym układzie zasada ciągłości przyjmuje postać:

$$(\mathrm{I}) \quad \operatorname{div} \bar{j} = 0$$

$$(\mathrm{II}) \quad \bar{n} \cdot \bar{j} = \frac{\partial \sigma}{\partial t}$$

gdzie σ jest funkcją gęstości naboju elektrycznego na powierzchni S lub powierzchniach S_{τ} znajdujących się wewnątrz τ.

Uwzględniając powyższe i wstawiając do (6), otrzymamy:

$$\frac{dW}{dt} = \iiint\limits_{\tau} \frac{\bar{j} \cdot \bar{j}}{\gamma} d\tau + \iint\limits_{S_{\tau}} \varphi \frac{\partial \sigma}{\partial t} dS + \iiint\limits_{\tau} \bar{j} \cdot \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} d\tau \quad (7)$$

Pierwszy wyraz z prawej strony wyrażenia (7) jest proporcjonalny do ciepła Joule'a, drugi jest przyrostem energii "elektrycznej" na jednostkę czasu zmagazynowanej w układzie a trzeci jest przyrostem energii "magnetycznej" na jednostkę czasu tego układu.

Czyli:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= \iiint\limits_{\tau} \bar{j} \cdot \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}\, d\tau \\ \frac{dV}{dt} &= \iint\limits_{S_\tau} \varphi \frac{\partial \sigma}{\partial t}\, dS \end{aligned} \qquad (8)$$

Stąd:

$$(\text{I}) \qquad T = \iiint\limits_{\tau} d\tau \int_0^A \bar{j} \cdot d\bar{A}$$

Jeśli założymy, że wektor $\bar{A}$ jest proporcjonalny do $\bar{j}$, (w tym założeniu zawarte jest i to założenie, że potencjał wektorowy $\bar{A}$ jest zależny wyłącznie od obwodu pojedynczego) to otrzymamy:

$$T = \frac{1}{2} \iiint\limits_{\tau} \bar{A} \cdot \bar{j}\, d\tau^{1)} \qquad (9)$$

Podobnie, dla funkcji energii elektrycznej, otrzymamy:

$$(\text{II}) \qquad V = \iint\limits_{S_\tau} dS \int_0^\sigma \varphi\, d\sigma$$

oraz:

$$V = \frac{1}{2} \iint\limits_{S_\tau} \varphi\, \sigma\, dS \qquad (10)$$

zakładając, że nabój na powierzchni S_τ jest proporcjonalny do potencjału na tej powierzchni. Jak widzimy wyrażenia na przyrost jak i funkcje energii dadzą się przedstawić przy pomocy funkcji gęstości, które w przeciwieństwie do wektorów pola są wyraźnie i jednoznacznie powiązane z elementami wchodzącymi w skład obszaru τ. Oznacza to, że wpływ na całki po prawej stronie wyrażenia (7) mają tylko te elementy objętości i tylko te powierzchnie, dla których funkcje gęstości są różne od zera.

1) Por. E.G.Cullwick [4], str.245-47.

Kładziemy:

$$F = \frac{1}{2}\iiint_{\tau} \frac{\bar{i} \cdot \bar{i}}{\gamma}\, d\tau$$

i otrzymujemy (na podstawie (7)):

$$p = 2F + \frac{d}{dt}\left\{V + T\right\} \tag{11}$$

Wielkość p jest mocą chwilową układu.

Jednostajna zmiana energii "biernej" (zachowawczej - odwracalnej) na jednostkę czasu przypadająca na jednostkę objętości lub powierzchni danego układu da się przedstawić (na podstawie (7)) w postaci:

$$L_o = \varphi\frac{\partial\sigma}{\partial t} + \bar{j} \cdot \frac{\partial\bar{A}}{\partial t} \tag{12}$$

Niech l i h są współczynnikami proporcjonalności zdefiniowanymi przy pomocy relacji:

$$\bar{A} = l\bar{j}; \quad \sigma = h\varphi \tag{13}$$

Jeśli l i h są wielkościami stałymi to jednostkowa energia:

$$W_o = \frac{1}{2}\left\{h\varphi^2 + lj^2\right\} \tag{14}$$

Rozważać będziemy przebieg okresowy o pulsacji ω.
Niech:

$$\varphi = \frac{1}{2}\left[\hat{\varphi} + \check{\varphi}\right]; \quad \bar{j} = \frac{1}{2}\left[\hat{j} + \check{j}\right] \tag{15}$$

gdzie:

$$\hat{\varphi} = \hat{\varphi}_m\, e^{i\omega t}; \quad \hat{j} = \hat{j}_m\, e^{i\omega t}; \quad i = \sqrt{-1}$$

