



100  
44-1  
2,302

# Die graphische Statik der Baukonstruktionen

von

**Heinrich Müller-Breslau**

Dr.-Ing., Geh. Regierungsrat, Professor an der Technischen Hochschule in Berlin.

## Erster Band.

Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte in der Ebene. —  
Trägheitsmomente und Zentrifugalmomente ebener Querschnitte;  
Spannungen in geraden Stäben. — Theorie der statisch bestimmten  
Träger mit Ausschluß der Untersuchung der Formänderungen.

**Vierte, vermehrte Auflage.**

**Mit 585 Abbildungen im Text und 7 Tafeln.**



*W księgozbioru  
Ryszarda Rutkowskiego*

**Stuttgart**  
**Alfred Kröner Verlag**  
1905.



130380

---

Druck von Grimme & Trömel in Leipzig.

---



## Vorwort zur dritten Auflage.

Die vorige Auflage dieses ersten Bandes meiner *Graphischen Statik der Baukonstruktionen* erschien 1887; sie war inzwischen durch zwei unveränderte Neudrucke ergänzt worden und hatte schließlich länger als ein Jahr auf dem Büchermarkte ganz gefehlt, weil die Umarbeitung einiger Abschnitte mehr Zeit in Anspruch genommen hat, als sich vorher übersehen ließ.

In der neuen, dritten Auflage ist der erste, die wichtigsten Sätze über das Kräftepolygon und das Seilpolygon enthaltende Abschnitt ungeändert geblieben, die Abschnitte II und III, die von den Trägheitsmomenten und Zentrifugalmomenten und den Normalspannungen  $\sigma$  in geraden Stäben handeln, sind wesentlich erweitert worden. Besonderer Wert wurde auf Gewinnung einfacher Formeln gelegt, welche die Berechnung der Spannungen  $\sigma$  und die Bestimmung des Kerns ohne Zuhilfenahme der Hauptachsen und Hauptträgheitsmomente gestatten. Über die Schubspannungen infolge einer durch den Schwerpunkt des Querschnitts gehenden Querkraft ist nur das nötigste mitgeteilt worden; auf die Drehungsfestigkeit wurde gar nicht eingegangen. In beiden Fällen liegen Aufgaben der Festigkeitslehre vor, die auf eine Integration partieller Differentialgleichungen mit meistens außerordentlich schwierigen Grenzbedingungen führen und deshalb nicht in den Rahmen dieses Buches passen.

Den Hauptinhalt des vorliegenden Bandes bildet die Theorie der statisch bestimmten ebenen Träger, bei deren Ausarbeitung die größte Vollständigkeit und größte Einfachheit angestrebt worden ist. Von der vorigen Auflage bin ich insofern abgewichen, als ich diesmal die allgemeine Theorie des Fachwerks an den Schluß gestellt habe. So einfach die Aufgaben dieser Theorie auch immer sein mögen, sie bieten erfahrungsgemäß dem Anfänger — und an solche wendet sich dieser erste Band — stets Schwierigkeiten, und da schließlich das Endziel dieser allgemeinen Untersuchungen die planmäßige Zurückführung schwierigerer Fälle auf leichtere ist, so erschien es mir am zweckmäßigsten, mit den einfacheren Aufgaben zu beginnen und die um-



fangreiche, die Mehrzahl der Anwendungen umfassende Theorie des Dreiecksystems voranzustellen.

Hinsichtlich der Aufgaben über die Berechnung von Eisenbahnbrücken verweise ich besonders auf die während der Drucklegung dieses Buches erschienenen und im Anhang mitgeteilten neuen Belastungsvorschläge und auf das auf Seite 121 gesagte. Auch bemerke ich zu den aus der vorigen Auflage übernommenen Beispielen, daß die ausführliche Theorie der Brückenträger mit Gegendiagonalen noch nicht entbehrt werden kann, trotzdem neuerdings Träger mit steifen Diagonalen bevorzugt werden; allein die Umrechnung der älteren Brücken für die erheblich gestiegene Verkehrsbelastung verlangt ein Eingehen auf die Wirkungsweise der Gegendiagonalen.

Grunewald bei Berlin, den 15. März 1901.

**H. Müller-Breslau.**

---

## Vorwort zur vierten Auflage.

---

In der vierten Auflage ist ein kurzer, aber wichtiger Abschnitt über weitgespannte Balkenbrücken hinzugekommen. Der Anhang wurde durch Angaben über das Eigengewicht eiserner Brücken erweitert. Im übrigen konnte ich mich auf die Durchsicht der vorigen Auflage und die Verbesserung der mir in dankenswerter Weise mitgeteilten Druckfehler beschränken.

Auf die vielen Anfragen nach dem Zeitpunkt des Erscheinens der noch ausstehenden Teile dieses Werkes antworte ich, daß die Beteiligung an größeren Konstruktionsaufgaben und andere wissenschaftliche Arbeiten, die meinem Buche zu gute kommen werden, die Vollendung verzögert haben. Ich arbeite aber jetzt an der Fortsetzung und hoffe, die noch fehlenden Teile bald liefern zu können.

Grunewald bei Berlin, im Dezember 1904.

**H. Müller-Breslau.**

# Inhalt.

	Seite
Einleitung . . . . .	1

## I. Abschnitt.

Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften. Statische Momente.

§ 1. Zusammensetzung der Kräfte in der Ebene. Gleichgewichtsbedingungen . . . . .	3
§ 2. Zerlegung der Kräfte in der Ebene . . . . .	13
§ 3. Von den statischen Momenten der Kräfte . . . . .	15
§ 4. Zusammensetzung der Kräfte im Raume . . . . .	20

## II. Abschnitt.

Höhere Momente paralleler, in derselben Ebene wirkender Kräfte.  
Trägheitsmomente und Zentrifugalmomente ebener Querschnitte.

§ 5. Höhere Momente paralleler Kräfte . . . . .	23
§ 6. Trägheitsmomente und Zentrifugalmomente ebener Querschnitte . . . . .	26
§ 7. Beziehungen zwischen den Trägheitsmomenten und Zentrifugalmomenten für Achsen, welche durch einen und denselben Punkt gehen . . . . .	44
§ 8. Die Trägheitsellipse . . . . .	53

## III. Abschnitt.

Spannungen in geraden Stäben.

§ 9. Die Normalspannungen . . . . .	55
§ 10. Der Kern des Querschnitts . . . . .	73
§ 11. Druckbelastung außerhalb des Kerns bei Ausschluß von Zugfestigkeit . . . . .	86
§ 12. Schubspannungen und Hauptspannungen . . . . .	101

## IV. Abschnitt.

Einleitung in die Theorie der ebenen Träger.

§ 13. Allgemeines über die äußeren Kräfte . . . . .	109
§ 14. Allgemeines über Einflußlinien . . . . .	115

**V. Abschnitt.**

	Seite
Querkräfte und Angriffsmomente für den einfachen Balken.	
§ 15. Ständige, unmittelbar wirkende Belastung . . . . .	123
§ 16. Ständige mittelbare Belastung . . . . .	126
§ 17. Einflußlinien. Grenzwerte von $Q$ und $M$ bei gleichförmiger ständiger und beweglicher Belastung . . . . .	128
§ 18. Die veränderliche Belastung besteht aus einem verschiebbaren System von Einzellasten . . . . .	136
§ 19. Verwertung der Einflußlinien des einfachen Balkens . . . . .	157

**VI. Abschnitt.**

Querkräfte und Momente für den Gerberschen Balken.	
§ 20. Beliebige ständige Belastung . . . . .	159
§ 21. Einflußlinien. Belastung durch ein verschiebbares System von Einzel-lasten . . . . .	164
§ 22. Gleichmäßige Belastung . . . . .	172

**VII. Abschnitt.**

Der vollwandige Bogen mit drei Gelenken.	
§ 23. Belastung durch beliebig gerichtete Kräfte . . . . .	176
§ 24. Belastung durch senkrechte Kräfte . . . . .	182

**VIII. Abschnitt.**

Einleitung in die Theorie des ebenen Fachwerks.	
§ 25. Erklärungen und Voraussetzungen . . . . .	208
§ 26. Bestimmung der Spannkkräfte im Dreiecknetz nach den Verfahren von <i>Culmann</i> und <i>Ritter</i> . . . . .	210
§ 27. Die Kräftepläne <i>Cremonas</i> . . . . .	213
§ 28. Einfluß von Kräften, welche nicht in den Knotenpunkten angreifen . . . . .	222
§ 29. Kräftepläne für Polonceau-Träger, in Verbindung mit einigen allgemeineren Untersuchungen . . . . .	227

**IX. Abschnitt.**

Der einfache Fachwerkbalken.	
§ 30. Die ungünstige Belastungsweise. Einflußlinien . . . . .	234
§ 31. Spannkkräfte in den Gurtungen . . . . .	243
§ 32. Spannkkräfte in den Füllungsstäben . . . . .	248
§ 33. Das Zimmermannsche Verfahren . . . . .	261
§ 34. Fachwerkträger mit Gegendiagonalen . . . . .	273
§ 35. Gleichmäßig belastete Parabelträger mit Gegendiagonalen . . . . .	291
§ 36. Kräfteplan für einen Parallelträger (Eisenbahnbrücke) . . . . .	300
§ 37. Kräfteplan für einen Fischbauchträger (Eisenbahnbrücke) . . . . .	305
§ 38. Kräfteplan für einen Halbparabelträger (Eisenbahnbrücke) und Entwicklung einiger allgemeiner Formeln . . . . .	309
§ 39. Über die Berechnung von Dachbindern . . . . .	321



**X. Abschnitt.**

## Der Gerbersche Fachwerkbalken.

	Seite
§ 40. Einflußlinien . . . . .	330
§ 41. Kräfteplan für eine Eisenbahnbrücke mit Gerberschen Balken . . . . .	339
§ 42. Gerberscher Fachwerkbalken mit Gelenkvierecken . . . . .	354
§ 43. Gerberscher Balken mit Hängegurtung . . . . .	361

**XI. Abschnitt.**

## Der Fachwerkbogen mit drei Gelenken.

§ 44. Anwendung der Verfahren von Culmann und Ritter . . . . .	366
§ 45. Belastung durch senkrecht gerichtete Kräfte . . . . .	371
§ 46. Zahlenbeispiel. Einflußlinien für einen Bogenträger von 30 <sup>m</sup> Stützweite . . . . .	383

**XII. Abschnitt.**

## Statisch bestimmte Hängebrücken und Gelenkbögen, versteift durch Balken.

§ 47. Hängebrücken, deren Hauptträger aus einfachen Dreiecknetzen bestehen . . . . .	389
§ 48. Kette, versteift durch einen Balken . . . . .	404
§ 49. Gelenkbogen, versteift durch einen Balken . . . . .	422
§ 50. Verwertung der Kettenlinie zur Linienführung der Gurtungen . . . . .	427

**XIII. Abschnitt.**

## Allgemeine Theorie des statisch bestimmten ebenen Fachwerks.

§ 51. Analytische Untersuchung . . . . .	438
§ 52. Die kinematische Theorie des Fachwerks . . . . .	455
§ 53. Aufgaben über mehrteilige Fachwerke . . . . .	501
§ 54. Balkenbrücken von großer Spannweite . . . . .	535

**Anhang.**

I. Neue Belastungsvorschläge für Eisenbahnbrücken. . . . .	547
II. Neue Belastungsvorschriften für die preußischen Staatsbahnen . . . . .	549
III. Zahlenbeispiele für die Benutzung der Tabellen . . . . .	554
IV. Zusammenstellung verschiedener Gewichtsverteilungen für Lokomotiven und Tender . . . . .	562
V. Eigengewichte eiserner Balkenbrücken für Eisenbahnen . . . . .	564
VI. Eiserne Straßenbrücken . . . . .	572

**Literatur.**

Literatur zu den Abschnitten I, II und III. . . . .	574
Literatur zu den Abschnitten IV bis XIII . . . . .	575
Tafel I—VII . . . . .	am Schluß des Buches



## Einleitung.

Die graphische Statik lehrt die Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte auf geometrischem Wege und entwickelt in gleicher Art die Bedingungen, unter denen sich die auf einen Körper wirkenden Kräfte im Gleichgewichte befinden. Auch führt sie andere Aufgaben, z. B. die Ermittlung von Schwerpunkten und Trägheitsmomenten, die Bestimmung der Formänderungen fester Körper, auf Aufgaben über Kräfte zurück, wobei sie vielfach an analytische Untersuchungen anknüpft und diese auf zeichnerischem Wege zu Ende führt oder deren Ergebnisse geometrisch deutet.

Die Größe und Lage einer Kraft wird in der graphischen Statik durch die Länge und Lage einer geraden Linie dargestellt. Eine Kraft ist der Lage nach bekannt, sobald ihre Richtung und ein Punkt, durch welchen diese Richtung geht, gegeben ist; ihre unzweideutige Bestimmung erfordert ferner die Hervorhebung des Sinnes, in welchem sie in der angegebenen Richtung wirkt. Dies geschieht am übersichtlichsten durch einen Pfeil, oder, falls die Kraft bei der Beschreibung einer Figur mittels der Zeichen ihres Anfangspunktes und Endpunktes angedeutet werden soll, durch die Aufeinanderfolge dieser Zeichen im Sinne der Kraft. Man sagt: Die Kraft  $P$  in Fig. 1 wird durch die Strecke  $ab$  dargestellt, weil sie von  $a$  nach  $b$  wirkt, und die Kraft  $P$  in Fig. 2 durch die Strecke  $ba$ , weil sie von  $b$  nach  $a$  wirkt.

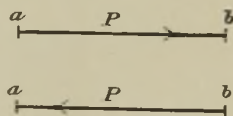


Fig. 1 u. 2.

Die graphische Darstellung der an einem Körper angreifenden Kräfte nennt man einen *Kräfteplan*. Die Aufzeichnung eines solchen setzt die Bildung eines *Kräftemaßstabes* voraus. In der Regel werden



wir festsetzen, daß einer Strecke von  $1^{\text{mm}}$  Länge die Größe einer Kraft von  $m$  Kilogrammen  $= \frac{m}{1000}$  Tonnen gleichwertig ist, so daß z. B. in einem im Maßstabe  $10^{\text{mm}} = 2000^{\text{z}} = 2^{\text{f}}$  gezeichneten Kräfteplane durch eine Strecke von  $62^{\text{mm}}$  Länge eine Kraft von  $12,4^{\text{f}}$  dargestellt wird.

---

## I. Abschnitt.

# Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften. Statische Momente.

### § 1.

#### Zusammensetzung der Kräfte in der Ebene. Gleichgewichtsbedingungen.

1. **Zusammensetzung von zwei Kräften.** Greifen an einem Punkte  $a$  zwei Kräfte  $P_1$  und  $P_2$  an, deren Richtungen und Größen durch die Richtungen und die Längen der Strecken  $ab$  und  $ad$  dargestellt sind (Fig. 3a), so ist bekanntlich ihre *Mittelkraft*  $R$  gleich der Diagonale  $ac$  des über ihnen beschriebenen Parallelogrammes  $abcd$ . Man erhält aber auch  $R$ , indem man die beiden gegebenen Kräfte  $P_1$  und  $P_2$  nach Größe, Richtung und Sinn aneinander setzt, entweder in der Reihenfolge  $P_2, P_1$  (Fig. 3b) oder in der Reihenfolge  $P_1, P_2$  (Fig. 3c),

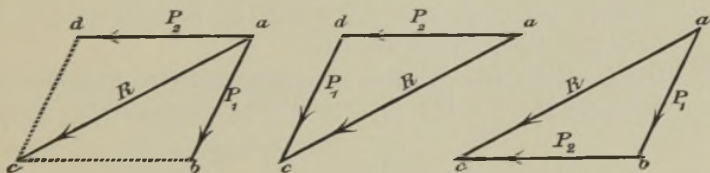


Fig. 3 a, b u. c.

und den Anfangspunkt  $a$  des so erhaltenen Kräftezuges mit dessen Endpunkte  $c$  durch die Gerade  $ac$  verbindet. Die Dreiecke  $adc$  und  $abc$  nennt man *Kräfte dreiecke*.

Umgekehrt läßt sich eine Kraft  $R$  mit Hilfe des Kräfteparallelogrammes (bez. eines Kräfte dreiecks) in zwei *Seitenkräfte*  $P_1$  und  $P_2$ , deren Richtungen gegeben sind, und welche  $R$  in demselben Punkte  $a$  schneiden, eindeutig zerlegen.

2. **Zusammensetzung beliebiger Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkte.** Fig. 4a und b. Sollen mehrere an demselben Punkte  $a$  angreifende Kräfte  $P_1, P_2, P_3, P_4$  zu einer Mittelkraft  $R$  vereinigt werden, so setzt man (am zweckmäßigsten in einer besonderen Figur)

$P_1$  und  $P_2$  mittels des Kräfte dreiecks  $abc$  zu der Mittelkraft  $R_{1-2}$  zusammen, hierauf  $R_{1-2}$  mit  $P_3$  zur  $R_{1-3}$  und diese schließlich mit  $P_4$  zur  $R_{1-4} = R$ .

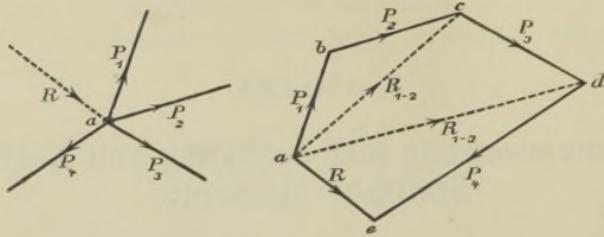


Fig. 4 a u. b.

Zu demselben Ergebnisse gelangt man, wenn man  $P_1, P_2, P_3, P_4$  nach Größe, Richtung und Sinn zu dem Kräftezuge  $abcde$  aneinander reiht und hierauf den Anfangspunkt  $a$  und den Endpunkt  $e$  desselben durch die Gerade  $\overline{ae} = R$  verbindet.

Man sagt auch: Die Mittelkraft  $\overline{ae} = R$  *unterspannt* den aus den Kräften  $P_1, P_2, P_3, P_4$  gebildeten Kräftezug  $abcde$ .

Die Reihenfolge, in welcher die Kräfte  $P$  miteinander zusammengesetzt werden, ist gleichgültig; denn es wurde vorhin gezeigt, daß man die Mittelkraft zweier Kräfte  $P_1$  und  $P_2$  durch Unterspannen sowohl des Kräftezuges  $P_2P_1$  (Fig. 3b) als auch des Zuges  $P_1P_2$  (Fig. 3c) erhalten kann. Durch wiederholte Vertauschung von zwei aufeinander folgenden Kräften läßt sich aber aus der einen Reihenfolge beliebiger Kräfte jede andere Reihenfolge ableiten.

**3. Gleichgewicht von Kräften mit gemeinsamem Angriffspunkte.** Lassen sich Kräfte  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$ , welche an demselben Punkte  $a$

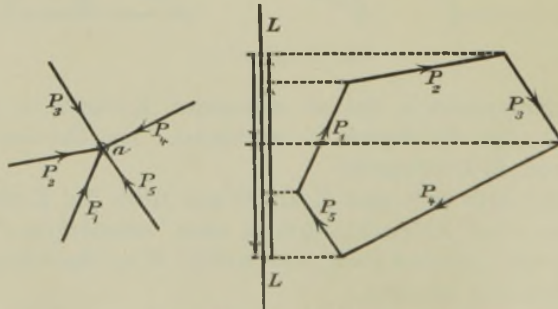


Fig. 5 a u. b.

angreifen (Fig. 5a) nach Größe, Richtung und Sinn zu einem geschlossenen Kräftepolygone (Fig. 5b) aneinanderreihen, so ist ihre



Mittelkraft = 0. Es sind dann die Kräfte  $P$  miteinander im Gleichgewicht. Projiziert man das Kräftepolygon auf irgend eine Gerade  $LL$  und denkt jede der Kräfte  $P$  in eine Seitenkraft parallel zu  $LL$  und eine lotrecht zu  $LL$  zerlegt, so findet man, daß die Summe der nach der Richtung  $LL$  gebildeten Seitenkräfte, d. i. die Summe der Projektionen der Kräfte  $P$  auf die Gerade  $LL$  gleich Null ist.

Hervorzuheben ist, daß ein Kräftepolygon nur dann geschlossen heißt, wenn sich in demselben nie zwei Pfeile begegnen, wenn man also das Polygon, den Pfeilen folgend, ohne Unterbrechung umfahren kann.

Man sagt auch: Das Kräftepolygon in Fig. 5b besitzt einen *stetigen Umfahrungssinn*, während das Kräftepolygon in Fig. 4b durch den Pfeil der Kraft  $R$  *unstetig* wird.

Kehrt man in einem geschlossenen Kräftepolygone den Sinn irgend einer Kraft um, so wird diese Kraft zur Mittelkraft aus allen übrigen.

**4. Zusammensetzung von Kräften mit beliebigen Angriffspunkten.**  
 Wird die Mittelkraft  $R$  von Kräften  $P_1, P_2, P_3, P_4 \dots$  gesucht, welche nicht an demselben Punkte angreifen, so denke man  $P_1$  und  $P_2$  in ihren Richtungen so weit verschoben, daß ihr Schnittpunkt gemeinsamer Angriffspunkt wird, und setze sie dann zur Kraft  $R_{1-2}$  zusammen. Hierauf vereinige man in gleicher Weise  $R_{1-2}$  mit  $P_3$  zur  $R_{1-3}$ , diese letztere Kraft mit  $P_4$  zur  $R_{1-4}$  u. s. f.

Dabei empfiehlt es sich, die Größen und Richtungen der Kräfte  $R$  in einer besonderen Figur zu bestimmen.

In Fig. 6 ist die Zusammensetzung der Kräfte  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$  auf die beschriebene Weise ausgeführt worden. Nach Aneinanderreihung derselben zu dem stetigen Kräftezuge  $abcdef$  ergaben sich (nach Größe und Richtung) die Mittelkräfte

$$\begin{aligned} \overline{ac} &= R_{1-2}; & \overline{ad} &= R_{1-3}; \\ \overline{ae} &= R_{1-4}; & \overline{af} &= R_{1-5} = R. \end{aligned}$$

Nun wurde durch den Schnittpunkt  $A$  von  $P_1$  und  $P_2$  eine Parallele zur  $R_{1-2}$  gezogen, welche  $P_3$  in  $B$  schneidet, von hier aus eine Parallele zur  $R_{1-3}$  bis zu ihrem

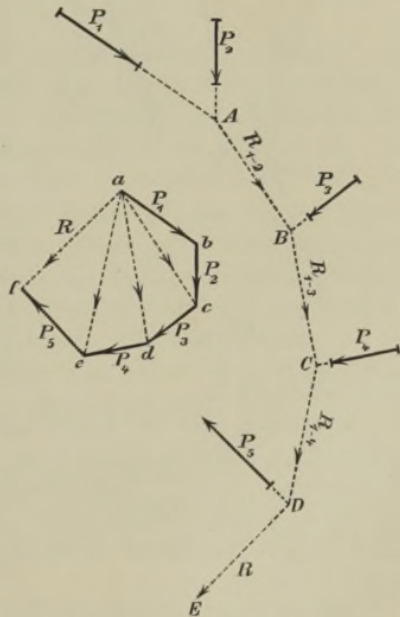


Fig. 6.

Schnittpunkt  $C$  mit  $P_4$ , sodann von  $C$  aus eine Parallele zur  $R_{1-4}$ , welche  $P_5$  in  $D$  trifft, und schließlich die Gerade  $DE \parallel R_{1-5}$ . Es liegt dann die  $R_{1-2}$  in der Geraden  $AB$ , die  $R_{1-3}$  in der  $BC$ , die  $R_{1-4}$  in der  $CD$  und die  $R_{1-5}$  in der Geraden  $DE$ . Das Polygon  $ABCDE$  heißt ein *Mittelkraftspolygon* der Kräfte  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$ . Da man die Ordnung, in der die gegebenen Kräfte miteinander zusammengesetzt werden, verschiedenartig wählen kann, ist man im Stande, verschiedene Mittelkraftspolygone zu zeichnen. Die letzten Seiten aller dieser Polygone decken sich; denn die Lage von  $R_{1-5}$  ist unabhängig von der Wahl jener Ordnung.

Um dies zu beweisen, genügt es, darzutun, daß die Änderung der Reihenfolge von zwei Kräften  $P_n$  und  $P_{n+1}$  ohne Einfluß auf die Lage von  $R$  ist, weil durch die Wiederholung einer solchen Änderung aus der einen Reihenfolge jede andere abgeleitet werden kann.

Wird die Mittelkraft  $R'$  der Kräfte  $P_1$  bis  $P_{n-1}$  zuerst mit  $P_n$  zur Kraft  $Q'$  (Fig. 7) und hierauf mit  $P_{n+1}$  zur  $R''$  zusammengesetzt, so

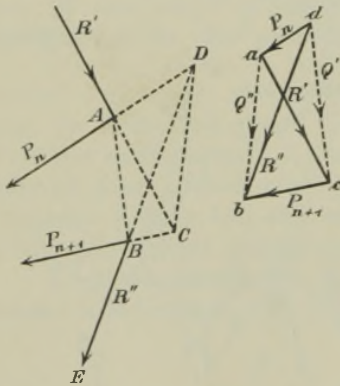


Fig. 7.

ergibt sich das Mittelkraftspolygon  $ABE$ , in welchem  $AB \parallel de$  ist. Vereinigt man hingegen  $R'$  zuerst mit  $P_{n+1}$  zur  $Q''$  und hierauf  $Q''$  mit  $P_n$  zur  $R''$ , so muß man die Kraft  $R'$  soweit verlängern, bis sie  $P_{n+1}$  in  $C$  schneidet, von  $C$  aus eine Parallele zur  $Q''$  ziehen, welche  $P_n$  in  $D$  trifft und schließlich von  $D$  aus eine Parallele zur  $R''$ . Diese fällt aber mit der vorhin gefundenen  $R''$  zusammen, weil in den beiden Vierecken  $ABCD$  und  $abcd$  fünf entsprechende Seiten einander parallel sind, nämlich  $AB \parallel dc$ ,  $BC \parallel bc$ ,  $CD \parallel ba$ ,  $DA \parallel da$ ,  $AC \parallel ac$ , und infolgedessen

auch  $DB \parallel db$  ist.

Schneiden sich die Kräfte unter sehr spitzen Winkeln, womöglich außerhalb des Zeichenblattes, so ist das beschriebene Verfahren zur Bestimmung von  $R$  unzweckmäßig; es wird unbrauchbar, sobald sämtliche Kräfte parallel sind. Es soll deshalb noch ein zweites allgemeineres Verfahren entwickelt und zunächst die Aufgabe gelöst werden:

Gegeben sind die Kräfte  $P_1, P_2, P_3, P_4$  (Fig. 8a), welche nicht an demselben Punkte angreifen und auch parallel sein können; gesucht ist die Größe und die Lage derjenigen Kraft  $R$ , die zur *Herstellung des Gleichgewichts* hinzugefügt werden muß.

Zuerst werden die Kräfte  $P_1, P_2, P_3, P_4$  zu dem Kräftezuge  $abcde$  (Fig. 8b) aneinandergereiht und dieser durch die Gerade  $ea$  geschlossen. Es ist dann  $ea$  nach Größe, Richtung und Sinn  $= R$ . Um die Lage von  $R$  in Fig. 8a zu bestimmen, wird die Kraft  $P_1$  durch zwei beliebig gerichtete Kräfte  $I$  und  $II$ , deren Angriffspunkt  $A$  in der Richtung von  $P_1$  willkürlich gewählt werden darf, aufgehoben. Die Größen von  $I$  und  $II$  werden im Kräfteplane (Fig. 8b) durch Ziehen

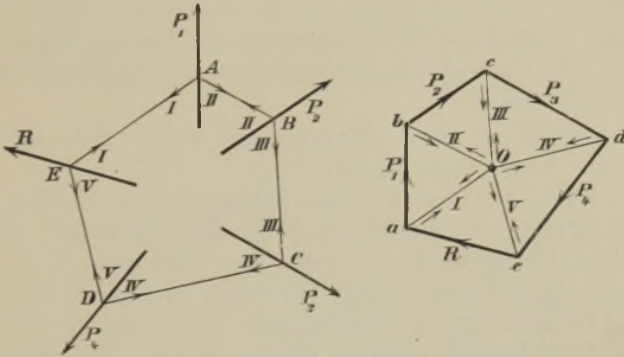


Fig. 8 a u. b.

der Parallelen  $aO$  und  $bO$  zu den angenommenen Richtungen von  $I$  und  $II$  erhalten. Ihren Sinn findet man, indem man die Seiten des Kräfte-dreiecks  $abO$  so mit Pfeilen versieht, daß der durch den Pfeil der Kraft  $P_1$  vorgeschriebene Umfassungssinn ein stetiger ist. Man erhält: Kraft  $I =$  Strecke  $Oa$  und Kraft  $II =$  Strecke  $bO$ .

Im Schnittpunkte  $B$  der beiden Kräfte  $II$  und  $P_2$  wird erstere durch eine entgegengesetzt gerichtete, gleich große Kraft aufgehoben, worauf durch Hinzufügen der durch die Linie  $cO$  des Kräfteplanes nach Größe, Richtung und Sinn gegebenen Kraft  $III$  am Punkte  $B$  Gleichgewicht hergestellt wird. Ebenso wird am Punkte  $C$  nach Aufheben von  $III$  durch Hinzufügen von  $IV = \overline{dO}$  und am Punkte  $D$  nach Aufheben von  $IV$  durch Hinzufügen von  $V = \overline{eO}$  Gleichgewicht erzielt.

Nachdem schließlich noch im Schnittpunkte  $E$  von  $I$  und  $V$  diese Kräfte durch gleich große und entgegengesetzt gerichtete Kräfte getilgt worden sind, wird durch die Kraft  $R = \overline{ea}$  das Gleichgewicht auch an dem Punkte  $E$  hergestellt.

Da nun an jedem der Punkte  $A, B, C, D, E$  drei im Gleichgewichte befindliche Kräfte angreifen und die Kräfte  $I, II, III, IV$  und  $V$  sich paarweise aufheben, ist  $R$  mit den Kräften  $P_1, P_2, P_3$  und  $P_4$  im Gleichgewichte.



Das Polygon  $ABCDEA$  kann man als die Mittellinie eines Seiles betrachten, an welchem die Kräfte  $P_1, P_2, P_3, P_4$  und  $R$  angreifen, und in dessen Seiten die Spannkkräfte (*Seilkräfte*)  $I, II, III, IV, V$  entstehen. Deshalb nennt man  $ABCDEA$  ein *Seilpolygon* oder auch *Gelenkpolygon*. Die erste gebräuchlichere Bezeichnung ist allerdings weniger zutreffend, da, falls die in Fig. 8a angenommenen Kräfte  $P_1, P_2, P_3, P_4$  und  $R$  sämtlich umgekehrt werden, in den Polygonseiten Drücke entstehen, und an Stelle des Seiles ein aus druckwiderstandsfähigen Stäben bestehendes Polygon zu denken ist. Die Linien  $Oa, Ob \dots$  im Kräfteplane Fig. 8b heißen *Seilstrahlen*. Den Punkt  $O$  nennt man den *Pol* und das Lot vom Pole auf irgend eine Kraft die *Polweite* dieser Kraft.

Im Anschluß an diese Benennungen ergibt sich für die Bestimmung der Kraft  $R$  die Regel:

Nach Aufzeichnung des Kräftepolygons  $abcdea$ , welches die Größe und die Richtung der Kraft  $R$  liefert, wähle man einen beliebigen Pol  $O$ , ziehe die Seilstrahlen  $I, II, III \dots$  und zeichne durch einen beliebigen Punkt (z. B. den Punkt  $A$  der Kraft  $P_1$ ) ein Seilpolygon. Seine Seiten sind parallel den Seilstrahlen, und es müssen sich zwei Seilpolygonseiten stets mit derjenigen Kraft  $P$  in einem Punkte schneiden, welche mit den zugeordneten Seilstrahlen ein Dreieck bildet. Durch den Schnittpunkt der ersten und letzten Polygonseite geht die Kraft  $R$ .

Die erste und letzte Seilpolygonseite nennen wir in der Folge die *äußersten Seiten für die fragliche Gruppe von Kräften*. So sind z. B.  $II$  und  $IV$  die beiden äußersten Seiten für die Gruppe  $(P_2, P_3)$ .

Ist die Aufgabe gestellt, die Kräfte  $P_1, P_2, P_3$  und  $P_4$  zu einer *Mittelkraft* zu vereinigen, so hat man nur nötig, die das Gleichgewicht herstellende Kraft  $R$  durch eine gleich große, entgegengesetzt wirkende zu ersetzen.

Zur Fig. 6 bemerken wir nachträglich, daß das Mittelkraftspolygon  $ABCDE$  als ein Seilpolygon anzusehen ist, dessen Pol mit dem Anfangspunkte  $a$  des Kräftezuges  $abcdef$  zusammenfällt. Den Begriff *Mittelkraftspolygon* aber erweitern wir noch, indem wir ihn auf jedes Seilpolygon ausdehnen, dessen Pol irgend ein Eckpunkt des Kräftepolygons ist. Die vom Pole aus gezogenen Strahlen sind in diesem Falle Seiten des Kräftepolygons oder die Mittelkräfte der durch sie unterspannten gegebenen Kräfte.

**5. Beziehung zwischen zwei Seilpolygonen, die aus verschiedenen Polen zu denselben Kräften gezeichnet werden.** Fig. 9a u. 9b. Sind  $I, II, \dots$  die vom Pole  $O$  aus gezogenen Seilstrahlen und

$I', II', \dots$  die zum Pole  $O'$  gehörigen, und bringt man die entsprechenden Seilpolygonseiten, nämlich  $I$  und  $I'$ , ferner  $II$  und  $II'$  u. s. w. miteinander zum Schnitt, so liegen alle diese Schnittpunkte auf einer Geraden, welche der Verbindungslinie  $OO'$  der beiden Pole parallel ist. Denn in den beiden Vierecken  $ABOO'$  und  $abcd$  sind 5 entsprechende Seiten einander parallel, nämlich  $ad \parallel AO'$ ,  $bc \parallel BO$ ,  $de \parallel AB$ ,  $ac \parallel AO$  und  $db \parallel O'B$ . Es muß mithin auch  $ab \parallel O'O$  sein. Ebenso folgt, daß  $be \parallel O'O$  und  $ia \parallel O'O$  ist, daß also die Punkte  $iabe$  auf einer zur  $OO'$  parallelen Geraden liegen.

Ein zweiter Beweis ist der folgende. Die Kraft  $P_2$  (Fig. 9b) ist sowohl im Gleichgewichte mit den beiden Kräften  $\overline{O'A} = II'$  und

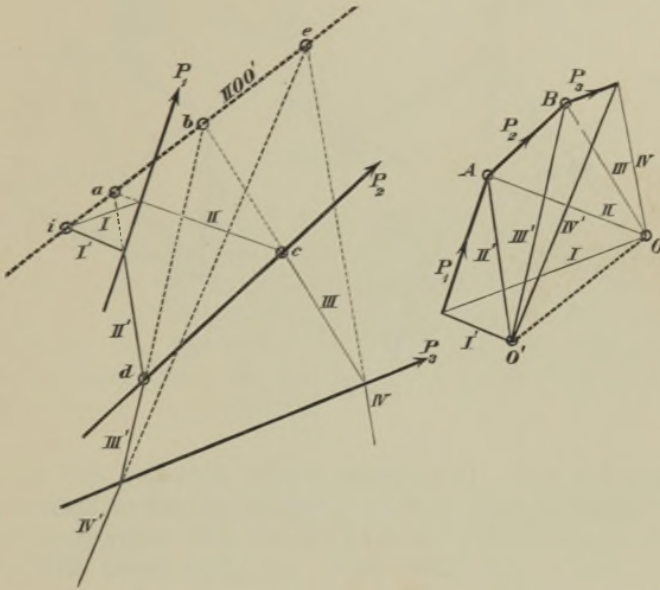


Fig. 9 a u. b.

$\overline{BO'} = III'$ , als auch mit den beiden Kräften  $\overline{OA} = II$  und  $\overline{BO} = III$ , und es müssen sich daher die 4 Kräfte  $O'A$ ,  $BO'$ ,  $-OA = AO$ ,  $-BO = OB$  das Gleichgewicht halten. Die Mittelkraft aus  $\overline{O'A} = II'$  und  $\overline{AO} = II$  geht in Fig. 9a durch den Schnittpunkt  $a$  der Seilpolygonseiten  $II'$  und  $II$ , und die Mittelkraft aus  $\overline{OB} = III$  und  $\overline{BO'} = III'$  geht durch den Punkt  $b$ . Beide Mittelkräfte sind parallel zur Geraden  $OO'$ ; sie müssen sich gegenseitig tilgen, und dies ist nur möglich, wenn die Gerade  $ab \parallel OO'$  ist. In gleicher Weise kann man schließen, daß  $ia \parallel OO'$  und  $be \parallel OO'$  sein muß.

6. Eine unendlich ferne, unendlich kleine Kraft als Mittelkraft endlicher Kräfte. Das Kräftepaar. Entspricht den Kräften  $P_1, P_2, P_3$  und  $P_4$  (Fig. 10) ein geschlossenes Kräftepolygon, so ist die Mittelkraft gleich Null. Das mit dem Pole  $O$  gezeichnete Seilpolygon  $ABCD$  wird sich im allgemeinen nicht schließen. Denkt man dann in den Punkten  $A, B, C, D$  die Seilkräfte tätig, so wird Gleichgewicht herrschen, da an jedem dieser Punkte drei miteinander im Gleichgewichte befindliche Kräfte angreifen. Nun heben sich aber von den Seilkräften nur die  $II, III, IV$  paarweise auf, so daß die Kräfte  $P_1, P_2, P_3, P_4$  nicht für sich allein, sondern mit den beiden Kräften  $I$  im

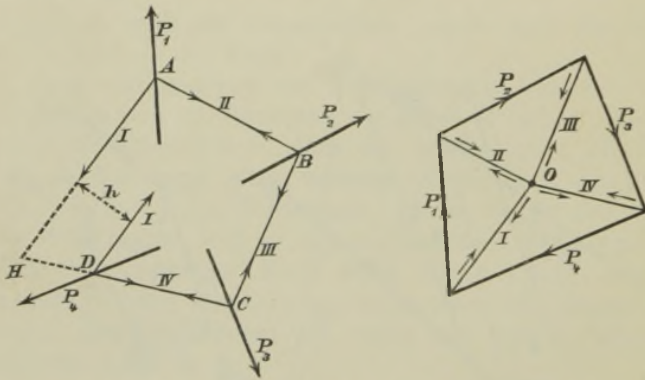


Fig. 10 a u. b.

Gleichgewichte sind. Diese beiden Kräfte schneiden sich auf der unendlich fernen Geraden der Ebene; ihre Mittelkraft ist unendlich klein; ersetzt man diese durch eine gleich große, aber entgegengesetzte Kraft, so erhält man die *unendlich ferne, unendlich kleine Mittelkraft* der Kräfte  $P_1, P_2, P_3, P_4$ .

Die Kräfte  $I$  in Fig. 10a bilden ein *Kräftepaar*; ihren gegenseitigen Abstand  $h$  nennt man den *Arm* und das Produkt

$$M = I \cdot h$$

aus Kraft und Arm das *Moment des Kräftepaares*; dasselbe ist *unabhängig von der Lage des Poles* und wird deshalb als das Maß des Kräftepaares beziehungsweise der diesem gleich zu achtenden unendlich fernen, unendlich kleinen Kraft angesehen.

Der Beweis für diesen Satz ist folgender. Ist  $O'$  ein neuer Pol (Fig. 11), so ist die Gerade, welche den Schnittpunkt  $E$  der einander entsprechenden ersten Seilpolygonseiten  $I$  und  $I'$  mit dem Schnittpunkte  $F$  der einander entsprechenden letzten Seiten  $IV$  und  $IV'$  verbindet, parallel



zur Verbindungslinie  $OO'$  der beiden Pole. Hiernach ist bei angenommener Lage der ersten Seite  $I'$  des neuen Seilpolygons die Lage der

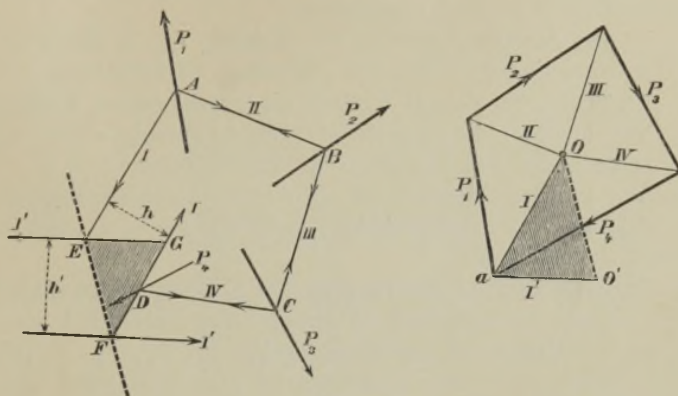


Fig. 11 a u. b.

letzten Seite  $I'$  gegeben und mithin auch das Moment  $M = I' \cdot h'$  des Paares ( $I' I'$ ), dessen Arm gleich  $h'$  sein möge. Verlängert man die erste Seite  $I'$  bis zu ihrem Schnittpunkte  $G$  mit der letzten Seite  $I$ , so erhält man das Dreieck  $GEF$ , welches dem Dreiecke  $aOO'$  ähnlich ist. Bedeuten für das letztere Dreieck:  $s$  und  $s'$  die Längen der Lote, welche beziehungsweise aus den Ecken  $O'$  und  $O$  auf die Seiten  $I$  und  $I'$  gefällt werden, so ergibt sich

$$\frac{h}{h'} = \frac{s}{s'}$$

Nun ist aber der doppelte Inhalt des Dreiecks  $aOO' = I \cdot s = I' \cdot s'$ , mithin  $\frac{s}{s'} = \frac{I'}{I}$ ,

und es folgt deshalb  $\frac{h}{h'} = \frac{I'}{I}$  und hieraus  $I \cdot h = I' \cdot h'$ ,

was zu beweisen war.

Kehrt man in Fig. 11a den Sinn der beiden Kräfte  $I'$  um, so gelangt man zu einem Kräftepaare ( $I' I'$ ), welches mit dem Kräftepaare ( $I I$ ) im Gleichwichte ist; die Momente beider Paare sind entgegengesetzt gleich.

**7. Gleichgewichtsbedingungen.** Verschiebt man in Fig. 10a die Kraft  $P_4$  parallel mit sich selbst, bis sie durch den Schnittpunkt  $H$  der Seilpolygonseiten  $I$  und  $IV'$  geht, so schließt sich das Seilpolygon. Die beiden Seilkräfte  $I$  tilgen sich, und die Kräfte  $P_1, P_2, P_3, P_4$  sind miteinander im Gleichwichte. Das von der Lage des Poles unab-



*hängige* Moment  $I \cdot h$  wird infolge der Verlegung von  $P_4$  gleich Null, und mit ihm verschwindet auch die unendlich ferne, unendlich kleine Kraft, welche vorher zur Herstellung des Gleichgewichtes hinzugefügt werden mußte. Man darf aussprechen:

Für das Gleichgewicht von Kräften, die in derselben Ebene an verschiedenen Punkten angreifen, ist erforderlich und ausreichend, daß diesen Kräften ein geschlossenes Kräftepolygon und ein geschlossenes Seilpolygon entsprechen oder, was dasselbe heißt, daß sie keine Mittelkraft besitzen.

Bei der zweiten Fassung der Gleichgewichtsbedingung ist zu beachten, daß die Kräfte auch keine unendlich ferne, unendlich kleine Mittelkraft haben dürfen.

**8. Parallele Kräfte. Bestimmung des Schwerpunktes einer Fläche.** Die Anwendung des Seilpolygons erweist sich namentlich als vorteilhaft, wenn die Mittelkraft *paralleler Kräfte*  $P_1, P_2, P_3, P_4$  (Fig. 12b) bestimmt werden soll. Der Kräftezug ist hier eine Gerade (Fig. 12a),  $O$  ist der beliebig gewählte Pol. Durch den Schnittpunkt der beiden

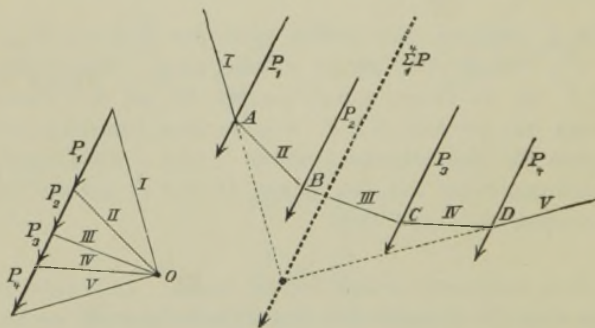


Fig. 12 a u. b.

äußersten Seilpolygonseiten  $I$  und  $V$  geht

$$R = P_1 = P_2 + P_3 + P_4 = \sum_1^4 P.$$

Es kann auch das Seilpolygon zur graphischen Bestimmung des Schwerpunktes einer Fläche, welche sich in einzelne Teile mit gegebenen Schwerpunkten zerlegen läßt, benutzt werden.

Um z. B. den Schwerpunkt der in Figur 13 dargestellten Fläche (welche etwa den Querschnitt eines eisernen Trägers bedeuten möge) zu finden, fasse man die Inhalte  $F_1, F_2, F_3$  der 3 Rechtecke, aus denen die Fläche besteht, als parallele Kräfte auf, welche einmal in der Richtung  $AB$ , dann in der Richtung  $A'B'$  wirken. Hierauf bestimme man für diese beiden Fälle die Lage der Mittelkraft  $\Sigma F$ .

Man findet auf diese Weise zwei Schwerachsen  $S$  und  $S'$ , deren Schnittpunkt der gesuchte Schwerpunkt ist. Die Richtungen  $AB$  und  $A'B'$  sind willkürlich.

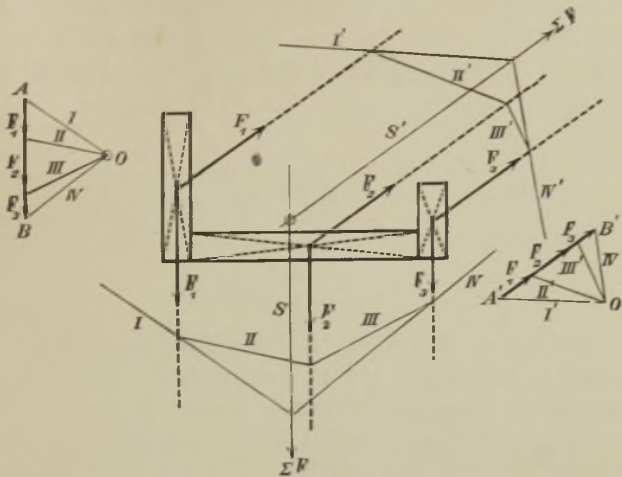


Fig. 13.

Da beim Zeichnen der Kräftezüge in Fig. 13 die Flächeninhalte der Rechtecke durch Linien dargestellt werden, welche sich zueinander verhalten wie  $F_1:F_2:F_3$ , so empfiehlt es sich, die drei Rechtecke in solche von gleicher, beliebig gewählter Grundlinie zu verwandeln, deren Höhen dann den Inhalten  $F_1, F_2, F_3$  proportional sind.

Um z. B. das Rechteck  $ABCD$ , Fig. 14, in ein anderes zu verwandeln, dessen eine Seite  $= DE$  ist, zieht man die Gerade  $CE$  und hierauf  $AG \parallel EC$ . Es ist dann  $DG$  die zweite Seite des Rechtecks, weil  $ED:CD = AD:GD$ , mithin  $ED \cdot GD = CD \cdot AD$ .

Wird der Schwerpunkt einer krummlinigen Figur gesucht, so ist diese in Streifen zu zerlegen, welche, wenn möglich, gleiche Breite erhalten und so schmal sein müssen, daß sie mit genügender Genauigkeit als Rechtecke, Trapeze oder Dreiecke betrachtet werden dürfen.

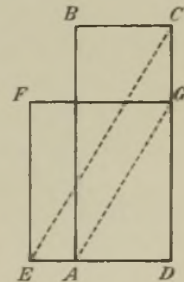


Fig. 14.

## § 2.

### Zerlegung der Kräfte in der Ebene.

9. Die Zerlegung einer Kraft  $R = \overline{ac}$  (Fig. 3a) in zwei Seitenkräfte, deren gegebene Richtungen die  $R$  in demselben Punkte  $a$  schneiden, erfolgt mit Hilfe des Parallelogramms der Kräfte. Vergl. No. 1.



gezogen. Diese zerlegt die Kraft  $R = \Sigma P$  in  $A$  und  $B$ . Der obere Teil ist gleich  $A$ ; denn diese Kraft ist im Punkte  $a$  mit den Seilkräften  $I$  und  $s$  im Gleichgewichte, muß also mit den Seilstrahlen  $I$  und  $s$  ein Dreieck bilden, und ebenso folgt, daß  $B$  mit den Strahlen  $s$  und  $V$  ein Dreieck bildet.

12. Sollen (Fig. 17) drei nicht durch denselben Punkt gehende, der Lage nach bekannte Kräfte  $X$ ,  $Y$  und  $Z$  gefunden werden, welche

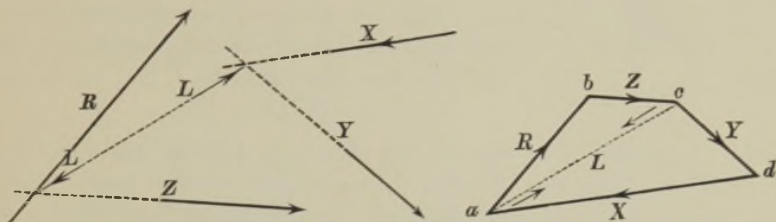


Fig. 17 a u. b.

einer gegebenen Kraft  $R$  das Gleichgewicht halten, so bringe man nach Belieben je zwei der vier Kräfte  $R$ ,  $X$ ,  $Y$  und  $Z$  miteinander zum Schnitt, z. B.  $R$  und  $Z$ , ferner  $X$  und  $Y$ , und addiere, mit der Verbindungslinie der beiden Schnittpunkte zusammenfallend, zwei sich aufhebende Kräfte  $L$ . Nun bestimme man  $L$  und  $Z$  aus der Bedingung, daß sich die Kräfte  $R$ ,  $L$  und  $Z$  am Schnittpunkte  $[RZ]$  das Gleichgewicht halten, daß ihnen also ein geschlossenes Dreieck  $abca$  Fig. 17b entsprechen muß und hierauf  $X$  und  $Y$  aus der Bedingung, daß diese beiden Kräfte am Punkte  $[XY]$  mit der nunmehr gegebenen  $L$  im Gleichgewichte sind.

Ist die Aufgabe gestellt, eine gegebene Kraft  $R$  in drei der Lage nach bekannte Kräfte  $X$ ,  $Y$  und  $Z$ , welche nicht durch denselben Punkt gehen, zu zerlegen, so hat man nur nötig, die vorhin (Fig. 17b) gefundenen Kräfte  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  durch gleich große aber entgegengesetzt wirkende zu ersetzen.

Die eindeutige Zerlegung einer Kraft nach vier oder mehr Richtungen, die mit ihr in derselben Ebene liegen, ist unmöglich. Es besitzt diese Aufgabe unendlich viele Lösungen.

### § 3.

#### Von den statischen Momenten der Kräfte.

13. Begriffe. Unter dem *statischen Momente*  $M$  einer Kraft  $P$  in Bezug auf den *Drehpunkt* (*Momentenpunkt* oder *Momentenpol*)  $C$  versteht man das aus  $P$  und seinem Abstände  $e$  von  $C$  gebildete Produkt; es ist also

$$M = Pe.$$



Geometrisch erklärt ist das Moment  $M$  gleich dem doppelten Inhalte des Dreiecks  $ABC$ , Fig. 18, dessen Grundlinie die Kraft  $P$ , und dessen Spitze der Drehpunkt  $C$  ist. Der Sinn dieses Dreiecks wird durch den Sinn der Kraft  $P$  bestimmt. Die Momente der Kräfte  $P$  und  $P'$  in Fig. 18 haben also entgegengesetzten Sinn. Das Moment  $M = Pe$  heißt ein rechts drehendes (d. i. im Sinne des Uhrzeigers drehendes); es wird positiv angenommen, und im Gegensatze hierzu ist der analytische Ausdruck für das Moment von  $P'$

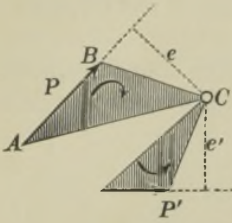


Fig. 18.

$$M' = -P'e'.$$

**14. Lehrsatz:** Die Summe der Momente beliebig vieler in derselben Ebene gelegener Kräfte, bezogen auf irgend einen Punkt dieser Ebene, ist gleich dem Momente ihrer Mittelkraft in Bezug auf denselben Punkt.

Um diesen Satz zu beweisen, betrachten wir zunächst die beiden Kräfte  $P_1$  und  $P_2$  (Fig. 19), deren Mittelkraft  $= R$  sein möge, verbinden den Punkt  $A$ , in welchem sie sich schneiden, mit dem Drehpunkte  $C$  durch eine Gerade und projizieren die Kräfte  $P_1, P_2, R$  auf die zur  $AC$  Senkrechte  $CF$ . Sind die Projektionen jener Kräfte beziehungsweise:  $\overline{CE} = P'_1$ ;  $\overline{EF} = P'_2$ ;  $\overline{CF} = R'$ , so ist das Moment der Kraft  $P_1$

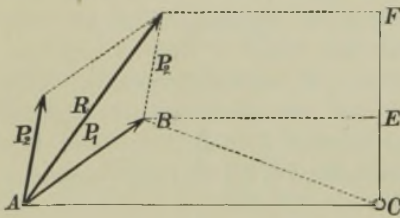


Fig. 19.

$$M_1 = 2 \cdot \Delta ABC = \overline{AC} \cdot P'_1,$$

das Moment von  $P_2$

$$M_2 = \overline{AC} \cdot P'_2$$

und dasjenige von  $R$

$$M = \overline{AC} \cdot R'.$$

Da nun  $R' = P'_1 + P'_2$  ist, so folgt

$$M = M_1 + M_2, \text{ w. z. b. w.}$$

Um den Satz für zerstreut in der Ebene wirkende Kräfte, z. B.  $P_1, P_2, P_3, P_4$  (Fig. 20\*) zu beweisen, setze man dieselben mittels eines Seilpolygons zu ihrer Mittelkraft  $R$  zusammen und denke in den Endpunkten des Seilpolygons die sich paarweise aufhebenden Seilkräfte

\*) Vergl. auch Fig. 21.

tätig; sie wurden in Fig. 20 mit  $I, I', II, II', III, III'$  . . . . . bezeichnet, wobei  $I = I'; II = II'; III = III'$  u. s. w.

Da nun am Punkte  $A$  die drei Kräfte  $II, I'$  und  $P_1$  miteinander im Gleichgewicht sind, so ist die der Kraft  $II$  entgegengesetzt gleiche  $II'$  die Mittelkraft aus den Kräften  $I'$  und  $P_1$ , und ihr Moment ist deshalb gleich der Summe der Momente von  $I'$  und  $P_1$ . Bezeichnet man also ganz allgemein das Moment einer Kraft  $Q$  mit  $M_Q$ , so erhält man

$$M_{II'} = M_{I'} + M_{P_1}$$

und ebenso ergibt sich

$$M_{III'} = M_{II'} + M_{P_2}$$

$$M_{IV'} = M_{III'} + M_{P_3}$$

$$M_{V'} = M_{IV'} + M_{P_4} = M_{I'} + M_{P_1} + M_{P_2} + M_{P_3} + M_{P_4}.$$

Da nun  $R$  die Mittelkraft aus  $V'$  und  $I$  ist, so folgt noch

$$M_R = M_I + M_{V'} \text{ d. i.}$$

$$M_R = M_I + M_{I'} + M_{P_1} + M_{P_2} + M_{P_3} + M_{P_4},$$

und in der letzten Gleichung tilgen sich auf der rechten Seite die entgegengesetzt gleichen Momente der entgegengesetzt gleichen Kräfte  $I$  und  $I'$ . Es ist deshalb

$$M_R = M_{P_1} + M_{P_2} + M_{P_3} + M_{P_4},$$

was zu beweisen war.

Ganz ebenso kann der Beweis für beliebig viele Kräfte geführt werden.

15. Bestimmung des statischen Momentes beliebig vieler in derselben Ebene wirkender Kräfte. Um das Moment der Kräfte  $P_1, P_2, P_3$  und  $P_4$  in Bezug auf den Drehpunkt  $C$  zu ermitteln, wird man (Fig. 21) zunächst die Mittelkraft  $R$  aufsuchen, indem man den aus  $P_1, P_2, P_3$  und  $P_4$  gebildeten Kräftezug durch die Linie  $\overline{LN} = R$  unterspannt und diese Linie mit einem Pfeile versieht, welcher den Umfahrungssinn des Kräftepolygons un stetig macht. Nun wählt man den beliebigen Pol  $O$ , zeichnet das Seilpolygon und findet in dem Schnittpunkte  $E$  der beiden äußersten Seilpolygonseiten einen Punkt der Kraft  $R$ . Jetzt kann man  $M = Rr$  berechnen oder auch konstruieren. Dazu schreibt man  $M = \frac{Rr}{1}$  und faßt  $M$  als vierte Proportionale zu den Größen  $R, r$  und 1 auf.

Der Wert  $M$  läßt sich aber noch in einer anderen, für die Folge sehr vorteilhaften Form darstellen. Zieht man durch den Drehpunkt  $C$

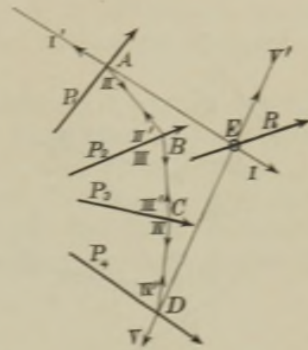
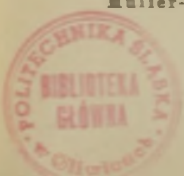


Fig. 20.



zu  $R$  eine Parallele, welche die Seilpolygonseiten  $I$  und  $V$  in  $J$  und  $F$  schneidet, und setzt  $\overline{FJ} = y$ , so folgt aus der Ähnlichkeit der beiden

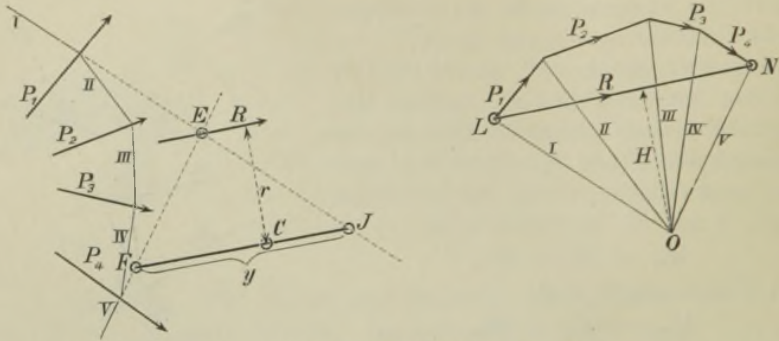


Fig. 21 a u. b.

Dreiecke  $EFJ$  und  $OLN$  (deren Seiten beziehungsweise parallel sind)

$$r : y = H : R,$$

wobei  $H$  die Polweite der Kraft  $R$  bedeutet. Es ist also  $Hy = Rr$ , mithin

$$M = Hy,$$

und es ergibt sich der Satz:

*Das statische Moment beliebig vieler Kräfte in der Ebene ist gleich dem Produkte aus der Polweite ihrer Mittelkraft  $R$  und aus der Strecke, welche von den äußersten Seilpolygonseiten auf einer durch den Drehpunkt  $C$  zu  $R$  gezogenen Parallelen abgeschritten wird.*

Über das Vorzeichen des Momentes entscheidet sein Drehungssinn. Das Moment der Kraft  $R$  in Fig. 21a ist rechtsdrehend, also positiv. Je näher  $C$  an  $R$  rückt, desto kleiner wird  $y$  und desto kleiner auch  $M$ . Fällt  $C$  mit  $R$  zusammen, so wird  $y = 0$ . Liegt  $C$  oberhalb  $R$ , so ist  $y$  negativ zu nehmen; man erhält dann ein negatives  $M$ .

Die letztbeschriebene Darstellungsweise des Momentes ist deshalb vorteilhaft, weil der Pol, dessen Lage willkürlich angenommen werden darf, so gewählt werden kann, daß die Polweite  $H$  durch eine runde Zahl ausgedrückt wird. Nimmt man  $H = 1$ , so folgt

$$M = y.$$

In dem Produkte  $Rr$  ist die Größe  $R$  in Kräfteeinheiten (z. B. in Kilogrammen) und  $r$  in Längeneinheiten (z. B. in Metern) auszudrücken. Hingegen ist es bei der Berechnung von  $Hy$  gleichgültig, ob  $H$  mit dem Kräftemaßstabe und  $y$  mit dem Längenmaßstabe gemessen wird, oder umgekehrt.



Wir werden in der Folge unter  $H$  (falls nicht das Gegenteil besonders hervorgehoben wird) eine Kraft verstehen.

**16. Parallele Kräfte in der Ebene.** Der in No. 15 ausgesprochene Satz findet namentlich Anwendung, wenn es sich um die Bestimmung des Momentes paralleler Kräfte handelt.

Ist z. B. das Moment der parallelen Kräfte  $A, P_1$  und  $P_2$  (Fig. 22) für den Drehpunkt  $C$  gesucht, so werden die Kräfte in der Reihenfolge  $A, P_1, P_2$  aneinandergesetzt und von dem beliebig gewählten Pole aus die Strahlen  $s, I, II, III$  gezogen. Der Strahl  $s$  geht nach dem Anfangspunkte und der Strahl  $III$  nach dem Endpunkte des Kräftezuges; mithin sind in Figur 22 a, in welcher das Seilpolygon dargestellt

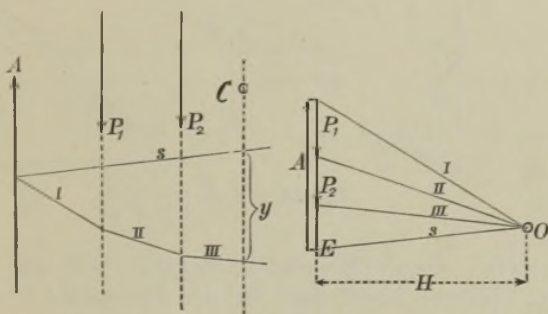


Fig. 22 a u. b.

ist, die Seiten  $s$  und  $III$  die äußersten; sie schneiden auf der durch  $C$  zur Mittelkraft  $A - P_1 - P_2$  parallel gezogenen Geraden die Strecke  $y$  ab, welche mit der Polweite jener Kraft, d. i. mit dem vom Pole auf den Kräftezug gefällten Lote  $H$ , multipliziert das Moment liefert.

Das Moment  $M = Hy$  ist positiv; denn es wirkt, wegen  $A > P_1 + P_2$ , die Mittelkraft  $R = A - P_1 - P_2$  in demselben Sinne wie  $A$ , also aufwärts, und es liegt außerdem  $R$  links vom Drehpunkte  $C$ , weil es durch den Schnittpunkt der nach links konvergierenden Seilpolygonseiten  $III$  und  $s$  geht. Daraus folgt aber, daß das Moment von  $R$  ein rechtsdrehendes ist.

**17.** Eine andere für die Folge sehr wichtige Aufgabe lautet: Gegeben sind die parallelen Kräfte  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ , gesucht wird ihr Moment  $M$  für den Drehpunkt  $C$ , ferner das Moment  $M'$  der Kräfte  $P_1, P_2, P_3$  für den Drehpunkt  $C'$ . Fig. 23.

Die Kräfte werden in der Reihenfolge  $P_6, P_5 \dots P_1$  (Fig. 23b) aneinandergesetzt, und der Pol wird in beliebiger Weite  $H$  vom Kräftezuge so gewählt, daß der Seilstrahl  $I$  senkrecht zur Richtung der Kräfte  $P$



ist. Hierauf wird (Fig. 23a) das Seilpolygon gezeichnet und die Seite *I* desselben verlängert. Zieht man jetzt durch *C* eine Parallele zur Mittelkraft  $\sum P$ , und mißt die Strecke *y*, welche auf jener Parallelen durch die äußersten Polygonseiten *I* und *VII* abgeschnitten wird, so erhält

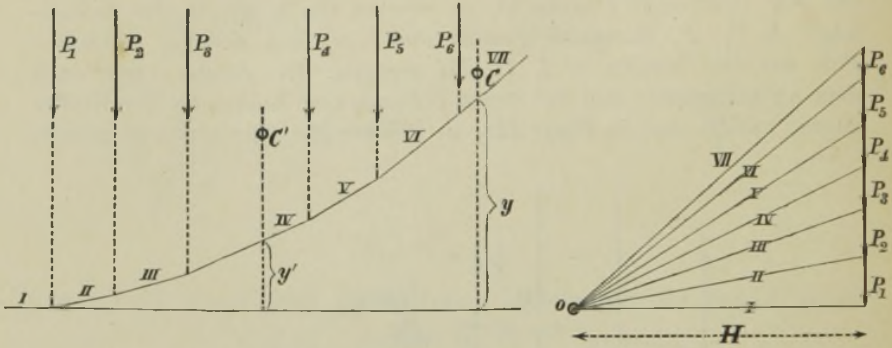


Fig. 23 a u. b.

man  $M_c = -Hy$ . Dieses Moment ist negativ, weil alle Kräfte links um *C* drehen. Ebenso findet man für den Drehpunkt *C'* das Moment der Kräfte  $P_1, P_2, P_3$ ,

$$M_{c'} = -Hy',$$

denn *I* und *IV* sind die äußersten Seilpolygonseiten in Bezug auf die Gruppe  $P_1, P_2, P_3$ . Man kann hiernach aussprechen:

*Irgend eine Ordinate des Seilpolygons paralleler Kräfte in Fig. 23a, bezogen auf die zur Krafrichtung senkrechte Polygonseite I als Abscissenachse, ist dem Momente proportional, welches die vor der Ordinate gelegenen Kräfte in Bezug auf irgend einen auf der Ordinate angenommenen Drehpunkt ausüben.*

§ 4.

**Zusammensetzung der Kräfte im Raume.\*)**

**18. Statische Momente und Mittelkraft paralleler Kräfte.** Werden parallele Kräfte  $P_1, P_2, P_3 \dots$  durch eine zu ihrer Richtung senkrechte Ebene *E* in den Punkten  $A_1, A_2, A_3 \dots$

\*) Eine eingehendere Theorie der Kräfte im Raume findet sich im dritten Bande dieses Buches.

(Fig. 24) geschnitten, und sind  $x_m, y_m$  (wo  $m$  eine beliebige Ordnungsziffer) die Koordinaten von  $A_m$  bezüglich eines in der Ebene  $E$  an-

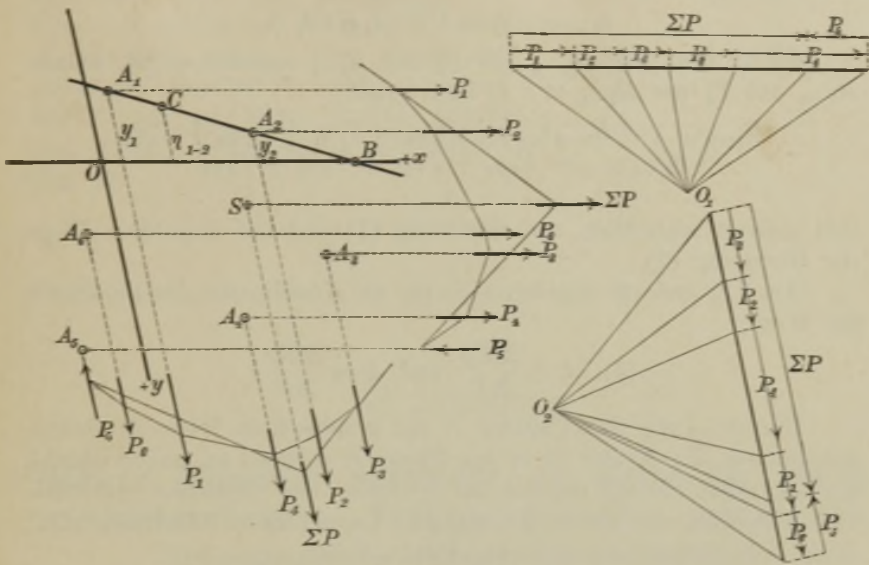


Fig. 24.

genommenen, im allgemeinen schiefwinkligen Achsenkreuzes, so nennt man die Produkte  $P_m x_m$  und  $P_m y_m$  die statischen Momente der Kraft  $P_m$  in Bezug auf die Achsen  $y$  und  $x$ .

Sind weiter  $\xi$  und  $\eta$  die Koordinaten des Punktes  $S$ , in welchem die Ebene  $E$  von der Mittelkraft  $R = P_1 + P_2 + \dots = \Sigma P$  geschnitten wird, so läßt sich nachweisen, daß

$$(1) R\eta = P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3 + \dots = \Sigma P y \text{ und}$$

$$(2) R\xi = P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3 + \dots = \Sigma P x$$

ist, daß also, bezogen auf irgend eine Achse, das Moment der Mittelkraft  $R$  gleich ist der Summe der Momente aller Kräfte  $P$ .

Vereinigt man nämlich  $P_1$  und  $P_2$  in einer durch diese beiden Kräfte gelegten Ebene  $E'$  zur Mittelkraft  $R_{1-2}$ , so ist nach No. 14 das Moment von  $R_{1-2}$  in Bezug auf den Punkt  $B$ , in welchem die Ebene  $E'$  die  $x$ -Achse schneidet, gleich der Summe der auf denselben Drehpunkt bezogenen Momente der Kräfte  $P_1$  und  $P_2$ . Trifft also  $R_{1-2}$  die Ebene  $E$  im Punkte  $C$ , so ist

$$R_{1-2} \overline{CB} = P_1 \overline{A_1 B} + P_2 \overline{A_2 B}.$$

und hieraus folgt, wenn die Ordinate von  $C$  mit  $\eta_{1-2}$  bezeichnet wird,

$$R_{1-2}\eta_{1-2} = P_1y_1 + P_2y_2,$$

denn es verhält sich

$$\eta_{1-2} : y_1 : y_2 = \overline{CB} : \overline{A_1B} : \overline{A_2B}.$$

Indem man jetzt  $R_{1-2}$  mit  $P_3$  zur  $R_{1-3}$  zusammensetzt, sodann  $R_{1-3}$  mit  $P_4$  zur  $R_{1-4}$  u. s. f., findet man

$$R_{1-3}\eta_{1-3} = R_{1-2}\eta_{1-2} + P_3y_3 = P_1y_1 + P_2y_2 + P_3y_3,$$

$$R_{1-4}\eta_{1-4} = P_1y_1 + P_2y_2 + P_3y_3 + P_4y_4,$$

.....

und gelangt schließlich zur Gleichung (1) und auf demselben Wege zur Gleichung (2).

Aus (1) und (2) ergeben sich für die Koordinaten des Punktes  $S$  die Werte

$$(3) \quad \eta = \frac{\sum Py}{\sum P} \quad \text{und} \quad \xi = \frac{\sum Px}{\sum P}.$$

Um die Lage des Punktes  $S$  auf graphischem Wege zu finden, nehme man die Kräfte  $P$  in der Ebene  $E$  wirkend an, zuerst parallel zur  $x$ -Achse, hierauf parallel zur  $y$ -Achse und bestimme mit Hilfe von Seilpolygonen (nach No. 8) die Lagen ihrer Mittelkräfte  $\sum P$ , deren Schnittpunkt der gesuchte Punkt  $S$  ist.

Beim Zeichnen der Kräftezüge ist auf das Vorzeichen der  $P$  zu achten. Es empfiehlt sich, die positiven  $P$  im Sinne der positiven Koordinatenachsen aufzutragen. Ist also beispielsweise für den in Fig. 24 dargestellten Fall die Ebene  $E$  wagerecht und die Krafrichtung im Sinne der Schwere die positive, so ist die im Sinne von ( $-x$ ) bezieh. ( $-y$ ) gezeichnete Kraft  $P_5$  von unten nach oben wirkend.

**19. Allgemeine Zusammensetzung der Kräfte im Raume.** Um beliebig gerichtete, im Raume zerstreute Kräfte zusammensetzen, bestimme man den Durchschnittspunkt  $A$  jeder Kraft  $P$  mit einer willkürlich angenommenen Ebene  $E$ , verschiebe die Kraft  $P$  in ihrer Richtung bis zum Punkte  $A$  und zerlege sie dort in zwei Seitenkräfte, deren eine in der Ebene  $E$  liegt, während die andere senkrecht hierzu ist. Sodann vereinige man alle zur  $E$  senkrechten Kräfte mit Hilfe des in No. 18 gelehrtens Verfahrens zu ihrer Mittelkraft  $N$  und alle in der Ebene  $E$  gelegenen Kräfte nach § 1 zu ihrer Mittelkraft  $Q$ .

Schneiden sich  $N$  und  $Q$ , so können sie zu einer Kraft  $R$  vereinigt werden; im Gegenfalle aber lassen sie sich nicht weiter zusammensetzen, und es ist dann, wegen der willkürlichen Lage der angenommenen Ebene  $E$ , möglich, die gegebenen Kräfte auf unendlich viele verschiedene Weisen durch zwei Kräfte zu ersetzen.



Soll eine zur Ebene  $E$  parallele Kraft  $P$  auf die angegebene Art und ohne Benutzung der unendlich fernen Geraden jener Ebene zerlegt werden, so füge man zwei sich aufhebende, zur Ebene  $E$  senkrechte Kräfte  $P'$ , welche  $P$  schneiden, hinzu, setze  $P$  mit der einen zur Mittelkraft  $P''$  zusammen, bringe die  $P''$  mit der Ebene  $E$  zum Schnitt und zerlege sie dort wieder in  $P$  und  $P'$ . Fig. 25.

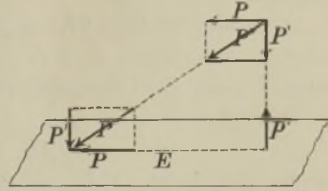


Fig. 25.

## II. Abschnitt.

### Höhere Momente paralleler, in derselben Ebene wirkender Kräfte. Trägheitsmomente und Zentrifugalmomente ebener Querschnitte.

#### § 5.

#### Höhere Momente paralleler Kräfte.

20. Bestimmung höherer Momente mit Hilfe des Culmannschen Verfahrens. Sind  $P_1, P_2, P_3 \dots$  (Fig. 26) parallele, in ein und derselben Ebene ( $E$ ) gelegene Kräfte und  $x_1, x_2, x_3 \dots$  ihre in irgend einer Richtung gemessenen Abstände von einer ebenfalls in der Ebene  $E$  gelegenen Geraden  $LL$ , so nennt man die Summe

$$P_1 x_1^n + P_2 x_2^n + P_3 x_3^n + \dots = \Sigma P x^n$$

das *Moment  $n^{\text{er}}$  Ordnung der Kräfte  $P$  in Bezug auf die Achse  $LL$* .

Im Falle  $n = 1$  heißt dieses Moment auch das *statische Moment* der Kräfte  $P$  (vergl. § 3) und im Falle  $n = 2$  das *Trägheitsmoment*; das letztere werden wir in der Regel mit  $J$  bezeichnen.

Kennt man für irgend eine Kraft  $P$  den Wert  $Px^{n-1}$ , so findet man  $Px^n = (Px^{n-1})x$  als das Moment erster Ordnung der Größe  $Px^{n-1}$  in Bezug auf die Achse  $LL$ , und es leuchtet ein, daß man, um  $\Sigma Px^n$  zu finden, nur nötig hat, der Reihe nach die statischen Momente



$$\Sigma Px, \Sigma (Px)x, \Sigma (Px^2)x \dots \Sigma (Px^{n-1})x$$

darzustellen.

Ist nun in Fig. 26:  $FN$  das Kräftepolygon und  $ABC\dots$  das aus dem beliebigen Pole  $O$  gezeichnete Seilpolygon, dessen Seiten die Achse  $LL$  in den Punkten 1, 2, 3, 4, 5, 6 schneiden mögen, so sind die Dreiecke

$$1A2, 2B3, 3C4 \dots,$$

welche die Achse  $LL$  mit je zwei aufeinander folgenden Seiten des

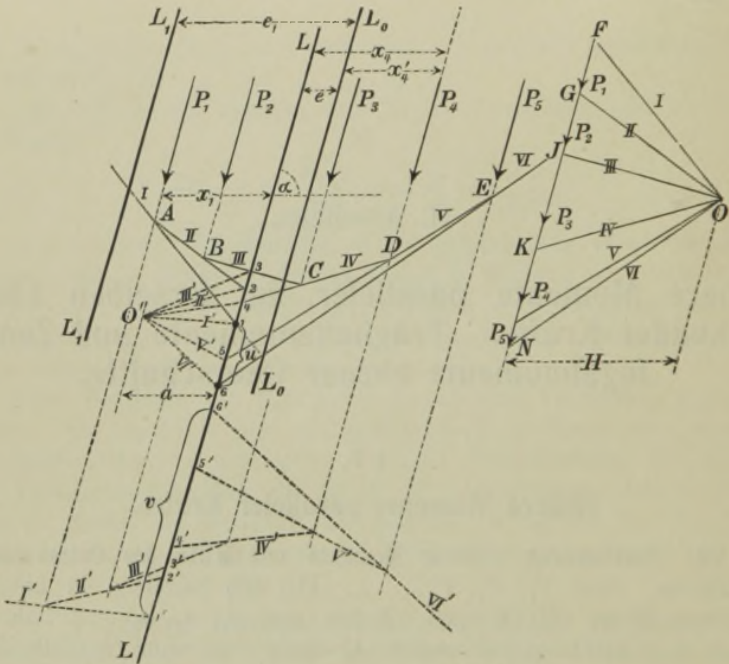


Fig. 26.

Seilpolygons bildet, den ihnen entsprechenden Kräftedreiecken

$$FOG, GOJ, JOK \dots$$

ähnlich, und es folgt, wenn  $H$  die in der Richtung  $x$  gemessene Polweite ist,

$$x_1 : \overline{12} = H : P_1; \quad x_2 : \overline{23} = H : P_2; \quad \text{u. s. w.}$$

und hieraus

$$P_1 x_1 = H \overline{12}; \quad P_2 x_2 = H \overline{23} \quad \text{u. s. w.},$$

mithin

$$\Sigma Px = H(\overline{12} + \overline{23} + \overline{34} \dots),$$

wobei die einzelnen Strecken:  $\overline{12}$ ,  $\overline{23}$ ,  $\overline{34}$  . . . . . mit Berücksichtigung ihrer Vorzeichen, welche bei im gleichen (positiven) Sinne wirkenden Kräften mit den Vorzeichen der entsprechenden  $x$  übereinstimmen, zu addieren sind.

Schneiden nun die äußersten Seiten des Seilpolygons auf der Achse  $LL$  die Strecke  $\overline{16} = u$  ab, so ist, ohne Vorzeichen,

$$\sum Px = Hu.$$

Für den in Fig. 26 dargestellten Fall, in welchem die  $x$  rechts von  $LL$  positiv angenommen wurden, ergibt sich  $\sum Px$  positiv, weil die Summe der positiven Abschnitte  $\overline{34}$ ,  $\overline{45}$ ,  $\overline{56}$  größer ist als die Summe der negativen Abschnitte  $\overline{12}$ ,  $\overline{23}$ .

Betrachtet man jetzt die Abschnitte  $\overline{12}$ ,  $\overline{23}$ ,  $\overline{34}$  . . . . . als Kräfte, die in den Richtungslinien der Kräfte  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  . . . . . wirken, zeichnet zu ihnen aus dem beliebig gewählten Pole  $O'$  das Seilpolygon  $I' II' III' \dots$ , dessen Seiten die Achse  $LL$  in den Punkten  $1' 2' 3' \dots$  schneiden, und setzt die der Richtung der  $x$  parallele zweite Polweite  $= a$ , so findet man, auf gleiche Weise wie vorhin

$$x_1 : \overline{1'2'} = a : \overline{12}; \quad x_2 : \overline{2'3'} = a : \overline{23}; \quad \text{u. s. w.},$$

hieraus (wegen  $\overline{12} = \frac{P_1 x_1}{H}$ ;  $\overline{23} = \frac{P_2 x_2}{H}$ ; . . . . .)

$$P_1 x_1^2 = Ha \overline{1'2'}; \quad P_2 x_2^2 = Ha \overline{2'3'}; \quad \text{u. s. w.}$$

und schließlich

$$J = \sum Px^2 = Ha(\overline{1'2'} + \overline{2'3'} + \overline{3'4'} + \dots) = Hav,$$

wo  $v$  die Strecke bedeutet, welche die äußersten Seiten des zweiten Seilpolygons auf der Achse  $LL$  abschneiden und welche stets positiv ist, sobald alle Kräfte im gleichen (positiven) Sinne wirken. Wenn  $H$  mit dem Kräftemaßstabe gemessen wird, stellen  $a$  und  $v$  Längen vor.

Es ist nun leicht einzusehen, wie man ein Moment beliebiger Ordnung zu bestimmen vermag. Wird  $\sum Px^3$  gesucht, so faßt man die Abschnitte  $\overline{1'2'}$ ,  $\overline{2'3'}$ ,  $\overline{3'4'}$  . . . (mit Berücksichtigung ihrer Vorzeichen) als parallele an die Stelle der entsprechenden  $P$  tretende Kräfte auf, zeichnet zu ihnen mit der Polweite  $b$  ein Seilpolygon und bestimmt die Strecke  $w$ , welche dessen äußerste Seiten auf der  $LL$  abschneiden. Man findet (ohne Vorzeichen)

$$\sum Px^3 = Habw.$$

Um  $\sum Px^n$  zu finden, sind  $n$  Seilpolygone zu zeichnen. Alle Polweiten sind in der Richtung der  $x$  zu messen.

**21. Bestimmung von  $J$  nach dem Verfahren von Mohr.** Die Statik der Bauwerke hat es außer mit statischen Momenten hauptsächlich mit Trägheitsmomenten zu tun. Die Ermittlung der letzteren läßt sich auch mit Hilfe des ersten Seilpolygons ( $I, II, III \dots$ ) vornehmen (Fig. 26). Der Inhalt  $\mathfrak{J}$  der von diesem Polygone, von dessen

äußersten Seiten (*I* und *VI*) und von der Achse *LL* eingeschlossenen Fläche (*1ABCDE61*) ist nämlich

$$\begin{aligned}\mathfrak{F} &= \Delta 1A2 + \Delta 2B3 + \Delta 3C4 + \dots \\ &= \frac{1}{2} \sin \alpha (x_1 \overline{12} + x_2 \overline{23} + x_3 \overline{34} \dots) \\ &= \frac{\sin \alpha}{2H} (P_1 x_1^2 + P_2 x_2^2 + P_3 x_3^2 + \dots) = \frac{\sin \alpha}{2H} \Sigma P x^2,\end{aligned}$$

wo  $\alpha$  den Winkel bedeutet, welchen die Richtungen der *P* und *x* miteinander einschließen, und es folgt mithin

$$(1) \quad J = \Sigma P x^2 = \frac{2\mathfrak{F}H}{\sin \alpha}.$$

**22. Beziehungen zwischen zwei auf parallele Achsen bezogenen Trägheitsmomenten.** Haben die Kräfte  $P_1, P_2, P_3 \dots$  (Fig. 26) von der mit ihrer Mittelkraft  $\Sigma P$  zusammenfallenden, also durch den Schnittpunkt der äußersten Seilpolygonseiten *I* und *VI* gehenden Achse  $L_0L_0$  die in der Richtung der *x* gemessenen Abstände  $x'_1, x'_2, x'_3 \dots$ , so ist ihr Trägheitsmoment  $J_0$ , bezogen auf die Achse  $L_0L_0$ .

$$J_0 = \Sigma P x'^2$$

und ihr statisches Moment in Bezug auf  $L_0L_0$

$$\Sigma P x' = 0.$$

Bezeichnet man nun mit *e* den in der Richtung der *x* gemessenen Abstand der Achse *LL* von der  $L_0L_0$  und setzt  $x = x' + e$ , so erhält man

$$J = \Sigma P x^2 = \Sigma P (x' + e)^2 = \Sigma P x'^2 + 2e \Sigma P x' + e^2 \Sigma P$$

und hieraus ergibt sich

$$(2) \quad \dots \dots \dots J = J_0 + e^2 \Sigma P.$$

In gleicher Weise erhält man für eine zur  $L_0L_0$  parallele Achse  $L_1L_1$ , welche von der  $L_0L_0$  den Abstand  $e_1$  hat

$$J_1 = J_0 + e_1^2 \Sigma P,$$

und es folgt deshalb das Gesetz

$$(3) \quad \dots \dots \dots J_1 - J = (e_1^2 - e^2) \Sigma P.$$

## § 6.

### Trägheitsmomente und Zentrifugalmomente ebener Querschnitte.

**23. Erklärungen.** Die Theorie der Momente zweiter Ordnung findet namentlich Anwendung bei der Untersuchung von geraden Stäben, welche auf Biegungsfestigkeit beansprucht werden. Bezieht man den Querschnitt eines solchen Stabes auf ein (in der Regel rechtwinklig angenommenes) Achsenkreuz *x, y* (Fig. 27), und bezeichnet mit *dF* den



Inhalt eines unendlich kleinen Teilchens des Querschnittes, so nennt man die über den ganzen Querschnitt auszudehnenden Integrale

$$J_x = \int y^2 dF; \quad J_y = \int x^2 dF; \quad J_{xy} = \int xy dF$$

die *Querschnittsmomente zweiter Ordnung*. Es heißt auch

$J_x$  das auf die  $x$ -Achse bezogene *Trägheitsmoment*,

$J_y$  „ „ „  $y$ - „ „ „

$J_{xy}$  das *Zentrifugalmoment*.

Da die Biegungsspannungen in geraden Stäben als Funktionen der 3 Integrale  $J_x, J_y, J_{xy}$  dargestellt werden können, so ist eine eingehende Untersuchung dieser Werte für die Statik der Bauwerke von besonderer Wichtigkeit. Zunächst wollen wir uns nur mit den Trägheitsmomenten beschäftigen.

**24. Bestimmung des Trägheitsmomentes einer unregelmäßigen Figur nach dem Verfahren von Culmann.** Das Trägheitsmoment  $J_x = \int y^2 dF$  ist unabhängig von den Abscissen  $x$  der Querschnittsteilchen, und es darf mithin unter  $dF$  der Inhalt eines der zur  $x$ -Achse parallelen, unendlich schmalen Streifens verstanden werden. (Vergl. Fig. 31 und 32.)

Bei der graphischen Bestimmung von  $J$  muß man nun diese unendlich schmalen Streifen durch solche von endlicher Breite ersetzen (Fig. 27). Sind  $F_1, F_2, F_3 \dots$  deren Inhalte und  $y_1, y_2, y_3 \dots$  die Abstände ihrer Schwerpunkte von der  $x$ -Achse, so ist angenähert

$$J_x = F_1 y_1^2 + F_2 y_2^2 + F_3 y_3^2 + \dots = \Sigma F y^2.$$

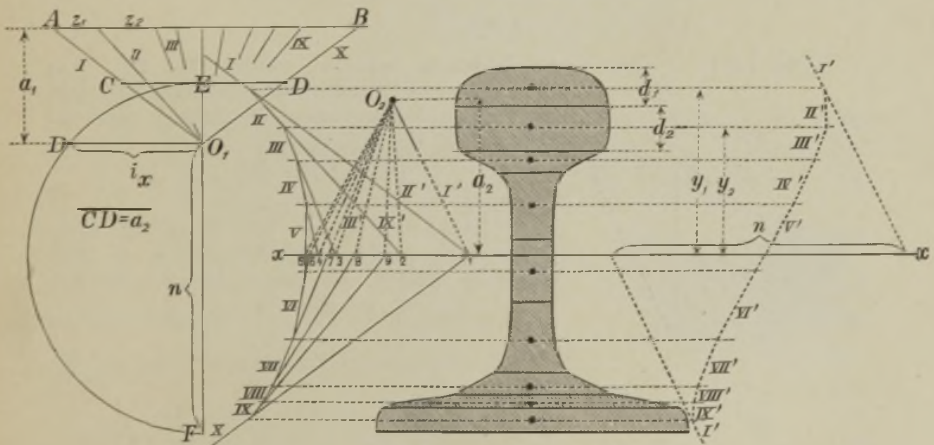


Fig. 27.

Verwandelt man sämtliche Streifen, die im allgemeinen verschieden große Breiten  $d_1, d_2, d_3 \dots$  erhalten werden, in Rechtecke



von der gleichen Grundlinie  $a$  und bezeichnet mit  $z_1, z_2, z_3 \dots$  die Höhen dieser Rechtecke, so ist

$$F_1 = a z_1; F_2 = a z_2; F_3 = a z_3 \dots$$

und man erhält

$$J_x = a \sum y^2 z.$$

Faßt man jetzt die Höhen  $z$  als Kräfte auf, die, in den Schwerpunkten der Streifen angreifend, parallel zur  $x$ -Achse wirken, bestimmt nach dem in No. 20 gelehrteten Verfahren das Moment zweiter Ordnung dieser Kräfte in Bezug auf die Achse  $x$  (welche in Fig. 27 die Schwerpunktsachse des Querschnittes ist) und bezeichnet hierbei

mit  $a_1$  die Polweite für das erste Seilpolygon ( $I II \dots$ )

„  $a_2$  „ „ „ „ zweite „ ( $I' II' \dots$ )

„  $n$  die Strecken, welche die äußersten Seiten des zweiten

Seilpolygons auf der  $x$ -Achse abschneiden,

so erhält man zunächst

$$\sum y^2 z = a_1 a_2 n$$

und hierauf

$$J_x = a a_1 a_2 n.$$

Die Strecken  $a, a_1, a_2, n$ , sind mit dem Längenmaßstabe zu messen. Für  $a, a_1, a_2$  sind Längen zu wählen, die durch runde Zahlen ausgedrückt werden.

Die einzelnen Streifen, in welche der Querschnitt zerlegt wurde, dürfen als Trapeze betrachtet werden. Ist die mittlere Höhe eines Trapezes  $= h$ , die Breite  $= d$ , so ist sein Inhalt:  $F = h d$ , und es folgt aus  $F = a z$

$$z = \frac{h d}{a}.$$

Diese Länge  $z$  kann durch Zeichnung bestimmt werden (Fig. 29). Um den Trapezschwerpunkt  $S$  zu finden (Fig. 28), trage man auf den Verlängerungen der einander parallelen Seiten  $h', h''$  die Strecken ab

$$\overline{DE} = \overline{CF} = \overline{AB} = h'$$

$$\overline{BG} = \overline{AH} = \overline{CD} = h''$$

und verbinde  $G$  mit  $F$  und  $E$  mit  $H$  durch gerade Linien; diese schneiden sich in  $S$ . Zerlegt man nämlich das Trapez in zwei Dreiecke mit den Inhalten  $\frac{h'd}{2}$  und  $\frac{h''d}{2}$ , so findet man das statische Moment des Trapezes in Bezug auf die Seite  $h'$

$$M = \frac{h'd}{2} \frac{d}{3} + \frac{h''d}{2} \frac{2d}{3} = \frac{h' + 2h''}{6} d^2,$$

während sich andererseits, wenn  $e'$  die Länge des von  $S$  auf  $h'$  gefällten Lotes ist,

$$M = \frac{h' + h''}{2} d e'$$

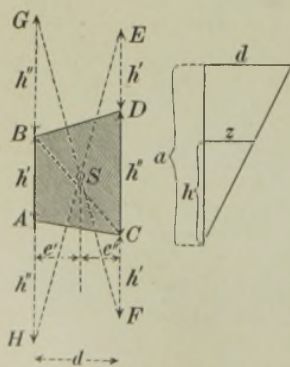


Fig. 28 u. 29.

ergibt. Hieraus folgt aber

$$\frac{e'}{d} = \frac{h' + 2h''}{3(h' + h'')}, \text{ ebenso } \frac{e''}{d} = \frac{h'' + 2h'}{3(h' + h'')},$$

und schließlich

$$\frac{e'}{e''} = \frac{h' + 2h''}{h'' + 2h'},$$

welcher Bedingung die in Fig. 28 gefundene Lage des Punktes  $S$  genügt. Eine dritte leicht erhaltliche Schwerlinie ist die Verbindungslinie der Mittelpunkte der Seiten  $AB$  und  $CD$ .

**25. Trägheitshalbmesser.** Die durch die Gleichung

$$i_x^2 = \frac{J_x}{F},$$

(in welcher  $F$  den Inhalt des Querschnittes bedeutet) erklärte Länge  $i_x$  nennt man den auf die  $x$ -Achse bezogenen *Trägheitshalbmesser* des Querschnittes. Hat man mit Hilfe des in No. 24 entwickelten Verfahrens  $J_x$  in der Form  $aa_1a_2n$  dargestellt, und setzt man  $F = a\Sigma z$ , so erhält man

$$i_x^2 = \frac{a_1a_2n}{\Sigma z}.$$

Um diesen Wert zu finden, trage man zwischen die äußersten Seilstrahlen  $I$  und  $X$  des ersten Kräfteplanes, parallel zur  $AB = \Sigma z$  (Fig. 27), die Gerade  $CD = a_2$  ein, ziehe  $EO_1F \perp CD$ , mache  $\overline{O_1F} = n$  und errichte in  $O_1$  auf der  $EF$  ein Lot, welches den über  $EF$  beschriebenen Halbkreis in  $D$  schneidet. Es ist dann

$$\overline{O_1E} = a_1 \frac{a_2}{\Sigma z},$$

$$\overline{O_1D}^2 = \overline{O_1E} \cdot \overline{O_1F} = \frac{a_1a_2n}{\Sigma z},$$

und man erhält:  $\overline{O_1D} = i_x$ .\*

**26. Bestimmung von  $J$  für einen Querschnitt, welcher aus Teilen besteht, deren Trägheitshalbmesser bekannt sind.** Es sei in Fig. 30:  $ss$  die Schwerachse eines Querschnittes vom Inhalte  $F$ ,  $xx$  eine zur  $ss$  im Abstände  $e$  gezogene Parallele und  $J_s$  das Trägheitsmoment des Querschnittes, bezogen auf  $ss$ . Dann ist nach Gleich. 2 in No. 22, bezogen auf  $xx$

$$(1) J_x = J_s + Fe^2$$

und, wenn  $J_s = Fi_s^2$  gesetzt wird,

$$J_x = F(i_s^2 + e^2).$$

Trägt man auf der Geraden  $ss$  von irgend

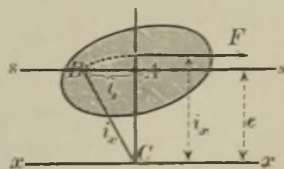


Fig. 30.

