ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ
Nr 76 Elektryka z.14 1963

ZYGMUNT NOWOMIEJSKI
Katedra Podstaw Elektrotechniki

DYNAMIKA UKŁADU CZĄSTEK NAELEKTRYZOWANYCH ORAZ OBWODÓW LINIOWYCH WIELOOCZKOWYCH[1)]

Streszczenie. Praca dotyczy dynamiki układów złożonych przy czym jej punktem wyjściowym jest analiza zjawisk dynamicznych zachodzących między naelektryzowanymi cząsteczkami w przestrzeni jednorodnej. W dalszej części pracy uzyskane wyniki zastosowano do obwodów liniowych o stałych skupionych w stanie quasi-stacjonarnym, zawierających elementy wprowadzane w ruch pod wpływem działań elektrodynamicznych zachodzących wewnątrz układu.

Wprowadzenie

Przedstawiona praca ma charakter wprowadzający do ogólnej teorii dynamiki obwodów złożonych, przy czym jej punktem wyjściowym jest najprostszy (w sensie klasycznym) układ złożony a mianowicie układ cząsteczek naelektryzowanych w przestrzeni jednorodnej. Wychodząc z podstawowych równań pola uzyskujemy ogólne związki dla takiego układu analogiczne do związków znanych z klasycznej mechaniki, a które łatwo zastosować do złożonego obwodu elektrycznego, w szczególności do obwodów liniowych. W tej pracy interesować nas będą wyłącznie obwody liniowe o stałych skupionych. W obwodzie prądu stałego wartość średnia prądu przenikającego powierzchnię jednostkową może być opisana matematycznie przez wielkość, która jest niezależna od czasu. W stanie quasi-stacjonarnym

1) Autor wraz z zespołem pracowników Katedry Podstaw Elektrotechniki przewiduje opublikowanie cyklu artykułów pod wspólnym tytułem: "Dynamika obwodów złożonych". Przedstawiona praca jest pierwszym artykułem z tego cyklu.

naboje oscylują w obwodzie, który jest wystarczająco mały i z przyrostem, który jest wystarczająco powolny tak, aby usprawiedliwić przybliżenie, że wszystkie zależności między prądami w różnych częściach obwodu zachodzą efektywnie w tej samej chwili. Można więc obwód rozpatrywać tak jakby w danej chwili występujące pola były stacjonarne.

Dla przebiegów okresowych o częstotliwości $\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{c}{\lambda}$ układy w stanie quasistacjonarnym muszą spełniać warunki:

$$\omega l_{max} \ll c \quad \text{lub} \quad l_{max} \ll \frac{\lambda}{2\pi}$$

gdzie: $c = 3 \times 10^8 \left[\frac{m}{sek}\right]$ a l_{max} jest największą odległością w obwodzie między prądami lub nabojami. Liczyć będziemy w wymiarowym układzie MKSA.

Oznaczenia:

$\bar{K}$ = wektor natężenia pola elektrycznego
$\bar{D}$ = wektor indukcji elektrycznej
ε = stała dielektryczna
$\bar{B}$ = wektor indukcji magnetycznej
$\bar{H}$ = wektor natężenia pola magnetycznego
μ = przenikalność magnetyczna
q = elementarny nabój elektryczny
$\bar{v}$ = wektor prędkości naboju elektrycznego
m = masa cząsteczki
$\bar{F}$ = wektor siły (siła Lorentza).

Na podstawie równań Maxwella mamy:[1])

$$\nabla \times \bar{K} = -\dot{\bar{B}}; \quad \nabla \times \bar{H} = \bar{j} + \dot{\bar{D}}$$

gdzie: $\bar{j}$ jest wektorem gęstości prądu.

Dla pojedynczego naboju q możemy położyć:

$$\bar{j} = q\bar{v}$$

1) Kropka nad wielkością oznacza różniczkowanie względem czasu.