Stąd, na podstawie (14) średnia wartość energii jednostkowej za okres wynosi:

$$W_{o\acute{s}r} = \frac{1}{2}\left\{h\,\varphi_m^2 + l\,j_m^2\right\} \tag{16}$$

Celem naszych, dalszych rozważań jest znalezienie wyrażenia dla średniej wartości energii biernej i jej przyrostu w układzie, w którym występują równocześnie dwa współzależne od siebie zjawiska. Rozważmy mianowicie układ, w którym występujące funkcje gęstości posiadają przebieg o pulsacji, która nie jest stała lecz zmieniająca się w małym przedziale dookoła pewnej wartości średniej oraz, że równocześnie w układzie tym wielkości: $\hat{\bar{j}}$ i $\hat{\varphi}$ (por. 15) przyjmują postać:

$$\hat{\bar{j}} = \hat{\bar{j}}_o\, e^{i\omega t}; \quad \hat{\varphi} = \hat{\varphi}_o\, e^{i\omega t} \tag{17}$$

gdzie funkcje $\hat{\bar{j}}_o$ i $\hat{\varphi}_o$ są funkcjami wolnozmiennymi w czasie w porównaniu z czynnikiem $e^{i\omega t}$.

W wyniku zmienności ω oraz modulacji symbolicznej amplitudy funkcji $\hat{\bar{j}}$ i $\hat{\varphi}$ przebiegi występujące w układzie nie są już przebiegami monochromatycznymi lecz takimi, które można nazwać "prawie monochromatyczne", a których uogólnieniem są przebiegi prawie okresowe[1].

Wraz z ujawnieniem się przebiegów prawie monochromatycznych w układzie występuje zagadnienie zależności współczynników l i h od częstotliwości. W ogólnym przypadku w układach liniowych zależność liniowa zachodząca między funkcjami $\bar{A}$ i $\bar{j}$ oraz σ i φ da się ująć przy pomocy splotu[2]:

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \int_0^\infty \bar{j}(t-\tau)\,l(\tau)\,d\tau \\ \hat{\sigma} &= \int_0^\infty \hat{\varphi}(t-\tau)\,h(\tau)\,d\tau \end{aligned} \tag{18}$$

1) H. Bohr [2]: Fastperiodische Funktionen.

2) Por. K. Bochenek [1], str. 11.

Rozwijając funkcje $\hat{\hat{j}}_o$ oraz $\hat{\varphi}_o$ na szeregi Fouriera:

$$\hat{\hat{j}}_o = \sum_h \hat{\hat{j}}_{oh}\, e^{i\alpha_h t}, \quad \hat{\varphi}_o = \sum_h \hat{\varphi}_{oh}\, e^{i\beta_h t}$$

otrzymamy:

$$\begin{aligned} \hat{\hat{A}}_h &= \hat{\hat{j}}_h \cdot \int_0^\infty l(\tau) e^{-i\tau(\omega+\alpha_h)}\, d\tau \\ \hat{\sigma}_h &= \hat{\varphi}_h \int_0^\infty h(\tau) e^{-i\tau(\omega+\beta_h)}\, d\tau \end{aligned} \tag{19}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \hat{\hat{j}}_h &= \hat{\hat{j}}_{oh}\, e^{it(\omega+\alpha_h)} \\ \hat{\varphi}_h &= \hat{\varphi}_{oh}\, e^{it(\omega+\beta_h)} \end{aligned} \tag{20}$$

Zaznaczone działania należy wykonać dla każdej z harmonicznych funkcji gęstości oddzielnie i zsumować. Oba czynniki całkowe są transformatami Fouriera odpowiednio funkcji l i h. Stąd wyrażenia (18) przyjmują ostatecznie postać:

$$\begin{aligned} \hat{\hat{A}} &= \sum_h \hat{\hat{A}}_h = \sum_h \hat{\hat{j}}_h \cdot l(\omega+\alpha_h) \\ \hat{\sigma} &= \sum_h \hat{\sigma}_h = \sum_h \hat{\varphi}_h \cdot h(\omega+\beta_h) \end{aligned} \tag{21}$$

Wprowadzając do drugiego wyrazu wyrażenia (12) funkcje symboliczne w miejsce rzeczywistych, otrzymamy:

$$\bar{j} \cdot \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} = \frac{1}{4}\left[\hat{j} + \check{j}\right] \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left[\hat{A} + \check{A}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\hat{j} \cdot \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} + \check{j} \cdot \frac{\partial \check{A}}{\partial t} + \check{j} \cdot \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} + \hat{j} \cdot \frac{\partial \check{A}}{\partial t}\right\}$$