\*) Wird nur  $i_x$  gesucht (nicht  $J_x$ ), so nehme man  $a_1 = \frac{1}{2}\Sigma z$ . Es ergibt

sich dann  $i_x = \sqrt{\frac{a_2}{2}n}$  als mittlere Proportionale zu  $\frac{1}{2}a_2$  und  $n$ .

einem Punkte  $A$  aus die Strecke  $AB = i_s$  auf, zieht  $AC \perp xx$  und verbindet  $C$  mit  $B$  durch eine Gerade, so hat diese die Länge

$$(2) \quad i_x = \sqrt{i_s^2 + e^2},$$

und es darf somit gesetzt werden

$$J_x = F i_x^2.$$

Es läßt sich also  $J_x$  deuten als das auf die Achse  $xx$  bezogene Moment 2<sup>ter</sup> Ordnung einer Kraft  $F$ , welche im Abstände  $i_x$  von der  $xx$  und parallel zur  $xx$  wirkt.

$i_x$  ist der Trägheitshalbmesser des Querschnittes  $F$  in Bezug auf die Achse  $xx$ .

Gelingt es nun, einen Querschnitt, dessen Trägheitsmoment  $J_x$  gesucht wird, in Teile  $F$  zu zerlegen, deren Trägheitshalbmesser  $i_s$  bekannt sind, so ist man im stande, auch die Trägheitshalbmesser  $i_x$  jener Teile zu bestimmen und erhält dann  $J_x$  in der Form

$$J_x = \Sigma F i_s^2.$$

Will man also den Fehler, welcher bei der in Fig. 27 vorgenommenen Ermittlung von  $J_x$  durch die Zerlegung des Querschnittes in Streifen von endlicher Breite entstanden ist, beseitigen (was aber nur bei verhältnismäßig breiten Streifen nötig ist), so muß man die Schwerpunktsabstände  $y_1, y_2, \dots$  der einzelnen Streifen durch deren auf die Achse  $xx$  bezogene Trägheitshalbmesser  $i_x$  ersetzen.

Geradlinig begrenzte Figuren lassen sich stets in Parallelogramme und Dreiecke zerlegen, deren eine Seite der Achse parallel ist, auf welche das Trägheitsmoment bezogen werden soll, und krummlinig begrenzte Figuren darf man immer mit genügender Genauigkeit durch geradlinige mit kurzen Seiten ersetzen. Es genügt also, die Trägheitshalbmesser  $i_s$  für das Parallelogramm und das Dreieck, bezogen auf deren zur einen Seite parallele Schwerachse anzugeben.

a. *Das Parallelogramm.* Bedeutet  $b$  die Grundlinie und  $h$  die

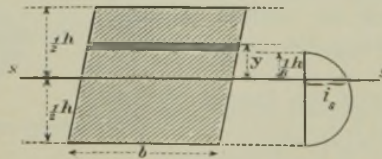


Fig. 31.

Höhe (Fig. 31), so erhält man in Bezug auf die zu  $b$  parallele Schwerachse:





Von den vorstehenden Entwicklungen wird man namentlich bei der Bestimmung der Trägheitsmomente *geradlinig begrenzter Figuren* Gebrauch machen.

**27. Das Mohr'sche Verfahren.** Um das auf die Achse  $xx$  bezogene Trägheitsmoment  $J$  des in der Fig. 27 dargestellten Querschnittes mit Hilfe des ersten Seilpolygons ( $I, II, III \dots$ ) zu bestimmen, wird der Inhalt  $\mathfrak{F}$  der Fläche ermittelt, welche von dem Seilpolygone und den äußersten Seiten desselben eingeschlossen wird. Sodann ergibt sich (nach No. 21)

$$\Sigma x\eta^2 = 2\mathfrak{F}a_1^* \text{ und, angenähert, } J = \Sigma axy^2 = 2aa_1\mathfrak{F}.$$

Je kleiner nun die Breiten der Streifen sind, in welche der Querschnitt zerlegt worden ist, desto genauer wird  $J$  erhalten. Bei unendlich schmalen Streifen geht das Seilpolygon in eine krumme Linie, die *Seillinie*, über, welche das für Flächenstreifen von endlicher Breite gezeichnete Seilpolygon in dessen Durchschnittspunkten mit den die Streifen trennenden Geraden berührt. Denn, werden in den Punkten  $A, D, E, B$  (Fig. 33), in denen die Seillinie von zur  $x$ -Achse parallelen Querschnittssehnen geschnitten wird, Tangenten an jene Linie gelegt,

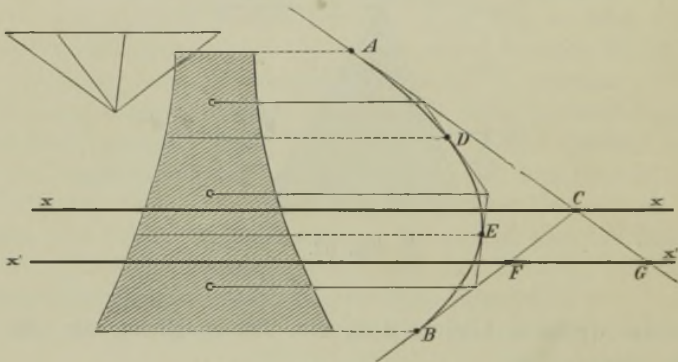


Fig. 33.

so sind je zwei aufeinander folgende Tangenten für den zwischen ihren Berührungspunkten gelegenen Flächenstreifen äußerste Seilpolygonseiten; sie müssen sich daher auf der zur  $x$ -Achse parallelen Schwerlinie jenes Streifens schneiden und bilden ein der Seillinie umschriebenes Seilpolygon.

Meistens genügt bereits eine geringe Anzahl von Tangenten und Berührungspunkten zur hinreichend scharfen Aufzeichnung der Seil-

\*) In Gleich. (1), Seite 26, ist  $\alpha = 90^\circ$  und  $H = a_1$  zu setzen.

linie, so daß die Breite der Streifen, in welche der Querschnitt zu zerlegen ist, bei der Anwendung des Mohrschen Verfahrens größer gewählt werden darf, als bei der Behandlungsweise nach Culmann. Auch bringt der von Mohr zur Bestimmung von  $J$  eingeschlagene Weg den Fehler gut zur Anschauung, der durch die Annahme von Querschnittsstreifen endlicher Breite begangen wird und der mit dem Inhalte der Fläche zwischen Seilpolygon und Seillinie wächst.

Die Ermittlung des in die Gleichung  $J = 2aa_1\tilde{\mathfrak{F}}$  einzuführenden Flächeninhaltes  $\tilde{\mathfrak{F}}$  geschieht am schärfsten mit Hilfe der *Simpsonschen* Formel. Zu diesem Zwecke zerlegt man die Fläche  $ABC$  (Fig. 34), welche die Seillinie  $AB$  und deren äußerste Tangenten  $AC$  und  $BC$  einschließen, in eine gerade Anzahl ( $m$ ) gleichbreiter Streifen, deren Trennungslinien zu der einen Tangente (z. B. zur  $AC$ ) parallel sind und die Längen  $y_1, y_2, y_3 \dots$  haben mögen, und erhält, wenn man die Streifenbreite (senkrecht zu den Ordinaten  $y$ ) mit  $e$  bezeichnet und  $\overline{AC} = y_0$  setzt,

$$\tilde{\mathfrak{F}} = \frac{e}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \dots + 4y_{m-1}).$$

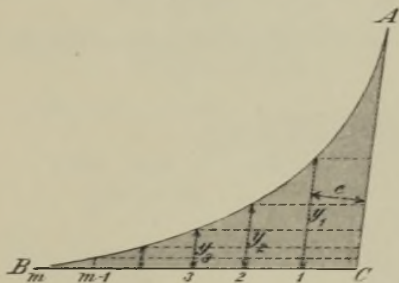


Fig. 34.

Soll das Trägheitsmoment  $J'$  des Querschnittes in Bezug auf eine zur  $xx$  parallele Achse  $x'x'$  bestimmt werden (Fig. 33), so ist zu dem oben ermittelten Flächeninhalte  $\tilde{\mathfrak{F}}$  noch der Inhalt eines Dreiecks  $CFG$  zu fügen, welches von der Geraden  $x'x'$  und den äußersten Tangenten an die Seillinie begrenzt wird.

**28. Das Zentrifugalmoment.** Wir nehmen zunächst an, es sei das Zentrifugalmoment  $J_{x_1 y_1}$  einer Fläche  $F$  in Bezug auf zwei sich rechtwinklig schneidende Schwerachsen  $x_1, y_1$ , gegeben, und suchen das Zentrifugalmoment von  $F$ , bezogen auf die zu  $x_1, y_1$  parallelen Achsen  $x, y$ . Der Schwerpunkt von  $F$  habe die Koordinaten  $\xi$  und  $\eta$ , Fig. 35.

Es ist

$$J_{xy} = \int (x_1 + \xi) (y_1 + \eta) dF$$

$$= \int x_1 y_1 dF + \xi \int y_1 dF + \eta \int x_1 dF + \eta \xi F,$$

worin zu setzen:  $\int y_1 dF = 0$ ,  $\int x_1 dF = 0$ , als statische Momente der Fläche  $F$ , bezogen auf deren Schwerachsen, und es folgt mithin das Gesetz

$$(3) \quad J_{xy} = J_{x_1 y_1} + F \eta \xi.$$

Ist  $J_{x_1 y_1} = 0$ , ein Fall der z. B. vorliegt, sobald eine der beiden Achsen  $x_1$  oder  $y_1$  eine Symmetrieachse des Querschnitts ist, so ergibt sich

$$(4) \quad J_{xy} = F \eta \xi.$$

Mit Hilfe dieser Gleichung läßt sich nun das Zentrifugalmoment eines Querschnitts ermitteln, der aus Rechtecken besteht, dessen Seiten den Achsen  $x$ ,  $y$  parallel laufen.

Figur 36 stellt einen solchen Querschnitt dar. Entsprechen den Schwerpunkten  $S_1, S_2, S_3$  der drei Rechtecke die Koordinaten  $(+ \eta_1, + \xi_1)$ ,  $(- \eta_2, - \xi_2)$ ,  $(- \eta_3, + \xi_3)$ , so ergibt sich:

$$J_{xy} = F_1 \eta_1 \xi_1 + F_2 \eta_2 \xi_2 - F_3 \eta_3 \xi_3.$$

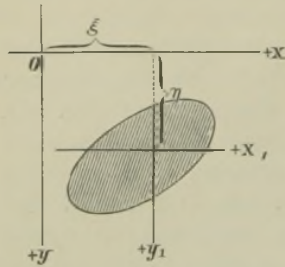


Fig. 35.

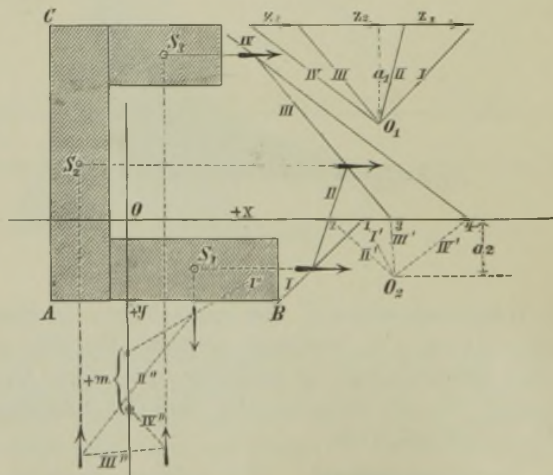


Fig. 36.

Um dieses Moment durch Zeichnung zu bestimmen, verwandeln wir die drei Rechtecke in solche von der gleichen Breite  $a$ , fassen die



Höhen  $x_1 = \frac{F_1}{a}$ ,  $x_2 = \frac{F_2}{a}$ ,  $x_3 = \frac{F_3}{a}$  der neuen Rechtecke als Kräfte auf, welche parallel zu der  $x$ -Achse wirken, und zeichnen aus dem beliebigen Pole  $O_1$  das Seilpolygon  $I II III IV$ , dessen Seiten auf der  $x$ -Achse die Abschnitte  $\overline{12}$ ,  $\overline{23}$ ,  $\overline{34}$  bestimmen. Es ist dann, wenn  $a_1$  die Polweite bedeutet,

$$\overline{12} = \frac{x_1 \eta_1}{a_1}; \quad \overline{23} = -\frac{x_2 \eta_2}{a_1}; \quad \overline{34} = -\frac{x_3 \eta_3}{a_1}.$$

Jetzt betrachten wir diese Abschnitte als Kräfte, die in den Punkten  $S_1, S_2, S_3$  angreifen und parallel zur  $y$ -Achse gerichtet sind, und zeichnen mit der Polweite  $a_2$  das Seilpolygon  $I'' II'' III'' IV''$ , dessen Seiten *senkrecht* zu den Strahlen  $I' II' III' IV'$  sind, die von  $O_2$  aus nach den Endpunkten der auf der  $x$ -Achse bestimmten Abschnitte  $\overline{12}$ ,  $\overline{23}$ ,  $\overline{34}$  gezogen sind.\*) Das Produkt aus der zweiten Polweite und aus der Strecke  $m$ , welche die äußersten Seiten ( $I''$  u.  $IV''$ ) dieses Polygons auf der  $y$ -Achse abschneiden, ist gleich dem statischen Momente der Kräfte  $\overline{12}$ ,  $\overline{23}$ ,  $\overline{34}$  in Bezug auf die  $y$ -Achse. Es folgt mithin

$$\begin{aligned} a_2 m &= \overline{12} \xi_1 - \overline{23} \xi_2 + \overline{34} \xi_3 \\ &= \frac{x_1 \eta_1 \xi_1}{a_1} + \frac{x_2 \eta_2 \xi_2}{a_1} - \frac{x_3 \eta_3 \xi_3}{a_1} = \frac{\Sigma x \eta \xi}{a_1}, \end{aligned}$$

und hieraus ergibt sich, da in Fig. 36 die Strecke  $m$  positiv ist,  $\Sigma x \eta \xi = a_1 a_2 m$ .

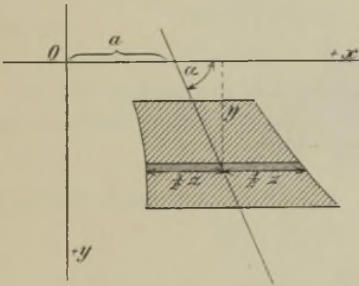


Fig. 37.

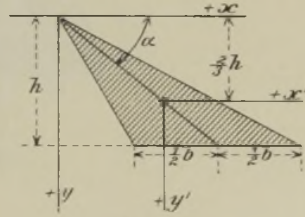


Fig. 38.

Nun ist aber  $J_{xy} = \Sigma F \eta \xi = a \Sigma x \eta \xi$ ,  
und es folgt deshalb

$$J_{xy} = a a_1 a_2 m.$$

\*) Zu demselben Ergebnisse gelangt man, wenn man jene Abschnitte, und mit ihnen den Strahlenbüschel  $I' II' III' IV'$ , um  $90^\circ$  nach links dreht und hierauf  $I'' \parallel I'$ ,  $II'' \parallel II'$  u. s. w. zieht.

Es leuchtet ein, daß das beschriebene Verfahren zur Bestimmung der Zentrifugalmomente beliebiger Querschnitte benutzt werden kann. Im allgemeinen muß der Querschnitt in Streifen zerlegt werden, welche einer der beiden Koordinatenachsen parallel laufen und so schmal sein müssen, daß sie als Rechtecke aufgefaßt werden dürfen.

Besonders wichtig ist der in Fig. 37 dargestellte Sonderfall. Die Mittelpunkte der zur  $x$ -Achse parallelen Querschnittssehnen liegen in einer Geraden, welche die  $x$ -Achse unter dem Winkel  $\alpha$  und im Abstände  $a$  vom Ursprung  $O$  schneidet. Man erhält

$$\begin{aligned} J_{xy} &= \int xy dF = \int (a + y \cotg \alpha) y dF \\ &= a \int y dF + \cotg \alpha \int y^2 dF, \end{aligned}$$

oder, wenn man mit  $\eta$  die Ordinate des Querschnitts-Schwerpunktes bezeichnet,

$$(5) \quad J_{xy} = F a \eta + J_x \cotg \alpha.$$

Für das Dreieck (Fig. 38) ergibt sich z. B.

$$J_{xy} = \frac{bh^3}{4} \cotg \alpha \quad \text{und} \quad J_{x'y'} = \frac{bh^3}{36} \cotg \alpha.$$

Der in Fig. 39 abgebildete Querschnitt (Parabelabschnitt) sei durch die Gleichung bestimmt:

$$z = b \sqrt{\frac{y}{h}}.$$

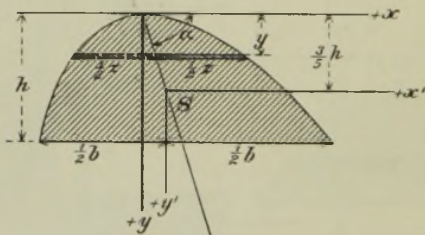


Fig. 39.

Der Flächeninhalt ist

$$F = \int z dy = \frac{2}{3} bh$$

und das statische Moment des Querschnitts in Bezug auf die  $x$ -Achse

$$\int zy dy = \frac{2}{5} bh^2.$$

Der Schwerpunkt  $S$  liegt also im Abstände  $\frac{3}{5}h$  von der  $x$ -Achse. Weiter ist

$$J_x = \int zy^2 dy = \frac{2}{7} bh^3$$

$$J_x' = \frac{2}{7} bh^3 - \frac{2}{3} bh \left(\frac{3h}{5}\right)^2 = \frac{8}{175} bh^3.$$

Das Zentrifugalmoment für das Achsenkreuz  $x'y'$  ist also

$$(6) \quad J_{x'y'} = \frac{8}{175} bh^3 \cotg \alpha.$$

**29. Das polare Trägheitsmoment des Querschnitts** in Bezug auf einen in der Ebene des Querschnitts gelegenen Punkt  $O$  ist durch die Gleichung erklärt

$$(7) \quad J_p = \int r^2 dF,$$

wo  $r$  den Abstand des Querschnittsteilchens  $dF$  vom Punkte  $O$  bedeutet. Für rechtwinklige Koordinaten ist (Fig. 40)

$$r^2 = x^2 + y^2,$$

mithin

$$(8) \quad J_p = J_y + J_x.$$

In Bezug auf einen in der  $x$ -Achse im Abstände  $e$  von  $O$  gelegenen Punkt  $O'$  erhält man das polare Trägheitsmoment

$$J_p' = J_y' + J_x,$$

es ist also

$$J_p' = J_p + J_y' - J_y.$$

Ist die  $y$ -Achse eine Schwerachse, so besteht zwischen  $J_y'$  und  $J_y$  die Beziehung

$$J_y' = J_y + Fe^2;$$

man erhält dann

$$(9) \quad J_p' = J_p + Fe^2.$$

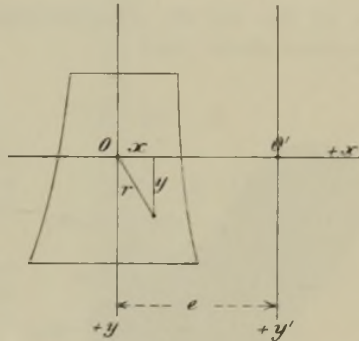


Fig. 40.

**30. Einführung schiefwinkliger Koordinaten.** Ist ein Querschnitt anfänglich auf ein rechtwinkliges Achsenkreuz  $x, y$  bezogen, und dreht man die  $x$ -Achse, bei festliegender  $y$ -Achse, um den Winkel  $90^\circ - \beta$  in die Lage  $x'$  (Fig. 41), so ergeben sich die schiefwinkligen Koordinaten:  $y' = y - x \cotg \beta$  und  $x' = x \operatorname{cosec} \beta$ .

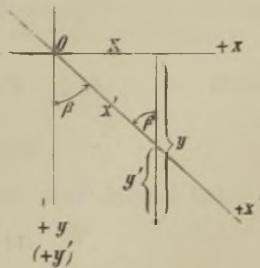


Fig. 41.



Aus den für rechtwinklige Koordinaten bestimmten Querschnittsmomenten

$$J_x = \int y^2 dF; \quad J_y = \int x^2 dF; \quad J_{xy} = \int xy dF$$

findet man demnach die auf schiefwinklige Koordinaten bezogenen:

$$(10) \quad J_{y'} = \int x'^2 dF = \operatorname{cosec}^2 \beta \int x^2 dF = J_y \operatorname{cosec}^2 \beta$$

$$(11) \quad J_{x'y'} = \int y' x' dF = \operatorname{cosec} \beta [\int y x dF - \cotg \beta \int x^2 dF] \\ = \operatorname{cosec} \beta [J_{xy} - J_y \cotg \beta].$$

Die letzte Gleichung führt zu dem wichtigen Gesetze: *Bestimmt man  $\beta$  mittels der Formel*

$$(12) \quad \cotg \beta = \frac{J_{xy}}{J_y},$$

so ist das auf die schiefwinkligen Achsen  $y', x'$  bezogene Zentrifugalmoment gleich Null.

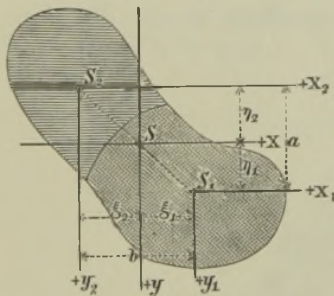


Fig. 42.

### 31. Entwicklung einiger wichtiger Formeln.

Ein Querschnitt bestehe aus zwei Teilen mit den Inhalten  $F_1, F_2$  und den Schwerpunkten  $S_1, S_2$ . Fig. 42. Beide Teile seien auf rechtwinklige Schwerachsen  $x_1, y_1$  und  $x_2, y_2$  bezogen. Gegeben seien die Querschnittsmomente  $J_{x_1}, J_{y_1}, J_{x_1 y_1}$  des Teiles  $F_1$ , ferner  $J_{x_2}, J_{y_2}, J_{x_2 y_2}$  des Teiles  $F_2$ , und gesucht seien die Werte  $J_x, J_y, J_{xy}$  für den ganzen Querschnitt in Bezug auf dessen Schwerachsen  $x, y$ , wobei die Richtungen  $x, x_1, x_2$  einander parallel sein mögen, desgleichen die Richtungen  $y, y_1, y_2$ . Mit den aus der Fig. 42 ersichtlichen Bezeichnungen ergibt sich (nach Gleichung 1 Seite 29):

$$J_x = J_{x_1} + F_1 \eta_1^2 + J_{x_2} + F_2 \eta_2^2.$$

Nun ist aber  $F_1 \eta_1 = F_2 \eta_2$  und  $\eta_1 + \eta_2 = a$ ,

also 
$$\eta_1 = \frac{F_2 a}{F_1 + F_2} \quad \text{und} \quad \eta_2 = \frac{F_1 a}{F_1 + F_2},$$

weshalb 
$$F_1 \eta_1^2 + F_2 \eta_2^2 = \frac{F_1 F_2 a (\eta_1 + \eta_2)}{F_1 + F_2} \quad \text{und schließlich:}$$

$$(13) \quad J_x = J_{x_1} + J_{x_2} + \frac{F_1 F_2 a^2}{F_1 + F_2}.$$

Auf dieselbe Weise findet man

$$(14) \quad J_y = J_{y_1} + J_{y_2} + \frac{F_1 F_2 b^2}{F_1 + F_2}$$

und (aus der Gleich.:  $J_{xy} = J_{x_1 y_1} + J_{x_2 y_2} + F_1 \eta_1 \xi_1 + F_2 \eta_2 \xi_2$ ):

$$(15) \quad J_{xy} = J_{x_1 y_1} + J_{x_2 y_2} + \frac{F_1 F_2 a b}{F_1 + F_2}.$$

Sind die Achsen  $x_1 y_1$  und  $x_2 y_2$  Hauptachsen der Teile  $F_1$  bezieh.  $F_2$ , so ergibt sich  $J_{x_1 y_1} = 0$ ,  $J_{x_2 y_2} = 0$ , und man erhält:

$$(16) \quad J_{xy} = \frac{F_1 F_2 a b}{F_1 + F_2}.$$

Mit Hilfe der Gleich. (13) bis (16) kann man  $J_x$ ,  $J_y$ ,  $J_{xy}$  finden, ohne die Lage des Schwerpunktes  $S$  zu kennen. Es bieten aber diese Formeln auch bei gegebener Lage von  $S$  zuweilen Vorteile, weil die in sie einzuführenden Zahlen meistens abgerundeter sind als die Zahlenwerte für  $\eta$  und  $\xi$ .

Ist die Lage von  $S$  bekannt, und sind  $J_{x_1 y_1}$  und  $J_{x_2 y_2}$  gleich Null, so kann man aus der Gleichung

$$J_{xy} = F_1 \eta_1 \xi_1 + F_2 \eta_2 \xi_2$$

mit Hilfe der Beziehungen:  $F_1 \xi_1 = F_2 \xi_2$ ;  $F_1 \eta_1 = F_2 \eta_2$  auch ableiten:

$$(17) \quad J_{xy} = F_1 \xi_1 a = F_2 \xi_2 a = F_1 \eta_1 b \\ = F_2 \eta_2 b.$$

**Zahlenbeispiel.** Für den in Fig. 43 dargestellten Winkelisen-Querschnitt sollen die Werte  $J_x$ ,  $J_y$ ,  $J_{xy}$  in Bezug auf die den Schenkeln parallelen Schwerachsen berechnet werden.

Ohne erst die Lage der Schwerachsen zu bestimmen, findet man, nach Zerlegung des Querschnittes in zwei Rechtecke mit den Inhalten  $F_1 = 6 \delta^2$  und  $F_2 = 9 \delta^2$ :

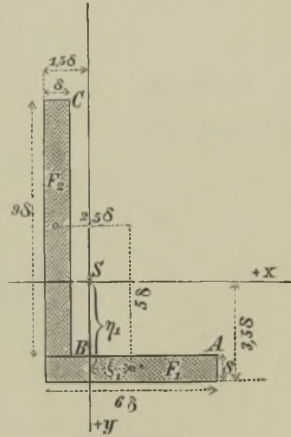


Fig. 43.

$$J_x = \frac{1}{12} (6 \cdot 1^3 + 1 \cdot 9^3) \delta^4 + \frac{6 \cdot 9}{6+9} 5^2 \delta^4 = 151,25 \delta^4$$

$$J_y = \frac{1}{12} (1 \cdot 6^3 + 9 \cdot 1^3) \delta^4 + \frac{6 \cdot 9}{6+9} 2,5^2 \delta^4 = 41,25 \delta^4$$

$$J_{xy} = \frac{6 \cdot 9}{6+9} \cdot 5 \cdot 2,5 \delta^4 = 45 \delta^4.$$

Muß man die Lage des Schwerpunktes aus irgend welchen Gründen haben (z. B. bei der Berechnung von auf Biegung beanspruchten Stäben), so bestimme man  $\eta_1$  und  $\xi_1$  oder  $\eta_2$  und  $\xi_2$ . Hierzu stehen die folgenden Gleichungen zur Auswahl (vergl. Fig. 42):

$$(18) \quad \begin{cases} \eta_1 = \frac{F_2 a}{F_1 + F_2}; & \xi_1 = \frac{F_2 b}{F_1 + F_2}; & \eta_1 = \frac{a}{\xi_1} = \frac{a}{b} \\ \eta_2 = \frac{F_1 a}{F_1 + F_2}; & \xi_2 = \frac{F_1 b}{F_1 + F_2}; & \eta_2 = \frac{a}{\xi_2} = \frac{a}{b} \end{cases}$$

Im vorliegenden Falle findet man z. B.

$$\eta_1 = \frac{9 \delta^2 \cdot 5 \delta}{(6+9) \delta^2} = 3 \delta \quad \text{und} \quad \xi_1 = \eta_1 \frac{b}{a} = \eta_1 \frac{1}{2} = 1,5 \delta.$$

Durch diese beiden Werte ist die Lage von  $S$  bekannt, und es ergibt sich jetzt:

$$J_{xy} = F_1 \xi_1 a = 6 \cdot 1.5 \cdot 5 \delta^4 = 45 \delta^4.$$

Daß bei einem so einfachen Querschnitt wie der in Fig. 43 dargestellte die Rechnung schneller zum Ziele führt wie die Zeichnung, braucht kaum hervorgehoben zu werden.

### 32. Aufgaben.

1. Berechnung der Trägheitsmomente des Kreisquerschnitts. Mit Hilfe der auf Seite 31 für das Dreieck abgeleiteten Formel  $J = \frac{1}{4} b h^3$  findet man für das polare Trägheitsmoment des Kreises, Fig. 44, den Wert

$$J_p = \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} r d\varphi \cdot r^3 = \frac{r^4}{4} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi r^4}{2}.$$

Nun ist aber  
mithin ergibt sich

$$J_p = J_x + J_y,$$

$$J_x = J_y = \frac{\pi r^4}{4}.$$

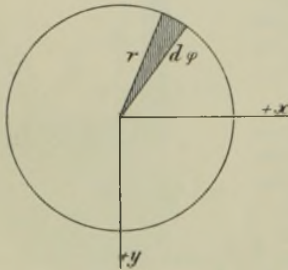


Fig. 44.

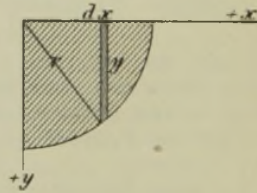


Fig. 45.

2. Für den Quadranten, Fig. 45, erhält man

$$J_x = J_y = \frac{\pi r^4}{16} \qquad J_p = \frac{\pi r^4}{8}$$

$$J_{xy} = \int_0^r y dx \frac{y}{2} x = \frac{1}{2} \int_0^r x (r^2 - x^2) dx = \frac{r^4}{8}.$$

Das statische Moment dieses Querschnitts in Bezug auf die  $x$ -Achse ist

$$S_x = \int_0^r y dx \frac{y}{2} = \frac{1}{2} \int_0^r (r^2 - x^2) dx = \frac{r^3}{3}.$$

Der Abstand des Schwerpunktes des Querschnitts von der  $x$ -Achse ist

$$\frac{S_x}{F} = \frac{4r}{3\pi}.$$



3. Für den in Fig. 46 dargestellten Querschnitt (Unterschied eines Quadrats und eines Quadranten) ist\*)

$$J_x = J_y = \left( \frac{1}{3} - \frac{\pi}{16} \right) r^4$$

$$J_{xy} = r^2 \frac{r}{2} \cdot \frac{r}{2} - \frac{r^4}{8} = \frac{r^4}{8}$$

$$S_x = S_y = r^2 \frac{r}{2} - \frac{r^3}{3} = \frac{r^3}{6}$$

$$F = r^2 \left( 1 - \frac{\pi}{4} \right).$$

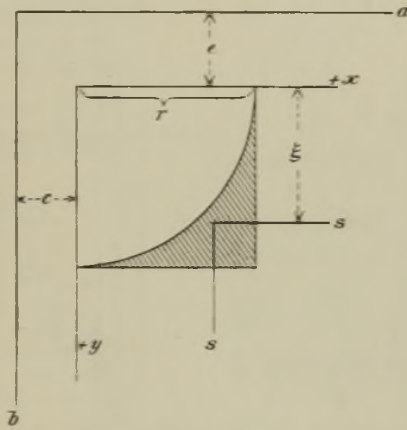


Fig. 46.

Die Ordinate des Schwerpunktes ist

$$\xi = \frac{S_x}{F} = \frac{2r}{3(4 - \pi)} = 0.776632 r.$$

Die auf die Schwerachsen  $ss$  bezogenen Querschnittsmomente sind

$$J_s = J_x - F\xi^2 = J_x - S_x\xi$$

$$J_{ss} = J_{xy} - F\xi^2 = J_{xy} - S_x\xi.$$

Das Trägheitsmoment für die zur  $x$ -Achse parallele Achse  $a$  ist

$$J_a = J_s + F(\xi + e)^2 = J_s + F\xi^2 + 2F\xi e + Fe^2$$

$$J_a = J_x + 2S_x e + Fe^2$$

$$J_a = \left( \frac{1}{3} - \frac{\pi}{16} \right) r^4 + \frac{r^3 e}{3} + \left( 1 - \frac{\pi}{4} \right) r^2 e^2.$$

\*) Vergl. für das Quadrat die Fußnote auf Seite 31.

Das Zentrifugalmoment für das Achsenkreuz  $ab$  ist

$$\begin{aligned} J_{ab} &= J_{ss} + F(\xi + e)(\xi + c) \\ &= J_{ss} + F\xi^2 + F\xi(e + c) + Fec \\ &= J_{xy} + S_x(e + c) + Fec \\ J_{ab} &= \frac{r^4}{8} + \frac{r^3}{6}(e + c) + \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)r^2ec. \end{aligned}$$

4. Berechnung der Querschnittsmomente für das in Fig. 47 abgebildete Z-Eisen (Normalprofil No. 14 für Schiffbauzwecke). Der Querschnitt ist auf rechtwinklige Schwerachsen bezogen, die  $y$ -Achse ist parallel zum Steg. Wird die Abrundung der Ecken  $C$  und  $E$  vernachlässigt, so erhält man

$$J_x = \frac{1}{12} (8 \cdot 14^3 - 7 \cdot 11,6^3) = 918,811 \text{ rund} = 919 \text{ cm}^4$$

$$J_y = \frac{1}{12} (1,2 \cdot 15^3 + 12,8 \cdot 1^3) = 338,567 \text{ „} = 339 \text{ „}$$

$$J_{xy} = 2 \cdot 1,2 \cdot 7 \cdot 6,4 \cdot 4,0 = 430,080 \text{ „} = 430 \text{ „}$$

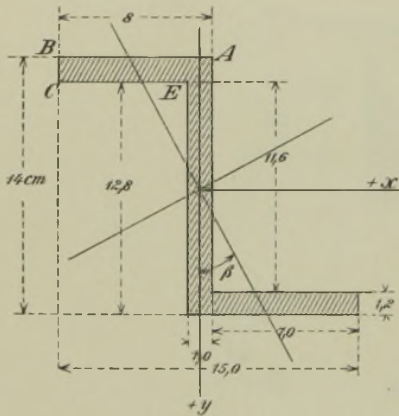


Fig. 47.

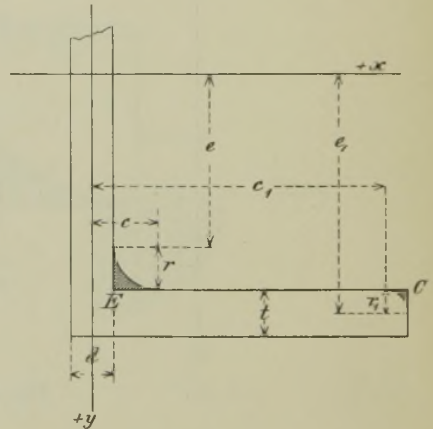


Fig. 48.

Infolge der Abrundung der Ecken  $E$  und  $C$  durch Viertelkreise mit den Halbmessern  $r$  und  $r_1$  (Fig. 48) ändern sich diese Werte um  $\Delta J_x$ ,  $\Delta J_y$ ,  $\Delta J_{xy}$ , wo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta J_x &= \left(\frac{1}{3} - \frac{\pi}{16}\right)r^4 + \frac{r^3 e}{3} + \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)r^2 e^2 \\ &\quad - \left[\left(\frac{1}{3} - \frac{\pi}{16}\right)r_1^4 - \frac{r_1^3 e_1}{3} + \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)r_1^2 e_1^2\right] \\ \frac{1}{2} \Delta J_y &= \left(\frac{1}{3} - \frac{\pi}{16}\right)r^4 - \frac{r^3 c}{3} + \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)r^2 c^2 \\ &\quad - \left[\left(\frac{1}{3} - \frac{\pi}{16}\right)r_1^4 + \frac{r_1^3 c_1}{3} + \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)r_1^2 c_1^2\right] \\ \frac{1}{2} \Delta J_{xy} &= -\frac{r^4}{8} - \frac{r^3}{6}(e - c) + \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)r^2 ec \\ &\quad - \left[-\frac{r_1^4}{8} + \frac{r_1^3}{6}(e_1 - c_1) + \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)r_1^2 e_1 c_1\right]. \end{aligned}$$

Da nun  $r_1 = \frac{1}{2} r$  ist, so wird

$$\Delta J_x = + 0,2568 r^4 + \frac{2}{3} r^3 \left( e + \frac{1}{8} e_1 \right) + 0,4292 r^2 \left( e^2 - \frac{1}{4} e_1^2 \right)$$

$$\Delta J_y = + 0,2568 r^4 - \frac{2}{3} r^3 \left( c + \frac{1}{8} c_1 \right) + 0,4292 r^2 \left( c^2 - \frac{1}{4} c_1^2 \right)$$

$$\Delta J_{xy} = - 0,2344 r^4 - \frac{1}{3} r^3 \left( e - c + \frac{e_1 - c_1}{8} \right) + 0,4292 r^2 \left( e c - \frac{1}{4} e_1 c_1 \right).$$

Die Einsetzung von  $r = d = 1^{cm}$ ,  $c = 1,5^{cm}$ ,  $c_1 = 7^{cm}$ ,  $e = 4,8^{cm}$ ,  $e_1 = 6,3^{cm}$  liefert

$$\Delta J_x = 9,612, \quad \Delta J_y = - 5,619, \quad \Delta J_{xy} = - 2,547,$$

die genauen Querschnittsmomente  $J + \Delta J$  sind daher

$$J_x = 928,423 \quad J_y = 332,948 \quad J_{xy} = 427,133. *)$$

Sind  $\eta$ ,  $\xi$  die Schwerpunkts-Koordinaten des bei  $E$  infolge der Abrundung hinzukommenden Querschnittsteilchen  $\Delta F$  und  $\eta_1$ ,  $\xi_1$  die Schwerpunkts-Koordinaten des bei  $C$  fortfallenden Teilchens  $\frac{1}{4} \Delta F$ , so darf man auch genügend genau setzen

$$\Delta J_x = 2 \Delta F \left( \eta^2 - \frac{1}{4} \eta_1^2 \right)$$

$$\Delta J_y = 2 \Delta F \left( \xi^2 - \frac{1}{4} \xi_1^2 \right)$$

$$\Delta J_{xy} = 2 \Delta F \left( \eta \xi - \frac{1}{4} \eta_1 \xi_1 \right).$$

Der Flächeninhalt des Querschnitts ist

$$F = 30,6 \text{ (ohne Rücksicht auf die Abrundungen)}$$

$$F = 31,1 \text{ (mit " " " " " )}.$$

5. Berechnung der Querschnittsmomente des Trapezes, bezogen auf die schiefen Achsen  $x' y'$ . (Fig. 49.) Die  $y'$ -Achse falle mit der Transversalen zusammen; es ist dann  $J_{x'y'} = 0$ .

Zerlegt man das Trapez in zwei Dreiecke, so erhält man nach Gleichung 13, Seite 38, in Bezug auf das rechtwinklige Achsenkreuz  $xy$  den Wert

$$J_x = \frac{a_1 h^3}{36} + \frac{a_2 h^3}{36} + \frac{\frac{a_1 h}{2} \cdot \frac{a_2 h}{2}}{\frac{a_1 h}{2} + \frac{a_2 h}{2}} \left( \frac{h}{3} \right)^2.$$

Nach No. 30 ist nun

$$J_{x'} = J_x \operatorname{cosec}^2 \beta = J_x \frac{t^2}{h^2}, \text{ mithin}$$

$$J_{x'} = \frac{h t^2}{36} \left( a_1 + a_2 + \frac{2 a_1 a_2}{a_1 + a_2} \right).$$

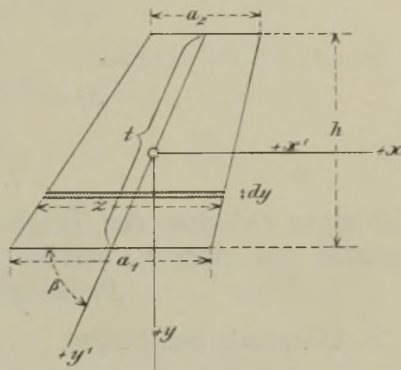


Fig. 49.

\*) Das Normalprofilbuch gibt an  $J_x = 928,4$ ,  $J_y = 332,9$ ; die wichtigen Zentrifugalmomente sind in diesem Buche leider nicht aufgeführt.

Für den Flächenstreifen  $z dy$  erhält man, bezogen auf das schiefe Achsenkreuz  $x' y'$ :

$$dJ_y = dy' \sin \beta \int_{-\frac{z}{2}}^{+\frac{z}{2}} x'^2 dx' = \frac{z^3}{12} \sin \beta dy'.$$

Da nun  $dy' = dz \frac{t}{(a_1 - a_2)}$ , so folgt

$$J_{y'} = \frac{\sin \beta t}{12(a_1 - a_2)} \int_{a_2}^{a_1} z^3 dz = \frac{\sin \beta t (a_1^4 - a_2^4)}{48(a_1 - a_2)}.$$

Der Flächeninhalt ist

$$F = \frac{h(a_1 + a_2)}{2}.$$

Es ergibt sich also schließlich

$$J_{y'} = \frac{F(a_1^2 + a_2^2)}{24}.$$

### § 7.

## Beziehungen zwischen den Trägheitsmomenten und Zentrifugalmomenten für Achsen, welche durch einen und denselben Punkt gehen.

33. Analytische Beziehungen. Dreht man das rechtwinklige Achsenkreuz  $(x, y)$ , auf welches der Querschnitt bezogen ist, um den Winkel  $\alpha$

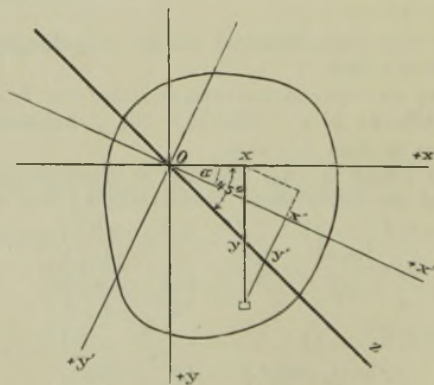


Fig. 50.

in die Lage  $x', y'$  (Fig. 50), so sind die neuen Koordinaten:

$$\begin{aligned} y' &= y \cos \alpha - x \sin \alpha \\ x' &= y \sin \alpha + x \cos \alpha, \end{aligned}$$



und es ergeben sich für die Querschnittsmomente:  $J_{x'} = \int y'^2 dF$ ;  $J_{y'} = \int x'^2 dF$ ;  $J_{x'y'} = \int x'y' dF$  in Bezug auf die Achsen  $x'$  und  $y'$  des neuen Koordinatensystems die Ausdrücke:

$$J_{x'} = \cos^2 \alpha \int y^2 dF + \sin^2 \alpha \int x^2 dF - 2 \sin \alpha \cos \alpha \int xy dF,$$

$$J_{y'} = \sin^2 \alpha \int y^2 dF + \cos^2 \alpha \int x^2 dF + 2 \sin \alpha \cos \alpha \int xy dF,$$

$$J_{x'y'} = \sin \alpha \cos \alpha (\int y^2 dF - \int x^2 dF) + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \int xy dF.$$

Es bestehen also zwischen den auf die Achsen  $x$ ,  $y$  bezogenen Werten

$$J_x = \int y^2 dF; \quad J_y = \int x^2 dF; \quad J_{xy} = \int xy dF$$

und den Werten  $J_{x'}$ ,  $J_{y'}$ ,  $J_{x'y'}$  die Beziehungen

$$(1) \quad \begin{cases} J_{x'} = J_x \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - J_{xy} \sin 2\alpha, \\ J_{y'} = J_x \sin^2 \alpha + J_y \cos^2 \alpha + J_{xy} \sin 2\alpha, \\ J_{x'y'} = \frac{1}{2} (J_x - J_y) \sin 2\alpha + J_{xy} \cos 2\alpha. \end{cases}$$

Addiert man die beiden ersten dieser Gleichungen, so erhält man das wichtige Gesetz

$$(2) \quad \dots \quad J_{x'} + J_{y'} = J_x + J_y,$$

nach welchem die Summe der Trägheitsmomente, bezogen auf irgend zwei durch einen und denselben Punkt gehende, rechtwinklige Achsen konstant ist. \*)

Aus der ersten der Gleichungen (1) ergibt sich für eine unter  $45^\circ$  gegen die  $x$ -Achse geneigte, in der Fig. 50 mit  $z$  bezeichnete Achse das Trägheitsmoment

$$J_z = \frac{1}{2} (J_x + J_y) - J_{xy}$$

und hieraus folgt die Formel

$$(3) \quad J_{xy} = \frac{1}{2} (J_x + J_y) - J_z,$$

welche mitunter zur Berechnung des Zentrifugalmomentes aus drei Trägheitsmomenten benutzt wird.

Setzt man

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}, \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

so geht  $J_{x'}$  über in

$$(4) \quad J_{x'} = \frac{1}{2} (J_x + J_y) + \frac{1}{2} (J_x - J_y) \cos 2\alpha - J_{xy} \sin 2\alpha.$$

\*) Dies folgt auch nach Seite 37 aus  $J_p = J_x + J_y = J_{x'} + J_{y'}$ .

Dieser Wert wird ein Maximum bezw. Minimum sobald

$$-\frac{1}{2}(J_x - J_y) \sin 2\alpha - J_{xy} \cos 2\alpha = 0$$

ist, woraus

$$(5) \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{-2J_{xy}}{J_x - J_y}.$$

Dieser Gleichung genügen zwei Winkel  $\alpha$ , die sich voneinander um  $90^\circ$  unterscheiden. Die beiden Achsen, für welche  $J$  ein Maximum oder Minimum ist, stehen also aufeinander senkrecht; sie führen den Namen *Hauptachsen*. Die Trägheitsmomente in Bezug auf die Hauptachsen heißen *Hauptträgheitsmomente*, sie sollen mit  $J_1$  und  $J_2$  bezeichnet werden. Aus den Gleichungen (4) und (5) folgt

$$\begin{aligned} J_x &= \frac{1}{2}(J_x + J_y) + \frac{1}{2}(J_x - J_y) \cos 2\alpha \left[ 1 - \frac{2J_{xy}}{J_x - J_y} \operatorname{tg} 2\alpha \right] \\ &= \frac{1}{2}(J_x + J_y) + \frac{1}{2}(J_x - J_y) \cos 2\alpha (1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha) \\ &= \frac{1}{2}(J_x + J_y) + \frac{1}{2}(J_x - J_y) \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}. \end{aligned}$$

Man erhält also für die beiden Hauptträgheitsmomente die Werte

$$(6) \quad \begin{cases} J_1 = \frac{1}{2}(J_x + J_y) + \frac{1}{2}\sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4J_{xy}^2} = J_{\max} \\ J_2 = \frac{1}{2}(J_x + J_y) - \frac{1}{2}\sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4J_{xy}^2} = J_{\min}. \end{cases}$$

Aus der dritten der Gleichungen (1) und aus Gleichung (5) folgt schließlich noch, daß das *Zentrifugalmoment für die Hauptachsen* = 0 ist. Jede *Symmetrieachse* ist zugleich eine Hauptachse.

**34. Geometrische Beziehungen (nach Mohr).** Durch einen beliebigen Punkt  $O$  eines Querschnitts (Fig. 51) seien zwei Achsen  $x$  und  $y$  gelegt, die miteinander irgend einen Winkel einschließen. Die lotrechten Abstände des Querschnittsteilchens  $dF$  von diesen Achsen seien als dessen Koordinaten eingeführt.  $\rho$  sei der Abstand des Teilchens  $dF$  von  $O$  und  $\alpha$  und  $\beta$  seien die Winkel, welche der von  $O$  nach  $dF$  führende Fahrstrahl mit den Achsen  $x$  und  $y$  bildet. Das Zentrifugalmoment des Teilchens  $dF$  in Bezug auf die Achsen  $x$  und  $y$  ist dann

$$dJ_{xy} = dF \cdot \rho^2 \sin \alpha \sin \beta.$$

Legt man nun durch  $O$  einen beliebigen Kreis, dessen Radius  $r$  ist, und bringt man die Achsen  $x$ ,  $y$  und den Fahrstrahl  $\rho$  mit dem Kreise in  $A$ ,  $B$  und  $C$  zum Schnitt, so ist  $\angle BAC = \beta$  und Sehne  $AC = 2r \sin \alpha$ , mithin ist der Abstand des Punktes  $C$  von der Kreis-

sehne  $AB$  gleich  $2r \sin \alpha \sin \beta$ . Legt man also dem Punkte  $C$  eine Masse von der Größe

$$\frac{dF \varrho^2}{2r}$$

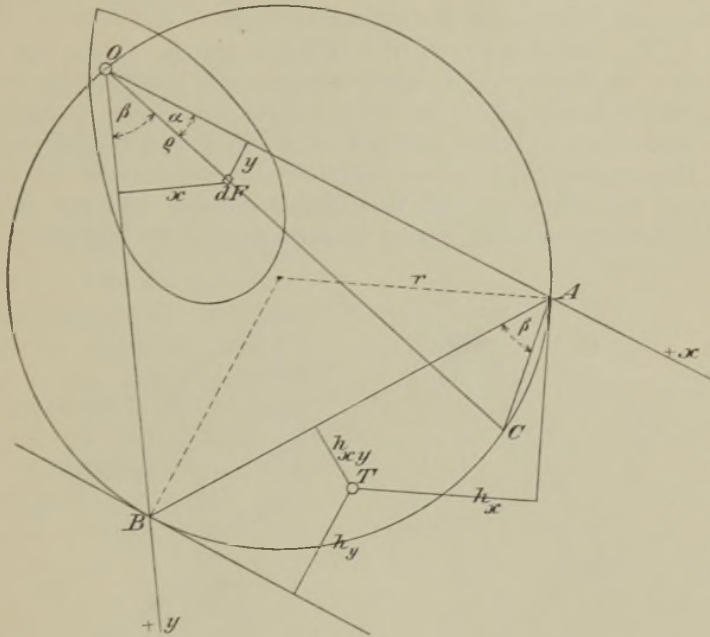


Fig. 51.

bei, so ist das statische Moment dieser Masse in Bezug auf die Kreissehne  $AB$  gleich dem Zentrifugalmoment  $dJ_{xy}$ .

Denkt man sich nun zu jedem  $dF$  den zugehörigen Kreispunkt und die diesem Punkte beizulegende Masse bestimmt und schließlich den Schwerpunkt  $T$  aller dieser Massenpunkte ermittelt, so erhält man, wenn  $T$  von der Sehne  $AB$  den Abstand  $h_{xy}$  hat:

$$J_{xy} = h_{xy} \int \frac{dF \varrho^2}{2r} = \frac{h_{xy} J_p}{2r},$$

wo  $J_p$  das polare Trägheitsmoment des Querschnitts in Bezug auf den Punkt  $O$  bedeutet.

Fallen die beiden Achsen  $x$  und  $y$  zusammen, so wird aus dem Zentrifugalmoment ein Trägheitsmoment und aus der Kreissehne  $AB$

eine Tangente. Bezeichnen also  $h_x$  und  $h_y$  die Abstände des Punktes  $T$  von den in  $A$  und  $B$  an den Kreis gelegten Tangenten, so ist

$$J_x = h_x \frac{J_p}{2r} \quad J_y = h_y \frac{J_p}{2r}.$$

Sind nun drei Querschnittsmomente:  $J_x, J_y, J_{xy}$  auf die im vorigen Paragraphen gezeigte Weise ermittelt worden, so kann man die Lage von  $T$  auf Grund der Bedingung bestimmen, daß sich die Abstände  $h_x, h_y, h_{xy}$  zueinander verhalten müssen wie  $J_x : J_y : J_{xy}$  und hierauf ist man im stande, die Trägheitsmomente und Zentrifugalmomente für alle durch den Punkt  $O$  gehenden Achsen sehr rasch anzugeben. An die Stelle von  $J_{xy}$  kann natürlich auch ein drittes Trägheitsmoment  $J_z$  als Bestimmungsstück treten, während sich andererseits die Lage von  $T$  auch mit Hilfe von drei Zentrifugalmomenten oder mit Hilfe eines Trägheitsmomentes und zweier Zentrifugalmomente bestimmen läßt.

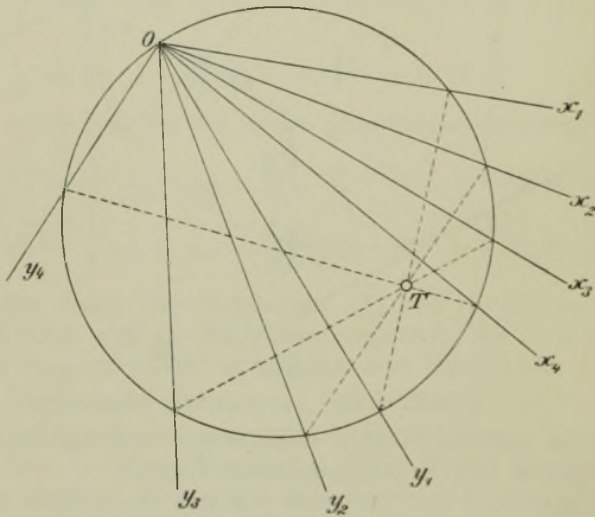


Fig. 52.

Geht die Kreissehne  $AB$  durch den Punkt  $T$  so ist das Zentrifugalmoment  $J_{xy} = 0$ ; die beiden Achsen  $x$  und  $y$  heißen dann *zugeordnete* oder *konjugierte* Achsen. In Fig. 52 ist eine Schar zugeordneter Achsen  $x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3, \dots$  dargestellt worden; sie bilden einen involutorischen Strahlenbüschel; das Zentrum der Involution ist der Punkt  $T$ . Führt man als Koordinaten von  $dF$  nicht die lotrechten Achsenabstände  $x$  und  $y$  ein, sondern die schrägen Abstände



$\xi$  und  $\eta$  (Fig. 53), deren Richtungen aber mit den Achsen  $x$  und  $y$  die von der Lage von  $dF$  unabhängigen, also festen Winkel  $\gamma$  und  $\varepsilon$  einschließen, so ist

$$J_{\xi\eta} = \int \xi\eta dF = \frac{1}{\sin \gamma \sin \varepsilon} \int xy dF.$$

Ist also  $J_{xy} = 0$ , so ist auch  $J_{\xi\eta} = 0$ .

In der Folge werden wir meistens rechtwinklige Koordinaten einführen und den bislang willkürlich gelassenen Kreisdurchmesser

$$2r = J_x + J_y$$

wählen. Als drittes Bestimmungsstück werden wir in der Regel ein Zentrifugalmoment benutzen. Sind dann für irgend ein Achsenkreuz  $J_x$ ,  $J_y$ ,  $J_{xy}$  gegeben, so bestimmen wir  $T$  nach Fig. 54 oder Fig. 55. In der ersten Figur ist durch  $O$  ein beliebiger Kreis vom Durchmesser  $J_x + J_y$  gelegt worden, in der zweiten wurde die

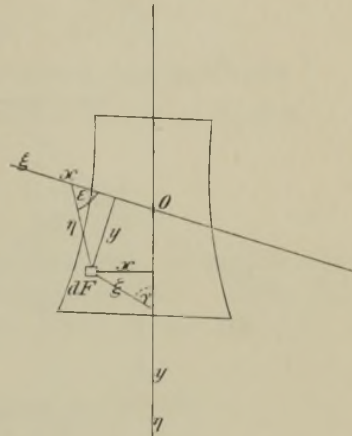


Fig. 53.

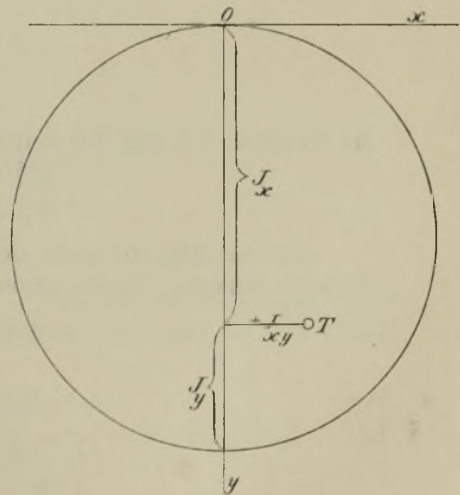
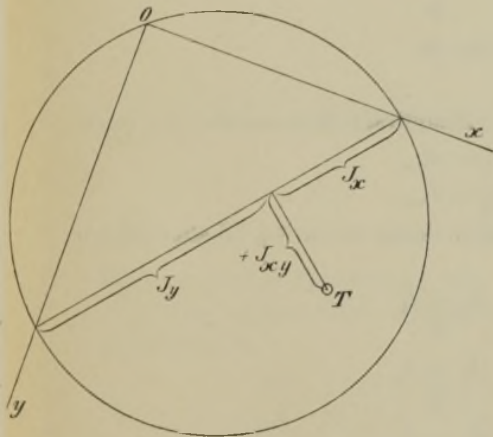


Fig. 54 und 55.

$x$ -Achse zur Kreistangente gemacht. Beim Auftragen von  $J_{xy}$  ist auf das Vorzeichen zu achten.

Fig. 56 zeigt die Ermittlung der Hauptachsen und Hauptträgheitsmomente. Es wurde ein die  $x$ -Achse berührender Kreis benutzt. Der durch  $T$  gelegte Durchmesser bestimmt die Hauptachsen  $OA$  und  $OB$ ;

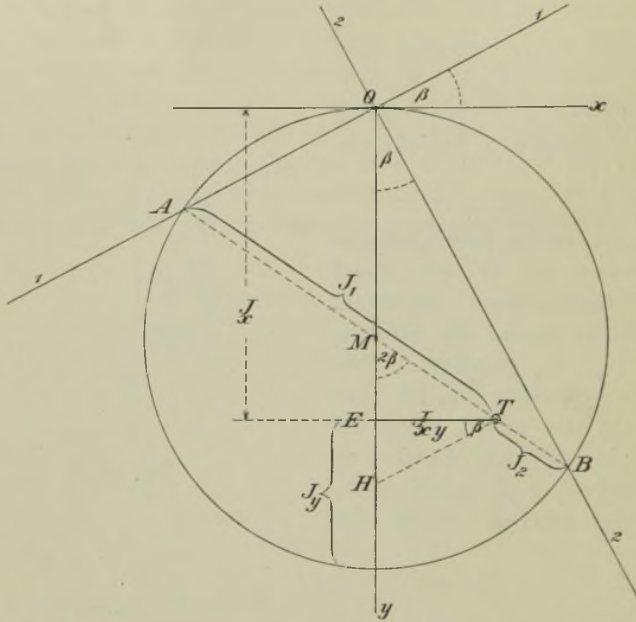


Fig. 56.

die Strecken  $TA$  und  $TB$  stellen die Hauptträgheitsmomente dar; es ist

$$\begin{aligned} \overline{TA} &= J_1 = J_{max} \\ \overline{TB} &= J_2 = J_{min}. \end{aligned}$$

Aus der Fig. 56 lassen sich auch leicht die in No. 33 abgeleiteten Formeln folgern. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} \overline{MT} &= \frac{J_1 - J_2}{2} \\ \overline{ME} &= \frac{J_x - J_y}{2} \\ \frac{J_1 - J_2}{2} &= \frac{J_x - J_y}{2} \sec 2\beta \\ J_1 + J_2 &= J_x + J_y, \end{aligned}$$

folglich

$$J_1 = \frac{1}{2} (J_x + J_y) + \frac{1}{2} (J_x - J_y) \sec 2\beta$$

$$J_2 = \frac{1}{2} (J_x + J_y) - \frac{1}{2} (J_x - J_y) \sec 2\beta.$$

Der Winkel  $\beta$  ist bestimmt durch

$$(7) \quad \operatorname{tg} 2\beta = \frac{ET}{ME} = \frac{2J_{xy}}{J_x - J_y}.$$

Macht man  $\overline{MH} = \overline{MT}$ , so ist  $\angle ETH = \beta$ , und man findet

$$\overline{EH} = \overline{OH} - \overline{OE} = \overline{AT} - \overline{OE} = J_1 - J_x = J_{xy} \operatorname{tg} \beta,$$

so daß man auch erhält:

$$(8) \quad \begin{cases} J_1 = J_x + J_{xy} \operatorname{tg} \beta \\ J_2 = J_y - J_{xy} \operatorname{tg} \beta. \end{cases}$$

Besitzt ein Querschnitt eine Symmetrieachse, so bezieht man ihn zweckmäßig gleich von vornherein auf Hauptachsen. Dieser Fall ist in Fig. 57 dargestellt worden. Es ist  $\overline{OT} = J_1$  und  $\overline{TA} = J_2$ . Die

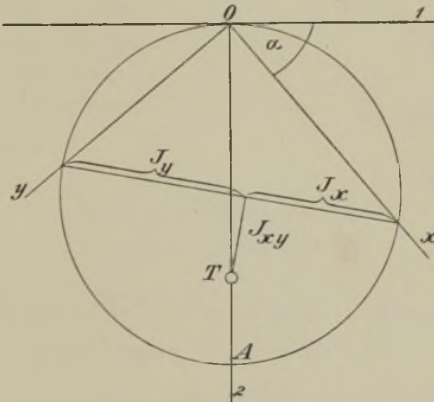


Fig. 57.

Figur zeigt die Ermittlung von  $J_x$ ,  $J_y$ ,  $J_{xy}$  für ein beliebiges, durch  $O$  gelegtes Achsenkreuz. Rechnerisch findet man aus den Hauptträgheitsmomenten

$$(9) \quad J_x = J_1 \cos^2 \alpha + J_2 \sin^2 \alpha$$

$$(10) \quad J_y = J_1 \sin^2 \alpha + J_2 \cos^2 \alpha = J_1 + J_2 - J_x$$

$$(11) \quad J_{xy} = \frac{1}{2} (J_1 - J_2) \sin 2\alpha.$$

**Zahlenbeispiel.** Für das auf Seite 42 untersuchte Z-Eisen wurden gefunden:

$$J_x = 928,423 \quad J_y = 332,948 \quad J_{xy} = 427,133.$$

Die Lage der Hauptachsen ist bestimmt durch

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\beta &= \frac{2J_{xy}}{J_x - J_y} = \frac{854,266}{595,475} \\ \beta &= 27^\circ 33' 38'' \quad \operatorname{tg} \beta = 0,52191. \end{aligned}$$

Für die Hauptträgheitsmomente ergeben sich die Werte

$$\begin{aligned} J_1 &= J_x + J_{xy} \operatorname{tg} \beta = J_x + 222,925 = 1151,35 \text{ cm}^4 \\ J_2 &= J_y - 222,925 = 110,02 \text{ „} \end{aligned}$$

### 35. Wichtige Beziehung zwischen zwei zugeordneten Richtungen.

Gegeben seien für rechtwinklige Koordinaten  $xy$  die Querschnittsmomente  $J_x$ ,  $J_y$ ,  $J_{xy}$ ; gesucht eine Beziehung zwischen den Winkeln  $\alpha'$  und  $\alpha''$ , welche zwei zugeordnete Richtungen mit der  $x$ -Achse bilden, Fig. 58. Sind  $y'$  und  $y''$  die Lote von irgend einem Querschnittspunkte auf die beiden zugeordneten Achsen, so muß

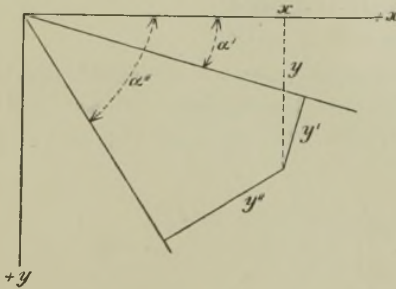


Fig. 58.

$$\int y' y'' dF = 0$$

sein. Nun ist aber

$$\begin{aligned} y' &= y \cos \alpha' - x \sin \alpha' \\ y'' &= x \sin \alpha'' - y \cos \alpha'', \end{aligned}$$

mithin

$$\begin{aligned} \cos \alpha' \sin \alpha'' \int y x dF - \sin \alpha' \sin \alpha'' \int x^2 dF - \cos \alpha' \cos \alpha'' \int y^2 dF \\ + \sin \alpha' \cos \alpha'' \int x y dF = 0, \end{aligned}$$

und hieraus ergibt sich die Beziehung

$$(12) \quad J_{xy} (\operatorname{tg} \alpha' + \operatorname{tg} \alpha'') = J_x + J_y \operatorname{tg} \alpha' \operatorname{tg} \alpha''.$$

Ist  $\alpha'$  gegeben, so findet man

$$(13) \quad \operatorname{tg} \alpha'' = \frac{J_x - J_{xy} \operatorname{tg} \alpha'}{J_{xy} - J_y \operatorname{tg} \alpha'} = \frac{J_x \operatorname{cotg} \alpha' - J_{xy}}{J_{xy} \operatorname{cotg} \alpha' - J_y}.$$

Für  $\alpha' = 0$  erhält man  $\operatorname{tg} \alpha'' = \frac{J_x}{J_{xy}}$

„  $\alpha' = 90^\circ$  „ „  $\operatorname{tg} \alpha'' = \frac{J_{xy}}{J_y}$ .



Sind die Achsen  $x$  und  $y$  Hauptachsen, so wird  $J_{x,y} = 0$  und  
 $J_x + J_y \operatorname{tg} \alpha' \operatorname{tg} \alpha'' = 0$ .

## § 8.

## Die Trägheitsellipse.

36. **Annahme rechtwinkliger Koordinaten.** Ein Querschnitt sei auf die irgend einem Punkte  $O$  entsprechenden Hauptachsen (1) und 2) bezogen.

Die Haupt-Trägheitshalbmesser  $i_1 = \sqrt{\frac{J_1}{F}}$  und  $i_2 = \sqrt{\frac{J_2}{F}}$  seien gegeben.

Dann findet man für den Trägheitshalbmesser  $i_x$  in Bezug auf eine unter dem Winkel  $\alpha$  gegen die Hauptachse (1) durch den Punkt  $O$  gelegte  $x$ -Achse die Gleichung

$$(1) \quad i_x^2 = i_1^2 \cos^2 \alpha + i_2^2 \sin^2 \alpha \quad (\text{nach Gleich. 9 auf Seite 51}).$$

Trägt man auf der zur  $x$ -Achse senkrechten  $y$ -Achse die Strecke  $\overline{OA} = i_x$  ab (Fig. 59), legt durch den Punkt  $A$  eine Parallele zur  $x$ -Achse und wiederholt dies für alle möglichen Lagen der  $x$ -Achse, so umhüllen jene Parallelen eine

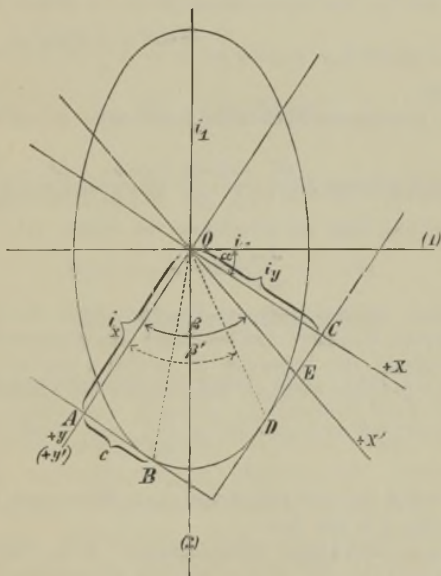


Fig. 59.

Ellipse, welche die *Trägheitsellipse* für den Punkt  $O$  heißt und den besonderen Namen *Zentralellipse* führt, sobald  $O$  der Schwerpunkt des Querschnittes ist. Die Halbachsen der Trägheitsellipse fallen mit den Querschnitts-Hauptachsen zusammen und sind  $= i_1$  (senkrecht zur Achse 2) und  $= i_2$  (senkrecht zur Achse 1).

Der Beweis für den vorstehenden Satz ist der folgende. Die Gleichung einer Ellipse lautet, bezogen auf ihre Hauptachsen  $i_1$  und  $i_2$  als Koordinatenachsen, und wenn die Koordinaten irgend eines Punktes  $B$  der Ellipse mit  $x_1$  und  $y_1$  bezeichnet werden (wobei  $y_1 \parallel i_1$  sein möge):

$$(2) \quad \frac{y_1^2}{i_1^2} + \frac{x_1^2}{i_2^2} = 1;$$

aus ihr folgt durch Differentiieren:

$$\frac{y_1 dy_1}{i_1^2} + \frac{x_1 dx_1}{i_2^2} = 0 \quad \text{oder} \quad x_1 = -y_1 \frac{i_2^2 dy_1}{i_1^2 dx_1},$$

und es müssen daher die Koordinaten des Ellipsenpunktes  $B$ , dem eine unter  $\alpha$  gegen die Achse (1) geneigte Tangente entsprechen soll, außer der Gleich. (2) noch der Gleichung genügen:

$$(3) \quad x_1 = -y_1 \frac{i_2^2}{i_1^2} \operatorname{tg} \alpha.$$

Nun folgt aus (2) und (3) mit Beachtung von (1):

$$y_1^2 = \frac{i_1^4 \cos^2 \alpha}{i_1^2 \cos^2 \alpha + i_2^2 \sin^2 \alpha} = \frac{i_1^4 \cos^2 \alpha}{i_x^2}$$

also:

$$y_1 = \frac{i_1^2 \cos \alpha}{i_x} \quad \text{und hierauf} \quad x_1 = \frac{i_2^2 \sin \alpha}{i_x},$$

und es ist deshalb das Lot von  $O$  auf die in  $B$  an die Ellipse gelegte Tangente

$$\overline{OA} = y_1 \cos \alpha + x_1 \sin \alpha = \frac{i_1^2 \cos^2 \alpha + i_2^2 \sin^2 \alpha}{i_x} = i_x,$$

was zu beweisen war.

Für die mit  $c$  bezeichnete Entfernung des Punktes  $A$  vom Berührungspunkte  $B$  ergibt sich:

$$c = y_1 \sin \alpha - x_1 \cos \alpha = \frac{(i_1^2 - i_2^2) \sin \alpha \cos \alpha}{i_x} = \frac{(J_1 - J_2) \sin 2\alpha}{2 i_x F},$$

und aus dieser Gleichung folgt mit Beachtung von Gleich. (11) auf Seite 51:

$$(4) \quad c = \frac{J_{xy}}{i_x F}, \quad \text{also} \quad J_{xy} = c i_x F,$$

so daß man im stande ist, mit Hilfe der Trägheitsellipse die Querschnittsmomente  $J_x$ ,  $J_y$ ,  $J_{xy}$  für beliebige (zunächst rechtwinklige) Koordinatenachsen zu bestimmen.

Für die Anwendung viel bequemer ist natürlich der im § 7 benutzte Kreis.

Ist  $CD$  die der  $y$ -Achse parallele Tangente an die Trägheitsellipse und  $D$  ihr Berührungspunkt, so ist  $\overline{OC} = i_y$  und  $\overline{DC} = \frac{J_{xy}}{i_y F}$ , also, wenn  $\overline{DC} = e$  gesetzt wird,  $J_{xy} = e i_y F$ .

Die Richtungen  $OB$  und  $OC$  sind *konjugierte Richtungen bezüglich der Trägheitsellipse*, desgleichen  $OD$  und  $OA$ .

**Einführung schiefwinkliger Koordinaten.** Dreht man die  $x$ -Achse, bei liegenbleibender  $y$ -Achse um den Winkel  $90^\circ - \beta$  in die Lage  $x'$  (Fig. 59 und 41), so erhält man (nach No. 30) in Bezug auf die schiefwinkligen Achsen  $y'$ ,  $x'$ :

$$J_{y'} = J_y \operatorname{cosec}^2 \beta \quad \text{und} \quad J_{x'y'} = \operatorname{cosec} \beta (J_{xy} - J_y \cotg \beta),$$

woraus, mit  $J_{y'} = F i_{y'}^2$ ;  $J_y = F i_y^2$ ;  $J_{xy} = e i_y F$ , sich ergibt:

$$i_{y'} = i_y \operatorname{cosec} \beta \quad \text{und} \quad J_{x'y'} = i_y \operatorname{cosec} \beta (e - i_y \cotg \beta) F.$$

Bezeichnet man den Schnittpunkt der  $x'$ -Achse und der Ellipsentangente  $DC$  mit  $E$ , so ist  $\overline{OE} = i_{y'}$ ;  $\overline{DE} = e - i_y \cotg \beta$ , und es folgt daher:

$$J_{y'} = F \cdot \overline{OE}^2; \quad J_{x'y'} = F \cdot \overline{OE} \cdot \overline{ED}.$$

Erhält die  $x'$ -Achse die der  $y$ -Achse konjugierte Richtung  $OD$ , so wird  $J_{x'y'} = 0$ , und es ergibt sich der Satz:

*Das auf konjugierte Durchmesser der Trägheitsellipse bezogene Zentrifugalmoment des Querschnittes ist = 0.*

Der Winkel  $\beta'$ , welchen die einander konjugierten Richtungen  $OD$  und  $OA$  einschließen, ist bestimmt durch die Gleichung:  $\cotg \beta' = \frac{J_{xy}}{J_y}$ . Es ergibt sich dies sowohl aus dem am Schluß von No. 30 ausgesprochenen Gesetze, als auch aus Fig. 59; hier findet man

$$\cotg \beta' = \frac{DC}{OC} = \frac{e}{i_y} = \frac{J_{xy}}{J_y}.$$

Hat die  $x'$ -Achse die Lage  $OD$ , so ist der Trägheitshalbmesser  $i_y'$  gleich dem Ellipsenhalbmesser  $OD$ .

Kennt man  $J_x, J_y, J_{xy}$  für irgend ein Achsenkreuz, so ist man im stande, in jedem Ellipsenquadranten eine Tangente und deren Berührungspunkt anzugeben (in Fig. 59 die Punkte  $B, D$ , die Tangenten  $AB, DC$ , sowie die entsprechenden 2 Punkte und 2 Tangenten auf der anderen Seite der  $y$ -Achse). Die Ellipse ist also durch 8 Stücke gegeben, mithin überbestimmt, da bereits 5 Stücke zur Bestimmung eines Kegelschnittes genügen.

### III. Abschnitt.

## Spannungen in geraden Stäben.

### § 9.

#### Die Normalspannungen.

**37. Gleichgewichtsbedingungen.** Ein von irgend welchen endlichen Kräften ergriffener gerader, elastischer Stab wird bei genügender Festigkeit seine ursprüngliche Form so lange ändern, bis die in seinem Inneren hervorgerufenen Kräfte den äußeren Kräften das Gleichgewicht halten. Diesen Gleichgewichtszustand wollen wir unter der Voraussetzung betrachten, daß die entstandene Formänderung sehr gering ist und ihr Einfluß auf die Lage der Angriffspunkte und die Richtungen der Kräfte vernachlässigt werden darf; wir denken uns also bei Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen alle Kräfte in denjenigen Lagen, welche sie im Falle eines vollkommen starren Stabes einnehmen würden.

Durch einen zur Stabachse  $AB$  (Fig. 60) senkrechten Querschnitt  $F$  zerlegen wir den Stab in zwei Teile und vereinigen alle an dem

einen der beiden Teile, z. B. an dem linken, angreifenden äußeren Kräfte  $P_1, P_2, P_3 \dots$  (mittels des in No. 19 beschriebenen Verfahrens) zu zwei Kräften  $N$  und  $Q$ , deren erste senkrecht zum Querschnitte ist, während die andere in der Ebene des Querschnittes wirkt.  $N$  heißt die *Längskraft für den Querschnitt  $F$* ; sie möge positiv angenommen werden, sobald sie das Bestreben hat, den linken Stabteil von dem festgehalten gedachten rechten Teile zu entfernen. Die Kraft  $Q$  wird die *Querkraft für den Querschnitt  $F$*  genannt; ihr Vorzeichen ist vorläufig gleichgültig.

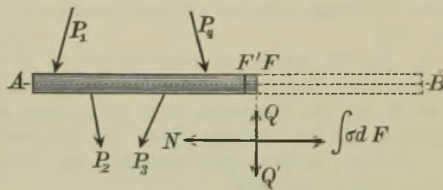


Fig. 60.

Neben den äußeren Kräften greifen an dem betrachteten linken Stabstücke noch die vom rechten Stabstücke auf den Querschnitt  $F$  ausgeübten inneren Kräfte an. Die auf ein unendlich kleines Querschnittsteilchen  $dF$  wirkende Kraft setzen wir gleichmäßig über  $dF$  verteilt voraus; wir zerlegen sie in die Seitenkräfte  $\sigma dF$  und  $\tau dF$ , erstere rechtwinklig zur Querschnittsebene gerichtet, letztere mit dieser Ebene zusammenfallend. Hierbei bedeuten  $\sigma$  und  $\tau$  die auf die Einheit von  $dF$  wirkenden Kräfte; sie werden *Spannungen* genannt, und zwar heißt  $\sigma$  eine *Normalspannung* und  $\tau$  eine *Schubspannung*.  $\sigma$  wird in der Regel als *Zugspannung positiv* und als *Druckspannung (Pressung) negativ* angenommen.

Sollen die inneren und äußeren Kräfte miteinander im Gleichgewicht sein, so muß

- 1) die Mittelkraft  $\int \sigma dF$  aller zur Querschnittsebene senkrechten Kräfte  $\sigma dF$  der Längskraft  $N$  entgegengesetzt gleich sein und mit  $N$  zusammenfallen.
- 2) die Mittelkraft  $Q'$  aller in der Querschnittsebene wirkenden Kräfte  $\tau dF$  der Querkraft  $Q$  entgegengesetzt gleich sein und mit  $Q$  zusammenfallen.

**38. Ermittlung der Normalspannungen  $\sigma$ .** Wir beschäftigen uns zunächst nur mit den Spannungen  $\sigma$ , beziehen den Querschnitt auf ein schiefwinkliges Achsenkreuz  $\xi, \eta$  und bezeichnen die Koordinaten des Angriffspunktes  $K$  der Längskraft  $N$  mit  $\xi_k, \eta_k$ . Dann lauten die Gleichgewichtsbedingungen, denen die Spannungen  $\sigma$  genügen müssen



$$(1) \quad N = \int \sigma dF$$

$$(2) \quad N\xi_k = \int \xi \sigma dF$$

$$(3) \quad N\eta_k = \int \eta \sigma dF,$$

sie sollen in diesem Bande unseres Buches nur für den Fall aufgelöst werden, daß  $\sigma$  eine lineare Funktion der Koordinaten  $\xi$  und  $\eta$  ist, daß also

$$(4) \quad \sigma = a + b\xi + c\eta$$

gesetzt werden darf, wo  $a$ ,  $b$ ,  $c$  für den betrachteten Querschnitt feste Werte bedeuten. Trägt man dann in jedem Punkte  $\xi\eta$  die

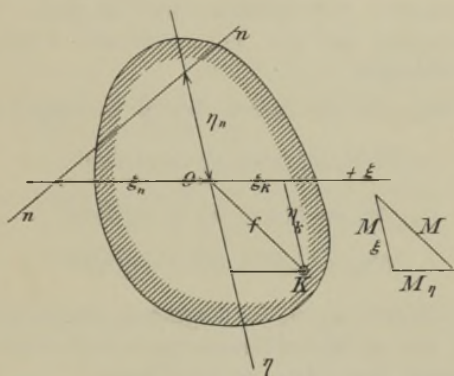


Fig. 61.

dieselbst herrschende Spannung rechtwinklig zum Querschnitt als Ordinate auf, so liegen die Endpunkte der Strecke  $\sigma$  in einer Ebene, welche den Querschnitt in einer Geraden  $nn$ , der sogenannten *Nulllinie* schneidet. In den Punkten einer zur Nulllinie parallelen Geraden herrschen gleich große Spannungen; die größte Spannung entsteht in dem von der Nulllinie am weitesten abgelegenen Querschnittspunkte.

Man erkennt, daß sich für den Fall der Proportionalität zwischen Spannungen und Formänderungen — also für den Fall der Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes — die Einführung der Gleichung (4) mit der in der Festigkeitslehre üblichen Voraussetzung deckt, daß bei der Berechnung der Spannungen  $\sigma$  die ursprünglich ebenen Querschnitte auch nach der Biegung des Stabes als Ebenen betrachtet werden dürfen und daß sowohl die Krümmung der materiellen Linien, welche entsprechende Punkte zweier benachbarten Querschnitte verbinden, als

auch die Querkontraktion vernachlässigbar ist. Die Brauchbarkeit dieser Annahme ist für gerade Stäbe mit im Verhältnis zur Stablänge kleinen Querschnitts-Abmessungen durch eine Reihe schärferer Untersuchungen nachgewiesen worden, so von *De Saint-Venant* in *Liouville's Journal*, 1856, von *Kirchhof* in *Crelles Journal*, 1859, von *Pochhammer* in dessen Werke über das Gleichgewicht des elastischen Stabes (Kiel, 1879).

In erster Linie dürfen also die auf Grund der linearen Spannungsverteilung gewonnenen Formeln für Stäbe aus Flußeisen, Schweißeisen und Stahl benutzt werden, solange die Beanspruchung innerhalb der für diese Stoffe nachgewiesenen Proportionalitätsgrenze liegt. Aber auch bei der Berechnung der Querschnitts-Abmessungen von Holz- und Steinbauten (bei letzteren nur im Falle des Überwiegens von Druckspannungen) hat sich jenes überaus einfache Spannungsgesetz recht gut bewährt.

Damit sich nun für die mittels der 3 Gleichgewichtsbedingungen

$$N = \int (a + b\xi + c\eta) dF$$

$$N\xi_k = \int (a + b\xi + c\eta) \xi dF$$

$$N\eta_k = \int (a + b\xi + c\eta) \eta dF$$

zu berechnenden Werte  $a$ ,  $b$ ,  $c$  möglichst übersichtliche Ausdrücke ergeben, wählen wir zu Koordinatenachsen zwei einander zugeordnete Schwerachsen (vergl. Seite 48); es wird dann

$$\int \xi dF = 0, \int \eta dF = 0, \int \xi\eta dF = 0$$

und die Gleichheitsbedingungen gehen über in

$$N = aF$$

$$N\xi_k = b \int \xi^2 dF = bJ_\eta$$

$$N\eta_k = c \int \eta^2 dF = cJ_\xi.$$

Setzt man die hieraus berechneten Werte  $a$ ,  $b$ ,  $c$  in die Gleichung (4) ein, so erhält man für die gesuchte Spannung den Ausdruck

$$(5) \quad \sigma = \frac{N}{F} + \frac{N\xi_k\xi}{J_\eta} + \frac{N\eta_k\eta}{J_\xi}.$$

Die Nulllinie  $n$  hat die Gleichung

$$(6) \quad 0 = \frac{I}{F} + \frac{\xi_k\xi}{J_\eta} + \frac{\eta_k\eta}{J_\xi},$$

sie schneidet auf den Koordinatenachsen die Strecken

$$(7) \quad \begin{cases} \xi_n = -\frac{J_\eta}{F\xi_k} = -\frac{i\eta^2}{\xi_k}, \\ \eta_n = -\frac{J_\xi}{F\eta_k} = -\frac{i\xi^2}{\eta_k} \end{cases}$$

ab, ihre Lage ist unabhängig von der Größe der Kraft  $N$ .

Die durch den Angriffspunkt  $K$  und den Schwerpunkt  $O$  gelegte Gerade führt den Namen *Kraftlinie*. Ihre Neigung ist durch das Verhältnis  $\eta_n : \xi_k$  gegeben, und die Neigung der Nulllinie durch die Zahl  $\eta_n : \xi_n$ . Zwischen beiden Verhältniszahlen besteht die Beziehung

$$(8) \quad \frac{\eta_n}{\xi_n} \cdot \frac{\eta_k}{\xi_k} = \frac{J_\xi}{J_\eta} = \frac{i\xi^2}{i\eta^2}.$$

Aus den Gleichungen (7) und (8) folgt: *Zu jedem Angriffspunkte  $K$  gehört eine bestimmte Nulllinie  $n$  und zu jeder Kraftlinien-Richtung eine bestimmte Nulllinien-Richtung.*

*Liegt  $K$  im Schwerpunkte, so liegt die Nulllinie im Unendlichen; liegt  $K$  im Unendlichen, so geht die Nulllinie durch den Schwerpunkt.* Im zweiten Falle muß  $N=0$  sein: der Querschnitt wird durch eine unendlich ferne, unendlich kleine Längskraft (d. i. ein Kräftepaar) beansprucht.

Wichtige Schlüsse lassen sich auch aus dem Umstande ziehen, daß in den Gleichungen (5) und (6) die Koordinaten nur in den Produkten  $\xi_k \xi$  und  $\eta_k \eta$ , deren Faktoren miteinander vertauscht werden dürfen, auftreten.

Betrachtet man in Gleich. (6)  $\xi_k$  und  $\eta_k$  als die laufenden Koordinaten eines Angriffspunktes  $K$ , der sich in einer durch diese Gleichung bestimmten Geraden  $n'$  bewegt, so sind  $\xi$  und  $\eta$  die festen Koordinaten desjenigen Punktes  $K'$ , durch den sämtliche zu den Punkten  $K$  gehörenden Nulllinien  $n$  gehen. Wird der Punkt  $K'$  Angriffspunkt, so wird die Gerade  $n'$  Nulllinie. Hieraus folgt der wichtige Satz:

*Beschreibt eine Nulllinie  $nn$  einen Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt  $K'$  ist, so bewegt sich ihr Angriffspunkt  $K$  auf der dem Punkte  $K'$  entsprechenden Nulllinie  $n'n'$ .*

*Bewegt sich der Angriffspunkt  $K$  auf einer Geraden  $n'n'$ , so beschreibt seine Nulllinie  $nn$  einen Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt  $K'$  der zur Nulllinie  $n'n'$  gehörige Angriffspunkt ist.*

Ans der Gleichung (5) aber folgt der Satz:

*Die Spannung  $\sigma$ , welche eine im Punkte  $\xi_k \eta_k$  angreifende Längskraft  $N$  im Punkte  $\xi \eta$  erzeugt, ist ebenso groß wie die Spannung, welche die im Punkte  $\xi \eta$  angreifende Kraft  $N$  im Punkte  $\xi_k \eta_k$  hervorbringt.*



Wir werden diesen Satz in der Folge durch die kurze Gleichung

$$\sigma_{AB} = \sigma_{BA}$$

ausdrücken, in welcher  $\sigma_{AB}$  die Spannung bedeutet, welche im Punkte  $A$  durch eine in  $B$  angreifende Last von der Größe  $1$  erzeugt wird. Ganz ebenso ist  $\sigma_{BA}$  zu lesen.

**39. Einführung des Biegemomentes.** Das Produkt aus der Längskraft  $N$  und ihrer Entfernung  $f$  vom Schwerpunkte  $S$  nennt man das *Biegemoment* (auch das *Angriffsmoment* oder kurz das *Moment*) für den fraglichen Querschnitt; es möge mit  $M$  bezeichnet werden. Die Produkte

$$N\eta_k = M_\xi \quad \text{und} \quad N\xi_k = M_\eta$$

wollen wir die auf die Achsen  $\xi$  und  $\eta$  bezogenen Seitenmomente von

$$(9) \quad M = Nf$$

nennen. Wir erhalten dann

$$(10) \quad \sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_\eta}{J_\eta} \xi + \frac{M_\xi}{J_\xi} \eta.$$

Ist  $N = 0$ , sind also beispielsweise sämtliche äußeren Kräfte senkrecht zur Stabachse gerichtet, so wird der Querschnitt nur durch ein Moment  $M$  beansprucht, und es ergibt sich

$$(11) \quad \sigma = \frac{M_\eta}{J_\eta} \xi + \frac{M_\xi}{J_\xi} \eta.$$

Es ist dies der Belastungsfall, den wir vorhin als Beanspruchung des Querschnitts durch eine unendlich kleine, unendlich ferne Längskraft bezeichneten. Die Nulllinie  $n$  geht durch den Schwerpunkt; sie ist parallel zu einer Geraden, die auf den Koordinatenachsen Strecken  $\eta_n$  und  $\xi_n$  abschneidet, welche die Bedingung

$$(12) \quad \frac{\eta_n}{\xi_n} = - \frac{i_\xi^2}{i_\xi^2} \cdot \frac{M_\eta}{M_\xi}$$

erfüllen. Die eine der beiden Strecken darf beliebig groß gewählt werden.

**40. Einführung rechtwinkliger Koordinaten.** Sollen die in No. 38 und No. 39 abgeleiteten Gleichungen für rechtwinklige Koordinaten gelten, so muß der Querschnitt auf Hauptachsen bezogen werden; denn diese sind die einzigen sich rechtwinklig schneidenden konjugierten Achsen. Besitzt der Querschnitt eine Symmetrieachse, so ist die Lage der Hauptachsen von vornherein bekannt; denn jede Symmetrieachse ist eine Hauptachse. Die Hauptachsen und Hauptträgheitsmomente der Walzeisen-Profile findet man in dem bekannten Normalprofilbuche und in vielen Taschenbüchern; hier lassen sich also die bisher gewonnenen Formeln ebenfalls sofort verwerten. Für andere Fälle aber empfiehlt es sich, wenn rechtwinklige Koordinaten



eingeführt werden sollen, diese Gleichungen umzuformen. Zu diesem Zwecke vereinfachen wir die für schiefwinklige Koordinaten entwickelten Gleichungen zunächst dadurch, daß wir die Kraftlinie zur  $\eta =$  Achse machen. Es wird dann  $\xi_k = 0$ ,  $M_\eta = 0$ ,  $M_\xi = M$  und es ergibt sich

$$(13) \quad \sigma = \frac{N}{F} + \frac{N\eta_k \eta}{J_\xi} = \frac{N}{F} + \frac{M_\xi \eta}{J_\xi}.$$

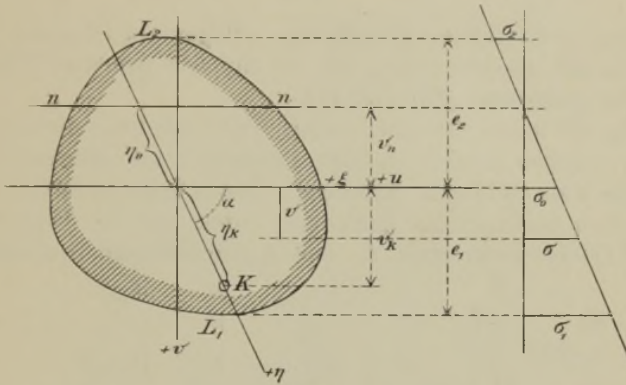


Fig. 62.

Die Nulllinie wird parallel zur  $\xi$ -Achse und schneidet die  $\eta$ -Achse im Abstände

$$(14) \quad \eta_n = -\frac{J_\xi}{F\eta_k} = -\frac{i_\xi^2}{\eta_k}$$

vom Schwerpunkte. Wir erkennen jetzt, daß die Richtungen von Nulllinie und Kraftlinie einander zugeordnet sind, eine Eigenschaft, die sich auch, allerdings weniger einfach, aus den in No. 38 aufgestellten Gleichungen hätte folgern lassen.

Nun beziehen wir den Querschnitt auf das rechtwinklige Achsenkreuz  $u, v$  und wählen die der Kraftlinie zugeordnete Achse (d. i. unsere bisherige  $\xi$ -Achse) zur  $u$ -Achse. Bezeichnet  $\alpha$  den von den Achsen  $\xi$  und  $\eta$  eingeschlossenen Winkel, so bestehen zwischen den bisher benutzten und den neuen Koordinaten die Gleichungen

$$\eta = \frac{v}{\sin \alpha}, \quad \eta_k = \frac{v_k}{\sin \alpha}$$

und es ergibt sich

$$J_\xi = \int \eta^2 dF = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \int v^2 dF = \frac{J_u}{\sin^2 \alpha};$$

mithin ist

$$\frac{\eta \eta_k}{J_\xi} = \frac{v v_k}{J_u}.$$

Der für  $\sigma$  gefundene Ausdruck geht also über in

$$(15) \quad \sigma = \frac{N}{F} + \frac{Nv_k v}{J_u} = \frac{N}{F} + \frac{M_u v}{J_u},$$

wo  $M_u = M \sin \alpha$  das auf die  $u$ -Achse bezogene Seitenmoment ist, und die Lage der Nulllinie ist bestimmt durch

$$(16) \quad v_n = -\frac{J_u}{Fv_k} = -\frac{i_u^2}{v_k}.$$

Die für rechtwinklige Koordinaten gültigen Gleichungen (15) und (16) haben also dieselbe Form, wie die für schiefwinklige Koordinaten gefundenen Ausdrücke (13) und (14).

In Fig. 62 haben wir noch einen Überblick über die Spannungsverteilung gegeben, indem wir die Abstände  $v$  als Abscissen und die zugehörigen  $\sigma$  als Ordinaten auftrugen. Dieses Spannungsbild ist durch zwei Werte  $\sigma$  bestimmt, beispielsweise durch eine der beiden für die äußersten Querschnittspunkte  $L_1$  und  $L_2$  berechneten Spannungen

$$(17) \quad \begin{cases} \sigma_1 = \frac{N}{F} + \frac{Nv_k e_1}{J_u} = \frac{N}{F} + \frac{M_u e_1}{J_u} \\ \sigma_2 = \frac{N}{F} - \frac{Nv_k e_2}{J_u} = \frac{N}{F} - \frac{M_u e_2}{J_u} \end{cases}$$

und durch die Spannung

$$(18) \quad \sigma_0 = \frac{N}{F}$$

an der Stelle  $v = 0$ . Es kann sich aber auch als zweckmäßig erweisen,  $\sigma$  für zwei Punkte, deren Abstände  $v$  durch runde Zahlen ausgedrückt sind, und die auch außerhalb des Querschnittes angenommen werden dürfen, zu berechnen.