Siła $\vec{F}$ na jednostkę objętości działająca w danym punkcie układu jest dana przez relację:

$$\vec{F} = \varrho\vec{K} + \vec{j} \times \vec{B} \qquad 0{,}01$$

gdzie ϱ jest funkcją gęstości elektryczności.

Dla pojedynczego naboju elektrycznego q równanie 0,01 przyjmuje postać:

$$\vec{F} = q\vec{K} + q\vec{v}\times\vec{B} \qquad 0{,}02$$

W polu elektromagnetycznym potencjały: skalarny φ i wektorowy $\bar{A}$ są zdefiniowane przy pomocy relacji:

$$\begin{aligned} \vec{K} &= -\nabla\varphi - \dot{\bar{A}} \\ \vec{B} &= \nabla \times \bar{A} \end{aligned} \qquad 0{,}03$$

Jeśli przebiegi układu są wolnozmienne w czasie w rozpatrywanym obszarze τ, to:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \iiint_\tau \frac{\varrho}{r}\, d\tau \qquad 0{,}04$$

$$\bar{A} = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_\tau \frac{\bar{j}}{r}\, d\tau$$

Dla pojedynczego naboju otrzymamy:

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{q}{r} \\ \bar{A} &= \frac{\mu}{4\pi} \cdot \frac{q\vec{r}}{r} \end{aligned} \qquad 0{,}05$$

gdzie $\vec{r}$ jest wektorem wodzącym mierzonym od punktu P, w którym w chwili t obliczamy potencjał, do punktu Q, w którym w chwili t znajduje się nabój q.

1. Równania ruchu

Rozważać będziemy zachowanie się n naboi elektrycznych $q_1, q_2, \dots q_n$ o masach nośnych $m_1, m_2, \dots m_n$ w zewnętrznym polu elektromagnetycznym zmiennym w czasie, którego potencjał skalarny oznaczymy przez φ_z a wektorowy przez $\bar{A}_z$.

Na podstawie 0,02 dla k-tego naboju mamy:

$$m_k \frac{d\bar{v}_k}{dt} = q_k(\bar{K}_k + \bar{v}_k \times \bar{B}_k) \tag{1.01}$$

gdzie: $\bar{K}_k$ i $\bar{B}_k$ są odpowiednio natężeniem pola elektrycznego i indukcją magnetyczną w punkcie o współrzędnych (x_k, y_k, z_k), w którym w chwili t znajduje się nabój q_k. Obie te wielkości są wielkościami wypadkowymi powstającymi przez złożenie pola zewnętrznego i pół pozostałych cząstek rozpatrywanego układu. Oznaczmy dalej przez φ_k i $\bar{A}_k$ wypadkowe potencjały: skalarny i wektorowy w punkcie (x_k, y_k, z_k) w chwili t, a przez ∇_k operator:

$$\nabla_k \overset{df}{=} \bar{i}\frac{\partial}{\partial x_k} + \bar{j}\frac{\partial}{\partial y_k} + \bar{k}\frac{\partial}{\partial z_k} \tag{1.02}$$

Otrzymamy:

$$\begin{aligned} \bar{K}_k &= -\nabla_k \varphi_k - \frac{\partial \bar{A}_k}{\partial t} \\ \bar{B}_k &= \nabla_k \times \bar{A}_k \end{aligned} \tag{1.03}$$

oraz:

$$\bar{v}_k \times (\nabla_k \times \bar{A}_k) = \nabla_k(\bar{A}_k \cdot \bar{v}_k) - \bar{v}_k \cdot \nabla_k \bar{A}_k \tag{1.04}$$

Uwzględniając 1.04 równanie 1.01 przyjmuje postać:

$$m_k \frac{d\bar{v}_k}{dt} = q_k\left[\nabla_k(\bar{A}_k\cdot\bar{v}_k) - \nabla_k\varphi_k\right] - q_k\left(\frac{\partial\bar{A}_k}{\partial t} + \bar{v}_k \cdot \nabla_k \bar{A}_k\right)$$