Średnia wartość za okres pierwszych dwóch wyrazów jest równa zeru i otrzymamy:

$$\left(\bar{j} \cdot \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}\right)_{śr} = \frac{1}{4}\left|\check{j} \cdot \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} + \hat{j} \cdot \frac{\partial \check{A}}{\partial t}\right|_{śr} \tag{22}$$

Obliczamy: $\frac{\partial \hat{A}}{\partial t}$. Zachodzi:

$$\frac{\partial \hat{A}_h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left|\hat{j}_h \cdot \int_0^\infty l(\tau) e^{-i\tau(\omega+\alpha_h)} d\tau\right|$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left|\hat{j}_{oh}\, e^{it(\omega+\alpha_h)} \cdot \int_0^\infty l(\tau) e^{-\tau i(\omega+\alpha_h)} d\tau\right|$$

Stąd:

$$\frac{\partial \hat{A}_h}{\partial t} = i(\omega+\alpha_h) \cdot \hat{j}_{oh}\, e^{it(\omega+\alpha_h)} \cdot l(\omega+\alpha_h)$$

Czyli:

$$\frac{\partial \hat{A}_h}{\partial t} \cong i\omega l(\omega) \cdot \hat{j}_{oh}\, e^{it(\omega+\alpha_h)} +$$

$$+ i\alpha_h \cdot \frac{d\omega l(\omega)}{d\omega} \cdot \hat{j}_{oh}\, e^{it(\omega+\alpha_h)}$$

Sumując względem h, otrzymamy:

$$\frac{\partial\hat{A}}{\partial t} = i\omega l(\omega)\hat{j} + \left(\frac{\partial\hat{j}_o}{\partial t} \cdot e^{i\omega t}\right) \cdot \frac{d\omega l(\omega)}{d\omega} \qquad (23)$$

Omówimy to, wyrażenie, mające zdaniem autora podstawowe znaczenie. Zaczniemy od oczywistej uwagi, że całkowanie lewej strony wyrażenia (23) (por.(4)) po odpowiednim kunturze daje np. siłę elektromotoryczną indukowaną w cewce lub powodującą przepływ prądów wirowych w rdzeniu itp.
Jeśli: $\hat{j}$ = constans, to otrzymamy:

$$\frac{\partial\hat{A}}{\partial t} = i\omega l(\omega)\hat{j}$$

a więc zwykłe wyrażenie ważne do obliczenia SEM: E w układzie o stałej indukcyjności L i przebiegach monochromatycznych (sinusoidalnych). Nawet w przypadku, gdy $L = L(\omega)$ jest zależne od częstotliwości wyrażenie to pozostaje prawdziwe.

W przypadku przez nas rozpatrywanym w układzie ujawni się dodatkowa SEM: $\hat{E}(\alpha,\omega)$ zależna: od powolnych zmian pulsacji ω przebiegu, od wpływu jakie te zmiany mają na indukcyjność $L(\omega)$ układu oraz od zmian wynikłych z równoczesnej modulacji amplitudy i fazy przebiegów. Jeśli indukcyjność L jest niezależna od częstotliwości a występujące przebiegi są prawie monochromatyczne, to drugi z wyrazów (23) redukuje się do wyrażenia:

$$\left(\frac{\partial\hat{j}_o}{\partial t} \cdot e^{i\omega t}\right) \cdot 1 \qquad (25)$$

a więc w układzie wystąpi dodatkowa SEM: $\hat{E}(\alpha)$ zależna wyłącznie od przyrostu prawie okresowo zmieniającej się symbolicznej amplitudy przebiegów.

Przechodzimy do obliczenia wyrażenia (22).

Mamy:

$$\check{j} \cdot \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} = i\omega l(\omega)\, j^2 + \check{j} \cdot \frac{d\omega l(\omega)}{d\omega} \cdot \frac{\partial \hat{j}_o}{\partial t} \cdot e^{i\omega t}$$

$$\hat{j} \cdot \frac{\partial \check{A}}{\partial t} = -i\omega l(\omega)\, j^2 + \hat{j} \cdot \frac{d\omega l(\omega)}{d\omega} \cdot \frac{\partial \check{j}_o}{\partial t} \cdot e^{-i\omega t} \qquad (26)$$