**41. Weitere Umformungen für rechtwinklige Koordinaten.** Meistens ist es am zweckmäßigsten, den Querschnitt auf solche rechtwinklige Schwerachsen  $xy$  zu beziehen, welche zu einer möglichst einfachen Berechnung von  $J_x$ ,  $J_y$ ,  $J_{xy}$  führen. Bildet dann die Kraftlinie mit der  $x$ -Achse den Winkel  $\alpha_k$  (Fig. 63), so ist der Neigungswinkel  $\alpha_n$  der zur Nulllinie parallelen  $u$ -Achse durch die auf Seite 52 abgeleitete Gleichung

$$(19) \quad \operatorname{tg} \alpha_n = \frac{J_x - J_{xy} \operatorname{tg} \alpha_k}{J_{xy} - J_y \operatorname{tg} \alpha_k} = \frac{J_x \operatorname{ctg} \alpha_k - J_{xy}}{J_{xy} \operatorname{ctg} \alpha_k - J_y}$$

bestimmt. Für das in die Formel (15) einzusetzende Trägheitsmoment  $J_u$  findet man nach Gleich. (1), Seite 45 den Wert

$$\begin{aligned} J_u &= J_x \cos^2 \alpha_n + J_y \sin^2 \alpha_n - 2 J_{xy} \sin \alpha_n \cos \alpha_n \\ &= \cos \alpha_n (J_x \cos \alpha_n - J_{xy} \sin \alpha_n) - \sin \alpha_n (J_{xy} \cos \alpha_n - J_y \sin \alpha_n) \end{aligned}$$

und dieser geht wegen der aus der Gleich. (19) folgenden Beziehung

$$\frac{J_{xy} \cos \alpha_n - J_y \sin \alpha_n}{J_x \cos \alpha_n - J_{xy} \sin \alpha_n} = \cotg \alpha_k = \frac{\cos \alpha_k}{\sin \alpha_k}$$

über in

$$\begin{aligned} J_n &= (J_x \cos \alpha_n - J_{xy} \sin \alpha_n) \frac{\cos \alpha_n \sin \alpha_k - \sin \alpha_n \cos \alpha_k}{\sin \alpha_k} \\ &= (J_x \cos \alpha_n - J_{xy} \sin \alpha_n) \frac{\sin (\alpha_k - \alpha_n)}{\sin \alpha_k}. \end{aligned}$$

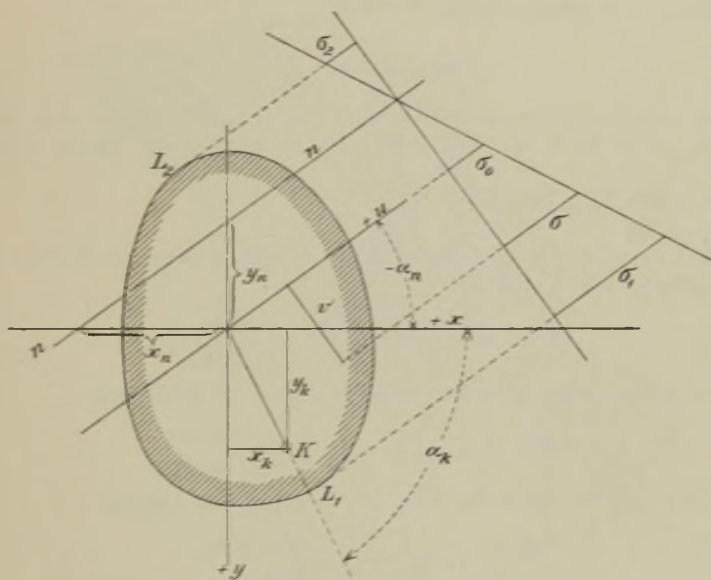


Fig. 63.

Setzt man diesen Wert in die Gleichung

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_n v}{J_n} = \frac{N}{F} + \frac{M \sin (\alpha_k - \alpha_n) v}{J_n}$$

ein und bezeichnet man das auf die  $x$ -Achse bezogene Seitenmoment mit  $M_x$ ,

$$(20) \quad M_x = M \sin \alpha_k,$$

so erhält man den einfachen Ausdruck

$$(21) \quad \sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_x v}{J_x \cos \alpha_n - J_{xy} \sin \alpha_n}.$$

Drückt man noch  $v$  durch  $x$  und  $y$  aus,

$$v = y \cos \alpha_n - x \sin \alpha_n,$$

so findet man für die Spannung an der Stelle  $xy$  den Wert

$$(22) \quad \sigma = \frac{N}{F} + M_x \frac{y - x \operatorname{tg} \alpha_n}{J_x - J_{xy} \operatorname{tg} \alpha_n}.$$

In derselben Weise läßt sich auch die Formel ableiten

$$(23) \quad \sigma = \frac{N}{F} + M_y \frac{x - y \operatorname{ctg} \alpha_n}{J_y - J_{xy} \operatorname{ctg} \alpha_n}.$$

Beide Formeln sind nötig. Ist  $\alpha_n = 0$ , also auch  $M_x = 0$ , so ist die Richtung der Nulllinie durch

$$(24) \quad \operatorname{tg} \alpha_n = \frac{J_x}{J_{xy}}$$

gegeben, und das zweite Glied der Gleich. (22) nimmt den unbestimmten Wert  $0:0$  an. Wird  $M_y = 0$ , so versagt die zweite Formel;

es wird dann  $\operatorname{tg} \alpha_n = \frac{J_{xy}}{J_y}$ .

Setzt man  $\sigma = 0$  und  $M_x = N y_k$ , so erhält man aus Formel (22) die Gleichung der Nulllinie

$$(25) \quad 0 = \frac{1}{F} + y_k \frac{y - x \operatorname{tg} \alpha_n}{J_x - J_{xy} \operatorname{tg} \alpha_n},$$

während aus Formel (23) für dieselbe Linie die Gleichung

$$(26) \quad 0 = \frac{1}{F} + x_k \frac{x - y \operatorname{ctg} \alpha_n}{J_y - J_{xy} \operatorname{ctg} \alpha_n}$$

folgt. Diese Linie schneidet auf der  $y$ -Achse die Strecke

$$(27) \quad y_n = - \frac{J_x - J_{xy} \operatorname{tg} \alpha_n}{F y_k}$$

ab und auf der  $x$ -Achse die Strecke

$$(28) \quad x_n = - \frac{J_y - J_{xy} \operatorname{ctg} \alpha_n}{F x_k}.$$

Kennt man den einen der beiden Werte  $y_n, x_n$ , so findet man den anderen auch mittels der Gleichung

$$\frac{y_n}{x_n} = - \operatorname{tg} \alpha_n.$$

**42. Zeichnerisches Verfahren.** Wir setzen den in No. 41 behandelten Fall voraus, beziehen also den Querschnitt auf ein rechtwinkliges Achsenkreuz  $xy$ , das eine möglichst einfache Ermittlung von  $J_x, J_y, J_{xy}$  gestattet. Hierauf benutzen wir zur Bestimmung der zur Kraftlinie  $k$  gehörigen Nulllinien-Richtung den von Mohr eingeführten Kreis, vergl. No. 34. Wir tragen auf der  $y$ -Achse die Strecken



$\overline{OE} = J_x$  und  $\overline{EC} = J_y$  auf, und setzen von  $E$  aus rechtwinklig zur  $y$ -Achse die Strecke  $\overline{ET} = +J_{xy}$  ab. Ist  $J_{xy}$  negativ, so liegt der Punkt  $T$  im zweiten Quadranten. Nun wird die Kraftlinie mit dem durch den Durchmesser  $\overline{OC}$  bestimmten Kreise in  $A$  zum Schnitt gebracht und mittels der Sehne  $ATB$  die Richtung der  $u$ -Achse festgelegt. Der

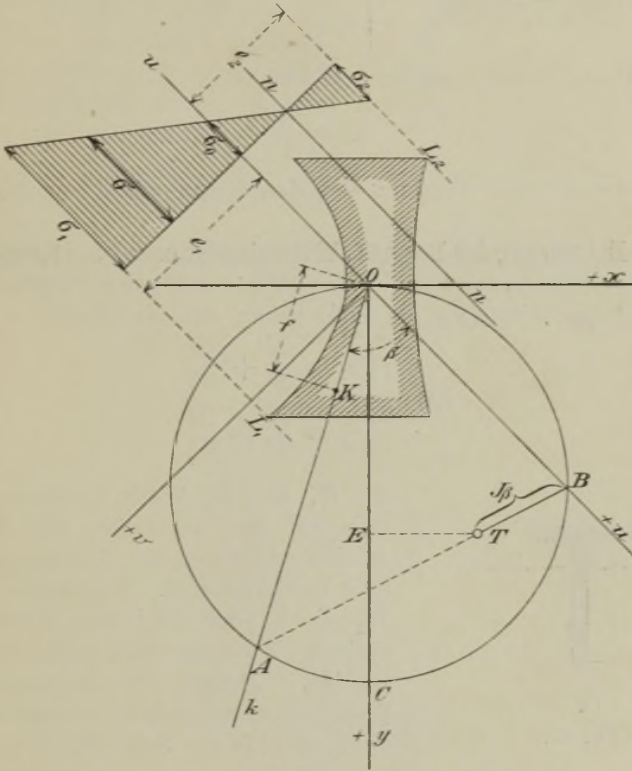


Fig. 64.

Abstand des Punktes  $T$  von der in  $B$  an den Kreis gezogenen Tangente stellt das Trägheitsmoment  $J_u$  dar, weshalb die Strecke  $\overline{TB}$  den Wert  $\frac{J_u}{\sin \beta}$  angibt. Dieser Ausdruck soll in der Folge mit  $J_\beta$  bezeichnet werden. Nun ist nach Gleich. (15), wegen  $M_u = M \sin \beta$ , wo  $M = Nf$ ,

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M \sin \beta r}{J_u}$$

und man erhält daher

$$(29) \quad \sigma = \frac{N}{F} + \frac{Mv}{J_{\beta}}$$

Für die äußersten Querschnittspunkte ergibt sich

$$(30) \quad \begin{cases} \sigma_1 = \frac{N}{F} + \frac{Me_1}{J_{\beta}} \\ \sigma_2 = \frac{N}{F} - \frac{Me_2}{J_{\beta}} \end{cases}$$

In den Punkten der  $u$ -Achse herrscht

$$\sigma_u = \frac{N}{F}$$

Durch irgend zwei Werte  $\sigma$  ist das Spannungsbild in Fig. 64 bestimmt.

#### 43. Einführung des Begriffs „Widerstandsmoment des Querschnitts“.

Die Spannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  in den beiden äußersten Punkten  $L_1$  und  $L_2$  des Querschnitts (Fig. 61—64) haben stets die Form

$$(31) \quad \begin{cases} \sigma_1 = \frac{N}{F} + \frac{M}{W_1} \\ \sigma_2 = \frac{N}{F} - \frac{M}{W_2} \end{cases}$$

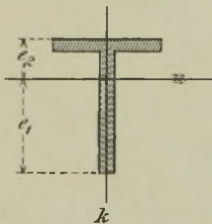


Fig. 65.

wo  $W_1$  und  $W_2$  Werte bedeuten, die unabhängig von der Größe des Momentes  $M$  sind und durch die Richtung der Kraftlinie bestimmt sind. Man nennt  $W_1$  und  $W_2$  die zu der fraglichen Kraftlinie gehörigen *Widerstandsmomente* des Querschnitts. Erfolgt die Berechnung der Spannungen beispielsweise nach den Gleichungen (17) auf Seite 62, so findet man

$$W_1 = \frac{J_u}{e_1 \sin \beta} \quad \text{und} \quad W_2 = \frac{J_u}{e_2 \sin \beta}$$

Wird das zeichnerische Verfahren gewählt, so ergibt sich

$$W_1 = \frac{J_{\beta}}{e_1}, \quad W_2 = \frac{J_{\beta}}{e_2}$$

Fällt die Kraftlinie mit einer Hauptachse zusammen, Fig. 65, so ist

$$(32) \quad W_1 = \frac{J_u}{e_1}, \quad W_2 = \frac{J_u}{e_2}$$

Für die  $\Gamma$ -Eisen und  $\square$ -Eisen sind die auf Hauptachsen bezogenen Widerstandsmomente  $W$  im Normalprofilbuche und in vielen Hilfsbüchern zu finden.

Es wäre aber zu wünschen, daß auch für die mit den Hauptachsen nicht zusammenfallenden Kraftlinien die Werte  $W$  berechnet werden möchten, etwa in der Weise, wie dies für die Schiffbau- $\perp$ -Eisen von Herrn Ingenieur Meyerhof in der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, Jahrgang 1899, Seite 607—614 gesehen ist.

**44. Zahlenbeispiele. 1. Aufgabe.** Ein an beiden Enden frei aufliegendes 400 cm langes Winkel-eisen (Flußeisen) ist gleichmäßig mit  $P = 200^k$  belastet, Fig. 66 und 67; es sollen die Spannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  berechnet werden, erstens für den Fall, daß die zum längeren Schenkel parallele Schwerachse Kraftlinie ist, zweitens für eine um  $30^\circ$  gegen den kürzeren Schenkel geneigte Kraftlinie.

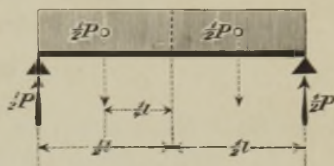


Fig. 66.

Es ist

$$M = \frac{P}{2} \cdot \frac{l}{2} - \frac{P}{2} \cdot \frac{l}{4} = \frac{Pl}{8} = \frac{200 \cdot 400}{8} = 10000 \text{ kem.}$$

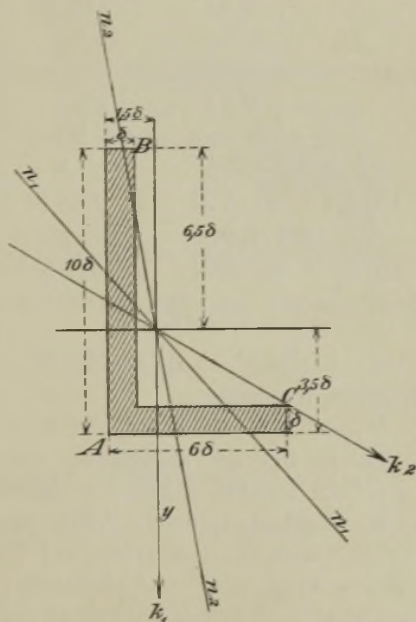


Fig. 67.

Die Querschnittsmomente für das Achsenkreuz  $xy$  sind (vergl. Seite 39):

$$J_x = 151,25 \delta^4 \quad J_y = 41,25 \delta^4 \quad J_{xy} = 45 \delta^4.$$

Fällt die Kraftlinie mit der  $y$ -Achse zusammen, so ist  $\alpha_n = 90^\circ$  und

$$\operatorname{tg} \alpha_n = \frac{J_{xy}}{J_x} = \frac{45}{41,25} = 1,09.$$

Die Koordinaten der äußersten Querschnittspunkte  $A$  und  $B$  sind

$$\begin{aligned} y_A &= +3,5 \delta & x_A &= -1,5 \delta \\ y_B &= -6,5 \delta & x_B &= -0,5 \delta. \end{aligned}$$

Man erhält also nach der Formel (vergl. Seite 64)

$$\sigma = M_x \frac{y - x \operatorname{tg} \alpha_n}{J_x - J_{xy} \operatorname{tg} \alpha_n},$$

worin  $M_x = M$  zu setzen ist, für  $\delta = 1^{\text{cm}}$  die Spannungen

$$\sigma_A = \frac{M}{\delta^3} \frac{3,5 + 1,5 \cdot 1,09}{151,25 - 45 \cdot 1,09} = + \frac{M}{19,9 \delta^3} = + 503 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_B = \frac{M}{\delta^3} \frac{-6,5 + 0,5 \cdot 1,09}{151,25 - 45 \cdot 1,09} = - \frac{M}{17,2 \delta^3} = - 582 \text{ kg/cm}^2.$$

Bildet die Kraftlinie mit der  $x$ -Achse den Winkel  $30^\circ$  so ist  $\operatorname{tg} \alpha_n = 0,577$ , mithin

$$\operatorname{tg} \alpha_n = \frac{J_x - J_{xy} \operatorname{tg} \alpha_k}{J_{xy} - J_y \operatorname{tg} \alpha_k} = \frac{125,285}{21,2} = 5,91.$$

Die äußersten Querschnittspunkte sind nunmehr  $A$  und  $C$ .

$$\begin{aligned} y_C &= +2,5 \delta & x_C &= 4,5 \delta \\ M_x &= M \sin \alpha_k = 0,5 M \end{aligned}$$

$$\sigma_A = 0,5 \frac{M}{\delta^3} \frac{3,5 + 1,5 \cdot 5,91}{151,25 - 45 \cdot 5,91} = - \frac{M}{18,6 \delta^3} = - 538 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_C = 0,5 \frac{M}{\delta^3} \frac{2,5 - 4,5 \cdot 5,91}{151,25 - 45 \cdot 5,91} = + \frac{M}{9,5 \delta^3} = + 1053 \text{ kg/cm}^2.$$

Die Widerstandsmomente des Querschnitts sind für die senkrechte Kraftlinie

$$W_1 = 19,9 \delta^3 \quad W_2 = 17,2 \delta^3,$$

für die um  $30^\circ$  geneigte Kraftlinie

$$W_1 = 9,5 \delta^3 \quad W_2 = 18,6 \delta^3.$$

2. Aufgabe. Der in Fig. 68 abgebildete Querschnitt eines gemauerten Pfeilers wird im Punkte  $K$  mit  $N = 60000^{\text{k}}$  gedrückt. Gesucht ist die Lage der Nulllinie und die größte Spannung  $\sigma$ .

Wir beziehen den Querschnitt zunächst auf das mit zwei Seiten zusammenfallende Achsenkreuz  $x'y'$  und zerlegen ihn in drei Rechtecke, deren Abmessungen und Schwerpunkts-Abscissen

$$b_1 = 0,25^{\text{m}}, \quad b_2 = 0,52^{\text{m}}, \quad b_3 = 0,26^{\text{m}}$$

$$h_1 = 0,77^{\text{m}}, \quad h_2 = 0,51^{\text{m}}, \quad h_3 = 0,25^{\text{m}}$$

$$e_1 = 0,125^{\text{m}}, \quad e_2 = 0,51^{\text{m}}, \quad e_3 = 0,90^{\text{m}}$$

sind. Dann erhalten wir

$$F = \Sigma bh = 0,5227 \text{ m}^2$$



$$S_{x'} = \frac{1}{2} \Sigma b h^2 = 0,1499 \text{ m}^3 \text{ (statisches Moment)}$$

$$J_{x'} = \frac{1}{3} \Sigma b h^3 = 0,0624 \text{ m}^4$$

$$J_{x'y'} = \frac{1}{2} \Sigma b h^2 e = 0,0511 \text{ m}^4$$

und auf ähnliche Weise

$$S_y = 0,2178 \text{ m}^3$$

$$J_y = 0,1320 \text{ m}^4.$$

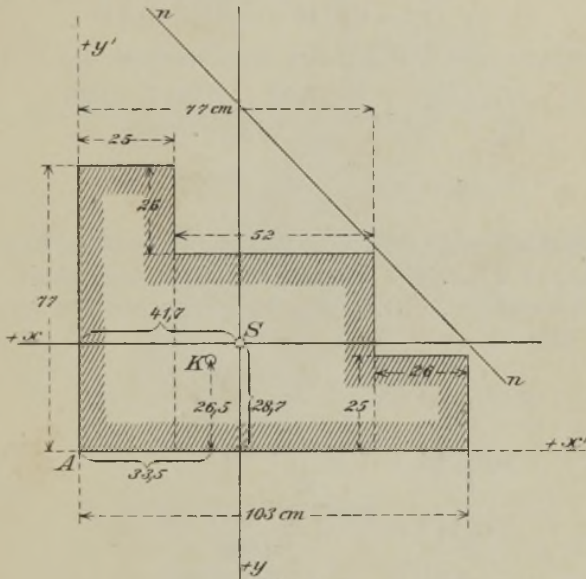


Fig. 68.

Die Koordinaten des Schwerpunktes sind nun

$$y'_s = \frac{S_{x'}}{F} = 0,287 \text{ m};$$

$$x'_s = \frac{S_y}{F} = 0,417 \text{ m}$$

und die Querschnittsmomente, bezogen auf die Schwerachsen

$$J_x = J_{x'} - F y'_s{}^2 = J_{x'} - S_{x'} y'_s$$

$$J_x = 0,0624 - 0,1499 \cdot 0,287 = 0,0194 \text{ m}^4$$

$$J_y = 0,1320 - 0,2178 \cdot 0,417 = 0,0412 \text{ „}$$

$$J_{xy} = 0,0511 - 0,1499 \cdot 0,417 = -0,0114 \text{ m}^4.$$

Die Koordinaten des Angriffspunktes  $K$  seien

$$y'_k = 0,265^m \text{ und } x'_k = 0,335^m.$$

Dann erhält man

$$y_k = 0,287 - 0,265 = 0,022^m$$

$$x_k = 0,417 - 0,335 = 0,082^m$$

$$\operatorname{tg} \alpha_k = \frac{y_k}{x_k} = \frac{11}{41} = 0,268$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_n &= \frac{J_x - J_{xy} \operatorname{tg} \alpha_k}{J_{xy} - J_y \operatorname{tg} \alpha_k} \\ &= \frac{0,0194 + 0,0114 \cdot 0,268}{-0,0114 - 0,0412 \cdot 0,268} = -0,836. \end{aligned}$$

Die Nulllinie schneidet auf den Schwerachsen die Strecken ab:

$$y_n = -\frac{J_x - J_{xy} \operatorname{tg} \alpha_n}{F y_k} = -\frac{0,0194 - 0,0114 \cdot 0,836}{0,5227 \cdot 0,022} = -0,858^m$$

$$x_n = -\frac{y_n}{\operatorname{tg} \alpha_n} = -1,026^m,$$

sie liegt vollständig außerhalb des Querschnitts, und es haben deshalb alle Spannungen  $\sigma$  dasselbe Vorzeichen. Der Querschnitt wird nur auf Druck beansprucht. Die größte Spannung herrscht im Punkte  $A$ . Man findet hier

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{N}{F} + N y_k \frac{y - x \operatorname{tg} \alpha_n}{J_x - J_{xy} \operatorname{tg} \alpha_n} \\ &= \frac{N}{F} \left( 1 - \frac{y - x \operatorname{tg} \alpha_n}{y_n} \right) \\ &= \frac{N}{F} \left( 1 + \frac{0,287 + 0,417 \cdot 0,836}{0,858} \right) \\ &= \frac{1,74 N}{F} = \frac{1,74 \cdot 60000}{5227} = -20 \text{ kg/qcm}. \end{aligned}$$

Klinkermauerwerk in Kalk-Zementmörtel, vgl. Seite 101, ist das beim Auftreten solcher Pressungen angezeigte Material.

3. Aufgabe. Der trapezförmige Querschnitt eines gemauerten Pfeilers habe die Abmessungen (Fig. 69)

$$a_1 = 2,6^m, a_2 = 1,4^m, t = 6^m \text{ (Transversale), } h = 5,1^m.$$

Im Eckpunkte  $A$  greife senkrecht zur Querschnittsebene der Druck  $1^t$  an. Verlangt wird die Darstellung der Spannungsverteilung.

Wir beziehen den Querschnitt auf die schiefwinkligen Schwerachsen  $\xi, \eta$  und erhalten (nach Seite 43)

$$J_{\xi} = \frac{ht^3}{36} \left( a_1 + a_2 + \frac{2a_1a_2}{a_1 + a_2} \right)$$

$$= \frac{5.1 \cdot 6^3}{36} \left( 2.6 + 1.4 + \frac{2 \cdot 2.6 \cdot 1.4}{2.6 + 1.4} \right) = 29.682 \text{ m}^4$$

$$J_{\eta} = \frac{F(a_1^2 + a_2^2)}{24}, \text{ wo } F = \frac{h(a_1 + a_2)}{2} = 5.1 \cdot 2.0 = 10.2,$$

weshalb 
$$J_{\eta} = \frac{10.2(2.6^2 + 1.4^2)}{24} = 3.706 \text{ m}^4.$$

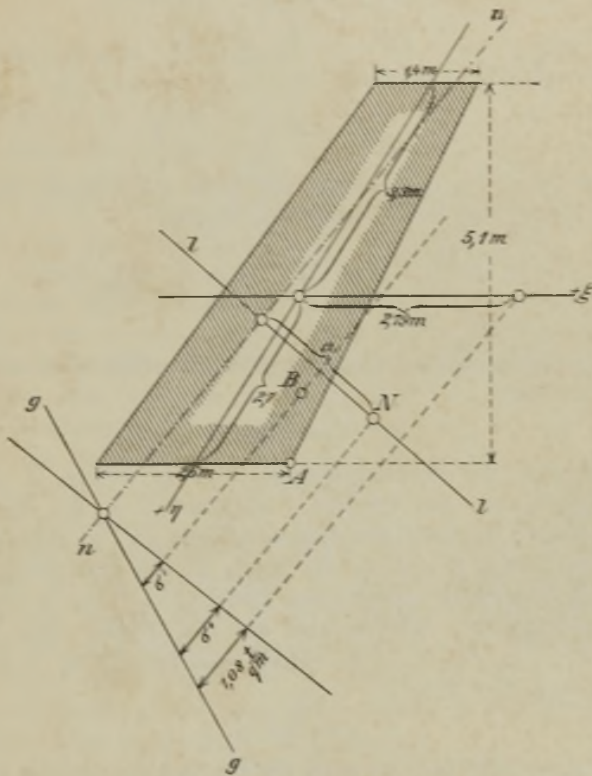


Fig. 69.

Die Koordinaten des Angriffspunktes *A* sind

$$\xi_A = \frac{1}{2} a_1 = 1.3^m$$

$$\eta_A = t \frac{a_1 + 2a_2}{3(a_1 + a_2)} = 6 \frac{2.6 + 2.8}{3 \cdot 4} = 2.7^m,$$



es schneidet also die Nulllinie auf den Achsen die Strecken ab (vergl. Seite 59):

$$\xi_n = -\frac{J_\eta}{F\xi_k} = -\frac{3,706}{10,2 \cdot 1,3} = -0,279^m$$

$$\eta_n = -\frac{J_\xi}{F\eta_k} = -\frac{29,682}{10,2 \cdot 2,7} = -1,078^m$$

und es ergibt sich für die Druckspannung in irgend einem Punkte  $\xi$ ,  $\eta$  des Querschnitts (nach Gleich. 5, Seite 58) der Wert

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{N\xi_k\xi}{J_\eta} + \frac{N\eta_k\eta}{J_\xi};$$

er wird zweckmäßig umgeformt in

$$\sigma = \frac{N}{F} \left( 1 - \frac{\xi}{\xi_n} - \frac{\eta}{\eta_n} \right)$$

und nun wird das Spannungsbild mit Hilfe des für die Stelle  $\eta = 0$  und  $\xi = -10\xi_n = 2,79^m$  berechneten Wertes

$$\sigma = \frac{11 N}{F} = -\frac{11 \cdot 1}{10,2} = -1,08^{t/qm.*}$$

bestimmt.

Dieses Spannungsbild gestattet jetzt mit Hilfe des auf Seite 59 bewiesenen Satzes

$$\sigma_{AB} = \sigma_{BA}$$

die Berechnung der Kantenpressung an der Stelle  $A$  infolge beliebiger Belastungen des Pfeilers. Ist nämlich  $\sigma'$  die einem Punkte  $B$  entsprechende Ordinate der Spannungslinie  $gg$ , so erzeugt ein in  $A$  angreifender Druck  $N=1$  an der Stelle  $B$  die Spannung  $\sigma'$ , und es ruft deshalb ein in  $B$  angreifender Druck  $N=1$  in  $A$  ebenfalls die Spannung  $\sigma'$  hervor. Wirken also auf den Pfeiler eine Reihe von Drücken  $N_1, N_2, N_3, \dots$  so erhält man für die in  $A$  entstehende Druckspannung den Wert

$$\sigma = \Sigma N\sigma'.$$

Man nennt die Linie  $gg$  auch die *Einflußlinie* für die Spannung  $\sigma$  im Punkte  $A$ .

Wird der Einfluß eines Momentes  $M$  gesucht, welches in einer Ebene liegt, die den Querschnitt in der Geraden  $ll$  schneidet und zum Querschnitte rechtwinklig ist, so ersetze man  $M$  durch ein Kräftepaar  $Na$  mit beliebig großem Arme  $a$  und lege den Angriffspunkt der einen der beiden, zum Querschnitte rechtwinkligen Gegenkräfte  $N$  in

\*)  $1^{t/qm} = 0,1^{k/qcm}$ .



den Schnittpunkt der Geraden  $ll$  und  $nn$ . Man findet dann für  $\sigma_A$  den Wert

$$\sigma_A = N\sigma'' = \frac{M\sigma''}{a}.$$

## § 10.

### Der Kern des Querschnitts.

**45. Erklärungen. Bestimmung des Kerns für einen beliebigen Querschnitt.** Schneidet die Nulllinie  $nn$  den Querschnitt, so besitzen die Spannungen  $\sigma$  in den durch die  $nn$  getrennten Teilen des Querschnitts verschiedene Vorzeichen. In demjenigen Teile, welcher den Angriffspunkt  $K$  enthält, herrschen Zug- oder Druckspannungen, je nachdem die in  $K$  wirksame Längskraft  $N$  positiv oder negativ ist.

Nähert sich der Angriffspunkt dem Schwerpunkte  $S$  des Querschnitts, so entfernt sich die Nulllinie von  $S$ . Von dem Augenblicke an, in welchem die Nulllinie bei dieser Bewegung den Querschnitt berührt, ohne ihn zu schneiden, besitzen die Spannungen  $\sigma$  in allen Punkten des Querschnitts dasselbe Vorzeichen wie die Längskraft  $N$ .

Betrachtet man nun alle möglichen den Querschnitt berührenden, *aber nicht schneidenden* Geraden der Reihe nach als Nulllinien und bestimmt die zugehörigen Angriffspunkte, so begrenzt der Ort dieser Punkte denjenigen Teil des Querschnitts, innerhalb dessen der Angriffspunkt  $K$  einer Längskraft  $N$  liegen muß, wenn alle durch diese Kraft in dem Querschnitte hervorgerufenen Spannungen dasselbe Vorzeichen haben sollen wie  $N$ . Dieser Teil des Querschnitts heißt der *Kern*, und die von jenen den Querschnitt berührenden aber nicht schneidenden Geraden eingehüllte Linie wollen wir die *Umhüllungslinie* des Querschnittes nennen.

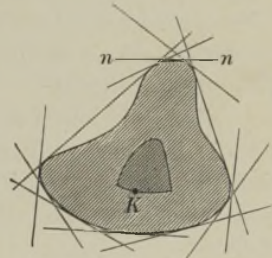


Fig. 70.

Der Kern ist u. a. von Bedeutung für die Beurteilung der Steinbauten. Soll z. B. der durch einen Druck  $N$  beanspruchte Querschnitt eines gemauerten Pfeilers nur Druckspannungen erfahren, so muß der Angriffspunkt von  $N$  innerhalb des Kerns liegen.

Wird der Kern eines von geraden Linien begrenzten Querschnitts (Fig. 71) gesucht, so genügt es, die Seiten  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DE$ ,  $EA$  der Umhüllungslinie  $ABCDEA$  der Reihe nach als Nulllinien anzu-

sehen und die ihnen entsprechenden Angriffspunkte  $(ab)$ ,  $(bc)$ ,  $(cd)$ ,  $(de)$ ,  $(ea)$  zu bestimmen. Die Verbindungslinien  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$  dieser Punkte umschließen den Kern. Denn, während sich die auf dem

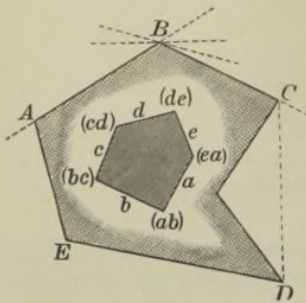


Fig. 71.

Umfange des Querschnittes rollende Nulllinie aus der Lage  $AB$  um den Eckpunkt  $B$  in die Lage  $BC$  dreht, beschreibt der Angriffspunkt die Verbindungslinie  $b$  der Punkte  $(ab)$  und  $(bc)$ ; dreht sie sich aus der Lage  $BC$  um den Punkt  $C$  in die Lage  $CD$ , so beschreibt der Angriffspunkt die Gerade  $c$  u. s. w.

Nun wurde aber früher bewiesen, daß sich bei der Drehung einer Nulllinie um einen festen Punkt der zugehörige

Angriffspunkt auf der jenem Drehpunkte entsprechenden Nulllinie bewegt, und hieraus folgt, daß man den Kern auch durch Bestimmung der den Eckpunkten  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  entsprechenden Nulllinien  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$  finden kann.

Es gilt die vorstehende Betrachtung auch für von krummen Linien eingeschlossene Querschnitte, da diese als von unendlich kurzen Geraden begrenzt angesehen werden dürfen, und man darf deshalb ganz allgemein den Kern durch den folgenden Doppelsatz erklären:

Rollt die Nulllinie auf der Umhüllungslinie des Querschnitts, so beschreibt der Angriffspunkt den Umfang des Kerns.	Beschreibt der Angriffspunkt die Umhüllungslinie des Querschnitts, so rollt die Nulllinie auf dem Umfang des Kerns.
---	---

Hiermit ist die Aufgabe, den Kern eines Querschnitts zu bestimmen, auf die im vorigen Paragraph behandelte Aufgabe zurückgeführt, die einem gegebenen Angriffspunkte  $K$  entsprechende Nulllinie zu ermitteln oder umgekehrt zu einer gegebenen Nulllinie den Angriffspunkt zu suchen.

Ist z. B. der Querschnitt auf seine Haupt-Schwerachsen (1) und (2) bezogen, Fig. 72, und sind  $i_1$  und  $i_2$  die Haupt-Trägheitshalbmesser

$$i_1 = \sqrt{\frac{J_1}{F}}, \quad i_2 = \sqrt{\frac{J_2}{F}},$$

sind ferner  $v_1$  und  $u_1$  die Koordinaten des Angriffspunktes  $K$  und schneidet die Nulllinie auf den Hauptachsen die Strecken

$$\overline{SV} = v_n \quad \text{und} \quad \overline{SU} = u_n$$

ab, so ist nach Gleich. (7) Seite 59

$$v_1 v_n = -i_1^2$$

$$u_1 u_n = -i_2^2;$$

es ist also

$i_1$  die mittlere Proportionale zu  $v_1$  und  $v_2$   
 $i_2$  " " " " "  $u_1$  " "  $u_2$

und es ergibt sich das folgende zeichnerische Verfahren:

Man trage auf den Hauptachsen (1) und (2) die Strecken  $\overline{SA} = i_1$  und  $\overline{SB} = i_2$  auf (gleichgültig, auf welcher Seite von  $S$ ), verbinde die Fußpunkte  $V$  und  $U$  der Koordinaten  $u_1$  und  $v_1$  des Angriffspunktes  $K$  mit  $A$  bezieh.  $B$  und errichte in  $A$  und  $B$  auf den Geraden  $VA$  und  $UB$  Lote, welche die Hauptachsen in den Punkten  $V'$  und  $U'$  schneiden. Dann ist

$i_1 = \overline{SA}$  die mittlere Proportionale zu  $\overline{SV}$  und  $\overline{SV'}$

$i_2 = \overline{SB}$  die mittlere Proportionale zu  $\overline{SU}$  und  $\overline{SU'}$

und hieraus folgt, daß  $U'$  und  $V'$  Punkte der gesuchten Nulllinie sind.

Bei großer Entfernung des Angriffspunktes  $K$  vom Schwerpunkte  $S$  ist das beschriebene Verfahren un bequem. Man bestimme dann zu irgend einem auf der Geraden  $SK$

und näher an  $S$  gelegenen Punkte  $K'$  die Nulllinie  $n'n'$  (Fig. 73) und beachte, daß die zu  $K$  gehörige  $nn$  parallel zur  $n'n'$  ist, und daß sich verhält:  $\overline{SL} : \overline{SL'} = \overline{SK'} : \overline{SK}$ , wobei  $L$  und  $L'$  die Punkte sind, in denen die Kraftlinie  $SK$  von den Nulllinien  $nn$  und  $n'n'$  geschnitten sind. Liegt  $K$  im Unendlichen, so geht die  $nn$  durch den Schwerpunkt  $S$ ; sie bleibt aber parallel zur  $n'n'$ . Dieser Fall liegt vor, sobald  $N=0$  ist und der Querschnitt nur durch ein Biegemoment  $M$  beansprucht wird.

Wie man nun die umgekehrte Aufgabe löst, zu einer gegebenen Nulllinie  $nn$  den Angriffspunkt  $K$  zu suchen, bedarf keiner Erläuterung.

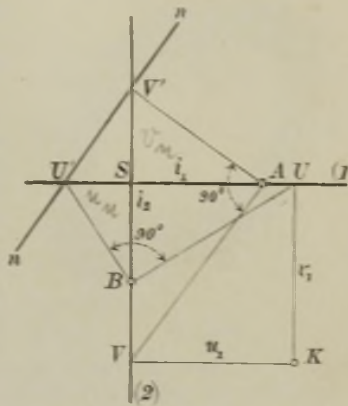


Fig. 72.

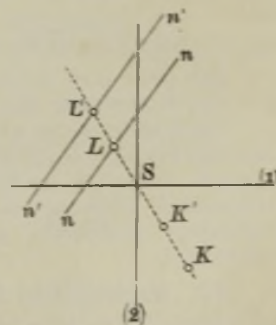


Fig. 73.

46. Bestimmung der Nulllinie mit Hilfe der Polaren-Theorie. Legt man durch den Schwerpunkt  $S$  des Querschnittes eine Parallele  $n'm'$  zu der irgend einem Angriffspunkte  $K$  entsprechenden Nulllinie  $nn$ , Fig. 74, so ist



nach Seite 61 das auf die Achsen  $SK$  und  $u'u'$  bezogene Zentrifugalmoment des Querschnittes  $= 0$ , und hieraus folgt nach No. 36, daß die Richtungen  $SK$  und  $u'u'$  bezüglich der Zentralellipse einander konjugiert sind.

Die in den Schnittpunkten  $A$  und  $B$  von Kraftlinie und Zentralellipse an die letztere gelegten Tangenten sind also parallel zur  $nn$ .

Der mit der Kraftlinie zusammenfallende Ellipsenhalmesser  $\overline{SA} = \overline{SB}$  ist gleich dem auf die  $u'$ -Achse bezogenen Trägheitshalmmesser  $i'$  des Querschnittes, und die Ordinate der Nulllinie ist:  $\overline{SD} = \frac{i'^2}{f}$ . Bestimmt man nun auf der Kraftlinie einen bezüglich des Schwerpunktes  $S$  symmetrisch zu  $K$  gelegenen Punkt  $K'$ , so werden die Punkte  $A$  und  $B$  durch die Punkte  $K'$  und  $D$  harmonisch getrennt, und hieraus folgt, daß die durch den unendlich fernen Punkt der in  $A$  und  $B$  an die Zentralellipse gelegten Tangenten gehende Nulllinie die Polare des Punktes  $K'$  in Bezug auf die Zentralellipse ist. Denn die Polare eines Punktes bezüglich einer Kurve zweiter Ordnung ist durch den Satz erklärt:

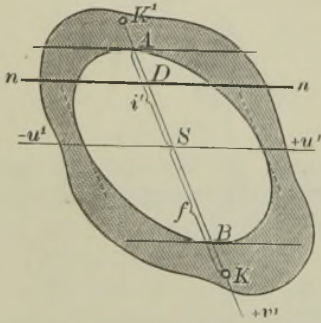


Fig. 74.

Legt man von irgend einem Punkte  $K'$  aus beliebig viele Sekanten durch eine Kurve zweiter Ordnung und bestimmt auf jeder Sekante den Punkt  $D$ , welcher von  $K'$  durch die beiden Kurvenpunkte  $A$  und  $B$  harmonisch getrennt ist, so liegen alle Punkte  $D$  auf einer Geraden, welche die Polare des Punktes  $K'$  in Bezug auf jene Kurve zweiter Ordnung genannt wird, und welche den Schnittpunkt der in den Punkten  $A$  und  $B$  einer beliebigen Sekante an die Kurve gelegten Tangenten enthält.

Legt man von irgend einem Punkte  $K'$  aus beliebig viele Sekanten durch eine Kurve zweiter Ordnung und bestimmt auf jeder Sekante den Punkt  $D$ , welcher von  $K'$  durch die beiden Kurvenpunkte  $A$  und  $B$  harmonisch getrennt ist, so liegen alle Punkte  $D$  auf einer Geraden, welche die Polare des Punktes  $K'$  in Bezug auf jene Kurve zweiter Ordnung genannt wird, und welche den Schnittpunkt der in den Punkten  $A$  und  $B$  einer beliebigen Sekante an die Kurve gelegten Tangenten enthält.

Aus dem Hauptsatze der Polarentheorie, nämlich :

*Die Polaren sämtlicher Punkte einer Geraden gehen durch den Pol jener Geraden* | *Die Pole sämtlicher Strahlen eines Punktes liegen auf der Polaren dieses Punktes*

folgt unmittelbar der in No. 45 bewiesene Doppelsatz.

Man nennt auch die Nulllinie die *Gegenpolare* des Angriffspunktes und umgekehrt den Angriffspunkt den *Gegenpol* der Nulllinie.

Die Bestimmung der Gegenpolare  $nn$  ist eine Aufgabe ersten Grades, deren einfachste Lösung in der Festlegung der Nulllinie mittels der in ihr liegenden Gegenpole  $U'$  und  $V'$  zweier Geraden  $KU$  und  $KV$  besteht, die durch den Angriffspunkt  $K$  gehen und zu irgend zwei in Bezug auf die Zentralellipse einander konjugierten Richtungen (beispielsweise zu den Schwerpunkts-Hauptachsen) parallel sind.

**47. Rechnerische Bestimmung des Kerns.** Ist der Querschnitt auf ein rechtwinkliges Achsenkreuz  $x, y$  bezogen, und sind  $x_k, y_k$  die Koordinaten des Angriffspunktes  $K$ , so lautet die Gleichung der zugehörigen Nulllinie (Seite 64)

$$0 = \frac{1}{F} + y_k \frac{y - x \operatorname{tg} \alpha_n}{J_x - J_{xy} \operatorname{tg} \alpha_n}$$



oder

$$0 = \frac{1}{F} + x_k \frac{x - y \cotg \alpha_n}{J_y - J_{xy} \cotg \alpha_n}.$$

Ferner besteht, da Kraftlinie und Nulllinie zugeordnete Achsen sind, die Bezeichnung

$$(1) \quad \frac{y_k}{x_k} = \operatorname{tg} \alpha_n = \frac{J_x - J_{xy} \operatorname{tg} \alpha_n}{J_{xy} - J_y \operatorname{tg} \alpha_n} = \frac{J_x \cotg \alpha_n - J_{xy}}{J_{xy} \cotg \alpha_n - J_y}.$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen findet man zu einer gegebenen Nulllinie die folgenden Angriffspunkts-Koordinaten:

$$(2) \quad \begin{cases} y_k = -\frac{1}{F} \frac{J_x - J_{xy} \operatorname{tg} \alpha_n}{y - x \operatorname{tg} \alpha_n} \\ x_k = -\frac{1}{F} \frac{J_{xy} - J_y \operatorname{tg} \alpha_n}{y - x \operatorname{tg} \alpha_n} \end{cases}$$

oder

$$(3) \quad \begin{cases} y_k = -\frac{1}{F} \frac{J_{xy} - J_x \cotg \alpha_n}{x - y \cotg \alpha_n} \\ x_k = -\frac{1}{F} \frac{J_y - J_{xy} \cotg \alpha_n}{x - y \cotg \alpha_n} \end{cases}$$

In diese Formeln sind für  $x$  und  $y$  die Koordinaten irgend eines Punktes der Nulllinie einzusetzen. Beide Formelgruppen liefern dasselbe Ergebnis. Ist  $\alpha_n$  gleich oder nahezu  $90^\circ$ , so wende man die Formeln (3) an; ist  $\alpha_n$  gleich oder nahezu Null, so muß man die Formeln (2) benutzen.

Für  $\alpha_n = 0$  erhält man

$$(4) \quad y_k = -\frac{J_x}{Fy}, \quad x_k = -\frac{J_{xy}}{Fy},$$

für  $\alpha_n = 90^\circ$  wird

$$(5) \quad y_k = -\frac{J_{xy}}{Fx}, \quad x_k = -\frac{J_y}{Fx}.$$

Rollt die Nulllinie über einen Kreisbogen vom Halbmesser  $r$  und sind  $x_m, y_m$  die Koordinaten des Mittelpunktes, Fig. 75, so ist

$$\begin{aligned} y &= y_m - r \cos \alpha_n \\ x &= x_m + r \sin \alpha_n \end{aligned}$$

und man erhält

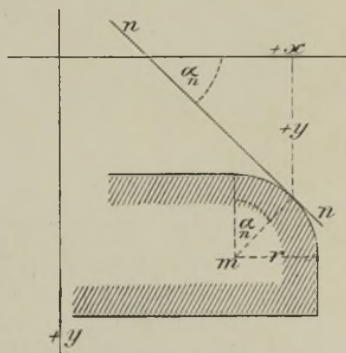


Fig. 75.

$$(6) \quad \begin{cases} -F'y_k = \frac{J_x \cos \alpha_n - J_{xy} \sin \alpha_n}{y_m \cos \alpha_n - x_m \sin \alpha_n - r} \\ -F'r_k = \frac{J_{xy} \cos \alpha_n - J_y \sin \alpha_n}{y_m \cos \alpha_n - x_m \sin \alpha_n - r} \end{cases}$$

Mit Hilfe dieser Formeln lassen sich bei der Berechnung der Kernfiguren der Normalprofile der Walzeisen die Abrundungen der Ecken berücksichtigen.

**48. Benutzung des Kerns zur Ermittlung der Spannungen  $\sigma$ .** Bezieht man den in irgend einem Punkte  $K$  durch eine Längskraft  $N$  beanspruchten Querschnitt auf die Kraftlinie  $SK$  und die zur Nulllinie parallele Schwerachse  $u'$  als Koordinatenachsen, so findet man die Spannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  in den von der Achse  $u'$  entferntesten Punkten  $L_1$  und  $L_2$  des Querschnitts (nach Gleich. 13, Seite 61):

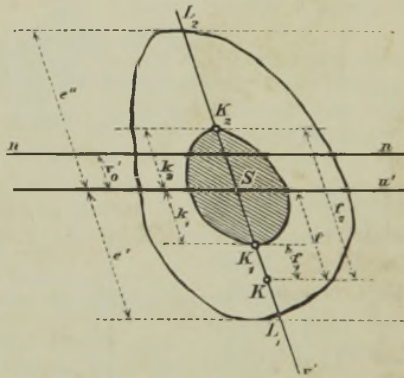


Fig. 76.

$$(1) \quad \sigma_1 = \frac{N}{F} + \frac{Nfe'}{J_u'}; \quad \sigma_2 = \frac{N}{F} - \frac{Nfe''}{J_u'}$$

Die auf der Kraftlinie liegenden Kernpunkte  $K_1$  und  $K_2$  entsprechen beziehungsweise den durch  $L_2$  und  $L_1$  parallel zur Geraden  $u'$  gedachten Nulllinien als Angriffspunkte, und es gelten deshalb für die zugehörigen Kernhalbmesser  $k_1$  und  $k_2$  die Formeln:

$$(2) \quad k_2 = \frac{J_u'}{Fe'}; \quad k_1 = \frac{J_u'}{Fe''}$$

woraus dann folgt:  $\frac{J_u'}{e'} = Fk_2; \quad \frac{J_u'}{e''} = Fk_1$ .

Führt man diese Werte in die Gleichungen (1) ein, so gehen diese über in:

$$(3) \quad \sigma_1 = \frac{N}{F} \frac{f + k_2}{k_2}; \quad \sigma_2 = -\frac{N}{F} \frac{f - k_1}{k_1},$$

und hierfür kann man schreiben:

$$(4) \quad \sigma_1 = \frac{N}{F} \frac{f_2}{k_2}; \quad \sigma_2 = -\frac{N}{F} \frac{f_1}{k_1},$$

wobei  $f_1$  und  $f_2$  die Abstände des Angriffspunktes  $K$  von den auf der Kraftlinie liegenden Kernpunkten  $K_1$  und  $K_2$  bedeuten.

Ist also der Kern eines Querschnittes gegeben, so ist man mit Hilfe der Gleichungen (4) im stande, die Spannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  auf eine sehr einfache Weise zu bestimmen, ohne daß man nötig hat, die Richtung der Nulllinie und die äußersten Querschnittspunkte  $L_1$  und  $L_2$  aufzusuchen. Will man  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  nach Berechnung der im Schwerpunkte  $S$  herrschenden Spannung  $\sigma_0 = \frac{N}{F}$  durch Zeich-

nung finden, so trage man auf irgend einer von  $S$  ausgehenden Geraden die Spannung  $\sigma_0 = \overline{SR}$  auf, Fig. 77, lege durch  $K$  zur  $SR$  eine Parallele und ziehe von  $R$  aus durch die Kernpunkte  $K_1$  und  $K_2$  gerade Linien, welche diese Parallele in  $T_1$  und  $T_2$  schneiden. Man findet:  $\sigma_1 = \overline{KT_2}$  und  $\sigma_2 = \overline{KT_1}$ .

Zuweilen sind die auf die Kernpunkte  $K_1$  und  $K_2$  bezogenen Angriffsmomente  $M_1 = Nf_1$  und  $M_2 = Nf_2$  bekannt, ohne daß  $N$ ,  $f_1$ ,  $f_2$  einzeln gegeben sind. Dann findet man die Spannungen  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  (am besten durch Rechnung) mittels der Formeln

$$(5) \quad \sigma_1 = \frac{M_2}{Fk_2}; \quad \sigma_2 = -\frac{M_1}{Fk_1},$$

welche namentlich für die Theorie der Bogenbrücken von großem Werte sind.

Die Benutzung des Kerns bietet bei der Berechnung der Spannungen  $\sigma$  gegenüber den im § 9 mitgeteilten Verfahren nur dann Vorteile, wenn sich der Kern schnell zeichnen läßt, oder wenn die größten Spannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  für verschiedene Lagen des Angriffspunktes miteinander zu vergleichen sind.

Wird z. B. der Querschnitt bei wechselnder Lage des Angriffspunktes durch eine unveränderliche Längskraft  $N$  und ein unveränderliches Moment  $M$ , welche beide positiv sein mögen, beansprucht, so

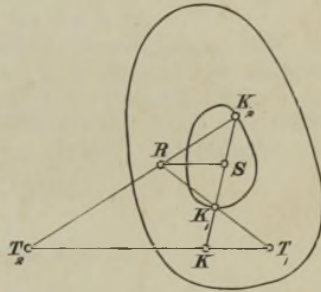


Fig. 77.



nimmt die Spannung  $\sigma_1 = \frac{N}{F} + \frac{M}{Fk_2}$  den größten oder den kleinsten Wert an, je nachdem die Kraftlinie mit dem kleinsten oder größten Kernhalbmesser zusammenfällt.

**49. Die  $W$ -Fläche.** Die Produkte  $Fk_2$  und  $Fk_1$  sind nach No. 43 gleich den der fraglichen Kraftlinie entsprechenden Widerstandsmomenten  $W_1$  und  $W_2$ . Man kann also auch den Kern in der Weise bestimmen, daß man nach dem im § 9 gezeigten Verfahren die Widerstandsmomente für hinreichend viele Kraftlinien berechnet. Für einen von Geraden begrenzten Querschnitt genügt es, die Rechnung für die durch die Eckpunkte des Umfangs gehenden Kraftlinien auszuführen.

Sehr oft erweist es sich als zweckmäßig, nicht die Strecken  $k$  sondern Strecken  $W = Fk$  aufzutragen; an Stelle des Kerns entsteht dann die  $W$ -Fläche.

**50. Zahlenbeispiel.** *Rechnerische Bestimmung der  $W$ -Fläche und des Kerns für das in Fig. 78 dargestellte Z-Eisen.*

Auf Seite 42 erhielten wir für diesen Querschnitt

$$J_x = 928,423, \quad J_y = 332,948, \quad J_{xy} = 427,133.$$

Wir weisen nun der Nulllinie der Reihe nach die Lagen (1) (2) (3) zu und berechnen mit Hilfe der in No. 47 abgeleiteten Formeln die Koordinaten  $y = Fy_k$ ,  $x = Fx_k$  der Eckpunkte 1, 2, 3 der  $W$ -Fläche und die Längen der vom Schwerpunkte nach diesen Punkten führenden Fahrstrahlen  $Fk_1$ ,  $Fk_2$ ,  $Fk_3$ .

$$\text{Nulllinie (1)} \quad \alpha_n = 0, \quad y = -7,0 \text{ cm}$$

$$y_1 = Fy_{k_1} = -\frac{J_x}{y} = +\frac{928,423}{7,0} = 132,632 \text{ cm}^3$$

$$x_1 = Fx_{k_1} = -\frac{J_{xy}}{y} = +\frac{427,133}{7,0} = 61,019 \text{ ,,}$$

$$\text{tg } \alpha_1 = \frac{y_1}{x_1} = \frac{928,423}{427,133}, \quad \alpha_1 = 65^\circ 17' 40''$$

$$W_1 = Fk_1 = \frac{Fy_{k_1}}{\sin \alpha_1} = 146,00 \text{ cm}^3$$

$$\text{Nulllinie (2)} \quad \alpha_n = 90^\circ, \quad x = -7,5 \text{ cm}$$

$$y_2 = Fy_{k_2} = -\frac{J_{xy}}{x} = +\frac{427,133}{7,5} = 56,951 \text{ cm}^3$$

$$x_2 = Fx_{k_2} = -\frac{J_y}{x} = +\frac{332,948}{7,5} = 44,393 \text{ ,,}$$

$$\text{tg } \alpha_2 = \frac{y_2}{x_2} = \frac{427,133}{332,948}; \quad \alpha_2 = 52^\circ 3' 50''$$

$$W_2 = Fk_2 = \frac{Fy_{k_2}}{\sin \alpha_2} = 72,21 \text{ cm}^3$$

$$\text{Nulllinie (3)} \quad \text{tg } \alpha_n = 1,88220, \quad \alpha_n = 62^\circ 1' 7'', \quad y = +7,0, \quad x = -0,5^*)$$

\*) Koordinaten eines beliebigen Punktes der Nulllinie; wir haben den unteren linken Eckpunkt des Querschnittes gewählt. Die Berechnung von  $\text{tg } \alpha_n$  ist oben nicht weiter ausgeführt, sie bereitet keine Schwierigkeit.  $\alpha_n$  ist Neigungswinkel einer Kreistangente.



$$y_3 = F y_{k3} = - \frac{J_x - J_{xy} \operatorname{tg} \alpha_n}{y - x \operatorname{tg} \alpha_n}$$

$$= - \frac{928,423 - 427,133 \cdot 1,88220}{7,0 + 0,5 \cdot 1,88220} = - 15,675 \text{ cm}^3$$

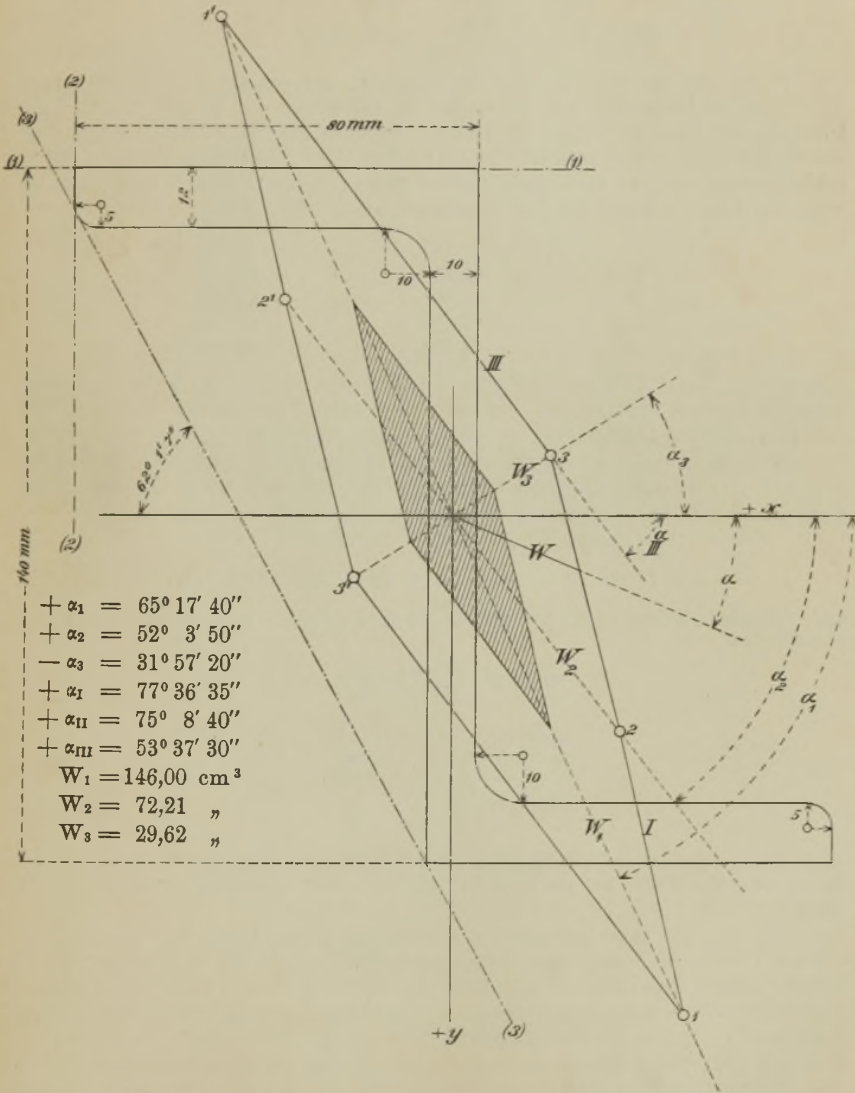


Fig. 78. ( $100 \text{ cm}^3 = 50 \text{ mm}$ )

$$x_3 = F x_{k_3} = - \frac{J_{xy} - J_y \operatorname{tg} \alpha_n}{y - x \operatorname{tg} \alpha_n}$$

$$= - \frac{427,133 - 332,948 \cdot 1,88220}{0,7 + 0,5 \cdot 1,88220} = + 25,128 \text{ cm}^3$$

$$\operatorname{tg} \alpha_3 = \frac{y_3}{x_3} = \frac{-15,675}{25,128}, \alpha_3 = -31^\circ 57' 20''$$

$$W_3 = F k_3 = \frac{F y_{k_3}}{\sin(-\alpha_3)} = 29,62 \text{ cm}^3.$$

Dreht sich die Nulllinie aus der Lage (1) um die Querschnittsecke in die Lage (2), so beschreibt der zugehörige Angriffspunkt die Gerade 1—2. Beim Übergang aus Lage (2) in Lage (3) rollt die Nulllinie über einen Kreisbogen, dessen Zentriwinkel gleich  $90^\circ - 62^\circ 1' 7'' = 27^\circ 58' 53''$  ist. Der zugeordnete Angriffspunkt bewegt sich auf einer ganz flachen Kurve, deren Ordinaten sich leicht mit Hilfe der Formeln 6 auf Seite 78 berechnen lassen. Man findet

für $\alpha_n = 85^\circ$	$F y_k = + 49,766 \text{ cm}^3$ ,	$F x_k = + 42,525 \text{ cm}^3$ ,
„ $80^\circ$	„ $+ 41,181$ „ „	„ $+ 40,275$ „
„ $75^\circ$	„ $+ 30,596$ „ „	„ $+ 37,481$ „
„ $70^\circ$	„ $+ 17,029$ „ „	„ $+ 33,799$ „
„ $65^\circ$	„ $- 1,256$ „ „	„ $+ 28,993$ „

Es ist stets zulässig, die durch diese Punkte bestimmte Kurve durch die Gerade 2—3 zu ersetzen.

Nach Auftragung der die  $W$ -Fläche begrenzenden 6 Geraden kann man die zu den verschiedenen Kraftlinien gehörigen Widerstandsmomente mit dem Zirkel abgreifen. Will man rechnen, so bestimme man mit Hilfe der oben angegebenen Koordinaten der Angriffspunkte 1, 2, 3 die Neigungswinkel der drei Geraden

$$\begin{array}{ccc} 1-2 & 2-3 & 3-1' \\ \alpha_I = 77^\circ 36' 35'', & \alpha_{II} = 75^\circ 8' 40'', & \alpha_{III} = 53^\circ 37' 30''. \end{array}$$

Der Sinussatz liefert dann für die diese drei Geraden schneidenden Kraftlinien die Werte

$$W = W_1 \frac{\sin(\alpha_I - \alpha)}{\sin(\alpha_I - \alpha)}$$

$$W = W_2 \frac{\sin(\alpha_{II} - \alpha)}{\sin(\alpha_{II} - \alpha)}$$

$$W = W_3 \frac{\sin(\alpha_{III} - \alpha)}{\sin(\alpha_{III} - \alpha)},$$

wo  $\alpha$  den veränderlichen Neigungswinkel der Kraftlinie bedeutet. In der folgenden Tabelle sind die Werte für die Winkel  $+90^\circ$  bis  $-90^\circ$ , immer um  $5^\circ$  fortschreitend, angegeben.

Bei der sehr wünschenswerten Ausführung dieser Arbeit für die deutschen Normal-Profile wird man den Zwischenraum dort, wo die Werte sich mit  $\alpha$  schnell ändern (besonders in der Nähe der Spitze 1), wohl etwas enger wählen. Man vergl. die schon einmal erwähnte, von Meyerhoff berechnete Tabelle für Schiffbau- $\square$ -Eisen in der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, 1899, Seite 607, mit deren Zahlen die von uns berechneten gut übereinstimmen.

Dividiert man die Widerstandsmomente  $W_1, W_2, W_3$  durch  $F = 31,1$ , so erhält man die Kernradien  $k_1 = 4,70 \text{ cm}$ ,  $k_2 = 2,32 \text{ cm}$ ,  $k_3 = 0,95 \text{ cm}$ . Der Kern ist in Fig. 78 schraffiert worden.

$\alpha$	$W$	$\alpha$	$W$	$\alpha$	$W$
+ 90°	49,79	+ 30°	39,93	- 35°	29,54
+ 85°	56,72	+ 25°	36,88	- 40°	29,59
+ 80°	66,48	+ 20°	34,50	- 45°	29,87
+ 75°	81,02	+ 15°	32,64	- 50°	30,38
+ 70°	104,74	+ 10°	31,20	- 55°	31,16
+ 65° 17' 40"	146,00 = $W_1$	+ 5°	30,10	- 60°	32,23
+ 65°	142,64	0°	29,29	- 65°	33,64
+ 60°	102,93	- 5°	28,73	- 70°	35,64
+ 55°	81,00	- 10°	28,41	- 75°	37,80
+ 52° 3' 50"	72,21 = $W_2$	- 15°*	28,31 = $W_{min}$	- 80°	40,79
+ 50°	66,22	- 20°	28,42	- 85°	44,66
+ 45°	56,37	- 25°	28,76	- 90°	49,79
+ 40°	49,18	- 30°	29,33		
+ 35°	43,91	- 31° 57' 20"	29,62 = $W_3$		

Die vorstehenden Rechnungen enthalten reichlich viel Dezimalstellen; es soll deshalb noch gezeigt werden, daß man vollkommen brauchbare Ergebnisse auch dann erhält, wenn man auf die Abrundung der Ecken des Querschnitts keine Rücksicht nimmt und die ganze Zahlenrechnung so einrichtet, daß man immer nur zwei- oder dreistellige Zahlen zu multiplizieren oder zu dividieren hat. Man kann dann die ganze Arbeit sehr schnell mit Hilfe einer Rechentafel ausführen.\*\*)

Auf Seite 42 erhielten wir für den nicht abgerundeten Querschnitt:

$$J_x = 919, J_y = 339, J_{xy} = 430.$$

Nun ergibt sich für die Nulllinie (1):

$$y_1 = F y_{k1} = \frac{919}{7,0} = 131 \text{ cm}^3$$

$$x_1 = F x_{k1} = \frac{430}{7,0} = 61 \text{ ,,}$$

$$\text{tg } \alpha_1 = \frac{919}{430} = 2,14, \alpha_1 = 65^\circ$$

$$W_1 = \sqrt{131^2 + 61^2} = 145 \text{ cm}^3 \text{ (anstatt 146,00),}$$

für die Nulllinie (2):

$$y_2 = F y_{k2} = \frac{430}{7,5} = 57 \text{ cm}^3$$

$$x_2 = F x_{k2} = \frac{339}{7,5} = 45 \text{ ,,}$$

$$\text{tg } \alpha_2 = \frac{430}{339} = 1,27, \alpha_2 = 51^\circ 50'$$

$$W_2 = \sqrt{57^2 + 45^2} = 73 \text{ cm}^3 \text{ (anstatt 72,21),}$$

\*) Genau wird  $W$  ein Minimum für  $\alpha = 90^\circ - 75^\circ 8' 40'' = 14^\circ 51' 20''$ .

\*\*) Wir empfehlen hierzu die *Rechentafel von Dr. Zimmermann*, Berlin, Verlag von W. Ernst & Sohn, oder die große *Rechentafel von Crelle*, Berlin, Verlag von G. Reimer.

für die Nulllinie (3):  $\operatorname{tg} \alpha_3 = \frac{12,8}{7,0} = 1,82$

$$y_3 = F y_{k_3} = - \frac{919 - 430 \cdot 1,82}{7,0 + 0,5 \cdot 1,82} = - \frac{136}{7,91} = - 17 \text{ cm}^3$$

$$x_3 = F x_{k_3} = - \frac{430 - 339 \cdot 1,82}{7,0 + 0,5 \cdot 1,82} = + \frac{187}{7,91} = + 24 \text{ „}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_3 = - \frac{136}{187} = - 0,72, \quad \alpha_3 = 35^\circ 50'$$

$$W_3 = \sqrt{17^2 + 24^2} = 29 \text{ cm}^3 \text{ (anstatt } 29,62\text{)}.$$

Die Ergebnisse dieser kurzen Rechnung sind genau so viel wert, wie der zuerst angestellten genaueren Untersuchung. Man darf nie außer acht lassen, daß die hier vorgetragene Lehre von der Biegefestigkeit auf der Voraussetzung einer linearen Spannungsverteilung beruht und — ganz besonders bei der vorliegenden Querschnittsform — nur als Annäherungsrechnung angesehen werden darf. Dazu kommt, daß die von den Walzwerken gelieferten Profile nie genau mit den im Profilbuch beschriebenen übereinstimmen — nach den Erfahrungen des Verfassers fallen sie stets etwas stärker aus — und daß schließlich eine scharfe Bestimmung der Richtung der Kraftlinie in Wirklichkeit nie möglich ist. Aus diesem letzten Grunde wird man, um sicher zu gehen, die Kraftlinie stets um einige Grade nach der Seite hin gedreht denken, nach welcher das Widerstandsmoment abnimmt.

#### 51. Analytische Bestimmung des Kerns für einige häufiger vorkommende Querschnitte.

1. *Das Dreieck.* Fig. 79. Um den Kern zu ermitteln, genügt es, die eine Seite, z. B.  $b$ , als Nulllinie zu betrachten und den zugehörigen Angriffspunkt

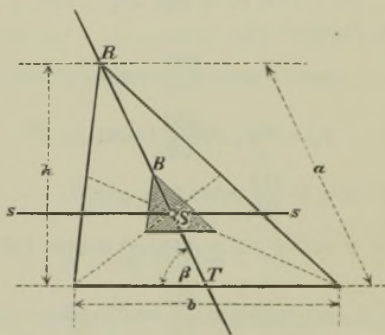


Fig. 79.

punkt  $B$  zu bestimmen. Er liegt auf der zur Seite  $b$  gehörigen Transversale  $RT = a$ , weil das Zentrifugalmoment des Querschnitts in Bezug auf diese Transversale und die zu  $b$  parallele Schwerachse  $ss$  des Dreiecks als Koordinatenachsen  $= 0$  ist. Der Abstand des Punktes  $B$  vom Schwerpunkte  $S$  ist  $\overline{SB} = \frac{i'^2}{\frac{1}{3}a} = \frac{3J'}{Fa}$ , wobei  $J'$  das für schiefwinklige Koordinaten auf die Achse  $ss$  bezogene Trägheitsmoment ist. Für rechtwinklige Koordinaten wurde in



Bezug auf die Achse  $ss$  auf Seite 31 gefunden:  $J = \frac{bh^3}{36} = \frac{ba^3 \sin^3 \beta}{36}$ , und hieraus folgt (nach Gleich. 10 auf Seite 38):

$$J' = J \operatorname{cosec}^2 \beta = \frac{ba^3 \sin \beta}{36}. \text{ Wegen } F = \frac{ba \sin \beta}{2} \text{ ergibt sich mithin } \overline{SB} = \frac{a}{6}.$$

Bestimmt man auf die gleiche Weise die den übrigen Dreiecks-Seiten entsprechenden Kernpunkte, so findet man, daß der Kern ein Dreieck ist, dessen Seiten parallel zu den Querschnitts-Seiten sind, und dessen Schwerpunkt mit dem Querschnitts-Schwerpunkte zusammenfällt.

2. *Das Parallelogramm.* Fig. 80. Die zu den Seiten  $b$  und  $a$  parallelen Schwerachsen werden zu Koordinatenachsen gewählt; es entspricht ihnen das Zentrifugalmoment  $Z=0$ . Macht man  $b$  zur Nulllinie, so liegt der Angriffspunkt  $B$  auf der Mittellinie  $RT$  im Abstände  $\overline{SB} = \frac{i^2}{\frac{1}{2}a} = \frac{2J}{Fa}$  vom Schwerpunkte  $S$ . Nun ist, nach Seite 31, für die Achse  $ss$  und für rechtwinklige Koordinaten:  $J = \frac{bh^3}{12} = \frac{ba^3 \sin^3 \beta}{12}$ , mithin  $J' = J \operatorname{cosec}^2 \beta = \frac{ba^3 \sin \beta}{12}$ . Weiter ist  $F = bh = ba \sin \beta$ , also  $\overline{SB} = \frac{a}{6}$ . Ebenso lassen sich die den übrigen Seiten des Parallelogramms entsprechenden Kernpunkte bestimmen. Der Kern ist ein Parallelogramm, dessen Ecken auf den gewählten Koordinaten-Achsen liegen, und dessen Diagonalen die Längen  $\frac{1}{3}a$  und  $\frac{1}{3}b$  haben.

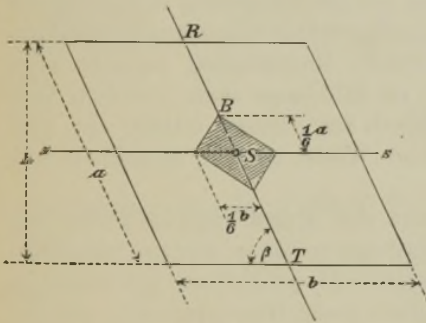


Fig. 80.

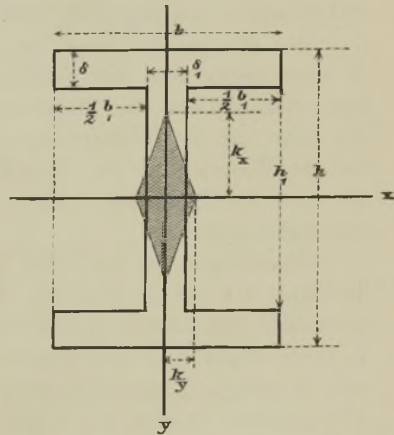


Fig. 81.

3. *Der I-Querschnitt.* Für die den Querschnitts-Seiten parallelen, in Fig. 81 mit  $x$  und  $y$  bezeichneten Schwerachsen, welche gleichzeitig Hauptachsen sind, findet man mit den angegebenen Bezeichnungen:

$$J_x = \frac{1}{12}(bh^3 - b_1h_1^3); \quad J_y = \frac{1}{12}(2\delta b^3 + h_1\delta_1^3).$$

Der Inhalt des Querschnitts ist:  $F = bh - b_1h_1$ . Der Kern ist ein Paral-

leogramm, dessen Ecken auf den Hauptachsen liegen, und dessen halbe Diagonalen die Längen haben

$$k_x = \frac{2J_x}{Fh} \text{ und } k_y = \frac{2J_y}{Fb}.$$

### § 11.

#### Druckbelastung außerhalb des Kerns bei Ausschluß von Zugfestigkeit.

**52. Lage der Nulllinie.** Bisher wurden die Spannungen  $\sigma$  für den Fall einer den Querschnitt schneidenden Nulllinie unter der Voraussetzung bestimmt, daß der Längskraft  $N$  sowohl durch Druckspannungen als auch durch Zugspannungen das Gleichgewicht gehalten wird. Es kommt aber auch vor, daß Zugspannungen nicht entstehen können, beispielsweise dann, wenn sich ein Stab mit seinem Endquerschnitte gegen ein ebenes Widerlager stützt, ohne mit diesem irgendwie verbunden zu sein. Liegt hierbei der Angriffspunkt  $K$  des auf den Querschnitt vom Widerlager ausgeübten Druckes  $N$  außerhalb des Kerns, so trennt die Nulllinie  $nn$  den Querschnitt in zwei Teile, von denen der eine, den Punkt  $K$  enthaltende, durch Druckspannungen (*Pressungen*) beansprucht wird, während der andere spannungslos ist.

Der gleiche Fall liegt vor, wenn bei der Verteilung eines Druckes  $N$  über einen von der Nulllinie geschnittenen Querschnitt eines gemauerten Pfeilers die Annahme fehlender Zugfestigkeit gemacht wird, die zwar mit der Wirklichkeit nicht im Einklange steht, trotzdem aber bei der Beurteilung der Druckfestigkeit des Pfeilers erlaubt ist, weil sie für die Druckspannungen höhere Werte als die tatsächlich entstehenden liefert.

Bezeichnen wir nun den Abstand des Angriffspunktes  $K$  von der Nulllinie  $nn$  mit  $f$ , Fig. 82, die Entfernung eines zur  $nn$  parallelen, unendlich schmalen Querschnittsstreifens  $dF$  von der  $nn$  mit  $x$  und die in allen Punkten dieses Streifens gleich große Druckspannung (welche wir in diesem Paragraph positiv annehmen) mit  $\sigma$ , so lauten die beiden Gleichungen, welche bei fehlender Zugfestigkeit ausdrücken, daß

- 1) die Summe der Kräfte  $\sigma dF$  gleich dem Drucke  $N$  ist,
- 2) die Summe der Momente der Kräfte  $\sigma dF$ , bezogen auf die  $nn$  gleich dem Momente  $Nf$  des Druckes  $N$  ist:

$$(1) \quad N = \int \sigma dF \text{ und } Nf = \int x \sigma dF,$$

wobei sich die Integrale nur über denjenigen Teil des Querschnittes erstrecken, welcher mit dem Angriffspunkte  $K$  auf derselben Seite der Nulllinie liegt.

Die Pressung  $\sigma$  folgt dem Gesetze:  $\sigma = Cx$ , wo  $C$  eine Konstante ist, welche sich aus der Gleichung (1) ergibt.

Man erhält:  $N = C \int x dF$ , mithin:

$$(2) \quad C = \frac{N}{\int x dF} \quad \text{also} \quad \sigma = \frac{Nx}{\int x dF}$$

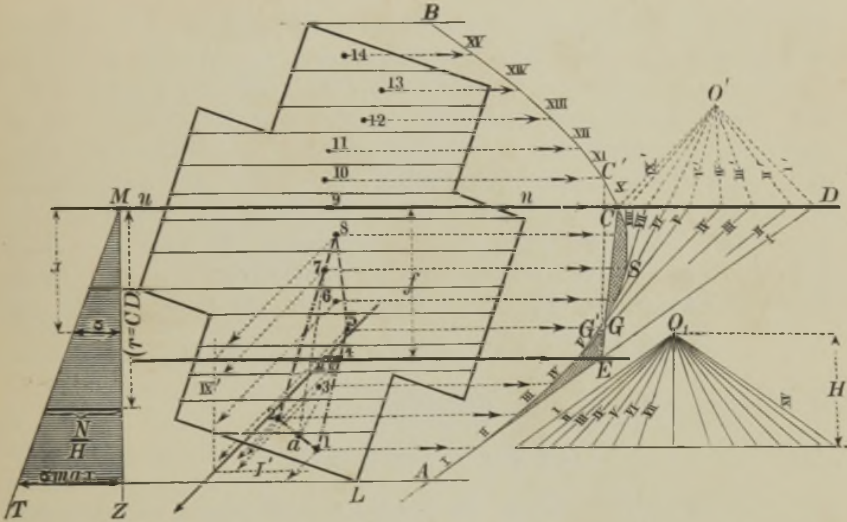


Fig. 82.

und hierauf, aus der zweiten der Gleichungen (1):

$$(3) \quad f = \frac{\int Cx^2 dF}{N} = \frac{\int x^2 dF}{\int x dF}$$

Zähler und Nenner des für  $f$  gefundenen Bruches stellen beziehungsweise das Trägheitsmoment und das statische Moment des gedrückten Querschnittsteiles für die Achse  $nn$  vor; sie lassen sich mit Hilfe eines Seilpolygons bestimmen. Hierzu zerlege man den ganzen Querschnitt in schmale, zur Nulllinie parallele Streifen, fasse deren Inhalte als Kräfte auf, welche in der Richtung  $nn$  wirken, zeichne zu ihnen mit der willkürlichen Polweite  $H$  (die eine Fläche vorstellt) das Seilpolygon  $AGCB$  und bestimme die von diesem und der ersten Polygonseite  $AD$  auf der  $nn$  abgeschnittene



Strecke  $\overline{CD} = r^*$ ). Man findet dann (nach No. 15 bis 17) das gesuchte statische Moment  $= Hr$  und (nach Gleichung 1 auf Seite 26) das gesuchte Trägheitsmoment  $= 2H\mathfrak{F}$ , unter  $\mathfrak{F}$  den Inhalt der Fläche  $AGCDA$  verstanden, welche von dem Seilpolygon und den Geraden  $CD$  und  $DA$  eingeschlossen wird. Die Gleichung (3) geht jetzt über in  $f = \frac{2\mathfrak{F}}{r}$  und hieraus folgt  $\frac{fr}{2} = \mathfrak{F}$ , d. h.:

$$(4) \quad \Delta ECD = \mathfrak{F},$$

wobei  $E$  der Schnittpunkt einer durch  $K$  parallel zur  $nn$  gezogenen Geraden mit der ersten Seite des Seilpolygons ist. Aus der Gleich. (4) folgt, daß die Inhalte der beiden in Fig. 82 schraffierten Flächen  $AE G$  und  $GSC$  gleich groß sind, und es läßt sich daher die zu einem gegebenen Angriffspunkte  $K$  gehörige Nulllinie, deren Richtung allerdings gegeben sein muß, leicht finden, indem man nach Aufzeichnung des Seilpolygons und nach Bestimmung des Punktes  $E$  die Gerade  $EC$  so einträgt, daß jene Flächen-Gleichheit entsteht. Es kann dies durch Probieren oder kürzer dadurch erreicht werden, daß man eine Gerade  $EC'$  nach Augenmaß zieht und hierauf den Punkt  $C$  so bestimmt, daß

$$\Delta EC'C = \text{Fläche } C'SG' - \text{Fläche } G'EA$$

ist. Denn formt man diese Gleichung um in:

$$G'EA = C'SG' - \Delta EC'C$$

und fügt auf beiden Seiten die Fläche  $G'GE$  hinzu, so erhält man in der Tat:

$$\text{Fläche } GEA = \text{Fläche } GSC.$$

Hat man die Nulllinie auf die beschriebene Weise bestimmt, so liegt der Angriffspunkt der Mittelkraft  $\int \sigma dF$  sämtlicher Querschnittsbelastungen  $\sigma dF$ , welche in den Schwerpunkten der entsprechenden Streifen  $dF$  angreifen, in der Geraden  $KE$ ; er muß aber, damit zwischen den Kräften  $\int \sigma dF$  und  $N$  Gleichgewicht besteht, mit dem Angriffspunkte  $K$  zusammenfallen, und hierzu ist nötig,

daß die Mittelkraft  $\int \sigma dF$  der in der Querschnittsebene nach irgend einer Richtung angenommenen Kräfte  $\sigma dF$  die Gerade  $KE$  im Punkte  $K$  schneiden muß.

---

\*) Obgleich die Querschnittsstreifen von endlicher Breite sind, werden wir doch in der Folge für deren Inhalte die Bezeichnung  $dF$  beibehalten. Auch unterließen wir es, um die Fig. 82 nicht undeutlich zu machen, das Seilpolygon durch die einbeschriebene Seillinie zu ersetzen.



Ist dies nicht der Fall, so muß eine andere Richtung für die Nulllinie gewählt und das ganze Verfahren wiederholt werden.

Bei Aufsuchung jener Mittelkraft dürfen die Drücke  $\sigma dF = CxdF$  durch die ihnen proportionalen Strecken  $\frac{xdF}{H}$  dargestellt werden, welche die Seiten des Seilpolygons  $AGSC$  (nach No. 20) auf der Geraden  $nn$  abschneiden. Wählt man also den Pol  $O'$ , zieht die Strahlen  $I', II', III' \dots$ , denkt sich hierauf den Kräftezug  $CD$  samt dem Strahlenbüschel  $O'$  so gedreht, daß  $CD$  parallel der angenommenen Richtung der Drücke  $\sigma dF$  ist und zeichnet das zugehörige Seilpolygon  $I', II', III' \dots$ , so ist der Schnittpunkt der äußersten Seiten ( $I'$  u.  $IX'$ ) desselben ein Punkt der verlangten Mittelkraft. In der Figur 82 wurde die Drehung des Kräftezuges umgangen. Es wurden die Kräfte  $\sigma dF$  unter  $45^\circ$  gegen die Gerade  $CD$  gerichtet angenommen und hierauf die Seilpolygoneiten  $I', II', III' \dots$  (von denen, um die Figur nicht mit Linien zu überladen, nur  $I'$  u.  $IX'$  angegeben sind) unter  $45^\circ$  gegen die entsprechenden Seilstrahlen gezogen. Der Schnittpunkt  $R$  der Mittelkraft  $\int \sigma dF$  mit der Geraden  $KE$  fällt so dicht an den Punkt  $K$ , daß man mit hinreichender Genauigkeit die Gerade  $nn$  als die dem Angriffspunkte  $K$  entsprechende Nulllinie ansehen darf.

Es bleibt jetzt noch zu erörtern, wie die Richtung der Nulllinie  $nn$  gewählt werden muß. Im allgemeinen ist man auf den Weg des Versuches angewiesen, und deshalb ist es wichtig, nach Annahme einer beliebigen Richtung der  $nn$ , schnell entscheiden zu können, ob überhaupt die Möglichkeit vorhanden ist, daß der gegebene Angriffspunkt  $K$  mit dem Punkte  $R$  zusammenfällt. Verbindet man zu diesem Zwecke die Schwerpunkte der gedrückten Querschnittsstreifen durch ein (in der Fig. 82 strichpunktirtes) Polygon, welches keinen einspringenden Winkel besitzt, mithin alle nicht auf ihm liegenden Schwerpunkte einschließt, so liegt der Mittelpunkt  $R$  aller Querschnitts-Belastungen  $\sigma dF$  innerhalb dieses Polygons, und es muß deshalb auch der gegebene Punkt  $K$  innerhalb dieses Polygons liegen, wenn sein Zusammenfallen mit  $R$  möglich sein soll. Bei der in Fig. 82 gewählten Richtung der  $nn$  ist diese Bedingung erfüllt, und an diesem Ergebnisse wird nichts geändert, wenn auch die Nulllinie, deren Lage ja zunächst unbekannt ist, da die Wahl der Richtung der  $nn$  der Aufzeichnung des Seilpolygons voranzugehen hat, parallel mit sich selbst verschoben wird.

Man kann aber den Teil des Querschnitts in Fig. 82, innerhalb dessen der Punkt  $K$  liegen muß, auf einfache Weise noch enger begrenzen, indem man die auf die Flächenstreifen 1 und 2 wirkenden Belastungen  $\sigma dF$ , welche wir mit  $P_1$  und  $P_2$  bezeichnen wollen, zu

einer Mittelkraft vereinigt, deren Angriffspunkt  $a$  auf der Geraden  $\overline{12}$  liegt und diese so teilt, daß sich verhält:  $\overline{1a} : \overline{2a} = P_2 : P_1$ . Die Belastungen  $P_1$  und  $P_2$  sind den auf die Achse  $nn$  bezogenen statischen Momenten der entsprechenden Streifen proportional. Bezeichnet man also die Abstände der Schwerpunkte 1 und 2 von der  $nn$  mit  $x_1$  und  $x_2$  und verwandelt die Streifen 1 und 2 in Rechtecke, welche bei gleicher, beliebiger Grundlinie die Höhen  $z_1, z_2$  haben, so folgt  $P_2 : P_1 = \frac{x_2 z_2}{e} : \frac{x_1 z_1}{e}$ , wo  $e$  eine willkürlich zu wählende Strecke bedeutet.

Die Strecken  $\frac{x_2 z_2}{e}$  und  $\frac{x_1 z_1}{e}$  lassen sich leicht durch Zeichnung finden, worauf die Lage des Punktes  $a$  bestimmt werden kann. Ist dies geschehen, so ersetzt man die Seiten  $\overline{41}, \overline{12}, \overline{27}$  des in der Fig. 82 gezeichneten strichpunktirten Polygons durch die Seiten  $\overline{4a}$  und  $\overline{a7}$  und erhält dann eine wesentlich kleinere Fläche, innerhalb welcher der Punkt  $K$  liegen muß, wenn sein Zusammenfallen mit  $R$  möglich sein soll.

Ergibt sich nun, trotz aller Sorgfalt bei der Wahl der Richtung der  $nn$ , nachträglich eine unbefriedigende Übereinstimmung der Lagen von  $K$  und  $R$ , so muß die Nulllinie in eine neue Lage  $n'n'$  (Fig. 83) gedreht werden, und hierbei empfiehlt es sich, den von der  $nn$  abgegrenzten Querschnittsteil, dessen Inhalt  $= F$  sei und der kurz als Fläche  $F$  bezeichnet werden soll, zunächst *unverändert beizubehalten* und in der Nähe der Nulllinie, innerhalb der in der Fig. 83 schraffirten Fläche, Zugspannungen anzunehmen. Man bestimme den Schwerpunkt  $S$  der Fläche  $F$  (wobei zu beachten ist, daß die zur Geraden  $KE$  parallele Schwerlinie mit Hilfe des bereits in der Fig. 82 vorhandenen Seilpolygons  $AGCB$  ermittelt werden kann) und verbinde die Punkte  $R$  und  $S$  durch eine Gerade; sie stellt die zur Nulllinie  $nn$  gehörige Kraftlinie vor. Wird die Fläche  $F$  auf ein schiefwinkliges Achsenkreuz  $(u, v)$  bezogen, dessen durch  $S$  gehende  $u$ -Achse parallel zur  $nn$  ist, und dessen  $v$ -Achse mit der Geraden  $RS$  zusammenfällt, so ist das Zentrifugalmoment  $\int uv dF = 0$ , und es folgt nach S. 59, daß bei einer Bewegung des Angriffspunktes  $R$  in die vorgeschriebene Lage  $K$  sich die Nulllinie um ihren Schnittpunkt  $T$  mit der Kraftlinie  $RS$  in eine solche Lage  $n'n'$  dreht, daß sie auf der  $u$ -Achse die Strecke  $\overline{SU} = u_0 = \frac{i_v^2}{u_1}$  abschneidet, wobei  $u_1 = \overline{RK}$  ist. Das auf die  $v$ -Achse bezogene Trägheitsmoment  $J_v = Fi_v^2$  wird am zweckmäßigsten mittels des *Mohrschen* Verfahrens bestimmt. Man zerlege

die Fläche  $F$  durch zur  $v$ -Achse parallele Sehnen in Teile, betrachte deren Inhalte als Kräfte, welche parallel zur  $v$ -Achse wirken, zeichne mit der in der Richtung der  $u$ -Achse gemessenen Polweite  $H'$ , welche passend  $= \frac{1}{2} F$  genommen wird eine Seillinie  $NQV$  und bestimme

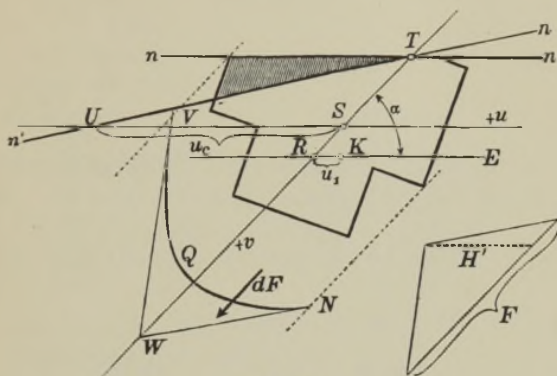


Fig. 83.

den Inhalt  $\mathfrak{F}'$  der von dieser Linie und ihren äußersten Tangenten  $NW$  und  $VW$  eingeschlossenen Fläche. Man findet dann, nach Seite 26,

$$J_e = \frac{2 H' \mathfrak{F}'}{\sin \alpha} = \frac{F \mathfrak{F}'}{\sin \alpha} \text{ und hieraus } i_e^2 = \frac{\mathfrak{F}'}{\sin \alpha},$$

wo  $\alpha$  den Winkel bedeutet, den die Achsen  $u$  und  $v$  miteinander bilden. Bringt man in der auf Seite 33—35 gezeigten Weise den Inhalt  $\mathfrak{F}'$  auf die Form:  $2 \mathfrak{F}' = a_2 n$  und wählt die willkürliche Strecke  $a_2 = \epsilon u_1 \sin \alpha$ , wobei  $\epsilon$  eine beliebige Zahl vorstellen möge, so erhält man

$$\text{schließlich } u_e = \frac{\epsilon}{2} n.$$

Nach Festlegung der Geraden  $n'n'$  ist die in der Fig. 82 dargestellte Konstruktion mit der verbesserten Richtung der Nulllinie zu wiederholen.

Zuweilen kann man die genaue Richtung der Nulllinie sofort angeben. Besitzt nämlich der zu untersuchende Querschnitt eine Symmetrieachse  $ss$ , Fig. 84, und enthält diese den Angriffspunkt  $K$ , so ist die Nulllinie senkrecht zur  $ss$ . Die Schwerpunkte sämtlicher zur  $nn$  parallelen Querschnittssehnen liegen auf der Geraden  $ss$ .

Ebenso leuchtet ein, daß einem auf der einen Diagonale eines



Rechtecks liegenden Angriffspunkte eine zur anderen Diagonale parallele Nulllinie entsprechen muß, Fig. 85.

53. **Ermittlung der Druckspannung  $\sigma$ .** Die auf Seite 87 abgeleitete Gleichung (2) liefert, wegen  $\int x dF = Hr$  (wobei  $r =$  Strecke  $CD$  in Fig. 82), für die Druckspannung  $\sigma$  den Ausdruck

$$(5) \quad \sigma = \frac{N}{H} \frac{x}{r},$$

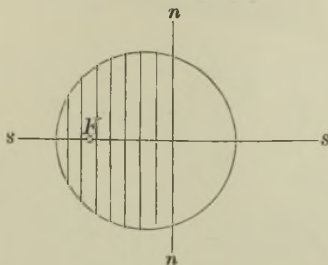


Fig. 84.

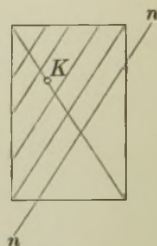


Fig. 85.

und hiernach ergibt sich im Abstände  $x = r$  von der Nulllinie:

$\sigma = \frac{N}{H}$ . Durch diesen Wert ist die Gerade  $MT$  in Fig. 82 be-

stimmt, deren Ordinaten, bezogen auf eine zur Nulllinie senkrechte  $x$ -Achse gleich den Pressungen  $\sigma$  sind, und man ist nun im stande, den Wert  $\sigma_{max}$  für den äußersten Punkt  $L$  des Querschnitts anzugeben. Die willkürliche Polweite  $H$  wird man so wählen, daß sich der Ausdruck  $\frac{N}{H}$  bequem berechnen läßt.

54. **Das Rechteck, beansprucht durch einen Druck  $N$ , dessen Angriffspunkt auf einer Symmetrieachse liegt.** Sind die Längen der Seiten des Rechtecks  $= b$  und  $= h$ , und liegt der Angriffspunkt auf der zur Seite  $h$  parallelen Mittelachse, so ist die Nulllinie parallel zur Seite  $b$ . Bedeutet  $\xi$  den Abstand des Angriffspunktes  $K$  von der Seite  $LL$  (vergl. Fig. 86), so hat die  $nn$  von dieser Seite den Abstand  $3\xi$ , weil, wegen der gleichen Breite der zur  $nn$  parallelen Querschnittsstreifen ( $bdx$ ), eine durch  $K$  zur  $nn$  gezogene Parallele durch den Schwerpunkt  $S$  des Dreiecks  $MTZ$  gehen muß. Multipliziert man den Inhalt  $\left(\frac{3\xi\sigma_1}{2}\right)$  dieses Dreiecks mit der Streifenbreite  $b$ , so



erhält man die Summe aller auf die gedrückte Querschnittsfläche wirkenden Kräfte  $\sigma dF$ . Diese Summe muß aber gleich  $N$  sein,

und es folgt daher:  $\frac{3\xi\sigma_1 b}{2} = N$ ,

woraus sich die Formel ergibt:

$$(6) \quad \sigma_1 = \frac{2N}{3\xi b},$$

welche für die Berechnung von Gewölben, Pfeilern und Stützmauern besonders wichtig ist.

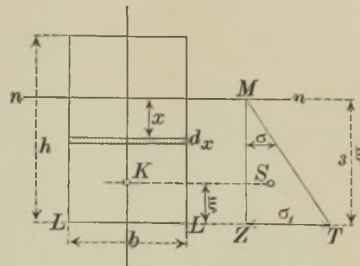


Fig. 86.