Lecz:

$$\frac{\partial\bar{A}_k}{\partial t} + \bar{v}_k \cdot \nabla_k\bar{A}_k = \frac{\partial\bar{A}_k}{\partial t} \cdot \frac{\partial\bar{A}_k}{\partial x_k} + \frac{dx_k}{dt} + \frac{\partial\bar{A}_k}{\partial y_k} \cdot \frac{dy_k}{dt} +$$

$$+ \frac{\partial\bar{A}_k}{\partial z_k} \cdot \frac{dz_k}{dt} = \frac{d\bar{A}_k}{dt}$$

Stąd:

$$\frac{d}{dt}(m_k\bar{v}_k + q_k\bar{A}_k) = q_k \nabla_k (\bar{A}_k \cdot \bar{v}_k - \varphi_k) \qquad 1.05$$

gdzie:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_k &= \varphi_{zk} + \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \sum_{i=1}^{i=n} \frac{q_i}{r_{ki}} \\ \bar{A}_k &= \bar{A}_{zk} + \frac{\mu}{4\pi} \cdot \sum_{i=1}^{i=n} \frac{q_i\dot{\bar{r}}_i}{r_{ki}}; \quad (k \neq i) \\ \bar{r}_{ik} &= \bar{i}(x_i - x_k) + \bar{j}(y_i - y_k) + \bar{k}(z_i - z_k) \end{aligned}\right\} \qquad 1.06$$

Kładziemy:

$$\left.\begin{aligned} \bar{p}_k &\stackrel{df}{=} m_k\bar{v}_k + q_k\bar{A}_k \\ \psi_k &\stackrel{df}{=} \bar{A}_k\cdot\bar{v}_k - \varphi_k \end{aligned}\right\} \qquad 1.07$$

Ostatecznie, otrzymujemy:

$$\frac{d\bar{p}_k}{dt} = q_k \nabla_k \psi_k \qquad 1.08$$

Równania 1.08 dla $K = 1,2,\ldots n$ są zespołem równań opisujących ruch naboi w zewnętrznym polu elektromagnetycznym.
W rozważaniach wprowadzono dwa uproszczenia:

a) nie uwzględniono oporu ośrodka ruchu (tarcie, straty cieplne),

b) przy wyznaczaniu potencjałów nie uwzględniono opóźnień[1] lub mówiąc inaczej uwzględniono tylko pierwsze wyrazy rozwinięcia φ_k i $\bar{A}_k$.

(Uwaga b) dotyczy relacji 1.06 a nie równania 1.08, które jest ogólnie słuszne).

W konsekwencji uproszczenia b) nie uwzględnimy w rozważaniach promieniowania na zewnątrz układu energii związanego z przyspieszeniem lub opóźnieniem ruchu naboi. W rezultacie rozważane pole jest polem zachowawczym.

2. Równania Lagrange'a

Na ogół rozpatrywany układ n naboi nie jest układem swobodnym lecz podlega ograniczeniom wyrażonym przez zadane warunki dodatkowe (więzy). W takich przypadkach jest dogodne wprowadzić s niezależnych współrzędnych, które nazywamy współrzędnymi uogólnionymi a których charakter fizykalny może być różnego rodzaju. Niezależne współrzędne uogólnione określają jednoznacznie konfigurację układu i dlatego wektor $\bar{r}_k$ (wektor położenia k-tego naboju) może być rozważany jako funkcja tych współrzędnych. Oznaczmy nowe współrzędne przez $(h_1, h_2, \ldots, h_s)$.

Mamy:

$$\bar{r}_k = \bar{r}_k(h_1, h_2, \ldots, h_s) \qquad 2.01$$

---

1) Por. np. E.G.Cullwick [3], str.46, 108.