Stąd:

$$\check{j} \cdot \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} + \hat{j} \cdot \frac{\partial \check{A}}{\partial t} = 2\, \frac{d\omega l(\omega)}{d\omega} \cdot \left\{ \check{j}_o \cdot \frac{\partial \hat{j}_o}{\partial t} + \hat{j}_o \cdot \frac{\partial \check{j}_o}{\partial t} \right\}$$

$$\frac{1}{4} \left\{ \check{j} \cdot \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} + \hat{j} \cdot \frac{\partial \check{A}}{\partial t} \right\} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{d\omega l(\omega)}{d\omega} \cdot j^2 \right\} \qquad (27)$$

Analogiczne wyrażenie (na podstawie podobnego rozumowania) otrzymamy dla energii elektrycznej. Stąd:

$$L_{ośr} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \frac{d\omega l(\omega)}{d\omega} \cdot j^2 + \frac{1}{2} \frac{d\omega h(\omega)}{d\omega} \cdot \varphi^2 \right\}_{śr} \qquad (28)$$

oraz:

$$W_{ośr} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{d\omega l(\omega)}{d\omega} \cdot j^2 + \frac{d\omega h(\omega)}{d\omega} \cdot \varphi^2 \right\}_{śr} \qquad (29)$$

Jeśli l i h są wielkościami stałymi to wyrażenie (29) redukuje się oczywiście do wyrażenia (16).

Zwróćmy uwagę na fakt, że: $\hat{j} \cdot \check{j} = \hat{j}_o \cdot \check{j}_o$ (z zależności tej korzystano przy przekształceniach) oraz: $\hat{\varphi} \cdot \check{\varphi} = \hat{\varphi}_o \cdot \check{\varphi}_o$. Stąd wskaźnik "śr" w wyrażeniu (29) oznacza, że w miejsce funkcji $\frac{1}{2} j^2$ i $\frac{1}{2} \varphi^2$ należy wstawić odpowiednio wyrazy:

$$\frac{1}{2} \sum_h j_{oh}^2, \qquad \frac{1}{2} \sum \varphi_{oh}^2 \qquad (30)$$

a więc kwadrat wartości "skutecznej" funkcji wolnozmiennych w czasie.

Aby przejść do mocy biernej w takim sensie w jakim używa się tego pojęcia w elektrotechnice[1], wprowadzimy funkcję symboliczną:

$$\hat{L}_o = \check{\bar{j}} \cdot \frac{\partial \hat{\bar{A}}}{\partial t} + \hat{\varphi} \frac{\partial \check{\sigma}}{\partial t} \tag{31}$$

Należy zauważyć, że funkcja ta nie przypadkowo posiada taką postać. Uzyskuje się ją w miejsce funkcji L_o (por.(12)), jeżeli zamiast całki:

$$\iiint_\tau \bar{K}_g \cdot \bar{j}\, d\tau$$

rozważać będziemy całkę:

$$\iiint_\tau \hat{\bar{K}}_g \cdot \check{\bar{j}}\, d\tau \tag{32}$$

($\hat{\bar{K}}_g = \hat{\bar{K}}_{go}\, e^{i\omega t}$), której postać jest wynikiem konsekwentnego wykorzystania metody symbolicznej zastosowanej do układów o rozpatrywanych przebiegach. Zachodzi:

$$\frac{\partial \check{\sigma}}{\partial t} = -i\omega h(\omega)\check{\varphi} + \left(\frac{\partial \check{\varphi}_o}{\partial t} \cdot e^{-i\omega t}\right) \cdot \frac{d\omega h(\omega)}{d\omega} \tag{33}$$

Czyli:

$$\hat{\varphi} \cdot \frac{\partial \check{\sigma}}{\partial t} = -i\omega h(\omega)\varphi^2 + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varphi^2\right) \cdot \frac{d\omega h(\omega)}{d\omega} \tag{34}$$

Ponieważ (por.(26)):

$$\check{\bar{j}} \cdot \frac{\partial \hat{\bar{A}}}{\partial t} = i\omega l(\omega) j^2 + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2} j^2\right) \cdot \frac{d\omega l(\omega)}{d\omega}$$

---

[1] Por. Spis lit. [3], [5], [6].