**55. Untersuchung der Standsicherheit eines gemauerten runden Schornsteins.** Zu den wichtigsten Anwendungen der in No. 52 und 53 abgeleiteten Gesetze gehört die Berechnung der durch Winddruck in den Querschnitten gemauerter Schornsteine hervorgerufenen Pressungen. Ist

$G$  das Gewicht des Schaftes oberhalb des zu untersuchenden Querschnitts  $AB$  (Fig. 87),

$H$  der wagerecht angenommene Winddruck,

$M$  das Moment von  $H$  in Bezug auf  $AB$ ,

so schneidet die Mittelfraft  $D$  aus  $G$  und  $H$  den Querschnitt  $AB$  im Abstände

$$(7) \quad c = \frac{M}{G}$$

vom Schwerpunkte. Liegt der Angriffspunkt  $K$  innerhalb des Kerns, so treten im Querschnitt nur Druckspannungen auf; der größte Wert derselben ist

$$(8) \quad \sigma = \frac{G}{F} + \frac{M}{W} = \frac{G}{F} \left( 1 + \frac{c}{k} \right),$$

wo  $k = \frac{W}{F}$  den Kernhalbmesser bedeutet.

Liegt  $K$  außerhalb des Kerns, so entstehen auf der Windseite Zugspannungen, die aber zweckmäßig vernachlässigt werden, weil auf ihre Mitwirkung nicht immer mit Sicherheit zu rechnen ist. Bedeutet dann, bezogen auf die Nulllinie  $nn$ ,

$J_n$  das Trägheitsmoment der gedrückten Querschnittsfläche,

$S_n$  das statische Moment „ „ „ „

$f$  den Abstand der  $nn$  vom Angriffspunkte  $K$ ,

$z$  den Abstand des stärksten gedrückten Querschnittsteilchens von der  $nn$ ,

so ist die größte Druckspannung nach Gleichung (2)

$$(9) \quad \sigma = \frac{Gz}{S_n}$$

und der Abstand  $f$ , nach Gleichung (3),

$$(10) \quad f = \frac{J_n}{S_n}$$

Erfährt die Einheit einer vom Winde rechtwinklig getroffenen Fläche den Druck  $w$ , so darf man für den Normaldruck  $w_1$  auf die Einheit einer Fläche, welche mit der Windrichtung den Winkel  $\alpha$  bildet, den Wert

$$(11) \quad w_1 = w \sin^2 \alpha$$

annehmen. Es ergibt sich dann der Winddruck auf einen Kreiszyylinder vom Halbmesser  $R$  und der Höhe  $h$ , dessen Achse senkrecht zur Windrichtung ist, Fig. 88,

$$H = 2 w R h \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \alpha d\alpha$$

$$(12) \quad H = \frac{2}{3} w 2 R h = \frac{2}{3} w \mathfrak{F},$$

wo  $\mathfrak{F}$  die Projektion der Zylinderfläche senkrecht zur Windrichtung bedeutet.

Für den auf dem Querschnitt  $AB$  ruhenden Teil des Schornsteins findet man, wenn  $R_0$  und  $R$  die äußeren Halbmesser des Mündungsquerschnitts und des Querschnitts

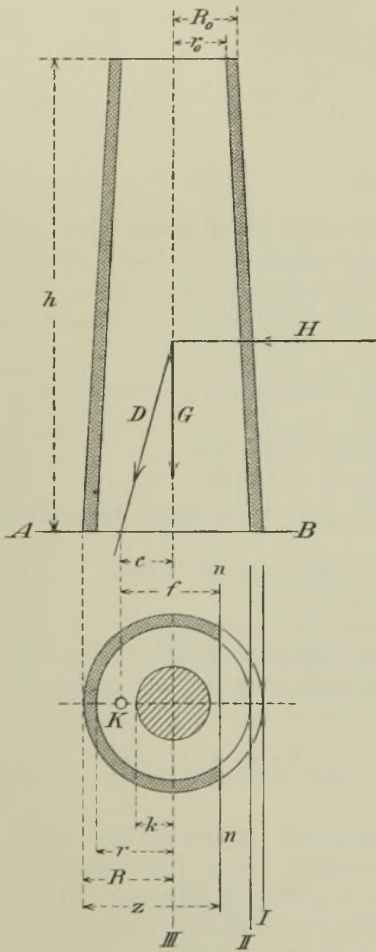


Fig. 87.

$AB$  bezeichnen, genügend genau

$$(13) \quad H = \frac{2}{3} w (R_0 + R) h.$$

Das statische Moment dieser Belastung in Bezug auf  $AB$  ist

$$(14) \quad M = \frac{2}{9} wh^2 (2R_0 + R).$$

Im deutschen Binnenlande genügt es in der Regel,  $w = 125 \frac{\text{kg}}{\text{qm}} = 0,125 \frac{\text{t}}{\text{qm}}$  anzunehmen, während an der freien Meeresküste mindestens mit  $w = 0,150 \frac{\text{t}}{\text{qm}}$  gerechnet werden sollte. Im zweiten Falle hält der Verfasser sogar die Annahme von  $w = 0,200 \frac{\text{t}}{\text{qm}}$  für ratsam, empfiehlt aber für diesen Ausnahmefall die Zulassung hoher Pressungen.

Besondere Vorsicht erheischt die Berechnung kleinerer und mittelgroßer Schornsteine. Infolge des geringen Gewichtes  $G$  kann es hier vorkommen, daß selbst bei einer recht kleinen gedrückten Fläche die Beanspruchung  $\sigma$  für den angenommenen Winddruck noch unterhalb der zulässigen Grenze bleibt, daß aber eine ganz geringe Steigerung dieser Windstärke

genügt, um die Pressung weit über das zulässige Maß zu erhöhen. Ein solcher Schornstein bietet gewiß nicht die gewünschte Sicherheit.

Man erhält nun ein recht anschauliches Bild von dem Sicherheitsgrade, wenn man die Pressungen  $\sigma$  für verschiedene Windstärken  $w$  berechnet, die Werte  $w$  als Abscissen und die zugehörigen  $\sigma$  als Ordinaten aufträgt und auf diese Weise das Gesetz, nach welchem die  $\sigma$  mit den  $w$  zunehmen, durch eine Kurve darstellt (Fig. 91). Die Ermittlung dieser  $\sigma$ -Linie gestaltet sich am einfachsten, wenn die Wertepaare  $\sigma$ ,  $w$  für solche Nulllinien-Lagen bestimmt werden, denen möglichst einfache Ausdrücke der Größen  $J_n$ ,  $S_n$  und  $c$  entsprechen.

Solange die Nulllinie außerhalb des Querschnitts bleibt, ist die  $\sigma$ -Linie eine Gerade; sie ist bestimmt durch die im Falle  $w = 0$  auftretende Pressung

$$(15) \quad \sigma_0 = \frac{G}{F}$$

und durch die Pressung

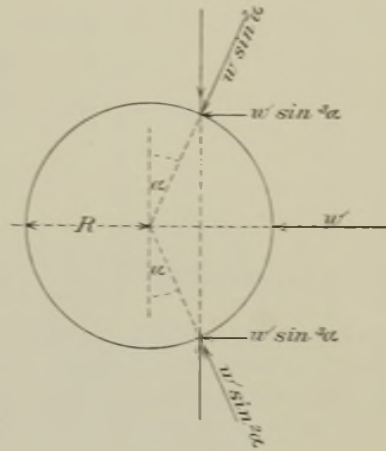


Fig. 88.

$$(16) \quad \sigma_I = \frac{2G}{F},$$

welche zu der den Querschnitt berührenden Nulllinie *I* (Fig. 87) gehört. Die Windstärke  $w_I$ , welche  $\sigma_I$  hervorbringt, wird aus der Gleichung

$$c = \frac{M}{G} = k$$

gefunden. Für den Kernhalbmesser  $k$  ergibt sich aus den Formeln

$$F = \pi (R^2 - r^2)$$

$$J = \frac{\pi}{4} (R^4 - r^4) = \frac{F}{4} (R^2 + r^2)$$

$$W = \frac{J}{R}$$

der Wert

$$(17) \quad k = \frac{W}{F} = \frac{R^2 + r^2}{4R}.$$

Dringt die Nulllinie in den Querschnitt ein, so ist  $\sigma$  nicht mehr proportional  $w$ ; die Steigung der  $\sigma$ -Linie nimmt stetig zu. Als äußerste Grenzlage der Nulllinie sollte man stets die durch den Schwerpunkt gehende Lage *III* (Fig. 87) ansehen, d. h. man sollte stets fordern, daß mindestens die Hälfte des Querschnitts zur Wirkung gelangt. Für diese Lage ist

$$J_n = \frac{1}{2} J \quad \text{und} \quad S_n = \frac{2}{3} (R^3 - r^3) \quad (\text{vergl. Seite 40})$$

$$(18) \quad c = \frac{J_n}{S_n} = \frac{J}{2S_n} = \frac{3\pi}{16} \frac{1 - \frac{r^4}{R^4}}{1 - \frac{r^3}{R^3}} R$$

$$\sigma = \frac{GR}{S_n}.$$

Setzt man

$$G = \sigma_0 F = \frac{\sigma_I F}{2} \quad \text{und} \quad S_n = \frac{J}{2c_{III}} = \frac{FkR}{2c_{III}} = \frac{FR}{2} \frac{c_I}{c_{III}},$$

so erhält man die übersichtliche Formel

$$\frac{\sigma_{III}}{\sigma_I} = \frac{c_{III}}{c_I} = \frac{w_{III}}{w_I}$$

und erkennt, daß die Endpunkte der Ordinaten  $\sigma_I$  und  $\sigma_{III}$  der  $\sigma$ -Linie in einer durch den Ursprung gehenden Geraden liegen (Fig. 19). Drückt man  $c_I = k$  und  $c_{III}$  mit Hilfe von 17 und 18 aus, so findet man





$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = \frac{\left(1 + \frac{r}{R}\right)^2}{\frac{r}{R} \left(1 + \frac{r}{R}\right) + \frac{8}{15\pi} \left(1 - \frac{r}{R}\right) \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}}}$$

und erhält für

$$\frac{r}{R} = 0,5 \quad 0,6 \quad 0,7 \quad 0,8 \quad 0,9$$

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = 2,73^*) \quad 2,52 \quad 2,36 \quad 2,22 \quad 2,10,$$

während  $c$  für alle im Schornsteinbau vorkommenden Mauerstärken nur sehr wenig von

$$(21) \quad c = \frac{R}{2}^{**}$$

abweicht. Zur Berechnung von  $\sigma$  für die Nulllinie  $II$  darf stets die einfache Formel

$$(22) \quad \frac{\sigma}{\sigma_0} = 3,45 - 1,5 \frac{r}{R}$$

benutzt werden; sie liefert für die oben angegebenen Werte von  $r : R$  die Spannungsverhältnisse

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = 2,7 \quad 2,55 \quad 2,4 \quad 2,25 \quad 2,10.$$

**Zahlenbeispiel.** Der Schaft eines Schornsteines bestehe aus 6 Trommeln von 5<sup>m</sup> Höhe (Fig. 90), deren Wandstärken ( $s$ )

$$0,16^m \quad 0,21^m \quad 0,26^m \quad 0,31^m \quad 0,36^m \quad 0,41^m$$

und deren mittlere Durchmesser ( $d$ )

$$1,26^m \quad 1,41^m \quad 1,56^m \quad 1,71^m \quad 1,86^m \quad 2,01^m$$

sind. Die Stärken  $s$  nehmen um das gleiche Maß  $\Delta s = 0,05^m$  zu, die Durchmesser  $d$  um  $\Delta d = 0,15^m$ .

\*) Setzt man oben für  $y$  die Ordinaten der Kreislinie ein, an Stelle der Parabelordinaten, so findet man

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = \frac{\pi \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \left(1 + \frac{r}{R}\right)}{\frac{1}{3} \sin \varphi \left(2 + \frac{r^2}{R^2}\right) + \frac{r}{R} \left(\pi - \pi \frac{r^2}{R^2} - \varphi\right)}$$

wo  $\cos \varphi = \frac{r}{R}$ . Für  $\frac{r}{R} = 0,5$  erhält man  $\frac{\sigma}{\sigma_0} = 2,71$ . Je größer  $\frac{r}{R}$  ist, desto kleiner ist der Fehler, der durch die Einführung der Parabelordinaten begangen wird.

\*\*) Für  $\frac{r}{R} = 0,5$  ergibt sich  $c = 0,499 R$  oder  $0,488 R$ , je nachdem  $y$  nach der Parabel- oder Kreisgleichung berechnet wird. Je größer  $\frac{r}{R}$  ist, desto genauer ist der Näherungswert  $c = 0,5 R$ .

Das Gewicht des Schaftes, der aus dichten, schweren Lochsteinen in verlängertem Zementmörtel bestehen möge (einem Baustoff, der  $1,9'_{cbm}$  wiegt) beträgt

$$G = 1,9 \cdot \pi \cdot 5,0 [0,16 \cdot 1,26 + 0,21 \cdot 1,41 + 0,26 \cdot 1,56 + 0,31 \cdot 1,71 + 0,36 \cdot 1,86 + 0,41 \cdot 2,01] = 87,4^t \cdot *)$$

Der unterste Querschnitt hat den

Inhalt

$$F = \pi (R^2 - r^2) \\ = \pi (1,26^2 - 0,85^2) = 2,72 \text{ qm},$$

er erfährt infolge von  $G$  die Pressung

$$\sigma_0 = \frac{G}{F} = \frac{87,4}{2,72} = 32'_{qm} \\ = 3,2^k_{qcm}.$$

Der Winddruck erzeugt für den untersten Querschnitt das Moment

$$M = \frac{2}{9} w h^2 (2 R_0 + R) \\ = \frac{2}{9} w 30^2 (2 \cdot 0,66 + 1,26) \\ M = 516 w$$

und diesem entspricht

$$c = \frac{M}{G} = \frac{516 w}{87,4}$$

Zu einem bestimmten Abstände  $c$  gehört also die Windstärke

$$w = 0,17 c.$$

Hat die Nulllinie die Lage I, so ist

$$c_I = k = \frac{R^2 + r^2}{4 R} = \frac{1,26^2 + 0,85^2}{4 \cdot 1,26}$$

$$= 0,458^m;$$

die zugehörige Windstärke beträgt

$$w_I = 0,17 \cdot 0,458 = 0,078^t_{qm}$$

$$= 7,8^k_{qcm}$$

und die bei diesem Winddruck entstehende Pressung

$$\sigma_I = 2 \sigma_0 = 6,4^k_{qcm}.$$

Für die Nulllinien-Lage II erhält

$$\text{man } \left( \text{mit } \frac{r}{R} = \frac{0,85}{1,26} = 0,675 \right)$$

$$c_{II} = \frac{1}{2} R = 0,63^m$$

$$w_{II} = 0,17 \cdot 0,63 = 0,107^t_{qm}$$

$$= 10,7^k_{qcm}$$

$$\sigma_{II} = \sigma_0 \left( 3,45 - 1,5 \frac{r}{R} \right)$$

$$= 3,2 (3,45 - 1,5 \cdot 0,675)$$

$$= 7,8^k_{qcm}$$

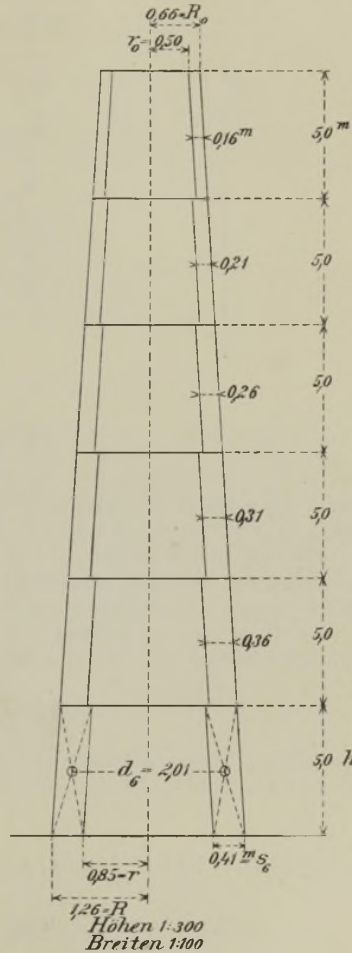


Fig. 90.

\*) Sind die Trommeln gleich hoch und nehmen die Wandstärken um das gleiche Maß  $\Delta s$  zu, so findet man für das Gewicht  $G$  leicht den Ausdruck

und für die Lage III

$$\frac{\sigma_{III}}{\sigma_I} = \frac{w_{III}}{w_I} = 2,5 - \frac{r}{R} = 2,5 - 0,675 = 1,825$$

$$\sigma_{III} = 6,4 \cdot 1,825 = 11,7 \text{ kg/qcm}$$

$$w_{III} = 78 \cdot 1,825 = 142 \text{ kg/qm.}$$

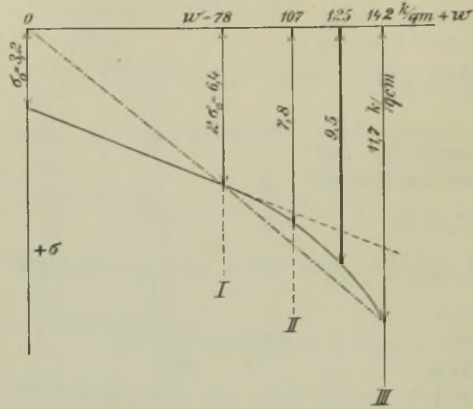


Fig. 91.

Der Verlauf der  $\sigma$ -Linie, Fig. 91, ist zufriedenstellend. Für den in der Regel als ausreichend zu erachtenden Winddruck von  $125 \text{ kg/qm}$  ergibt sich die mäßig zu nennende Pressung von  $\sigma = 9,5 \text{ kg/qcm}$  und selbst bei einem Winddruck von rund  $140 \text{ kg/qm}$  entsteht nur eine Beanspruchung von  $12 \text{ kg/qcm}$ . In den oberen Querschnitten des Schaftes nehmen (im vorliegenden Falle) die Pressungen ab.

An der Hand der gefundenen Zahlenwerte möge noch die einfache von Huppner aufgestellte hyperbolische Annäherungsformel

$$\sigma = 2\sigma_0 \frac{R - k}{R - c}$$

geprüft werden. Dieser Ausdruck ist so gebildet, daß sich für  $c = k$  die Pressung  $\sigma = 2\sigma_0$  ergibt und für  $c = R$  der Wert  $\sigma = \infty$ . Im Falle  $c = R$

$$G = \gamma \pi s_1 (R + r_0) h + \frac{1}{3} \gamma \pi \Delta s h (m - 1) \left[ 3 r_0 + (R - R_0) \frac{2m + 0,5}{m} - \Delta s (m - 0,5) \right],$$

wo  $m$  die Anzahl der Trommeln bedeutet,

$s_1$  die Stärke der obersten Trommel

$h$  die Höhe des Schaftes

$r_0$  den inneren Halbmesser des obersten Querschnitts

$R_0$  „ äußeren „ „ „ „ „

$R$  „ „ „ „ „ „

$\gamma$  das Gewicht des Mauerwerks f. d. Raumeinheit.



wird bei fehlender Zugfestigkeit die wirksame Querschnittsfläche unendlich klein — ein Ergebnis das natürlich nur so zu deuten ist, daß die  $\sigma$ -Linie außerhalb ihres Geltungsbereiches eine Asymptote besitzt; denn bereits für Werte von  $c$ , die in der Nähe von  $R$  liegen, hat die Vernachlässigung der Zugfestigkeit keinen Sinn mehr. Hält man aber daran fest, daß die durch den Schwerpunkt gehende Nulllinie *III* die äußerste zu gestattende ist, so liefert die sehr übersichtliche Hüpnersche Formel brauchbare Werte. Im vorliegenden Falle wird

$$\sigma = 2 \cdot 3,2 \frac{1,26 - 0,458}{1,26 - c} = \frac{5,133}{1,26 - c}$$

Für  $c = c_{II} = 0,63^m$  ergibt sich  $\sigma_{II} = 8,1^{kg/qcm}$

„  $c = c_{III} = 0,84^m$  „ „  $\sigma_{III} = 12,0^{kg/qcm}$ ,

d. s. Zahlen, die von den oben gefundenen fast gar nicht abweichen.

Für den Abstand  $z$  der Nulllinie von dem am stärksten gedrückten Querschnittsteilchen gibt Hüpner den Wert

$$z = 2 R \frac{R - c}{R - k};$$

dieser wird gleich Null für  $c = R$  und gleich  $2 R$  für  $c = k$ . Den Abständen  $c_{II} = 0,63^m$  und  $c_{III} = 0,84^m$  entsprechen die Strecken

$$z_{II} = 1,98^m \text{ und } z_{III} = 1,32^m,$$

welche von unseren Werten

$$z_{II} = R + r = 2,11^m \text{ und } z_{III} = R = 1,26^m$$

schon etwas mehr abweichen.

Hinsichtlich der zulässigen Pressungen  $\sigma$  werde noch hervorgehoben, daß die für Schornsteinbauten besonders geeigneten, schweren dichten Lochsteine, desgleichen gute Hartbrandsteine, beide in Kalk-Zementmörtel (Mischung: 1 Raumteil Portlandzement, 1 bis  $2\frac{1}{2}$  Raumteile Kalk und 4 bis 9 Raumteile reiner scharfer Sand) mit 12 bis  $30^{kg/qcm}$  belastet werden dürfen. Je größer der Zementzusatz und je länger die Bauzeit ist, desto höher darf die Beanspruchung gewählt werden. Wird ein Schornstein in wenigen Tagen bei ungenügendem Zementzusatz in die Höhe getrieben, so schwebt er vor Erhärtung des Mörtels natürlich in Gefahr, von einem bald nach seiner Vollendung einsetzenden schweren Sturme umgeworfen zu werden; es wäre aber zu bedauern, wenn die Aufsichtsbehörden im Hinblick auf diese Möglichkeit an alle Schornsteine denselben Maßstab anlegen und auch bei sorgfältigster Ausführung und besonders für sehr hohe Schornsteine, die längere Zeit zu ihrer Errichtung bedürfen und deren Mörtel in den tieferen Schichten unter höherem Druck erhärtet und deshalb fester wird, nur die niedrigeren Werte  $\sigma$  gestatten wollten.

## § 12.

### Schubspannungen und Hauptspannungen.

**56. Schubspannungen.** Auf die Ermittlung der durch die Querkraft  $Q$  hervorgerufenen Schubspannungen  $\tau$  (vergl. Seite 56) soll in diesem Buche nur ganz kurz und für einen bestimmten Belastungszustand eingegangen werden, weil es sich hier um Untersuchungen handelt, welche der zeichnerischen Behandlung wenig zugänglich sind. Dies gilt besonders von dem Falle einer nicht durch den Schwerpunkt

des Querschnitts gehenden, den Stab somit auf Drehungsfestigkeit beanspruchenden Kraft  $Q$ .

Wir beschränken uns deshalb darauf, an der Hand bekannter Gesetze der Festigkeitslehre, die Schubspannungen in einem prismatischen Stabe darzustellen, welcher durch äußere Kräfte beansprucht wird, die in ein und derselben, durch die Stabachse gehenden, den Stab in zwei symmetrische Hälften trennenden Ebene liegen. Die Kraftlinie ist dann eine Symmetrieachse des Stabes; sie sei zur  $v$ -Achse gewählt und eine auf ihr senkrechte Schwerlinie zur  $u$ -Achse. Fig. 92. Die Schubspannung  $\tau$  in irgend einem Punkte  $(u, v)$  des Querschnitts werde in die Seitenspannungen  $\tau_v \perp v$  und  $\tau_u \perp u$  zerlegt.

Wird die *Annahme* gemacht, das  $\tau_u$  für alle Punkte einer zur  $u$ -Achse parallelen Sehne  $AB$  gleich groß ist und wird vorausgesetzt, daß am Umfange des Stabes keine äußeren Kräfte in der Richtung der Stabachse auftreten, daß also die Schubspannungen für alle Punkte der Oberfläche (des Mantels) gleich Null sind, so folgen  $\tau_u$  und  $\tau_v$  den Gesetzen:

$$(1) \quad \tau_u = \frac{QS}{2zJ}; \quad \tau_v = \tau_u \operatorname{tg} \varphi \frac{u}{\rho},$$

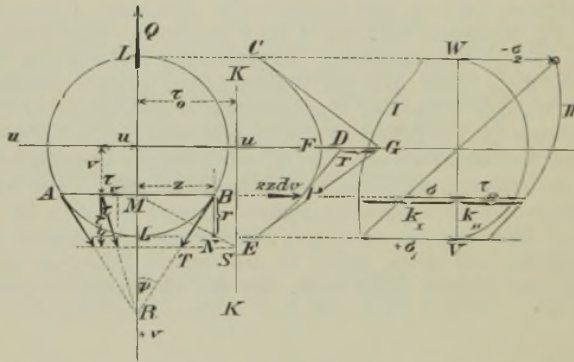


Fig. 92.

wobei  $2z$  die Länge der Sehne  $AB$ ,

$S$  das auf die  $u$ -Achse bezogene statische Moment des einen der beiden durch die Sehne  $AB$  begrenzten Querschnittsteile (z. B. des Teils  $ALB$ )

$J$  das Trägheitsmoment des ganzen Querschnitts in Bezug auf die  $u$ -Achse und

$\varphi$  den Winkel bedeutet, welchen die in  $B$  an den Querschnitt gelegte Tangente mit der  $v$ -Achse bildet.

Die zweite der Gleichungen (1) sagt aus, daß die Spannungen  $\tau$  für sämtliche Punkte der Sehne  $AB$  durch den auf der  $r$ -Achse gelegenen Schnittpunkt  $R$  der in  $A$  und  $B$  an den Querschnitt gezogenen Tangenten gehen.

Denkt man den Querschnitt in unendlich schmale, zur  $r$ -Achse senkrechte Streifen zerlegt, betrachtet deren Inhalte  $dF = 2 \cdot dr$  als Kräfte, welche in der Richtung der  $u$ -Achse wirken, und zeichnet mit der beliebigen Polweite  $H$  die Seillinie  $CFE$  jener Kräfte, so kann man das statische Moment  $S$  ermitteln, indem man an die Seillinie in ihrem Schnittpunkte  $P$  mit der Sehne  $AB$  eine Tangente  $PD$  legt und die Strecke  $DG = r$  bestimmt, die auf der  $u$ -Achse von der Geraden  $PD$  und den in der  $u$ -Achse sich treffenden äußersten Tangenten an die Seillinie abgeschnitten wird. Es ergibt sich dann  $S = Hr$ , ferner (nach No. 21)  $J = 2H\mathfrak{J}$ , wo  $\mathfrak{J}$  den Inhalt der von der Seillinie  $CFE$  und den äußersten Tangenten  $EG$  und  $CG$  begrenzten Fläche bedeutet. Mit der Bezeichnung:

$$\tau_0 = \frac{Q}{4\mathfrak{J}}$$

ergibt sich

$$\tau = \tau_0 \frac{r}{z},$$

ein Wert, welcher sich nach Berechnung von  $\tau_0$  leicht darstellen läßt. Kennt man  $\tau_0$ , so kann man auch  $\tau$  angeben, da die Richtung dieser Spannung gegeben ist. Es genügt, für jede Sehne  $AB$  den größten Wert  $\tau$  zu bestimmen, nämlich den in  $A$  oder  $B$  herrschenden. Zu diesem Zwecke ziehe man zur  $r$ -Achse in der Entfernung  $\tau_0$  eine Parallele  $KK$ , errichte in  $B$  auf der Sehne  $AB$  das Lot  $BN = r$ , verbinde  $N$  mit dem Mittelpunkte  $M$  der  $AB$  und ziehe durch den Schnittpunkt  $S$  der beiden Geraden  $MN$  und  $KK$  eine Parallele zur  $u$ -Achse; die Parallele schneidet dann auf der Tangente  $BR$  die im Punkte  $B$  herrschende Schubspannung  $BT = \tau_B$  ab.

In dieser Weise wurden in der Fig. 92 die Schubspannungen  $\tau_B$  für sämtliche Punkte des Querschnittsumfanges bestimmt und hierauf, von einer zur  $r$ -Achse parallelen Geraden  $WV$  aus, in den Verlängerungen der entsprechenden Sehnen  $AB$  als Ordinaten aufgetragen.

Die Annahme gleicher Spannungen  $\tau_0$  für alle Punkte einer zur  $u$ -Achse parallelen Sehne ist um so zutreffender, je kürzer jene Sehne im Verhältnis zur Ausdehnung des Querschnitts in der Richtung von  $Q$  ist. Sie liefert also u. a. zuverlässige Ergebnisse, wenn es sich um die Schubspannungen  $\tau$  im *Stege* des in der Fig. 93 dargestellten  $\Gamma$ -Querschnitts handelt, darf aber nicht auf die *Flanschen* dieses Querschnitts ausgedehnt werden. Da nämlich in allen Punkten des Umfanges



des Querschnitts die Schubspannungen tangential an den Umfang gerichtet sind, so ergibt sich für sämtliche Punkte der Geraden  $CD$  und  $EF$  in Fig. 93 die zur  $u$ -Achse senkrechte Spannung  $\tau_u = 0$ , und hieraus erkennt man ohne weiteres die Unmöglichkeit, daß in allen Punkten einer zur  $u$ -Achse parallelen und der Geraden  $CF$  unendlich nahen Sehne eine der ersten der Gleich. (1) genügende Schubspannung  $\tau_u$  auftreten kann.\*) Das Gleiche gilt für alle Querschnitte mit seitlichen, in der Richtung der  $v$ -Achse schmalen Ansätzen.

Aus diesem Grunde hat Winkler vorgeschlagen, bei der Berechnung der Spannungen  $\tau$  in den Flanschen der  $\Gamma$ -Querschnitte (und in ähnlichen Fällen) von der Annahme konstanter Spannungen  $\tau_v$  für alle Punkte einer zur  $u$ -Achse senkrechten Sehne  $AB$  auszugehen, welche Voraussetzung zu der Formel

$$\tau_v = \frac{QS'}{z'J}$$

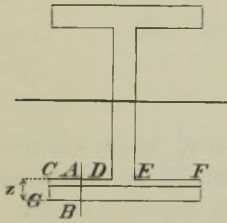


Fig. 93.

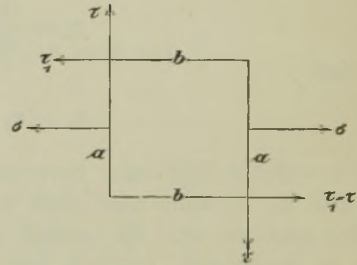


Fig. 94.

führt, unter  $S'$  das auf die  $u$ -Achse bezogene statische Moment des einen der beiden durch die Sehne  $AB$  begrenzten Querschnittsteile (z. B. des Teiles  $ABGC$ ) verstanden und unter  $z'$  die Länge der Sehne  $AB$ . Es genügt aber, bei der Untersuchung der  $\Gamma$ -Querschnitte (und ähnlicher Querschnitte) die Spannungen  $\tau$  im Stege zu ermitteln.

**57. Hauptspannungen.** Wir denken uns aus dem Stabe einen unendlich kleinen Würfel von den Kantenlängen  $a, b, c$  herausgetrennt. Fig. 94. Die eine Seitenfläche  $ac$  liege in der Ebene des zur Stabachse senkrechten Querschnitts und an der Stelle  $u, v$ . Die Kante  $a$  sei parallel zur Schubspannung  $\tau$ , folglich Kante  $b$  parallel zur Normalspannung  $\sigma$ . Ändern sich die Spannungen stetig mit der Lage der

\*) Die tönliche Annahme, es gelte Gleichung (1) auch für den Flansch, trifft man immer noch in einzelnen Büchern und Abhandlungen, wobei dann für die Sehne  $DE$  zwei Werte  $\tau_u$  herausgerechnet werden, weil sich dort die Breite  $2z$  sprungweise ändert!



beanspruchten Fläche, so unterscheiden sie sich in den einander gegenüberliegenden Seitenflächen des Würfels nur um unendlich kleine Größen, welche in der folgenden Untersuchung vernachlässigt werden dürfen. Bei un stetigen Spannungen aber muß der Stab vorerst in einzelne Teile zerlegt werden, innerhalb welcher sowohl  $\sigma$  als auch  $\tau$  stetig sind, und es muß dann der betrachtete Würfel vollständig innerhalb eines dieser Teile liegen.

Die in den beiden Flächen  $ac$  wirksamen Schubkräfte  $\tau ac$  bilden ein Kräftepaar mit dem Arme  $b$  und dem Momente  $\tau acb$ . Soll der Würfel im Gleichgewichte sein, so müssen in den Seitenflächen  $bc$  Schubkräfte  $\tau_1 bc$  auftreten, welche (ein Paar mit dem Arme  $a$  bildend) das Moment  $\tau_1 acb$  aufheben. Dazu ist nötig, daß  $\tau_1 bca = \tau acb$  also  $\tau_1 = \tau$  ist, und daß die beiden Momente entgegengesetzten Drehungssinn haben.

Es soll nun untersucht werden, wie groß die Spannungen in den Seitenflächen eines Würfels ( $a', b', c'$ ) sind, der in den Würfel ( $a, b, c$ ) so einbeschrieben ist, daß seine Kanten  $a'$  und  $b'$  mit  $a$ , und  $b$  den Winkel  $\alpha$  bilden, während  $c' \parallel c$  ist, und zwar möge diese Aufgabe in etwas allgemeinerer Form gelöst werden, insofern nämlich angenommen werden soll, daß auch in den Seitenflächen  $bc$  des Würfels ( $abc$ ) Normalspannungen auftreten. Fig. 95.

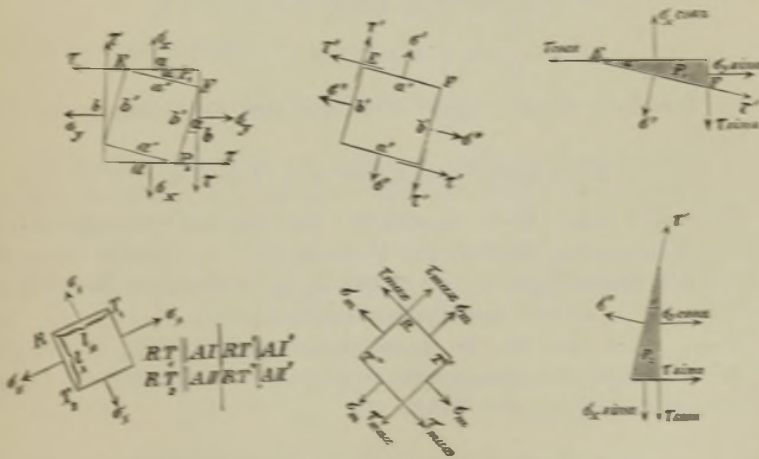


Fig. 95.

Wir bezeichnen die Spannungen für den Würfel ( $abc$ ) mit  $\sigma_x, \sigma_y, \tau$  und für den Würfel ( $a'b'c'$ ) mit  $\sigma'_x, \sigma'_y, \tau'$ ; die letzteren ergeben sich aus den als bekannt angenommenen Spannungen  $\sigma_x, \sigma_y, \tau$  durch Aufstellung

der Gleichgewichts-Bedingungen für die an den dreiseitigen Prismen ( $P_1$ ) und ( $P_2$ ) angreifenden Kräfte.

Wir betrachten zuerst das Prisma ( $P_1$ ), setzen den Inhalt der in der Fig. 95 mit  $EF$  bezeichneten Seitenfläche desselben  $= 1$  und erhalten dann, da die Inhalte der anderen Seitenflächen  $= 1 \sin \alpha$  und  $= 1 \cos \alpha$  sind, durch Multiplikation der Spannungen mit den Flächen die Belastungen  $\sigma'$ ,  $\tau'$ ,  $\sigma_x \cos \alpha$ ,  $\tau \cos \alpha$ ,  $\sigma_y \sin \alpha$ ,  $\tau \sin \alpha$  dieser Flächen.

Es ließen sich nun  $\sigma'$  und  $\tau'$  leicht in der Weise bestimmen, daß die bekannten Kräfte  $\sigma_x \cos \alpha$ ,  $\tau \cos \alpha$ ,  $\sigma_y \sin \alpha$ ,  $\tau \sin \alpha$  zu einem stetigen Zuge aneinander gesetzt werden, dessen Schlußlinie die das Gleichgewicht herstellende, auf die Fläche  $EF$  wirkende Mittelkraft  $\rho$  der Belastungen  $\sigma'$  und  $\tau'$  angibt. Durch Zerlegung von  $\rho$  würde man  $\sigma'$  und  $\tau'$  finden. Wir ziehen es aber vor, um auf eine bemerkenswerte Ähnlichkeit der vorliegenden Aufgabe mit einer früher gelösten schneller hinweisen zu können, die analytischen Ausdrücke für  $\sigma'$  und  $\tau'$  anzugeben. Indem wir sämtliche Kräfte nach den Richtungen von  $\sigma'$  und  $\tau'$  zerlegen und die Summen der nach den gleichen Richtungen wirkenden Seitenkräfte  $= 0$  setzen, erhalten wir:

$$\sigma' - (\sigma_x \cos \alpha - \tau \sin \alpha) \cos \alpha - (\sigma_y \sin \alpha - \tau \cos \alpha) \sin \alpha = 0$$

$$\tau' - (\sigma_x \cos \alpha - \tau \sin \alpha) \sin \alpha + (\sigma_y \sin \alpha - \tau \cos \alpha) \cos \alpha = 0$$

und hieraus folgt dann

$$\sigma' = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha - \tau \sin 2 \alpha$$

$$\tau' = \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \sin 2 \alpha + \tau \cos 2 \alpha.$$

In derselben Weise ergibt sich aus der Betrachtung des Prismas ( $P_2$ )

$$\sigma'' = \sigma_x \sin^2 \alpha + \sigma_y \cos^2 \alpha + \tau \sin 2 \alpha.$$

Vergleicht man diese Ausdrücke mit den auf Seite 45 für die Querschnittsmomente abgeleiteten Formeln (1), so erkennt man, daß zwischen den Spannungen  $\sigma'$ ,  $\sigma''$ ,  $\tau'$  und  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau$  dieselben Beziehungen bestehen, wie zwischen den Querschnittsmomenten  $J_x$ ,  $J_y$ ,  $J_{xy}$  und  $J_x$ ,  $J_y$ ,  $J_{xy}$ . Aus den für die Hauptträgheitsmomente  $J_{max}$  und  $J_{min}$  auf Seite 46 erhaltenen Gleichungen (6) ergeben sich mithin für die Hauptspannungen  $\sigma_I$  und  $\sigma_{II}$  die Werte

$$\sigma_I = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \tau^2}$$

$$\sigma_{II} = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \tau^2}$$

und die Lage der von diesen Spannungen beanspruchten Flächen  $I$  und  $II$  ist bestimmt durch

$$(3) \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{-2\tau}{\sigma_x - \sigma_y}.$$

In den Flächen  $I$  und  $II$  ist  $\tau = 0$ . Aus der Fig. 56, Seite 50, folgt

$$\max J_{xy} = \overline{TM} = \frac{1}{2} (J_1 - J_2);$$

es ist also auch

$$(4) \quad \tau_{\max} = \frac{1}{2} (\sigma_I - \sigma_{II}),$$

und zwar entstehen die größten Schubspannungen in Flächen, die mit den Flächen  $I$  und  $II$  Winkel von  $45^\circ$  bilden.

Wir betrachten jetzt einen unendlich kleinen Würfel, dessen Seitenflächen durch die Hauptspannungen  $\sigma_I$  und  $\sigma_{II}$  beansprucht werden, und bezeichnen die Längen der zu diesen Spannungen parallelen Kanten mit  $l_I$  und  $l_{II}$ . Infolge von  $\sigma_I$  wird  $l_I$  um  $\Delta' l_I = \frac{\sigma_I}{E} l_I$  verlängert ( $E =$  Elastizitätsmodul) und infolge von  $\sigma_{II}$  um  $\Delta'' l_I = \frac{\sigma_{II} l_I}{m E}$  verkürzt, wo  $m$  einen Erfahrungswert bedeutet. Die gesamte Längenänderung ist

$$\Delta l_I = \frac{l_I}{E} \left( \sigma_I - \frac{1}{m} \sigma_{II} \right),$$

und ebenso ergibt sich

$$\Delta l_{II} = \frac{l_{II}}{E} \left( \sigma_{II} - \frac{1}{m} \sigma_I \right).$$

Diejenige allein und im Sinne  $l_I$  wirkende Spannung  $k_I$ , welche dieselbe Änderung  $\Delta l_I$  erzeugt, wie die beiden Spannungen  $\sigma_I$  und  $\sigma_{II}$  zusammen, ist

$$(5) \quad k_I = \sigma_I - \frac{1}{m} \sigma_{II} = \frac{m-1}{2m} (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{m+1}{2m} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2},$$

und ebenso findet man

$$(6) \quad k_{II} = \sigma_{II} - \frac{1}{m} \sigma_I = \frac{m-1}{2m} (\sigma_x + \sigma_y) - \frac{m+1}{2m} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2}.$$

Man erklärt den Stab für hinreichend fest, wenn  $k_I$  und  $k_{II}$  an keiner Stelle gewisse, durch die Erfahrung als zulässig befundene Werte überschreiten, muß dann aber bei der Beurteilung dieser Grenzwerte

$\left( k_I = E \frac{\Delta l_I}{l_I} \text{ und } k_{II} = E \frac{\Delta l_{II}}{l_{II}} \right)$  darauf achten, daß es nicht gleichgültig ist, durch welche Ursachen die Verlängerungsverhältnisse

$\frac{\Delta l_I}{l_I}$  und  $\frac{\Delta l_{II}}{l_{II}}$  hervorgerufen werden. Die allgemeine Anwendung solcher Zahlenwerte  $k$ , die nur aus der Beobachtung von nur auf Zug- oder Druckfestigkeit beanspruchten Stäben abgeleitet werden, kann beim Auftreten von Schubspannungen zu Ergebnissen führen, die mit der Erfahrung nicht im Einklange sind; sie sind höchstens zulässig, wenn die Spannungen  $\tau$  eine so untergeordnete Bedeutung haben, wie bei den auf Biegezugfestigkeit beanspruchten, verhältnismäßig dünnen und langen Stäben.

Die Ziffer  $m$  ergibt sich nach der Molekulartheorie = 4, ist aber in Wirklichkeit für die verschiedenen Stoffe verschieden. Beispielsweise ist für Metalle nahezu  $m = 3$ . Für den in Fig. 94 dargestellten Fall ( $\sigma_x = 0$ ) erhält man dann

$$(6) \quad \begin{cases} k_I = \frac{1}{3} \sigma + \frac{2}{3} \sqrt{\sigma^2 + 4 \tau^2} \\ k_{II} = \frac{1}{3} \sigma - \frac{2}{3} \sqrt{\sigma^2 + 4 \tau^2} \end{cases}$$

Hiernach lassen sich die Inanspruchnahmen  $k_I$  und  $k_{II}$  leicht durch Zeichnung finden, nachdem die Spannungen  $\sigma$  nach den in den §§ 9—10 entwickelten Verfahren mittels einer Geraden dargestellt worden sind. Der Wert  $\sqrt{\sigma^2 + 4 \tau^2}$  ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten  $\sigma$  und  $2\tau$ .

In der Figur 92, welche eine durch den Schwerpunkt gehende Nulllinie der Spannungen  $\sigma$  voraussetzt, geben die der  $u$ -Achse parallelen, von der Geraden  $VW$  aus gemessenen Ordinaten der Linien  $I$  und  $II$ , die den Punkten des Querschnitts-Umfangs entsprechenden Werte  $k_I$  und  $k_{II}$  an. Die Schubspannung  $\tau_0$  wurde verhältnismäßig groß angenommen, und es entspricht deshalb die größte Inanspruchnahme nicht denjenigen Querschnittspunkten  $L$ , für welche  $\sigma$  am größten ist. Meistens jedoch ist  $k_{max} = \sigma_{max}$  oder doch nur so wenig größer als  $\sigma_{max}$ , daß bei der Beurteilung der Festigkeit des Stabes von dem Einflusse der Schubspannungen  $\tau$  abgesehen werden darf.



## IV. Abschnitt.

## Einleitung in die Theorie der ebenen Träger.

## § 13.

## Allgemeines über die äußeren Kräfte.

Die auf einen Träger wirkenden äußeren Kräfte sind teils gegeben und sollen dann *Lasten* heißen, teils bestehen sie aus den zu suchenden, an den Auflagerstellen angreifenden *Stützenwiderständen*.

58. Die *Lasten*. Eine Last heißt eine *ständige* (*bleibende, ruhende*) oder eine *veränderliche* (*bewegliche*), je nachdem sie stets oder nur zeitweise am Träger angreift. So bildet für einen Brückenträger sein Eigengewicht und das Gewicht von Fahrbahn und Querversteifung die ständige Belastung, während ein Eisenbahnzug, eine Schar von Lastwagen oder Menschengedränge als eine veränderliche Belastung zu betrachten ist.

Ein endliche, in einem Punkte angreifende Last wird *Einzellast* (auch *konzentrierte Last*) genannt, im Gegensatze zu der *auf eine Linie oder eine Fläche verteilten stetigen Last*.

In dem besonders häufigen Falle einer *gleichmäßig* auf eine Linie verteilten Belastung bezeichnen wir

die ständige Belastung der Längeneinheit der Linie mit  $g$ ,

„ veränderliche „ „ „ „ „ „ „  $p$

und deuten bei der Bestimmung einer von der Belastung abhängigen Größe (z. B. eines Stützenwiderstandes, eines Momentes) durch einen Zeiger  $g$  oder  $p$  an, daß es sich nur um den Einfluß der ständigen oder der veränderlichen Belastung handelt.

Kann die Belastung in jedem beliebigen Punkte des Trägers angreifen, so nennen wir sie eine *unmittelbare Belastung*; wirkt sie hingegen

infolge der Anordnung von Zwischenträgern (Fig. 96) auf bestimmte Punkte (*Knotenpunkte*) des fraglichen Trägers, so ist sie eine *mittelbar* wirkende. Die in den Knotenpunkten angreifenden Lasten heißen

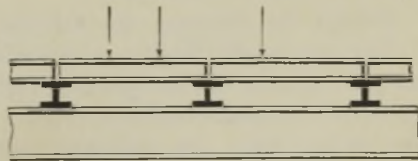


Fig. 96.

*Knotenlasten*, und ein zwischen zwei benachbarten Knotenpunkten gelegenes Trägerstück nennt man ein *Feld des Trägers*.

**59. Auflager. Stützenwiderstände. Mittelgelenk.** Ist es möglich, die durch die Lasten hervorgerufenen Stützenwiderstände ausschließlich mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen zu finden, so wird der Träger ein *äußerlich statisch bestimmter Träger* genannt; im Gegenfalle ist er *äußerlich statisch unbestimmt*. Um diese Frage für einige der wichtigsten Trägerarten, vorbehaltlich einer späteren allgemeineren Untersuchung, zu entscheiden, betrachten wir zunächst die verschiedenen Arten der Auflagerung. Hierbei setzen wir voraus, daß *alle äußeren Kräfte in ein und derselben Ebene, der Kraftebene, liegen* und daß es bei der Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen zulässig ist, die durch jene Kräfte und durch Temperaturänderungen erzeugten Formänderungen der Träger und Stützen zu vernachlässigen. Es dürfen dann alle Kräfte in denjenigen Lagen gedacht werden, welche sie im Falle vollkommen starrer Träger und Stützen einnehmen würden.

In den folgenden Untersuchungen wollen wir den Träger als aus einer oder mehreren *starrren Scheiben* bestehend denken (vergl. die Figuren 97—104) und es dahingestellt sein lassen, ob er *vollwandig* oder *gegliedert* (d. h. aus Stäben zusammengesetzt) ist, oder ob er sowohl vollwandige als auch gegliederte Teile enthält. Bedingung ist nur, daß die gegliederten Scheiben ebenfalls starr sind, welcher Forderung beispielsweise durch die in den folgenden Figuren angenommenen Dreieckssysteme auch dann genügt wird, wenn die Stäbe an ihren Enden durch reibungslose Gelenke miteinander verbunden sind. In mehreren dieser Figuren sind gleichartig gestützte Träger aus vollen und gegliederten Scheiben einander gegenübergestellt worden.

Wird eine Scheibe in einem Punkte festgehalten, so nennen wir diesen Punkt ein *festes Auflagergelenk*, wobei das Wort *Gelenk* andeuten soll, daß sich die Scheibe bei einer etwa eintretenden Bewegung um jenen Punkt drehen kann.

Erfolgt die Stützung der Scheibe in einem Punkte, welcher sich auf einer gegebenen Geraden verschieben kann, diese Gerade aber nicht verläßt, so entsteht ein *bewegliches Auflagergelenk*. Der an dem letzteren angreifende Stützenwiderstand wirkt, wenn keine Reibung stattfindet, senkrecht zur Bahn des Gelenkes (vergl. Auflager *A* in Fig. 98); man braucht nur die *Größe* jenes Widerstandes anzugeben, während an einem festen Auflagergelenke *zwei* Unbekannte auftreten, nämlich *Größe und Richtung* des Stützenwiderstandes.

Wenn die Scheibe in einer Linie festgehalten wird, so ist außer der *Größe* und der *Richtung* des Stützenwiderstandes auch dessen *An-*

*griffspunkt* unbekannt. Wir bezeichnen eine derartige Auflagerung kurz als *feste Einspannung*.

Erfolgt hingegen die Stützung längs einer Linie, welche auf einer anderen widerstandslos gleiten kann, (z. B.  $B$  in Fig. 98) so liegt eine *bewegliche Einspannung* vor; der Stützenwiderstand wirkt rechtwinklig zur Auflagerbahn; er ist bestimmt, sobald seine Größe und sein Angriffspunkt gefunden sind.

Hängen zwei Scheiben in einem Punkte  $G$  zusammen, um welchen sie sich beim Eintreten einer Bewegung widerstandslos drehen können (Fig. 104), so nennen wir sie gelenkartig miteinander befestigt.  $G$  heißt ein *Mittelgelenk*; es wird in Wirklichkeit, ebenso wie die Auflagergelenke, mittels zylindrischer oder kugelförmiger Zapfen oder mit Hilfe von zwei aufeinander sich abwälzenden runden Teilen hergestellt, deren Reibungswiderstände in der Folge vernachlässigt werden sollen.

**60. Stützung eines aus einer Scheibe gebildeten Trägers.** Besteht der Träger aus *einer* Scheibe, und soll er äußerlich statisch bestimmt sein, so muß er in einer der folgenden Arten gestützt werden.

1. Der Träger wird an einer Stelle *fest eingespannt*. Fig. 97. Der Stützenwiderstand hat dann gleiche Größe aber entgegengesetzten Sinn wie die Mittelkraft  $R$  der Lasten und fällt mit  $R$  in dieselbe Gerade.

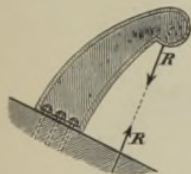


Fig. 97.

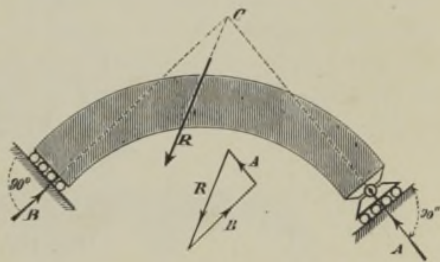


Fig. 98.

2. Der Träger besitzt ein *bewegliches Auflagergelenk* ( $A$ ) und ist an einer Stelle *beweglich eingespannt*. Fig. 98. Die Stützenwiderstände sind senkrecht zu den Auflagerbahnen; ihre Richtungen sind somit bekannt. Von dem Widerstande  $A$  kennt man auch den Angriffspunkt, und es ist deshalb der Schnittpunkt  $C$  der Kräfte  $A$  und  $R$  gegeben. Sollen nun die drei Kräfte  $A$ ,  $B$ ,  $R$  miteinander im Gleichgewichte sein, so müssen sie sich in einem Punkte treffen, und hieraus



folgt, daß das Lot von  $C$  auf die Bahn des Lagers  $B$  die Richtung des Widerstandes  $B$  angibt. Die Unbekannten  $A$  und  $B$  können jetzt mittels eines Kräfte dreiecks bestimmt werden.

3. Der Träger erhält ein festes und ein bewegliches Auflagergelenk, an denen die Widerstände  $B$  und  $A$  angreifen. Fig. 99.

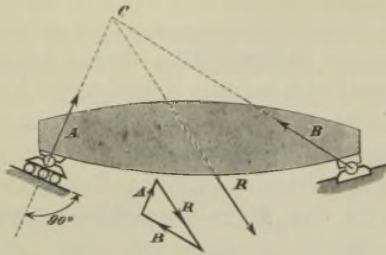


Fig. 99.

Von  $B$  kennt man den Angriffspunkt, von  $A$  Angriffspunkt und Richtung; letztere ist senkrecht zur Auflagerbahn und schneidet die Last  $R$  im Punkte  $C$ . Die Gerade  $BC$  gibt die Richtung des Widerstandes  $B$  an, und es können nun  $A$  und  $B$  mittels eines Kräfte dreiecks gefunden werden.

4. Der Träger erhält drei bewegliche Auflagergelenke, deren zu den Auflagerbahnen senkrechte Widerstände  $A$ ,  $B$ ,  $C$  sich nicht in einem Punkte treffen. Fig. 100. Ihre Ermittlung erfordert die (in der Fig. 100 ausgeführte) Lösung der in No. 12 auf Seite 15 behandelten Aufgabe: drei der

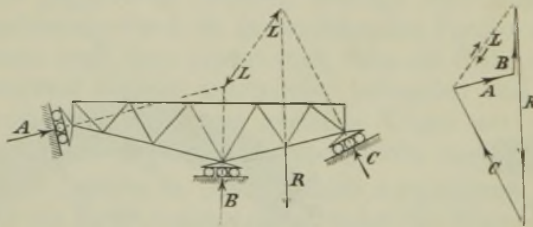


Fig. 100.

Lage nach bekannte Kräfte  $A$ ,  $B$ ,  $C$  zu bestimmen, welche einer gegebenen Kraft  $R$  das Gleichgewicht halten.

Am wichtigsten ist die dritte der angegebenen Stützungsarten. Ist bei dieser die Bahn des beweglichen Auflagergelenkes eine wagerechte Gerade, so rufen senkrechte Lasten nur senkrechte Stützwiderstände hervor. Man nennt diesen Träger einen *Balken*. Fig. 101.

Die Anzahl der an den Auflagern auftretenden Unbekannten (nämlich Angriffspunkt, Richtung und Größe eines jeden Stützwiderstandes) ist für sämtliche oben angegebenen Stützungsarten einer



Scheibe = 3; sie ist ebenso groß wie die Anzahl der allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen, welche für ein an einem starren Körper wirkendes ebenes Kräftesystem in der Weise aufgestellt werden können, daß die Kraftebene auf ein beliebiges Achsenkreuz ( $x, y$ )

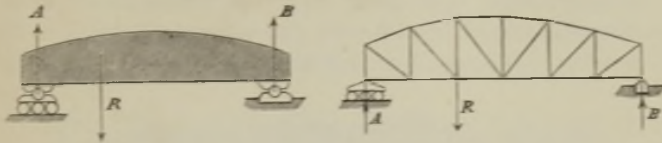


Fig. 101.

bezogen und jede Kraft nach den Richtungen der beiden Achsen zerlegt wird, worauf dann jede der folgenden drei Summen gleich Null gesetzt wird:

- die Summe aller nach der Richtung der  $x$ -Achse wirkenden Seitenkräfte,
- die Summe aller nach der Richtung der  $y$ -Achse wirkenden Seitenkräfte,
- die Summe der auf irgend einen Drehpunkt bezogenen Momente sämtlicher Kräfte.

Treten an den Auflagern eines aus *einer* Scheibe bestehenden Trägers mehr als drei Unbekannte auf, so lassen sich die Stützenwiderstände nicht mehr mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen allein bestimmen; es entsteht ein äußerlich statisch unbestimmter Träger. Ein solcher ist z. B. der in Fig. 102 dargestellte *durchlaufende (kontinuierliche)*

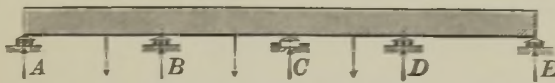


Fig. 102.

*Balken*, welcher *ein* festes und mehrere (mindestens 2) bewegliche Auflagergelenke besitzt; am ersteren treten zwei Unbekannte auf (nämlich Richtung und Größe des Stützenwiderstandes) und an jedem der letzteren eine Unbekannte (die Größe des Stützenwiderstandes). Im ganzen sind bei  $n$  Auflagern ( $n + 1$ ) Unbekannte zu bestimmen, und es fehlen, da diesen nur 3 Gleichgewichtsbedingungen gegenüberstehen,  $n - 2$  Bedingungen, welche sich, wie wir später zeigen werden, aus der Betrachtung der Formänderung des Balkens ergeben.

Der Träger ist also hinsichtlich der äußeren Kräfte  $(n - 2)$ -fach statisch unbestimmt.

**61. Gelenkträger.** Ein aus *mehreren* gelenkartig miteinander verbundenen Scheiben bestehender Träger kann auch bei beliebig vielen Stützen äußerlich statisch bestimmt sein. So kann z. B. der vorhin behandelte durchgehende Balken durch die Anbringung von  $(n - 2)$  Mittelgelenken, von denen aber ein zwischen zwei Auflagern liegender Trägerabschnitt höchstens 2 enthalten darf, statisch bestimmt gemacht werden. Die an den Auflagern auftretenden  $n + 1$  Unbe-

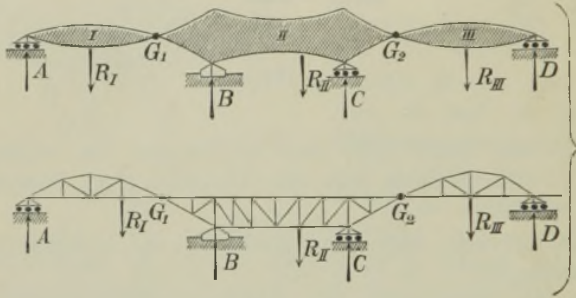


Fig. 103.

kannten können jetzt mittels der 3 allgemeinen und der  $n - 2$  infolge der Gelenke hinzutretenden besonderen Gleichgewichtsbedingungen ermittelt werden.

So ist z. B. der in Fig. 103 dargestellte Träger nur dann im Gleichgewicht, wenn die Mittelkraft aus dem Stützenwiderstande  $A$  und der Belastung  $R_I$  der Scheibe  $I$  durch das Gelenk  $G_1$  geht, weil sich sonst diese Scheibe um  $G_1$  drehen würde. Ebenso muß auch die Mittelkraft aus  $R_{III}$  und  $D$  durch das Gelenk  $G_2$  gehen. Der Träger ist also äußerlich statisch bestimmt.

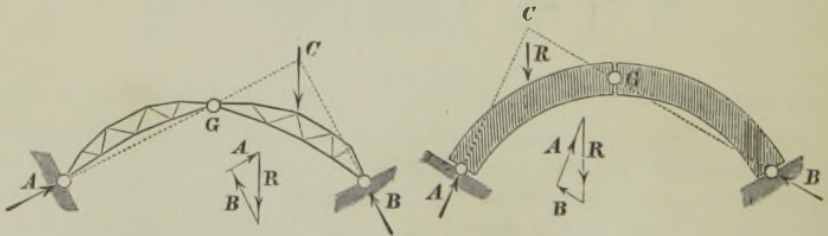


Fig. 104.

Ein zweites Beispiel für einen statisch bestimmten Gelenkträger ist der in Fig. 104 dargestellte. Er besteht aus zwei Scheiben,

welche bei  $A$  und  $B$  feste Auflagergelenke haben und durch ein Mittelgelenk  $G$  miteinander verbunden sind; man nennt ihn den *Bogen mit drei Gelenken*. Eine auf die linke Scheibe wirkende Last  $R$  ruft bei unbelasteter rechter Scheibe (welche jetzt gewichtslos zu denken ist) am rechten Auflager einen Stützenwiderstand  $B$  hervor, der durch das Scheitelgelenk gehen muß, weil sich im Gegenfalle die unbelastete rechte Scheibe um  $G$  drehen würde. Der linksseitige Stützenwiderstand geht durch den Schnittpunkt  $C$  der Kräfte  $R$  und  $B$ , ist also ebenfalls der Lage nach bekannt, weshalb sich  $A$  und  $B$  mittels eines Kräftedreiecks bestimmen lassen.

In gleicher Weise werden die von einer Belastung der rechten Scheibe herrührenden Kräfte  $A$  und  $B$  ermittelt.

## § 14.

### Allgemeines über Einflußlinien.

**62. Voraussetzungen und Erklärungen.** Zu den wichtigsten der in den folgenden Abschnitten zu lösenden Aufgaben gehört die Untersuchung des Einflusses beweglicher, paralleler Lasten auf irgend eine derjenigen Unbekannten  $Z$ , um deren Ermittlung es sich bei der Berechnung eines Trägers handelt, und deren Art wir vorläufig unbestimmt lassen. Es sei also zunächst dahingestellt, ob  $Z$  einen Stützenwiderstand (wie beispielsweise in Fig. 105), oder ein Biegemoment, oder eine Querkraft u. s. w. bedeutet, hingegen werde vorausgesetzt:

1) daß der durch irgend eine Last  $P$  hervorgerufene Wert  $Z$  dieser Last proportional ist, mithin die Form  $Z = P\eta$  annimmt, wo  $\eta$  einen von  $P$  unabhängigen Koeffizienten bedeutet,

2) daß der durch irgend ein Lastensystem erzeugte Wert  $Z$  gleich der Summe der von den einzelnen Lasten herrührenden Werte  $Z$  ist.

Entsprechen dann den einzeln aufgebrachten Lasten  $P_1, P_2, P_3 \dots$  in irgend welchen Lagen die Werte  $Z = P_1\eta_1; Z = P_2\eta_2; Z = P_3\eta_3 \dots$ , so erzeugen die gleichzeitig in jenen Lagen wirkenden Lasten zusammen:

$$(1) \quad Z = P_1\eta_1 + P_2\eta_2 + P_3\eta_3 + \dots$$

Um  $Z$  zu bestimmen, empfiehlt es sich, den Einfluß  $\eta$  einer über den Träger wandernden Last  $P = 1$  für alle möglichen Lagen dieser Last zu ermitteln und in der Richtungslinie der Last, von einer Geraden  $AB$  aus, als Ordinate aufzutragen (Fig. 105).

Die Endpunkte dieser Ordinaten bilden dann die *Einflußlinie für  $Z$* ; die von dieser Linie und jener Geraden begrenzte Fläche heißt die *Einflußfläche für  $Z$* .



Ist die Einflußlinie gegeben, so ist man im stande, den durch irgend ein Lastensystem hervorgerufenen Wert  $Z$  zu finden. Man hat nur nötig, die den einzelnen Lasten  $P_1, P_2, P_3 \dots$  entsprechenden Ordinaten  $\eta_1, \eta_2, \eta_3 \dots$  der Einflußlinie zu messen, und hierauf die Gleichung (1) anzuwenden.

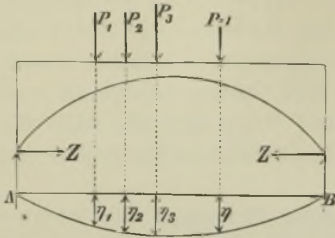


Fig. 105.

In der Folge wollen wir uns, der kürzeren Ausdrucksweise wegen, die Gerade  $AB$  wagerecht und die Lasten senkrecht denken.

**63. Mittelbare Belastung.** Meistens handelt es sich um Lasten, welche durch einfache Zwischenträger auf die Knotenpunkte des in Frage stehenden Trägers verteilt werden. Liegt dann zwischen zwei Knotenpunkten  $(m - 1)$  und  $m$  eine Last  $P$  im Abstände  $x$  von  $m$  (Fig. 106), so erhält man für die Knotenlasten  $P_{m-1}$  und  $P_m$  die Ausdrücke:

$$(2) \quad P_{m-1} = P \frac{x}{\lambda} \quad \text{und} \quad P_m = P \frac{\lambda - x}{\lambda},$$

wobei  $\lambda$  die Feldweite bedeutet. Besitzt nun die für irgend einen Wert  $Z$  gezeichnete Einflußlinie unter  $(m - 1)$  und  $m$  die Ordinaten  $\eta_{m-1}$  und  $\eta_m$  und unter der Last  $P$  die Ordinate  $\eta$ , so muß offenbar sein:

$$P\eta = P_{m-1} \eta_{m-1} + P_m \eta_m$$

und hieraus folgt mit Rücksicht auf Gleich. (2):

$$(3) \quad \eta = \eta_{m-1} \frac{x}{\lambda} + \eta_m \frac{\lambda - x}{\lambda}.$$

Da dieser Ausdruck in Bezug auf die Veränderliche  $x$  vom ersten Grade ist, so ist die Einflußlinie zwischen je zwei Knotenpunkten eine gerade Linie.

**64. Einfluß einer gleichmäßigen Belastung.** Wird das Trägerstück  $(x_2 - x_1)$  gleichmäßig mit  $p$  für die Längeneinheit belastet (Fig. 107) und bezeichnet  $\eta_x$  die an der Stelle  $x$  gemessene Ordinate der für irgend einen Wert  $Z$  gezeichneten Einflußlinie, so ist der Einfluß des Lastteilchens  $p dx$  gleich  $p dx \cdot \eta_x$  und derjenige der gesamten gleichmäßigen Belastung:

$$(4) \quad Z = p \int_{x_1}^{x_2} \eta_x dx = p \delta,$$



unter  $\mathfrak{F}$  den Inhalt des zur Strecke  $(x_2 - x_1)$  gehörigen, in der Fig. 107 schraffierten Teiles der Einflußfläche verstanden.

Im allgemeinen werden die Ordinaten  $\eta$  verschiedene Vorzeichen haben; man nennt dann die Punkte, in denen die Einflußlinie die Achse  $AB$  schneidet, *Belastungsscheiden* oder *Nullpunkte*; sie zerlegen

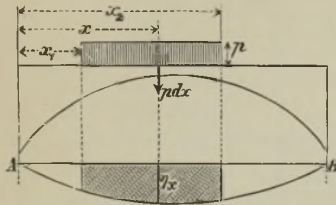


Fig. 107.

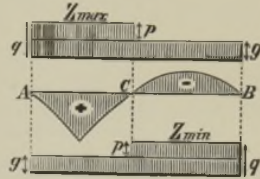


Fig. 108.

die  $AB$  in *positive* und *negative Beitragstrecken*; den Punkten der ersteren entsprechen positive Ordinaten  $\eta$ , denjenigen der letzteren negative  $\eta$ . Vergl. Fig. 108, in welcher  $AC$  eine positive und  $CB$  eine negative Beitragstrecke ist.

Besteht nun die gleichmäßige Belastung aus einer *ständigen* Last ( $g$  für die Längeneinheit) und einer *veränderlichen* Last ( $p$  für die Längeneinheit), so erhält man den größten positiven Wert  $Z$  (d. i.  $Z_{max}$ ) oder den größten negativen Wert  $Z$  (d. i.  $Z_{min}$ ), je nachdem man die veränderliche Belastung nur innerhalb der positiven Beitragstrecken oder nur innerhalb der negativen Beitragstrecken aufbringt, Fig. 108. Im ersten Falle ergibt sich, wenn

$\mathfrak{F}_+$  den Inhalt des positiven Teils der Einflußfläche,\*)

$\mathfrak{F}_-$  " " " negativen " " "

bedeutet, und wenn  $p + g = q$  gesetzt wird,

$$(5) \dots Z_{max} = q\mathfrak{F}_+ - g\mathfrak{F}_-$$

und im zweiten Falle folgt:

$$(6) Z_{min} = g\mathfrak{F}_+ - q\mathfrak{F}_-$$

Man nennt  $Z_{max}$  und  $Z_{min}$  die *Grenzwerte* von  $Z$ .\*\*)

Bei mittelbarer Belastung und im Falle einer konstanten Feldweite  $\lambda$ , Fig. 109, ist häufig ein Näherungsverfahren zu empfehlen, welches darin besteht, daß bei der Berechnung von  $Z_{max}$  jeder Knotenpunkt, welchem ein positives  $\eta$  entspricht, mit  $q\lambda$  belastet wird und jeder Knotenpunkt einer negativen Beitragstrecke mit  $g\lambda$ , während bei

\*) Die an  $\mathfrak{F}$  gesetzten Zeichen  $+$  und  $-$  sind keine *Vorzeichen*, sondern nur *Zeiger*; die  $\mathfrak{F}$  sind absolute Werte.

\*\*\*) Wird  $Z_{max}$  negativ, so stellt es den kleinsten negativen Wert von  $Z$  vor; ein positives  $Z_{min}$  bedeutet den kleinsten positiven Wert von  $Z$ .

der Ermittlung von  $Z_{min}$  die Lasten  $q\lambda$  ersetzt werden durch Lasten  $g\lambda$  und umgekehrt. Für den in Fig. 109 dargestellten Fall ergibt sich z. B.:

$$\begin{aligned} Z_{max} &= q\lambda (\eta_1 + \eta_2 + \eta_3) - g\lambda (\eta_4 + \eta_5 + \eta_6 + \eta_7) \\ Z_{min} &= g\lambda (\eta_1 + \eta_2 + \eta_3) - q\lambda (\eta_4 + \eta_5 + \eta_6 + \eta_7), \end{aligned}$$

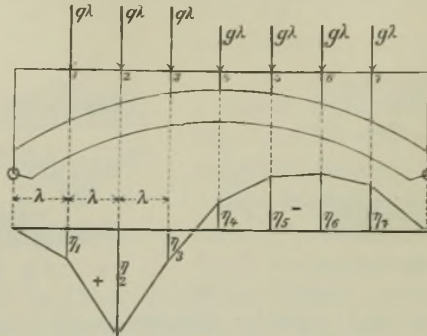


Fig. 109.

wobei  $\eta_1, \eta_2, \eta_3 \dots$  die den Knotenpunkten 1, 2, 3  $\dots$  entsprechenden Ordinaten der Einflußlinie bedeuten. In der Folge bezeichnen wir mit

$\Sigma_+$  die Summe aller positiven, unter den Knotenpunkten gemessenen  $\eta$ , mit

$\Sigma_-$  desgl. die Summe aller negativen  $\eta$ ,

und erhalten die Formeln:

$$(7) \quad \begin{cases} Z_{max} = q\lambda \Sigma_+ - g\lambda \Sigma_- \\ Z_{min} = g\lambda \Sigma_+ - q\lambda \Sigma_- \end{cases}$$

welche für  $Z_{max}$  und  $Z_{min}$  größere Werte liefern als die in Wirklichkeit entstehenden. Denn belastet man z. B. in Fig. 109 die positive Beitragstrecke mit  $q$  für die Längeneinheit und die negative mit  $g$ , so ergibt sich die Belastung ( $P_3$ ) des Knotenpunktes 3 kleiner als  $q\lambda$  und diejenige ( $P_4$ ) vom Knotenpunkt 4 größer als  $g\lambda$ . Eine Verkleinerung von  $P_3$  und eine Vergrößerung von  $P_4$  haben aber eine Verkleinerung von  $Z$  zur Folge, so daß der aus Gleich. (7) gefundene Wert  $Z_{max}$  sich größer ergeben muß als der genaue Wert aus Gleich. (5), und auf dieselbe Weise überzeugt man sich, daß der in Gleich. (7) für ( $-Z_{min}$ ) angegebene Klammerausdruck größer ist als der entsprechende Wert in Gleich. (6).

Der nur von der ständigen Last abhängige Teil von  $Z$  ist:

$$(8) \quad Z_g = g (\mathfrak{F}_+ - \mathfrak{F}_-)$$

und, bei gleich langen Feldern:

$$(9) \quad Z_g = g\lambda (\Sigma_+ - \Sigma_-).$$





Will man den vorstehenden Klammersausdruck durch Zeichnung finden, so reihe man die Kräfte  $R_1, R_2, R_3, \dots$  auf einer Wage-rechten  $ab$  aneinander, mache also  $\overline{ac} = R_1, \overline{cd} = R_2, \overline{de} = R_3, \dots$  und trage vom Punkte  $a$  aus ein Polygon auf, dessen Seiten  $I, II, III, \dots$  den gleichbezeichneten Seiten des Einflußpolygons parallel sind, und dessen Ecken auf den in den Punkten  $c, d, e, \dots$  errichteten Loten  $cc', dd', ee', \dots$  liegen. Es schneidet dann dieses Polygon, welches wir einen *Parallelenzug* nennen wollen, auf dem Lote in  $b$  die Strecke

$$\overline{bb'} = R_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + R_2 \operatorname{tg} \alpha_2 + R_3 \operatorname{tg} \alpha_3 + \dots$$

ab. Ist  $\overline{bb'}$  positiv, d. h. liegt  $b'$  oberhalb  $b$ , so wird infolge der vorgenommenen Verschiebung des Lastenzuges der Wert  $Z$  vergrößert, und es beweist dies dann, daß die zuerst angenommene Stellung dieses Zuges nicht die gefährlichste war.

Auf gleiche Weise findet man, daß der Wert  $Z$  infolge einer Verschiebung des Zuges nach *links* vergrößert oder verkleinert wird, je nachdem der Endpunkt  $a'$  eines durch  $b$  gelegten Parallelenzuges oberhalb oder unterhalb  $a$  liegt.

In der Fig. 110 wurde eine Last, nämlich  $P_5$ , unter einer Ecke des Einflußpolygons angenommen; sie muß dann der Strecke  $EF$  oder der Strecke  $DE$  zugewiesen werden, je nachdem der Lastenzug nach rechts oder nach links verschoben wird. Bei der ersten Verschiebung ergab sich  $b'$  unterhalb  $b$ , bei der zweiten  $a'$  unterhalb  $a$ ; mithin ist die gezeichnete Stellung des Lastenzuges die gefährlichste.

Man muß bei der Wahl der Zugstellung natürlich auch darauf achten, daß die schwersten Lasten in der Nähe der größten Ordinaten  $\eta$  liegen; denn es lassen sich im allgemeinen für verschiedene Zugstellungen Parallelenzüge zeichnen, welche der Bedingung:  *$b'$  unterhalb  $b$  und  $a'$  unterhalb  $a$*  genügen. Ferner leuchtet ein, daß bei der gefährlichsten Stellung des Zuges stets eine Last bei einer Ecke der Einflußlinie liegen muß. Denn, ist dies nicht der Fall, so sind die Mittelkräfte  $R$  bei einer Verschiebung des Zuges nach rechts dieselben, wie bei der Verschiebung nach links, und es unterscheiden sich dann die Werte  $\Delta Z$  für zwei entgegengesetzte Bewegungen nur durch das Vorzeichen; der einen Verschiebung muß also ein positives  $\Delta Z$  entsprechen.

**66. Verkehrsbelastung der Eisenbahnbrücken.** Die Einflußlinien sind besonders wichtig für die Berechnung der Eisenbahnbrücken. Als regelmäßige Betriebsbelastung ist ein Zug aus zwei Lokomotiven in ungünstigster Stellung, bald vorwärts-, bald rückwärtsfahrend (Fig. 111 bis 114) mit einer unbeschränkten Anzahl einseitig angehängter Güterwagen anzusehen, wobei man nicht nötig hat, sich streng an die genauen Radstände und Achslasten der schwersten auf der Bahn-



linie verkehrenden Fahrzeuge zu halten, weil die in Rechnung gestellten Belastungen sich stets auf die stillstehende Lokomotive beziehen, während sie bei der fahrenden Maschine veränderlich sind und einem ziemlich verwickelten Gesetze folgen, dessen Berücksichtigung bei statischen Untersuchungen ausgeschlossen ist. Für die Annahme gut abgerundeter Werte spricht aber auch die Vielheit der vorkommenden Abmessungen und Gewichtsverteilungen von Lokomotiven schwerster Bauart und der Umstand, daß Radstand und Achslast Werte sind, die sich bei Neubeschaffungen ändern.

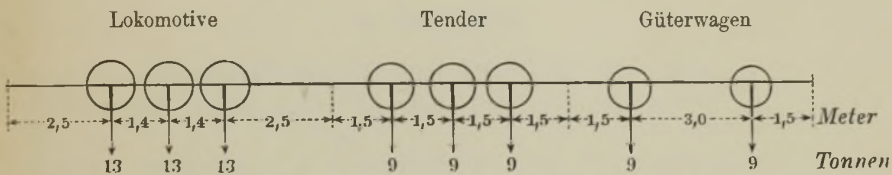


Fig. 111.

Die in Fig. 111 angegebenen Radstände und Achslasten entsprachen bei der Drucklegung der zweiten Auflage dieses Buches (1887) den damals an eiserne Brücken zu stellenden Anforderungen; sie ergaben sich durch Abrundung der zu jener Zeit für die preußischen Staatsbahnen angenommenen Normal-Güterzuglokomotive und wurden allen Zahlenbeispielen dieses Buches zu Grunde gelegt. Dabei wurde, abweichend von dem jetzt herrschenden Gebrauch, mit drei Lokomotiven gerechnet und, für den Fall voller Belastung der Brücke, zu beiden Seiten der Lokomotiven eine Reihe von Güterwagen aufgestellt. Eine Umrechnung dieser Zahlenbeispiele für die neuen Auflagen hielt der Verfasser für überflüssig, weil die Zahlenbeispiele nur dazu dienen sollen, die Anwendung des vorgetragenen Lehrstoffes zu erläutern und das Verständnis der allgemeinen Gesetze zu fördern. Für alle neu hinzugetretenen Zahlenbeispiele sind dagegen Belastungen gewählt worden, die den gesteigerten Ansprüchen der Neuzeit genügen.

Die Achslasten sind so erheblich gestiegen, die Radstände dabei kleiner geworden, daß selbst Brücken, die nur wenige Jahrzehnte im Betrieb sind, heute bereits umgerechnet und verstärkt werden müssen.

Zunächst wurden vom preußischen Minister der öffentlichen Arbeiten durch Erlaß vom 15. September 1895 für die Berechnung der Brücken die in Fig. 112 angegebenen Achsenbelastungen vorgeschrieben. Rundet man diese Werte ab und führt man für die einzelnen Fahrzeuge eine möglichst gleichförmige Gewichtsverteilung

ein, so gelangt man zu den in Fig. 113 dargestellten Lasten, welche in ihrer Wirkung auf die Brücke den in jener preußischen Verordnung vorgesehenen Lasten gleichwertig sind.

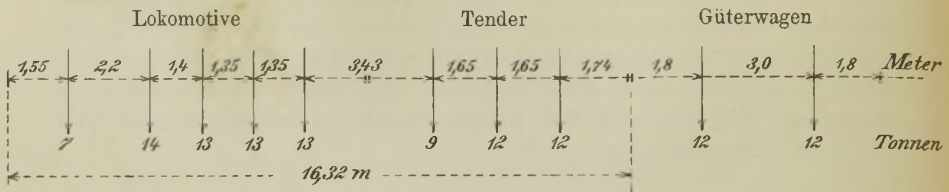


Fig. 112.

Es empfiehlt sich aber, die Belastung der Lokomotivachse auf mindestens 16<sup>t</sup> zu erhöhen und, falls mit vierachsigen Lokomotiven

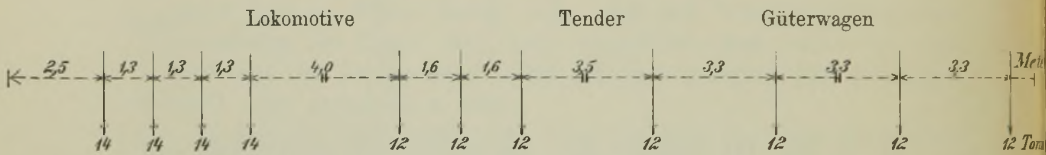


Fig. 113.

gerechnet wird, den Radstand auf 1,2<sup>m</sup> herabzusetzen, Fig. 114, eine Annahme, die bei den neu hinzutretenden Zahlenbeispielen gemacht wurde.

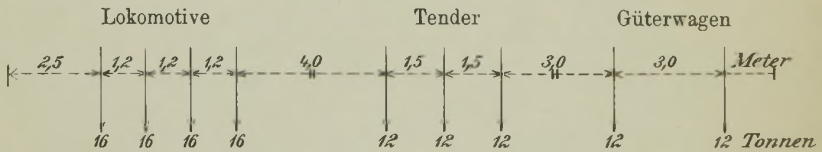


Fig. 114.

Die neuesten, während der Drucklegung der dritten Auflage dieses Buches veröffentlichten Vorschriften sind im Anhang zusammengestellt worden.

V. Abschnitt.

**Querkräfte und Angriffsmomente für den einfachen Balken.**

§ 15.

**Ständige, unmittelbar wirkende Belastung.**

**a. Einzellasten.**

67. **Stützenwiderstände.** Auf einen an den Enden gestützten wagerechten Balken  $AB$ , Fig. 115, wirken die senkrechten Lasten  $P_1, P_2, P_3, P_4$ . Die Widerstände  $A$  und  $B$  der Stützen sind senkrecht gerichtet. Um sie zu bestimmen, reihe man die Lasten  $P$  auf einer Geraden  $DE$  aneinander, ziehe von einem beliebigen Pole  $O$  aus die Seilstrahlen  $I, II, III, IV, V$  und zeichne nach den bekannten Regeln das Seilpolygon. Es schneidet die Auflagersenkrechten in den Punkten  $a$  und  $b$ , welche durch die *Schlußlinie*  $s$  verbunden werden. Eine vom Pole zu der Linie  $s$  gezogene Parallele zerlegt die Lastensumme  $P_1 + P_2 + P_3 + P_4$  in die aufwärts gerichteten Auflagerkräfte  $A$  und  $B$ . Der Beweis ist in No. 11 (Seite 14) nachzusehen.

68. **Querkräfte.** Der Balken werde durch einen an irgend einer Stelle  $C$  (Fig. 115) geführten senkrechten Schnitt in zwei Teile zerlegt.

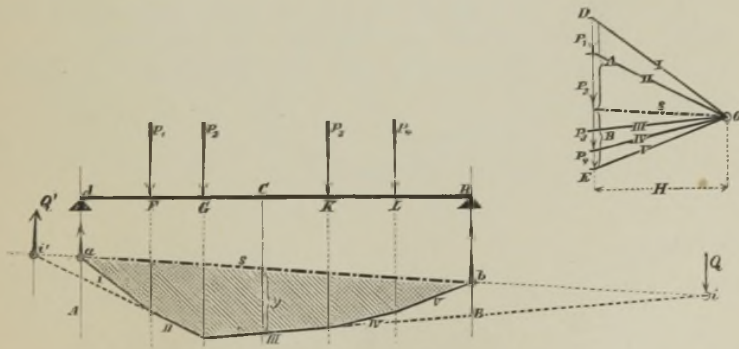


Fig. 115.

Die Mittelkraft aus den am linken Teile angreifenden Kräften  $A, P_1$  und  $P_2$  ist, wenn die Richtung nach oben positiv angenommen wird:

$$Q = A - P_1 - P_2;$$

sie heißt *Querkraft für den Querschnitt C* (auch *Vertikalkraft* oder *Transversalkraft*) und sucht das linke Balkenstück gegen das festgehalten gedachte rechte Stück in senkrechter Richtung zu verschieben, welche Bewegung durch die im Querschnitt *C* hervorgerufenen Schubspannungen verhindert wird. Vergl. Seite 101.

Im Kräfteplane wird *Q* als die auf dem Kräftezuge zwischen den Seilstrahlen *s* und *III* gelegene Strecke gewonnen, und zwar ist *Q* negativ, d. h. nach unten gerichtet, wenn  $P_1 + P_2 > A$ , d. h. wenn beim hängenden Seilpolygone (wie in Fig. 115) der Strahl *III* unterhalb *s* liegt. Man beachte auch, daß die Strahlen *s* und *III* den Seilpolygonseiten entsprechen, welche der bei *C* geführte Schnitt trifft, und daß Strahl *III* im Kräfteplane unterhalb *s* liegt, sobald sich die entsprechenden Seilpolygonseiten in einem rechts von *C* gelegenen Punkte *i* schneiden. Durch diesen Punkt *i* geht die Kraft *Q*; sie ist gleich groß für alle Schnitte zwischen  $P_2$  und  $P_3$ .

Für die Schnitte zwischen  $P_1$  und  $P_2$  ergibt sich die Querkraft:  $Q' = A - P_1$ ; sie ist positiv, weil sich die Seilpolygonseiten *s* und *II* links vom Querschnitt schneiden.

Bezeichnet man die Strecke, welche Seilpolygon und Schlußlinie auf der Senkrechten durch den fraglichen Querschnitt abschneiden, mit *y*, so darf man den Satz aussprechen:

*Die Querkräfte sind positiv, so lange die Strecken y wachsen, dagegen negativ bei abnehmenden y.*

Man nennt *y* die auf die Schlußlinie bezogene Ordinate des Seilpolygons.

Will man *Q* als die Summe der auf das rechte Balkenstück wirkenden Kräfte auffassen, so hat man folgendes zu beachten.

Da vorhin die Querkraft *Q* für den Querschnitt *C* durch die Gleichung

$$Q = A - P_1 - P_2$$

erklärt wurde und sich aus der Bedingung

$$A + B = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$$

die Gleichung  $A - P_1 - P_2 = -B + P_3 + P_4$

ergibt, so muß man jetzt setzen:

$$Q = -B + P_3 + P_4,$$

d. h. man muß am rechten Balkenstücke die Richtung nach unten als die positive einführen.

**69. Momente.** Das Moment der am Teile *AC* angreifenden Kräfte *A*,  $P_1$ ,  $P_2$  in Bezug auf den Schwerpunkt des Querschnittes *C* nennt man das *Angriffsmoment* (auch *Biegemoment* oder kurz das



Moment) für den Querschnitt  $C$ ; es werde positiv angenommen, sobald es im Sinne des Uhrzeigers dreht und ist, nach No. 15 auf Seite 18, gleich dem Produkte aus der Polweite  $H$  und der Ordinate  $y$  des Seilpolygons; es ergibt sich für sämtliche Querschnitte positiv, sobald, wie in Fig. 115, alle Lasten nach unten gerichtet sind. Liegt nämlich die Mittelkraft  $Q$  aus  $A$ ,  $P_1$  und  $P_2$  rechts von  $C$ , so ist sie nach den früheren Ausführungen abwärts gerichtet, also rechts um  $C$  drehend; liegt sie links von  $C$ , so ist sie aufwärts gerichtet und dreht dann ebenfalls rechts um  $C$ .

Man sagt auch: das Moment  $M$  ist positiv, sobald die elastische Linie, d. i. die Linie, welche die Achse des belasteten Balkens bildet, nach oben hohl ist ( $\smile$ ). Bei einem an den Enden unterstützten, nur durch abwärts gerichtete Lasten beanspruchten Balken ist dies an allen Stellen der Fall, es ist also hier durchweg

$$M = + Hy.$$

Betrachtet man  $M$  als das auf  $C$  bezogene Moment der am rechten Balkenstücke angreifenden Kräfte, so muß man die Drehung im Sinne des Uhrzeigers negativ annehmen; denn die Mittelkraft der am Teile  $BC$  wirksamen Kräfte ist der Mittelkraft aus den Kräften links von  $C$  entgegengesetzt gleich.

Die Bestimmung der Momente  $M$  mit Hilfe des Seilpolygons hat zuerst *Culmann* gezeigt. Daher nennt man auch die vom Seilpolygone und von der Schlußlinie begrenzte (in Fig. 115 schraffierte) Fläche die *Culmannsche Momentenfläche*.

**Zahlenbeispiel.** Der Balken habe die Länge  $\overline{AB} = 5^m$  (vergl. Fig. 115) und werde durch die Angriffspunkte der Lasten in Teile von den Längen:  $\overline{AF} = 0,8^m$ ;  $\overline{FG} = 1,2^m$ ;  $\overline{GK} = 0,9^m$ ;  $\overline{KL} = 1,4^m$ ;  $\overline{LB} = 0,7^m$  zerlegt. Die Lasten seien:  $P_1 = 2000^k$ ;  $P_2 = 2500^k$ ;  $P_3 = 800^k$ ;  $P_4 = 1200^k$ . Wählt man dann die (willkürliche) Polweite:  $H = 2000^k$ , so erhält man  $y_{max} = 2,48^m$  (unter Last  $P_2$ ), und es wird das größte Biegemoment:  $M = Hy_{max} = 2000 \cdot 2,48 = 4960^k m$ . Besitzt der Balken einen konstanten Querschnitt, so sind seine größten Beanspruchungen nach Seite 60 (mit Vernachlässigung des Einflusses der Querkräfte):

$$\sigma_1 = \frac{M e_1}{J}; \quad \sigma_2 = -\frac{M e_2}{J}.$$

Die Stützenwiderstände sind  $A = 3680^k$ ;  $B = 2820^k$ .  
Dem Leser wird empfohlen, die Zeichnung auszuführen.

### b. Stetige Belastung.

70. Wenn die Lasten in unendlich kleinen Abständen voneinander wirken, so geht das Seilpolygon in eine krumme Linie über. Es ist dies der Fall bei einer stetigen Belastung (Fig. 116); denn eine solche

besteht aus unendlich vielen unendlich kleinen Einzellasten, die einander unendlich nahe sind. Um nun die Seillinie zu ermitteln, ersetze man die stetige Belastung durch eine Reihe von in endlichen Entfernungen wirkenden Einzellasten, zeichne zu diesen ein Seilpolygon und beschreibe in dieses eine Kurve.

So wurde in Figur 116 die gleichförmig verteilte Last  $P$  durch die drei Einzellasten  $\frac{1}{3}P$  ersetzt, indem die *Belastungsfläche* durch

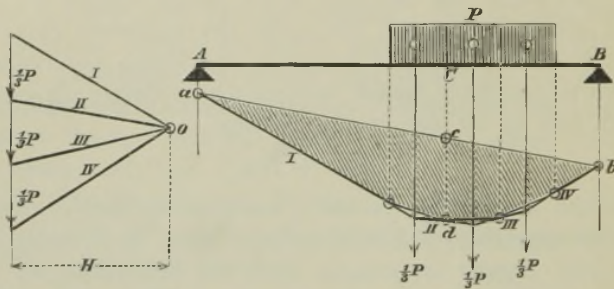


Fig. 116.

senkrechte Schnitte in drei Streifen zerlegt wurde. Für einen an der Grenze zweier Streifen befindlichen Querschnitt liefert das Seilpolygon die genaue Momentenordinate  $\overline{cd} = y$ ; denn, wenn man beispielsweise das Moment der links von  $C$  wirkenden Kräfte in Bezug auf  $C$  bildet, so darf man die stetige Belastung  $\frac{1}{3}P$  im Schwerpunkte vereinigen.

Es folgt hieraus:

Die senkrechten Schnitte, welche die Belastungsfläche in Streifen zerlegen, treffen das Seilpolygon in den Berührungspunkten der in das Seilpolygon einzubeschreibenden Kurve. Vergl. auch Seite 32.

## § 16.

### Ständige mittelbare Belastung.

71. **Beliebige Belastung.** Werden die Lasten  $P_1, P_2, P_3 \dots$  durch einfache Zwischenträger auf den Balken  $AB$  übertragen, Fig. 117, so entstehen Auflagerkräfte  $A$  und  $B$ , welche, falls die äußersten Querträger über den Stützen liegen, ebensogroß sind, als wenn die Lasten

unmittelbar auf den Balken wirken. Denn es ist z. B.  $A = \frac{M_B}{l}$ , wobei  $M_B$  die Summe der statischen Momente sämtlicher Lasten  $P$  in Bezug auf den Drehpunkt  $B$  bedeutet, und man erhält für  $M_B$  denselben Wert, wenn man einmal die Lasten  $P$  und ein zweites Mal die in den Knotenpunkten angreifenden Seitenkräfte derselben einführt, weil das Moment einer Mittelkraft stets gleich der Summe der Momente ihrer Seitenkräfte ist.

Aus dem gleichen Grunde ist das Moment der links von irgend einem Knotenpunkte angreifenden Kräfte, bezogen auf diesen Knotenpunkt, unabhängig von der Art der Verteilung der Lasten durch die Zwischenträger, und es folgt daher der Satz:

*Für alle durch Knotenpunkte gelegten Querschnitte stimmen die Momente für unmittelbare und für mittelbare Belastung überein.*

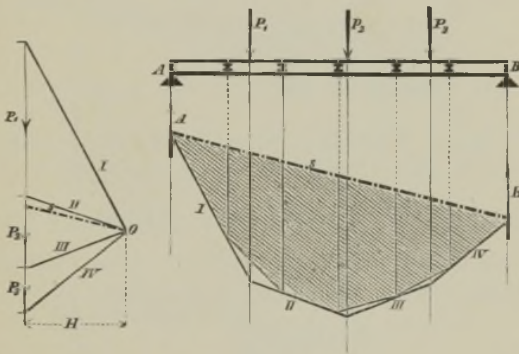


Fig. 117.

Hiernach ist man im stande, die Momentenflächen für eine mittelbare Belastung zu finden, ohne erst die in den Knotenpunkten angreifenden Lasten zu bestimmen. Man zeichne das Seilpolygon für die unmittelbare Belastung und beschreibe in dieses ein Polygon, dessen Ecken senkrecht unter den Knotenpunkten liegen, und welches dann mit der Schlußlinie die gesuchte Momentenfläche einschließt.

**72. Querkräfte für einen gänzlich und gleichmäßig belasteten Balken.** Wir lösen an dieser Stelle noch die für die Folge wichtige Aufgabe, die Querkräfte für die Querschnitte eines nach Fig. 118 gleichmäßig mit  $g$  für die Längeneinheit belasteten Balkens zu bestimmen.

Die Angriffspunkte der Querträger seien mit  $0, 1, 2 \dots (m-1), m \dots$  bezeichnet,  $x_m$  und  $x'_m$  seien die Abstände des Punktes  $m$  von den Auflagern  $A$  und  $B$ ,

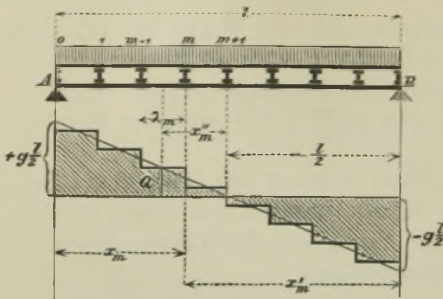


Fig. 118.