Stąd:

$$\dot{\vec{r}}_k = \sum_i \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial h_i} \dot{h}_i \qquad 2.02$$

oraz:

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_k}{\partial \dot{h}_i} = \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial h_i} \qquad 2.03$$

Ponieważ:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial h_i}\right) = \sum_s \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial h_s\, \partial h_i} \cdot \dot{h}_s \qquad 2.04$$

Otrzymamy:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial h_i}\right) = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_k}{\partial h_i} \qquad 2.04$$

Tworzymy iloczyn skalarny:

$$\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial h_i} \cdot \frac{d\vec{p}_k}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial h_i} \cdot \nabla_k (q_k \varphi_k) \qquad 2.05$$

Zachodzi równość:

$$\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial h_i} \cdot \frac{d\vec{p}_k}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\vec{p}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial h_i}\right] - \vec{p}_k \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial h_i}\right)$$

Stąd, na podstawie 2.03 oraz 2.04:

$$\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial h_i} \cdot \frac{d\vec{p}_k}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\vec{p}_k \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_k}{\partial \dot{h}_i}\right] - \vec{p}_k \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_k}{\partial h_i}$$

Wstawiając do 2.05, otrzymamy:

$$\frac{d}{dt}\left[\bar{p}_k \cdot \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial \dot{h}_i}\right] = \bar{p}_k \cdot \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial h_i} + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial h_i} \cdot \nabla_k(q_k \psi_k) \qquad 2.06$$

czyli:

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_k \bar{p}_k \cdot \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial \dot{h}_i}\right) = \sum_k \bar{p}_k \cdot \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial h_i} + \sum_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial h_i} \cdot \nabla_k(q_k \psi_k) \qquad 2.07$$

Kładziemy:

$$T_c \stackrel{df}{=} \frac{1}{2}\sum_k \bar{p}_k \cdot \dot{\bar{r}}_k \qquad 2.08$$

Przy rozwijaniu wektora $\bar{A}_k$ w myśl wzoru 1.06 należy w powyższym wyrażeniu w miejsce wektora $\bar{A}_{zk}$ wprowadzić wektor $2\bar{A}_{zk}$). T_c jest całkowitą energią kinetyczną zawartą w układzie. Jest ona sumą energii mechanicznej T_M, gdzie

$$T_M = \frac{1}{2}\sum_k m_k \dot{\bar{r}}_k \cdot \dot{\bar{r}}_k \qquad 2.09$$

oraz energii "magnetycznej" T, gdzie:

$$T \stackrel{df}{=} \frac{1}{2}\sum_k q_k \bar{A}_k \cdot \dot{\bar{r}}_k \qquad 2.10$$

Zachodzi:

$$\frac{\partial T_c}{\partial \dot{h}_i} = \sum_k \bar{p}_k \cdot \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial \dot{h}_i} \qquad 2.11$$

Prawą stronę wyrażenia 2.07 można napisać w postaci:

$$\frac{\partial T_M}{\partial h_i} + \sum_k q_k \bar{A}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial h_i} + \sum_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial h_i} \cdot \nabla_k (q_k \bar{r}_k \cdot \bar{A}_k - q_k \varphi_k) \quad 2.12$$

Kładziemy:

$$V \stackrel{df}{=} \frac{1}{2} \sum_k q_k \varphi_k \qquad 2.13$$

(Rozwijając φ_k należy w miejsce φ_{zk} wstawić $2\varphi_{zk}$).
Zachodzi:

$$\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial h_i} \cdot \nabla_k = \frac{\partial x_k}{\partial h_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{\partial y_k}{\partial h_i} \cdot \frac{\partial}{\partial y_k} + \frac{\partial z_k}{\partial h_i} \cdot \frac{\partial}{\partial z_k}$$

oraz:

$$\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial h_i} \cdot \nabla_k \left(\frac{1}{r_{ks}}\right) + \frac{\partial \bar{r}_s}{\partial h_i} \cdot \nabla_s \left(\frac{1}{r_{ks}}\right) =$$