Stąd:

$$\hat{L}_o = \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{2}\, j^2\, \frac{d\omega l(\omega)}{d\omega} + \frac{1}{2}\varphi^2 \cdot \frac{d\omega h(\omega)}{d\omega}\right\} +$$

$$+ i\omega\left\{l(\omega) j^2 - h(\omega)\,\varphi^2\right\}. \qquad (35)$$

Kładziemy:

$$T_o(t,\omega) \stackrel{df}{=} \frac{1}{2}\, l(\omega) j^2(t)$$

$$V_o(t,\omega) \stackrel{df}{=} \frac{1}{2}\, h(\omega)\, \varphi^2(t) \qquad (36)$$

$$\hat{L}_o(t,\omega) = \hat{L}_o$$

Wielkości $T_o(t,\omega)$ i $V_o(t,\omega)$ są odpowiednio funkcjami energii magnetycznej i elektrycznej układu. Wstawiając je do (35), otrzymamy ostatecznie:

$$\hat{L}_o(t,\omega) = \frac{\partial^2}{\partial t \partial\omega}\omega\left\{T_o(t,\omega) + V_o(t,\omega)\right\} +$$

$$+ 2i \cdot \omega\left\{T_o(t,\omega) - V_o(t,\omega)\right\} \qquad (37)$$

Jak widać, część rzeczywista wielkości $\hat{L}_o(t,\omega)$ jest ściśle powiązana z wyrażeniem (28) i jej średnia wartość za okres jest równa przyrostowi energii biernej w tym znaczeniu, w jakim rozpatrywaliśmy tę wielkość uprzednio. Część urojona funkcji $\hat{L}_o(t,\omega)$ ma inne znaczenie i, z punktu widzenia zastosowań w elektrotechnice, bardzo użyteczne. Istotnie, połóżmy:

$$Q_o(t,\omega) = 2\omega\left\{T_o(t,\omega) - V_o(t,\omega)\right\} \qquad (38)$$

otrzymamy:

$$\frac{1}{T}\int_{0}^{T} Q_o(t,\omega)dt = Q_{ośr}(\omega) \tag{39}$$

gdzie $Q_{ośr}$ jest jednostkową <u>mocą bierną</u> rozpatrywanego układu. Zależność mocy biernej od częstotliwości podstawowej i jej wahań (tj. od powolnych zmian częstotliwości wokół częstotliwości podstawowej) uwidacznia się w fakcie wystąpienia w relacji (39) czynników: ω, $l(\omega)$, $h(\omega)$ oraz obu czynników zawierających sumy kwadratów współczynników rozwinięcia funkcji $\tilde{J}_o(t)$ i $\hat{\varphi}_o(t)$ na szereg Fouriera. Te ostatnie określają wpływ wahań częstotliwości i są od samej częstotliwości podstawowej niezależne.

Wpłynęło do redakcji w maju 1962.

LITERATURA

[1] B o c h e n e k K.: Metody Analizy Pól Elektromagnetycznych. Warszawa 1961.

[2] B o h r H.: Fastperiodische Funktionen; Ergebnisse der Mathematik, Springer, Berlin 1932.

[3] B u d e a n u C.I.: Puissances réactives et fictives, Institut Rumain de l'Energie, 1927.

[4] C u l l w i c k E.G.: Electromagnetism and Relativity, Longmaus, Green and Co. London, 1957.

[5] I o n e s c u V.: Teorema Energiei Electromagnetice in Regimul Deformant al Cimpulni Electromagnetic; Acad. Repub. Popul. Romine; Inst. de Energetica, 1960.

[6] N o w o m i e j s k i Z.J.: Moc i energia elektryczna w układach elektrycznych o dowolnych ustalonych przebiegach. Elektryka Nr 7 (Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej Nr 27), Gliwice 1961.

ВЛИЯНИЕ КОЛЕБАНИЙ ЧАСТОТЫ НА РЕАКТИВНУЮ МОЩНОСТЬ

Автор занимается расчетом энергии в электромагнитном поле, которого источники являются почти монохроматическими функциями плотности.
Функции эти получаются амплитудным и фазным модулированием при колебаниях частоты вокруг определенной базисной величины. Исходя из уравнений поля и определения функции плотности тока и электрического заряда в схеме с почти монохроматическими процессами, получаются уравнения, определяющие величину магнитной и электрической энергии поля, зависящей от скорости процессов.

L'INFLUENCE DES CHANGEMENTS DE FRÉQUENCE SUR LA PUISSANCE RÉACTIVE

L'auteur s'occupe des calculs d'énergie dans le champ électromagnétique, dont les sources sont fonction de la densité presque monochromatiques. On obtient ces fonctions par la modulation de phase et d'amplitude en posant les variationes de fréquence autour d'une certaine valeur de base. En partant des équations du champ et determinant les functions de la densité du courant et de la charge électrique dans un systéme à changements presque monochromatiques, on arrive aux équations determinantes la grandeur d'énergie magnétique et électrique du champ, dépendant de la pulsation des oscillations.