$\lambda_m$  die Länge des  $m$ ten Feldes,  $x''_m$  der Abstand der Mitte des Feldes von der Mitte des Balkens. Um die Querkraft für einen durch das  $m$ te Feld geführten Schnitt zu finden, beachte man, daß die Belastung  $g\lambda_m$  dieses Feldes zur Hälfte auf den Punkt  $(m-1)$  und zur Hälfte auf den Punkt  $m$

übertragen wird, daß also am linken Balkenstücke die Kraft  $A = \frac{1}{2} gl$  nach aufwärts und die Lasten  $gx_{m-1}$ , sowie  $\frac{1}{2} g\lambda_m$  nach abwärts wirken. Daher ist

$$(1) \quad Q = \frac{gl}{2} - gx_{m-1} - \frac{g\lambda_m}{2} = gx''_m,$$

und zwar gilt dieser Wert für jeden durch das  $m$ te Feld geführten Schnitt. Zieht man eine Gerade, deren Ordinaten für  $x=0$  und  $x=l$  beziehungsweise  $(+\frac{1}{2} gl)$  und  $(-\frac{1}{2} gl)$  sind, so erhält man  $Q$  als die unter der Feldmitte gemessene Ordinate dieser Geraden. Für die rechte Balkenhälfte wird  $Q$  negativ. Innerhalb eines Feldes ist  $Q$  konstant.

## § 17.

**Einflußlinien. Grenzwerte von  $Q$  und  $M$  bei gleichförmiger ständiger und beweglicher Belastung.**

## a. Querkräfte für unmittelbare Belastung.

**73. Einflußlinie.** Eine im Abstände  $a$  von  $A$  und  $b$  von  $B$  am Balken  $AB$  angreifende Einzellast  $P$  ruft Stützenwiderstände  $A$  und  $B$  hervor, die durch die Momentengleichungen

$$Al - Pb = 0$$

$$Bl - Pa = 0$$

und bestimmt sind. Man erhält

$$(1) \quad \begin{cases} A = \frac{Pb}{l} \\ B = \frac{Pa}{l} \end{cases}$$



das sind Werte die proportional  $P$  sind. Die Gleichungen der Einflußlinien für  $A$  und  $B$  lauten also

$$(2) \quad \eta = 1 \frac{b}{l} \quad \text{und} \quad \eta = 1 \frac{a}{l}.$$

Die „ $A$ -Linie“ ist also eine gerade Linie, welche bei  $B$  die Ordinate 0 und bei  $A$  die Ordinate 1 hat. Die „ $A$ -Fläche“ ist ein rechtwinkliges Dreieck von der Höhe 1.

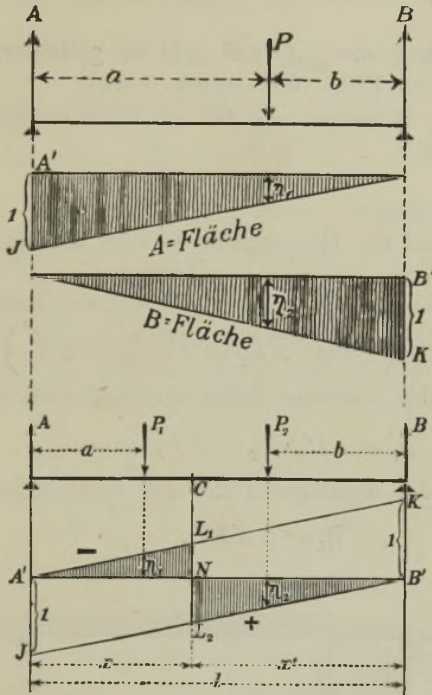


Fig. 119.

Die  $B$ -Linie ist das Spiegelbild der  $A$ -Linie.

Es sei nun  $C$  ein beliebiger Querschnitt des Balkens, und es greife nur eine zwischen  $A$  und  $C$  gelegene Last  $P_1$  an. Dann findet man durch Betrachtung des Balkenstückes  $CB$  für die Querkraft den Wert

$$Q = -B$$

und erkennt, daß die Einflußfläche für  $Q$  rechts von  $C$  mit der  $B$ -Fläche zusammenfällt; nur ist ihr Vorzeichen das entgegengesetzte.

Ganz ebenso findet man, daß links von  $C$  die Einflußlinie für  $Q$  mit der  $A$ -Fläche zusammenfällt. Denn wenn nur  $P_2$  am Balken angreift, erhält man durch Betrachtung des Trägerstückes  $AC$  für  $Q$  den Wert

$$Q = +A.$$

Die in Fig. 119c schraffierte Fläche ist mithin die Einflußfläche für  $Q$ . Die Lasten  $P_1$  und  $P_2$  erzeugen zusammen

$$(3) \quad Q = -P_1\eta_1 + P_2\eta_2.$$

Wir wollen nun die Einflußlinie  $A'L_1L_2B'$  benutzen, um im Anschluß an die Untersuchungen im § 15 diejenigen Grenzwerte  $_{max}Q$  und  $_{min}Q$  zu bestimmen, welche infolge einer gleichmäßigen Belastung entstehen. Der Einfluß beweglicher Einzellasten soll später auf anderem Wege (d. h. ohne die Benutzung der Einflußlinie) ermittelt werden.

**74. Bestimmung von  $_{max}Q$  und  $_{min}Q$  bei gleichförmiger Belastung.**

Vergl. Fig. 119 und 120. Wir setzen voraus:

eine ständige Belastung  $= g$  für die Längeneinheit von  $AB$ ,

„ bewegliche „  $= p$  „ „ „ „ „  $AB$ ,

bezeichnen mit

$l$  die Stützweite,

$x$  den Abstand des Querschnitts  $C$  vom Auflager  $A$ ,

$x'$  „ „ „ „ „  $C$  „ „ „  $B$ ,

$x''$  „ „ „ „ „  $C$  von der Balkenmitte,

und erhalten dann (wegen  $\overline{NL_2} = \overline{A'J} \frac{x'}{l} = 1 \frac{x'}{l}$ ):

- 1) den Inhalt des positiven Teiles der Einflußfläche:

$$\mathfrak{S}_2 = \Delta B'NL_2 = \overline{NL_2} \frac{x'}{2} = \frac{x'^2}{2l},$$

- 2) den Inhalt des negativen Teiles der Einflußfläche:

$$\mathfrak{S}_1 = \Delta A'NL_1 = \frac{x^2}{2l}.$$

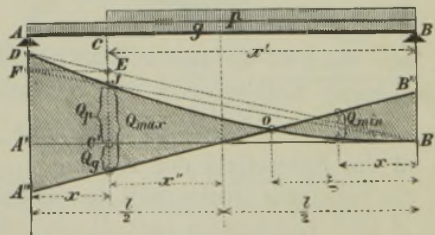


Fig. 120.

Wir untersuchen getrennt den Einfluß  $Q_p$  der beweglichen Last und den Einfluß  $Q_g$  der ständigen Last.

Der Wert  $_{max}Q_p$  entsteht, wenn nur die positive Beitragsstrecke  $x'$  mit  $p$  belastet wird, Fig. 119. Man erhält (nach Gleich. 4 auf Seite 116):

$$(4) \quad _{max}Q_p = p\mathfrak{S}_2 = \frac{px'^2}{2l}$$

und kann diesen Wert durch die Ordinate  $C'J$  einer Parabel  $B'OJD$  darstellen, welche für  $x' = 0$  und  $x' = l$  beziehungsweise die Ordinaten 0 und  $\frac{1}{2}pl$  besitzt, und deren Scheitel bei  $B'$  liegt. Man mache auf der linken Auflager-Senkrechten:  $A'D = \frac{1}{2}pl$ , ziehe  $B'D$ , ferner durch den Schnittpunkt  $E$  dieser Geraden mit der Senkrechten durch  $C$  die Wagerechte  $EF$  und bringe die Gerade  $B'F$  mit der Senkrechten durch  $C$  in  $J$  zum Schnitt. Es ist dann  $J$  ein Punkt der Parabel, weil

$$\overline{C'E} = \overline{A'D} \frac{x'}{l}; \quad \overline{C'J} = \overline{A'F} \frac{x'}{l} = \overline{A'D} \frac{x'^2}{l^2} = \frac{px'^2}{2l}.$$

Der Einfluß der ständigen Last ist nach Gleich. (8) auf Seite 118:

$$(5) \quad Q_g = g(\mathfrak{F}_2 - \mathfrak{F}_1) = g \frac{(x' - x)(x' + x)}{2l} = gx''.$$

Dieser Wert wird durch die Ordinate einer Geraden  $A''B''$  dargestellt, welche für  $x'' = \pm \frac{l}{2}$  die Ordinaten  $\pm \frac{gl}{2}$  besitzt. Die positiven Ordinaten dieser Geraden wurden in der Fig. 120 unterhalb der  $A'B'$  aufgetragen, damit die Werte  $Q_p$  und  $Q_g$  bequem addiert werden konnten. Es sind bei dieser Anordnung der Zeichnung die senkrechten Abstände der Geraden  $A''B''$  von der Parabel  $DJB'$  gleich den Kräften

$$\max Q = \max Q_p + Q_g.$$

Für den Balkenquerschnitt senkrecht über  $O$  ist  $\max Q = 0$ ; für die Querschnitte rechts hiervon ist  $\max Q$  negativ.

Betrachtet man jetzt das Spiegelbild der Fig. 120, so wird der Balken nur links vom Querschnitte  $C$  eine bewegliche Belastung aufweisen. Da nun diesem Belastungszustande die Querkraft  $\min Q$  entspricht, so folgt, daß der Wert  $\min Q$  für den Querschnitt  $C$  gleich ist dem im Abstände  $x$  vom Auflager  $B$  gemessenen senkrechten Abstände der Parabel  $B'JD$  von der Geraden  $A''B''$ . Man muß jedoch das Vorzeichen ändern, da vorhin  $Q$  als Mittelkraft des nur mit  $g$  belasteten linken Balkenstückes ( $AC$ ) dargestellt worden ist und bei der Betrachtung des Spiegelbildes dieses nur mit  $g$  belastete Stück rechts von  $C$  liegt. Vergl. Seite 124. Es folgt hieraus, daß  $\min Q$  positiv ist für  $x < \xi$  und negativ für  $x > \xi$ .

## b. Querkräfte für mittelbare Belastung.

75. Einflußlinie. Es sei  $C$  ein beliebiger Querschnitt des Balkenfeldes  $F_1F_2$ , Fig. 121. Links von  $F_1$  wirke auf den Balken an irgend einer Stelle eine Last  $P_1$ , rechts von  $F_2$  eine Last  $P_2$ . Wo auch der



Querschnitt  $C$  zwischen  $F_1$  und  $F_2$  liegen möge, stets ist die Querkraft

$$Q = A - P_1$$

oder

$$Q = -B + P_2,$$

je nachdem das Trägerstück links oder rechts von  $C$  betrachtet wird. Es empfiehlt sich deshalb von der Einflußfläche für die *Querkraft des Feldes* zu sprechen. Die Gestalt dieser Fläche folgt ohne weiteres aus dem in No. 63 bewiesenen allgemeinen Satze.

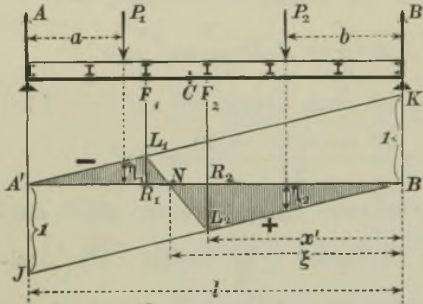


Fig. 121.

Außerhalb des Feldes  $F_1F_2$  stimmt die Einflußlinie für  $Q$  mit der in No. 73, unter Voraussetzung einer unmittelbaren Belastung, gefundenen überein, und innerhalb jenes Feldes ist sie nach Seite 116 eine Gerade, welche durch die beiden senkrecht unter  $F_1$  und  $F_2$  gelegenen Punkte  $L_1$  und  $L_2$  bestimmt ist. Mithin ist die in der Fig. 121 schraffierte Fläche die gesuchte Einflußfläche für  $Q$ ;

wir werden dieselbe wieder benutzen, um den Einfluß einer gleichförmigen Belastung festzustellen.

**76. Bestimmung von  $\max Q$  und  $\min Q$  für gleichförmige Belastung.** Der Inhalt  $\mathfrak{F}_2$  des positiven Teiles der Einflußfläche ist mit den aus der Fig. 121 ersichtlichen Bezeichnungen

$$\left( \text{und wegen } \overline{R_2 L_2} = \overline{A' J} \frac{x'}{l} = 1 \frac{x'}{l} \right):$$

$$\mathfrak{F}_2 = \triangle N L_2 B' = \overline{R_2 L_2} \frac{\xi}{2} = \frac{x' \xi}{2l},$$

und man erhält deshalb die durch die bewegliche Belastung allein hervorgerufene größte positive Querkraft:

$$(6) \quad \max Q = p \mathfrak{F}_2 = \frac{pl}{2} \cdot \frac{x'}{l} \cdot \frac{\xi}{l} \quad (\xi^*);$$

sie entsteht, sobald nur die positive Beitragstrecke  $B'N$  mit  $p$  belastet wird und läßt sich leicht durch Zeichnung finden.

Zu diesem Zwecke bestimmt man, Fig. 122, mit Hilfe von zwei beliebigen Parallelen  $AK$  und  $BJ$  den Nullpunkt  $N$  des fraglichen Feldes und legt durch  $N$  und durch  $F_2$  die Senkrechten  $I$  und  $II$ . Nun trägt man, von einer Wagerechten  $A'B'$  aus, auf der Senkrechten  $A'A$  die Kraft  $p \frac{l}{2} = \overline{A'D}$  auf, bringt die Gerade  $B'D$  mit  $II$  in  $E$  zum Schnitt,

\*) Man findet auch leicht die Formel  $\max Q = \frac{p x'^2}{2(l-x')}$  wo  $\lambda$  die Feldweite bedeutet.



zieht die Wagerechte  $EF$  und bestimmt den Schnittpunkt  $H$  der Geraden  $FB'$  mit der Senkrechten  $I$ . Man erhält:

$$\overline{C'H} = \overline{A'F} \frac{\xi}{l} = \overline{E'E} \frac{\xi}{l} = \overline{A'D} \frac{x' \xi}{l} = \frac{pl}{2} \frac{x' \xi}{l},$$

also  $\overline{C'H} = \max Q_p.$

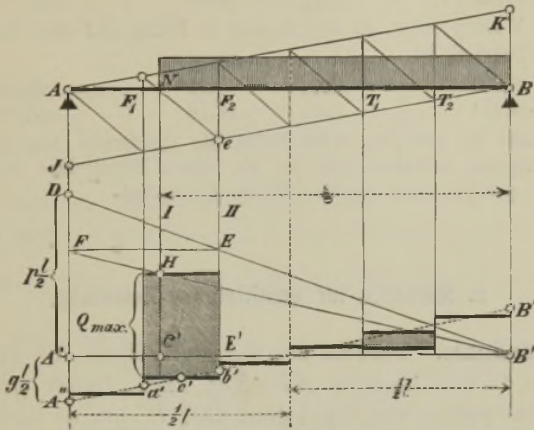


Fig. 122.

Zu dem Werte  $\max Q_p$  ist noch die von der ständigen Last herführende Querkraft  $Q_g$  zu fügen. Dazu macht man (nach No. 71)

$$\overline{A'A''} = \overline{B'B''} = \frac{1}{2} gl$$

und zieht die Gerade  $A''B''$ , welche die das betrachtete Feld begrenzenden Senkrechten in  $a'$  und  $b'$  schneidet. Die Ordinate des Halbierungspunktes  $c'$  der Strecke  $a'b'$  ist dann gleich  $Q_g$ , sie ist positiv, sobald sie unterhalb  $A'B'$  liegt. Nun findet man:

$$\max Q = \max Q_p + Q_g.$$

Auf die gleiche Weise werden die  $\max Q$  für sämtliche Felder ermittelt. Innerhalb eines Feldes ist  $Q$  konstant. Auf der rechten Hälfte des Balkens ist  $Q_g$  negativ; es kann dann (wie im Felde  $T_1 T_2$  in Fig. 122)  $\max Q$  negativ werden.

Um die Querkraft  $\min Q$  zu bestimmen, welche in dem betrachteten Felde entsteht, sobald nur die Strecke  $AN$  mit  $p$  belastet ist, wird das Spiegelbild des Balkens in derselben Weise wie eben untersucht, und schließlich wird das Vorzeichen der so gewonnenen Kraft  $Q$  umgekehrt. Vergl. den Schluß von No. 74. Ist der Balken symmetrisch in Bezug auf die Mitte, so genügt es natürlich, für sämtliche Felder die Kräfte  $\max Q$  zu ermitteln, aus denen dann die  $\min Q$  durch Umkehrung der Vorzeichen gefolgert werden können. Zur Erläuterung diene das folgende

*Zahlenbeispiel.* Für den in Fig. 122 gezeichneten Balken wurde  $l = 18^m$ ,  $\lambda = 3^m$ ,  $g = 1,2^t$  und  $p = 4,8^t$  für das Meter angenommen. Es ist dann  $\overline{A'D} = \frac{pl}{2} = 43,2^t$ ,  $\overline{A'A''} = \overline{B'B''} = \frac{gl}{2} = 10,8^t$ , welche Werte im Maßstabe:  $20^t = 10^{mm}$  aufgetragen wurden. Nach Ausführung der oben beschriebenen Konstruktion ergab sich für das 1te Feld:

$$\begin{array}{l|l|l} \max Q_1 = + 45,00^t & \max Q_3 = + 14,76^t & \max Q_5 = - 3,96^t \\ \max Q_2 = + 28,44^t & \max Q_4 = + 3,96^t & \max Q_6 = - 9,00^t \end{array}$$

und aus diesen Werten folgt, da der Balken in Bezug auf eine Senkrechte durch seine Mitte symmetrisch ist:

$$\begin{array}{l|l|l} \min Q_1 = + 9,00^t & \min Q_3 = - 3,96^t & \min Q_5 = - 28,44^t \\ \min Q_2 = + 3,96^t & \min Q_4 = - 14,76^t & \min Q_6 = - 45,00^t \end{array}$$

Es sind also im 1ten und 2ten Felde die Querkräfte nur positiv, im 5ten und 6ten nur negativ, während sich für die beiden Mittelfelder je nach dem Belastungszustande positive oder negative Werte  $Q$  ergeben.

### c. Momente für unmittelbare Belastung.

**77. Einflußlinie.** Gesucht sei die Einflußlinie für das Moment  $M$  an der Stelle  $C$  des Balkens  $AB$ , Fig. 123. Greift am Balken zunächst nur eine rechts von  $C$  gelegene Last  $P_2$  an, so wirkt am Trägerstück  $AC$  nur eine einzige äußere Kraft, der Stützenwiderstand  $A$ . Es entsteht dann an der Stelle das Moment

$$(7) \quad M = Ax$$

und man erkennt, daß die Einflußlinie für  $M$  zwischen  $B$  und  $C$  aus einer Geraden  $B'C'$  besteht, die man erhält, wenn man die Ordinaten der in Fig. 119 dargestellten  $A$ -Linie mit  $x$  multipliziert, wenn man also bei  $A$  statt der Ordinate  $A'J = 1$  die Ordinate  $A'J = x$  aufträgt. Ganz ebenso verfährt man mit einer links von  $C$  angreifenden Last  $P_1$ . Sie erzeugt an der Stelle  $C$  das Moment

$$M = Bx'$$

Die Einflußlinie besteht also zwischen  $A$  und  $C$  aus einer Geraden  $A'C'$ , welche bestimmt ist durch die Strecke  $B'K = x'$ .

Die beiden Geraden  $B'J$  und  $A'K$  schneiden sich senkrecht unter  $C$ . Es genügt also die Auftragung einer der beiden Strecken  $A'J$  oder  $B'K$  zur Bestimmung der Einflußfläche für  $M$ .

Die Lasten  $P_1$  und  $P_2$  erzeugen

$$M = P_1 \eta_1 + P_2 \eta_2.$$

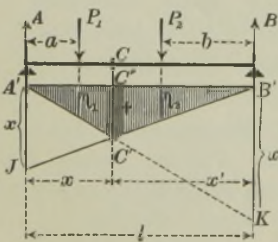


Fig. 123.

78. Moment  ${}_{max}M$  infolge gleichmäßiger Belastung. Das größte Moment für irgend einen Balkenquerschnitt  $C$  entsteht bei gänzlicher Belastung des Balkens durch  $p + g = q$  für die Längeneinheit. Der Inhalt der Einflußfläche ist (vergl. Fig. 123):  $\mathfrak{F} = \overline{C'C''} \frac{l}{2}$  und wegen  $\overline{C'C''} = \overline{A'J} \frac{x'}{l} = \frac{xx'}{l}$ :

$$\mathfrak{F} = \frac{xx'}{2}.$$

Man erhält somit:

$$(8) \quad {}_{max}M = q\mathfrak{F} = \frac{qxx'}{2},$$

und kann hiernach das Moment  ${}_{max}M$  für den an der Stelle  $x$  gelegenen Querschnitt durch die Ordinate  $CJ$  einer Parabel  $AJSB$  (Fig. 124) darstellen, welche für  $x = x' = \frac{1}{2}l$  die Ordinate  $\overline{NS} = \frac{1}{8}ql^2$  besitzt.

Zieht man nach Auftragen von  $NS$  die Gerade  $SA$ , welche das in  $C$  auf der  $AB$  errichtete Lot in  $E$  schneidet, hierauf die Wagerechte  $EF$  bis zur linken Auflagersenkrechten und verbindet  $F$  mit  $S$  durch eine Gerade, so bestimmt diese auf der  $CE$  den Parabelpunkt  $J$ . Denn es ist:

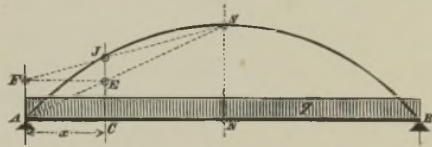


Fig. 124.

$$\overline{CE} : \overline{NS} = x : \frac{1}{2}l, \text{ also } \overline{CE} = \frac{qlx}{4}, \text{ ferner}$$

$$\overline{JE} = \overline{FA} \frac{\frac{1}{2}l - x}{\frac{1}{2}l} = \overline{CE} \frac{l - 2x}{l}, \text{ also}$$

$$\overline{JC} = \overline{EC} + \overline{JE} = \overline{EC} \left( 1 + \frac{l - 2x}{l} \right) = \frac{qxx'}{2}.$$

#### d. Momente für mittelbare Belastung.

79. Einflußlinie. Fig. 125. Liegt der fragliche Querschnitt  $C$  zwischen zwei Querträgern  $F_1$  und  $F_2$ , so bestimme man zunächst die Einflußfläche  $A'C'B'$  für das Moment  $M$  unter der Voraussetzung unmittelbarer Belastung und stumpfe dieses Dreieck durch eine Gerade  $L_1L_2$

ab, deren Endpunkte senkrecht unter den Querträgern  $F_1$  und  $F_2$  liegen. So lange nämlich die über den Balken wandernde Einzellast links von  $F_1$ , oder rechts von  $F_2$  liegt, stimmen die dem Querschnitte  $C$  entsprechenden Momente für mittelbare und für unmittelbare Belastung überein; zwischen  $F_1$  und  $F_2$  aber muß die Einflußlinie eine Gerade sein.

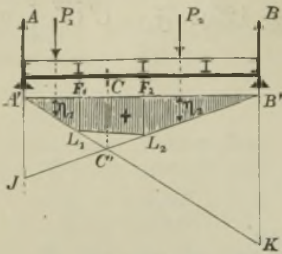


Fig. 125.

$ASB$  (Fig. 124) so eingeschrieben wird, daß seine Ecken in den Senkrechten durch die Knotenpunkte liegen. Es genügt also, die den Knotenpunkten entsprechenden Parabelpunkte zu bestimmen und diese durch gerade Linien zu verbinden.

80. Momente  $_{max}M$  für gleichmäßige Belastung. Die Momentenkurve für mittelbare gleichmäßige Belastung ist nach § 16 ein Polygon, welches in die für die unmittelbare Belastung gefundene Parabel

## § 18.

### Die veränderliche Belastung besteht aus einem verschiebbaren System von Einzellasten.

#### a. Mittelbare Belastung.

(Fig. 126, 128, 129, 130 auf Tafel I.)

Die Ermittlung der durch ein verschiebbares System von Einzellasten hervorgerufenen Momente und Querkräfte kann mit Hilfe der im § 17 gefundenen Einflußlinie nach dem im § 14 mitgeteilten allgemeinen Verfahren erfolgen; jedoch ist es zweckmäßiger, einen anderen Weg einzuschlagen, der hier an der Hand eines Zahlenbeispiels beschrieben werden soll.

Es handele sich um eine zweigleisige Eisenbahnbrücke mit zwei Hauptbalken. Die Stützweite sei  $l = 36^m$  und die Feldweite  $\lambda = 3,6^m$ , Fig. 126. Die veränderliche Belastung bestehe aus einem von drei Lokomotiven geführten Güterzuge (Anordnung Fig. 111). Jeder der beiden Balken trägt die Belastung eines Gleises, hat also die Achsen-



belastungen aufzunehmen. Die ständige Belastung sei mit Hilfe der Erfahrungsformel

$$g = 27,5l + 750 = 27,5 \cdot 36 + 750 = 1740^* = 1,74' \text{ f. d. Meter}$$

Balkenlänge gefunden.\*)

81. **Querkräfte.** In No. 75 auf Seite 132 (vergl. auch Fig. 121) wurde nachgewiesen, daß in einem Balkenfelde die größte positive Querkraft  $Q$  entsteht, sobald nur Lasten rechts von der im fraglichen Felde gelegenen Belastungsscheide wirken. Fährt nun von  $B$  aus ein Güterzug vor, mit drei vorwärtsgehenden Lokomotiven an der Spitze, so erhält man in den meisten Fällen  $_{max}Q$ , wenn die erste Last bei dem das fragliche Feld rechts begrenzenden Querträger liegt. Diese Laststellung wollen wir in der Folge die *Grundstellung* nennen. Handelt es sich nun beispielsweise um das 5<sup>te</sup> Balkenfeld (Fig. 126), so ist der Eisenbahnzug zunächst von  $B$  aus bis zum Querträger 5 vorzuschieben. Links von dem durch dieses Feld an irgend einer Stelle geführten Schnitte  $ss$  greift nur der linke Stützenwiderstand  $A_5$  an, und es ergibt sich  $_{max}Q_{p5} = A_5$ , wobei der Zeiger  $p$  daran erinnern soll, daß bis jetzt nur der Einfluß der Verkehrslast berücksichtigt worden ist. Aus der Momentengleichung für den Stützpunkt  $B$  folgt (mit den aus der Fig. 126 ersichtlichen Bezeichnungen, und da rechts vom Schnitte  $ss$  9 Lasten auf den Balken wirken):

$$A_5 l - \sum_1^9 P b = 0; \quad A_5 = \frac{1}{l} \sum_1^9 P b,$$

und dieser Wert  $A_5$  läßt sich auf eine sehr einfache Weise durch Zeichnung bestimmen. Dazu trägt man den Eisenbahnzug in der Richtung von  $A$  nach  $B$  fahrend und mit der ersten Achse bei  $B$  stehend auf und reiht die Lasten  $P_1, P_2 \dots$  in der in Fig. 126 angegebenen Weise auf der Senkrechten durch den linken Stützpunkt aneinander. Nun wählt man im Abstände  $l$  von dem Kräftezuge den Pol  $O$  und zeichnet zu den Lasten ein Seilpolygon, dessen Seiten  $I$  und  $II$  mit den Seilstrahlen  $I$  und  $II$  zusammenfallen. Es ist dann nach No. 17 auf Seite 20 das Produkt  $l \cdot \overline{ab}$  aus der Polweite  $l$  und der beim Querträger 5 gemessenen Ordinate  $\overline{ab}$  des Seilpolygons gleich dem auf die Achse  $ab$  bezogenen Momente der rechts von  $ab$  gelegenen Lasten  $P_1, P_2, \dots, P_9$  des von  $A$  nach  $B$  vorgerückten

\*) Würde jedes Gleis durch zwei, bezüglich der Gleismitte symmetrisch liegende Balken gestützt, so kämen auf jeden Balken nur die **Rad**drücke der Fahrzeuge und die ständige Last  $g = \frac{1}{2} \cdot 1,74 = 0,87'$ .

Zuges. Bezeichnet man also die Entfernung dieser Lasten von der  $ab$  mit  $b'_1, b'_2, \dots$ , so erhält man  $l \cdot \overline{ab} = \sum_1^s P b'$  und (wegen  $b'_1 = b_1; b'_2 = b_2, \dots$ ):

$$\overline{ab} = \frac{1}{l} \sum_1^s P b = A_5.$$

Wir werden mit  $A_m$  stets denjenigen Widerstand bezeichnen, welcher am linken Auflager durch die von  $B$  aus bis zum Querträger  $m$  vorgeschobene Verkehrslast hervorgerufen wird, und erhalten dann, falls  ${}_{max} Q_p$  bei der Grundstellung entsteht, ganz allgemein für das  $m^{\text{te}}$  Feld:

$${}_{max} Q_{p,m} = A_m.$$

Das Seilpolygon in Fig. 126, dessen bei den Querträgern gemessene Ordinaten gleich den Stützenwiderständen  $A_m$  sind, nennen wir das  $A$ -Polygon.

Liegt die zweite Achse des von  $B$  vorrückenden Zuges beim Querträger 5, und bezeichnet man mit  $e_1$  den ersten Radstand, so übt die erste Last  $P_1$  auf den Querträger 4 den Druck  $P_1 \frac{e_1}{\lambda}$  aus, und es wird die Querkraft für das 5<sup>te</sup> Balkenfeld:  $Q' = A - P_1 \frac{e_1}{\lambda}$ . Dabei wird  $A$  durch die bei der Last  $P_1$  gemessene Ordinate  $a'b'$  des  $A$ -Polygons dargestellt; von derselben ist die Strecke  $P' = \frac{P_1 e_1}{\lambda}$ , deren Ermittlung ohne weiteres aus der Fig. 126 zu ersehen ist, abzuziehen. Ist  $Q' > A_5$ , so ergibt sich  ${}_{max} Q_{p,5} = Q'$ . So wird z. B. im ersten Felde  $Q$  ein Maximum, sobald die zweite Achse über dem Querträger 1 liegt.

Stellt man die dritte Achse des Zuges über den Querträger  $m$ , Fig. 127, so erfährt der Querträger  $(m - 1)$  die Belastung  $P_1 \frac{e_1 + e_2}{\lambda_m} + P_2 \frac{e_2}{\lambda_m}$ , und es entsteht für sämtliche Querschnitte des  $m^{\text{ten}}$  Feldes die Querkraft:

$$Q'' = A - P_1 \frac{e_1 + e_2}{\lambda_m} - P_2 \frac{e_2}{\lambda_m} = A - P \frac{e_1 + e_2}{\lambda_m},$$

wobei  $P = P_1 + P_2 \frac{e_2}{e_1 + e_2}$  und  $A$  gleich der unter  $P_1$  gemessenen

Ordinate des  $A$ -Polygons. Die Ermittlung der Kräfte  $P$  und  $Q''$  ist aus der Fig. 127 zu ersehen. Ist  $Q'' > Q' > A_m$ , so ist  $\max Q_{pm} = Q''$ .

Ein noch weiteres Verschieben des Zuges in das fragliche Feld ist überflüssig; schon der Fall, daß die dritte Achse über  $m$  stehen muß, ist sehr selten; er tritt nur ein bei verhältnismäßig großer Feldweite.

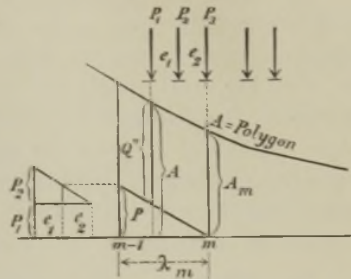


Fig. 127.

Um ein einfaches analytisches Kennzeichen für die gefährlichste Laststellung hinsichtlich  $\max Q_{pm}$  zu finden, bezeichnen wir die Summe aller auf dem Balken sich befindenden Lasten mit  $\Sigma P$  und die Summe der im fraglichen Felde liegenden (einschließlich der über  $m$ ) mit  $\frac{1}{2} \Sigma P$ . Haben dann die im  $m$ ten Felde liegenden Lasten von  $m$  die Abstände  $c_1, c_2, \dots$ , so ergibt sich  $Q_m = \frac{1}{l} \Sigma P b - \frac{1}{\lambda_m} \frac{1}{2} \Sigma P c$ . Verschiebt man den Zug um die unendlich kleine Strecke  $\xi$  nach links, so geht über:  $b$  in  $b + \xi$  und  $c$  in  $c + \xi$ ; es wächst also  $Q_m$  um  $dQ_m = \xi \left[ \frac{1}{l} \Sigma P - \frac{1}{\lambda_m} \frac{1}{2} \Sigma P \right]$ .

Hieraus folgt aber, daß  $Q_m$  infolge der Verschiebung vergrößert wird, falls  $\frac{1}{l} \Sigma P > \frac{1}{\lambda_m} \frac{1}{2} \Sigma P$ , d. h.

$$(1) \quad \frac{\Sigma P}{\frac{1}{2} \Sigma P} > \frac{l}{\lambda_m}$$

ist. Die Grundstellung ist also die gefährlichste, sobald  $\frac{\Sigma P}{P_1} < \frac{l}{\lambda_m}$  ist. Im Gegenfalle stellt man die 2te Last über  $m$  und sieht nach, ob  $\frac{\Sigma P}{P_1 + P_2} < \frac{l}{\lambda_m}$  ist; wird auch diese Ungleichung nicht erfüllt, so stellt man die Last  $P_2$  über  $m$  u. s. w.

Für das 5te Feld ist bei der Grundstellung  $\Sigma P = 105^t$ , mithin  $\frac{\Sigma P}{P_1} = \frac{105}{13} < \frac{l}{\lambda} = 10$ ; es ist also diese Stellung die gefährlichste.

Man könnte auch den Wert  $Q_m = \frac{1}{l} \Sigma P b - \frac{1}{\lambda_m} \frac{1}{2} \Sigma P c$  ermitteln, indem man den Ausdruck  $\frac{1}{\lambda_m} \frac{1}{2} \Sigma P c$  in ähnlicher Weise mit Hilfe eines Seilpolygons (Polweite  $\lambda_m$ ) bestimmt, wie den Ausdruck  $A = \frac{1}{l} \Sigma P b$ . Das oben gezeigte Verfahren führt aber schneller zum Ziele, namentlich bei verschiedenen langen Feldern, da die vorhin eingeführte Kraft  $P = P_1 + P_2 \frac{e_2}{e_1 + e_2}$  unabhängig von



der Feldweite ist, mithin nur einmal bestimmt zu werden braucht. Wie sich dieses Verfahren für den Fall erweitern läßt, daß mehr als 2 Lasten im Felde  $\lambda_m$  liegen, bedarf keiner näheren Auseinandersetzung.

Die von der ständigen Belastung herrührenden Querkräfte  $Q_g$  können mit Hilfe des in No. 72 Seite 105 beschriebenen Verfahrens bestimmt werden, worauf sich  ${}_{max}Q = {}_{max}Q_p + Q_g$  ergibt. Es wurde, um die Fig. 126 möglichst übersichtlich zu halten, von der vollständigen Darstellung der Querkräfte abgesehen. Man findet eine solche auf Tafel III, wo sie zur Ermittlung der Spannkkräfte in den Wandgliedern eines Balkens mit parallelen Gurtungen benutzt wird. Dafür sind dort alle Hilfslinien für die Konstruktion des Seilpolygons fortgelassen worden.

**82. Momente.** Als veränderliche Belastung sollen Güterzuglokomotiven angenommen werden, von denen zwei mit ihren Vorderteilen gegeneinander gekehrt sind; vor und hinter dieselben werden Lastwagen gestellt.\*)

Um zunächst die Momente  $M_1, M_2, M_3 \dots$  für die den Querträgern 1, 2, 3  $\dots$  entsprechenden Querschnitte zu bestimmen, wurde in Fig. 128 auf Tafel I für einen Zug, der länger als die Stützweite  $36^m$  ist, ein Seilpolygon gezeichnet. Die von links nach rechts bezifferten 22 Lasten wurden in der Reihenfolge 22, 21, 20,  $\dots$ , 1 auf einer Senkrechten aneinander gesetzt und zwar im Maßstabe  $2' = 1^{mm}$ ; die Polweite  $H$  wurde  $= 4\lambda = 4 \cdot 3,6 = 14,4^m$  gewählt, so daß also, da der Längenmaßstab  $1^m = 4^{mm}$  lautet,  $H = 4 \cdot 14,4 = 57,6^{mm}$  ist. Faßt man  $H$  als eine Kraft auf, so ist  $H = 57,6 \cdot 2 = 115,2^{**})$

Um das für den Querschnitt 1 durch die veränderliche Belastung hervorgerufene Moment  $M_{p1}$  zu erhalten, wurde der Balken  $AB$  so über den Lastenzug gestellt, daß eine schwere Last (hier die 7<sup>te</sup>) bei dem fraglichen Querschnitte liegt. Hierauf wurden die Auflagersenkrechten in  $a$  und  $b$  mit dem Seilpolygon zum Schnitt gebracht und die Punkte  $a$  und  $b$  durch die Schlußlinie  $s_1$  verbunden. Die auf der Senkrechten durch 1 von dem Seilpolygon und der Geraden  $s_1$  abgeschchnittene Strecke  $y_{p1}$  gibt mit  $H$  multipliziert das Moment  $M_{p1}$ . Man überzeugt sich leicht, daß dieses Moment verkleinert wird, sobald man

\*) Wir beschränken uns hier auf diesen Fall. Zuweilen kommt es vor, daß drei vorwärtsgehende Maschinen etwas größere Momente erzeugen, so daß es im allgemeinen nötig ist, die folgenden Untersuchungen zweimal durchzuführen.

\*\*) Im allgemeinen empfiehlt es sich, für  $H$  eine bequeme Zahl zu wählen; doch werden wir später auch Aufgaben zu lösen haben, bei denen es besser ist,  $H$  als ein Vielfaches der Feldweite anzunehmen. Um dann Tafel I benutzen zu können, wurde die obige Wahl getroffen.



den Träger nach links oder nach rechts gegen den Zug verschiebt, daß also das gewonnene Moment das größte ist, welches für den Querschnitt 1 entsteht. Wenn man nämlich die Lasten links von irgend einem Querschnitte  $C$  zur Mittelkraft  $P_a$  vereinigt, Fig. 129, und die Lasten rechts von  $C$  zur Mittelkraft  $P_b$ , während man mit  $P'$  die in  $C$  angreifende Last bezeichnet, so erzeugt  $P_a$  an der rechten Stütze den Widerstand  $P_a \frac{a}{l}$  und daher für  $C$  das Moment  $P_a \frac{a}{l} x'$ , ähnlich  $P_b$  das Moment  $P_b \frac{b}{l} x$  und  $P'$  das Moment  $P' \frac{xx'}{l}$ , so daß

$$M = \frac{x}{l} P_b b + \frac{x'}{l} P_a a + \frac{xx'}{l} P'$$

wird. Verschiebt man nun den Zug um die unendlich kleine Streck  $\xi$  nach links, so geht  $M$  über in

$$\begin{aligned} M + dM &= \frac{x}{l} P_b (b + \xi) + \frac{x'}{l} P_a (a - \xi) + \frac{xx'}{l} P' (x - \xi) \\ &= \frac{x}{l} P_b b + \frac{x'}{l} P_a a + \frac{xx'}{l} P' + \frac{\xi x}{l} P_b - \frac{\xi x'}{l} (P_a + P_b) \\ &= M + \frac{\xi}{l} [x P_b - x' (P_a + P')] \end{aligned}$$

und es muß, wenn der Zuwachs  $dM$  des Momentes negativ sein soll, werden, d. h.

$$(2) \quad \frac{P_b}{P_a + P'} < \frac{x'}{x}.$$

Ebenso folgt, daß einer Verschiebung nach rechts

$$(3) \quad \frac{P_b + P'}{P_a} > \frac{x'}{x}$$

entsprechen muß. Ist nun (Fig. 128)  $\overline{EE'}$  gleich der Summe der auf dem Träger  $\overline{AB}$  befindlichen Lasten (d. i. hier gleich der Summe der Lasten 6 bis 20) und zieht man  $\overline{EF} = l = 36^m$ , macht auf dieser Geraden  $\overline{EJ} = x' = 32,4^{m**}$ , verbindet  $F$  mit  $E'$  und zieht  $JN \parallel FE'$ , so muß  $JN$  die über dem fraglichen Querschnitte liegende Last  $P'$  treffen. Es ist nämlich dann  $\overline{EG} = P_b$ ,  $\overline{GK} = P'$ ,  $\overline{KE'} = P_a$  und es folgt:

\*) Am einfachsten verfährt man, statt die nachfolgende Betrachtung anzustellen, dem Träger verschiedene Lagen gegen den Zug zuzuweisen, für diese Lagen  $y_{P1}$  zu ermitteln und die Ergebnisse zu vergleichen.

\*\*\*) In Fig. 128 wurde  $\overline{EF} = \frac{1}{3} l$  und  $\overline{EJ} = \frac{1}{3} x'$  gemacht.

$$\frac{\overline{EN}}{\overline{NE'}} = \frac{x'}{x} \text{ also } \frac{\overline{EG}}{\overline{GE'}} < \frac{x'}{x} \text{ und } \frac{\overline{EK}}{\overline{KE'}} > \frac{x'}{x},$$

d. h.  $\frac{P_b}{P_a + P'} < \frac{x'}{x} \text{ und } \frac{P_b + P'}{P_a} > \frac{x'}{x}.$

In derselben Weise überzeugt man sich, daß das größte Moment entsteht

für Querschnitt 2, wenn Last No. 7 über 2 steht,
„ „ 3, „ „ „ 7 „ 3 „
„ „ 4, „ „ „ 9 „ 4 „
„ „ 5, „ „ „ 10 „ 5 „

In Fig. 128 wurden, um die Zeichnung nicht undeutlich zu machen, nur die Schlußlinien  $s_1$ ,  $s_2$  und  $s_5$ , sowie die Ordinaten  $y_{p1}$ ,  $y_{p2}$  und  $y_{p5}$  eingetragen. Die anderen  $y_p$  wurden ähnlich ermittelt und in Figur 130 als Ordinaten des Momentenpolygons aufgetragen.

Zu den Werten  $y_p$  sind die der ständigen Belastung ( $g$ ) entsprechenden Ordinaten  $y_g$  zu fügen. Nach Seite 134 u. 135 sind die Momente  $M_g$  gleich den Ordinaten einer Parabel vom Pfeile  $\frac{1}{8}gl^2$ . Wird

$H = 115,2'$  gesetzt, so ist  $\frac{1}{8} \frac{gl^2}{H} = \frac{1,74 \cdot 36^2}{8 \cdot 115,2} = 2,45^m$  der Pfeil der die  $y_g$  liefernden Parabel. Diese ist in Fig. 130 dargestellt worden. Für die Ordinaten

$$y = y_p + y_g$$

und die Momente  $M = Hy$  ergeben sich die Werte

$$\begin{array}{ll} y_1 = 3,53^m & M_1 = 115,2 \cdot 3,53 = 407^m \\ y_2 = 6,09^m & M_2 = 115,2 \cdot 6,09 = 702^m \\ y_3 = 7,97^m & M_3 = 115,2 \cdot 7,97 = 918^m \\ y_4 = 9,03^m & M_4 = 115,2 \cdot 9,03 = 1040^m \\ y_5 = 9,46^m & M_5 = 115,2 \cdot 9,46 = 1090^m. \end{array}$$

Verbindet man die Endpunkte der Ordinaten  $y$  durch gerade Linien und sieht davon ab, daß ein Teil der ständigen Belastung, nämlich das Eigengewicht des Balkens, unmittelbar wirkend ist, so erhält man für alle zwischen den Querträgern gelegenen Querschnitte etwas zu große Momente. Für den Querschnitt  $C$  (Fig. 130) zwischen 3 und 4 ist z. B.

$$y = y_3 + (y_4 - y_3) \frac{\xi}{\lambda} = y_3 \frac{\xi}{\lambda} + y_4 \frac{\lambda - \xi}{\lambda}.$$

Da nun im allgemeinen  $y_3$  und  $y_4$  bei verschiedenen Laststellungen Maxima werden, so wird durch gleichzeitiges Einführen von  $max y_3$  und  $max y_4$  in die vorstehende Gleichung der Wert  $y$  zu groß gefunden. Der hierbei begangene Fehler ist aber stets unbedeutend; er wird auch

durch den von der Vernachlässigung der unmittelbaren Wirkung des Trägengewichtes herrührenden Fehler verkleinert.

Will man für einen zwischen zwei Querträgern  $(m - 1)$  und  $(m)$  gelegenen Balkenquerschnitt  $C$  die größte Ordinate  $y_c$  genauer bestimmen, Fig. 131, so muß man den Balken so unter den Lastenzug stellen, daß eine der schwersten Lasten über  $(m - 1)$  oder über  $(m)$  liegt. Außer der Schlufflinie  $s$

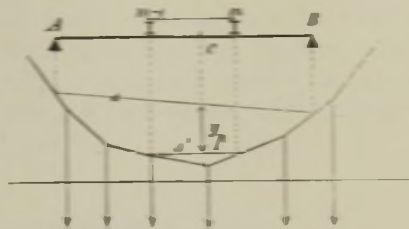


Fig. 131.

ist noch die dem Feld  $\lambda$  entsprechende Schlufflinie  $s'$  einzutragen, worauf  $y_c$  als die Strecke gefunden wird, welche die Geraden  $s$  und  $s'$  auf der Senkrechten durch  $C$  abschneiden. Es folgt dies aus dem früher bewiesenen Gesetze, daß das Momentenpolygon für mittelbare Belastung ein dem Seilpolygone für unmittelbare Belastung eingeschriebenes Polygon ist; seine Ecken liegen senkrecht unter den Querträgern. Die gefährlichste Stellung des Lastenzuges findet man am schnellsten durch Probieren. Der Träger wird gegen den Zug verschoben, und die Ergebnisse für verschiedene Stellungen werden miteinander verglichen.

### b. Unmittelbare Belastung.

**83. Querkräfte.** Entsteht für irgend einen Querschnitt die größte positive Querkraft, sobald die erste Last des vom rechten Auflager aus vorrückenden Lastenzuges am fraglichen Querschnitte (und zwar unmittelbar rechts von demselben) liegt, so ist  $\max Q_x$  gleich dem linken Stützenwiderstande  $A$ , also z. B. für den Querschnitt 5 in Fig. 126:  $\max Q_x = A_5$ . Rückt die zweite Last bis an diesen Querschnitt, so entsteht bei unmittelbarer Belastung:  $Q_x = A - P_1$ , wobei  $A$  die bei  $P_1$  gemessene Ordinate ( $a'b'$ ) des  $A$ -Polygons bedeutet. Ist  $A - P_1 > A_5$ , so ist  $\max Q_x = A - P_1$ , vorausgesetzt, daß der Zug nicht noch weiter nach  $A$  hin verschoben werden muß.

Der Fall einer unmittelbaren Belastung kommt nur bei verhältnismäßig kurzen Trägern vor, und es ergibt sich dann bei denjenigen Belastungen, für welche Eisenbahn- und Straßenbrücken berechnet zu werden pflegen, stets  $\max Q$  gleich der unter dem fraglichen Querschnitte gemessenen Ordinate des  $A$ -Polygons.

**84. Momente für bestimmte Querschnitte. Größtes Maximalmoment.** Die Ermittlung der Momente  $\max M$  für bestimmte Quer-



schnitte wurde bereits in No 82 erledigt (vergl. die Berechnung von  $M_1, M_2 \dots$ ). Wird aber *das größte aller Maximalmomente* gesucht, so muß ein anderer Weg eingeschlagen werden, da die Lage des Querschnitts, welchem dieses Moment entspricht, zunächst unbekannt ist, und weil ferner die veränderliche und die ständige Last nicht mehr getrennt behandelt werden dürfen.

In Fig. 132 haben wir, der größeren Deutlichkeit wegen, angenommen, daß es sich um einen kurzen Träger mit einer verhältnismäßig großen gleichförmigen Belastung  $g$  handelt, und daß nur zwei verschiebbare Einzellasten  $P_1$  und  $P_2$  in Betracht kommen.  $CD$  ist größer als die Stützweite  $AB$  des Trägers. Die gleichförmige Be-

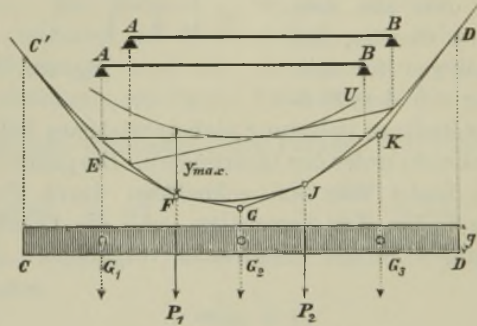


Fig. 132.

lastung wurde durch senkrechte, mit den Einzellasten zusammenfallende Schnitte in drei Streifen zerlegt, deren Gewichte  $G_1, G_2, G_3$  sein mögen; sodann wurde zu den Einzellasten  $G_1, P_1, G_2, P_2, G_3$  mit der beliebigen Polweite  $H$  das Seilpolygon  $C'GD'$  gezeichnet. Rundet man dessen

Ecken  $C'EF, F'GJ, JKD$  durch Parabelbögen ab, welche die jene Ecken bildenden Seilpolygonseiten in den Punkten  $C', F, J, D'$  berühren, so bilden diese Bögen (vergl. Seite 32) das Seilpolygon für die aus der gleichmäßigen Belastung und den Einzellasten zusammengesetzte Belastung.

Die Parabelbögen bestimmt man am zweckmäßigsten mit Hilfe von Tan-

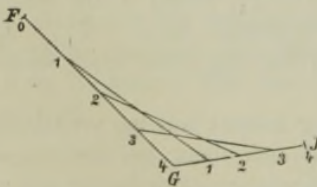


Fig. 133.

genten nach dem in der Fig. 133 dargestellten Verfahren. Die Seiten  $FG$  und  $GJ$  der abzurundenden Ecke wurden in gleiche Teile zerlegt



und die gleich bezeichneten Teilpunkte durch gerade Linien verbunden. Diese Geraden sind Tangenten an die gesuchte Parabel.

Nach Aufzeichnung des Seilpolygons gibt man dem zu untersuchenden Balken verschiedene Stellungen gegen das Lastensystem und bestimmt die zugehörigen Schlußlinien sowie die von diesen umhüllte Linie  $U$ . Ist dann  $y_{max}$  der größte senkrechte Abstand der Linie  $U$  vom Seilpolygon, so erhält man das größte Maximalmoment:

$$M = Hy_{max}.$$

**c. Berechnung der Stützenwiderstände und Momente infolge der Belastung durch einen Eisenbahnzug mit Hilfe von Tabellen.**

**85. Stützenwiderstand  $A_m$ .** Es sei ein Eisenbahnzug vom Auflager  $B$  aus bis zu irgend einem Querschnitte (Knotenpunkte)  $m$  vorgerückt (Fig. 134). Die Lasten seien mit  $P_1, P_2, \dots, P_n$  bezeichnet, ihre Abstände von  $B$  mit  $b_1, b_2, \dots, b_n$  und die Abstände der Lasten von der letzten Last mit  $c_1, c_2, \dots$ . Der Widerstand der linken Stütze wird:

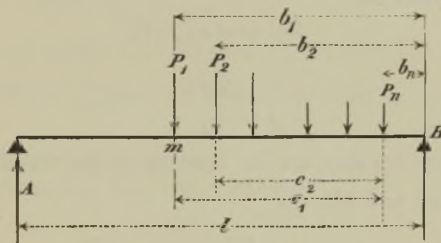


Fig. 134.

$$A_m = \frac{P_1 b_1 + P_2 b_2 + \dots + P_n b_n}{l} = \frac{\sum_1^n P b}{l} = \frac{\sum_1^n P (b_n + c)}{l} = \frac{1}{l} \left( b_n \sum_1^n P + \sum_1^n P c \right),$$

und mit der kurzen Bezeichnung:

$$\sum_1^n P = \mathfrak{P}_n, \quad \sum_1^n P c = \mathfrak{E}_n:$$

$$A_m = \frac{1}{l} (\mathfrak{P}_n b_n + \mathfrak{E}_n).$$

Die Werte  $\mathfrak{P}_n$  und  $\mathfrak{E}_n$  können für einen bestimmten Lastenzug ein für allemal berechnet werden. Dazu beachte man, daß zwischen den statischen Momenten  $\mathfrak{E}_n$  und  $\mathfrak{E}_{n+1}$  die Beziehung

$$\mathfrak{E}_{n+1} = \mathfrak{E}_n + \mathfrak{P}_n e_n$$

besteht, wobei  $e_n$  den Abstand der Last  $P_n$  von der Last  $P_{n+1}$  bedeutet.

Für den von uns angenommenen Güterzug Fig. 114 ergeben sich, je nach der Stellung der beiden den Zug führenden Lokomotiven die in den Tabellen I, II und III aufgeführten Werte. Die erste Spalte gibt die Anzahl  $n$  der Lasten an und die zweite den Abstand  $c_1$  der Last  $P_1$  von der Last  $P_n$ , das ist die *Zuglänge*.

Die Ansätze für die Berechnung der ersten Zahlenwerte  $\mathfrak{S}$  lassen wir hier folgen. Es ist

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{P}_1 = 16^t & \mathfrak{S}_1 = 0 \\ \mathfrak{P}_2 = 32^t & \mathfrak{S}_2 = 0 + 16 \cdot 1,2 = 19,2^{tm} \\ \mathfrak{P}_3 = 48^t & \mathfrak{S}_3 = 19,2 + 32 \cdot 1,2 = 57,6^{tm} \\ \mathfrak{P}_4 = 64^t & \mathfrak{S}_4 = 57,6 + 48 \cdot 1,2 = 115,2^{tm} \\ \mathfrak{P}_5 = 76^t & \mathfrak{S}_5 = 115,2 + 64 \cdot 4,0 = 371,2^{tm}. \end{array}$$

*Beispiel.* Die Stützweite des Balkens  $AB$  sei  $52,2^m$ . Ein von zwei vorwärts fahrenden Lokomotiven geführter Güterzug (Tabelle I) rückt von  $B$  aus um  $47,7^m$  vor. Es ergibt sich dann  $c_1 = 46,2^m$ ,  $b_n = 47,7 - 46,2 = 1,5^m$ ,  $\mathfrak{P}_n = 284^t$ ,  $\mathfrak{S}_n = 7650,4^{tm}$

$$\begin{aligned} Al &= 284 \cdot 1,5 + 7650,4 = 8076,4^{tm} \\ A &= \frac{8076,4}{52,2} = 155^t. \end{aligned}$$

**86. Momente.** Steht die  $r^{\text{te}}$ -Achse eines von  $B$  aus vorrückenden Eisenbahnzuges über dem Knotenpunkte  $m$ , Fig. 135, so ist das Angriffsmoment für den durch  $m$  gelegten Querschnitt

$$\mathfrak{M}_m = A x_m - \mathfrak{S}_r$$

wo

$$A = \frac{\sum_1^n P b}{l}.$$

Verschiebt man den Zug um die unendlich kleine Strecke  $db$  nach links, so wächst  $A$  um  $\sum_1^n P \cdot db$  und  $\mathfrak{M}_m$  um

$$d\mathfrak{M}_m = db \left[ \frac{\sum_1^n P}{l} x_m - \sum_1^r P \right],$$

und es muß daher, wenn  $\mathfrak{M}_m$  abnehmen soll, wenn also die angenommene Zugstellung die gefährlichste sein soll,

$$\sum_1^n P \frac{x_m}{l} < \sum_1^r P$$

sein, d. h.

$$\leftarrow \quad (\text{I}) \quad \frac{\mathfrak{P}_n}{\mathfrak{P}_r} < \frac{l}{x_m}.$$

Ebenso findet man, daß  $\mathfrak{M}_m$  infolge einer kleinen Verschiebung des Eisenbahnzuges nach rechts abnimmt, sobald

$$\longrightarrow \quad (\text{II}) \quad \frac{\mathfrak{P}_n}{\mathfrak{P}_{r-1}} > \frac{l}{x_m}$$

ist. Die beiden Ungleichungen (I) und (II) müssen also erfüllt sein, wenn die Zugstellung den größten Wert  $\mathfrak{M}_m$  hervorbringen soll. Es lassen sich im allgemeinen verschiedene Zugstellungen angeben, welche die Bedingungen I und II befriedigen; doch weichen dann die Ergebnisse  $\mathfrak{M}_m$  nur wenig voneinander ab.

*Beispiel.* Ein Balken von 80<sup>m</sup> Stützweite wird durch die Knotenpunkte in 16 gleichlange Felder zerlegt. Für den *mittelsten Knotenpunkt*  $n = 8$  erhält man, entsprechend der in Fig. 135 angegebenen Zugstellung mit Hilfe von Tabelle III:

$$\begin{aligned}
 n &= 26 & r &= 13 \\
 \leftarrow \frac{\mathfrak{P}_{26}}{\mathfrak{P}_{13}} &= \frac{344}{184} < \frac{l}{x_8} = 2,0 \\
 \rightarrow \frac{\mathfrak{P}_{26}}{\mathfrak{P}_{12}} &= \frac{344}{168} > 2,0 \\
 b_n &= 1,8^m, \quad \mathfrak{S}_{26} = 12121,6^{tm}, \quad \mathfrak{S}_{13} = 2124,8^{tm} \\
 \mathfrak{M}_m &= \frac{x_m}{l} (\mathfrak{P}_n b_n + \mathfrak{S}_n) - \mathfrak{S}_r \\
 \mathfrak{M}_8 &= \frac{1}{2} (344 \cdot 1,8 + 12121,6) - 2124,8 = 4246^{tm}.
 \end{aligned}$$

Für den *Knotenpunkt* 7 findet man, Fig. 136, Tabelle III.

$$\begin{aligned}
 n &= 27 & r &= 12 \\
 \leftarrow \frac{\mathfrak{P}_{27}}{\mathfrak{P}_{12}} &= \frac{356}{168} < \frac{l}{x_7} = \frac{16}{7} \\
 \leftarrow \frac{\mathfrak{P}_{27}}{\mathfrak{P}_{21}} &= \frac{356}{152} > \frac{16}{7} \\
 b_n &= 2,6, \quad \mathfrak{S}_{27} = 13153,6, \quad \mathfrak{S}_{12} = 1923,2 \\
 \mathfrak{M}_7 &= \frac{7}{16} (356 \cdot 2,6 + 13153,6) - 1923,2 = 4236^{tm}.
 \end{aligned}$$

¶ *Knotenpunkt 6.* Die zweite Maschine wird vorwärts fahrend angenommen, die erste bleibt rückwärts fahrend, Fig. 137, Tabelle II.

$$\begin{aligned}
 n &= 27 & r &= 10 \\
 \leftarrow \frac{\mathfrak{P}_{27}}{\mathfrak{P}_{10}} &= \frac{356}{148} < \frac{l}{x_6} = \frac{8}{3} \\
 \rightarrow \frac{\mathfrak{P}_{27}}{\mathfrak{P}_9} &= \frac{356}{132} > \frac{8}{3} \\
 b_n &= 2,8^m, \quad \mathfrak{S}_{27} = 13228, \quad \mathfrak{S}_{10} = 1240,4, \\
 \mathfrak{M}_6 &= \frac{3}{8} (356 \cdot 2,8 + 13228) - 1240,4 = 3094^{tm}.
 \end{aligned}$$

*Knotenpunkt 5,* Fig. 138, Tabelle II.

$$\begin{aligned}
 n &= 28 & r &= 8 \\
 \leftarrow \frac{\mathfrak{P}_{28}}{\mathfrak{P}_8} &= \frac{368}{116} < \frac{l}{x_5} = \frac{16}{5} = 3,2 \\
 \rightarrow \frac{\mathfrak{P}_{28}}{\mathfrak{P}_7} &= \frac{368}{100} > 3,2 \\
 b_n &= 2,4^m, \quad \mathfrak{S}_{28} = 14296, \quad \mathfrak{S}_8 = 942,8 \\
 \mathfrak{M}_5 &= \frac{5}{16} (368 \cdot 2,4 + 14296) - 942,8 = 3801^{tm}.
 \end{aligned}$$

Knotenpunkt 4, Fig. 138, Tabelle II.

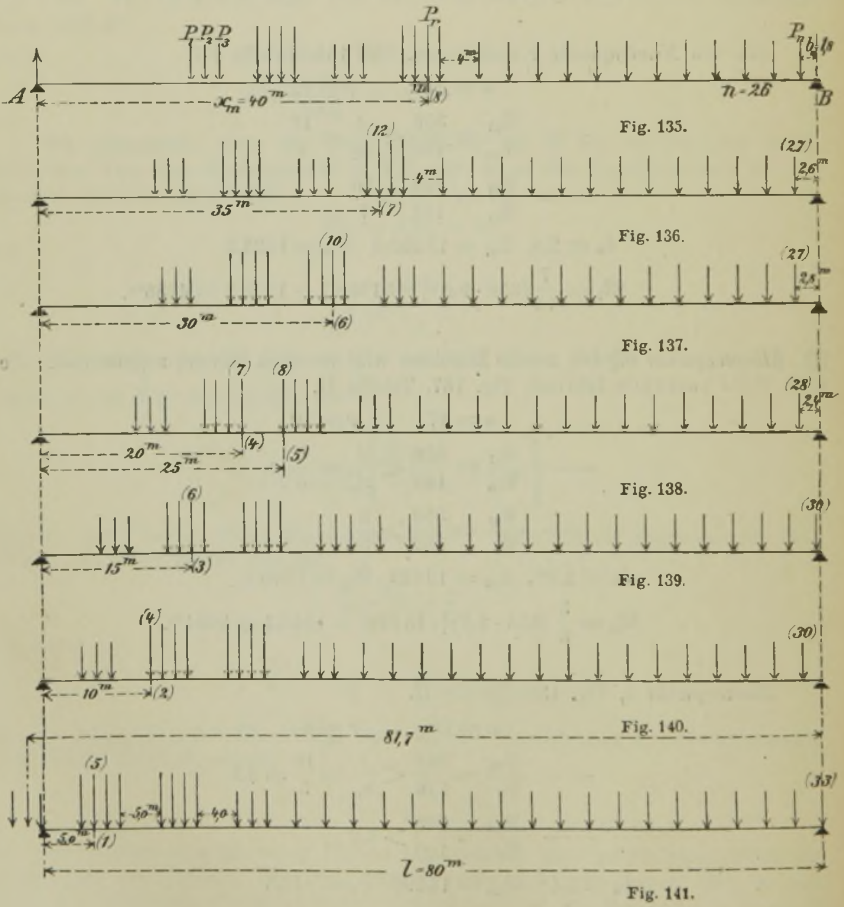
$$n = 28 \quad r = 6$$

$$\leftarrow \frac{\mathfrak{P}_{28}}{\mathfrak{P}_7} = \frac{368}{100} < \frac{l}{x_4} = 4$$

$$\rightarrow \frac{\mathfrak{P}_{28}}{\mathfrak{P}_6} = \frac{368}{84} > 4$$

$$b_n = 2,4^m, \mathfrak{E}_{28} = 14296, \mathfrak{E}_7 = 442,8$$

$$\mathfrak{M}_4 = \frac{1}{4} (368 \cdot 2,4 + 14296) - 442,8 = 3352^m.$$





*Knotenpunkt 3*, Fig. 139, Tabelle II.

$$\begin{aligned}
 n &= 30 & r &= 6 \\
 \leftarrow \frac{\mathfrak{P}_{30}}{\mathfrak{P}_6} &= \frac{392}{84} < \frac{l}{x_3} = \frac{16}{3} \\
 \frac{\mathfrak{P}_{29}^*)}{\mathfrak{P}_6} &= \frac{380}{68} > \frac{16}{3} \\
 b_n &= 0,2^m, \mathfrak{S}_{30} = 16540, \mathfrak{S}_6 = 342,0 \\
 \mathfrak{M}_3 &= \frac{3}{16} (392 \cdot 0,2 + 16540) - 342,0 = 2774^m.
 \end{aligned}$$

*Knotenpunkt 2*, Fig. 140, Tabelle II.

$$\begin{aligned}
 n &= 30 & r &= 4 \\
 \leftarrow \frac{\mathfrak{P}_{30}}{\mathfrak{P}_4} &= \frac{392}{52} < \frac{l}{x_2} = 8,0 \\
 \rightarrow \frac{\mathfrak{P}_{30}}{\mathfrak{P}_3} &= \frac{392}{36} > 8,0 \\
 b_n &= 2,8^m, \mathfrak{S}_{30} = 16540, \mathfrak{S}_4 = 198,0 \\
 \mathfrak{M}_2 &= \frac{1}{8} (392 \cdot 2,8 + 16540) - 198,0 = 2007^m.
 \end{aligned}$$

*Knotenpunkt 1*, Fig. 141, Tabelle II. Der Tender der ersten Maschine hat die Brücke verlassen.

$$\begin{aligned}
 n &= 33 & r &= 5, \mathfrak{P}_{33} = 428, \mathfrak{P}_5 = 68, \mathfrak{P}_3 = 36 \\
 \leftarrow \frac{\mathfrak{P}_{33} - \mathfrak{P}_3}{\mathfrak{P}_5 - \mathfrak{P}_3} &= \frac{392}{32} < \frac{l}{x_1} = 16 \\
 \frac{\mathfrak{P}_{32} - \mathfrak{P}_3}{\mathfrak{P}_4 - \mathfrak{P}_3} &= \frac{392 - 12}{16} > 16 \\
 b_n &= 0, \mathfrak{S}_n = 20176 \\
 Al &= 20176 - 36 \cdot 81,7 = 17234,8^m \\
 \mathfrak{M}_1 &= Ax - 16 \cdot 1,2 = \frac{1}{16} 17234,8 - 19,2 = 1058^m
 \end{aligned}$$

\*) Die letzte Achse liegt so nahe am Auflager B, daß sie infolge einer kleinen endlichen Verschiebung des Zuges nach rechts den Träger verläßt.

Tabelle I.

Tonnen Meter	Lokomotive				Tender				Lokomotive				Tender				Güterwagen							
	16	16	16	16	12	12	12	12	16	16	16	16	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
	1,2	1,2	1,2	4,0	1,5	1,5	4,0	4,0	1,2	1,2	1,2	4,0	1,5	1,5	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0
$n$	$c_1$	$P_n$	$\Sigma_n$	$n$	$c_1$	$P_n$	$\Sigma_n$																	
1	0	16	0	31	76,2	404	17 790,4																	
2	1,2	32	19,2	32	79,2	416	19 002,4																	
3	2,4	48	57,6	33	82,2	428	20 250,4																	
4	3,6	64	115,2	34	85,2	440	21 534,4																	
5	7,6	76	371,2	35	88,2	452	22 854,4																	
6	9,1	88	485,2	36	91,2	464	25 210,4																	
7	10,6	100	617,2	37	94,2	476	25 602,4																	
8	14,6	116	1 017,2	38	97,2	488	27 030,4																	
9	15,8	132	1 156,4	39	100,2	500	28 494,4																	
10	17,0	148	1 314,8	40	103,2	512	29 994,4																	
11	18,2	164	1 492,4	41	106,2	524	31 530,4																	
12	22,2	176	2 148,4	42	109,2	536	33 102,4																	
13	23,7	188	2 412,4	43	112,2	548	34 710,4																	
14	25,2	200	2 694,4	44	115,2	560	36 354,4																	
15	28,2	212	3 294,4	45	118,2	572	38 034,4																	
16	31,2	224	3 930,4	46	121,2	584	39 750,4																	
17	34,2	236	4 602,4	47	124,2	596	41 502,4																	
18	37,2	248	5 310,4	48	127,2	608	43 290,4																	
19	40,2	260	6 054,4	49	130,2	620	45 114,4																	
20	43,2	272	6 834,4	50	133,2	632	46 974,4																	
21	46,2	284	7 650,4	51	136,2	644	48 870,4																	
22	49,2	296	8 502,4	52	139,2	656	50 802,4																	
23	52,2	308	9 390,4	53	142,2	668	52 770,4																	
24	55,2	320	10 314,4	54	145,2	680	54 774,4																	
25	58,2	332	11 274,4	55	148,2	692	56 814,4																	
26	61,2	344	12 270,4	56	151,2	704	58 890,4																	
27	64,2	356	13 302,4	57	154,2	716	61 002,4																	
28	67,2	368	14 370,4	58	157,2	728	63 150,4																	
29	70,2	380	15 474,4	59	160,2	740	65 334,4																	
30	73,2	392	16 614,4	60	163,2	752	67 554,4																	

Tabelle II.

Nummer Meter	Tender			Lokomotive				Lokomotive				Tender			Güterwagen			
	12	12	12	16	16	16	16	16	16	16	16	12	12	12	12	12	12	12
	1,5	1,5	4,0	1,2	1,2	1,2	5,0	1,2	1,2	1,2	4,0	1,5	1,5	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0

n	c <sub>1</sub>	Σ <sub>1</sub>	Σ <sub>2</sub>	n	c <sub>1</sub>	Σ <sub>1</sub>	Σ <sub>2</sub>
1	0	12	0	31	77,2	404	17 716
2	1,5	24	18	32	80,2	416	18 928
3	3,0	36	54	33	83,2	428	20 176
4	7,0	52	198	34	86,2	440	21 460
5	8,2	68	260,4	35	89,2	452	22 780
6	9,4	84	342	36	92,2	464	24 136
7	10,6	100	442,8	37	95,2	476	25 528
8	15,6	116	642,8	38	98,2	488	26 956
9	16,8	132	1 082	39	101,2	500	28 420
10	18,0	148	1 240,4	40	104,2	512	29 920
11	19,2	164	1 418	41	107,2	524	31 456
12	23,2	176	2 074	42	110,2	536	33 028
13	24,7	188	2 838	43	113,2	548	34 636
14	26,2	200	2 620	44	116,2	560	36 280
15	28,2	212	3 220	45	119,2	572	37 960
16	32,2	224	3 856	46	122,2	584	39 676
17	35,2	236	4 528	47	125,2	596	41 428
18	38,2	248	5 236	48	128,2	608	43 216
19	41,2	260	5 980	49	131,2	620	45 040
20	44,2	272	6 760	50	134,2	632	46 900
21	47,2	284	7 576	51	137,2	644	48 796
22	50,2	296	8 428	52	140,2	656	50 728
23	53,2	308	9 316	53	143,2	668	52 696
24	56,2	320	10 240	54	146,2	680	54 700
25	59,2	332	11 200	55	149,2	692	56 740
26	62,2	344	12 196	56	152,2	704	58 816
27	65,2	356	13 228	57	155,2	716	60 928
28	68,2	368	14 296	58	158,2	728	63 076
29	71,2	380	15 400	59	161,2	740	65 260
30	74,2	392	16 540	60	164,2	752	67 480

Tabelle III.

Tonnen Meter	Tender			Lokomotive				Tender			Lokomotive				Güterwagen		
	12	12	12	16	16	16	16	12	12	12	16	16	16	16	12	12	12
	1,5	1,5	4,0	1,2	1,2	1,2	4,0	1,5	1,5	4,0	1,2	1,2	1,2	4,0	3,0	3,0	3,0
<i>n</i>	<i>c</i> <sub>1</sub>	<i>F</i> <sub>n</sub>	<i>S</i> <sub>n</sub>	<i>n</i>	<i>c</i> <sub>1</sub>	<i>F</i> <sub>n</sub>	<i>S</i> <sub>n</sub>	<i>n</i>	<i>c</i> <sub>1</sub>	<i>F</i> <sub>n</sub>	<i>S</i> <sub>n</sub>	<i>n</i>	<i>c</i> <sub>1</sub>	<i>F</i> <sub>n</sub>	<i>S</i> <sub>n</sub>		
1	0	12	0	31	77,2	404	17 641,6	2	1,5	24	18	32	80,2	416	18 853,6		
2	1,5	24	18	32	80,2	416	18 853,6	3	3,0	36	54	33	83,2	428	20 101,6		
3	3,0	36	54	33	83,2	428	20 101,6	4	7,0	52	198	34	86,2	440	21 385,6		
4	7,0	52	198	34	86,2	440	21 385,6	5	8,2	68	260,4	35	89,2	452	22 705,6		
5	8,2	68	260,4	35	89,2	452	22 705,6	6	9,4	84	342,0	36	92,2	464	24 061,6		
6	9,4	84	342,0	36	92,2	464	24 061,6	7	10,6	100	442,8	37	95,2	476	25 453,6		
7	10,6	100	442,8	37	95,2	476	25 453,6	8	14,6	112	842,8	38	98,2	488	26 881,7		
8	14,6	112	842,8	38	98,2	488	26 881,7	9	16,1	124	1 010,8	39	101,2	500	28 345,6		
9	16,1	124	1 010,8	39	101,2	500	28 345,6	10	17,6	136	1 196,8	40	104,2	512	29 845,6		
10	17,6	136	1 196,8	40	104,2	512	29 845,6	11	21,6	152	1 740,8	41	107,2	524	31 381,6		
11	21,6	152	1 740,8	41	107,2	524	31 381,6	12	22,8	168	1 923,2	42	110,2	536	32 953,6		
12	22,8	168	1 923,2	42	110,2	536	32 953,6	13	24,0	184	2 124,8	43	113,2	548	34 561,6		
13	24,0	184	2 124,8	43	113,2	548	34 561,6	14	25,2	200	2 345,6	44	116,2	560	36 205,6		
14	25,2	200	2 345,6	44	116,2	560	36 205,6	15	29,2	212	3 145,6	45	119,2	572	37 885,6		
15	29,2	212	3 145,6	45	119,2	572	37 885,6	16	32,2	224	3 781,6	46	122,2	584	39 601,6		
16	32,2	224	3 781,6	46	122,2	584	39 601,6	17	35,2	236	4 453,6	47	125,2	596	41 353,6		
17	35,2	236	4 453,6	47	125,2	596	41 353,6	18	38,2	248	5 161,6	48	128,2	608	43 141,6		
18	38,2	248	5 161,6	48	128,2	608	43 141,6	19	41,2	260	5 905,6	49	131,2	620	44 965,6		
19	41,2	260	5 905,6	49	131,2	620	44 965,6	20	44,2	272	6 685,6	50	134,2	632	46 825,6		
20	44,2	272	6 685,6	50	134,2	632	46 825,6	21	47,2	284	7 501,6	51	137,2	644	48 721,6		
21	47,2	284	7 501,6	51	137,2	644	48 721,6	22	50,2	296	8 353,6	52	140,2	656	50 653,6		
22	50,2	296	8 353,6	52	140,2	656	50 653,6	23	53,2	308	9 241,6	53	143,2	668	52 621,6		
23	53,2	308	9 241,6	53	143,2	668	52 621,6	24	56,2	320	10 165,6	54	146,2	680	54 625,6		
24	56,2	320	10 165,6	54	146,2	680	54 625,6	25	59,2	332	11 125,6	55	149,2	692	56 665,6		
25	59,2	332	11 125,6	55	149,2	692	56 665,6	26	62,2	344	12 121,6	56	152,2	704	58 741,6		
26	62,2	344	12 121,6	56	152,2	704	58 741,6	27	65,2	356	13 153,6	57	155,2	716	60 853,6		
27	65,2	356	13 153,6	57	155,2	716	60 853,6	28	68,2	368	14 221,6	58	158,2	728	63 001,6		
28	68,2	368	14 221,6	58	158,2	728	63 001,6	29	71,2	380	15 325,6	59	161,2	740	65 185,6		
29	71,2	380	15 325,6	59	161,2	740	65 185,6	30	74,2	392	16 465,6	60	164,2	752	67 405,6		
30	74,2	392	16 465,6	60	164,2	752	67 405,6										



**87. Fortsetzung.** Überschreitet die Abscisse  $x$  des Querschnitts bei einem Balken von größerer Stützweite einen bestimmten Wert, so liegt bei der das Moment  $_{max}M_m$  erzeugenden Laststellung eine Güterwagenachse über  $m$ . Man erhält in diesem Falle für  $_{max}M_m$  einen besonders einfachen Ausdruck, wenn man die Güterwagen durch eine gleichförmige Belastung  $p$ , welche etwa  $2,5^m$  hinter der letzten Lokomotivachse beginnt, ersetzt.

Mit den aus Fig. 142 ersichtlichen Bezeichnungen findet man nach dem auf Seite 141 zur Berechnung von  $M$  angegebenen Verfahren

$$M = \frac{x}{l} \cdot \frac{p x'^2}{2} + \frac{x'}{l} \left[ \sum P(\xi - e) + \frac{p(x^2 - \xi^2)}{2} \right]$$

$$= \frac{p x x'}{2} - \frac{x'}{l} \sum P e + \frac{x'}{l} \left( \xi \sum P - \frac{p \xi^2}{2} \right).$$

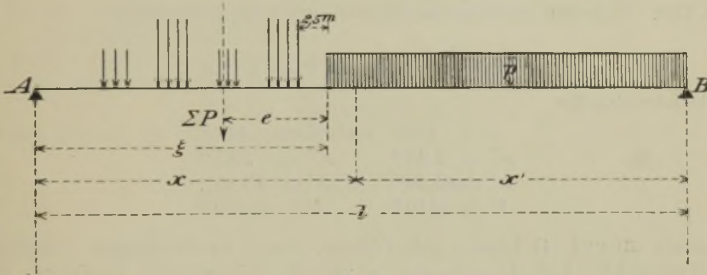


Fig. 142.

$M$  wird ein Maximum, sobald  $\xi$  den festen, von der Lage des Querschnitts  $m$  unabhängigen Wert

$$(1) \quad \xi = \frac{\sum P}{p}$$

annimmt; es entsteht

$$(2) \quad M_{max} = \frac{p x x'}{2} + \frac{x'}{l} \left( \sum P \frac{\xi}{2} - \sum P e \right).$$

Für die von uns gewählte Zugesanordnung (Tabelle III) ist

$$\sum P = 200^t, \quad p = \frac{12,0^t}{3,0^m} = 4,0^t/m, \quad \xi = 50^m,$$

woraus zunächst folgt, daß  $x \geq 50^m$  sein muß, damit Formel (2) angewendet werden darf. Ferner ist

$$\sum P e = \mathfrak{S}_{14} + \mathfrak{P}_{14} 2,5 = 2345,6 + 200 \cdot 2,5 = 2845,6^{tm}$$

$$\sum P \frac{\xi}{2} - \sum P e = 5000 - 2845,6 = 2154,4^{tm},$$

und es ergibt sich daher die einfache Gleichung

$$_{max}M = 2 x x' + 2154,4 \frac{x'}{l}.$$

Als *Beispiel* wählen wir eine Brücke von  $140^m$  Spannweite und  $5^m$  Feldweite. Wir erhalten

$$_{max}M = 2 x x' + 15,4 x'$$

und finden für

$$x = 50^m, \quad 55^m, \quad 60^m, \quad 65^m, \quad 70^m$$

$$M = 10390^tm, \quad 10660^tm, \quad 10830^tm, \quad 10900^tm, \quad 10880^tm.$$

Das größte  $M$  entsteht bei  $x = 65^m$ ; es unterscheidet sich aber nicht wesentlich von dem in der Mitte erhaltenen Werte.

Wir führen noch an, daß das durch die Formel (2) gegebene Moment für

$$(3) \quad x'' = \frac{l}{2} - x = \frac{\Sigma P \frac{\xi}{2} - \Sigma Pe}{pl}$$

ein Maximum wird, und daß sich dieses größte aller Maximalmomente auf die einfache Form

$$(4) \quad \max(M_{max}) = \frac{px'^2}{2}$$

bringen läßt. Unseren Belastungsannahmen entspricht insbesondere

$$x'' = \frac{538,6}{l} \quad \text{und} \quad \max(M_{max}) = 2x'^2,$$

also beispielsweise für

$$\begin{array}{l|l} l = 120^m & \text{und} \quad l = 140^m \\ x'' = 4,49^m & | \quad x'' = 3,85^m \\ x' = 64,49^m & | \quad x' = 73,85^m \\ M = 8310^tm & | \quad M = 10910^tm. \end{array}$$

Die Formeln (3) und (4) leisten gute Dienste, wenn die Wirkungen verschiedener Lokomotivgewichte und Belastungen  $p$  schnell miteinander verglichen werden sollen. Nimmt man z. B. zwei rückwärtsfahrende Lokomotiven mit den in Fig. 113

(S. 122) angegebenen Achslasten und Radständen an, ferner  $p = \frac{12,0}{3,3} = \frac{40}{11}^tm$ , so erhält man

$$\Sigma P = 2 \cdot 56 + 2 \cdot 36 = 184^t, \quad \xi = \frac{184 \cdot 11}{40} = 50,6^m,$$

$$\Sigma Pe = 56 \left( 2,5 + 1,3 + \frac{1,3}{2} \right) + (36 + 56 + 36) \cdot 19,55 = 2751,60^tm,$$

$$\Sigma P \frac{\xi}{2} - \Sigma Pe = 1903,6.$$

mithin

$$x'' = \frac{523,5}{l} \quad \text{und} \quad \max(M_{max}) = \frac{20}{11} x'^2,$$

also für

$$\begin{array}{l|l} l = 120^m & \text{und} \quad l = 140^m \\ x'' = 4,36^m & | \quad x'' = 3,74^m \\ M = 7530^tm & | \quad M = 9890^tm. \end{array}$$

**88. Größtes Moment  $M$  für unmittelbare Belastung.** Wird die genaue Berechnung des größten Momentes für unmittelbare Belastung verlangt, so dürfen Verkehrslast und Eigenlast nicht getrennt behandelt werden. Für weitgespannte Brücken ist also nicht der durch Gleich. (2) gegebene Wert  $M$ , sondern, wegen

$M_g = \frac{gxx'}{2}$ , der Wert

$$M_{max} = (p + g) \frac{xx'}{2} + \frac{x'}{l} \left( \Sigma P \frac{\xi}{2} - \Sigma Pe \right)$$

zu einem Maximum zu machen. Man findet dann

$$x'' = \frac{1}{2} - x = \frac{\Sigma P \frac{\xi}{2} - \Sigma Pe}{(p + g)l} \quad \text{und}$$

$$\max(M_{\max}) = (p + g) \frac{x'^2}{2}.$$

Unmittelbare Belastung kommt indes nur bei kürzeren Trägern vor, z. B. den Schienenträgern von Eisenbahnbrücken, sobald die Schienen unmittelbar auf den Trägern liegen oder sobald dicht nebeneinander liegende Querswellen oder Langschwelen angeordnet sind.\*) Der Einfluß des Eigengewichts spielt dann eine so untergeordnete Rolle, daß es sich empfiehlt, das Maximalmoment infolge der Verkehrslast allein zu berechnen und hierzu das vom Eigengewichte in der Mitte des Trägers hervorgerufene Moment  $\frac{1}{8}gl^2$  zu addieren. Bezeichnet, Fig. 143,

$\mathfrak{S}_m$  das statische Moment der links vom fraglichen Querschnitt  $m$  gelegenen Achslasten, bezogen auf  $m$ ,

$\Sigma P$  die Mittelkraft aus sämtlichen Achslasten,

$c$  den Abstand der  $\Sigma P$  vom Auflager  $B$ ,

$s$  „ „ „ „  $\Sigma P$  „ Querschnitte  $m$ ,

so ist das Moment für den Querschnitt  $m$

$$M = \Sigma P \frac{c}{l} x - \mathfrak{S}_m.$$

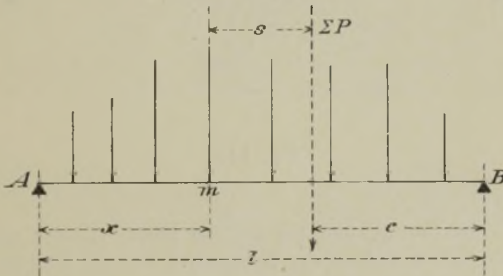


Fig. 143.

Der Wert

$$cx = (l - s - x)x$$

wird ein Maximum, sobald

$$l - s = 2x$$

ist. Daraus folgt

$$(5) \quad c = x:$$

\*) Sehr oft rechnet man selbst bei größeren Schwellenabständen mit unmittelbarer Belastung, weil man sich nicht an bestimmte Lagen der Schwellen binden will. Aus diesem Grunde werden auch — wenn die Querswellen fehlen — die zwischen Schiene und Träger liegenden Unterlagsplatten vernachlässigt.

d. h. der Querschnitt  $m$  und die Mittelkraft  $\Sigma P$  müssen von der Trägermitte gleich weit entfernt sein. Im allgemeinen wird man probeweise verschiedene Lasten über  $m$  annehmen und die berechneten Werte

$$(6) \quad \max M = \Sigma P \frac{x^2}{l} - \mathfrak{C}_m$$

miteinander vergleichen; in der Regel aber unterliegt die Wahl dieser Last keinem Zweifel.

**Beispiel.** Liegt die Stützweite zwischen rund  $5^m$  und  $11^m$ , so kommen für die ungünstigste Laststellung nur 4 Lokomotivachsen in Betracht, Fig. 144. Es ergibt sich dann

$$x = c = \frac{l}{2} - \frac{1,2}{4} = \frac{l}{2} - 0,3, \quad \Sigma P = 64^t, \quad \mathfrak{C}_m = 16 \cdot 1,2 = 19,2^m,$$

$$M = \frac{64 \left( \frac{l}{2} - 0,3 \right)^2}{l} - 19,2,$$

$$(I) \quad M = 16l - 38,4 + \frac{5,76}{l}.$$

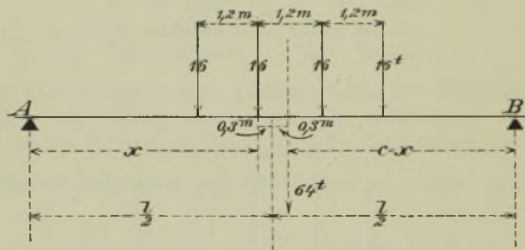


Fig. 144.

Ist die Stützweite so gering, daß bei der das größte Moment erzeugenden Laststellung nicht mehr alle 4 Achsen der Lokomotive auf der Brücke liegen, so ist es ratsam, die Achslasten etwas größer anzunehmen, um dem Umstande Rechnung zu tragen, daß einzelne Achsen infolge der Bewegung der Maschine stärker belastet werden. Wir empfehlen, mit der Achslast  $17^t$  oder  $18^t$  oder  $20^t$  zu rechnen, je nachdem sich nur 3 oder nur 2 Achsen oder nur eine Achse auf der Brücke befinden. Für diese drei Belastungsfälle findet man leicht die Gleichungen:

$$(II) \quad M = 12,75 l - 20,4,$$

$$(III) \quad M = 9 l - 10,8 + \frac{3,24}{l},$$

$$(IV) \quad M = 5 l.$$

Bis zu  $l = 2,35^m$  liefert Gleich. IV das größte Moment, von  $l = 2,35^m$  bis  $2,86^m$  ist III anzuwenden und von  $l = 2,86^m$  bis  $5,2^m$  Formel II. Auf den Umstand, daß die Stützweite bereits mit  $l = 4,8^m$  den vierfachen Radstand erreicht, nehmen wir keine Rücksicht, damit die Gültigkeitsbereiche der vier Gleichungen stetig ineinander übergehen.



## § 19.

## Verwertung der Einflußlinien des einfachen Balkens.

89. Bei der Ermittlung der von beweglichen Einzellasten hervorgerufenen Momente und Querkräfte haben wir von den Einflußlinien keinen Gebrauch gemacht. Es wäre auch umständlich, Größen, deren Bestimmung mit Hilfe des Seilpolygons nur das Abgreifen einer einzigen Strecke und die Multiplikation derselben mit einem festen Werte, der Polweite, erfordert, durch Angabe des Einflusses der einzelnen Lasten darstellen zu wollen, und hieran ändert auch der leicht zu beweisende, die Benutzung der Einflußlinien erleichternde Satz nichts, daß eine Lastengruppe innerhalb einer Strecke, der eine gerade Einflußlinie entspricht, durch ihre Mittelkraft ersetzt werden darf. Trotzdem sind die Einflußlinien des einfachen Balkens von großem Nutzen. Ganz abgesehen von den Diensten, die sie uns im zweiten Bande unseres Buches bei der Berechnung statisch unbestimmter Träger leisten werden, gestatten sie häufig eine schnelle Zurückführung anderer Aufgaben auf die Berechnung der Momente und Querkräfte einfacher Balken. So werden wir bei der Untersuchung statisch bestimmter Träger häufig auf Einflußflächen stoßen, welche aus einem Dreieck  $ACB$  (Fig. 145) bestehen, oder aus einem Viereck  $AL_1L_2B$ , das aus einem Dreieck  $ACB$  durch Abschneiden der Spitze entstanden ist, Fig. 146. Bezeichnet

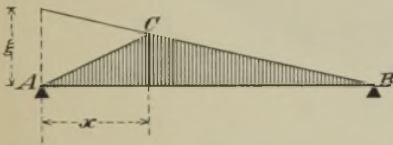


Fig. 145.

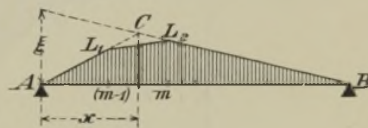


Fig. 146.

man dann mit  $x$  die Entfernung des Punktes  $C$  von der Lotrechten durch  $A$  und mit  $\xi$  die Strecke, welche die Gerade  $BC$  auf jener Lotrechten abschneidet, so kann man die Größe  $Z$ , deren Einflußlinie das Dreieck  $ACB$  ist, in der Weise finden, daß man für den Querschnitt  $C$  eines einfachen Balkens das Moment  $\mathfrak{M}$  mit Hilfe eines Seilpolygons bestimmt und hierauf mit  $\xi : x$  multipliziert. Denn wäre  $\xi = x$ , so würde das Dreieck  $ACB$  vollständig mit der in Fig. 123, Seite 134 dargestellten Einflußfläche für  $M$  übereinstimmen.

Hat die Einflußfläche für  $Z$  die Form  $AL_1L_2B$ , so ermittle man mit Hilfe des in Fig. 131, Seite 143 angegebenen Verfahrens das

Moment  $M = Hy$  für den zwischen den Querträgern  $(m - 1)$  und  $m$  gelegenen Querschnitt  $C$  eines einfachen Balkens  $AB$  und multipliziere es wieder mit  $\xi : x$ . In beiden Fällen erhält man also  $Z$  in der Form

$$Z = \frac{\xi}{x} M = \frac{\xi}{x} Hy.$$

Auch die Berechnung von  $M$  mit Hilfe von Tabellen leistet häufig vortreffliche Dienste bei der Auswertung derartiger Größen  $Z$ .

90. Für viele Untersuchungen wird es sich als nützlich erweisen, die Aufgabe der Berechnung des Momentes  $M$  durch die folgende Fragestellung zu erweitern. Das Feld  $F_1F_2$  des Balkens  $AB$  (Fig. 147) wird

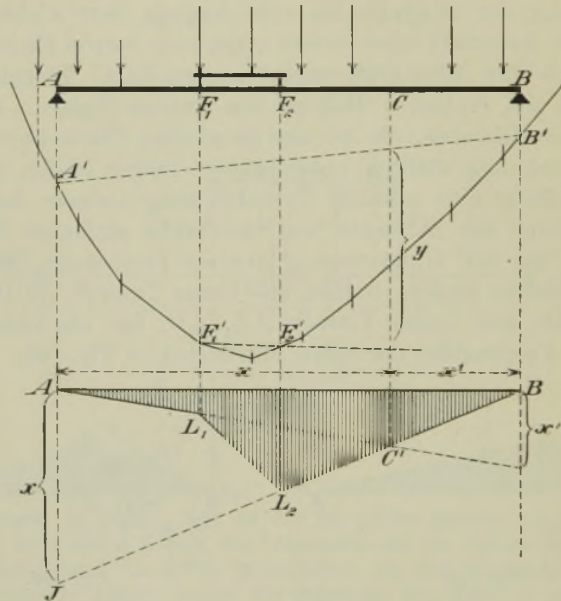


Fig. 147.

durchschnitten. Gesucht ist das Moment  $M$  der am Balkenstück  $AF_1$  angreifenden äußeren Kräfte in Bezug auf einen Punkt  $C$ , der zwischen  $F_2$  und  $B$  liegt.

Stellt man den Träger unter das die Lasten verbindende Seilpolygon und trägt man die Schlußlinien  $A'B'$  und  $F_1'F_2'$  ein, so sind diese Linien die äußersten Seilpolygonseiten für die an  $AF_1$  angreifenden äußeren Kräfte. Sie schneiden auf der Lotrechten durch  $C$  die Strecke  $y$  ab und man erhält daher

$$M = Hy.$$

Die Einflußlinie für  $M$  aber wird folgendermaßen erhalten. Solange die über den Träger wandernde Last  $P = 1$  rechts von  $F_2$  liegt, greift am Balkenstück  $AF_1$  nur die äußere Kraft  $A$  an; sie erzeugt  $M = Ax$ . Liegt  $P$  links von  $F_1$ , so entsteht  $M = Bx'$ . Im ersten Falle wird die mit  $x$  multiplizierte  $A$ -Linie Einflußlinie für  $M$ , im zweiten die mit  $x'$  multiplizierte  $B$ -Linie, genau wie bei der Einflußlinie in Fig. 123, Seite 134, nur mit dem Unterschiede, daß der Schnittpunkt  $C'$  dieser beiden Linien jetzt zwischen  $F_2$  und  $B$  liegt, lotrecht unter  $C$ . Innerhalb des Feldes  $F_1F_2$  gilt die Gerade  $L_1L_2$ .

Unterscheidet sich nun die Einflußlinie für eine Größe  $Z$  von der in der Figur 147 abgebildeten lediglich dadurch, daß  $AJ$  nicht  $= x$  sondern  $= \xi$  ist, so wird

$$Z = \frac{\xi}{x} M = \frac{\xi}{x} Hy.$$

Die gefährlichste Zugstellung findet man am schnellsten durch Probieren; die schwersten Lasten müssen in der Nähe von  $F_2$  stehen.