$$= \frac{(x_s - x_k) \frac{\partial x_k}{\partial h_i} + (y_s - y_k) \frac{\partial y_k}{\partial h_i} + (z_s - z_k) \frac{\partial z_k}{\partial h_i}}{r_{ks}^3} -$$

$$- \frac{(x_s - x_k) \frac{\partial x_s}{\partial h_i} + (y_s - y_k) \frac{\partial y_s}{\partial h_i} + (z_s - z_k) \frac{\partial z_s}{\partial h_i}}{r_{ks}^3} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial h_i} \left(\frac{1}{r_{ks}}\right)$$

Stąd, wyrażenie 2.12 da się przedstawić w postaci:

$$\frac{\partial T_M}{\partial h_i} + \frac{\partial T}{\partial h_i} - \frac{\partial V}{\partial h_i} \qquad 2.14$$

Ostatecznie więc wyrażenie 2.07 przyjmuje postać:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_c}{\partial h_i}\right) - \frac{\partial T_c}{\partial h_i} + \frac{\partial V}{\partial h_i} = 0 \qquad 2.15$$

Równania 2.15 są równaniami Lagrange'a drugiego rodzaju dla układu n cząstek naelektryzowanych o s stopniach swobody poruszających się w zewnętrznym polu elektromagnetycznym.

3. Dynamika sieci złożonej

Jak już zaznaczono rozważać będziemy sieć o stałych skupionych względnie sztywną w stanie kwasistacjonarnym. Sieć taka charakteryzuje się tym, iż zawiera trzy typy elementów;

a) linie równoległe, cewki i pętle, które są utworzone ze względnie cienkich przewodów. Przyjmujemy, iż średnica tych przewodów s jest mała w porównaniu z ich długością l i długością fali λ wytwarzaną przez generatory. Zakładamy więc, że

$$s \ll l \quad \text{oraz} \quad s \ll \lambda \qquad 3.01$$

b) kondensatory

Przyjmujemy, że są one zbudowane z równoległych płytek rozdzielonych dielektrykiem o grubości δ, która jest mała w porównaniu z maksymalnym wymiarem powierzchni płytek S oraz w porównaniu z długością fali λ. Tj. przyjmujemy, że zachodzi:

$$\delta \ll S \quad \text{oraz} \quad \delta \ll \lambda \qquad 3.02$$

c) elementy ruchome

Zakładamy, że występujące prędkości są małe w porównaniu z prędkością rozchodzenia się fali c, a poruszające się masy są wystarczająco duże, tak iż można nie uwzględniać mas nośnych elektronów stanowiących prąd (ściśle: można pominąć ich energię kinetyczną). Ważną cechą obwodów złożonych z takich elementów jest to, że rozkład poprzeczny prądów i naboi na jednostkę długości i związane z nim pola elektromagnetyczne wewnątrz przewodów i między okładkami kondensatorów są w przybliżeniu niezależne od rozkładu osiowego prądów i naboi wzdłuż przewodnika. W pierwszym przybliżeniu możemy przyjąć, że rozkład prądu w każdym przekroju przewodnika jest taki sam jak w prostym, nieskończenie długim przewodzie o przekroju kołowym z tego samego materiału i o tej samej powierzchni przekroju. Określenie sieci jako obwodu o stałych skupionych odnosi się do podziału przestrzeni na zbiór podprzestrzeni - elementów o wyróżnionych własnościach wynikłych ze skrajnych założeń dla stałych γ, ε i μ.

I tak[1]: (I) przez R (oporność) oznaczymy element skupiony zawarty między dwoma małymi powierzchniami płaskimi i ograniczony boczną powierzchnią cylindryczną, wewnątrz którego przyjmujemy skończoną wartość dla przewodności właściwej γ a na zewnątrz którego (w bliskim otoczeniu) kładziemy $\gamma = 0$. Zakładamy dalej, że wewnątrz i na zewnątrz elementu R znikają ε i μ.

(II) Przez L (indukcyjność) oznaczamy element (tj. przestrzeń ograniczona podobnie jak R) wewnątrz którego kładziemy:

$$\mu \neq 0; \quad \gamma = \infty; \quad \varepsilon = 0$$

(III) Element skupiony C oznacza kondensator (C oznacza także i równocześnie wielkość pojemności tego kondensatora) spełniający warunki 3.02 między okładkami którego zakładamy $\varepsilon \neq 0$ a w całej przestrzeni (wewnątrz i na zewnątrz elementu) kładziemy: $\gamma, \mu = 0$. W rozpatrywanym, złożonym obwodzie

$$T_M = \frac{1}{2}\sum_k m_k \dot{\bar{r}}_k \cdot \dot{\bar{r}}_k \qquad 3.03$$

[1] Por. A.Duschek; A.Hochreiner [4] Tom III, str.169-174.

gdzie $\dot{\bar{r}}_k$ jest wektorem prędkości ruchomej części sieci, m_k jest masą ruchomego elementu a T_M jest całkowitą mechaniczną energią kinetyczną tych części.

Energia magnetyczna T wprowadzona w poprzednim paragrafie (rów. 2.10) da się rozłożyć na dwie części T_z i T_w o nieco odrębnych własnościach fizykalnych. Kładziemy:

$$T_z \stackrel{df}{=} \sum_k q_k \bar{A}_{zk} \cdot \dot{\bar{r}}_k$$

$$T_w \stackrel{df}{=} \frac{1}{2} \sum_{k,r} \frac{\mu}{4\pi} q_k q_r \left(\frac{\dot{\bar{r}}_k \cdot \dot{\bar{r}}_r}{r_{kr}}\right), \; k \neq r \qquad 3.04$$

Oznaczmy przez $i_1, i_2, \dots, i_m$ prądy oczkowe sieci i niech $d\bar{l}$ jest elementarnym wektorem długości przewodu prowadzącego prąd i skierowanym zgodnie z przyjętym zwrotem tego prądu. Jeśli dq jest elementarnym nabojem a $\bar{v}$ wektorem jego prędkości wzdłuż przewodu, otrzymamy:

$$\bar{v}dq = i \, d\bar{l} \qquad 3.05$$

Rozważmy energię T_z. Na podstawie 3.04 i 3.05, otrzymamy:

$$T_z = \sum_k i_k \oint \bar{A}_{zk} \cdot d\bar{l}_k$$

Lecz:

$$\oint \bar{A}_{zk} \cdot d\bar{l}_k = \iint_{S_k} (\nabla_k x \bar{A}_{zk}) \cdot d\bar{S}_k = \iint_{S_k} \bar{B}_{zk} \cdot d\bar{S}_k = \Phi_{zk}$$

gdzie Φ_{zk} jest strumieniem magnetycznym pola zewnętrznego przenikającym k-te oczko.

Stąd:

$$T_z = \sum_k i_k \Phi_{zk} \qquad 3.06$$

Energia magnetyczna wzajemna pochodząca od dwóch oczek (na podstawie 3.04) wynosi:

$$T_{wkr} = \frac{1}{2} i_k i_r \frac{\mu}{4\pi} \oint\oint \frac{\vec{dl}_k \cdot \vec{dl}_r}{r_{kr}} \qquad 3.07$$

Z wzoru Neumanna mamy:[1]

$$L_{kr} = \frac{\mu}{4\pi} \oint\oint \frac{\vec{dl}_k \cdot \vec{dl}_r}{r_{kr}} \qquad 3.08$$

Stąd:

$$T_{wkr} = \frac{1}{2} L_{kr} i_k i_r$$

oraz:

$$T_w = \frac{1}{2} \sum_{k,r} L_{kr} i_r i_r \qquad 3.09$$

Należy zauważyć, że wzór ten nie obejmuje wyrazów pochodzących od indukcyjności własnej. Aby je wprowadzić musimy rozpatrzyć wzajemne oddziaływanie cienkich, elementarnych strug prądowych przenikających przekrój przewodnika.