## VI. Abschnitt.

### Querkräfte und Momente für den Gerberschen Balken.

#### § 20.

#### Beliebige ständige Belastung.

91. Jeder durchgehende Balken mit  $n$  Stützpunkten kann nach No. 61, Seite 114, durch  $(n - 2)$  Mittelgelenke statisch bestimmt gemacht werden. Einen solchen Gelenk-Balken (auch, nach dem Erfinder, *Gerberscher Balken* genannt) zeigt die Fig. 148; er besteht aus den gestützten Teilen  $ABG_1$  und  $G_2CDG_3$ , welche wir als *Balken mit Auslegern* bezeichnen wollen\*), und aus den *Koppelträgern*  $G_1G_2$

\*) Die Balkenstücke  $BG_1$ ,  $CG_2$  und  $DG_3$  führen neben der Bezeichnung *Ausleger* auch noch den Namen *Kragarm*. Man nennt deshalb die *Gerberschen Balken* vielfach *Auslegerbalken* oder *Kragträger*; auch die amerikanische Bezeichnung *Cantilever* hat sich in Deutschland leider eingebürgert.



und  $G_3E$ . Die letzteren verhalten sich genau wie einfache Balken und können mit Hilfe der im vorigen Abschnitte entwickelten Gesetze behandelt werden. Dabei ergeben sich auch die Drücke, welche die Koppelträger auf die in je zwei Punkten gestützten Teile ausüben, und es läßt sich somit die Untersuchung des Gelenkbalkens stets auf

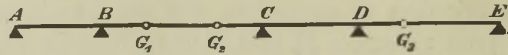


Fig. 148.

diejenige eines Balkens mit überstehenden Enden zurückführen, Fig. 149. Wir setzen nur senkrechte Lasten voraus, zeichnen mit der beliebigen Polweite  $H$  nach den bekannten Regeln das Seilpolygon  $I, II, III \dots$  und schließen es durch eine Gerade  $s$ , welche die Punkte  $c$  und  $d$  verbindet, in denen die Auflagersenkrechten durch die nach innen verlängerten äußersten Polygonseiten ( $I$  u.  $VII$ ) geschnitten werden. Eine durch den Pol  $O$  gelegte Parallele zur Schlußlinie  $s$  bestimmt die Stützenwiderstände  $C$  und  $D$ ; der erstere ist im Punkte  $c$  mit den Seilkräften  $I$  und  $s$  im Gleichgewichte, der letztere im Punkte  $d$  mit den Seilkräften  $VII$  und  $s$ .

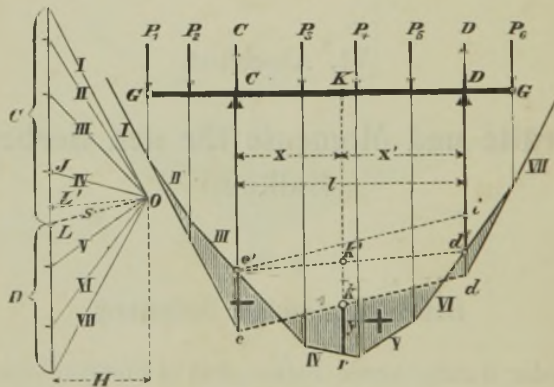


Fig. 149.

Zieht man durch irgend einen Querschnitt  $K$  eine Senkrechte und bestimmt die auf dieser Geraden vom Seilpolygon und von der Schlußlinie abgeschnittene Strecke  $\overline{kr} = y$ , so erhält man nach dem in No. 15 bewiesenen Satze (vergl. auch die ähnliche Untersuchung in No. 71) das Moment für den Querschnitt  $K$

$$M = Hy.$$

Bei dem in der Fig. 149 benutzten hängenden Seilpolygon



ist  $M$  positiv oder negativ, je nachdem  $y$  unterhalb oder oberhalb der Schlußlinie  $cd$  liegt.

Die Querkraft  $Q$  für den Querschnitt  $K$  ist die Mittelkraft der links von  $K$  angreifenden äußeren Kräfte. Es ergibt sich  $Q = C - P_1 - P_2 - P_3 =$  Strecke  $\overline{LJ}$ , und zwar bildet  $Q$  im Kräfteplane ein Dreieck mit den Seilstrahlen ( $s$  und  $IV$ ), welche parallel zu den vom Schnitte  $K$  getroffenen Seilpolygonseiten sind.

**92. Andere Darstellung von  $M$  und  $Q$ .** Um mit den Werten  $M$  und  $Q$  eine für die Folge nützliche Umformung vorzunehmen, bringen wir in Fig. 149 die Auflagersenkrechten in  $c'$  und  $d'$  mit dem Seilpolygon zum Schnitt, ziehen die Gerade  $c'd'$ , welche die Senkrechte durch  $K$  in  $k'$  trifft, bezeichnen

mit  $y_0$  die Länge der Strecke  $k'r$ ,

„  $x$  und  $x'$  die Abstände des Querschnittes  $K$  von den Stützen,

„  $l$  die Stützweite

und setzen  $Hy = Hy_0 - H\overline{kk'}$ . Beachten wir jetzt, daß  $\overline{kk'} = \overline{cc'} \frac{x'}{l} + \overline{dd'} \frac{x}{l}$  ist\*), und daß ferner die Momente für die über den

Stützen  $C$  und  $D$  gelegenen Balkenquerschnitte die Werte  $M_c = -H\overline{cc'}$  und  $M_d = -H\overline{dd'}$  annehmen, so erhalten wir

$$Hy = Hy_0 + M_c \frac{x'}{l} + M_d \frac{x}{l}.$$

Nun ist aber  $Hy_0$  das Moment für den Querschnitt  $K$  eines *einfachen Balkens*  $CD$ , auf welchen nur die Lasten  $P_3, P_4, P_5$  wirken; bezeichnen wir dasselbe mit  $M_0$ , so erhalten wir die wichtige Beziehung

$$(1) \quad M = M_0 + M_c \frac{x'}{l} + M_d \frac{x}{l}.$$

Die Momente  $M_c$  und  $M_d$  nennt man die *Stützenmomente* und die vom Seilpolygon  $c'rd'$  und von der Schlußlinie  $c'd'$  begrenzte Fläche die *einfache Momentenfläche* des Balkenstückes  $CD$ ; ist letztere gegeben, und kennt man außerdem die Stützenmomente, so sind durch die Gleich. (1) die wirklichen Momente für alle zwischen  $C$  und  $D$  gelegenen Querschnitte bestimmt.

Um eine ähnliche Gleichung für  $Q$  abzuleiten, ziehen wir  $\overline{c'i} \parallel \overline{cd}$  und  $\overline{OL'} \parallel c'd'$  und finden dann  $\overline{L'J} = Q_0 =$  Querkraft für den Quer-

\*) Die Richtigkeit dieser Gleichung übersieht man am schnellsten, indem man in Fig. 149 die Gerade  $c'd'$  einträgt und die Strecken bestimmt, in welche  $k'k$  durch diese Gerade zerlegt wird.

schnitt  $K$  eines einfachen (mit  $P_3, P_4, P_5$  belasteten) Balkens  $CD$ . Jetzt folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke  $e'id'$  und  $L'OL$

$$\overline{LL'} : \overline{d'i} = H : l$$

und hieraus

$$\left( \text{wegen } \overline{LL'} = Q - Q_0 \text{ und } \overline{d'i} = \overline{e'c} - \overline{dd'} = -\frac{M_C}{H} + \frac{M_D}{H} \right)$$

$$(2) \quad Q = Q_0 + \frac{M_D - M_C}{l}.$$

Liegt nun ein beliebiger durchgehender Balken  $ABCDE$  vor, Fig. 150, so kann man jeden zwischen zwei aufeinander folgenden Stützen gelegenen Teil desselben, z. B. den Teil  $CD$ , als einen Balken mit überstehenden Enden und 2 Stützpunkten ( $C$  u.  $D$ ) auffassen; man hat nur nötig, die Widerstände der übrigen Stützpunkte ( $A, B, E$ ) als Lasten zu betrachten, die natürlich negativ zu setzen sind, sobald sie von unten nach oben wirken. Kennt man dann die Stützenmomente

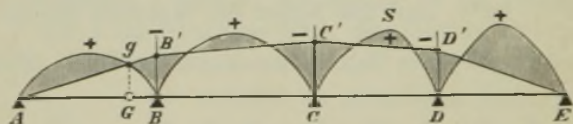


Fig. 150.

$M_C$  und  $M_D$ , so erhält man die wirkliche Momentenfläche, indem man zu der einfachen Momentenfläche  $CSD$  ein Trapez  $CC'D'D$  addiert, für welches (mit  $H = 1$ )  $\overline{CC'} = M_C$  und  $\overline{DD'} = M_D$  ist. In der Fig. 150 wurden  $M_C$  und  $M_D$  negativ angenommen; es ist dann die schraffierte Fläche zwischen den Senkrechten  $CC'$  und  $DD'$  die wirkliche Momentenfläche für den Teil  $CD$ . Wendet man das gleiche Verfahren auf die Teile  $AB, BC, DE$  an, so gelangt man zu der in der Fig. 150 dargestellten Momentenfläche für den durchgehenden Balken  $AE$ . Das Polygon  $AB'C'D'E$ , dessen Ordinaten  $\overline{BB'}$ ,  $\overline{CC'}$ ,  $\overline{DD'}$  die Stützenmomente  $M_B, M_C, M_D$  angeben, nennt man den *Schlußlinienzug* und darf dann aussprechen:

*Die Momentenfläche eines durchgehenden Balkens (mit oder ohne Gelenke) ist nach Aufzeichnung der einfachen Momentenpolygone bestimmt, sobald der Schlußlinienzug gegeben ist.*

Da nun, falls Gleichgewicht bestehen soll, jedem Gelenke das Moment  $M = 0$  entsprechen muß, so muß jeder senkrecht über einem Gelenke  $G$  befindliche Punkt  $g$  des einfachen Momentenpolygons auch ein Punkt des Schlußlinienzuges sein, und hieraus folgt, daß es mög-

lich ist, durch eine genügende Anzahl von Gelenken jenem Linienzuge eine bestimmte Lage vorzuschreiben. Auch leuchtet ein, daß zwischen

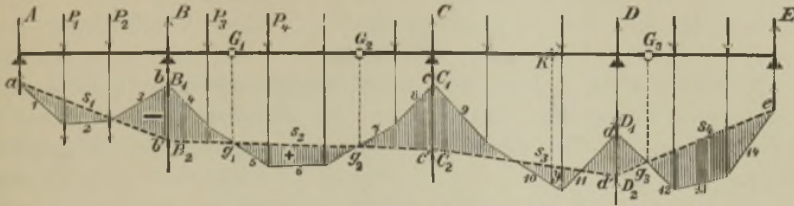


Fig. 151a.

zwei benachbarten Stützpunkten höchstens zwei Gelenke angeordnet werden dürfen, und daß die Gesamtzahl der erforderlichen Gelenke  $= n - 2$  ist, sobald der Balken auf  $n$  Stützen ruht.

Mit Hilfe des beschriebenen Verfahrens wurde in der Fig. 151a die Momentenfläche für einen Balken mit 5 Stützpunkten und 3 Gelenken bestimmt. Es wurden mit ein und derselben (beliebig gewählten) Polweite  $H$  die den einzelnen Öffnungen  $AB, BC, CD, DE$  entsprechenden aneinanderhängenden Seilpolygone gezeichnet, welche von den Senkrechten durch die Gelenke  $G_1, G_2, G_3$  in den Punkten  $g_1, g_2, g_3$  geschnitten werden. Durch  $g_1$  und  $g_2$  wurde die Schlußlinie  $s_2$  gelegt, durch  $g_3$  und  $e$  die Linie  $s_4$ , und schließlich wurden  $s_1$  und  $s_3$  eingetragen. Die schraffierte Fläche ist die gesuchte Momentenfläche. Für irgend einen Querschnitt  $K$  ergibt sich:  $M = Hy$ .

Um die Auflagerdrücke zu finden, betrachten wir den aus sämtlichen Seilpolygonseiten 1, 2, 3 . . . . 14 und den Schlußlinien bestehenden Linienzug als geschlossenes Seilpolygon, in dessen Eckpunkten außer den Lasten  $P_1, P_2, . . . .$  noch senkrechte Kräfte  $A, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2, E$  angreifen. Bestimmen wir nun die letzteren Kräfte so, daß an jedem der Eckpunkte des Seilpolygons Gleichgewicht besteht, so sind die Kräfte  $A$  und  $E$  gleich den Widerständen der Stützpunkte  $A$  und  $E$ , und weiter ist dann  $B_1 + B_2 = B =$  Widerstand der Stütze  $B$ ;  $C_1 + C_2 = C$ ;  $D_1 + D_2 = D$ .

Um  $A$  und  $E$  zu finden, haben wir nur nötig, von den Polen  $O_1$  und  $O_4$  Parallelen zu den Schlußlinien  $s_1$  und  $s_4$  zu ziehen, Fig. 151b; es

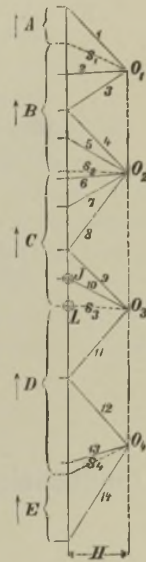


Fig. 151b.

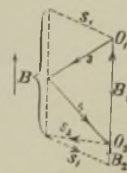


Fig. 151c.



gibt dann die von 1 und  $s_1$  auf dem Kräftezuge abgeschnittene Strecke die Größe von  $A$  an, die von  $s_4$  und 14 abgeschnittene Strecke die Größe von  $E$ . Die Ermittlung von  $B_1$  und  $B_2$  wurde in Fig. 151 c dargestellt;  $B_1$  bildet mit den Seilstrahlen 3 und 4 ein Dreieck, desgleichen  $B_2$  mit den Strahlen  $s_1$  und  $s_2$ . Eine Vergleichung von Fig. 151 c mit Fig. 151 b zeigt, daß die Größe von  $B$  gleich der Strecke des Kräftezuges ist, welche die von  $O_1$  beziehungsweise  $O_2$  zu  $s_1$  und  $s_2$  gezogenen Parallelen abschneiden. In gleicher Weise werden  $C$  und  $D$  gefunden. Bei den in der Fig. 151 angewandten hängenden Seilpolygonen ist

$A$  positiv, sobald der erste Strahl (1) oberhalb des Strahles  $s_1$  liegt,

$B$  positiv, sobald der Strahl  $s_1$  den Kräftezug oberhalb des Strahles  $s_2$  schneidet,

$C$  positiv, sobald der Strahl  $s_2$  den Kräftezug oberhalb des Strahles  $s_3$  schneidet,

$D$  positiv, sobald der Strahl  $s_3$  den Kräftezug oberhalb des Strahles  $s_4$  schneidet,

$E$  positiv, sobald der Strahl  $s_4$  oberhalb des letzten Strahles (14) liegt.

Um die Querkraft  $Q$  für irgend einen Querschnitt  $K$  zu finden, wird durch  $K$  ein senkrechter Schnitt geführt; er trifft stets zwei Seilpolygonseiten. Sodann werden im Kräfteplane die zu diesen Seiten gehörigen Seilkräfte gesucht und deren Mittelkraft bestimmt; die letztere ist  $= Q$ . Für den Querschnitt  $K$  in Fig. 151 findet man z. B.:  $Q = + \overline{LJ}$  und zwar ist  $Q$  positiv, weil der Strahl  $s_3$  unterhalb des Strahles 10 liegt.

## § 21.

### Einflußlinien. Belastung durch ein verschiebbares System von Einzellasten.

#### a. Einflußlinien.

Da sich die Koppelträger ebenso verhalten wie die im Abschnitte V untersuchten einfachen Balken, so genügt es, die Einflußlinien für einen bei  $C$  und  $D$  gestützten Teil  $BE$  (Fig. 152) zu ermitteln. In den *Gelenken*  $B$  und  $E$  greifen die Drücke anliegender schwebender Teile  $AB$  und  $EF$  an. Lasten, welche auf Balkenteile wirken, die etwa links an  $A$  oder rechts an  $F$  stoßen, sind ohne Einfluß auf den Teil  $BE$ . *Wir setzen zunächst unmittelbare Belastung voraus.*

93. **Stützenwiderstände  $C$  und  $D$ .** Solange die Koppelträger  $AB$  und  $EF$  unbelastet sind, verhält sich der Balkenteil  $BE$  genau



wie ein auf zwei Stützen ruhender Balken mit überragenden Enden, mit dessen Betrachtung wir die Untersuchung des Gerberschen Balkens im § 20 einleiteten. Eine zwischen  $B$  und  $E$  an irgend einer Stelle aufgebrachte Last  $P_2$  erzeugt bei  $C$  den Stützenwiderstand

$$C = P \frac{a_2}{l}$$

Die Einflußlinie für  $C$  ist also zwischen  $B$  und  $E$  eine Gerade  $B'E'$ , die bei  $D$  die Ordinate 0 und bei  $C$  die Ordinate 1 besitzt. Lasten, welche rechts von  $B$  angreifen, rufen einen negativen (nach unten gerichteten) Widerstand  $C$  hervor.

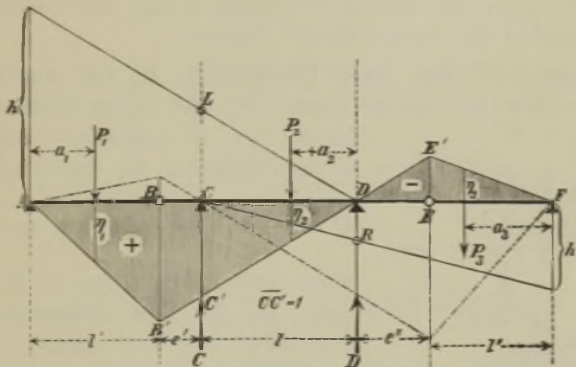


Fig. 152.

Die Ordinate  $BB'$  gibt den Einfluß einer in  $B$  angreifenden Last 1 an. Belastet man nun den Koppelträger  $BB'$  mit  $P_1$ , so übt er in  $B$  auf den Ausleger  $BC$  einen Druck von der Größe

$$B = P_1 \frac{a_1}{l'}$$

aus und ruft daher bei  $C$  einen Widerstand

$$C = B \cdot \overline{BB'} = P_1 \cdot \overline{BB'} \frac{a_1}{l'} = P_1 \eta_1$$

hervor, wo  $\eta_1$  die unter  $P_1$  gemessene Ordinate der Geraden  $AB'$  ist. Daraus folgt aber, daß die Gerade  $AB'$  ein Teil der  $C$ -Linie ist und ebenso läßt sich nachweisen, daß die Gerade  $E'E$  die  $C$ -Linie für den Balkenabschnitt  $EF$  ist. Die in Fig. 152 schraffierte Fläche ist somit die gesuchte  $C$ -Fläche.

In derselben Weise wird die in Fig. 152 durch eine strichpunktierte Linie angedeutete  $D$ -Fläche gezeichnet.

Anstatt nun die Werte  $C_{max}$  und  $C_{min}$  mit Hilfe der Formel  $C = \sum P \eta$  zu berechnen, kann man auch den folgenden Weg ein

schlagen, der an die im § 19 durchgeführte Untersuchung anknüpft. Der positive Teil der  $C$ -Fläche ist ein Dreieck, dessen Seite  $B'D$  auf der Senkrechten durch  $A$  die Strecke  $1 \frac{l+e'+l'}{l}$  abschneidet. Würde sie die Strecke  $l'$  abschneiden, so würde sie mit der Einflußfläche für das Moment  $M_B$  des Querschnitts  $B$  eines einfachen Balkens  $AD$  übereinstimmen. Berechnet man nun dieses Balkenmoment nach den im § 18 angegebenen Verfahren, stellt man es beispielsweise mit Hilfe eines Seilpolygons in der Form  ${}_{max}M_B = Hy$  dar, so findet man

$${}_{max}C = Hy \frac{l+e'+l'}{ll'}$$

Ein Zahlenbeispiel zu diesem Verfahren findet der Leser im Nachtrag (3. Aufgabe) am Schluß dieses Buches.

94. **Querkraft für einen Querschnitt  $K$  des Auslegers  $BC$ .** Es kommen hier nur solche Lasten  $P_1$  und  $P_2$  in Betracht, welche links von  $K$  angreifen, Fig. 153; es entspricht ihnen die Querkraft

$$Q = -P_1 \frac{a_1}{l'} - P_2 \quad (\text{vergl. auch Fig. 152}),$$

deren erstes Glied den in  $B$  angreifenden Druck des Koppelträgers  $AB$  vorstellt. Die Einflußlinie  $AB'K'$  für  $Q$  zeigt die Fig. 153a; es ist  $\overline{BB'} = \overline{KK'} = -1$ .

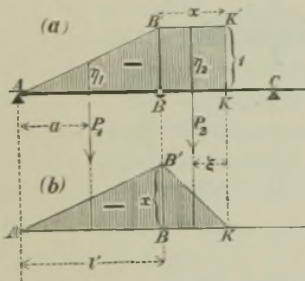


Fig. 153.

$P_2$  (Fig. 153) erzeugen

$$M = -P_1 \frac{a_1}{l'} x - P_2 \xi.$$

Das erste Glied dieses Ausdrucks rührt von dem in  $B$  angreifenden Drucke  $P_1 \frac{a_1}{l'}$  des Koppelträgers her. Die Einflußlinie für  $M$  ist in der Fig. 153b aufgetragen worden; es ist  $\overline{BB'} = -x$ . Unter der Last  $P_1$  mißt man  $\eta_1 = -x \frac{a_1}{l'}$  und unter der Last  $P_2$   $\eta_2 = -\xi$ .

96. **Querkraft für einen Querschnitt  $K$  zwischen den Stützen  $C$  und  $D$ ,** Fig. 154. Greift nur eine rechts von  $K$  gelegene Last an, so entsteht für den Querschnitt  $K$  die Querkraft  $Q = C$ , weil links von  $K$  nur die eine äußere Kraft  $C$  wirkt. Wird der Balken hingegen ausschließlich links von  $K$  belastet, so ist  $Q = -D$ ; denn

es greift jetzt rechts von  $K$  nur die eine äußere Kraft  $D$  an.\*) Hieraus folgt, daß die Einflußlinie für  $Q$  auf der linken Seite von  $K$  mit der Einflußlinie für  $(-D)$  und auf der rechten Seite von  $K$  mit der Einflußlinie für  $(+C)$  übereinstimmen muß, sie wurde in der Fig. 154 a dargestellt.

97. Moment für einen Querschnitt  $K$  zwischen den Stützen. Je nachdem nur rechts oder nur links von  $K$  Lasten wirken, ist  $M = Cx$  oder  $M = Dx'$ . Die Ordinaten der Einflußlinie für  $M$  sind also rechts von  $K$  gleich den mit  $x$  multiplizierten Ordinaten der  $C$ -Linie, und links von  $K$  gleich den mit  $x'$  multiplizierten Ordinaten der  $D$ -Linie. Hiernach ist die Linie  $AB'K'E'F$  in Fig. 154 b die Einflußlinie für  $M$ .

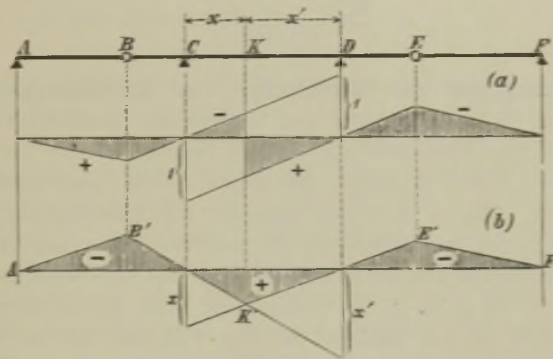


Fig. 154.

98. Mittelbare Belastung. Wird die Belastung durch Querträger übertragen, so zeichne man zuerst die Einflußlinien für unmittelbare Belastung und leite dann aus diesen die Linien für mittelbare Belastung mit Hilfe des Satzes ab, daß jede Einflußlinie zwischen zwei benachbarten Querträgern eine Gerade ist. In der Fig. 155 ist die Einflußlinie des Momentes für einen zwischen den Stützen  $C$  und  $D$  gelegenen Querschnitt  $K$  dargestellt worden. Die Querträger sind beliebig verteilt angenommen.  $AB'K'E'F$  ist die Einflußlinie bei unmittelbarer Belastung; die schraffierte Einflußfläche entspricht der mittelbaren Belastung. Das Gelenk  $A$  liege zwischen zwei Querträgern, desgleichen der Stützpunkt  $C$  und der Querschnitt  $K$ . Eine in 0 angreifende Last erzeugt für den fraglichen Querschnitt das Moment:  $M = 0$  und eine in 1 wirksame Last „Eins“ bringt  $M = 1 \cdot \eta_1$

\*) Betrachtet man  $Q$  als die Mittelkraft der rechts vom Querschnitte angreifenden äußeren Kräfte, so muß man die Richtung nach oben negativ annehmen. Vergl. Seite 124.



hervor. Zwischen den Querträgern 0 und 1 ist die Einflußlinie eine Gerade, und auf gleiche Weise erklären sich die Abstumpfungen der Ecken bei  $B'$  und  $K'$ .

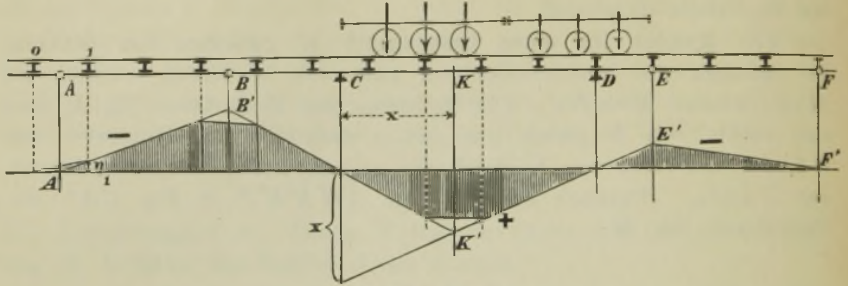


Fig. 155.

99. **Anmerkung zur Berechnung von Eisenbahnbrücken.** Auf welche Weise die Bestimmung der Grenzwerte gewisser Unbekannten  $Z$  mit Hilfe von Einflußlinien erfolgt, wurde bereits im § 14 auseinandergesetzt, und es möge an dieser Stelle nur noch hervorgehoben werden, daß es bei den Trägern von Eisenbahnbrücken nicht immer möglich ist, ausschließlich die positiven oder ausschließlich die negativen Einflußflächen zu belasten, ohne auf Unwahrscheinlichkeiten zu stoßen. So kann es z. B. vorkommen, daß das Moment  $_{max}M$  für den Querschnitt  $K$  des Balkens in Fig. 155 bei der in dieser Figur angegebenen Stellung einer Lokomotive nebst Tender entsteht, und es leuchtet ein, daß in diesem und in ähnlichen Fällen die Länge der den Träger belastenden Fahrzeuge eine bei weitem größere Rolle spielt, als beispielsweise bei der Berechnung eines einfachen Balkens (Abschnitt IV). Eine kürzere, wenn auch leichtere Lokomotive nebst entsprechendem Tender kann bei kurzer positiver oder negativer Beitragstrecke ein größeres Maximum oder Minimum der fraglichen Unbekannten bedingen, als längere und schwerere Fahrzeuge, und es erscheint hiernach nötig, den Einfluß verschiedenartig zusammengesetzter Lastenzüge zu prüfen. Dabei wäre auch zu beachten, daß ein entlastend wirkender Tender nicht gefüllt angenommen werden darf. Will man diese umständlichen Vergleichen vermeiden, also nur mit einem Lastenzuge rechnen und trotzdem genügend sicher gehen, so vernachlässige man bei der Ermittlung des Maximums die Belastung der negativen Beitragstrecken und bei der Bestimmung des Minimums die Belastung der positiven Strecken.\*)

\*) Ist eine Beitragstrecke allerdings so kurz, daß sie nicht einmal die Aufstellung von drei Lokomotivachsen ermöglicht, so liefert das oben vorgeschlagene



Entscheidet man sich für dieses Verfahren, so kann man die Querkkräfte, Momente und Stützenwiderstände der Gelenkbalken auch sehr schnell auf dem folgenden Wege mit Hilfe von Seilpolygonen bestimmen. Dabei sei vorausgesetzt, daß im Falle mittelbarer Belastung über allen Stützen und Gelenken Querträger liegen; auch möge daran erinnert werden, daß die Berechnung der Momente nur für die bei Querträgern geführten Querschnitte zu erfolgen braucht. Vergl. Seite 142.

### b. Ermittlung des Einflusses eines verschiebbaren Zuges von Einzellasten mit Hilfe des Seilpolygons.

Wir knüpfen an die in No. 82 gelehrt Bestimmung der Momente für die Querschnitte eines einfachen Balkens an. Es wurde dort ein Seilpolygon für einen hinreichend langen Lastenzug gezeichnet, hierauf der Balken in verschiedene Stellungen gegen den Zug gebracht und für jede Stellung die Schlußlinie eingetragen. Auf gleiche Weise werden die Momente der Koppelträger des Gelenkbalkens bestimmt, und das hierbei benutzte Seilpolygon kann dann auch für die nachstehenden Untersuchungen (No. 100 bis 103) verwendet werden. Im allgemeinen ist jede dieser Untersuchungen (wie schon in der Anmerkung auf Seite 140 hervorgehoben wurde) zweimal durchzuführen, indem zunächst zwei der drei Lokomotiven mit ihren Vorderteilen gegeneinander zu stellen sind, während zweitens alle drei Lokomotiven vorwärts fahrend angenommen werden. Die gefährlichsten Zugstellungen werden am zweckmäßigsten durch Probieren bestimmt.\*)

100. Momente für einen Querschnitt  $K$  des Auslegers  $BC$ , Fig. 156. Man stellt das Balkenstück  $BC$  samt dem angrenzenden Koppelträger  $AB$  so unter den Lastenzug, daß die schwersten Lasten in der Nähe von  $B$  und eine schwere Last über  $B$  selbst steht (vergl. die Einflußlinie in Fig. 153 b).

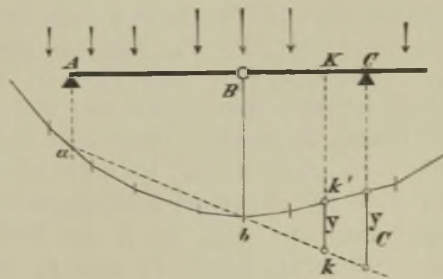


Fig. 156.

Verfahren allzu ungünstige Grenzwerte. Man nehme dann eine Lokomotive mit besonders stark belasteter Mittelachse an (zweckmäßig ohne Tender) und berücksichtige auch den Einfluß der etwa über den angrenzenden Strecken stehenden Achsen dieser Lokomotive.

\*) In No. 100 bis 103 handelt es sich nur um den Einfluß der Verkehrslast. Den Zeiger  $p$  haben wir der Kürze wegen fortgelassen.

Hierauf trägt man die zu  $AB$  gehörige Schlußlinie  $ab$  ein, und verlängert sie über  $b$  hinaus bis zu ihrem Schnittpunkte  $k$  mit der Senkrechten durch  $K$ , welche letztere das Seilpolygon in  $k'$  treffen möge. Nach Messung der Strecke  $\overline{kk'} = y$  erhält man  $M = -Hy$ . Auf gleiche Weise findet man auch das Stützenmoment  $M_C = -Hy_C$ . In Fig. 156 wurde vorausgesetzt, daß  $M_C$  bei derselben Zugstellung den größten Wert annimmt wie das Moment  $M$  für den Querschnitt  $K$ ; es ist dies häufig, aber nicht immer der Fall. Das Stützenmoment  $M_D = -Hy_D$  wird ebenso bestimmt wie  $M_C$ .

101. Querkraft für einen Querschnitt  $K$  des Auslegers  $BC$ . Man stellt den Träger so unter den Lastenzug, daß im Falle unmittelbarer Belastung der Querschnitt  $K$  in der Nähe der schwersten

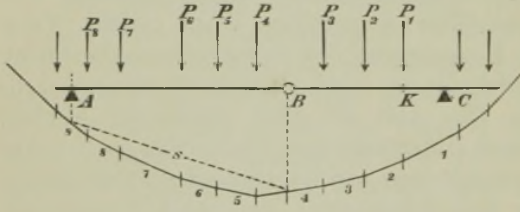


Fig. 157 a.

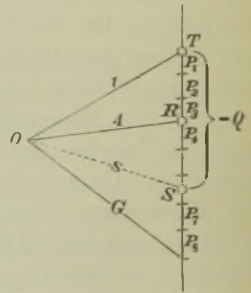


Fig. 157 b.

Lasten liegt und eine schwere Last sich unmittelbar links von  $K$  befindet, Fig. 157.\*) Stehen dann beispielsweise zwischen  $B$  und  $K$  drei Lasten ( $P_1, P_2, P_3$ ) und auf dem Teile  $AB$  die Lasten  $P_4$  bis  $P_8$ , so ist  $Q = P_1 + P_2 + P_3 + B$ , wo  $B$  den von den Lasten  $P_4$  bis  $P_8$  herrührenden Druck bedeutet, welchen der Koppelträger auf das Gelenk  $B$  ausübt. Trägt man nun die zu  $AB$  gehörige Schlußlinie  $s$  ein, zieht in Fig. 157 b (welche den hier in Betracht kommenden Teil des Kräftepolygons darstellt) zu  $s$  die Parallele  $OS$ , so findet man  $B = \overline{SR}$ , wo  $R$  den Endpunkt des Seilstrahles bezeichnet, welcher die Kräfte  $P_3$  und  $P_4$  trennt. Hieraus folgt die Querkraft  $Q = -ST$ .

102. Momente und Querkräfte für die Querschnitte zwischen den Stützen  $C$  und  $D$  (Fig. 158). Es ist nach Seite 161 für einen Querschnitt  $K$  im Abstand  $x$  von  $C$

\*) Ist die Belastung eine mittelbare, so tritt in Fig. 157 an die Stelle von  $K$  der diesem Querschnitte auf der linken Seite benachbarte Querträger.

$$M = M_0 + \frac{M_C x'}{l} + \frac{M_D x}{l} \text{ und}$$

$$Q = Q_0 + \frac{M_D - M_C}{l},$$

wo  $M_0$  und  $Q_0$  das Moment und die Querkraft für den Querschnitt  $K$  eines einfachen Balkens  $CD$  bedeuten; sie werden nach § 18 bestimmt. Die Stützenmomente  $M_C$  und  $M_D$  sind negativ; sie wurden in No. 100 in der Form gefunden:  $M_C = -Hy_c$  und  $M_D = -Hy_D$ , und es folgt somit

$$\begin{aligned} \max M &= M_0^*) \\ \min M &= -H \frac{y_c x' + y_D x^{**}}{l} \\ \max Q &= \max Q_0 + H \frac{y_c}{l} \\ \min Q &= \min Q_0 - H \frac{y_D}{l}. \end{aligned}$$

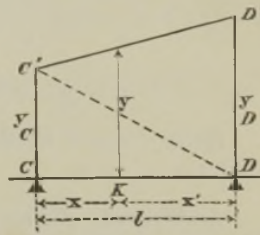


Fig. 158.

Trägt man in  $C$  und  $D$  die Ordinaten  $\overline{CC'} = y_c$  und  $\overline{DD'} = y_D$  auf, Fig. 158, und zieht die Gerade  $C'D'$ , so liefern deren Ordinaten  $y$  die Momente  $\min M = -Hy$ .

103. Stützenwiderstand  $C$  (Fig. 159). Um  $\max C$  zu erhalten, stellt man den Balken so unter den Zug, daß die schwersten Lasten in der Nähe von  $B$  liegen, daß eine schwere Last in  $B$  selbst angreift

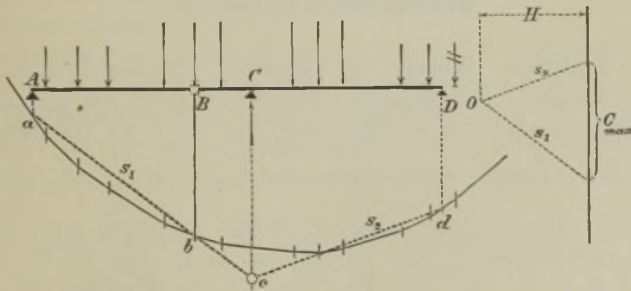


Fig. 159.

und der Träger, wenn möglich, rechts von  $D$  unbelastet bleibt. Be-  
findet sich, wie in der Fig. 159, rechts von  $D$  die Achse eines Fahr-

\*) Es wird jetzt nur der Balkenteil  $CD$  belastet angenommen.

\*\*\*) Es wird nun  $CD$  unbelastet gedacht.



zeuges, dessen übrige Achsen links von  $D$  liegen, so wird sie zweckmäßig vernachlässigt. Nun trägt man die Schlußlinie  $s_1$  des schwebenden Teiles  $AB$  ein, bringt sie in  $c$  mit der Senkrechten durch  $C$  zum Schnitt, verbindet  $c$  mit dem Punkte  $d$ , in welchem das Seilpolygon von der Senkrechten durch  $D$  getroffen wird, und zieht vom Pole aus Parallelen zu  $s_1$  und  $s_2$ . Diese schneiden auf dem Kräftezuge den Stützenwiderstand  ${}_{max}C$  ab.

Um  ${}_{min}C$  zu finden, denke man die Balkenteile  $DE$  und  $EF$  (Fig. 152) so belastet, daß das größte (negative) Moment  $M_D = -Hy_D$  entsteht, und vernachlässige die hierbei etwa links von  $D$  angreifenden Lasten, nehme also die Strecke  $AD$  unbelastet an. Man erhält dann aus der Bedingung  $Cl = M_D$  den Wert

$${}_{min}C = \frac{M_D}{l} = -H \frac{y_D}{l}.$$

Ganz ebenso werden die Grenzwerte des Stützenwiderstandes  $D$  bestimmt.

**Anmerkung.** Zu den in No. 100 bis 103 ermittelten, von den verschiebbaren Einzellasten hervorgerufenen Momenten  $M$  und Kräften  $Q$  und  $C$  sind noch die durch die ständige Belastung erzeugten  $M$ ,  $Q$ ,  $C$  zu addieren. Die Bestimmung der letzteren soll im folgenden Paragraph gezeigt werden.

## § 22.

### Gleichmäßige Belastung.

**104. Momente.** Werden die einzelnen Öffnungen  $l_1, l_2, l_3 \dots$  eines Gelenkbalkens gleichmäßig belastet und zwar mit  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots$  f. d. Längeneinheit, vergl. Fig. 160, so sind die einfachen Momentenlinien Parabeln, deren Pfeile gleich  $\frac{1}{8} \alpha_1 l_1^2, \frac{1}{8} \alpha_2 l_2^2, \frac{1}{8} \alpha_3 l_3^2 \dots$  sind. Nach Aufzeichnung dieser Parabeln bestimmt man die wirklichen Momentenflächen am schnellsten nach dem in No. 92 mitgeteilten Verfahren. In der Fig. 160 ist die fragliche Aufgabe für einen Balken mit 4 Öffnungen gelöst worden: der Schlußlinienzug ist durch die den Gelenken  $G_1, G_2, G_3$  entsprechenden Parabelpunkte  $g_1, g_2, g_3$  bestimmt.

Aus den im § 21 gezeichneten Einflußlinien geht hervor, daß man die Grenzwerte für sämtliche Momente  $M$  durch Untersuchung von zwei Belastungsfällen erhält. In dem einen Falle werden die durch ungerade Zeiger gekennzeichneten Belastungen  $\alpha$  gleich  $p + g = q$  an-



genommen und die  $x$  mit geraden Zeiger gleich  $g$ ; im zweiten Falle werden die ersteren  $x$  gleich  $g$ , die letzteren gleich  $q$  gesetzt. Für den Träger in Fig. 160 wird also zuerst angenommen

$$x_1 = x_3 = g; \quad x_2 = x_4 = q$$

und hierauf

$$x_1 = x_3 = g; \quad x_2 = x_4 = q.$$

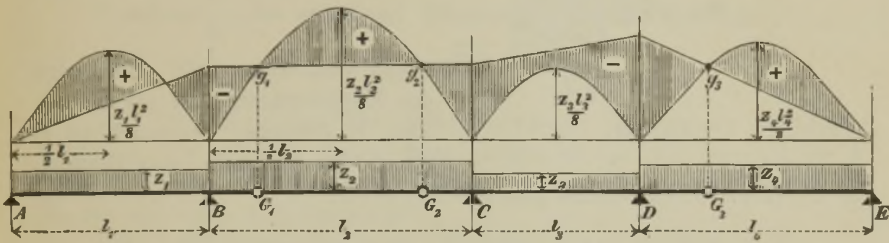


Fig. 160.

Für die Querschnitte der Teile  $l_1$  und  $l_3$  werden durch den ersten Belastungszustand die Momente  $_{max}M$  und durch den zweiten die Momente  $_{min}M$  hervorgerufen; einzelnen Querschnitten können in dem einen Falle positive, in dem anderen negative Momente entsprechen. Die Querschnitte der Koppelträger  $G_1G_2$  und  $G_3E$  werden nur durch positive, diejenigen der Ausleger  $BG_1$ ,  $G_2C$ ,  $DG_3$  nur durch negative Momente beansprucht, und zwar ergeben sich für alle diese Momente die kleinsten oder die größten Werte, je nachdem der erste oder der zweite Belastungszustand eintritt.

Werden die von der ständigen Belastung ( $g$ ) allein hervorgerufenen Momente  $M_g$  gesucht, so setze man  $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = g$ .

Ist die Belastung eine mittelbar wirkende, und liegen über sämtlichen Gelenken und Stützen Querträger, so werden die in der Fig. 160 gezeichneten Parabeln durch einbeschriebene Polygone ersetzt. Die Ecken dieser Polygone liegen auf den Senkrechten durch die Querträger. Bei ganz beliebiger Verteilung der Querträger (Fig. 155) empfiehlt es sich, die Momente mit Hilfe von Einflußlinien zu ermitteln.

105. Querkraft für einen Querschnitt  $K$  eines Auslegers. Bei der Bestimmung der Querkraften setzen wir im Falle mittelbarer Belastung voraus, daß über allen Gelenken und Stützen Querträger liegen. Die als einfache Balken aufzufassenden Koppelträger werden genau wie im § 17 (No. 76 und 78) behandelt, und es genügt daher, die Ermittlung der Querkraften  $Q$  für einen Balkenteil mit überragenden Enden zu zeigen.

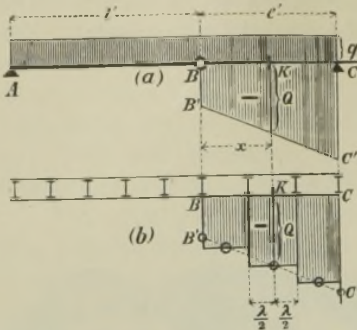


Fig. 161.

$B'C'$  (Fig. 161a), welche gegeben ist durch

$$\overline{BB'} = -q \frac{l'}{2} \quad \text{und} \quad \overline{CC'} = -q \left( \frac{l'}{2} + e' \right).$$

Bei mittelbarer Belastung (Fig. 161b) ist  $Q$  für alle Querschnitte innerhalb eines Feldes  $\lambda$  konstant und gleich der der Feldmitte entsprechenden Ordinate der Geraden  $B'C'$ . Die Belastung  $p\lambda$  dieses Feldes übt nämlich auf den das Feld links begrenzenden Querträger den Druck  $\frac{1}{2} q\lambda$  aus, und es ist deshalb die Summe der auf das Balkenstück  $BK$  wirkenden Kräfte

$$= q \frac{l'}{2} + q \left( x - \frac{\lambda}{2} \right) + q \frac{\lambda}{2} = q \frac{l'}{2} + qx,$$

woraus dann  $Q = -q \frac{l'}{2} - qx$  folgt.

Handelt es sich nur um die durch die ständige Belastung  $g$  hervorgerufene Querkraft  $Q$ , so ersetzt man in der vorstehenden Untersuchung  $q$  durch  $g$ .

**106. Querkraft für einen Querschnitt  $K$  zwischen den Stützen  $C$  und  $D$ , Fig. 154.** Es ist nach Gleich. (1) und (2) auf Seite 162

$$Q = Q_0 + \frac{M_D - M_C}{l}$$

und man erhält

$$(1) \quad \max Q = \max Q_0 + \frac{M_D - M_C}{l},$$

$$(2) \quad \min Q = \min Q_0 + \frac{M_D - M_C}{l},$$

Gehört der fragliche Querschnitt  $K$  dem Ausleger  $BC$  an, so ist  $Q$  stets negativ; es wird am größten bei voller Belastung der Strecke  $AK$ ; Lasten rechts von  $K$  sind ohne Einfluß auf  $Q$ . Man erhält

$$Q = -q \frac{l'}{2} - qx,$$

wobei das erste Glied den Druck des Koppelträgers  $AB$  auf das Gelenk  $B$  vorstellt. Hiernach ist  $Q$  gleich der Ordinate einer Geraden

wobei  $_{max}Q_0$  und  $_{min}Q_0$  die nach No. 76 und 78 zu bestimmenden Grenzwerte der Querkraft  $Q$  für den Querschnitt  $K$  eines einfachen Balkens  $CD$  bedeuten.  $M_D$  und  $M_C$  sind die *negativen* Stützenmomente, ihre Grenzwerte ergeben sich bei der Durchführung der in No. 104 beschriebenen Untersuchung, und man wird natürlich in die vorstehende Gleichung (1) den kleinsten Wert von  $M_D$  und den größten Wert von  $M_C$  einführen, in die Gleichung (2) hingegen den größten Wert von  $M_D$  und den kleinsten von  $M_C$ .

Der Einfluß der ständigen Belastung  $g$  ist für sich allein

$$Q_g = Q_{0g} + \frac{M_{Dg} - M_{Cg}}{l}.$$

$M_{Dg}$  und  $M_{Cg}$  sind die Stützenmomente infolge der ständigen Belastung und  $Q_{0g}$  die durch diese Belastung für den Querschnitt  $K$  eines einfachen Balkens hervorgebrachte Querkraft; letztere wird nach No. 74 auf Seite 130 bestimmt.

**107. Stützenwiderstand  $C$ .** Der Inhalt des positiven Teiles der Einflußfläche für  $C$  ist mit den in der Figur 152 angegebenen Bezeichnungen (und wegen  $\overline{BB'} = 1 \frac{l+e'}{l}$ )

$$\mathfrak{F}_2 = \frac{1}{2} \overline{BB'} \cdot \overline{AD} = \frac{(l+e')(l+e'+l')}{2l}$$

und der Inhalt des negativen Teiles ist (wegen  $\overline{EE''} = 1 \frac{e''}{l}$ )

$$\mathfrak{F}_1 = \frac{1}{2} \overline{EE''} \cdot \overline{DF} = \frac{e''(e''+l'')}{2l}.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{(l+e')(l+e'+l')}{2l} = h' \quad \text{und} \quad \frac{e''(e''+l'')}{2l} = h'',$$

so erhält man

$$_{max}C = q\mathfrak{F}_2 - g\mathfrak{F}_1 = qh' - gh''$$

$$_{min}C = g\mathfrak{F}_2 - q\mathfrak{F}_1 = gh' - qh''.$$

Infolge der ständigen Belastung allein entsteht

$$C_g = g(h' - h'').$$

$h'$  und  $h''$  lassen sich leicht durch Zeichnung bestimmen. Macht man nämlich in Fig. 152:  $\overline{CL} = \frac{1}{2}(l+e')$  und  $\overline{DR} = \frac{1}{2}e''$  und zieht die Geraden  $DL$  und  $CR$ , so schneiden deren Verlängerungen auf den Senkrechten durch  $A$  und  $F$  die Strecken  $h'$  und  $h''$  ab.



## VII. Abschnitt.

## Der vollwandige Bogen mit drei Gelenken.

## § 23.

## Belastung durch beliebig gerichtete Kräfte.

108. Stützenwiderstände. Auf einen einfach gekrümmten Stab, welcher außer den festen Auflagergelenken  $A$  und  $B$  noch ein (in der Regel im Scheitel angeordnetes) Gelenk  $G$  besitzt, und dessen Mittellinie wir, der kürzeren Ausdrucksweise wegen, in einer lotrechten Ebene (der *Stabebene*) annehmen wollen, mögen beliebig gerichtete, in dieser Ebene liegende Lasten  $P_1, P_2, P_3 \dots$  wirken. Fig. 162. Die Mittelkraft der links von  $G$  angreifenden Lasten sei  $R_1$ , diejenige der Lasten rechts von  $G$  sei  $R_2$ ; beide Kräfte können in der bekannten Weise mit Hilfe von Seilpolygonen, welche in der Fig. 162 mit den beliebigen Polen  $O_1$  und  $O_2$  gezeichnet wurden, bestimmt werden.

Um die in  $A$  und  $B$  angreifenden Stützenwiderstände (*Kämpferdrücke*)  $K_1$  und  $K_2$  zu ermitteln, nehme man zunächst an, es sei  $R_2 = 0$  und bestimme die durch  $R_1$  allein hervorgerufenen Kämpferdrücke  $K'$  und  $K''$ . Am Bogenstücke  $GB$  greift jetzt nur  $K''$  an. Soll Gleichgewicht bestehen, so muß die Kraft  $K''$  durch das Gelenk  $G$  gehen, da sich sonst das Bogenstück  $GB$  um  $G$  drehen würde; ferner müssen sich die drei Kräfte  $K', R_1$  und  $K''$  in einem und demselben Punkte schneiden. Verbindet man also den Punkt  $T_1$ , in welchem  $R_1$  von der Geraden  $BG$  getroffen wird, mit  $A$ , so gibt  $AT_1$  die Richtung von  $K'$  an, und man erhält nach Ziehen von  $EL \parallel T_1A$  (Fig. 162b) und  $JL \parallel BG$  die von  $R_1$  herrührenden Kämpferdrücke:  $K' = \overline{LF}$  und  $K'' = \overline{JL}$ .

Ganz ebenso findet man diejenigen Kämpferdrücke  $K'''$  und  $K''''$ , welche im Falle  $R_1 = 0$  durch die rechts von  $G$  angreifenden Lasten hervorgerufen werden. Man bringt die Gerade  $AG$  in  $T_2$  mit  $R_2$  zum Schnitt, verbindet  $T_2$  mit  $B$  und zieht  $JS \parallel GA$  und  $HS \parallel BT_2$ . Man erhält:  $K''' = \overline{SJ}$  und  $K'''' = \overline{HS}$ .

Zeichnet man jetzt das Parallelogramm  $JLOS$  und zieht die Geraden  $OF$  und  $HO$ , so stellt die Strecke  $OF$  nach Größe, Richtung



und Sinn den Kämpferdruck  $K_1$  vor und die Strecke  $HO$  den Kämpferdruck  $K_2$ ; denn es ist  $K_1$  die Mittelkraft aus den in  $A$  angreifenden Kräften  $K'$  und  $K''$ , während  $K_2$  die Mittelkraft aus  $K'''$  und  $K''''$  ist.

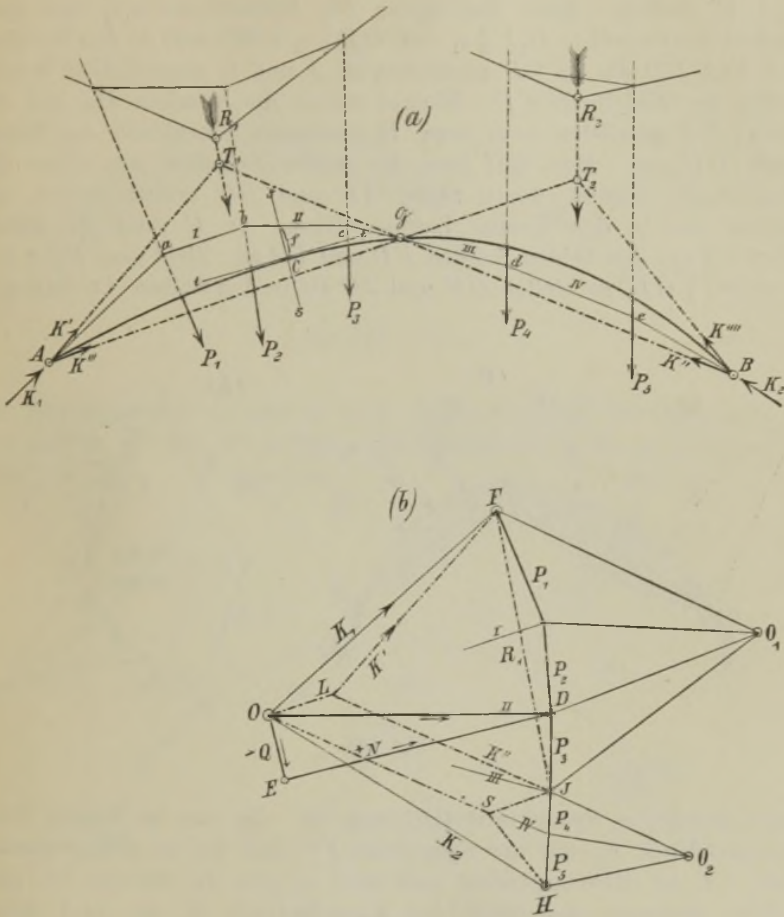


Fig. 162.

Wegen der Wichtigkeit der vorliegenden Aufgabe mögen noch zwei andere Verfahren,  $K_1$  und  $K_2$  zu bestimmen, mitgeteilt werden. Das eine ist in Fig. 163 dargestellt; die Form der beiden ebenen Scheiben, aus denen der Dreigelenkbogen besteht, ist gleichgültig.

Nachdem die Lasten links von  $G$  auf die bekannte Weise mit Hilfe eines Seilpolygons zur Mittelkraft  $CD$  vereinigt worden sind und

die Lasten rechts von  $G$  zur Mittelkraft  $DE$ , werden durch  $A$  und  $G$  Parallelen zu  $CD$  gezogen, welche die äußersten Seiten des ersten Seilpolygons in  $A'$  und  $G'$  schneiden, ferner durch  $G$  und  $B$  Parallelen zu  $DE$ , welche die äußersten Seiten des zweiten Seilpolygons in  $G''$  und  $B'$  treffen. Nach Eintragung der Schlußlinien  $s_1, s_2$  und nach Ziehen der Geraden:  $O_1F' \parallel s_1$  und  $O_2J \parallel s_2$  erhält man in den Strecken  $CF$  und  $FD$  die zu  $CD$  parallelen, in  $A$  und  $G$  angreifenden Seitenkräfte der Mittelkraft  $CD$ . Ebenso stellen die Strecken  $DJ$  und  $JE$  die zu  $DE$  parallelen, in  $G$  bzw.  $B$  wirksamen Seitenkräfte der Mittelkraft  $DE$  vor. Man darf jetzt die beiden Scheiben, aus denen der Bogenträger besteht, durch Stäbe  $AG$  und  $BG$  ersetzt denken, auf welche nur in den Knoten Lasten wirken. In  $G$  greift die Mittelkraft  $FJ$  aus den beiden Kräften  $FD$  und  $DJ$  an. Zieht man  $FO \parallel GA$  und  $JO \parallel GB$ , so stellen  $OF$  und  $JO$  die in den Stäben  $AG$  und  $GB$

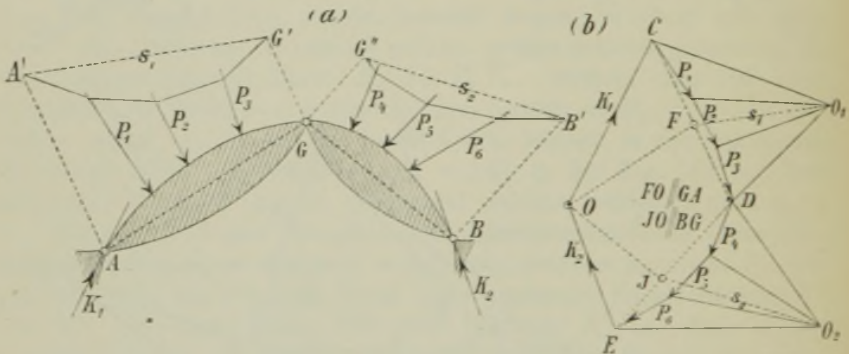


Fig. 163.

hervorgerufenen Spannkraften (Drücke) vor. Da nun im Punkte  $A$  der Kämpferdruck  $K_1$  mit der Spannkraft  $FO$  und der in  $A$  angreifenden Last  $CF$  im Gleichgewichte sein muß, so gibt die Strecke  $OC$  nach Größe, Richtung und Sinn den Kämpferdruck  $K_1$  an, und ebenso findet man, daß  $EO = K_2$  ist. Zeichnet man zu den Lasten  $P_1, P_2, \dots$  mit dem Pole  $O$  ein durch den Punkt  $A$  gehendes Seilpolygon, so geht dieses auch durch die Punkte  $G$  und  $B$ .

In Fig. 164 ist noch der besondere Fall paralleler Lasten dargestellt worden. Es wurde ein Seilpolygon  $A'G'B'$  mit dem beliebigen Pole  $O'$  gezeichnet. Nach Eintragung der Schlußlinien  $s_1$  und  $s_2$  wurden gezogen:  $O'E \parallel s_1$ ;  $O'F \parallel s_2$ ;  $EO \parallel GA$ ,  $FO \parallel BG$ .

Ein drittes Verfahren ist schließlich in Fig. 165 vorgeführt worden.  $R_1$  und  $R_2$  sind die Mittelkräfte der auf die Scheiben  $AG$  und  $GB$

wirkenden Lasten; sie wurden in beliebig angenommenen Punkten  $T_1$  und  $T_2$  in die Seitenkräfte  $A$  und  $C$ ,  $B$  und  $D$  zerlegt. Hieran wurde

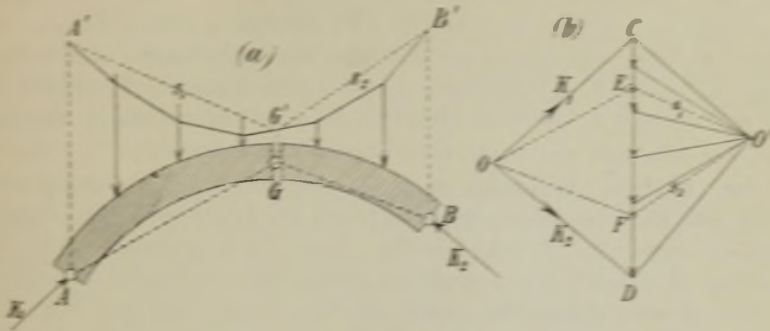


Fig. 164 a u. b.

die Mittelkraft aus  $C$  und  $D$  nach den Richtungen der Sehnen  $GA$  und  $GB$  in  $A'$  und  $B'$  zerfällt. Der Kämpferdruck  $K_1$  muß nun den

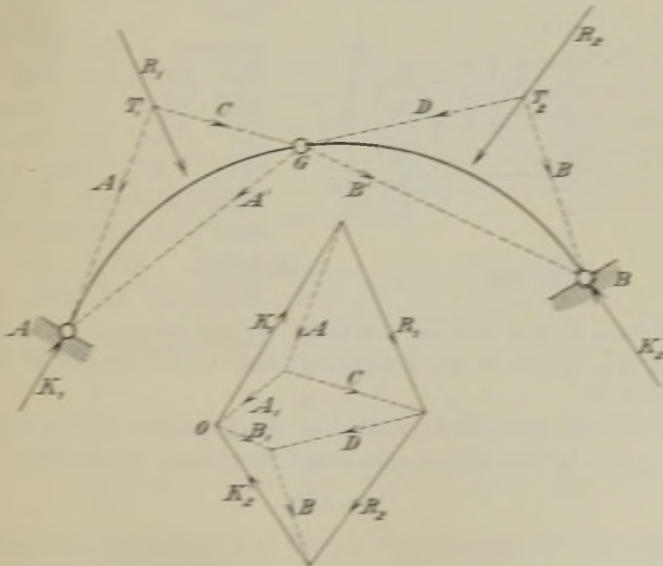


Fig. 165.

Kräften  $A$  und  $A'$  das Gleichgewicht halten und der Widerstand  $K_2$  den Kräften  $B$  und  $B'$ .

109. **Mittelkraftslinie (Drucklinie), Längskraft, Querkraft, Moment.**  
Wählt man nach Bestimmung der Kämpferdrücke  $K_1$  und  $K_2$  den Eckpunkt  $O$  (Fig. 162b) des Kräftepolygons zum Pole, trägt die Strahlen  $I, II, \dots$  ein und legt durch den Punkt  $A$  ein Seilpolygon, indem man der Reihe nach zieht:  $\overline{Aa} \parallel \overline{OF}$ ;  $\overline{ab} \parallel I$ ;  $\overline{bc} \parallel II$  u. s. w., so gibt die Seilpolygonseite  $ab$  die Lage der Mittelkraft  $I$  der beiden Kräfte  $K_1$  und  $P_1$  an, die Polygonseite  $bc$  die Lage der Mittelkraft  $II$  von  $K_1, P_1$  und  $P_2$ , u. s. w. Die Polygonseite  $cd$  muß durch das Gelenk  $G$  gehen und die letzte Seite durch das Gelenk  $B$ .

Das Polygon  $AabedeB$  wird die der gegebenen Belastung entsprechende *Mittelkraftslinie* genannt (auch die *Drucklinie*, falls nämlich sämtliche Seilkräfte Drücke sind\*). Diese Linie gestattet, sofort die Lage der Mittelkraft der auf irgend einen Teil des Bogens wirkenden äußeren Kräfte anzugeben, während die Größe und der Sinn der gesuchten Mittelkraft aus dem Kräftepolygone entnommen werden können.

Es werde nun der Bogen an irgend einer Stelle durch einen zur Mittellinie senkrechten Schnitt  $ss$  in zwei Teile getrennt, beispielsweise an einer Stelle  $C$  zwischen  $P_2$  und  $P_3$  (Fig. 162 u. 166).

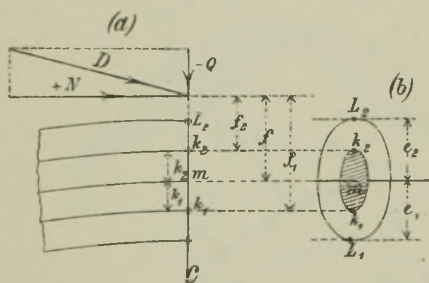


Fig. 166.

Links von  $C$  wirken die äußeren Kräfte  $K_1, P_1, P_2$ . Ihre Mittelkraft wird durch den Strahl  $II$  dargestellt; sie wirkt im Sinne  $OD$  (Fig. 162b), fällt mit der Seilpolygonseite  $II$  zusammen und möge die Größe  $D$  haben. Wird die Kraft  $\overline{OD} = D$  in zwei Seiten-

kräfte  $\overline{ED} = N$  und  $\overline{OE} = Q$  zerlegt, welche senkrecht und parallel zu  $ss$  wirken, so ist  $N$  die *Längskraft* und  $Q$  die *Querkraft* für den Querschnitt  $C$ .

Hat  $N$  von dem Schwerpunkte  $m$  des fraglichen Querschnitts den Abstand  $f$ , so ist das *Biegemoment* für diesen Querschnitt

$$M = Nf.$$

Unter der Voraussetzung, daß  $D$  die Mittelkraft der am *linken* Bogenteile ( $AC$ ) angreifenden äußeren Kräfte ist, setzen wir

$M$  positiv, sobald  $D$  rechts um  $m$  dreht,

\*) Vergleiche Seite 8.



$Q$  positiv, sobald es von der hohlen nach der erhabenen Seite des Bogens wirkt,\*)

$N$  positiv, sobald es das Bestreben hat, den Teil  $AC$  an den Teil  $CB$  anzudrücken.

In Figur 162 u. 166 sind  $M$  und  $N$  an der Stelle  $C$  positiv, hingegen ist  $Q$  negativ. Schneidet die Drucklinie die Mittellinie des Bogens, so ist an der Schnittstelle  $M=0$ . In Fig. 162 ist für alle Querschnitte zwischen  $A$  und  $G$  das Moment  $M$  positiv und für alle Querschnitte zwischen  $G$  und  $B$  negativ.

110. Spannungen; Einführung der Kernlinien. Durch das Moment  $M$  und die Längskraft  $N$  werden im Querschnitte des Bogens Normalspannungen  $\sigma$  hervorgerufen, während die Querkraft  $Q$  Schubspannungen erzeugt; letztere dürfen stets vernachlässigt werden, und für die ersteren gelten mit hinreichender Annäherung die im Abschnitte III für den geraden Stab abgeleiteten Formeln. Vorausgesetzt ist hierbei, daß der Querschnitt eine im Verhältnis zum Krümmungshalbmesser der Bogen-Mittellinie geringe Höhe besitzt und daß der Stab in Bezug auf die durch seine Mittellinie gelegte Ebene symmetrisch ist. Bedingungen, welche bei den im Hochbau und Brückenbau zu behandelnden ebenen Bogenträgern stets erfüllt sind.

Bedeutung nun

$F$  und  $J$  den Inhalt und das auf die wagerechte Schwerachse des Querschnitts bezogene Trägheitsmoment des Querschnitts,  $e_1$  und  $e_2$  die Abstände des untersten und des obersten Querschnittspunktes ( $L_1$  u.  $L_2$ ) von jener Schwerachse, (Fig. 166 b), so ergeben sich nach Gleich. 17 Seite 62 für die Spannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  in den Punkten  $L_1$  und  $L_2$  die Werte

$$(1) \quad \sigma_1 = -\frac{N}{F} + \frac{Me_1}{J}; \quad \sigma_2 = -\frac{N}{F} - \frac{Me_2}{J},$$

und mit den Bezeichnungen

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{J}{e_1} = W_1; \quad \frac{J}{e_2} = W_2, \\ \sigma_1 = -\frac{N}{F} + \frac{M}{W_1}; \quad \sigma_2 = -\frac{N}{F} - \frac{M}{W_2}. \end{array} \right.$$

$W_1$  und  $W_2$  nennt man die *Widerstandsmomente* des Querschnitts.

\*) Ist  $D$  die Mittelkraft der rechts von  $C$  wirksamen äußeren Kräfte, so ist das links drehende Moment  $M$  positiv, desgleichen die nach der hohlen Seite des Bogens gerichtete Querkraft.

Meistens ist es vorteilhaft, die *Kernhalbmesser* (s. Gleich. 2 auf Seite 78)

$$(3) \quad k_2 = \frac{J}{e_1 F} = \frac{W_1}{F} \quad \text{und} \quad k_1 = \frac{J}{e_2 F} = \frac{W_2}{F}$$

einzuführen. Trägt man diese Halbmesser vom Querschnittsschwerpunkte  $m$  aus auf der Senkrechten zur Bogenachse ab, indem man  $\overline{mk_1} = k_1$  und  $\overline{mk_2} = k_2$  macht, so erhält man die Kernpunkte  $k_1$  und  $k_2$ , welche wir stets mit denselben Buchstaben bezeichnen wollen, wie die entsprechenden Kernhalbmesser.

Hat  $N$  von diesen Punkten die Entfernungen  $f_1$  und  $f_2$ , so erhält man nach Gleich. 5 auf Seite 79 für die Spannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  die übersichtlichen Formeln

$$(4) \quad \sigma_1 = \frac{Nf_2}{Fk_2} = \frac{M_2}{W_1} \quad \text{und} \quad \sigma_2 = -\frac{Nf_1}{Fk_1} = -\frac{M_1}{W_2},$$

wobei  $M_2$  und  $M_1$  die auf die Kernpunkte  $k_2$  und  $k_1$  bezogenen Angriffsmomente bedeuten.

Die geometrischen Örter der Punkte  $k_2$  und  $k_1$  nennt man die *Kernlinien*; ihre Einführung bei der Ermittlung der Spannungen erleichtert die Untersuchung der gefährlichsten Belastungsweisen ganz außerordentlich, setzt aber voraus, daß die Werte  $k_1 = \frac{J}{Fe_2}$  und  $k_2 = \frac{J}{Fe_1}$  mit Hilfe von überschläglichen Berechnungen festgestellt worden sind. Wie dies zu geschehen hat, soll am Ende dieses Abschnitts auseinandergesetzt werden.

## § 24.

### Belastung durch senkrechte Kräfte.

#### a. Momente und Querkräfte infolge beliebiger Belastung.

**111. Momente.** Die Kämpferdrücke eines durch irgend welche senkrechte Lasten beanspruchten Bogenträgers  $AGB$  (Fig. 167) seien in die senkrechten Seitenkräfte  $A$  und  $B$  und in die entgegengesetzten gleichen, nach der Richtung der Verbindungslinie  $AB$  der Kämpfergelenke wirkenden Seitenkräfte  $H'$  zerlegt; sodann sei gesetzt

$$(1) \quad H' \cos \alpha = H,$$

wobei  $\alpha$  den Neigungswinkel der  $AB$  gegen die Wagerechte bedeutet. Man nennt  $H$  den *Horizontalschub* des Bogens.\*)

\*) Die Bezeichnung paßt eigentlich nur für die wagerechte Seitenkraft des vom Bogen auf das Widerlager ausgeübten Druckes.

Wird zunächst  $H' = 0$  angenommen, so läßt sich das Moment für irgend einen Querschnitts-Kernpunkt  $k$ , *gleichgültig ob der oberen oder der unteren Kernlinie angehörend*, in derselben Weise bestimmen, wie das Moment für den Querschnitt eines einfachen Balkens. Man zeichnet mit dem beliebigen Pole  $O_1$  ein Seilpolygon  $I II III \dots$ , trägt die Schlußlinie  $ab$  ein, mißt auf der Senkrechten durch  $k$  die Ordinate  $en$  des Seilpolygons und multipliziert diese mit der Polweite  $\mathfrak{S}$ . Das Produkt  $\mathfrak{S}en$  ist das gesuchte Moment; wir bezeichnen es mit  $M_{0k}$ .

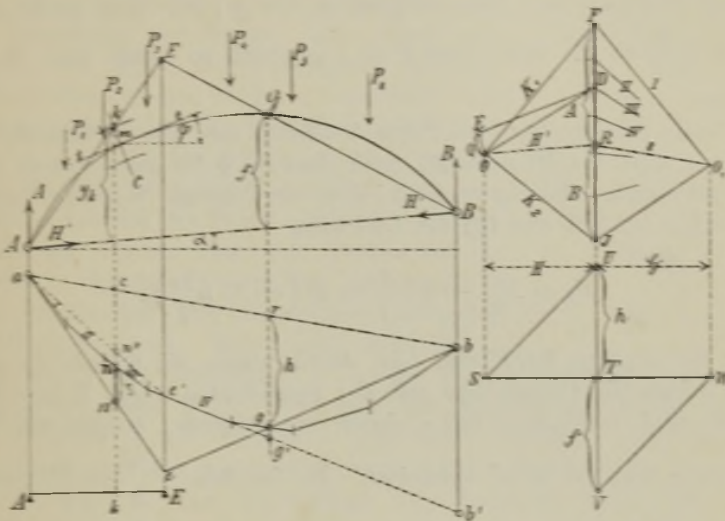


Fig. 167.

Treten nun die beiden Kräfte  $H'$  hinzu, welche in Bezug auf  $k$  am Hebelarme  $y_k \cos \alpha$  angreifen, wobei  $y_k$  den in senkrechter Richtung gemessenen Abstand des Punktes  $k$  von der Geraden  $AB$  bedeutet, so entsteht das Moment

$$M_k = M_{0k} - H' y_k \cos \alpha$$

$$(2) \quad M_k = M_{0k} - H y_k$$

Für den Punkt  $G$  erhält man mit den in die Fig. 167 eingetragenen Bezeichnungen  $f$  und  $h$

$$M_G = M_{0G} - Hf = \mathfrak{S}h - Hf$$

und hieraus folgt, da  $M_G = 0$  sein muß, die wichtige Gleichung

$$(3) \quad H = \frac{M_{0G}}{f} = \frac{\mathfrak{S}h}{f}$$



Legt man durch den Pol  $O_1$  zur Schlußlinie  $ab$  eine Parallele  $s$ , welche den Kräftezug  $FJ$  in  $R$  schneidet, so ist (nach No. 67 Seite 123)  $\overline{RF} = A$  und  $\overline{JR} = B$ . Zieht man von  $R$  aus eine Parallele zu  $AB$  und bestimmt auf derselben einen Punkt  $O$  im wagerechten Abstände  $H$  von  $FJ$ , so stellt die Strecke  $RO$  die Kraft  $H'$  vor, und man erhält nun:  $\overline{OF} = K_1$ ,  $\overline{JO} = K_2$ . Der Punkt  $O$  ist der Pol der durch die drei Punkte  $A, G, B$  gehenden Mittelkraftslinie. Will man die Lage des Poles  $O$  durch Zeichnung finden, so trage man auf der Verlängerung von  $FJ$  die Strecken  $\overline{UT} = h$  und  $\overline{T'V} = f$  ab, mache  $STW \perp UV$ , hierauf  $\overline{T'W} = \mathfrak{S}$  und ziehe schließlich  $US \parallel VW$ . Man erhält dann  $\overline{ST} = \mathfrak{S} \frac{h}{f} = H$ . Hätte man  $\mathfrak{S} = f$  gemacht, so würde man  $H = h$  erhalten.

Nach Bestimmung des Poles  $O$  könnte man die Mittelkraftslinie zeichnen und das Moment  $M_k$  nach dem im § 23 angegebenen Verfahren ermitteln. Häufig verdient jedoch der folgende Weg den Vorzug. Man bilde aus (2) und (3) die Gleichung

$$M_k = M_{0_k} - \mathfrak{S} h \frac{y_k}{f} = \mathfrak{S} \left( \overline{cn} - h \frac{y_k}{f} \right),$$

ziehe die Geraden  $BGE$  und  $bge$ , deren erstere die Gerade  $Ak$  in  $E$  trifft, bringe die Gerade  $bge$  mit der Senkrechten durch  $E$  in  $e$  zum Schnitt und verbinde  $a$  mit  $e$  durch eine Gerade, welche die Verlängerung von  $cn$  in  $n'$  schneidet. Es ist dann:  $\frac{\overline{cn'}}{h} = \frac{y_k}{f}$ , mithin  $h \frac{y_k}{f} = \overline{cn'}$  und, wenn die Strecke  $\overline{nn'} = \eta$  gesetzt wird

$$(4) \quad M_k = \mathfrak{S} (\overline{cn} - \overline{cn'}) = - \mathfrak{S} \eta.$$

Das Moment  $M_k$  ist *negativ* oder *positiv*, je nachdem  $n'$  *unterhalb* (wie in Fig. 167) oder *oberhalb* des hängenden Seilpolygons  $agb$  liegt. Für  $\mathfrak{S}$  wird man natürlich einen runden Wert wählen.

An die allgemeine Bestimmung von  $M_k$  schließen wir noch eine für die Folge sehr wichtige Untersuchung an, indem wir das Moment  $M_k$  für den Fall angeben, daß alle Lasten rechts von  $E$  verschwinden. Es ist dann die Seite  $IV$  die letzte Seite des Seilpolygons; ihr Schnittpunkt  $b'$  mit der Senkrechten durch  $B$  tritt an die Stelle von  $b$ , während  $g$  zu ersetzen ist durch  $g'$ , ferner  $e$  durch  $e'$  und  $n'$  durch  $n''$ . Man erhält

$$M_k = + \mathfrak{S} \overline{nn''},$$

und dieses Moment stimmt mit dem Momente für den Querschnitt  $k$



eines einfachen Balkens  $AE$  überein, auf welchen die Lasten  $P_1, P_2, P_3$  wirken. Die Gerade  $ae'$  ist die Schlußlinie für den Balken  $AE$ .

Bei der Anwendung der Gleichung (4) wird im Falle einer stetigen Belastung und zuweilen auch bei Einzellasten ein Fehler begangen, der allerdings unwesentlich ist und daher rührt, daß im allgemeinen nicht sämtliche links vom Kernpunkte  $k$  wirkenden Lasten auch links von dem fraglichen Bogenquerschnitte  $C$  liegen.

In der Figur 168 bedeutet die krumme Linie  $edg$  die Drucklinie;  $o$  und  $u$  sind Punkte der Oberfläche des Bogens. Der durch den Bogen und durch dessen Belastung geführte Schnitt  $dou$  ist von  $d$  bis  $o$  senkrecht, von hier ab rechtwinklig zur Mittellinie des Bogens. Die in  $d$  an die Drucklinie gelegte Tangente gibt die Lage der Mittelkraft der links vom Schnitte  $dou$  auf den Bogen wirkenden äußeren Kräfte an; sie schneidet den Querschnitt im Punkte  $s$ , dessen Abstand vom Kernpunkte  $k$  (der in der Fig. 168 der unteren Kernlinie angehört)  $= f_k$  sei. Man findet dann  $M_k =$

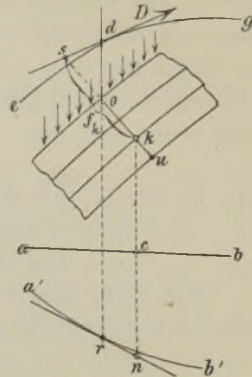


Fig. 168.

wo  $N$  die Längskraft, d. h. die zu  $ou$  senkrechte Seitenkraft von  $D$  ist; vergl. § 23. Will man zur Bestimmung von  $M_k$  die mit der Polweite  $\mathfrak{H}$  zur Belastung gezeichnete Seillinie  $a'r'b'$  benutzen, so bringe man die Senkrechte durch  $d$  mit der Seillinie in  $r$  zum Schnitt, lege in  $r$  an die Seillinie eine Tangente, welche die Senkrechte durch  $k$  in  $n$  schneidet, um dann zu finden:  $M_{0k} = \mathfrak{H} \overline{cn}$ , worauf sich schließlich  $M_k = \mathfrak{H} \left( \overline{cn} - h \frac{y_k}{f} \right)$  ergibt.

Man umgeht nun alle überflüssigen Feinheiten, wenn man durch den Bogen nur senkrechte Schnitte  $dou$  führt, und die Momente  $M_{k_1}$  und  $M_{k_2}$  für die auf diesen Schnitten liegenden Kernpunkte  $k_1$  und  $k_2$  mit Hilfe der Gleichung (4) bestimmt, d. h. unter  $n$ , wie in Fig. 167, den senkrecht unter dem fraglichen Kernpunkte liegenden Punkt des mit der Polweite  $\mathfrak{H}$  gezeichneten Seilpolygons versteht. Aus den Momenten  $M_{k_1}$  und  $M_{k_2}$  findet man dann (genügend genau) mit Hilfe der Gleichungen (4) auf Seite 182 die Spannungen  $\sigma_2$  und  $\sigma_1$  für die in der Figur 169 mit  $I$  und  $II$  bezeichneten Querschnitte.

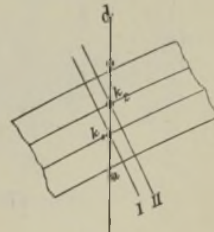


Fig. 169.

112. **Querkräfte.** Um die Querkraft  $Q$  für den Querschnitt  $C$  in Fig. 167 zu finden, hat man nur nötig, die durch den Strahl  $OD$

nach Größe, Richtung und Sinn dargestellte Mittelkraft der links von  $C$  wirksamen äußeren Kräfte  $A, P_1, P_2$  in die Seitenkräfte  $\overline{ED} \parallel tt$  und  $\overline{OE} \perp tt$  zu zerlegen, wobei  $tt$  die im Schwerpunkte  $m$  des fraglichen Querschnitts an die Bogenmittellinie gelegte Tangente bezeichnet.

Man kann aber  $Q$  noch in einer anderen Form darstellen.

Bezeichnet man nämlich den Neigungswinkel der Tangente  $tt$  gegen die Wagerechte mit  $\varphi$  und projiziert im Kräfteplane die Strecken  $\overline{OR} = H'$  und  $\overline{RD} = A - P_1 - P_2$  auf die Richtung  $OE$ , so findet man:

$\overline{OE} = \overline{RD} \cos \varphi - \overline{OR} \sin(\varphi - \alpha) = (A - P_1 - P_2) \cos \varphi - H' \sin(\varphi - \alpha)$   
und wenn man mit

$$Q_0 = A - P_1 - P_2$$

die Querkraft für den Querschnitt  $k$  eines durch die Kräfte  $P_1, P_2, \dots$  belasteten einfachen Balkens  $AB$  bezeichnet,

$$(5) \quad Q = Q_0 \cos \varphi - H' \sin(\varphi - \alpha).$$

Mit Hilfe dieser Gleichung werden wir später die Einflußlinie für die Querkraft  $Q$  ermitteln.

### b. Stützenwiderstände und Kämpferdrucklinie.

113. Einflußlinie für  $H$ . Fig. 170. Aus der auf Seite 183 abgeleiteten Gleichung:  $H = \frac{M_{0G}}{f}$  folgt, daß man die Einflußlinie für den Horizontalschub  $H$  erhält, indem man die Ordinaten der Einfluß-

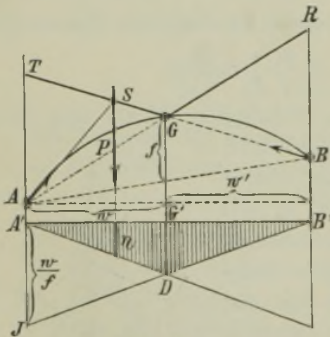


Fig. 170.

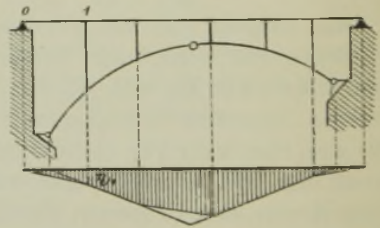


Fig. 171.

linie des Momentes  $M_{0G}$  für den Querschnitt  $G'$  des einfachen Balkens  $A'B'$  durch  $f$  dividiert. Das Dreieck  $A'DB'$ , dessen Spitze  $D$  auf der Senkrechten durch  $G'$  liegt, würde nach No. 77 die Einflußfläche für  $M_{0G}$  sein, wenn  $\overline{AJ} = w$  wäre, wobei  $J$  der Schnittpunkt

der Geraden  $DB'$  mit der Senkrechten durch  $A$  ist, und  $w$  den Abstand des Gelenkes  $G$  von der linken Auflagersenkrechten bedeutet.

Macht man also  $\overline{A'J} = \frac{w}{f}$ , so ist das Dreieck  $A'DB'$  die Einflußfläche für  $H$ . Der Einzellast  $P$  entspricht:  $H = P\tau$ . Bei mittelbarer Belastung setzt die Fig. 170 voraus, daß über jedem der drei Gelenke  $A, B, G$  ein Querträger liegt; ist dies nicht der Fall, so entsteht die in der Fig. 171 dargestellte Einflußfläche, denn zwischen je zwei Querträgern ist die Einflußlinie eine Gerade.\*) In den folgenden Entwicklungen setzen wir voraus, daß senkrecht über den Gelenken  $A, B, G$  Querträger angeordnet sind.

114. Die Kämpferdrucklinie. Ist nur eine Last  $P$  vorhanden, so schneiden sich die beiden Kämpferdrücke in einem auf der Richtungslinie von  $P$  gelegenen Punkte  $S$ . Bewegt sich  $P$  von  $A$  nach  $B$ , so beschreibt der Punkt  $S$  die gebrochene Linie  $TGR$ , welche aus den Verlängerungen  $TG$  und  $GR$  der Geraden  $BG$  und  $AG$  besteht.

Es folgt dies ohne weiteres aus der Untersuchung auf Seite 114; vergl. auch Fig. 104. Die Linie  $TGR$  nennt man die *Kämpferdrucklinie* des Bogens  $AGB$ ; sie wurde zu gleicher Zeit von *Fränkel* und *Winkler* in die Bogentheorie eingeführt.

115. Stützenwiderstände  $A, B$  und  $H$  infolge gleichmäßiger Belastung. Auf den Bogen möge eine gleichmäßige Belastung wirken, welche  $=p$  für die Längeneinheit der wagerecht gemessenen Stützweite  $l = w + w'$  ist und von  $B$  aus die Strecke  $b$  bedeckt (Fig. 172). Aus der auf das Gelenk  $B$  als Drehpunkt bezogenen Momentengleichung

$$Al - pb \frac{b}{2} = 0 \text{ folgt}$$

$$(6) \quad A = \frac{pb^2}{2l}.$$

Trägt man diesen Wert unter dem Endpunkte  $E$  der belasteten Strecke von einer Wagerechten  $A'B'$  aus als Ordinate auf, so liegt deren Endpunkt auf einer Parabel  $B'LD$  mit senkrechter Achse und

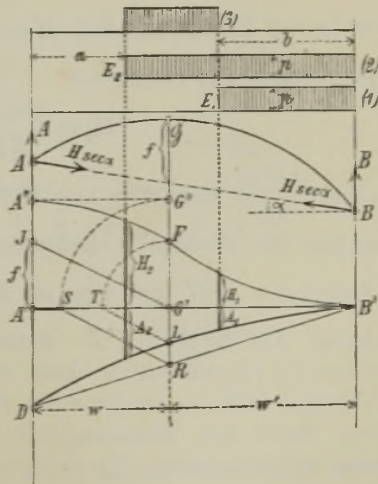


Fig. 172.

\*) Vergl. die ähnlichen Untersuchungen auf Seite 135.



mit dem Scheitel  $B'$ ; diese Parabel besitzt an der Stelle  $b=l$  die Ordinate  $\overline{A'D} = \frac{pl}{2}$  und stimmt daher mit der in der Fig. 120 dargestellten Parabel  $B'D$  überein. Nun findet man für den Belastungsfall (1) in der Figur 172:  $A=A_1$ , für den Belastungsfall (2):  $A=A_2$  und für den Fall (3):  $A_3=A_2-A_1$ . Ganz ebenso wird die Auflagerkraft  $B$  ermittelt; die  $B$ -Parabel ist das Spiegelbild der  $A$ -Parabel.

Den Stützenwiderstand  $H$  bestimmen wir mit Hilfe der Gleichung  $H = \frac{M_{0G}}{f}$ , bezeichnen mit  $w$  und  $w'$  die Abstände des Gelenkes  $G$  von den Auflagersenkrechten und finden im Falle  $b < w'$  (Belastungsfall 1):  $M_{0G} = Aw = \frac{pb^2w}{2l}$ , mithin  $H_1 = \frac{pb^2w}{2lf}$ .

Wird  $H_1$  von der Geraden  $A'B'$  aus und unter dem Lastende  $E_1$  als Ordinate aufgetragen, so liegt deren Endpunkt auf einer Parabel  $B'F$  mit senkrechter Achse, deren Scheitel  $B'$  ist und welche für  $b=w'$  die Ordinate  $\overline{G'F} = \frac{pw'^2w}{2lf}$  besitzt; sie wird nach demselben Verfahren gezeichnet wie die Parabel  $B'D$ .

Im Falle gänzlicher Belastung ( $b=l$ ) entsteht für den Querschnitt  $G$  eines einfachen Balkens  $AB$  das Moment  $M_{0G} = \frac{pww'}{2}$  (nach S. 135), ferner der Horizontalschub  $H = \frac{pww'}{2f}$  und hieraus folgt, daß dem Belastungsfall (2) entspricht

$$H_2 = \frac{pww'}{2f} - \frac{pa^2w'}{2lf},$$

wobei  $\frac{pa^2w'}{2lf}$  den Wert von  $H$  für den Fall einer ausschließlichen Belastung der Strecke  $a$  bedeutet. Zieht man also die Gerade  $A''G''$  parallel zur  $A'B'$  und zwar im Abstände  $G'G'' = \frac{pww'}{2f}$  und zeichnet hierauf die Parabel  $A''F$ , deren Scheitel bei  $A''$  liegt, deren Achse senkrecht ist und welche daher ebenso gefunden wird wie die Parabeln  $B'D$  und  $B'F$ , so ist die unter  $E_2$  gemessene Ordinate derselben gleich dem durch den Belastungsfall (2) hervorgerufenen Horizontalschub. Dem Belastungsfall (3) entspricht:  $H_3 = H_2 - H_1$ .

Um nach Aufzeichnung der  $A$ -Parabel die Punkte  $F$  und  $A''$  der  $H$ -Parabeln schnell zu finden, bringe man die Senkrechte durch  $G$  in  $L$  und  $R$  mit der Parabel  $DB'$  und der Geraden  $DB'$  zum Schnitt,



trage  $\overline{A'J} = f$  auf, ziehe  $LT \parallel G'J$  und  $RS \parallel G'J$  und mache  $G'G'' = G'S$  ferner  $G'F = G'T$ . Daß die so gefundenen Strecken  $G'G''$  und  $G'F$  die oben vorgeschriebenen Werte haben, ist leicht nachzuweisen; man beachte daß  $\overline{G'L} = \frac{pw'^2}{2l}$  und  $\overline{G'R} = \frac{pw'}{2}$  ist.

116. Stützenwiderstände  $A$ ,  $B$  und  $H$  infolge eines verschiebbaren Zuges von Einzellasten. Fig. 173. Die Auflagerkraft  $A$ , welche ein von  $B$  aus vorgeschobener Lastenzug hervorruft, ist nach No. 75 gleich der senkrecht unter der ersten Last  $P_1$  gemessenen Ordinate  $ca$  eines Seilpolygons, das mit der Polweite  $l$  (Pol  $O$ ) zu einem Lastenzuge gezeichnet worden ist, der von  $A$  aus bis  $B$  vorgerückt ist. Wir nannten dieses Seilpolygon das  $A$ -Polygon (vergl. Tafel I, Fig. 126).

Um  $H$  zu finden, bezeichnen wir die Abstände der Lasten  $P_1, P_2, \dots$  vom Gelenke  $G$  mit  $c_1, c_2, \dots$ , bestimmen zunächst  $M_{0G} = Aw - \sum Pc$ , wobei sich das Zeichen  $\sum$  nur auf die Lasten links von  $G$  bezieht, und erhalten hieraus

$$H = \frac{M_{0G}}{f} = \frac{Aw}{f} - \frac{\sum Pc}{f}.$$

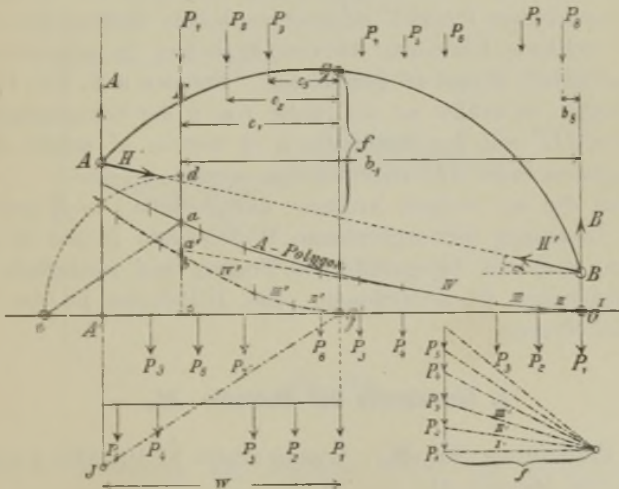


Fig. 173.

Zeichnet man nun für einen von  $A$  aus bis zur Senkrechten durch  $G$  vorgeschobenen Lastenzug ein (in der Fig. 173 strichpunktirtes) Seilpolygon  $I, II, \dots$ , dessen erste Ecke mit  $G'$  zusammenfällt, und wählt die Polweite  $= f$ , so ist die senkrecht unter  $E$  gemessene Ordinate dieses

Polygons:  $\overline{cb} = \frac{\Sigma Pc}{f}$  (vergl. Seite 20). Macht man also auf der linken Auflager-Senkrechten:  $A'J = f$ , zieht die Gerade  $G'J$  und hierauf  $ae \parallel G'J$ , so erhält man  $\overline{ce} = A \frac{w}{f}$  und, nach Auftragen von  $\overline{cd} = \overline{ce}$ , den Horizontalschub:  $H = \overline{db}$ .

Solange die erste Last des von  $B$  aus vorgeschobenen Zuges rechts von  $G$  liegt, ist natürlich  $H = A \frac{w}{f}$ .

Es kann auch vorkommen, daß die Kräfte  $A$  und  $H$  für einen von  $B$  aus vorgeschobenen Lastenzug ermittelt werden müssen, der kürzer ist als der bei Aufzeichnung des Seilpolygons angenommene, von  $A$  bis  $B$  reichende. Ständen beispielsweise in Fig. 173 nur die Lasten  $P_1$  bis  $P_3$  auf dem Träger, so wäre die Seite  $IV'$  die letzte Seite des  $A$ -Polygons, ihr Schnittpunkt  $a'$  mit der Senkrechten durch  $E$  müßte an die Stelle von  $a$  treten, und man würde erhalten

$$A = \overline{ca'}; \quad H = A \frac{w}{f} - \overline{cb} = \overline{ca'} \frac{w}{f} - \overline{cb}.$$

Der Wert  $H$  wird wie vorhin durch Zeichnung bestimmt.

Endlich kann es auch nötig werden, den Punkt  $b$  ebenfalls durch einen tiefer gelegenen Punkt  $b'$  zu ersetzen, sobald nämlich der zwischen  $E$  und  $G$  stehende Lastenzug kürzer ist als der in entgegengesetzter Richtung zwischen  $E$  und  $G'$  gezeichnete. Ständen z. B. nur  $P_1$  und  $P_2$  auf dem Träger, so müßte an die Stelle von  $b$  der Schnittpunkt  $b'$  der Polygonseite  $III'$  mit der Senkrechten  $cb$  treten;  $a'$  müßte dann auf der verlängerten Seite  $III$  angenommen werden.

Werden die am rechten Auflager durch einen von  $A$  nach  $B$  vorrückenden Lastenzug hervorgerufenen Widerstände  $B$  und  $H$  gesucht, so betrachte man das Spiegelbild des Trägers und wiederhole die soeben beschriebenen Konstruktionen. Das  $B$ -Polygon ist das Spiegelbild des  $A$ -Polygons.