Niech całkowity prąd w przewodniku wynosi i niech:

$$i = \sum_{\alpha} i_{\alpha}$$

Otrzymamy:

$$T(L) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu}{4\pi} \sum_{\alpha,\beta} i_{\alpha} i_{\beta} \oint\oint \frac{\vec{dl}_{\alpha} \cdot \vec{dl}_{\beta}}{r_{\alpha,\beta}}, \quad \alpha \neq \beta \qquad 3.10$$

[1] Por. Ch.A.Coulson [2] str.105.

Całkowity strumień ϕ_L jest dany przez:

$$\phi_L = \frac{\mu}{4\pi i} \sum_{\alpha,\beta} i_\alpha i_\beta \oint\oint \frac{\bar{dl}_\alpha \cdot \bar{dl}_\beta}{r_{\alpha\beta}}, \quad \alpha \neq \beta \qquad 3.11$$

Z definicji: $L = \frac{\phi}{i}$, otrzymamy:

$$L = \frac{\mu}{4\pi i^2} \cdot \sum_{\alpha,\beta} i_\alpha i_\beta \oint\oint \frac{\bar{dl}_\alpha \cdot \bar{dl}_\beta}{r_{\alpha\beta}}, \quad \alpha \neq \beta \qquad 3.12$$

Stąd:

$$T(L) = \frac{1}{2} Li^2 \qquad 3.13$$

Tak więc całkowita energia magnetyczna wzajemna T_w jest dana przez relację:

$$T_w = \frac{1}{2} \sum_{k,r} L_{kr} i_k i_r; \quad (k,r = 1,2...n) \qquad 3.14$$ [1]

Każdy element rzeczywistej sieci posiada oporność, którą wyobrażamy sobie także jako element skupiony, a której przedstawicielem jest wielkość R_{kr}. W celu jej uwzględnienia lub biorąc ogólniej, w celu uwzględnienia elementów na których wydziela się ciepło (ciepło Joule'a, tarcie) wprowadzamy do rozważań tzw. funkcję <u>rozproszenia</u>:

$$F = \frac{1}{2} \sum_{k,r} R_{kr} i_k i_r \qquad 3.15$$ [2]

(W przypadku ogólnym prądy i_k, i_r należy zastąpić uogólnionymi prędkościami h_z, h_r).

---

[1] Por. M.Abraham, R.Becker [1] str.164.

[2] Por. R.Zurmühl [5]. str.431.

Rozpatrywana sieć składa się z m oczek niezależnych. Współrzędne uogólnione obieramy tak, że uogólnione prędkości $\dot{h}_1, \dot{h}_2, \ldots, \dot{h}_m$ przyjmujemy tożsamościowo równe prądom oczkowym $i_1, i_2, \ldots, i_m$. Na ogół ilość stopni swobody będzie większa od m i zakładając, że jest ona równa s pozostałe $s-m$ współrzędne, zależne od przestrzennej konfiguracji sieci określają chwilowe położenie jakiegoś elementu sieci względem obranego układu inercyjnego (np. osi obrotu). Równania Lagrange'a (2.15) rozważanej sieci przyjmują postać:

$$\text{(I)} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial i_k}\right) + \frac{\partial F}{\partial i_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} = 0$$

dla $k = 1, 2, \ldots, m$

$$\text{(II)} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_c}{\partial h_i}\right) - \frac{\partial T_c}{\partial h_i} + \frac{\partial V}{\partial h_i} = 0 \qquad 3.16$$

dla $i = m+1, m+2, \ldots, s$

gdzie:

$$T_C = T_Z + T_W + T_M$$

$$T = T_Z + T_W$$

a energia potencjalna:

$$V = \sum_k q_k \varphi_{zk} + \frac{1}{2}\sum_{k,r} \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{q_k q_r}{\gamma_{kr}}; \quad k \neq r \qquad 3.18$$

(Z poprzedniego założenia dla prędkości uogólnionych wynika, że dla wskaźników od 1 do m: $h_i = q_i$, a dla pozostałych $(s-m)$ wskaźników h_i jest współrzędną geometryczną).

Rozpisując oba równania 3.16 dla rozpatrywanej sieci, otrzymamy:

$$\sum_{r}\left\{\frac{d}{dt}\left(L_{kr}\, i_r\right) + R_{kr}\, i_r + \frac{1}{C_{kr}}\, q_r\right\} = -\left(\varphi_{zk} + \frac{d\phi_{zk}}{dt}\right) \qquad 3.19$$

dla: $k, r = 1, 2, \ldots, m$

oraz:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_M}{\partial \dot{h}_i}\right) - \frac{\partial T_M}{\partial h_i} = -\frac{\partial V}{\partial h_i} + i_k\left(\sum_{\substack{r \\ r\neq k}} i_r \frac{\partial L_{kr}}{\partial h_i} + \frac{\partial \phi_{zk}}{\partial h_i}\right) \qquad 3.20$$

dla: $i = m+1,\ m+2,\ \ldots,\ s$

i gdzie "i" jest wskaźnikiem współrzędnej geometrycznej określającej położenie (liniowe lub kątowe) k-tego oczka.

Równania 3.19 są równaniami obwodu elektrycznego i opisuję w jaki sposób zmieniają się prądy i napięcia sieci w czasie. Równania 3.20 wyznaczają siły (lub momenty) elektromagnetyczne działające na poszczególne elementy sieci. Istotnie, lewa strona równań 3.20 reprezentuje siły (momenty) dynamiczne działające na elementy sieci wynikające przede wszystkim z zachowania się w taki sposób pola magnetycznego (wyrażenia po prawej stronie w nawiasach), aby zwiększyć przepływ całkowitego strumienia magnetycznego przez oczko. Wyrażenie $-\frac{\partial V}{\partial h_i}$ reprezentuje ubytek energii potencjalnej rekompensowanej ruchem poszczególnych elementów.

Wpłynęło do redakcji w maju 1962.

LITERATURA

[1] A b r a h a m M., B e c k e r R.: Elektricity and Magnetism. Blacke and Son Limited, London and Glasgow, 1946.

[2] C o u l s o n Ch.A.: Elektricity, Oliver and Boyd, Edinburgh and London, 1948.

[3] C u l l w i c k E.G.: Electromagnetism and Relativity, Longmaus, Green and Co, London 1957.

[4] D u s c h e k A., H o c h r ä i n e r A.: Grundzüge der Tensorrechnung in analitischer Darstellung, Wien, Springer - Verlag, 1955.

[5] Z u r m ü h l R.: Matrizen, Berlin, Springer - Verlag 1958.

ДИНАМИКА СИСТЕМЫ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ И ЛИНЕЙНЫХ СЛОЖНЫХ КОНТУРОВ

Работа касается динамики сложных контуров и базирует на анализе динамических процессов между заряженными частицами в однородном пространстве. Полученные результаты применяются к линейным контурам с сосредоточенными постоянными.

Рассмотрено квазистационарное состояние с элементами в движении, обусловленном от электродинамических воздействий, происходящих в контуре.

LA DYNAMIQUE D'UNE DISPOSITION DES PARTICULES CHARGÉES ET DES CONTOURS LINÉAIRES À MAILLES MULTIPLES

Le mémoire concerne la dynamique des systémes composés. Comme point du départ l'auteur se sert de L'analyse des phénoménes dynamiques entre les particules chargées dans l'espace uniforme. Les résultats furent appliqués aux contours linéaires à constantes concentrées dans un état quasi-stationnaire. Ces contours contiennent les éléments en mouvement provoqué par les actions élektrodynamiques. dans le systeme.