### c. Grenzwerte der Momente $M_k$ .

117. Einflußlinie für  $M_k$ . Irgend einem Kernpunkte  $k$  entspricht nach Seite 183 (Gleich. 2)

$$M_k = M_{0k} - Hy_k,$$

wobei  $M_{0k}$  das Moment für den senkrecht unter  $k$  gelegenen Querschnitt  $C'$  eines einfachen Balkens  $AB'$  (Fig. 174) bedeutet. Die Einflußlinie für  $M_k$  ist bei unmittelbarer Belastung nach No. 77, Seite 134, ein Dreieck  $ACB'$ , dessen Spitze  $C$  auf der Senkrechten durch  $C'$  liegt, und dessen Seite  $B'C$  auf der linken Auflagersenkrechten die Strecke

$AJ = x$  abschneidet. Subtrahiert man nun von dieser  $M_x$ -Fläche die  $Hy_k$ -Fläche, so erhält man die  $M_x$ -Fläche. Die  $Hy_k$ -Fläche ist ebenso wie die in No. 113 dargestellte  $H$ -Fläche ein Dreieck ( $ADB'$ ), dessen Spitze ( $D$ ) auf der Senkrechten durch  $G$  liegt. Die Seite  $AD$  schneidet die Gerade  $JB'$  auf der Senkrechten durch den Schnittpunkt  $E$  der Geraden  $BG$  und  $Ak$ ; denn eine durch  $E$  gehende Einzellast erzeugt einen in die Gerade  $AkE$  fallenden Kämpferdruck und verursacht daher das Moment  $M_x = 0$ . Hieraus folgt, daß bei

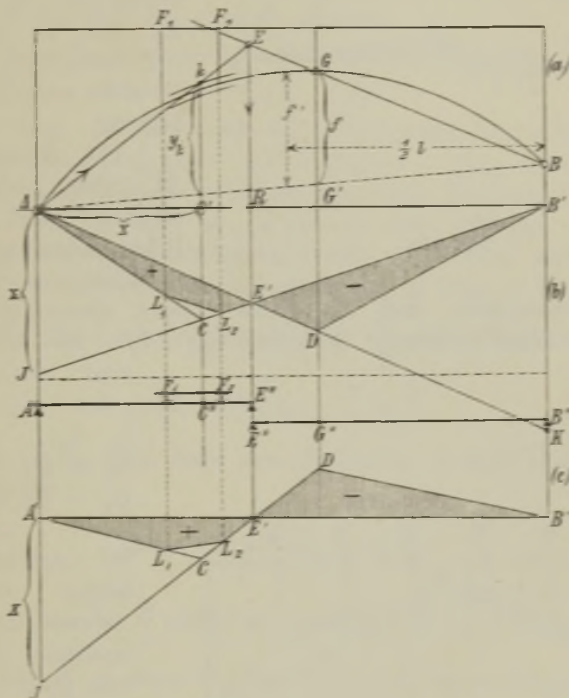


Fig. 174.

unmittelbarer Belastung das Dreieck  $ACE'$  die positive und das Dreieck  $E'DB'$  die negative Einflußfläche für  $M_x$  ist. Man kann diese Figuren noch etwas zweckmäßiger anordnen, indem man nach Auftragen von  $AJ = x$  (Fig. 174c) die Gerade  $JD$  durch den senkrecht unter  $E$  gelegenen Punkt  $E'$  der Wagerechten  $A'B'$  zieht, hierauf  $D$  mit  $B'$  verbindet und die Gerade  $A'C$  einträgt.

Wird die Belastung durch Querträger übertragen und liegt  $k$  zwischen zwei Knotenpunkten  $F_1$  und  $F_2$ , so ist noch die Gerade  $L_1L_2$

zu ziehen, deren Endpunkte in der Fig. 174b auf  $AC$  und  $JB'$  und in der Fig. 174c auf  $A'C$  und  $JD$  liegen.

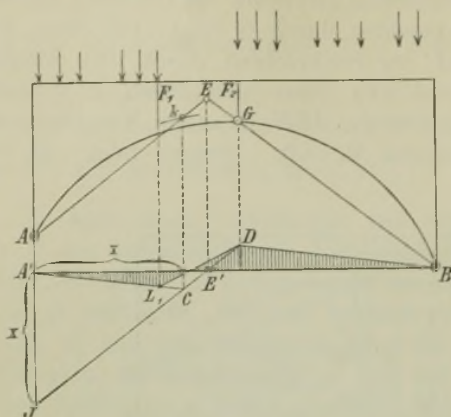


Fig. 175.

Es entstehen die in jenen Figuren schraffierten Einflußflächen. Fig. 175 setzt voraus, daß  $k$  und  $E$  in demselben Felde liegen, ein Fall, der in der Regel nur in dem Felde neben dem Gelenke  $G$  vorkommt. Es fällt dann  $L_2$  mit  $D$  zusammen; die Senkrechte durch  $E$  ist nicht mehr Belastungsscheide.

118. Grenzwerte von  $M_k$  infolge gleichförmiger und veränderlicher Belastung. Es sei zunächst mittelbare Belastung vorausgesetzt und der ganze Träger gleichmäßig mit  $q$  f. d. Längeneinheit belastet gedacht, Fig. 176.

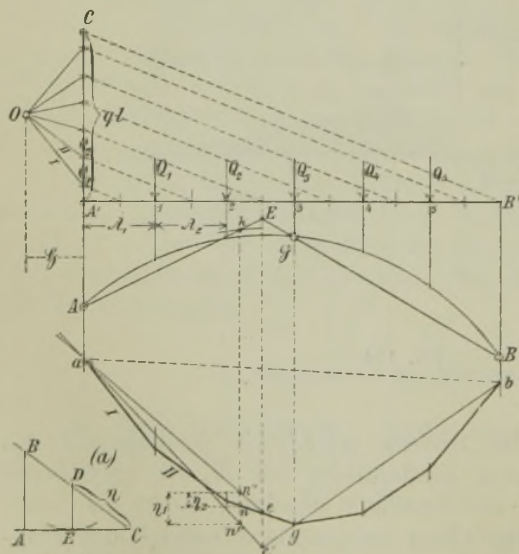


Fig. 176.

Die Knotenlasten sind, wenn die Felder die Längen  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  haben:  
 $Q_1 = \frac{1}{2} q (\lambda_1 + \lambda_2)$   
 $Q_2 = \frac{1}{2} q (\lambda_2 + \lambda_3)$   
 $\dots$ ; sie werden bei ungleichen Feldlängen zweckmäßig durch Zeichnung bestimmt. Dazu wird, von einer beliebigen

Wagerechten  $A'B'$  aus, auf der Senkrechten durch  $A$  die Last  $A'C = ql$  aufgetragen, die Gerade  $CB'$  gezogen und durch den Mittelpunkt jedes Feldes eine Parallele zur  $CB'$

gelegt. Diese Parallelen schneiden auf der Geraden  $A'C$  die gesuchten



Kräfte  $Q_1, Q_2 \dots$  ab, für welche nun mit dem beliebigen Pole  $O$  (Polweite  $\mathfrak{H}$ ) ein Seilpolygon  $agb$  gezeichnet wird, mit dessen Hilfe die Grenzwerte von  $M_k$  ermittelt werden können. Dazu bestimme man die Belastungsscheide  $E$ , bringe die Senkrechte durch  $E$  in  $e$  und  $e'$  mit dem Seilpolygon und der Geraden  $bg$  zum Schnitt und ziehe die Geraden  $ae$  und  $ae'$ , welche die Senkrechte durch  $k$  in  $n''$  und  $n'$  schneiden mögen. Setzt man  $\overline{n'n''} = \tau_1$  und  $\overline{nn''} = \tau_2$ , wo  $n$  den senkrecht unter  $k$  gelegenen Punkt des Seilpolygons bedeutet, so erhält man nach No. 111 den Einfluß der links von  $E$  angreifenden Lasten ( $Q_1$  u.  $Q_2$ ) auf das gesuchte Moment

$M_k = \mathfrak{H} \tau_2$  und den Einfluß sämtlicher Lasten:

$$M_k = -\mathfrak{H} \overline{nn'} = -\mathfrak{H} (\tau_1 - \tau_2).$$

Hieraus folgt, daß die rechts von  $E$  gelegenen Lasten ( $Q_3$  bis  $Q_5$ ) das Moment  $M_k = -\mathfrak{H} (\tau_1 - \tau_2) - \mathfrak{H} \tau_2 = -\mathfrak{H} \tau_1$  hervorbringen. Will man nun  $_{\text{max}} M_k$  haben, so belaste man jeden Knotenpunkt  $m$  links von  $E$  mit  $Q_m = \frac{1}{2}q (\lambda_m + \lambda_{m+1})$  (wo  $m$  eine beliebige Ordnungsziffer), hingegen jeden Knotenpunkt rechts von  $E$  nur mit  $G_m = \frac{1}{2}q (\lambda_m + \lambda_{m+1})$ , multipliziere also beispielsweise in dem in Fig. 176 dargestellten Falle die Lasten  $Q_3, Q_4, Q_5$  mit  $\frac{g}{q}$ . Man erhält dann

$$_{\text{max}} M_k = \mathfrak{H} \left( \tau_2 - \frac{g}{q} \tau_1 \right)$$

und hierauf, indem man links von  $E$  Lasten  $G$  und rechts von  $E$  Lasten  $Q$  annimmt

$$_{\text{min}} M_k = \mathfrak{H} \left( \frac{g}{q} \tau_2 - \tau_1 \right).$$

Die Multiplikation mit  $\frac{g}{q}$  erfolgt am zweckmäßigsten mit Hilfe eines Winkels, dessen Sinus gleich  $\frac{g}{q}$  ist. Vergl. Fig. 176 a, in der  $ABC$  ein rechtwinkliges Dreieck ist, in welchem sich verhält:  $\overline{AB} : \overline{BC} = g : q$ . Macht man  $\overline{DC} = \tau$ , so ist das Lot  $DE$  von  $D$  auf  $AC$  gleich  $\frac{g}{q} \tau$ . Man hat übrigens nicht nötig, das Lot zu zeichnen, kann vielmehr  $DE$  messen, indem man mit dem Zirkel um  $D$  einen kleinen Kreisbogen beschreibt, welcher  $AC$  berührt.

Die mit Hilfe des beschriebenen Verfahrens erhaltenen Grenzwerte von  $M_k$  sind etwas größer als die in Wirklichkeit auftretenden. Man vergleiche hierüber die auf Seite 118 an den Belastungsfall in Fig. 109 geknüpften Bemerkungen. Das Verfahren ist auch dann brauchbar, wenn die Gelenke  $AGB$  (wie in der Fig. 171) nicht senkrecht unter Querträgern liegen.

Bei *unmittelbarer Belastung* tritt in der Fig. 176 an die Stelle des Seilpolygons die einbeschriebene Seillinie, oder, wenn die Polweite  $\mathfrak{S} = 1$  gewählt wird, eine über der Stützweite  $l$  errichtete Parabel, deren Pfeil  $= \frac{ql^2}{8}$  ist. Vergl. Seite 135 und Fig. 124. Man erhält dann

die genauen Grenzwerte  $_{max}M_k, _{min}M_k$ . Beschränkt man sich nun darauf, die Momente für die in den Senkrechten durch die Querträger gelegenen Kernpunkte  $k$  zu berechnen, so darf man stets unmittelbare Belastung annehmen, weil für diese Punkte die Momente für mittelbare und unmittelbare Belastung übereinstimmen. Dabei wird natürlich vorausgesetzt, daß über den Gelenken  $A, B, G$  Querträger liegen. Ist in diesem Falle die Mittellinie des Bogens eine Parabel mit senkrechter Achse, so kann man die Aufzeichnung der Momentenparabel sparen. In der Fig. 177 ist ein in Bezug auf die Senkrechte durch die Mitte symmetrischer Parabelbogen vorausgesetzt worden. Um die Grenzwerte des Momentes  $M_{k_2}$  für einen oberen Kernpunkt  $k_2$  zu ermitteln, ziehe man die Gerade  $Ak_2E_2$ , bestimme auf der Bogenmittellinie die Punkte  $e_2$  und  $m_2$  senkrecht unter  $E_2$  und  $k_2$  und verbinde  $A$  mit  $e_2$  durch eine Gerade, welche die Senkrechte durch  $k_2$  in  $n_2$  schneidet. Nach Messung von  $\tau_{11} = k_2n_2$  und  $\tau_{12} = m_2n_2$  findet man

$$_{max}M_{k_2} = \frac{ql^2}{8f} \left( \tau_{12} - \frac{g}{q} \tau_{11} \right) = \frac{l^2}{8f} (q\tau_{12} - g\tau_{11}) \text{ und}$$

$$_{min}M_{k_2} = \frac{l^2}{8f} (g\tau_{12} - q\tau_{11}).$$

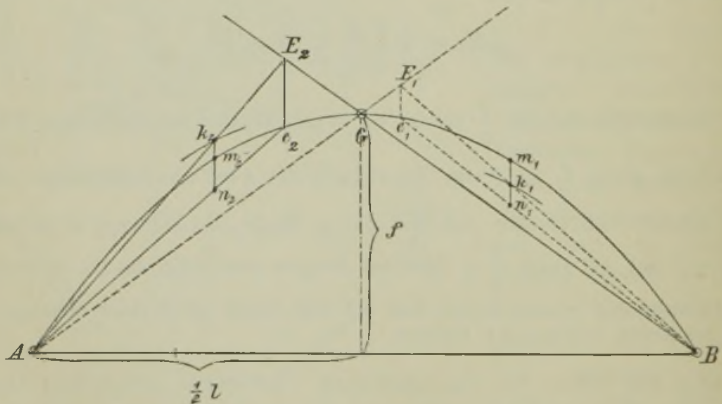


Fig. 177.

Die Multiplikation mit  $\frac{ql^2}{8f}$  war nötig, weil die Parabel mit dem Pfeile  $\frac{1}{8}ql^2$  durch eine Parabel mit dem Pfeile  $f$  ersetzt wurde.

Ganz ebenso erhält man  $M_{k_1}$  für einen Punkt  $k_1$  der unteren Kernlinie. Die betreffenden Hilfslinien wurden in der Fig. 177 gestrichelt und der Punkt  $k_1$  wurde rechts von  $G$  angenommen. Man findet nach Messung von  $r_{11} = k_1 n_1$  und  $r_{12} = m_1 n_1$

$$-M_{k_1} = \frac{l^2}{8f} (g r_{12} - g r_{11}) \quad \text{und} \quad -M_{k_2} = \frac{l^2}{8f} (g r_{22} - g r_{21}).$$

Liegen die Kämpfergelenke  $A$  und  $B$  ungleich hoch und das Gelenk  $G$  nicht in der Mitte, so ist in den vorstehenden Gleichungen die Pfeilhöhe  $f$  durch die bei  $x = \frac{1}{2}l$  gemessene Parabelordinate  $f$  (Fig. 174) zu ersetzen.

119. Grenzwerte von  $M_x$  infolge eines verschiebbaren Zuges von Einzellasten. 1. Bestimmung von  $-M_x$ . Liegen die Punkte  $k$  und  $E$  nicht in demselben Felde, so stimmt die positive  $M_x$ -Fläche überein mit der Einflußfläche für das Moment in Bezug auf den senkrecht unter  $k$  gelegenen Querschnitt  $C'$  eines einfachen Balkens  $A'E'$  (Fig. 174b). Wird nicht nur die positive Beitragstrecke belastet, sondern wirken auch rechts von  $E$  (aber links von  $G$ ) Lasten, so ist der stellvertretende Balken  $A'E''$  ein solcher mit überragendem Ende. Dieser allgemeinere Fall wurde in der Figur 178 vorausgesetzt; er kann vorkommen, sobald  $E''$  in größerer Entfernung von  $C'$  liegt. Um nun  $-M_x$  zu finden, zeichne man für einen hinreichend langen Lastenzug mit der beliebigen Polweite  $\hat{H}$  ein Seilpolygon und setze hierauf den stellvertretenden Balken  $A'E''$  so unter den Zug, daß eine schwere Last über einem der beiden Querträger  $F_1$  oder  $F_2$  liegt. Die Lasten rechts von  $E''$  denke man beseitigt, soweit dies tunlich ist, ohne unmögliche Belastungsfälle

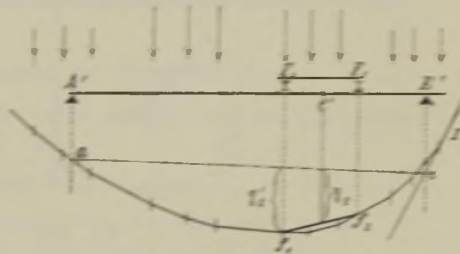


Fig. 178.

zu erhalten. Bei der Zugstellung in Fig. 178 liegt eine Last rechts von  $E''$ . Die äußerste Seilpolygonsseite  $I$  wurde mit der Senkrechten durch  $E''$  in  $e$  zum Schnitte gebracht, und hierauf wurden die Schlußlinien  $ae$  (entsprechend  $A'E''$ ) und  $f_1 f_2$ , entsprechend  $F_1 F_2$  eingetragen; sie schneiden auf der Senkrechten durch  $C'$  die Strecke  $r_{12}$  ab, und es ergibt sich nun

$$-M_x = + \hat{H} r_{12} \cdot *)$$

2. Um  $-M_x$  zu ermitteln, beachte man, daß die negative Einfluß-

\*) Wir verweisen auch auf das im § 19 entwickelte allgemeine Verfahren.



fläche in Fig. 174b im Falle:  $\overline{B'K} = \overline{B'G'}$  mit der Einflußfläche für das Moment in Bezug auf den Querschnitt  $G''$  eines einfachen Balkens  $E''B''$  übereinstimmen würde. Setzen wir also zunächst  $B'K = B'G'$  voraus und nehmen außerdem an, daß auch links von  $E$  (aber rechts von  $F_2$ ) Lasten liegen, in welchem Falle der stellvertretende Balken ein solcher mit überragendem Ende ist, so ergibt sich  ${}_{\min}M_k$  wie folgt. Der Balken  $E''B''$  wird so unter den Lastenzug gestellt, daß eine schwere Last über  $G''$  steht, Fig. 179. Die Lasten links von  $E''$  werden soweit als möglich beseitigt gedacht. Hierauf wird die äußerste Seilpolygonseite  $I$  mit der Senkrechten durch  $E''$  in  $e$  zum Schnitt gebracht, die Schlußlinie  $eb$  eingetragen, unter  $G''$  die Ordinate  $\eta'$  gemessen und  $M_k = \mathfrak{H}\eta'$  erhalten. Nun ist aber in Fig. 174b nicht  $B'K = B'G'$ , und es muß daher das Moment  $\mathfrak{H}\eta'$  noch mit  $\frac{B'K}{B'G'} = \frac{A''C'' \cdot E''B''}{A''E'' \cdot G''B''}$

(wegen  $B'K = AJ \frac{E''B''}{A''E''}$  und  $AJ = A''C''$ ) multipliziert werden. Zieht man nun die Gerade  $bg$  bis zum Schnittpunkte  $e''$  mit der Senkrechten durch  $E''$ , verlängert  $be$  bis  $a$  (senkrecht unter  $A''$ ), verbindet

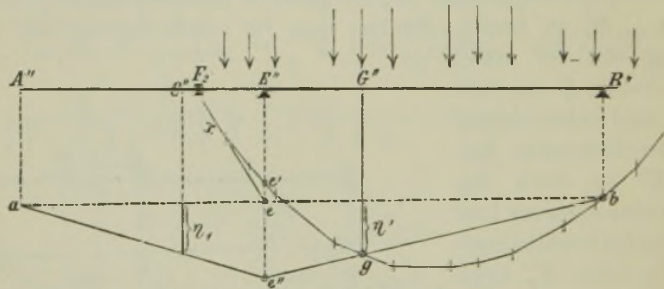


Fig. 179.

$e''$  mit  $a$  und mißt unter  $C''$  die in der Fig. 179 mit  $\eta_1$  bezeichnete Ordinate, so ist  $\eta_1 = \overline{e''e} \frac{A''C''}{A''E''} = \eta' \frac{E''B''}{G''B''} \cdot \frac{A''C''}{A''E''}$ , und man erhält mithin

$${}_{\min}M_k = -\mathfrak{H}\eta_1.$$

Die gefährlichsten Zugstellungen werden am zweckmäßigsten durch Probieren ermittelt.

Will man bei der Laststellung in Fig. 178 die rechts von  $E''$  wirkende Last vernachlässigen und in Fig. 179 die links von  $E''$  liegen-



den (was nach der Ansicht des Verfassers nur empfehlenswert ist\*), so treten an die Stelle der Punkte  $e$  die Punkte  $e'$ , in denen die Senkrechten durch  $E''$  das Seilpolygon schneiden, und es ergeben sich etwas zu große Momente.

Bei nicht zu großen Stützweiten wird das Moment  ${}_{max}M_k$  meistens durch einen von  $A$  aus vorrückenden, von vorwärts gehenden Lokomotiven geführten Güterzug, dessen erste oder zweite Achse über  $F_1$  steht, hervorgerufen, und das Moment  ${}_{min}M_k$  durch einen von  $B$  aus vorrückenden Zug, dessen erste oder zweite Achse über  $G$  steht. Liegen  $k$  und  $E$  in demselben Felde, so darf man immer die erste Achse über  $F_1$  beziehungsweise  $G$  stellen (Fig. 175); es bleiben dann die eben beschriebenen Verfahren brauchbar.

In der Regel genügt es, die Momente für die senkrecht unter Querträgern liegenden Kernpunkte zu bestimmen. Man spart dann bei der Bestimmung von  ${}_{max}M_k$  die Einzeichnung der Schlußlinie  $f_1f_2$ . Fiele z. B. in der Fig. 178 der fragliche Kernpunkt mit der Senkrechten durch  $F_1$  zusammen, so würde man erhalten:  ${}_{max}M_k = \delta \eta'_2$ .

Zu den durch den Lastenzug erzeugten Momenten  $M_k$  sind noch die von der ständigen Belastung herrührenden Momente  $M_{kg}$  zu addieren. Die letzteren werden am zweckmäßigsten mittels des in No. 118 beschriebenen und in der Fig. 176 dargestellten Verfahrens bestimmt. An Stelle der Lasten  $Q_1, Q_2 \dots$  treten die Lasten  $G_1, G_2 \dots$ . Liegt dann (wie in Fig. 176) der Punkt  $n'$  unterhalb  $n$ , so findet man  $M_{kg} = -\delta \eta n n'$ ; liegt  $n'$  oberhalb  $n$ , so wird:  $M_{kg} = +\delta \eta n n'$ .

#### d. Grenzwerte der Querkräfte $Q$ .

120. Einflußlinie für  $Q$ . Wir knüpfen an die auf Seite 186 abgeleitete Gleichung

(1)  $Q = Q_0 \cos \varphi - H' \sin (\varphi - \alpha) = Q_0 \cos \varphi - H \sec \alpha \sin (\varphi - \alpha)$   
 an, in welcher  $Q_0$  die Querkraft für den Fall  $H = 0$ , d. h. die Querkraft für den Querschnitt  $C$  eines einfachen Balkens  $AB$  ist. Trägt man nun, von einer Wagerechten  $A'B'$  aus, auf den Auflagersenkrechten die Strecken  $\overline{A'J} = \overline{B'J} = 1 \cdot \cos \varphi$  auf (Fig. 180b), zieht die Geraden  $A'J$  und  $B'J$  und verbindet die auf diesen Geraden senkrecht unter den Querträgern  $F_1$  und  $F_2$  gelegenen Punkte  $L_1$  und  $L_2$ , so ist die gebrochene Linie  $A'L_1L_2B'$  (nach No. 75 Seite 131) die Einflußlinie für  $Q_0 \cos \varphi$ . Die Einflußlinie für das zweite, von  $Q_0 \cos \varphi$  in Abzug zu bringende Glied des oben für  $Q$  angegebenen Ausdruckes besteht, ebenso wie diejenige für  $H$ , aus zwei Geraden  $A'D$  und  $DB'$ ; sie ist durch die Bedingung gegeben, daß sich die Geraden  $A'D$  und

\*) Vergl. die Auseinandersetzungen in No. 99, Seite 168.

$B'J$  auf der Senkrechten durch den Punkt  $E$ , in welchem die Kämpferdrucklinie  $BGE$  von einer durch  $A$  zur Tangente  $tt$  gezogenen Parallelen getroffen wird, schneiden müssen. Denn eine durch  $E$  gehende

Einzellast erzeugt einen in die Gerade  $AE$  fallenden, also senkrecht zum fraglichen Querschnitte gerichteten Kämpferdruck und bringt mithin für den Querschnitt  $C$  die Querkraft  $Q = 0$  hervor. Die Senkrechte durch  $E$  ist deshalb eine Belastungsscheide und der Punkt  $E'$  ein Nullpunkt der Einflußlinie. Hieraus folgt aber, daß die in der Fig. 180b schraffierte Fläche die Einflußfläche für  $Q$  ist. Eine etwas bequemere Anordnung dieser Fläche zeigt die Fig. 180c; in dieser ist  $AL_1 \parallel JE$ .

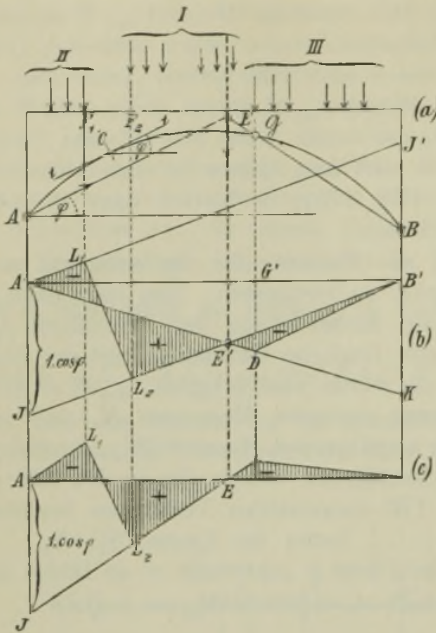


Fig. 180.

Liegt  $E$  unterhalb  $G$ , so entsteht die in der Fig. 181 dargestellte Einflußfläche, welche nur einen Nullpunkt besitzt.

Die Querkraft  $Q$  ist für die Querschnitte eines und desselben Feldes nahezu konstant; sie ist nur deshalb veränderlich, weil der Winkel  $\varphi$  sich ändert. Man begeht nur einen sehr geringen Fehler, wenn man  $Q$  für alle Querschnitte eines Feldes gleich groß annimmt und unter  $\varphi$  den Neigungswinkel der die Knotenpunkte verbindenden Bogensehne versteht. Vergl. Fig. 182 u. 183.

Mit Hilfe der Einflußflächen kann man die Grenzwerte  $_{max}Q$  und  $_{min}Q$  mittels des im § 14 angegebenen allgemeinen Verfahrens berechnen; man kann sich aber auch der folgenden Verfahren bedienen.

211. Querkräfte  $_{max}Q$  und  $_{min}Q$  infolge von Einzellasten. Liegt der in Figur 181 dargestellte Fall ( $E$  rechts von  $G$ ) vor, so schiebe man, um  $_{max}Q$  zu erhalten, den Lastenzug von  $B$  aus bis zum Quertträger  $F_2$  vor, (Zugstellung  $I$ ) und ermittle nach No. 116 die am Gelenke  $A$  angreifenden Kräfte  $A$  und  $H$ . Es wirkt dann links vom

fraglichen Felde nur eine äußere Kraft, nämlich der Kämpferdruck  $K_1$ ; er ist bestimmt durch die Seitenkräfte  $A$  und  $H'$ , von denen die letztere parallel zu  $AB$  ist und die wagerechte Projektion  $H$  besitzt, Fig. 181 b. Die Zerlegung von  $K_1$  nach der Richtung  $tt$  und nach einer Richtung senkrecht hierzu liefert  $_{max}Q$ .

Wird  $_{min}Q$  gesucht, so ist der Lastenzug von  $A$  aus bis  $F_1$  vorzuschieben. Nach Bestimmung der in  $B$  angreifenden Auflagerkräfte  $B$  und  $H$  ermittelt man den rechtsseitigen Kämpferdruck  $K_2$  und zerlegt diesen in die Längskraft  $N$  und die Querkraft  $Q_{min}$ . Die letztere ist negativ; man beachte nämlich, daß  $K_2$  die Mittelkraft der rechts vom Querschnitte  $C$  wirksamen äußeren Kräfte ist\*).

Liegt Punkt  $E$  links von  $G$  (Fig. 180), so stellt man, um  $_{max}Q$  zu erhalten, einen Lastenzug ( $I$ ) auf, dessen erste Last über  $F_2$  ruht, und der womöglich nicht länger ist als die positive Beitragstrecke  $F_2E$ .

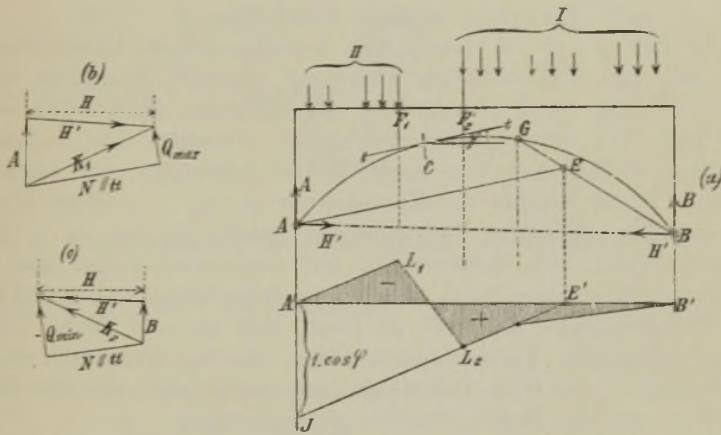


Fig. 181.

Häufig wird es sich allerdings nicht vermeiden lassen (wie in Fig. 180), auch Lasten rechts von  $E$  anzunehmen; auf den Gang der Rechnung ist diese Frage aber ohne Einfluß. Man hat nur nötig, nach No. 116 die Kräfte  $A$  und  $H$  zu bestimmen und hierauf wie vorhin zu verfahren; vergl. Fig. 181 b. Die Querkraft  $_{min}Q$  entsteht, sobald gleichzeitig ein Lastenzug von  $A$  bis  $F_1$  (Zug II in Fig. 180) und ein Lastenzug (III) von  $B$  bis in die Nähe von  $E$  vorrückt. Man ermittelt nun nach dem eben beschriebenen Verfahren (bestehend in der Bestimmung von  $A$ ,  $B$ ,  $H$  und in Zerlegung der Kämpferdrücke) getrennt den Einfluß jedes Lastenzuges und addiert die Ergebnisse. Hierbei findet

\*) Vergl. die Anmerkung auf Seite 181.



man die gefährlichste Stellung des Zuges *III* am schnellsten durch Probieren, indem man der Reihe nach die erste, zweite, dritte Achse der ersten Lokomotive über *G* stellt und die gewonnenen Werte *Q* (deren Darstellung sehr schnell vor sich geht) vergleicht. Man kann auch die durch den Zug *III* hervorgerufene Querkraft  ${}_{\min}Q$  in ähnlicher Weise bestimmen wie  ${}_{\min}M_k$  (vergl. No. 119 und die Figur 174b); denn der zwischen *E'* und *B'* gelegene Teil der Einflußfläche hat dieselbe Form wie die Einflußfläche für das Moment in Bezug auf den Querschnitt *G''* eines einfachen Balkens *E''B''*. Man braucht nur das für den stellvertretenden Balken ermittelte Moment mit  $\frac{B'K}{B'G'}$  (vergl. Fig. 180b) zu multiplizieren.

Schließt man die Belastung des Trägers durch zwei getrennte Züge als unwahrscheinlich aus, so muß man *Q* infolge des Zuges *II* mit *Q* infolge von Zug *III* vergleichen; der größere der beiden Werte ist dann die größte negative Querkraft.

Zu den durch die Lastenzüge hervorgerufenen Querkraften ist noch die von der ständigen Belastung erzeugte Querkraft  $Q_g$  zu addieren; diese wird zweckmäßig mit Hilfe des in No. 112 (vergl. auch Fig. 167) beschriebenen Verfahrens ermittelt. Das hierzu erforderliche Seilpolygon wird nach No. 126 gezeichnet; man vergleiche die Fig. 176, in welcher die Knotenlasten  $Q_1, Q_2 \dots$  durch die von der ständigen Belastung herrührenden Lasten  $G_1, G_2 \dots$  ersetzt werden müssen. Bei Parabelbögen mit senkrechter Achse und auch bei flachen Kreisbögen (also in allen im Brückenbau üblichen Fällen) sind die Querkraften  $Q_g$  stets so klein, daß sie = 0 gesetzt werden dürfen. Für den Parabelbogen werden sie bei unmittelbarer und gleichförmiger ständiger Belastung genau = 0, weil hier die Mittellkraftslinie mit der Bogenmittellinie zusammenfällt.

**122. Querkraften  ${}_{\max}Q$  und  ${}_{\min}Q$  infolge einer gleichmäßigen veränderlichen und ständigen Belastung.** Es handele sich um die von der Verkehrslast (*p*) abhängige Querkraft  $Q_p$  für das Feld  $F_1F_2$ . Fig. 182. Die Querkraft  $Q_g$  infolge der ständigen Belastung (*g*) sei bereits auf die soeben angegebene Weise bestimmt worden.

Die zur Sehne  $T_1T_2$  der Bogenmittellinie parallele Gerade *AE* schneide die *BG* unterhalb *G*. Dann entsteht  ${}_{\max}Q_p$ , sobald der Träger nur zwischen der Stütze *B* und der im Felde  $F_1F_2$  gelegenen Belastungsscheide *N* mit *p* belastet wird (Belastungsfall *I* in Fig. 182). Die Lage von *N* läßt sich zwar mit Hilfe der Einflußlinie schnell finden; es empfiehlt sich jedoch,  ${}_{\max}Q_p$  auf die folgende Weise angenähert zu bestimmen. Man nehme *N* in der Mitte des Feldes  $F_1F_2$  an und vernachlässige den Druck, welchen die zwischen *N* und  $F_2$  liegende Last auf den Querträger  $F_1$  ausübt. Es greifen dann links von dem durch das fragliche Feld geführten



Schnitte nur die äußeren Kräfte  $A$  und  $H' = H \sec \alpha$  an, und man kann, nachdem man  $A$  und  $H$  auf die in No. 115 beschriebene Art ermittelt hat, den Kämpferdruck  $K_1$  und durch Zerlegung dieser Kraft die Querkraft  $_{max}Q_p$  finden. Um  $_{min}Q_p$  zu bestimmen, beachte man, daß die beiden Belastungen  $I$  und  $II$  (Fig. 182), welche beziehungsweise  $_{max}Q_p$  und  $_{min}Q_p$  erzeugen, zusammen die gänzliche Belastung des Trägers ausmachen. Nun erzeugt aber gänzliche Belastung mit  $g$  die Querkraft  $Q_g$ ,

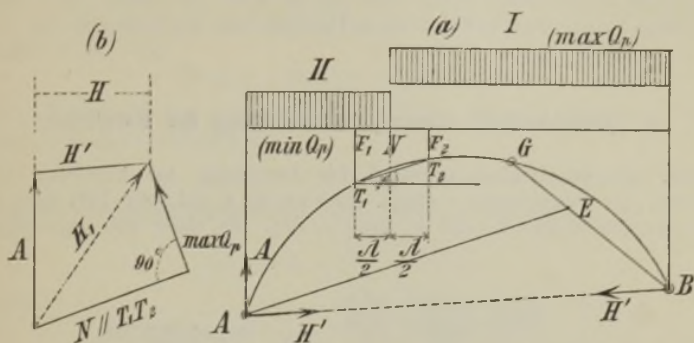


Fig. 182.

mithin gänzliche Belastung mit  $p$  die Querkraft  $\frac{p}{g} Q_g$ , und es folgt daher

$$_{max}Q_p + _{min}Q_p = \frac{p}{g} Q_g \text{ und hieraus: } _{min}Q_p = -_{max}Q_p + \frac{p}{g} Q_g.$$

Die Querkräfte, welche die ständige und die veränderliche Belastung zusammen hervorbringen, sind hiernach

$$(1) \begin{cases} _{max}Q = _{max}Q_p + Q_g \\ _{min}Q = _{min}Q_p + Q_g = -_{max}Q_p + \frac{p+g}{g} Q_g. \end{cases}$$

Liegt  $E$  oberhalb  $G$ , Fig. 183, so belastet man, um  $_{max}Q_p$  zu erhalten, den Träger zwischen  $E$  und der Mitte  $N$  des fraglichen Feldes mit  $p$ , bestimmt  $A$  und  $H$  (nach No. 115) und hierauf, wie vorhin, den Kämpferdruck  $K_1$  und die Querkraft  $_{max}Q_p$ . Schließlich wendet man die Gleichungen (1) an.

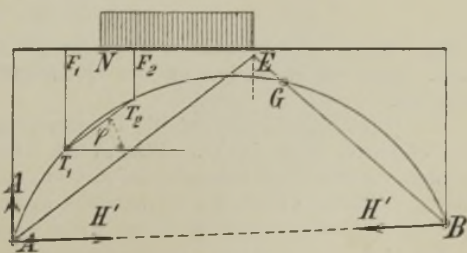


Fig. 183.

Ist die Bogenmittellinie eine Parabel oder ein flacher Kreisbogen, so ist genau oder nahezu  $Q_g = 0$ , und man findet dann

$$\max Q = \max Q_p = - \min Q_p = - \min Q.$$

Benutzt man in diesem Falle zur Ermittlung der Grenzwerte von  $Q$  die Einflußfläche, so bestimmt man, sobald  $E$  links von  $G$  liegt, den Wert  $\max Q = + p \mathfrak{F}_2$  (wo  $\mathfrak{F}_2 =$  Inhalt des positiven Teiles der Einflußfläche) und, wenn  $E$  rechts von  $G$  liegt,  $\min Q = - p \mathfrak{F}_1$  (wo  $\mathfrak{F}_1 =$  Inhalt des negativen Teiles jener Fläche). Man hat dann in jedem Falle nur den Inhalt eines Dreiecks zu berechnen.

### e. Querschnittsberechnung. Bestimmung der Kernlinien.

**123. Querschnittsberechnung.** Die Benutzung der Kernlinien bei der Berechnung der Spannungen  $\sigma$  (vergl. die Formeln 4 auf Seite 182) setzt voraus, daß die Kernhalbmesser  $k_1$  und  $k_2$  bekannt sind. Es bleibt also noch anzugeben,

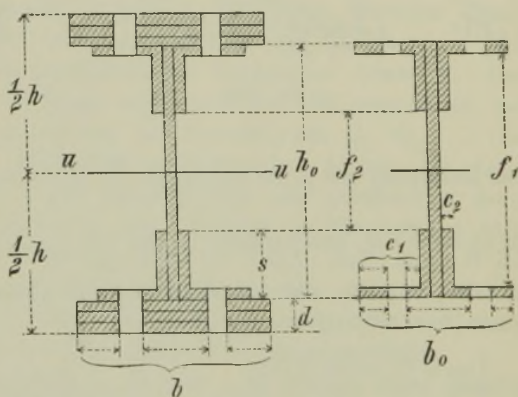


Fig. 184.

Fig. 185.

wie diese Werte von vornherein mit hinreichender Genauigkeit ermittelt werden können. Dazu ist es nötig, auf die Querschnittsberechnung selbst etwas näher einzugehen.

Wir beschränken uns auf die Untersuchung des *Blechträgers*, welcher aus einem *Stegbleche* und den aus *Winkelisen* und *Kopfplatten* zusammengesetzten *Gurtungen* besteht und nehmen zunächst an, es sei der Querschnitt symmetrisch in Bezug auf seine wagerechte Schwerachse  $uu$ , Fig. 184. Die Höhe des Stegblechs möge  $= h_0$ , diejenige des Querschnitts  $= h$  gesetzt werden.

Das auf die  $u$ -Achse bezogene Trägheitsmoment des Querschnitts eines Blechträgers ohne Kopfplatten ist mit den in der Fig. 185 angegebenen Bezeichnungen

$$(1) J_0 = \frac{1}{12} [b_0 h_0^3 - 2c_1 f_1^3 - 2c_2 f_2^3],$$

wobei  $b_0$  und  $c_1$  die betreffenden Breitenabmessungen nach Abzug der Nietdurchmesser bedeuten. Das Widerstandsmoment dieses Querschnittes ist

$$(2) \quad W_0 = \frac{2J_0}{h_0}.$$

Treten Kopfplatten mit dem Gesamteinhalte  $bd = F_k$  für jede Gurtung hinzu, Fig. 184, so wächst (nach Gleich. 2 auf Seite 26) das auf die  $u$ -Achse bezogene Trägheitsmoment des Querschnittes um  $2J_k + 2F_k \left(\frac{h_0 + d}{2}\right)^2$ , wo  $J_k$  das Trägheitsmoment der Fläche  $F_k$  in Bezug auf ihre eigene wagerechte Schwerachse ist. Unter Vernachlässigung des verhältnismäßig kleinen Wertes  $J_k$  ergibt sich für den Querschnitt in Fig. 184

$$J = J_0 + \frac{1}{2} F_k (h_0^2 + 2dh_0 + d^2)$$

und nach Streichung des unwesentlichen Gliedes  $d^2$  und mit Beachtung von  $h_0^2 + 2dh_0 = h_0(h_0 + 2d) = h_0h$

$$(3) \quad J = J_0 + \frac{1}{2} F_k h h_0.$$

Für das Widerstandsmoment des Querschnittes erhält man

$$(4) \quad W = \frac{2J_0}{h} + F_k h_0$$

und hieraus

$$(5) \quad F_k = \frac{W}{h_0} - \frac{W_0}{h}.$$

Ist nun  $M_k$  das größere der beiden auf die Kernpunkte  $k_1$  und  $k_2$  bezogenen Momente  $M_{k_1}$  und  $M_{k_2}$ , so ist bei gegebener zulässiger Spannung  $\sigma$  das erforderliche Widerstandsmoment:  $W = \frac{M_k}{\sigma}$ ,

und es ergibt sich daher zur Berechnung der notwendigen Kopfplatten die Gleichung

$$(6) \quad F_k = \frac{M_k}{\sigma h_0} - \frac{W_0}{h}.$$

Bei größerem Unterschiede zwischen den Momenten  $M_{k_1}$  und  $M_{k_2}$  empfiehlt es sich, die Gurtungen ungleich stark zu machen (Fig. 186). Man findet dann, mit hinreichender Genauigkeit, die erforderlichen Querschnitte ( $F_{k_1} = b_1 d_1$  und  $F_{k_2} = b_2 d_2$ ) der Kopfplatten der unteren, beziehungsweise oberen Gurtung mittels der Gleichungen:

$$(7) \quad \begin{cases} F_{k_1} = \frac{M_{k_2}}{\sigma h_0} - \frac{W_0}{h} \text{ und} \\ F_{k_2} = \frac{M_{k_1}}{\sigma h_0} - \frac{W_0}{h} \end{cases}$$

bei deren Anwendung der Umstand vernachlässigt wird, daß infolge der ungleichen Gurtquerschnitte die  $u$ -Achse nicht mehr die Stegblechhöhle halbiert. Der begangene Fehler ist jedoch gering, und schließlich könnte man nach Berechnung von  $F_{k_1}$  und  $F_{k_2}$

den Schwerpunkt, die Kernpunkte, die Momente  $M_{k_1}$ ,  $M_{k_2}$  und die Spannungen  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  genauer ermitteln und die Unterschiede zwischen den letzteren

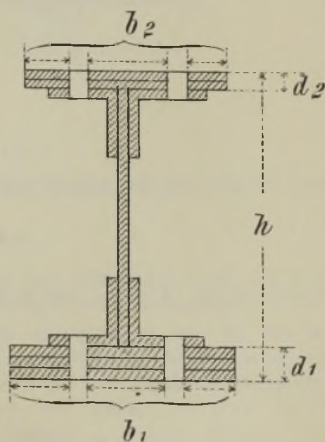


Fig. 186.

und der als zulässig erachteten Spannung feststellen. Der Verfasser hält aber diese umständliche Prüfung für überflüssig und höchstens für geeignet, eine ganz falsche Vorstellung von dem Genauigkeitsgrade der ganzen Rechnung zu erwecken; denn schon die Anwendung der Navier'schen Biegungstheorie auf die Bestimmung der Spannungen  $\sigma$  in Blechträgern ist nur eine Annäherung.

**124. Vorläufige Querschnittsberechnung behufs Bestimmung der Kernlinien.** Die folgenden Untersuchungen beziehen sich auf die im Brückenbau und Hochbau hauptsächlich angewandten symmetrischen flachen Bogenträger. Fig. 187. Um die Querschnittsabmessungen zunächst überschläglich zu berechnen, nehmen wir  $F_{k1} = F_{k2} = F_k$  an und benutzen die Gleichung

$$\sigma = \frac{M}{W} + \frac{N}{F},$$

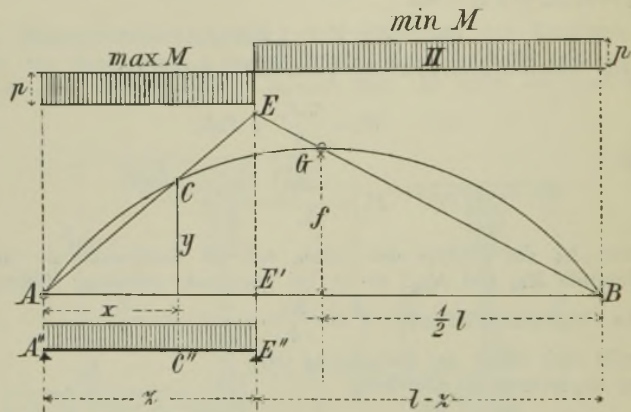


Fig. 187.

aus welcher sich das erforderliche Widerstandsmoment

$$W = \frac{1}{\sigma} (M + Nk)$$

ergibt, wobei  $k = \frac{W}{F}$  den Kernhalbmesser bedeutet, ferner  $N$  die Längskraft und  $M$  das auf den Schwerpunkt des Querschnitts bezogene Angriffsmoment. An die Stelle von  $N$  setzen wir, da es sich nur um eine angenäherte Berechnung handelt,  $H$ , schreiben also

$$(8) \quad W = \frac{1}{\sigma} (M + Hk)$$

und führen in diese Formel den Wert  $H$  für die Stellung der Verkehrslast ein, welche das größte Moment  $M$  hervorbringt. Die Bogenmittellinie nehmen wir parabolisch an, heben jedoch hervor, daß die folgenden Rechnungen auch für flache Kreisbögen brauchbare Ergebnisse liefern. Es ist dann das Moment infolge einer gleichmäßigen und gänzlichen Belastung wegen des Zu-



sammenfallens der Drucklinie mit der Mittellinie des Bogens = 0; es verschwindet der Einfluß der ständigen Belastung  $g$  und es folgt für jeden Querschnitt:

$$\max M = -\min M.$$

Gesucht sei nun  $\max M$  für den Querschnitt  $C$ , Fig. 187. Zur Bestimmung der Belastungsscheide  $E$  dienen (mit den aus der Figur ersichtlichen Bezeichnungen) die Gleichungen

$$\frac{z}{x} = \frac{EE'}{y}; \quad \frac{EE'}{l-z} = \frac{2f}{l}$$

und aus diesen folgt (wegen  $y = \frac{4fx(l-x)}{l^2}$ ):  $z = \frac{l^2}{3l-2x}$ .

Belastet man nur die positive Beitragstrecke  $AE$ , so erhält man nach Seite 185 für den Bogenquerschnitt  $C$  ein Moment, welches eben so groß ist, wie das Moment für den Querschnitt  $C''$  eines einfachen Balkens  $A'E''$ , und es folgt daher für den Fall einer *gleichförmigen* Verkehrslast  $p$

$$(9) \quad \max M = \frac{px(z-x)}{2} = \frac{px(l^2 - 3lx + 2x^2)}{2(3l-2x)} = -\min M.$$

Dieser Ausdruck wird am größten für  $x = 0.234l$ . und zwar ergibt sich für das größte aller Momente der Wert

$$(10) \quad M = 0.039pl^2.$$

Die beiden in der Fig. 187 angegebenen Belastungsfälle (*I*) und (*II*) erzeugen entgegengesetzt gleiche Momente; dem Belastungsfalle *II* entspricht aber der größere Wert  $H$ ; er soll also der weiteren Berechnung zu Grunde gelegt werden. Nach

No. 115 entsteht nun infolge der Verkehrslast  $H = \frac{pl^2}{8f} - \frac{pz^2}{4f}$  und infolge der ständigen Belastung  $H = \frac{gl^2}{8f}$ . Im ganzen erhält man

$$(11) \quad H = \frac{l^2}{8f} \left[ g + p \left( 1 - 2 \frac{z^2}{l^2} \right) \right]$$

und wegen  $z = \frac{l^2}{3l - 2 \cdot 0.234l} = 0.4l$

$$H = \frac{l^2}{8f} (g + 0.68p),$$

wofür (um begangene Fehler auszugleichen) der etwas größere Wert

$$(12) \quad H = \frac{l^2}{8f} (g + \frac{3}{4}p)$$

angenommen werden soll. Die Werte  $M$  und  $H$  aus den Gleich. (10) und (12) werden in die Gleich. (8) eingesetzt, worauf das erforderliche Widerstandsmoment  $W$  berechnet werden kann.

Besteht die veränderliche Belastung aus einem beweglichen Systeme von Einzellasten, so empfiehlt es sich, für den Querschnitt bei  $x = \frac{1}{4}l$  das durch Einzellasten hervorgerufene Moment  $\min M$  zu bestimmen und hierauf diejenige gleichmäßige Belastung  $p$  zu ermitteln, welche dasselbe Moment  $\min M$  hervorbringt. Nun berechne man  $H$  nach Gleichung (12) und setze schließlich die Werte  $\min M$  und  $H$  in die Gleichung (8) ein.

Zur Erläuterung des Verfahrens diene das folgende *Zahlenbeispiel*.

Eine eingleisige Eisenbahn soll mit Hilfe von zwei Bogenträgern über eine 20<sup>m</sup> weite Öffnung geführt werden. Die Bogenmittellinie sei ein Kreisbogen, dessen Pfeil = 2,5<sup>m</sup> ist; die ständige Belastung betrage für beide Träger zusammen  $g = 1,25'$  f. d. Meter.

Zuerst wird die negative Einflußlinie für den bei  $x = 5^m$  gelegenen Bogenquerschnitt  $C$  gezeichnet (Fig. 188) und das Moment  $_{min}M$  bestimmt; es entsteht im vorliegenden Falle, wenn die erste Achse einer von  $B$  aus vorrückenden Lokomotive beim Scheitelgelenk  $G$  liegt. Die Belastungen der 3 Lokomotivachsen werden zur Mittelkraft  $39^t$  vereinigt, desgleichen die Belastungen der 3 Tenderachsen zur Mittelkraft  $27^{t*}$ ). Nach Messung der diesen Kräften entsprechenden Ordinaten  $1,12^m$  und  $0,22^m$  der Einflußlinie ergibt sich (ohne Vorzeichen)

$$M = 39 \cdot 1,12 + 27 \cdot 0,22 = 49,6^{tm}.$$

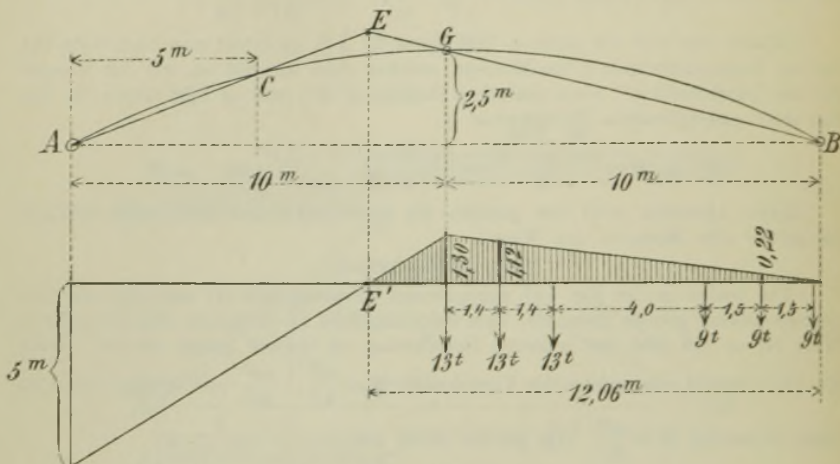


Fig. 188.

Der Inhalt der Einflußfläche ist  $\mathfrak{F} = \frac{1,30 \cdot 12,06}{2} = 7,84^{qm}$ , und es würde daher eine gleichmäßige Belastung das Moment  $M = 7,84 p$  hervorbringen. Aus der Gleichung  $7,84 p = 49,6$  ergibt sich der Belastungsgleichwert  $p = 6,33^t$  f. d. Meter, und es folgt nun

$$H = \frac{l^2}{8f} (g + \frac{3}{4} p) = \frac{20^2}{8 \cdot 2,5} (1,25 + \frac{3}{4} \cdot 6,33) = 120^t.$$

Wird  $M$  auf  $5000000^{kcm}$  abgerundet, so ist für jeden der beiden Bogenträger zu setzen:

$$M = 2500000^{kcm} \text{ und } H = 60000^{kg}$$

und es ergibt sich daher, wenn die Spannung  $\sigma = 700^k$  f. d.  $qcm$  zugelassen wird:

$$W = \frac{1}{710} (2500000 + 60000 k).$$

\*) Dies ist selbstverständlich nur zulässig, wenn die zu vereinigenden Lasten innerhalb einer Strecke liegen, für welche die Einflußlinie eine Gerade ist.

Es empfiehlt sich, den Kernhalbmesser  $k$  zunächst  $= \frac{5}{12} h_0$  abzuschätzen, wobei  $h_0 =$  Stegblechhöhe. Wird  $h_0 = 50 \text{ cm}$  gewählt, so folgt  $k = \frac{5}{12} \cdot 50 = 21 \text{ cm}$  und  $W = 5370$ .

Werden gleichschenklige Winkleisen mit  $s = 9 \text{ cm}$  und  $c_2 = 1,2 \text{ cm}$  angenommen (vergl. Fig. 184 und 185), ferner ein  $1 \text{ cm}$  starkes Stegblech und Niete von  $2,4 \text{ cm}$  Dicke, so ergibt sich nach Gleich. (1 und 2):  $W_0 = 1772$  und nach Gleich. (5):  $F_k = \frac{W}{h_0} - \frac{W_0}{h}$ , woraus dann mit  $F_k = b d$  (vergl. Fig. 184)

$$b = \frac{1}{d} \left( \frac{W}{h_0} - \frac{W_0}{h_0 + 2d} \right) = \frac{1}{d} \left( \frac{5370}{50} - \frac{1772}{50 + 2d} \right).$$

Bei Annahme von drei  $1,2 \text{ cm}$  starken Platten ist  $d = 3,6 \text{ cm}$  und

$$b = \frac{1}{3,6} \left( \frac{5370}{50} - \frac{1772}{57,2} \right) = 21,2 \text{ cm},$$

so daß die erforderliche Plattenbreite (wegen des Zuschlags von 2 Nietdurchmessern)  $= 21,2 + 2 \cdot 2,4 = 26 \text{ cm}$  beträgt. Der Inhalt des ganzen Querschnitts ist mit Berücksichtigung der Schwächung durch Niete:  $F = 21,2 \cdot 1,2 \cdot 6 + 1,2 (9 + 9 - 1,2 - 2,4) 4 + 50 = 272,9 \text{ cm}^2$  und für den Kernhalbmesser erhält man:

$$k = \frac{W}{F} = \frac{5370}{272} = 20 \text{ cm}^*.$$

Wegen der geringen Abweichung dieses Wertes  $k$  von dem zuerst geschätzten  $k = 21 \text{ cm}$  darf von einer Wiederholung der Berechnung von  $W$ ,  $F$  und  $k$  abgesehen und die ausführliche Berechnung des Bogens unter der Annahme zweier Kernlinien durchgeführt werden, welche von der Mittellinie den konstanten Abstand  $k = 20 \text{ cm}$  haben.

\*) Berechnet man  $W$  in ähnlicher Weise wie  $W_0$  (Gleichung 1 und 2), so erhält man  $W = 5388$ , ein Wert, der von dem mit Hilfe der Näherungsformel:

$$W = h_0 \left[ \frac{W_0}{h} + F_k \right] \text{ gefundenen } W = 5370 \text{ fast gar nicht abweicht. Hervorzu-}$$

heben ist, daß die Gleichungen 1 und 2 ebenfalls nur Näherungswerte liefern, da sie die Abrundungen der Winkleisen nicht berücksichtigen.

## VIII. Abschnitt.

## Einleitung in die Theorie des ebenen Fachwerks.

### § 25.

#### Erklärungen und Voraussetzungen.

125. Unter einem *ebenen Fachwerk* versteht man ein Gebilde aus Stäben, welche in ihren Endpunkten durch reibungslose Gelenke miteinander verbunden sind, und deren Achsen (Mittellinien) in ein und derselben Ebene liegen. Die Untersuchung derartiger Fachwerke soll hier unter der Annahme erfolgen, daß es zulässig ist, die durch die Elastizität der Fachwerksstäbe und der das Fachwerk stützenden Körper verursachten Formänderungen als verschwindend klein anzusehen und infolgedessen bei der Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen alle Kräfte in denjenigen Lagen zu denken, welche sie im Falle *starrer* Stäbe und Stützen einnehmen würden.

Zunächst werde vorausgesetzt, daß alle äußeren Kräfte in den Knotenpunkten, d. h. in den Punkten, in denen sich die Gelenke befinden, angreifen. Zerlegt man dann das Fachwerk durch einen Schnitt *tt* in zwei Teile (Fig. 189) und bringt, damit der eine der beiden Teile, z. B. der linke, für sich im Gleichgewichte ist, an den Schnittstellen Kräfte an, welche der Wirkung des weggenommenen rechten Teiles gleichwertig sind, so müssen diese Kräfte mit den Achsen der Stäbe zusammenfallen, weil sie sonst die Stäbe um die an ihren Enden angeordneten Gelenke drehen würden, und hieraus folgt, daß alle Stäbe nur durch Längskräfte beansprucht werden. Wir nennen diese Kräfte *Spannkräfte* und werden sie als positiv oder negativ bezeichnen, je nachdem sie in den Stabquerschnitten Zug- oder Druckspannungen hervorrufen.

In den Untersuchungen dieses Abschnitts setzen wir alle äußeren Kräfte als bekannt voraus, indem wir uns die durch die gegebenen Lasten hervorgerufenen Stützenwiderstände auf irgend welche Weise gefunden denken. Für die wichtigsten Fälle äußerlich statisch bestimmter Träger, nämlich für den *einfachen Balken*, den *Gerberschen Balken* und den *Bogen mit 3 Gelenken* sind diese Widerstände in den



Abschnitten V bis VII bestimmt worden. Die dort mitgeteilten Verfahren gelten sowohl für Träger aus vollwandigen, als auch für solche aus gegliederten Scheiben, wenn nur die gegliederten Scheiben starr sind. Man vergleiche die Untersuchungen im § 13 (No. 59 bis 61). Werden die Stäbe, aus denen die dort erwähnten gegliederten Scheiben bestehen, in ihren Endpunkten gelenkartig miteinander verbunden (was in diesem Abschnitte stets vorausgesetzt werden soll), so sind diese Scheiben Fachwerke. Lassen sich die Spannkraften in sämtlichen Stäben einer Scheibe lediglich mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen finden, so bezeichnen wir die Scheibe als *statisch bestimmt*.

Der einfachste Fall einer starren gegliederten Scheibe, d. h. einer Scheibe, deren Knotenpunkte sich gegeneinander nicht verschieben können, ist das in der Fig. 189 dargestellte *Dreiecknetz*. Dieses entsteht, wenn Dreiecke so aneinander gereiht werden, daß jedes Dreieck nur mit dem vorhergehenden und nachfolgenden eine Seite gemein hat. Die Ermittlung der Spannkraften im Dreiecknetz gestaltet sich besonders einfach, und da bei weitem die Mehrzahl der ausgeführten ebenen Fachwerkträger aus Dreiecknetzen besteht, so erscheint es angemessen, zunächst die Theorie dieses wichtigen Stabgebildes zu entwickeln, bevor auf die allgemeinere Untersuchung gegliederter Scheiben eingegangen wird.

Die Stabreihen, welche das in einer lotrechten Ebene gedachte *Dreiecknetz* nach oben und unten begrenzen, heißen die *Gurtungen*; ihre Spannkraften sollen mit  $O$  (obere Gurtung) und  $U$  (untere Gurtung) bezeichnet werden; vergl. Fig. 189. Die Stäbe, welche die Gurtungen miteinander verbinden, werden *Gitterstäbe*, *Wandglieder*, *Füllungsstäbe* genannt, auch *Diagonalen* (*Schrägen*) oder *Vertikalen* (*Pfosten*), je nachdem sie schräg oder senkrecht stehen; ihre Spannkraften bezeichnen wir mit  $D$  und  $V$ . Zuweilen aber wird in der Folge für sämtliche Spannkraften das Zeichen  $S$  gewählt werden, oder es werden die Stäbe und Spannkraften durch Ziffern bezeichnet.

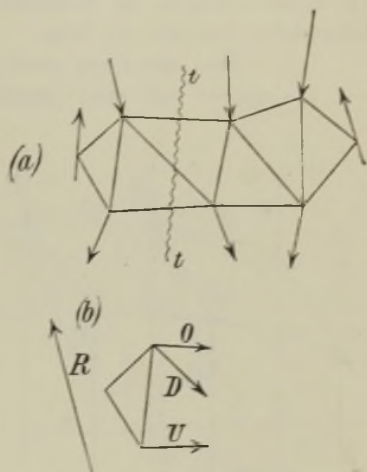


Fig. 189 a u. b.

## § 26.

### Bestimmung der Spannkkräfte im Dreiecknetz nach den Verfahren von *Culmann* und *Ritter*.

126. Das *Culmannsche* Verfahren. Durch ein einfaches Dreiecknetz (Fig. 189) sei ein Schnitt  $tt$  geführt, welcher drei Stäbe trifft, deren Mittellinien sich nicht in einem Punkte schneiden und deren Spannkkräfte gleich  $O$ ,  $U$  und  $D$  seien. Die Mittelkraft aus den links von  $tt$  angreifenden äußeren Kräften sei  $= R$ ; sie muß mit den inneren Kräften  $O$ ,  $U$ ,  $D$  im Gleichgewichte sein, und man hat daher, um diese letzteren zu bestimmen, nur nötig, die in No. 12 auf Seite 15 behandelte Aufgabe zu lösen:

*Drei der Lage nach gegebene Kräfte  $O$ ,  $D$  und  $U$  zu finden, welche mit einer gegebenen Kraft  $R$  im Gleichgewicht sind.*

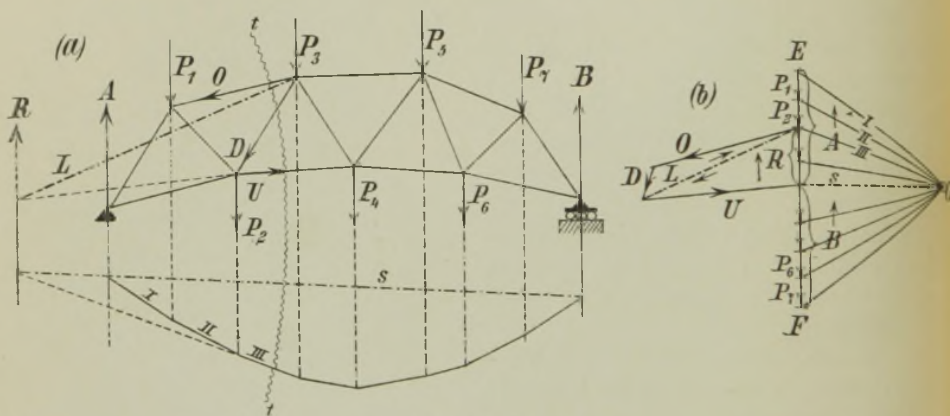


Fig. 190 a u. b.

Sollen beispielsweise nach diesem zuerst von *Culmann* angegebenen Verfahren die Spannkkräfte  $O$ ,  $D$ ,  $U$  für den in Fig. 190 dargestellten einfachen Fachwerkbalken, welcher durch senkrechte Lasten  $P$  beansprucht wird, bestimmt werden, so reihe man zunächst die Lasten auf einer Senkrechten  $EF$  aneinander, zeichne mit beliebigem Pole  $O$  ein Seilpolygon, trage die Schlußlinie  $s$  ein und ziehe durch  $O$  eine Parallele zu  $s$ ; diese zerlegt  $FE$  in die Stützenwiderstände  $A$  und  $B$ . Die Mittelkraft aus den links von  $tt$  angreifenden äußeren Kräften ist

$$R = A - P_1 - P_2;$$

sie geht durch den Schnittpunkt der Seilpolygonseiten  $s$  und  $III$ , und

ist nach oben gerichtet, sobald, wie in Fig. 190,  $A > P_1 + P_2$  ist. Nach Bestimmung von  $R$  bringe man je zwei der vier Kräfte  $R, O, D, U$  miteinander zum Schnitt, beispielsweise  $O$  mit  $D$  und  $R$  mit  $U$ , verbinde die Schnittpunkte durch die Gerade  $L$ , zerlege  $R$  nach den Richtungen von  $L$  und  $U$ , hierauf die Hilfskraft  $L$  nach den Richtungen von  $D$  und  $O$  und versehe schließlich die Seiten des aus den Kräften  $R, O, D$  und  $U$  gebildeten Polygons so mit Pfeilen, daß der Umfuhungssinn ein stetiger ist. Indem man nun  $O, D$  und  $U$  an den durchschnittenen Stäben des linken Balkenteiles in dem durch die entsprechenden Pfeile des Kräftepolygons gegebenen Sinne anbringt, erfährt man, daß im vorliegenden Falle die Kräfte  $O$  und  $D$  Druckspannungen erzeugen, während  $U$  Zugspannungen hervorruft.

Wird nur die eine der drei Spannkraften gesucht, beispielsweise  $D$ , so bringe man diese Kraft mit  $R$  in  $e$  zum Schnitt, Fig. 191, verbinde  $e$  mit dem Schnittpunkte  $C$  der beiden anderen Spannkraften ( $O$  und  $U$ ) durch die Gerade  $L'$ , zerlege  $R$  nach den Richtungen von  $L'$ , und  $D$  und versehe schließlich das Kräftepolygon  $RL'D$  so mit Pfeilen, daß der Umfuhungssinn ein stetiger ist. Bei weit abliegendem Schnittpunkte  $e$  ist jedoch diese unmittelbare Bestimmung von  $D$  un bequem; sie wird unmöglich, sobald  $R$  und  $D$  parallel sind.

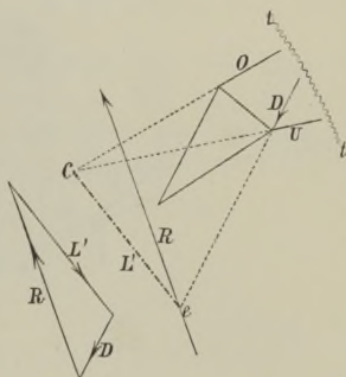


Fig. 191.

**127. Das Rittersche Verfahren.** Jede der Spannkraften  $O, D, U$  in den vom Schnitte  $tt$  (Fig. 189) getroffenen Fachwerkstäben läßt sich auch mittels *einer* aus dem Satze von den statischen Momenten gefolgerten Gleichung bestimmen. Denn, wählt man den Schnittpunkt von irgend zweien der drei Spannkraften zum Drehpunkte und setzt die Summe der statischen Momente sämtlicher Kräfte gleich Null, so erhält man eine Gleichung, in der nur *eine* unbekannte Spannkraft vorkommt, weil die statischen Momente der durch den Drehpunkt gehenden Spannkraften gleich Null sind. Bei diesem Verfahren werden zuerst alle Spannkraften als Zugkräfte betrachtet; ergibt sich für die Spannkraft eines Stabes ein negativer Wert, so ist der Pfeil dieser Kraft umzukehren; sie ruft dann Druckspannungen hervor.

Es möge diese Bestimmungsweise der Spannkraften an dem bereits vorhin nach dem Culmannschen Verfahren untersuchten Fachwerkbalken erläutert werden. Um zunächst  $U$  zu ermitteln, wird der Schnittpunkt  $a$







Wird schließlich der Schnittpunkt  $c$  von  $O$  und  $U$  zum Drehpunkte gewählt, so folgt, da die Spannkraft  $D$  als Zugkraft links um  $c$  dreht, die Gleichung:  $M_c - Dr_c = 0$  und hieraus:  $D = + \frac{M_c}{r_c}$ .

Das Moment  $M_c$  ist nach dem in No. 15 bewiesenen Satze gleich dem Produkte  $Hy_c$  aus der Polweite  $H$  und der Strecke  $y_c$ , welche die Seilpolygonseiten  $III$  und  $s$  (d. s. die äußersten in Bezug auf die Kräftegruppe  $A, P_1, P_2$ ) auf einer durch den Drehpunkt  $c$  zur Mittelkraft  $R$  gezogenen Parallelen abschneiden. Im vorliegenden Falle ist  $y_c$  negativ, und es ergibt sich daher

$$D = -H \frac{y_c}{r_c}.$$

Die Spannkraften  $O$  und  $D$  können nun auf dieselbe Weise durch Zeichnung bestimmt werden wie die Kräfte  $U$ .

Wirken auf den einfachen Fachwerkbalken nur senkrechte, abwärts gerichtete Lasten, so sind die Momente  $Hy_a$  und  $Hy_b$  stets positiv. Die obere Gurtung wird in diesem Falle nur gedrückt, die untere Gurtung nur gezogen. Die größten Spannkraften in den Gurtungen entstehen bei gänzlicher Belastung.

Trifft der durch ein Wandglied geführte Schnitt  $tt$  zwei Gurtstäbe, deren Schnittpunkt  $C$  innerhalb der Stützweite liegt (Fig. 193), so ist auch  $y_c$  bei senkrechten, abwärts gerichteten Lasten stets positiv. Das fragliche Wandglied wird dann stets in demselben Sinne beansprucht; es wird entweder nur gezogen oder nur gedrückt; seine größte Inanspruchnahme erfolgt bei gänzlicher Belastung des Balkens.

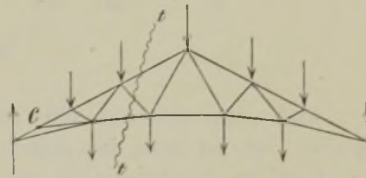


Fig. 193.

Für die späteren Untersuchungen ist es noch wichtig, hervorzuheben, daß die Spannkraft  $D$  in einem Wandgliede = Null wird, sobald die Mittelkraft  $R$  (Fig. 191) aus den links von  $tt$  wirkenden äußeren Kräften durch den Schnittpunkt der vom Schnitte  $tt$  getroffenen Gurtstäbe  $O$  und  $U$  geht, weil dann  $L'$  mit  $R$  zusammenfällt.

## § 27.

## Die Kräftepläne Cremonas.

128. Die auf irgend einen Knotenpunkt eines starren Fachwerks wirkenden äußeren und inneren Kräfte sind miteinander im

Gleichgewicht und lassen sich deshalb zu einem geschlossenen Polygone mit stetigem Umlaufungssinne zusammensetzen. Dieses Kräftepolygon ist bestimmt, sobald nicht mehr als zwei jener Kräfte unbekannt sind. Kennt man z. B. für den in der Fig. 194 dargestellten Fall die Spannkraften  $S_1$ ,  $S_2$  und die Mittelkraft  $P$  der im fraglichen Knotenpunkte angreifenden äußeren Kräfte, so hat man nur nötig, diese Kräfte in irgend einer Reihenfolge zu einem stetigen Kräftezuge  $ABCD$  aneinander zu setzen und durch den Anfangspunkt  $A$  und den Endpunkt  $D$  Parallelen ( $AE$  und  $DE$ ) zu den Richtungen der Stäbe 3 und 4 zu ziehen. Man erhält dann das geschlossene Kräftepolygon  $ABCDEA$ , dessen letzte Seiten  $DE$  und  $EA$  nach Größe, Richtung und Sinn die Spannkraften  $S_3$  und  $S_4$  darstellen. Im vorliegenden Falle findet man, daß die Stäbe 3 und 4 auf Druck beansprucht werden.

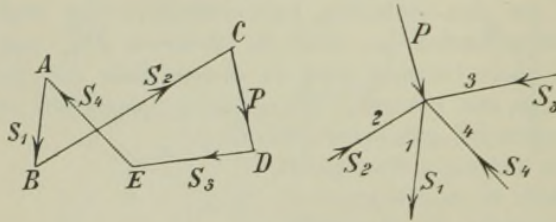


Fig. 194.

Sind nun die auf ein Dreiecknetz wirkenden äußeren Kräfte gegeben, so ist man im stande, der Reihe nach die Kräftepolygone für sämtliche Knotenpunkte zu zeichnen, indem man bei einem der beiden Knotenpunkte beginnt, von welchem nur zwei Stäbe ausgehen. Hervorzuheben ist, daß sich beim Dreiecknetz die einzelnen Kräftepolygone so aneinander reihen lassen, daß jede Kraft nur einmal in der Figur vorkommt. Die auf diese Art erhaltenen Kräftepläne sollen als *Cremonasche Pläne* bezeichnet werden, weil *Cremona* zuerst in allgemeiner Weise auf die bemerkenswerten Eigenschaften derselben aufmerksam machte.

**129. Beliebiges, einfaches Dreiecknetz.** In den Knotenpunkten  $1', 2', 3' \dots$  eines einfachen Dreiecknetzes (Fig. 195) mögen irgendwelche miteinander im Gleichgewichte befindliche Kräfte  $P_1, P_2, P_3 \dots$  angreifen. Es entspricht ihnen dann ein geschlossenes Polygon, in welchem die Kräfte  $P$  dieselbe Reihenfolge haben mögen, in der man ihnen bei Umlaufung des Randes  $1', 2', 3' \dots$  begegnet. Die Eckpunkte dieses Kräftepolygons seien mit  $(8'1'), (1'2'), (2'3'), \dots$  bezeichnet, so zwar, daß beispielsweise die Ecke  $(4'5')$  von den Kräften  $P_4$  und  $P_5$  gebildet wird.

Um den Kräfteplan zu zeichnen, beginnt man beim Knotenpunkte 1 und bestimmt die Spannkkräfte 1 und 8 in den Stäben 1 und 8, indem

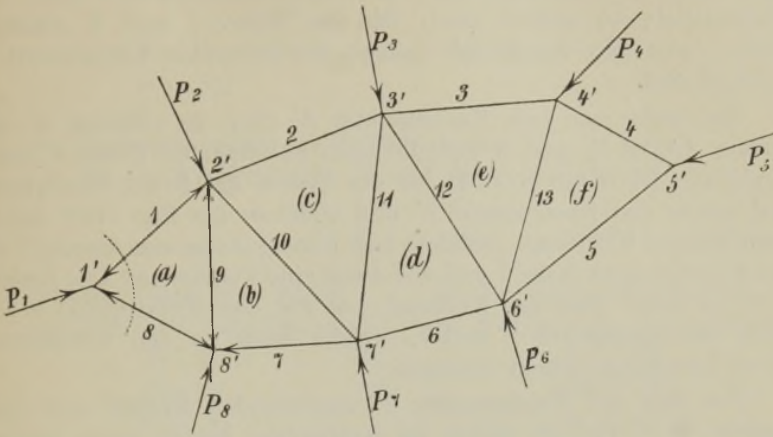


Fig. 195 I.

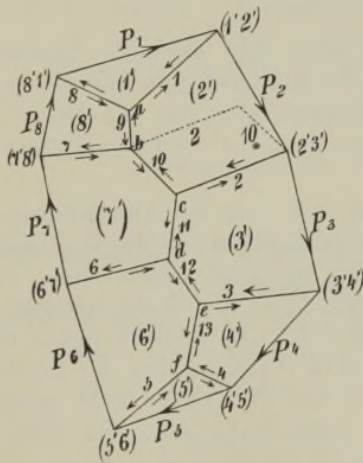


Fig. 195 II.

man zu den Mittellinien dieser Stäbe durch die Endpunkte (1' 2') und (8' 1') der Kraft  $P_1$  Parallelen zieht. Man erhält ein Kräfte-dreieck mit dem in der Fig. 195 II durch Pfeile, die innerhalb des Dreiecks stehen,



angegebenen Umfassungssinn; es liefert nach Größe, Richtung und Sinn die Spannkkräfte 1 und 8. Denkt man den Knotenpunkt 1' durch den in der Fig. 195<sup>I</sup> angedeuteten Schnitt vom Fachwerk abgetrennt und überträgt die Pfeile des Kräftedreiecks nach den Schnittstellen, so erfährt man, daß die Stäbe 1 und 8 gedrückt werden, weil ihre Spannkkräfte gegen den ruhenden Knotenpunkt 1' gerichtet sind.

Nun geht man zum Knotenpunkte 8' über, an welchem die gegebenen Kräfte  $P_8$  und 8 und die noch unbekanntten Kräfte 9 und 7 angreifen. Die Kraft 8 wirkt, da der Stab 8 auf Druck beansprucht wird, gegen den Knotenpunkt 8' und bildet in der Fig. 195<sup>II</sup> mit  $P_8$  einen stetigen Kräftezug. Schließt man diesen, indem man durch (7'8') eine Parallele zum Stabe 7 und von  $a$  aus eine Parallele  $ab$  zum Stabe 9 zieht, so erhält man das Kräftepolygon für den Knotenpunkt 8'; es liefert die Spannkkräfte 9 und 7, welche beide in den betreffenden Stäben Druckspannungen erzeugen.

Von den am Knotenpunkte 2' angreifenden Kräften sind jetzt gegeben: 9, 1,  $P_2$ ; sie bilden im Kräfteplane bereits einen stetigen Zug, welcher durch Parallelen zu den beiden gesuchten Spannkkräften 2 und 10 geschlossen wird. Die Parallele zu 2 muß durch den Punkt (2'3') gezogen werden, die Parallele zu 10 durch den Punkt  $b$ .

So fortfahrend, kann man sämtliche Spannkkräfte finden, indem man der Reihe nach die Kräftepolygone für die Knotenpunkte 7', 3', 6', 4' zeichnet. Das Kräftepolygon für den letzten Knotenpunkt 5' ist bereits durch die den Knoten 4' und 6' entsprechenden Polygone (4') und (6') bestimmt.

Zu beachten ist, daß man bei Aufzeichnung des Kräftepolygons für irgend einen Knotenpunkt schon das dem nächsten Knotenpunkte entsprechende Polygon ins Auge fassen muß. So könnte man z. B. das Kräftepolygon für 2' in der Weise zeichnen, daß man den gegebenen Kräftezug 9 — 1 —  $P_2$  schließt, indem man die Parallele zu 10 durch den Punkt (2'3') zieht und die Parallele zu 2 durch den Punkt  $b$ , wie dies in der Fig. 195<sup>II</sup> durch gestrichelte Linien angedeutet worden ist. Dann müßte man aber beim Zeichnen des Polygons für 7' die Kraft 10 an die Kraft 7 setzen, da hier die gegebenen Kräfte  $P_7$ , 7 und 10 aneinander gereiht werden müssen, und bei Konstruktion des Polygons für 3' müßte man 2 an  $P_3$  setzen, da hier die Kräfte 11, 2,  $P_3$  gegeben sind.

Derartige Überlegungen werden überflüssig, wenn man die folgenden Beziehungen zwischen den Figuren 195<sup>I</sup> und 195<sup>II</sup> beachtet.



<p>1. In der Figur 195<sup>I</sup> verbindet der zum Rande des Fachwerks gehörende</p> <p>Stab 1 die Knoten 1' und 2', der " 2 " " 2' " 3', " " 3 " " 3' " 4', u. s. w.</p>	<p>In der Figur 195<sup>II</sup> geht</p> <p>Kraft 1 durch den Punkt (1' 2') " 2 " " " (2' 3') " 3 " " " (3' 4') u. s. w.</p>
---	---

Infolgedessen haben die Kräftepolygone für die Knotenpunkte 1' und 2' die Seite 1 gemein,  
" " " 2' " 3' " " 2 " " ,  
" " " 3' " 4' " " 3 " " , u. s. w.

<p>2. In der Figur 195<sup>I</sup> bilden die Stäbe 1, 9, 8 das Dreieck (a), " " 9, 7, 10 " " (b), " " 10, 2, 11 " " (c), u. s. w.</p>	<p>In der Fig. 195<sup>II</sup> schneiden sich die Kräfte 1, 9, 8 im Punkte a, " " 9, 7, 10 " " b, " " 10, 2, 11 " " c, u. s. w.</p>
--	--

<p>In der Fig. 195<sup>I</sup> verbindet</p> <p>Stab 9 die Punkte 8' und 2', " 10 " " 2' " 7', " 11 " " 7' " 3', u. s. w.</p>	<p>In der Figur 195<sup>II</sup> haben die Kräftepolygone (8') und (2') die Seite 9 gemein, (2') " (7') " " 10 " " , (7') " (3') " " 11 " " , u. s. w.</p>
---	--

Die Punkte a, b, c, . . . . nennen wir die Pole der Dreiecke (a), (b), (c) . . . .

<p>In der Figur 195<sup>I</sup> trennt der</p> <p>Stab 9 die Dreiecke (a) u. (b), " 10 " " (b) " (c), " 11 " " (c) " (d), u. s. w.</p>	<p>In der Fig. 195<sup>II</sup> verbindet die Spannkraft 9 die Pole a und b, 10 " " b " c, 11 " " c " d, u. s. w.</p>
--	---

Sind die Spannkraften in sämtlichen Wandgliedern gleich Null, so fallen die Pole a, b, c, . . . . zusammen; es bilden dann die Gurtungen ein Seilpolygon für die Kräfte P<sub>1</sub>, P<sub>2</sub>, P<sub>3</sub> . . . .

Um Cremonasche Kräftepläne schnell zeichnen zu können, genügt bereits die Beachtung der in liegender Schrift angeführten Beziehungen. Gute Dienste leistet auch die Regel: Die an einem Knotenpunkte angreifenden Kräfte müssen stets in der Reihenfolge aneinandergesetzt

werden, in der man ihnen bei Umkreisung des Knotenpunktes begegnet. Hierbei sind die äußeren Kräfte (wie in Fig. 195<sup>I</sup>) immer außerhalb des Randes liegend zu denken. Beispielsweise sind die auf den Knotenpunkt 2' wirkenden Kräfte in der Reihenfolge 9, 1,  $P_2$ , 2, 10 zu nehmen, nicht etwa in der Reihenfolge 9, 1,  $P_2$ , 10, 2, welche letztere die in der Fig. 195<sup>II</sup> durch gestrichelte Linien angedeutete, unbrauchbare Lösung geben würde.

### Anwendungen.

Die Tafel 2 enthält Cremonasche Kräftepläne für eine Reihe von Dreiecknetzen. Zu ihrer Erläuterung werden kurze Bemerkungen genügen; doch wird dem Anfänger empfohlen, jeden Kräfteplan, von Knotenpunkt zu Knotenpunkt vorgehend, nachzuzeichnen und den Umfahrungssinn jedes einzelnen Kräftepolygons festzustellen.

Die Pläne sind zur besseren Übersicht in drei Farben ausgeführt worden. Für die Spannkkräfte und Stäbe der oberen Gurtung wurden blaue Linien gewählt, für die untere Gurtung rote und für die Füllungsstäbe schwarze Linien.

**130. Fachwerkbalken mit wagerechter oberer Gurtung. (Fischbauchträger.)** Fig. 196 auf Tafel 2. Die Lasten mögen ausschließlich in den Knotenpunkten der oberen Gurtung angreifen. Der Träger habe 8 gleichlange Felder und sei symmetrisch in Bezug auf die Senkrechte durch die Mitte. Jedes Feld sei gleichmäßig mit  $2P$  belastet. Dann kommt auf jeden Knotenpunkt die Last  $2P$ , mit Ausnahme der mit den Stützpunkten zusammenfallenden Knotenpunkte; diese werden mit  $P$  belastet. Jeder Stützenwiderstand ist  $= 8P$ , so daß an jedem Stützpunkte die Kraft  $7P$ , nach oben gerichtet, angreift. Es genügt, den Kräfteplan für die eine Hälfte zu zeichnen.

In der Figur 196b ist  $ib'b''b''' \dots$  das Polygon der äußeren Kräfte. Nach Ziehen von  $b'a \parallel O_1$  und  $ia \parallel U_1$  findet man in  $a$  den Pol des Dreiecks  $I II III$ . Nun werden die Parallelen zu  $O_2, O_3 \dots$  gezogen, ferner die Parallelen zu  $U_2, U_3 \dots$ . Die ersteren gehen durch die Eckpunkte  $b''b''' \dots$  des Polygons der äußeren Kräfte, und die letzteren bilden, da in den Knotenpunkten der unteren Gurtung keine Lasten angreifen, einen Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt  $i$  ist. Vom Pole  $a$  aus wird ein Linienzug  $abcdefgh$  gezeichnet, dessen Seiten der Reihe nach parallel zu  $V_1, D_2, V_2, D_3, V_3, D_4, V_4$  sind, und dessen Eckpunkte abwechselnd auf einer roten und einer blauen Linie liegen. Eine Ausnahme bildet die zu  $V_4$  parallele Seite  $gh$ , welche von  $O_4$  zu  $O'_4$  geht, da die Spannkraft  $V_4$  im Knotenpunkte  $VIII$  mit  $O_4, O'_4$  und  $2P$  im Gleichgewichte ist, mithin mit diesen drei Kräften ein geschlossenes

Polygon bilden muß. Aus dem Umfassungssinn der einzelnen Kräftepolygone findet man, daß sämtliche Stäbe der oberen Gurtung gedrückt und sämtliche Stäbe der unteren Gurtung gezogen werden. Zur Feststellung des Vorzeichens der Spannkkräfte  $V$  und  $D$  ergibt sich bei der hier gewählten Anordnung des Kräfteplanes die einfache Regel:

*Versieht man, vom Anfangspunkte  $a$  ausgehend, den Linienzug  $abedefgh$  so mit Pfeilen, daß der Umfassungssinn  $ab - bc - cd - de - \dots$  nicht unterbrochen wird, so geben diese Pfeile an, in welchem Sinne die Kräfte  $V$  und  $D$  an den Knotenpunkten der unteren Gurtung angreifen.*

Man findet auf diese Weise, daß in Fig. 196 sämtliche Vertikalen gedrückt und sämtliche Diagonalen gezogen werden.

**131. Fachwerkbalken mit wagerechter unterer Gurtung. (Bogen-sehnenträger.)** Fig. 197 auf Tafel 2. Es mögen nur in den Knotenpunkten der unteren Gurtung Lasten angreifen. Belastung eines Knotenpunktes  $= 2P$ . An den Stützpunkten greifen die Widerstände  $7P$  an. Man macht  $\overline{b'i} = 7P$ , zieht  $ia \parallel O_1$  und  $b'a \parallel U_1$  und zeichnet dann für den ersten Knotenpunkt der unteren Gurtung das aus  $2P = \overline{b''b'}$ ,  $U_1 = \overline{b'a}$ ,  $V_1 = \overline{ab}$  und  $U_2 = \overline{bb''}$  bestehende Kräftepolygon. Nun werden die Parallelen zu den Richtungen  $U_2$ ,  $U_3$  und  $U_4$  der Stäbe der belasteten Gurtung so gezogen, daß diese Parallelen auf der Senkrechten  $ib'$  die Kräfte  $2P$  abschneiden, ferner durch den Punkt  $i$  Parallelen zu den Richtungen  $O_2$ ,  $O_3$ ,  $O_4$  und  $O'_4$  der Stäbe der unbelasteten Gurtung. Der aus den Spannkkräften  $V_1$ ,  $D_2$ ,  $V_2$ ,  $D_3$ ,  $V_3$ ,  $D_4$  bestehende Linienzug  $abcd \dots g$  wird nun so eingetragen, daß die Eckpunkte  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$ ,  $f$ ,  $g$  wechselweise auf den roten Linien  $U$  und den blauen Linien  $O$  liegen, und schließlich wird  $\overline{gh} \parallel V_4$  gemacht. Von  $a$  ausgehend werden die Seiten des Polygonzuges  $abcd \dots$  mit Pfeilen versehen. Diese Pfeile geben an, in welchem Sinne die Kräfte  $V$  und  $D$  an den Knotenpunkten der unteren Gurtung angreifen. Man findet, daß  $V_1$  und  $V_4$  positiv sind, weil Zugspannungen erzeugend, dagegen  $V_2$  und  $V_3$  negativ. Die Spannkkräfte  $D$  sind durchweg positiv. Die obere Gurtung wird gedrückt, die untere gezogen.

**132. Englischer Dachstuhl mit gezogenen Diagonalen** (Fig. 198 auf Tafel 2), (Zahlenbeispiel). Die einzelnen Dachbinder sind einander parallel und in  $5,1^m$  Abstand angenommen. Stützweite  $24^m$ , Feldweite  $3,0^m$ . Die senkrecht wirkende Belastung besteht für das Quadratmeter der Horizontalprojektion der Dachfläche aus

$54^k$  Eigengewicht (Deckung: Schiefer auf Winkeleisen).

$75^k$  Schneelast.



$120 \sin^2(\beta + 10)^{kg}$  senkrechte Seitenkraft des Winddruckes\*)  
 $\beta =$  Neigungswinkel der oberen Gurtung.  $tg\beta = \frac{4,8}{12} = 0,4$ , also  
 $\beta = 22^\circ$  und  $\sin(\beta + 10) = 0,53$ . Daher Windbelastung

$$120 \cdot 0,53^2 = 34^{kg}$$

und Gesamtbelastung  $54 + 75 + 34 = 163^{kg} = 0,163^t$ . Somit kommen auf jeden Knotenpunkt

$$0,163 \cdot 5,1 \cdot 3,0 = 2,5^t$$

Die wagerechte Seitenkraft des Winddruckes darf bei der geringen Neigung der Dachfläche vernachlässigt werden, weil der größte Winddruck und die größte Schneelast kaum gleichzeitig auftreten werden. Hingegen werden beide Dachhälften mit dem senkrechten Winddrucke von  $34^k$  belastet gedacht.

An jedem Stützpunkte greift die Kraft  $A = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 2,5^t$  (nach oben gerichtet) an.

Die Parallelen zu den Spannkräften in der oberen, belasteten Gurtung schneiden auf dem Kräftezuge die Knotenpunktlasten ab. Die Parallelen zu den Spannkräften in der unteren, unbelasteten Gurtung gehen durch denselben Punkt; sie decken sich, da sie einerlei Richtung haben. Die Parallelen zu den Spannkräften in den Gitterstäben bilden einen bei  $a$  beginnenden zusammenhängenden Linienzug.

Nach Messung der Spannkräfte wurden die Ergebnisse in die rechte Hälfte der Figur 198a eingetragen.

**133. Binder eines Pultdaches** (Fig. 199a auf Tafel 2). Der einer gleichförmigen gänzlichen Belastung entsprechende Kräfteplan (Fig. 199b) wurde ähnlich wie vorhin gezeichnet. Die Füllungsstäbe: 1, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 13 werden bei den hier gewählten Verhältnissen gedrückt, die Füllungsstäbe: 2, 4, 6, 11 gezogen. Obere Gurtung gedrückt, untere Gurtung gezogen.

**134. Kräfteplan für den Dachstuhl in Fig. 200 auf Tafel 2.** Der in Fig. 200a dargestellte Dachbinder hat bei  $b$  ein festes Auflager und wird bei  $a$  durch eine Strebe gestützt. Ist bei  $D$  ein Gelenk angeordnet, so wirkt der Stützenwiderstand  $A$  in der Richtung der Strebe, und es muß dann der Widerstand  $B$  des rechten Auflagers durch den Schnittpunkt  $C$  der Strebe mit der Mittelkraft  $12P$  aus den Belastungen gehen. Nach Bestimmung von  $A$  und  $B$  (Fig. 200b) wird  $A$  mit der im Knotenpunkte  $a$  (Fig. 200a) angreifenden Last  $P$  zu der Mittelkraft  $A'$  zusammengesetzt, worauf die Spannkräfte für die ersten Stäbe der oberen und unteren Gurtung bestimmt werden können. Die Spannkräfte für die unbelastete, untere Gurtung gehen durch einen und

\*) Die Windrichtung bilde mit der Wagerechten den Winkel  $10^\circ$ .



denselben Punkt, die für die belastete, obere Gurtung schneiden auf dem Zuge der Lasten die Strecken  $2P$  ab. Die Parallelen zu den Spannkraften in den Vertikalen und in den Diagonalen bilden einen zusammenhängenden Linienzug, dessen Anfangspunkt  $a$  ist. Die eingetragenen Pfeile geben an, in welchem Sinne die Kräfte an den Knotenpunkten der unteren Gurtung angreifen. Man findet, daß die Vertikalen gedrückt und die Diagonalen gezogen werden. Die obere Gurtung wird gedrückt, die untere gezogen.

**135. Kräfteplan für einen belgischen Dachstuhl. Berücksichtigung des schrägen Winddruckes** (Fig. 201 bis 203 auf Tafel 2). Unter der Voraussetzung, daß jedes Feld der oberen Gurtung mit  $2P_o$  belastet wird, während in 3 Knotenpunkten des Untergurtes Lasten  $2P_u$  angreifen, zeigt Fig. 201b den Kräfteplan für die senkrecht wirkende Belastung; es genügte, ihn für die linke Hälfte zu zeichnen. Die Spannkraften der Stäbe der rechten Hälfte sind gleich denen der entsprechenden Stäbe der linken Hälfte. Die obere Gurtung sowie die Wandglieder 1, 3, 5, 7 werden gedrückt. Alle übrigen Stäbe werden gezogen.

Weiter soll angenommen werden, daß auf dem Dachbinder ein starker Winddruck wirkt. Der Einfallswinkel des Windes sei  $\beta$  (Fig. 222a), und der Neigungswinkel der oberen Gurtung gegen die Senkrechte  $= \alpha$ . Dann bildet die Normale zur Dachfläche mit der Windrichtung den Winkel  $(\alpha - \beta)$ , so daß die Geschwindigkeit des Windes rechtwinklig zur Dachfläche gleich  $c \cos(\alpha - \beta)$  wird, wo  $c$  die Geschwindigkeit des Windes überhaupt bedeutet. Der rechtwinklig zur Dachfläche  $F$  wirkende Winddruck ist erfahrungsgemäß

$$\Sigma W = 0,12248 c^2 \cos^2(\alpha - \beta) F;$$

er steht nämlich im geraden Verhältnis zur getroffenen Fläche und zu dem Quadrate der Geschwindigkeit, mit der sich der Wind rechtwinklig zur Dachfläche bewegt. Man kann etwa  $c = 31^m$  und  $\beta = 10^\circ$  setzen. Dann findet man  $\Sigma W = 120 F \cos^2(\alpha - 10)$ .  $F$  ist in Quadratmetern auszudrücken. Die Belastung eines Knotenpunktes ist in Fig. 202a

$$2 W = \frac{1}{6} \Sigma W \text{ bezieh. } W = \frac{1}{10} \Sigma W.$$

Das bewegliche Lager sei auf der linken Seite angeordnet, und von dieser Seite möge auch der Wind kommen. Bei dieser Belastung sind die Füllungsglieder der rechten Hälfte spannungslos. Denn führt man durch irgend ein Feld der rechten Hälfte einen Schnitt (Fig. 204) und stellt die Momentgleichung für den rechteitigen Stützpunkt auf, so erhält man, da  $B$  die einzige auf das rechte Trägerstück wirkende äußere Kraft ist,

$$Dr = 0,$$

wo  $r$  den Hebelarm von  $D$  bedeutet. Es sind aus diesem Grunde in

Fig. 202a die Füllungsglieder der rechten Hälfte fortgelassen worden.

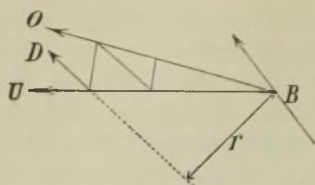


Fig. 204.

Der Stützenwiderstand  $A$  ist senkrecht und schneidet  $\Sigma W$  in  $C$ . Durch Punkt  $C$  muß der Widerstand  $B$  gehen. In Fig. 202b wurden aus dem gegebenen  $\Sigma W$  die Kräfte  $A$  und  $B$  bestimmt; hierauf wurde  $A$  mit der Belastung  $W$  des ersten Knotenpunktes zu  $A'$  zusammengesetzt. Die weitere Konstruktion des Planes ist aus der Fig. 202b

zu ersehen. Die obere Gurtung wird durchweg gedrückt, die untere Gurtung auf der linken Trägerhälfte gezogen, auf der rechten gedrückt. Die Füllungsstäbe 1, 3, 5, 7 werden gedrückt, die Füllungsstäbe 2, 4, 6, 8 gezogen.

Fig. 203a und 203b zeigen die Ermittlung der Spannkraft für den Fall, daß der Wind von der rechten Seite kommt. Es wird wieder  $\Sigma W$  mit dem senkrechten Stützenwiderstande  $A$  im Punkte  $C$  zum Schnitt gebracht und die Richtung des ebenfalls durch  $C$  gehenden Widerstandes  $B$  festgestellt. Die Füllungsstäbe auf der linken Hälfte werden spannungslos; sie sind in der Zeichnung fortgelassen worden. Man findet, daß die obere Gurtung gedrückt, die untere Gurtung gezogen wird. Die Füllungsstäbe 9, 11, 13, 15 werden gedrückt, die anderen gezogen.

Nachdem für jeden einzelnen Stab des Fachwerks durch Vergleichung der Pläne Fig. 202b und 203b festgestellt worden ist, ob durch den von der linken Seite oder durch den von der rechten Seite wirkenden Winddruck eine größere Spannkraft erzeugt wird, muß die größere Spannkraft zu der aus dem Plane Fig. 201b sich ergebenden addiert werden. In den meisten Fällen genügt es aber, die statische Berechnung eines Dachstuhles in der durch das Zahlenbeispiel in No. 132 erläuterten Weise durchzuführen und nur die lotrechte Seitenkraft des Winddruckes zu berücksichtigen. Nur bei hohen Dachstühlen zeichne man die Pläne für den schräg wirkenden Winddruck, stelle jedoch eine geringere Belastung durch Schnee in Rechnung, da es höchst unwahrscheinlich ist, daß bedeutende Winddrücke und große Schneelasten gleichzeitig wirken.

## § 28.

### Einfluß von Kräften, welche nicht in den Knotenpunkten angreifen.

136. Auf einen Fachwerkstab  $ab$  (Fig. 205a) mögen irgend welche Lasten wirken, deren Mittelkraft  $= R$  sei. Der Stab übt auf die Knoten

$a$  und  $b$  gewisse Drücke aus, welche wir in die Seitenkräfte  $R_1, R_2, S$  zerlegt denken, deren erstere parallel zu  $R$  sind, während die entgegengesetzt gleichen Kräfte  $S$  in die Stabachse fallen. Die Kräfte  $R_1$  und  $R_2$  lassen sich schnell angeben. Man hat nur nötig, auf der Kraft  $R$  einen beliebigen Punkt  $c$  anzunehmen, das Dreieck  $abc$  als Seilpolygon aufzufassen und den zugehörigen Kräfteplan, Fig. 205 b, zu zeichnen,

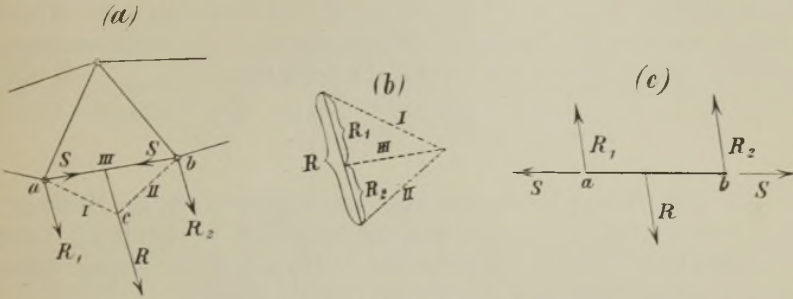


Fig. 205 a, b u. c.

Vergl. auch Seite 14, Fig. 15. Kennt man aber die von sämtlichen Stäben auf die Knotenpunkte übertragenen Kräfte  $R_1, R_2$ , so ist die Aufgabe, die nach der Richtung der Stabachsen wirkenden Kräfte  $S$  zu bestimmen, auf die Ermittlung der Spannkkräfte  $S$  eines Fachwerks zurückgeführt, an welchem sämtliche äußeren Kräfte nur in den Knotenpunkten angreifen.

Sind sämtliche  $S$  gefunden, so kennt man die an jedem Stabe angreifenden Kräfte, Fig. 205 c, und ist nun im stande, die auf die einzelnen Stabquerschnitte wirkenden Biegunsmomente  $M$ , Längskräfte  $N$ , Querkräfte  $Q$  und die durch diese hervorgerufenen Spannungen zu bestimmen.

Einen der wichtigsten Fälle stellt die Fig. 206 dar. Der Stab  $ab$  wird durch parallele Kräfte  $P_1, P_2 \dots$  belastet; die Spannkkräfte  $S$  sind Drücke. (Obere Gurtung des Binders eines Pfettendaches.) Das Biegunsmoment für irgend einen Querschnitt  $C$  stimmt überein mit dem Biegunsmomente für den entsprechenden Querschnitt  $C'$  eines

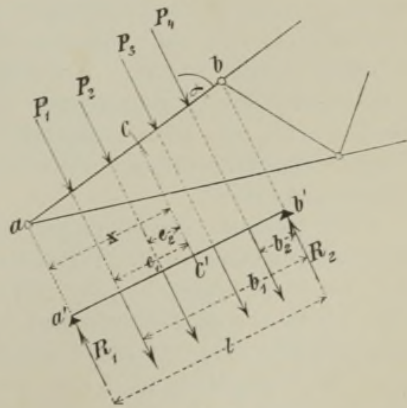


Fig. 206.



einfachen Balkens  $a'b'$ , welcher rechtwinklig zu den Lasten  $P$  ist, und dessen Stützpunkte den Punkten  $a$  und  $b$  entsprechen. Dieses Moment kann nach No. 69 mit Hilfe eines Seilpolygons bestimmt werden. Die Rechnung würde liefern, wenn z. B.  $C$  zwischen  $P_2$  und  $P_3$  liegt:  $M = R_1 x - P_1 e_1 - P_2 e_2$ , wobei  $R_1 = \frac{\Sigma P b}{l}$ . Die auf den rechtwinklig zur Stabachse angenommenen Querschnitt  $C$  wirkende Längskraft ist  $N = -S - (R_1 - P_1 - P_2) \cos \alpha$ , wobei  $\alpha$  den Winkel bedeutet, welchen die Lasten  $P$  mit  $ab$  bilden. Für die Spannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  erhält man (nach Gleich. 17 Seite 62)

$$\sigma_1 = \frac{N}{F} + \frac{M e_1}{J}; \quad \sigma_2 = \frac{N}{F} - \frac{M e_2}{J}.$$

Auf diese Weise kann man auch das Eigengewicht der Fachwerkstäbe berücksichtigen; indes begnügt man sich in der Regel damit, seinem Einflusse auf die Spannkraft  $S$  Rechnung zu tragen, indem man die Stabgewichte auf die Knotenpunkte verteilt.

**137. Dreiecknetze aus Stäben und gegliederten Scheiben.** Die vom Stabe  $ab$  (Fig. 205a) auf die Knotenpunkte  $a$  und  $b$  übertragenen Kräfte  $R_1, R_2, S$  sind unabhängig von seiner Gestalt. Tritt an die Stelle jenes Stabes eine irgendwie geformte ebene, vollwandige oder starre gegliederte Scheibe, die nur in den Gelenken  $a$  und  $b$  mit den übrigen Teilen des Fachwerks zusammenhängt, und auf welche dieselbe Last  $R$  wirkt, so bleiben die Kräfte  $R_1, R_2, S$  die nämlichen. Es sind deshalb die Untersuchungen in No. 136 auch für die Berechnung solcher Fachwerkträger wichtig, die aus einfacheren dadurch entstanden sind, daß einzelne Stäbe der letzteren durch gegliederte Scheiben ersetzt werden. Ein Beispiel hierfür ist das in der Fig. 207a dargestellte, aus 4 gegliederten Scheiben und 7 Stäben bestehende Dreiecknetz; es kann aufgefaßt werden als einfacher Polonceau-Träger, Fig. 207b, dessen obere Gurtstäbe durch Fischbauchträger ersetzt worden sind.

Die gesamte gleichförmige Belastung des Binders sei  $= P$ , mithin die Knotenlast  $= \frac{1}{16} P$ . Hat man unter Einführung der Knotenlasten  $\frac{1}{4} P$  für den Träger in Fig. 207b den Kräfteplan 207c gezeichnet, so muß man den Fischbauchträger  $ab$  für die in der Fig. 207d veranschaulichte Angriffsweise berechnen. Außer den senkrechten Lasten  $\frac{1}{16} P$  und den entsprechenden Stützenwiderständen  $\frac{3}{2} P$  wirken auf diesen Träger noch in der Richtung  $ab$  die Drücke  $O'$ , deren Größe der Plan Fig. 207c angibt. Fig. 207e zeigt den Kräfteplan für die senkrechte Belastung. Die Kräfte  $O'$  beanspruchen nämlich im vorliegenden Falle nur die obere Gurtung des Fischbauchträgers, und man



hat deshalb nur nötig, zu den für diese Gurtung aus dem Plane Fig. 207e erhaltenen Spannkraften (Drücken)  $1', 2', 3', 4'$  noch den Wert  $O'$  (Druck) zu addieren, während die in Fig. 207e für die untere Gurtung und die Diagonalen gegebenen Kräfte ungeändert bleiben. Der Fischbauchträger  $bc$  wird ebenso behandelt. Zu jedem der Drücke, welche der Plan Fig. 207e für die obere Gurtung liefert, ist der Druck  $O''$  zu fügen. Die Vorzeichen sind in die Figuren eingetragen worden.

Es ist auch möglich, einen zusammenhängenden Kräfteplan zu zeichnen. Der einzuschlagende Weg soll unter Voraussetzung des in Fig. 208a dargestellten Belastungsfalles beschrieben werden. Auf die eine Dachhälfte wirke ein Winddruck  $W$ , welcher die Knotenpunkte

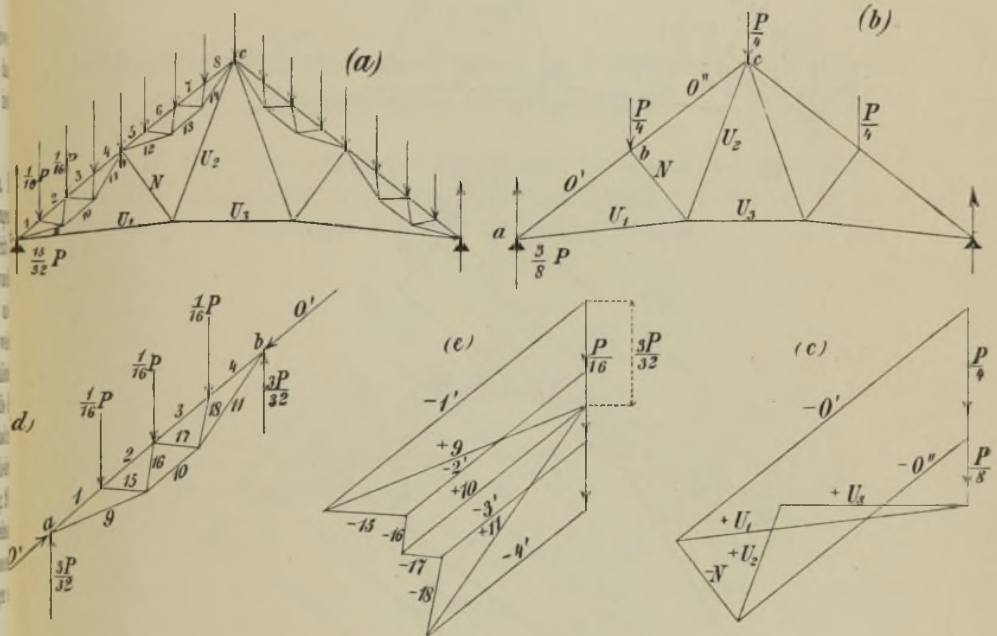


Fig. 207 a, b, c, d u. e.

mit  $\frac{1}{5} W$  bezieh.  $\frac{1}{15} W$  belastet und die Auflagerkräfte  $A$  und  $B$  hervorruft. Der Widerstand  $A$  sei senkrecht gerichtet;\*)  $B$  geht durch den Schnittpunkt der Kräfte  $A$  und  $W$ . Wäre die Spannkraft  $U_1$  gegeben, so könnte man das dem Knotenpunkte  $a$  entsprechende Kräftepolygon  $dmefgd$  (Fig. 208b) zeichnen. Um  $U_1$  zu finden, denke man den Fischbauchträger  $ab$  durch einen geraden Stab  $ab$  ersetzt und seine

\*) Es liege also das bewegliche Auflager bei  $A$ .

Belastung  $3 \cdot \frac{1}{8} W$  auf die Knotenpunkte  $a$  und  $b$  verteilt. In  $a$  greift dann die Last  $2 \cdot \frac{1}{8} W = mf$  an, und man erhält für  $a$  das Kräftepolygon  $dmfgd$ , in welchem  $fg \parallel ab$  ist. Wird auch die Belastung des

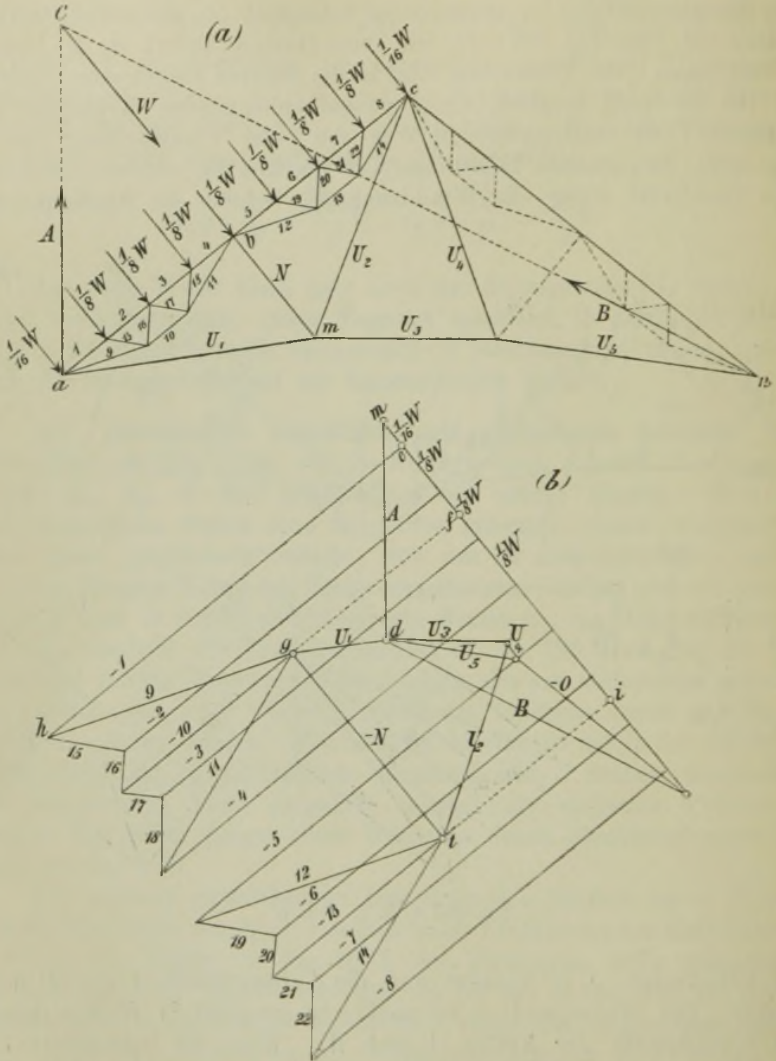


Fig. 208 a u. b.

Fischbauchträgers  $bc$  auf die Knotenpunkte  $b$  und  $c$  verteilt und dieser Träger durch einen Stab  $bc$  ersetzt, so kommt auf  $b$  die Belastung

4.  $\frac{1}{2} W = \overline{fi}$  und man erhält nach Ziehen der Geraden  $gt \parallel N$  und  $it \parallel bc$  die im Stabe  $bm$  auftretende Spannkraft  $N$ . Der Kräfteplan läßt sich jetzt nach den früher gegebenen Regeln fertigstellen; man kann von Knotenpunkt zu Knotenpunkt vorgehen, ohne jedesmal mehr als zwei unbekanntnen Spannkraften zu begegnen. Die in der Fig. 208a gestrichelten Stäbe sind spannungslos.  $O$  bedeutet den Druck in der Gurtung  $cn$ .

Dem Leser wird empfohlen, in gleicher Weise den Belastungsfall in Fig. 207a, sowie den Einfluß eines auf die rechte Dachhälfte wirkenden Winddruckes zu untersuchen.

### § 29.

## Kräftepläne für Polonceau-Träger, in Verbindung mit einigen allgemeineren Untersuchungen.

138. Die Entwicklung der Kräftepläne für die in den Figuren 210 und 212 dargestellten wichtigen Polonceau-Träger soll durch die Betrachtung des Trägers in Fig. 209 eingeleitet werden.

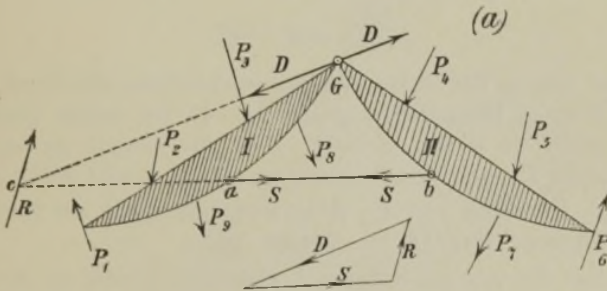


Fig. 209 a u. b.

Dieser Träger besteht aus zwei (vollwandigen oder gegliederten) Scheiben, welche miteinander durch ein Gelenk  $G$  und einen Stab  $ab$  verbunden sind. Bei  $a$  und  $b$  ist der Stab gelenkartig befestigt. An der Scheibe  $I$  greifen außer den äußeren Kräften  $P_1, P_2, P_3, P_8, P_9$ , welche sämtlich gegeben sein mögen und deren Mittelkraft  $= R$  sei, noch an: die Spannkraft  $S$  des Stabes  $ab$  und die Kraft  $D$ , mit welcher die Scheibe  $II$  im Punkte  $G$  auf die Scheibe  $I$  wirkt. Da Gleichgewicht nur dann besteht, wenn die Kraft  $D$  durch den gegebenen Schnittpunkt  $c$  von  $R$  und  $S$  geht, so ist die Richtung von  $D$  bekannt, und es lassen sich  $S$  und  $D$  mit Hilfe eines Kräftedreiecks bestimmen.



Nun sind alle auf die Scheibe *I* wirkenden Kräfte bekannt, desgleichen die an der Scheibe *II* angreifenden. Sind die Scheiben gegliedert und einfache Dreiecknetze (wie beispielsweise in den Figuren 210 u. 212), so ist der Träger ein innerlich statisch bestimmter. Für jede der beiden Scheiben läßt sich ein Cremonascher Kräfteplan zeichnen, wobei darauf zu achten ist, daß für das Kräftepolygon der Scheibe *I* die Reihenfolge  $P_1, P_2, P_3, D, P_8, S, P_9$  zu wählen ist und für das Kräftepolygon der Scheibe *II* die Reihenfolge:  $D, P_4, P_5, P_6, P_7, S$ . In besonderen Fällen sind Vereinfachungen möglich, auf welche bei Lösung der beiden folgenden Aufgaben hingewiesen werden soll.

**139. Kräfteplan für den Dachbinder in Fig. 210.** Die Knotenlasten seien senkrecht und mögen zunächst gleich groß angenommen werden. Die Spannkraft im Stabe 11 sei  $S_{11}$ ; sie läßt sich auf dem in No. 138 angegebenen Wege finden, wird aber im vorliegenden Falle kürzer mit Hilfe des *Ritterschen* Verfahrens abgeleitet. Führt man durch  $d$  einen senkrechten Schnitt und stellt die Momentengleichung für den Punkt  $d$  auf, so erhält man (wenn  $\lambda$  die Feldweite bedeutet)

$$A4\lambda - P(3\lambda + 2\lambda + \lambda) - S_{11} \cdot \bar{dr} = 0$$

und (wegen  $A = \frac{7P}{2}$ )

$$S_{11} \bar{dr} = 2P \cdot 4\lambda.$$

Nimmt man in der linken Auflagersenkrechten eine Kraft  $R = 2P$  an, deren Moment bezüglich  $d$  gleich  $2P \cdot 4\lambda$  ist, bringt hierauf Stabachse 11 mit  $R$  in  $g$  zum Schnitt, zieht die Gerade  $dg$  und zerlegt im Kräfteplane  $R$  nach den Richtungen  $GD \parallel gd$  und  $ED \parallel rg$ , so ist  $\overline{DE} = S_{11}$ . Der Sinn von  $S_{11}$  ist so zu nehmen, daß der Umfahrungssinn des Polygons  $EGDE$  ein stetiger ist.

Nachdem die auf die Scheibe *I* wirkenden Kräfte in der Reihenfolge  $S_{11}, A, P, P, \dots$  aneinandergesetzt worden sind, bietet die Aufzeichnung eines *Cremonaschen* Kräfteplanes keinerlei Schwierigkeiten; in Fig. 210b wurde er für die linke Hälfte des symmetrischen Trägers dargestellt. Die Vorzeichen der Spannkräfte gibt Fig. 210a an.

Es mögen noch zwei andere Verfahren, den Punkt  $D$  in Fig. 210b zu bestimmen, mitgeteilt werden, welche beide auch bei ungleich großen und schräg gerichteten Knotenlasten mit Vorteil anzuwenden sind.

Man beginne die Aufzeichnung des Kräfteplanes mit der Bestimmung der auf den Knoten  $f$  wirkenden Spannkräfte 1 und 2, ermittle hierauf 3 und 4, sodann 5 und 6. An jedem der folgenden Knotenpunkte ( $b$  oder  $a$ ) begegnet man drei unbekanntem Spannkraften. Geht man zum Knoten  $b$  und nimmt für die eine der drei Unbekannten



z. B. für 7 den beliebigen Wert  $A_1S$  an, so kann man das dem Knotenpunkte  $b$  entsprechende Kräftepolygon  $A_1SFLJB_1A_1$  zeichnen und

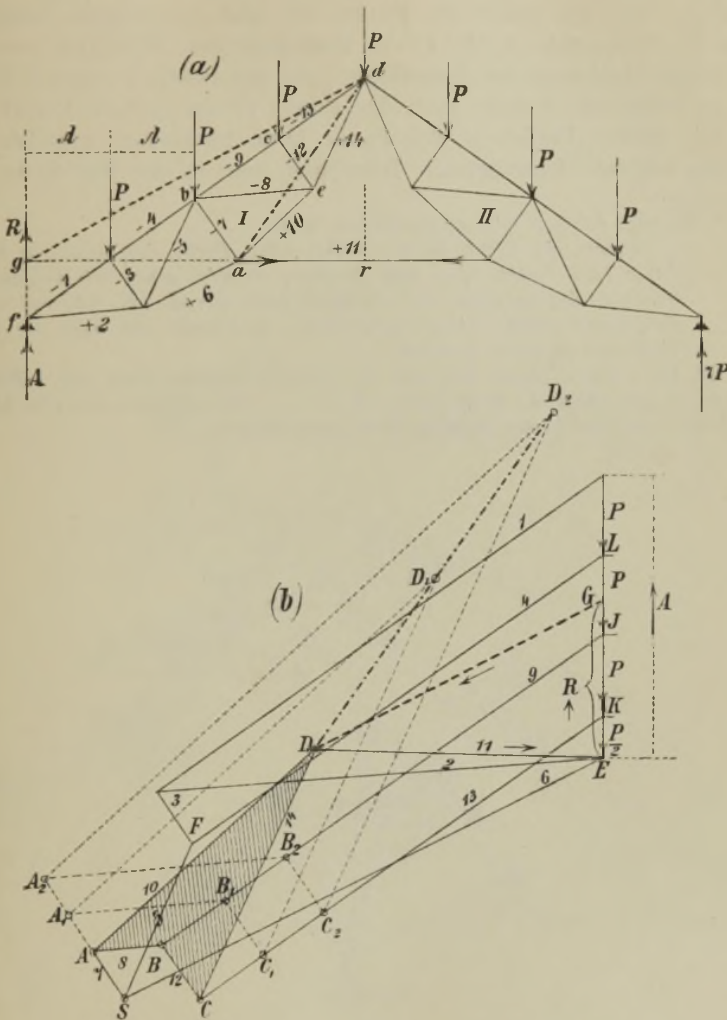


Fig. 210 a u. b.

hierauf die Kräftepolygone für die Knoten  $c$  und  $e$ , nämlich  $B_1JKC_1B_1$  und  $B_1A_1D_1C_1B_1^*$ ). Eine zweite Annahme:  $A_2S = \text{Spannkraft } 7$

\*) In Fig. 210 b ist  $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel 8$ ;  $B_1C_1 \parallel B_2C_2 \parallel 12$ ;  $C_1D_1 \parallel C_2D_2 \parallel 14$   
 $D_1A_1 \parallel D_2A_2 \parallel 10$ .

liefert für  $e$  das Polygon  $B_2 A_2 D_2 C_2 B_2$ . Der Eckpunkt  $D$  des wirklichen Kräftepolygons für  $e$  muß aber auf der durch  $E$  zum Stabe 11 gezogenen Parallelen liegen; er ist bestimmt als Schnittpunkt dieser Parallelen mit der durch die Punkte  $D_1$  und  $D_2$  gelegten Geraden. Denn die Eckpunkte  $A, B, C$  des Kräftepolygons  $ABCD A$  bewegen sich infolge Änderung der Spannkraft 7 auf den festen Geraden 7, 9, 13, und es beschreibt deshalb auch der Punkt  $D$  eine gerade Linie\*).

Ein drittes Verfahren, den Punkt  $D$  zu bestimmen, gründet sich auf die folgende Überlegung. Betrachtet man in der Fig. 210a den

\*) Es folgt dies aus dem geometrischen Satze:

*Ändert ein  $n$ -Eck in der Weise seine Form, daß sämtliche Seiten durch feste Punkte einer und derselben Geraden gehen (die in den vorliegenden Anwendungen die unendlich ferne Gerade ist), während  $n - 1$  Eckpunkte gerade Linien beschreiben, so bewegt sich auch der letzte Eckpunkt in einer Geraden.*

Mit Hilfe dieses Satzes läßt sich die wichtige Aufgabe lösen: ein  $n$ -Eck zu zeichnen, dessen sämtliche Eckpunkte 1, 2, 3 . . . in gegebenen Geraden liegen, und dessen sämtliche Seiten gegebene Richtungen besitzen.

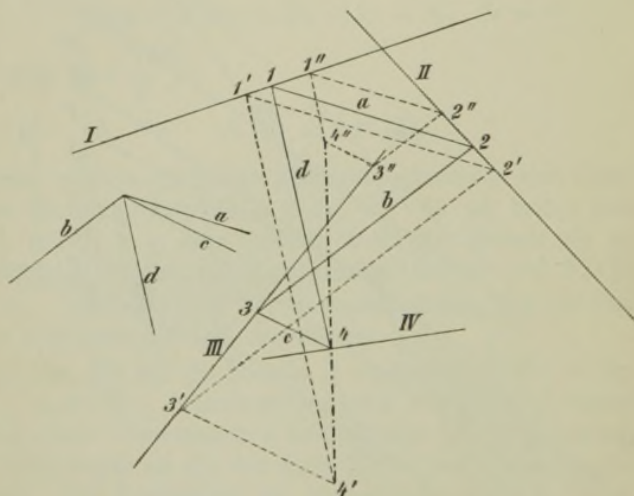


Fig. 211.

In der Fig. 211 wurde diese Aufgabe für den Fall  $n = 4$  gelöst. Gesucht ist ein Polygon, dessen Eckpunkte 1, 2, 3, 4 auf den Geraden  $I, II, III, IV$ , liegen, und dessen Seiten den gegebenen Geraden  $a, b, c, d$  parallel sind. Es wurden zwei beliebige Vierecke  $1'2'3'4'$  und  $1''2''3''4''$  gezeichnet, deren Seiten den Geraden  $a, b, c, d$  parallel sind, und deren Ecken  $1', 2', 3'$  und  $1'', 2'', 3''$  beziehungsweise in  $I, II, III$  liegen. Dann liegt, nach dem vorstehenden Satze, 4 auf der Geraden  $4'4''$ , und es ist dieser Punkt deshalb der Durchschnittspunkt der Geraden  $4'4''$  und  $IV$ .

Linienzug  $abcd$  als einen Kräftezug,  $e$  als den Pol desselben, und die Geraden 10, 8, 12, 14 als Seilstrahlen, so ist das Polygon  $D_1 A_1 B_1 C_1 D_1$  ein zugehöriges Seilpolygon, ebenso das Polygon  $D_2 A_2 B_2 C_2 D_2$ . Die

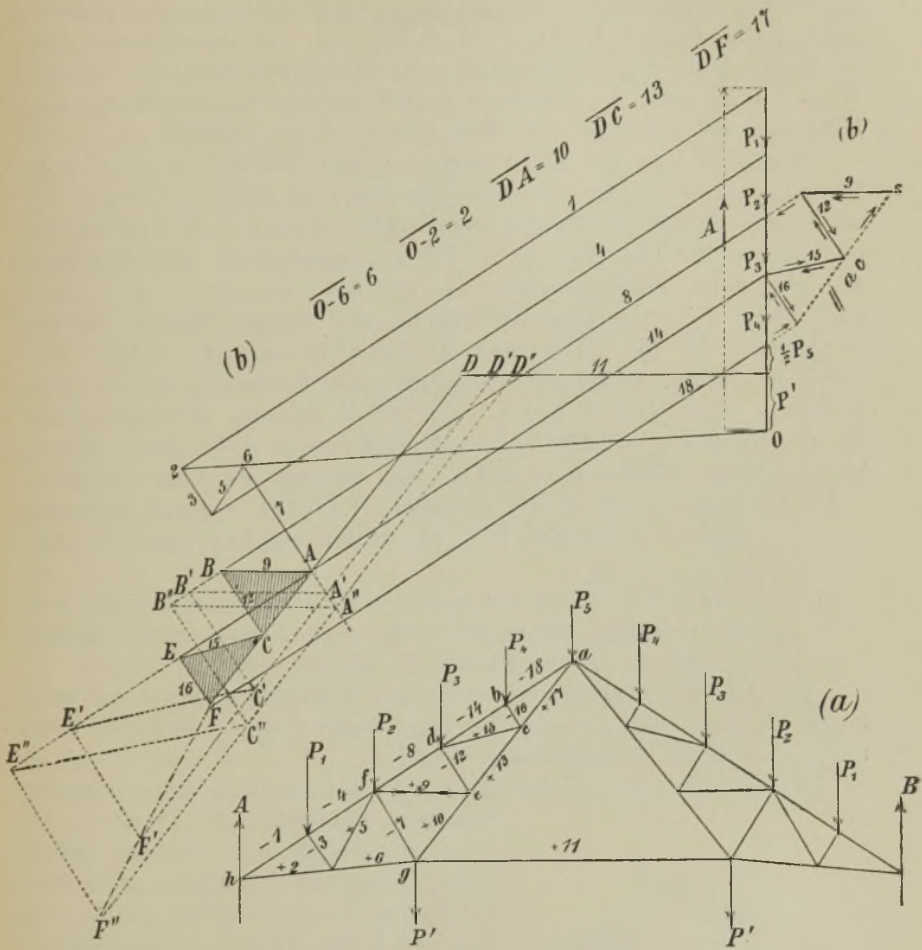


Fig. 212 a u. b.

Gerade  $D_1 D_2$  muß deshalb parallel zu der Mittelkraft  $ad$  der Kräfte  $ab$ ,  $bc$ ,  $cd$  sein, und es ist ersichtlich, daß man, um den Punkt  $D$  zu finden, nur nötig hat, das eine der beiden Versuchspolygone, z. B.



$A_1B_1C_1D_1A_1$  zu zeichnen. Eine durch  $D_1$  zur Geraden  $ad$  gezogene Parallele  $D_1D$  bestimmt auf der  $ED$  den Punkt  $D$ .

140. **Kräfteplan für den Dachbinder in Fig. 212.** Es handelt sich hier wieder um einen besonderen Fall des in Fig. 209 dargestellten Trägers. Man könnte die Spannkraft im Stabe 11 auf die in No. 139 angegebene Art bestimmen, hierauf die an der Scheibe  $agh$  angreifenden Kräfte in der Reihenfolge 11,  $P'$ ,  $A$ ,  $P_1$ ,  $P_2$ , . . . aneinandersetzen und für diese Scheibe einen Cremonaschen Kräfteplan zeichnen. Ein zweiter Weg, der ebenfalls bei beliebiger Gestalt der Gurtungen und bei beliebiger gerichteten Lasten zum Ziele führt, ist der folgende.

Nachdem man der Reihe nach die Spannkraften 1, 2, 3, 4, 5, 6 bestimmt hat, gehe man zum Knotenpunkte  $f$ , an welchem (ebenso wie am Knoten  $g$ ) drei unbekannte Spannkraften, nämlich 7, 8, 9 auftreten, und nehme für die eine, z. B. für 7, nacheinander zwei beliebige Werte an. Die erste Annahme sei:  $7 = 6A'$ , die zweite:  $7 = 6A''$ . Kennt man 7, so ist man im stande, alle übrigen Spannkraften zu bestimmen. In Fig. 212b sind  $D'A'B'C'D'$  und  $D''A''B''C''D''$  die jenen beiden Annahmen entsprechenden Kräftepolygone für den Knoten  $e$  und  $D'C'E'F'D'$ ,  $D''C''E''F''D''$  die Kräftepolygone für den Knoten  $c$ .  $DABCD$  und  $DCEFD$  sind die vorläufig unbekanntenen Kräftepolygone für  $e$  und  $c$ . Man kann nun wie folgt schließen.

- 1) Die Ecken  $A$ ,  $B$ ,  $D$  des Polygons  $DABCD$  bewegen sich auf den gegebenen Geraden 7, 8, 11; mithin beschreibt auch  $C$  eine Gerade.
- 2) Die Ecken  $D$ ,  $C$ ,  $E$  des Polygons  $DCEFD$  bewegen sich auf gegebenen Geraden; mithin beschreibt auch  $F$  eine Gerade, deren Lage durch die beiden Punkte  $F'$  und  $F''$  bestimmt ist.

Da aber die Ecke  $F$  des wirklichen Kräftepolygons auf der Geraden 18 liegen muß, so ist die Lage dieses Punktes bestimmt und mit ihr sämtliche Spannkraften 7 bis 18.

Liegen nun, wie in Fig. 212a, die Punkte  $a$ ,  $b$ ,  $d$ ,  $f$  auf einer Geraden, desgleichen die Punkte  $a$ ,  $c$ ,

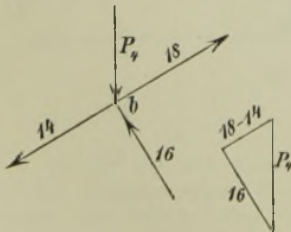


Fig. 213.

noch unbekannt ist, als Zugkräfte angenommen. In gleicher Weise läßt sich nun am Knoten  $c$  die Spannkraft 15, am Knoten  $d$  die



Spannkraft 12 und schließlich am Knoten  $e$  die Spannkraft 9 bestimmen. Die Ermittlung aller dieser Kräfte ist in der Fig. 212 angegeben worden. Jetzt ist man im stande, das Kräftepolygon für den Knotenpunkt  $f$ , an welchem nur noch zwei Unbekannte (7 und 8) auftreten, zu zeichnen und hierauf alle übrigen Spannkräfte zu bestimmen.

141. **Erweiterung der Untersuchung in No. 138.** Wird das Gelenk  $G$  des in Fig. 209 dargestellten Trägers durch 2 Stäbe  $cd$  und  $ef$  ersetzt, Fig. 214, so wirken auf die Scheibe  $I$  außer den gegebenen äußeren Kräften, deren Mittelkraft  $= R$  sein möge, noch drei Spannkräfte  $S_1, S_2, S_3$ , welche sich mit Hilfe des Culmannschen Verfahrens bestimmen lassen, vorausgesetzt, daß sich die Achsen der drei Stäbe nicht in einem Punkte schneiden\*). Die Mittelkraft  $D$  aus  $S_2$  und  $S_3$  geht durch den Schnittpunkt  $G'$  der Stäbe  $cd$  und  $ef$ , sowie durch den Punkt  $g$ , in welchem  $R$  von  $ab$  getroffen wird. Man bezeichnet auch den Punkt  $G'$  (nach Föppl) als ein **gedachtes Gelenk**; dasselbe geht in ein **wirkliches Gelenk** über, sobald die beiden Punkte  $e$  und  $c$  oder die beiden Punkte  $f$  und  $d$  oder schließlich alle vier Punkte  $c, d, e, f$  zusammenfallen.

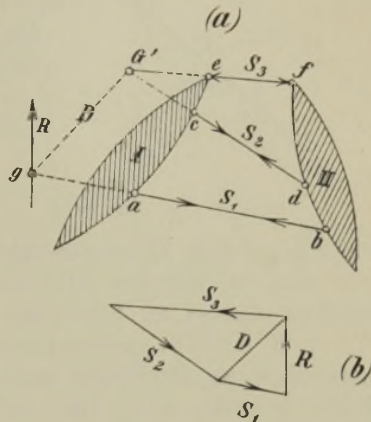


Fig. 214 a u. b.

Wirken auf die Stäbe  $ab, cd, ef$  Lasten, so werden diese nach No. 137 auf die Punkte  $a, b, c, d, e, f$  übertragen, worauf die Spannkräfte  $S_1, S_2, S_3$  genau wie vorhin ermittelt werden können. An die Stelle jener Stäbe können auch starre Scheiben treten, welche durch je zwei (wirkliche oder gedachte) Gelenke mit den Scheiben  $I$  und  $II$  zusammenhängen. Einen solchen Fall stellt die Fig. 215 dar. Die Scheiben  $I$  und  $II$  wurden durch die Scheibe  $III$  und das Gelenk  $G_2$  zu einem starren Gebilde verbunden. Indem man die auf die Scheibe  $III$  wirkenden Lasten auf die Punkte  $G_1$  und  $G_3$  verteilt, führt man die Berechnung des fraglichen Trägers auf diejenige des in No. 139 untersuchten Trägers zurück.

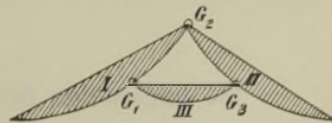


Fig. 215.

\*) Die drei Geraden  $ab, cd, ef$  dürfen also auch nicht parallel sein.

Die vorstehenden Betrachtungen geben uns ein einfaches Mittel an die Hand, um aus statisch bestimmten gegliederten Scheiben und aus Stäben eine ganze Reihe von innerlich statisch bestimmten Fachwerkträgern herzuleiten. Ein Beispiel zeigt die Fig. 215a. Die beiden Scheiben *V* und *VI* wurden durch das Gelenk  $G_1$  und den Stab 5 zu einem starren Gebilde vereinigt, welches wir als Scheibe (*V*, *VI*, 5) bezeichnen wollen, und in gleicher Weise wurden die

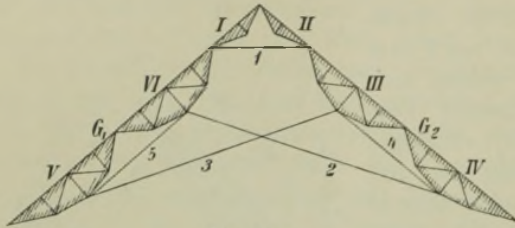


Fig. 215a.

Scheiben *IV* und *III* durch  $G_2$  und 4 zur Scheibe (*IV*, *III*, 4) verbunden. Hierauf wurden die Scheiben (*V*, *VI*, 5) und (*III*, *IV*, 4) durch die Stäbe 1, 2, 3 zu einem starren Ganzen vereinigt und schließlich die

Scheiben *I* und *II* hinzugefügt. Es entsteht ein Träger, welcher sich von dem in der Fig. 215 dargestellten Träger nur dadurch unterscheidet, daß an die Stelle der Scheibe *III* die Scheibe (*III*, *IV*, *V*, *VI*, 1, 2, 3, 4, 5) getreten ist. Da die einzelnen Scheiben Dreiecknetze sind, ist der Träger statisch bestimmt, sobald sämtliche äußeren Kräfte gegeben sind. Dies ist z. B. der Fall, wenn er nur ein festes und ein bewegliches Auflagergelenk erhält.

## IX. Abschnitt.

### Der einfache Fachwerkbalken.

#### § 30.

#### Die ungünstige Belastungsweise. Einflußlinien.

142. **Belastungsgesetze.** Wir gehen jetzt dazu über, die wichtigsten statisch bestimmten Träger ausführlicher zu behandeln und beginnen mit dem in einer lotrechten Ebene angenommenen *einfachen Fachwerkbalken*. Die Lasten seien senkrecht und abwärts gerichtet. Dann sind auch beide Stützenwiderstände senkrecht, und es ist deshalb für die folgenden Betrachtungen gleichgültig, auf welcher Seite das

festen oder das bewegliche Auflager liegt. Zunächst soll die Frage nach der ungünstigsten Belastungsweise entschieden werden. Wir setzen ein einfaches Dreiecknetz voraus und knüpfen an die im § 26 zur Erläuterung der Verfahren von *Culmann* und *Ritter* durchgeführten Untersuchungen an: sie zeigten, daß die Spannkraften in den Gurtungen des einfachen Fachwerkbalkens bei voller Belastung am größten werden, und daß die obere Gurtung stets gedrückt, die untere Gurtung stets gezogen wird. Sodann wurde durch jene Untersuchung der bei Satteldächern vorkommende besondere Fall ausgeschieden, in welchem auch die Spannkraften in den Gitterstäben bei voller Belastung des Balkens am größten werden. Es bleibt also nur noch anzugeben, für welchen Belastungszustand die Spannkraft in einem Füllungsstabe ihre Grenzwerte annimmt, wenn ein durch diesen Stab geführter Schnitt  $tt$  zwei Gurtstäbe trifft, die sich außerhalb der Stützweite schneiden. Der fragliche Stab sei eine links steigende Diagonale (Fig. 216), und es möge zunächst der Einfluß von

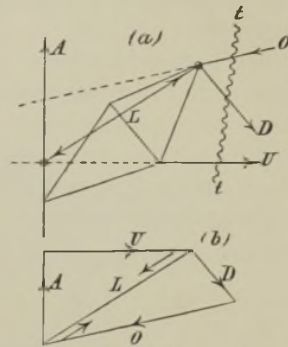


Fig. 216.

Lasten untersucht werden, die auf den rechts vom Schnitte  $tt$  gelegenen Trägereile wirken. Am linken Trägereile greift dann nur eine äußere Kraft an, nämlich der Stützenwiderstand  $A$ . Um  $D$  zu finden, werde das auf Seite 210 beschriebene *Culmannsche* Verfahren angewendet. Der Schnittpunkt von  $A$  und  $U$  wird mit dem Schnittpunkt von  $O$  und  $D$  durch die Gerade  $L$  verbunden, und hierauf werden der Reihe nach die geschlossenen Kräftepolygone  $A, U, L$  und  $L, D, O$  gezeichnet (Fig. 216b). Es stellt sich heraus, daß die fragliche Diagonale *gezogen* wird, sobald sich  $O$  und  $U$  links von  $A$  oder rechts von  $tt$  schneiden. Der Fall, in welchem sich  $O$  und  $U$  zwischen  $A$  und  $tt$  treffen, ist durch die Voraussetzung ausgeschlossen. Um nun den Einfluß von Lasten zu bestimmen, welche auf den linken Trägereile wirken, wird zweckmäßig der rechte Trägereile betrachtet, weil jetzt an diesem nur eine einzige äußere Kraft, der Stützenwiderstand  $B$ , angreift. Das Kräftepolygon  $B, U, D, O$  wird ganz ebenso wie vorhin gefunden; es liefert für  $D$  einen *Druck*, sobald sich  $O$  und  $U$  links von  $tt$  oder rechts von  $B$  liegender Schnittpunkt von  $O$  und  $U$  ist durch die Voraussetzung ausgeschlossen.

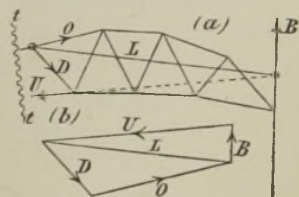


Fig. 217 a u. b.

Hieraus folgt der Satz:



*Schneiden sich  $O$  und  $U$  außerhalb der Stützweite, so rufen alle Lasten, welche in Knotenpunkten rechts von  $tt$  angreifen, in der Diagonale  $D^*$ ) einen Zug hervor und alle Lasten, welche in Knotenpunkten links von  $tt$  angreifen, einen Druck.*

Wir setzen jetzt voraus, daß die Belastung an der unteren Gurtung angreift (Fig. 218). Zwischen den Knoten  $F_1$  und  $F_2$ , von denen der erste links von  $tt$ , der zweite rechts von  $tt$  liegt, wirke eine Last  $P$ ; sie sei in zwei Seitenkräfte  $P_1$  und  $P_2$  zerlegt, welche in  $F_1$  und  $F_2$  angreifen.  $P_1$  ruft in  $D$  einen Druck hervor,  $P_2$  einen Zug. Bei einer bestimmten Lage von  $P$  wird  $D = 0$  sein. Durch Lasten, welche sich rechts von dieser Grenzlage befinden, wird  $D$  gezogen; durch Lasten links von der Grenzlage wird  $D$  gedrückt. Bringt man nun den Gurtstab  $O$  mit den Auflagersenkrechten in  $A'$  und  $B'$  zum Schnitt und zieht die Geraden  $A'F_1$  und  $B'F_2$ , so entspricht einer durch den Schnittpunkt  $E$  dieser Geraden gehenden Last  $P$  der Wert  $D = 0$ . Der Beweis hierfür ist der folgende: Wird  $\overline{CG} = P$  gemacht (Fig. 218 b) und  $CO \parallel A'E$ ,

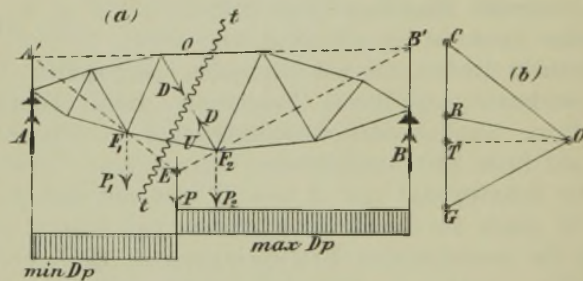


Fig. 218 a u. b.

$GO \parallel EB'$  gezogen, sodann  $OR \parallel F_1F_2$  und  $OT \parallel A'B'$ , so ist nach No. 100:  $CR = P_1$  und  $RG = P_2$ , ferner:  $GT = B$  und  $TC = A$ . Es läßt sich deshalb das Polygon  $A'F_1F_2B'$  als ein Seilpolygon der Kräfte  $A, P_1, P_2, B$  auffassen, und hieraus folgt, daß die Mittelkraft  $R$  der links von  $tt$  am Träger angreifenden äußeren Kräfte  $A$  und  $P_1$  durch den Schnittpunkt der Gurtstäbe  $O$  und  $U$  geht, welche mit den vom Schnitte  $tt$  getroffenen Seilpolygonseiten zusammenfallen. Auf Seite 213 wurde aber nachgewiesen, daß sich  $D = 0$  ergibt, sobald jene Mittelkraft  $R$  durch den Schnittpunkt von  $O$  und  $U$  geht. Es ist

\*) In der Folge bezeichnen wir, um kurz zu sein, die Stäbe und die in denselben wirksamen Spannkkräfte mit denselben Buchstaben.



demnach die Senkrechte durch  $E$  eine *Belastungsscheide*; links von  $E$  liegt die *negative*, rechts von  $E$  die *positive Beitragstrecke* des Trägers. Die ausschließliche Belastung der letzteren Strecke erzeugt in der fraglichen Diagonale den größten Zug d. i.  $max D_p$  und die ausschließliche Belastung der ersteren den größten Druck, nämlich  $min D_p$ . Durch den Zeiger  $p$  ist angedeutet, daß es sich hierbei nur um den Einfluß der beweglichen Last handelt.

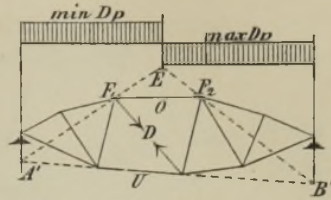


Fig. 219.

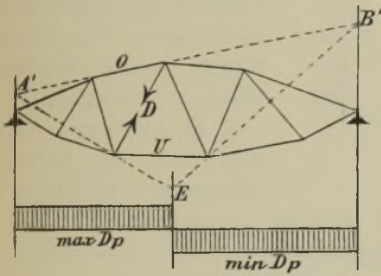


Fig. 220.

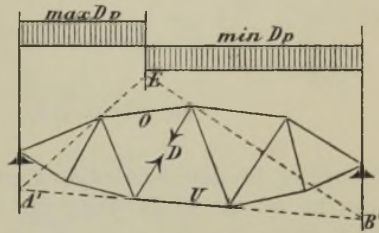


Fig. 221.

Ganz ähnlich wird der Fall untersucht, in welchem die Lasten in den Knotenpunkten der oberen Gurtung angreifen; er ist in der Fig. 219 dargestellt worden, während die Figuren 220 und 221 die ungünstigsten Belastungsweisen für eine rechts steigende Diagonale angeben.

**143. Einflußlinien.** Die Einflußlinien für die Spannkraften in den Stäben eines einfachen Fachwerkbalkens lassen sich schnell zeichnen, sobald die Spannkraften infolge der in den Figuren 222 und 223 dargestellten Belastungszustände bekannt sind. In Fig. 222 ist angenommen worden, daß nur der dem Stützpunkte  $B$  benachbarte Knoten  $K$  belastet ist und zwar so stark, daß am linken Auflager der Widerstand  $A = 1$  hervorgerufen wird. Die Spannkraft, welche bei diesem Belastungszustande, den wir in der Folge kurz den Zustand „ $A = Eins$ “ nennen wollen, in irgend einem Stabe der oberen oder unteren Gurtung entsteht, soll mit  $O'$  und  $U'$  bezeichnet werden, die Spannkraft in einem Füllungsstabe mit  $D'$ . Man findet diese Kräfte am schnellsten mit Hilfe eines *Cremonaschen Planes*; vergl. Seite 255 und Fig. 239. \*)

\*) Es genügt, die Spannkraften in den links vom belasteten Knoten  $K$  liegenden Stäben zu bestimmen. Die Größe der in  $K$  anzunehmenden Last braucht man also nicht zu kennen.

In Fig. 223 ist der Zustand „*B = Eins*“ dargestellt worden; ihm mögen die Spannkraften  $O''$ ,  $U''$ ,  $D''$  entsprechen. Ist der Träger

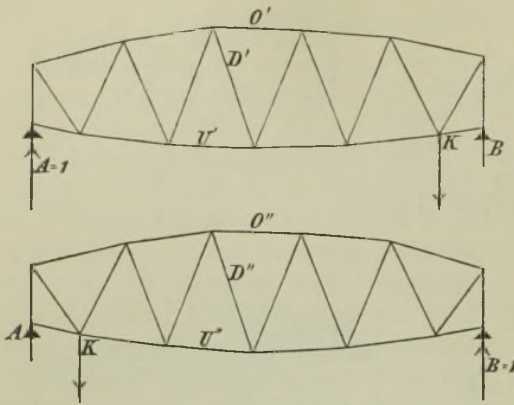


Fig. 222 u. 223.

symmetrisch in Bezug auf die Senkrechte durch die Mitte, so ist der Kräfteplan für den Belastungsfall in Fig. 223 das Spiegelbild des Kräfteplanes für den Belastungsfall in Fig. 222. Es genügt dann für die folgenden Untersuchungen, den einen dieser beiden Kräftepläne zu zeichnen.

Es bewege sich nun über den Balken eine senkrechte Last  $P$ ;

sie greife in den Knotenpunkten der unteren Gurtung an, Fig. 224. Gesucht sei die Einflußlinie für die Spannkraft  $D$  in irgend einem Stabe des Balkens, beispielsweise für die Spannkraft  $D$  im Füllungsstabe  $CF_2$ . Liegt  $P$  rechts von  $F_2$ , im Abstände  $b$  von  $B$ , so greift links von dem durch  $D$  und durch zwei Gurtstäbe geführten Schnitte  $tt$  nur eine äußere Kraft an, nämlich der Widerstand  $A = P \frac{b}{l}$  der linken Stütze.

In dem fraglichen Füllungsstabe entsteht die Spannkraft

$$D = A \cdot D' = \frac{Pb}{l} D' = P\eta, \text{ wobei } \eta = D' \frac{b}{l}.$$

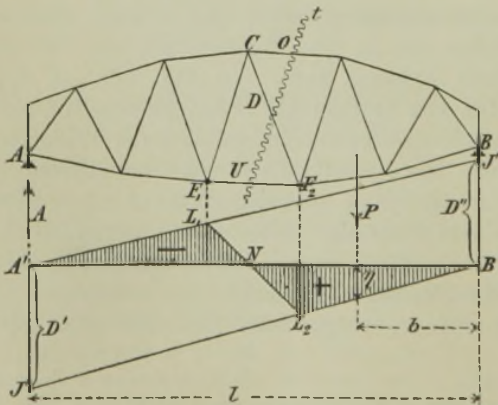


Fig. 224.

Trägt man also von einer Wagerechten  $A'B'$  aus, auf der Senkrechten durch  $A$  die Strecke  $A'J' = D'$  ab und verbindet  $J'$  mit dem senkrecht unter  $B$  gelegenen Punkte  $B'$  durch eine Gerade, welche die Senkrechte durch  $F_2$  in  $L_2$  schneidet, so ist die Gerade  $B'L_2$  ein Teil der gesuchten

Einflußlinie; denn die unter der Last  $P$  gemessene Ordinate dieser Geraden ist  $= D' \frac{b}{l} = \eta$ .

Ganz ebenso findet man, daß der Einfluß einer zwischen  $A$  und  $F_1$  angreifenden Last  $P$  gleich der mit  $P$  multiplizierten Ordinate einer Geraden  $AL_1$  ist, welche auf der rechten Auf-  
 lagersenkrechten die Strecke  $\overline{B'J''} = D''$  abschneidet. Dem Felde  $F_1F_2$ , entspricht dann (nach dem in No. 63 Seite 116 bewiesenen Satze) die Gerade  $L_1L_2$ , weshalb die in der Fig. 224 schraffierte Fläche die gesuchte Einflußfläche für die Spannkraft  $D$  ist. Im vorliegenden Falle ist  $D'$  positiv und  $D''$  negativ.

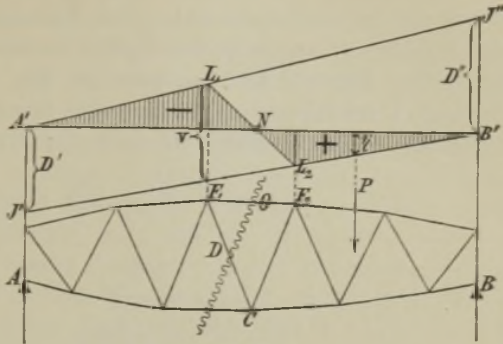


Fig. 225.

Fig. 225 stellt die Einflußlinie für die Spannkraft  $D$  im Stabe  $F_1C$  für den Fall vor, daß die Belastung an der oberen Gurtung angreift.

Man könnte auch die Einflußlinie  $A'L_1L_2B'$  in der Weise finden, daß man die Gerade  $B'L_2J'$  wie vorhin mittels der Ordinate  $A'J' = D'$  festlegt, hierauf den Nullpunkt  $N$  in der auf Seite 237 angegebenen Weise bestimmt, durch  $N$  die Gerade  $L_2L_1$  zieht und  $L_1$  mit  $A'$  verbindet.

Man kann ferner den Einfluß des Stützenwiderstandes  $A$  auf die Spannkraft  $D$  mit Hilfe der Momentengleichung

$$Dr = Ax$$

bestimmen, wo  $r$  und  $x$  (Fig. 226) die Hebelarme von  $D$  und  $A$  in Bezug auf den Schnittpunkt  $F$  der Gurtstäbe  $O$  und  $U$  bedeuten, und findet dann für  $A = 1$  den Wert

$$D' = +1 \frac{x}{r},$$

und ganz in derselben Weise für den Einfluß von  $B = 1$

$$D'' = -1 \frac{x'}{r}.$$

Hieraus folgt dann, daß sich die Linien  $A'L_1$  und  $B'L_2$  in einem Punkte  $C$  der durch  $F$  gezogenen Senkrechten schneiden müssen, und



daß es also genügt, eine der beiden Strecken  $D'$  oder  $D''$  aufzutragen. Bei weit abliegendem Punkte  $F$  ist dieses Verfahren allerdings un-  
bequem.

Zu einer anderen, sehr wichtigen Eigenschaft der Einflußlinie für  $D$  gelangt man durch folgende Betrachtung.

Man nehme die über den Balken wandernde Last 1 im Punkte  $F_2$  angreifend an und untersuche den Gleichgewichtszustand der rechts vom Schnitte  $tt$  angreifenden Kräfte in der Weise, daß man die von den beiden äußeren Kräften, nämlich dem Stützenwiderstande  $B$  und der Last 1 herrührenden Beiträge zur Spannkraft  $D$  getrennt ermittelt und dann zusammenzählt.  $B$  erzeugt für sich allein

$$D = B \cdot D'' = \frac{a_2}{l} D'' = -z,$$

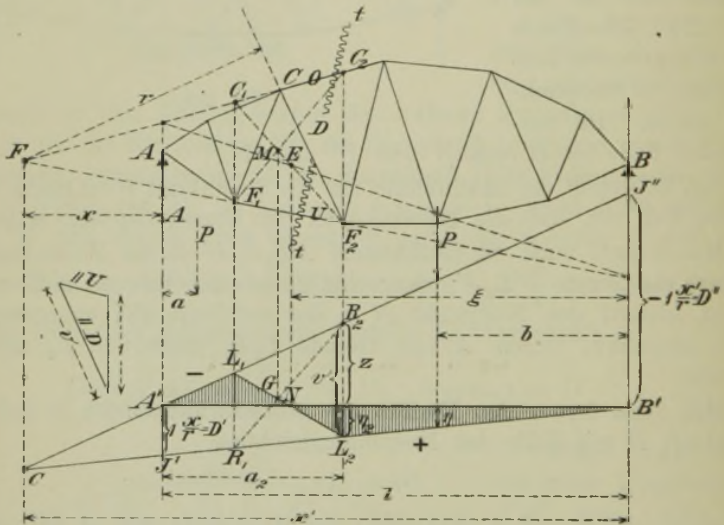


Fig. 226.

und die Wirkung der in  $P_2$  angreifenden Kraft 1 erhält man durch Zerlegung von 1 nach den Richtungen von  $D$  und  $U$ , weil  $O = 0$  ist, sobald  $B$  verschwindet. Die Seitenkraft parallel zu  $D$  sei  $v$ ; dann entsteht infolge  $B$  und 1 zusammen:

$$D = v - z.$$

Dieser Wert muß aber gleich  $\eta_2$  sein, und daraus folgt die wichtige Beziehung

$$\eta_2 + z = v,$$



mit deren Hilfe nach Auftragung der einen der beiden Geraden  $B'J'$  oder  $A'J''$  stets die andere schnell festgelegt werden kann.

Aus der Bedingung, daß sich die Geraden  $A'L_1$  und  $B'L_2$  in der Senkrechten durch den Schnittpunkt  $F$  der Gurtstäbe  $O$  und  $U$  treffen müssen, folgt noch: Bestimmt man in den Senkrechten durch  $F_1$  und  $F_2$  die Punkte  $C_1$  und  $C_2$  der Geraden  $O$ , ferner den Punkt  $R_1$  der Geraden  $CL_2$  und den Punkt  $R_2$  der Geraden  $CL_1$ , so muß der Schnittpunkt  $G$  der Geraden  $L_1L_2$  und  $R_1R_2$  in der Senkrechten durch den Schnittpunkt  $M$  der Geraden  $C_1F_2$  und  $C_2F_1$  liegen. Bringt man weiter  $O$  mit der linken Auflagersenkrechten zum Schnitt,  $U$  mit der rechten, so trifft die Verbindungslinie der beiden Schnittpunkte die Gerade  $C_1F_2$  in einem Punkte  $E$ , der senkrecht über dem Nullpunkte  $N$  (der in Figur 218 bereits auf andere Weise bestimmt worden ist) liegt. Es leuchtet ein, daß die Einflußlinie durch die Strecke  $v$  und einen der beiden Punkte  $G$  und  $N$  vollständig bestimmt ist. Greifen die Lasten in den Knotenpunkten der oberen Gurtung an, Fig. 225, so wird  $v$  durch Zerlegung der Last 1 nach den Richtungen  $O$  und  $D$  gewonnen.

Um die Einflußlinie für die Spannkraft in einem Gurtstabe zu finden, beachte man, daß diese Kraft im geraden Verhältnis steht zu dem Angriffsmoment für den dem fraglichen Stabe gegenüberliegenden Knotenpunkt. So ist z. B. die Spannkraft  $O_m$  der oberen Gurtung (Fig. 227):  $O_m = -\frac{M_m}{r_m}$ , wo  $M_m =$  Angriffsmoment in Bezug auf

Knotenpunkt  $m$  und  $r_m =$  Abstand des Punktes  $m$  vom Stabe  $O_m$ . Greift nun die Belastung an der unteren Gurtung an und zeichnet man ein Dreieck  $A'CB'$ , dessen Spitze  $C$  senkrecht unter  $m$  liegt, und dessen Seite  $B'C$  auf der Senkrechten durch  $A$  die Strecke  $A'J' = x_m$  abschneidet, so ist dieses Dreieck die Einflußfläche für  $M_m$ .

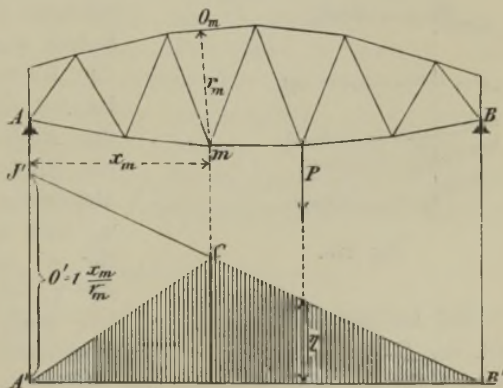


Fig. 227.

Macht man  $A'J' = -\frac{x_m}{r_m}$ , so ist Dreieck  $A'CB'$  die Einflußfläche für  $O_m$ . Will man den für den Belastungszustand:  $A = \text{Eins}$  gezeichne-

ten Kräfteplan benutzen, was namentlich dann zu empfehlen ist, wenn die Einflußlinien für die Spannkkräfte  $D$  auf die vorhin beschriebene Weise gezeichnet werden, so mache man  $A'J' = O'$ .

Daß  $O' = -\frac{x_m}{r_m}$  ist, erkennt man, indem man das *Rittersche* Verfahren auf den Belastungszustand  $\lambda = 1$  anwendet.

Für spätere Untersuchungen wird sich noch die Lösung der folgenden Aufgabe als nützlich erweisen. Gegeben sind die Einflußlinien für die Spannkkräfte  $O$  und  $U$  in sämtlichen Gurtstäben eines Dreiecknetzes (gleichgültig ob einfacher Balken, oder *Gerberscher* Balken oder irgend eine andere Trägerart); gesucht sind die Einflußlinien für die Spannkkräfte  $D$  in den Füllungsstäben.

Zunächst werde vorausgesetzt, daß die über den Träger wandernde senkrechte Lasteinheit in den Knotenpunkten der oberen Gurtung angreift. Die an einem Knotenpunkte  $K$  der unteren Gurtung wirkenden Spannkkräfte mögen mit  $U_1, U_2, D_1, D_2$  bezeichnet werden, Fig. 228.

Die Ordinaten der Einflußlinien dieser Spannkkräfte seien an ein und derselben (beliebigen) Stelle  $C$  beziehungsweise  $= \tau_{11}, \tau_{12}, \tau'_{11}, \tau'_{12}$ ; sie stellen diejenigen Spannkkräfte  $U_1, U_2, D_1, D_2$  vor, welche durch eine in  $C$  angreifende Last  $P = 1$  hervorgerufen werden. Sind  $\tau_{11}$  und  $\tau_{12}$  bekannt, so findet man  $\tau'_{11}$  und  $\tau'_{12}$ , indem man das Kräftepolygon für den Knotenpunkt  $k$  zeichnet; man ist auf diese Art im stande, aus den Einflußlinien für  $U_1$  und  $U_2$  die Einflußlinien für  $D_1$  und  $D_2$  abzuleiten. In der Fig. 228 wurden  $\tau_{11}$  und  $\tau_{12}$  positiv angenommen; für  $\tau'_{11}$  ergab sich ein positiver, für  $\tau'_{12}$  ein negativer Wert.

Auf die gleiche Weise lassen sich, wenn die Belastung unten angreift, die  $D$ -Linien aus den  $O$ -Linien ableiten; es werden dann Kräftepolygone für die Knotenpunkte der oberen Gurtung gezeichnet.\*)

\*) Es ist in der Regel vorteilhaft, keineswegs aber Bedingung, die Kräftepolygone für die Knoten der *unbelasteten* Gurtung zu zeichnen. Man könnte z. B. auch  $D_2$  in Fig. 228 mit Hilfe des Kräftepolygons für den oberen Knoten  $L$  bestimmen; nur muß man dann darauf achten, daß, falls  $P$  bei  $L$  liegt, diese Kraft in das fragliche Polygon einzureihen ist.

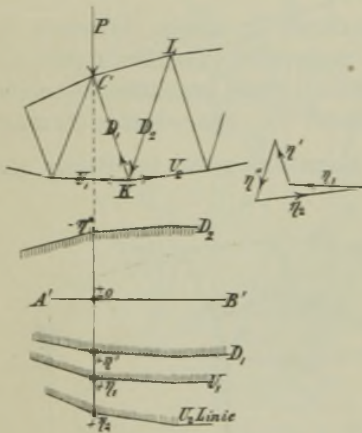


Fig. 228.





In dem in der Fig. 229 dargestellten Falle kommt dann auf einen Knotenpunkt der oberen Gurtung die Last  $g_o\lambda$ , auf einen Knotenpunkt der unteren Gurtung die Last  $g_u\lambda$ . Der für diesen Belastungsfall (nach den im § 27 entwickelten Regeln) gezeichnete Cremonasche Plan liefert die in den Gurtungen und den Wand-

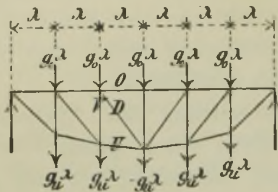


Fig. 229.

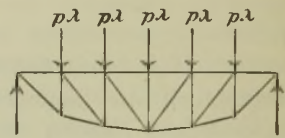


Fig. 230.

gliedern durch die ständige Belastung hervorgerufenen Spannkkräfte  $O_g$ ,  $U_g$ ,  $D_g$ ,  $V_g$ ; der Kräfteplan für den Belastungsfall in Fig. 230 liefert die größten Werte  $O_p$  und  $U_p$ , zu denen schließlich die  $O_g$  und  $U_g$  addiert werden.

Meistens begeht man nur einen unwesentlichen Fehler, wenn man bei oben liegender Fahrbahn die gesamte Last  $g$  oben angreifend annimmt und bei unten liegender Fahrbahn nur die unteren Knoten mit  $g$  belastet. Es genügt dann im vorliegenden Falle, einen Kräfteplan für den in der Fig. 231 dargestellten Zustand gänzlicher Belastung zu zeichnen; er liefert neben den größten Werten  $O$  und  $U$  noch für die Wandglieder gewisse Spannkkräfte  $D_q$  und  $V_q$ , aus denen sich die Spannkkräfte  $D_g$  und  $V_g$  mit Hilfe der Gleichungen

$$D_g = \frac{g}{q} D_q \quad \text{und} \quad V_g = \frac{g}{q} V_q$$

ermitteln lassen. Die Multiplikation mit  $\frac{g}{q}$  kann in der auf Seite 193 beschriebenen Art durch Zeichnung ausgeführt werden.

### b. Die Verkehrslast besteht aus einem Zuge von Einzellasten.

145. Die Spannkraft  $O$  in einem Stabe  $BC$  (Fig. 232), welchem der Knotenpunkt  $A$  gegenüberliegt, ist nach Seite 212:  $O = -\frac{M}{r}$ , wobei  $M$  das Angriffsmoment für den Knoten  $A$  und  $r = \overline{AE}$  die



Länge des von  $A$  auf  $BC$  gefällten Lotes bedeutet. Hat man  $M$  mit Hilfe des in No. 82 beschriebenen Verfahrens in der Form  $H y$  dargestellt ( $H =$  Polweite des benutzten Seilpolygons), so ergibt sich (ohne

Vorzeichen)  $O = H \frac{y}{r}$ . Trägt man

also auf  $AE$  die Strecke  $AE' = y$  auf, macht  $\overline{BD} = H$  und zieht durch  $E'$  zu  $BC$  eine Parallele, welche  $AB$  in  $B'$  und  $AD$  in  $D'$  schneidet, so ist  $\overline{B'D'} = O$ . Ist die in Fig. 233 mit  $a$  bezeichnete wagerechte Projektion der Gurtstäbe konstant, so empfiehlt es sich, für  $H$  ein Vielfaches von  $a$  zu wählen, also  $H = \varepsilon a$  zu setzen, wobei  $\varepsilon$  eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Bezeichnet man dann die senkrechte Höhe des Trägers im Punkte  $A$  mit  $h$  und den Neigungswinkel des Gurtstabes gegen die Wagerechte mit  $\beta$ , so erhält man (wegen  $r = h \cos \beta$ ) die Gleichung

$$O = - \frac{M}{h} \sec \beta$$

und (wegen  $M = \varepsilon a y$ ) ohne Vorzeichen:  $\frac{1}{\varepsilon} O = a \sec \beta \frac{y}{h} = \overline{BC} \frac{y}{h}$ ;

denn es ist  $\overline{BC} = a \sec \beta$ .

Trägt man nun auf der Senkrechten  $AR$  die Strecke  $\overline{AR'} = y$  auf und zieht durch  $R'$  zu  $BC$  eine Parallele, welche  $AB$  in  $B'$  und  $AC$  in  $C'$  schneidet, so erhält man

$$\overline{B'C'} = \frac{1}{\varepsilon} O, \text{ also}$$

$$O = \varepsilon \cdot \overline{B'C'}$$

Auf dieselbe Weise werden die Kräfte  $U$  bestimmt.

Es empfiehlt sich, zur Ermittlung der  $O$  und  $U$  ein in möglichst großem Maßstabe gezeichnetes Trägernetz zu benutzen, damit tunlichst alle Linien  $B'C'$  innerhalb des Netzes liegen. Der Kräfteplan zeichnet sich dann durch große Übersichtlichkeit aus. Die Multiplikation mit  $\varepsilon$  führt man am besten aus, indem man den Kräftemaßstab ändert. Hat man beispielsweise  $H = \varepsilon a = 2a$  gewählt und bei der Ermittlung

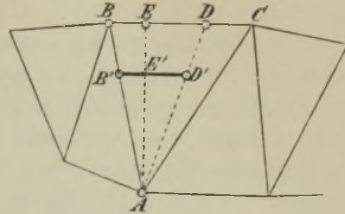


Fig. 232.

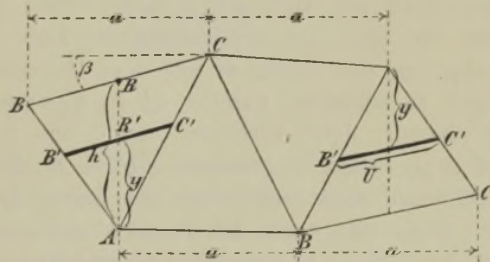


Fig. 233.

der Momente den Kräftemaßstab  $1^{\text{cm}} = 20'$  angewendet, so geben die Strecken  $B'C'$ , im Maßstabe  $1^{\text{cm}} = \varepsilon \cdot 20 = 40'$  gemessen, die Kräfte  $O$  und  $U$  an.

**146. Aufgabe. Paulischer Bogensehnenträger.** Es ist die Form eines Fachwerkbalkens zu bestimmen, dessen Obergurtstäbe durch gleich große Spannkraften  $O$  beansprucht werden. Die untere Gurtung sei wagrecht; die Wandglieder seien abwechselnd senkrecht und geneigt. Der Träger sei symmetrisch in Bezug auf die Senkrechte durch seine Mitte; das Lot vom mittelsten Knotenpunkte der unteren Gurtung auf den gegenüberliegenden Obergurtstab soll die vorgeschriebene Länge  $r_4$  erhalten. Vergl. Fig. 234, in welcher die Felderzahl = 8 ist. Die Feldweite sei  $\lambda$ .

Man ermittelt zunächst nach No. 82 (vergl. Fig. 128 u. 130 auf Tafel 1) die den Knotenpunkten 1, 2, 3, 4 entsprechenden Ordinaten  $y_1, y_2, y_3, y_4$  und zwar mit Hilfe einer Polweite  $H = \varepsilon \lambda^*$ ). Hierauf findet man für den Gurtstab  $ed$  die Spannkraft  $O = \frac{Hy_4}{r} = \varepsilon \frac{y_4 \lambda}{r_4}$ , wofür nach einer entsprechenden Änderung des Kräftemaßstabes gesetzt werden darf;  $O = \frac{y_4 \lambda}{r_4}$ . Dieser Wert wird zweckmäßig durch

Zeichnung bestimmt, Fig. 234b. Gesetzt nun, es sei die Lage des Gurtstabes  $ab$  bekannt. Macht man dann  $\overline{1b'} = y_1$  und zieht  $b'a' \parallel ba$ , so stellt die Strecke  $b'a'$  die Spannkraft im Stabe  $ba$  vor. Diese Spannkraft soll aber gleich dem vorhin gefundenen Werte  $O$  sein; man hat also, um die unbekannte Lage von  $ab$  zu bestimmen, nur nötig, um den Punkt  $b'$  mit dem Halbmesser  $\overline{b'a'} = O$  einen Kreisbogen zu schlagen, welcher  $a1$  in  $a'$  schneidet und hierauf  $ab \parallel a'b'$  zu ziehen. Jetzt verbindet man  $b$  mit 2 durch eine Gerade, macht  $\overline{2c'} = y_2$ , trägt die Strecke  $\overline{c'b''} = O$  ein und zieht  $bc \parallel b''c'$ . So fortfahrend kann man auch die Lagen der Stäbe  $ed$  und  $de$  finden.

Zieht man durch den Punkt  $b'$  zur unteren Gurtung eine Parallele, welche die Füllungsstäbe  $b2$  und  $c2$  beziehungsweise in  $b_1$  und  $c_1$  schneidet, so stellt die Strecke  $b_1c_1$  die Spannkraft  $U_2$  im Untergurtstabe 12 vor; denn es ist (mit  $\overline{1b} = h_1$ ):  $U_2 = \frac{M_1}{h_1} = \frac{Hy_1}{h_1} = \frac{\lambda y_1}{h_1}$ , und für die Strecke  $b_1c_1$  findet man leicht den Wert  $\overline{b_1c_1} = \frac{\lambda y_1}{h_1}$ . In gleicher Weise werden die Spannkraften  $U_3$  und  $U_4$  der Stäbe 23 und 34

\*) Es wird daran erinnert, daß es sich um die durch Verkehrslast und ständige Belastung hervorgebrachten Momente  $Hy$  handelt.

gefunden.  $U_1$  ist gleich der wagerechten Seitenkraft der Spannkraft  $O$  im Stabe  $ab$ .

In der Fig. 234c ist noch der häufig vorkommende Fall dargestellt worden, in welchem der Träger an dem einen oder an beiden Enden ein Feld von der Länge  $\lambda_1$  besitzt, während alle übrigen Feldweiten  $= \lambda$  sind. Es muß dann aufgetragen werden:  $\overline{1b'} = y_1 \frac{\lambda}{\lambda_1}$ ; im übrigen aber ist genau wie vorherin zu verfahren.

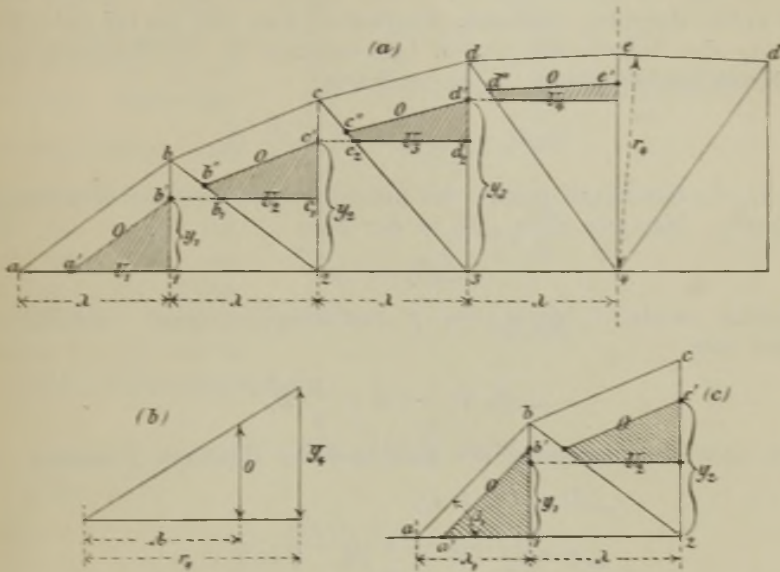


Fig. 234 a, b u. c.

Hervorzuheben ist allerdings, daß bei Eisenbahnbrücken die Linie der größten Momente  $Hy$  infolge der ungleichen Radstände und Achslasten, recht unregelmäßig verläuft, und daß die strenge Erfüllung der Bedingung einer gleich großen Obergurt-Spannkraft zu einer ästhetisch nicht befriedigenden Gurtform führt. Man wird also gut tun, die  $y$ -Linie vorher etwas abzurunden.

Bei gleichförmiger Verkehrslast ist die Linie der größten Momente eine Parabel (Fig. 124 Seite 135); es müssen sich also auch die Längen  $r_1, r_2, r_3, r_4$  der von den Knotenpunkten 1, 2, 3, 4 auf die gegenüberliegenden Obergurtstäbe gefällten Lote zueinander verhalten, wie die Ordinaten einer über der Spannweite  $l$  errichteten Parabel, deren Pfeilhöhe zweckmäßig gleich  $r_4$  gemacht wird. Die Gurtstücke  $ab, bc, cd, \dots$  sind bestimmt als Tangenten der um die Punkte 1, 2, 3,  $\dots$  mit den Halbmessern  $r_1, r_2, r_3, \dots$  beschriebenen Kreisbögen.



## § 32.

## Spannkräfte in den Füllungsstäben.

## a. Gleichmäßige Belastung.

147. Aus den in No. 142 durchgeführten Untersuchungen geht hervor, daß die Laststellungen, welche  ${}_{max}D_p$  und  ${}_{min}D_p$  erzeugen, sich zur vollen Belastung ergänzen. Bezeichnet man also die bei voller Belastung des Balkens mit  $p$  f. d. Längeneinheit in der Diagonale entstehende Spannkraft mit  $D_p$ , so muß sein

$${}_{max}D_p + {}_{min}D_p = D_p = \frac{p}{g} D_g,$$

wo  $D_g$  die Spannkraft infolge der gleichförmigen ständigen Belastung  $g$  bedeutet. Hat man also  ${}_{max}D_p$  in der Form

$${}_{max}D_p = Cp$$

erhalten, worin  $C$  einen von  $p$  unabhängigen Wert vorstellt, so findet man

$${}_{min}D_p = -Cp + \frac{p}{g} D_g$$

und, nach Hinzurechnung des Einflusses der ständigen Belastung

$${}_{max}D = Cp + D_g$$

$${}_{min}D = -Cp + \frac{q}{g} D_g. \quad q = g + p.$$

Nun ist aber der Inhalt des positiven Teiles der Einflußfläche (Fig. 226 Seite 240) gleich  $\frac{1}{2} p \xi \eta_2$  und man erhält deshalb

$${}_{max}D_p = \frac{1}{2} p \xi \eta_2.$$

Hiernach ist  ${}_{max}D_p$  gleich der Spannkraft, die in der Diagonale  $CF_2$  durch eine in  $F_2$  angreifende Einzellast von der Größe  $\frac{1}{2} p \xi$  hervorgerufen wird, und es wird daher der oben mit  $C$  bezeichnete Wert:

$$C = \frac{1}{2} \xi \cdot D'.$$

Der Nullpunkt  $N$  wird nach dem auf Seite 236 beschriebenen Verfahren ermittelt.

148. **Näherungsregel.** Die Ermittlung der Grenzwerte der Spannkräfte  $D$  wird etwas vereinfacht, wenn die bewegliche Last nur in den Knotenpunkten auf der einen Seite des Schnittes  $tt$  angreift. Handelt es sich z. B. um die Spannkraft  ${}_{max}D_p$  in der linkssteigenden



Diagonale  $CF_2$  (Fig. 235), so nehme man an, daß der Träger zwischen  $F_2$  und  $B$  gleichförmig belastet ist und in  $F_2$  noch die Einzellast  $\frac{p\lambda}{2}$  trägt, wobei  $\lambda$  die wagerecht gemessene Stützweite des Feldes  $F_1F_2$  bedeutet. Man rechnet

dann etwas zu ungünstig, weil man gewissermaßen das Feld  $F_1F_2$  mit  $p\lambda$  belastet denkt und den negativen Einfluß der in  $F_1$  angreifenden Knotenlast  $\frac{p\lambda}{2}$  vernachlässigt. Links vom Schnitte  $tt$  greift jetzt nur  $A$  an, und zwar ergibt sich mit den aus der Figur ersichtlichen Bezeichnungen aus der auf  $B$  bezogenen Momentengleichung:

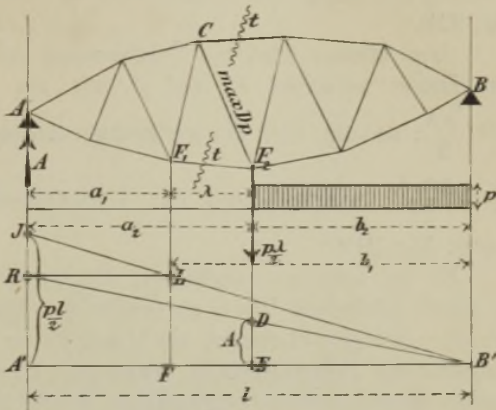


Fig. 235.

$$Al - pb_2 \frac{b_2}{2} - \frac{p\lambda}{2} b_2 = 0$$

für  $A$  der Wert

$$A = \frac{pb_2(b_2 + \lambda)}{2l} = \frac{pb_1b_2}{2l}$$

Um  $A$  durch Zeichnung zu bestimmen, trage man von einer Wagerechten  $A'B'$  aus auf der linken Auflagersenkrechten die Strecke  $A'J = \frac{pl}{2}$  auf und bringe die Gerade  $B'J$  mit der Senkrechten durch  $F_1$  in  $L$  zum Schnitt. Nun ziehe man  $LR \parallel B'A'$  und verbinde  $R$  mit  $B'$  durch eine Gerade; letztere schneidet auf der Senkrechten durch  $F_2$  den gesuchten Wert  $ED = A$  ab. Denn es ist

$$\overline{ED} = \overline{A'R} \frac{b_2}{l} = \overline{FL} \frac{b_2}{l} = \overline{A'J} \frac{b_1}{l} \frac{b_2}{l} = \frac{pl}{2} \frac{b_1}{l} \frac{b_2}{l} = \frac{pb_1b_2}{2l} \quad *)$$

Nach Ermittlung von  $A$  findet man

$$m_{ax} D_p = A \cdot D'$$

\*) Bei gleich großen Feldweiten findet man auch  $A$  sehr übersichtlich mittels eines die Knotenlasten verbindenden  $A$ -Polygons.

Gleichzeitig mit der Spannkraft  $_{max}D_p$  der Diagonale  $CF_2$  entsteht  $_{min}D_p$  in der Diagonale  $CF_1$ , es kann also jeder Wert  $A$  zur Berechnung zweier Diagonalen verwertet werden.

Nach Ermittlung von  $A$  kann man die Spannkraft  $_{max}D_p$  sehr schnell mit Hilfe des Culmannschen Verfahrens bestimmen. Vergl. Fig. 216.

Ganz ebenso wird bei Bestimmung von  $_{min}D_p$  verfahren. Es wird der Träger zwischen  $F_1$  und  $A$  mit  $pa_1$  belastet, außerdem in  $F_1$  mit  $\frac{p\lambda}{2}$ ; sodann wird der am rechten Auflager angreifende Widerstand

$B = \frac{pa_1a_2}{2l}$  ermittelt und das Culmannsche Verfahren angewendet.

Vergl. Fig. 217.

Es ist sehr zu empfehlen, die Grenzwerte  $_{max}D_p$  und  $_{min}D_p$  stets in dieser einfachen Weise zu ermitteln. Man erhält für die Diagonalen größere Beanspruchungen, als wenn die in den Figuren 218 bis 221 dargestellten Belastungsfälle vorausgesetzt werden und trägt gewissermaßen verschiedenen ungünstigen Einflüssen Rechnung, deren Feststellung zum Teil sehr schwierig, zum Teil noch gar nicht geglückt ist. Wir erinnern an dieser Stelle nur daran, daß alle bisherigen Entwicklungen an die Voraussetzung gelenkartiger Knotenpunkte gebunden sind, also an eine Annahme, welche bei Anwendung von Nietverbindungen gar nicht und selbst bei Anordnung von zweckmäßig ausgebildeten Gelenkbolzen wegen der an diesen auftretenden Reibungswiderstände nur annähernd erfüllt ist. Wir werden uns mit den Spannungen, welche durch starre Knotenverbindungen hervorgerufen werden (und welche man als *Nebenspannungen* zu bezeichnen pflegt), später noch zu beschäftigen haben. Die betreffenden Untersuchungen führen meistens zu recht langwierigen Zahlenrechnungen und werden deshalb zurzeit nur selten durchgeführt.

## b. Beanspruchung durch einen Zug von Einzellasten.

149. Die ungünstigste Zugstellung. Wir betrachten eine linkssteigende Diagonale  $CF_2$ , Fig. 236. Die Lasten mögen an den Knoten der unteren Gurtung angreifen. Es soll diejenige Stellung der Verkehrslast gefunden werden, welche  $_{max}D_p$  hervorruft. Wir ermitteln auf die vorhin beschriebene Weise die Belastungsscheide  $E$  und nehmen an, es sei die Einflußlinie für  $D$  gegeben; sie besteht nach der in No. 143 durchgeführten Untersuchung aus drei Geraden *I*, *II*, *III*, welche den Trägerteilen  $AF_1$ ,  $F_1F_2$ ,  $F_2B$  entsprechen; der Nullpunkt  $N$  liegt auf der Senkrechten durch  $E$ . Der Lastenzug sei von  $B$  aus bis in





Vorausgesetzt ist hierbei, daß keine neue Last auf den Träger gekommen ist und daß eine Last, welche vor der Verschiebung außerhalb des Feldes  $F_1F_2$  lag, sich auch nach der Verschiebung noch rechts von  $F_2$  befindet. Eine etwa in  $F_2$  angreifende Last gehört nach der Verschiebung zu  $\Sigma'P$ ; vor der Verschiebung ist sie ohne Einfluß auf die Summe  $\Sigma'Pb'$ .

Ist nun  $\Delta D > 0$ , d. h. ist

$$\frac{\Sigma P}{\Sigma P'} > \frac{\xi}{\xi'}$$

so wird infolge der vorgenommenen Zugverschiebung die Spannkraft  $D$  vergrößert, und es ergibt sich daher zur Bestimmung der ungünstigsten Stellung der Verkehrslast die folgende einfache Regel.

Man nehme zuerst die *Grundstellung* an, setze also voraus, daß die erste Last des von  $B$  aus vorrückenden Belastungszuges bei  $F_2$  liegt. Diese Stellung erzeugt in den meisten Fällen die Spannkraft  ${}_{max}D_p$ . Nun denke man den Zug nach links verschoben, so daß  $P_1$  in das Feld  $F_1F_2$  tritt, und sehe nach, ob  $\frac{\Sigma P}{P_1} > \frac{\xi}{\xi'}$  ist. Ist dies nicht der Fall, so ist die Grundstellung die gefährlichste; ist hingegen  $\frac{\Sigma P}{P_1} > \frac{\xi}{\xi'}$ , so muß der Lastenzug nach links verschoben werden; es wird dann die Last  $P_2$  über  $F_2$  gestellt und die Ungleichung  $\frac{\Sigma P}{P_1 + P_2} > \frac{\xi}{\xi'}$  untersucht; wird dieselbe erfüllt, so muß  $P_3$  über  $F_2$  gestellt werden u. s. w.

Soll die ungünstigste Stellung des Lastenzuges durch Zeichnung bestimmt werden, so reihe man die Lasten  $P_1, P_2, P_3 \dots$  von  $B'$  aus auf einer Senkrechten aneinander;\*) den Belastungszug selbst zeichne man auf einen Papierstreifen, um ihn bequem gegen den Träger verschieben zu können. Nachdem festgestellt worden ist, wieviel Lasten sich in der Grundstellung auf dem Träger befinden (wobei eine etwa bei  $B$  liegende Last mitgezählt wird), bestimme man auf der Senkrechten durch  $B'$  die Strecke  $B'J = \Sigma P$  (also in Fig. 236:  $B'J = P_1 + P_2 + \dots + P_7$ ), und verbinde  $J$  mit dem Nullpunkte  $N$  durch eine Gerade, welche die Senkrechte durch  $F_2$  in  $R$  schneiden möge. Trifft nun eine durch  $R$  gelegte Wagerechte die auf der Senkrechten  $B'J$  aufgetragene Last  $P_1$ , so ist die Grundstellung die gefährlichste, trifft sie eine andere Last  $P_m$ , so muß der Zug so weit nach links verschoben werden, daß  $P_m$  beim Knoten  $F_2$  liegt. In dem in der Fig. 236 dargestellten Falle muß also  $P_2$  in  $F_2$  angreifen, damit  ${}_{max}D_p$

\*) In der Fig. 236 wurden die Lasten mit den Ziffern 1, 2, 3, . . . bezeichnet.



entsteht. Infolge der Verschiebung des Zuges ändert sich natürlich im allgemeinen die Summe  $\Sigma P$  der auf dem Träger befindlichen Lasten. Rückt man z. B. den Zug in Fig. 236 so weit vor, daß  $P_2$  bei  $F_2$  liegt, so wächst  $\Sigma P$  um  $P_3$ . Punkt  $J$  ist zu ersetzen durch  $J'$ , ferner  $R$  durch  $R'$ . Die Wagerechte durch  $R'$  trifft wieder die Last  $P_2$ , und hieraus folgt dann, daß eine weitere Verschiebung des Zuges unterbleiben muß.

In gleicher Weise läßt sich die Frage entscheiden, die wievielte Last eines von  $A$  aus vorrückenden Zuges bei  $F_1$  liegen muß, damit  ${}_{\min} D_p$  entsteht.

Bei den üblichen Feldweiten der Eisenbahnbrücken kommen nur zwei Belastungsfälle in Betracht; entweder muß  $P_1$  oder  $P_2$  über dem Querträger liegen.

**150. Ermittlung der Spannkraft  $D$  für Grundstellungen. Erstes Verfahren.** In den folgenden Untersuchungen soll es sich nur um den Einfluß der Verkehrslast handeln. Indem wir dies ausdrücklich hervorheben, unterlassen wir es, die Spannkraft durch den Zeiger  $p$  zu kennzeichnen.

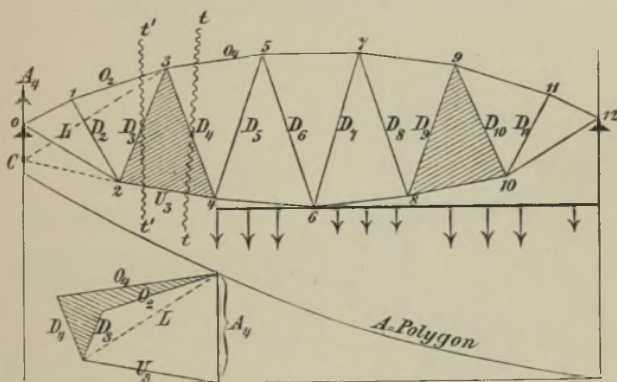


Fig. 237.

Um die Spannkraft  ${}_{\max} D_4$  in der Diagonale 34 des in Figur 237 dargestellten Balkens zu finden, belaste man den Balken rechts vom Schnitte  $tt'$ . Wirkt die Last am Untergerute, so muß die Verkehrslast vom rechten Auflager aus bis Knoten 4 vorrücken. Links von  $tt'$  greift nur der Stützenwiderstand  $A_4$  an. Besteht die Verkehrslast aus einem beweglichen Lastenzuge, so wird  $A$  mit Hilfe des in No. 81 eingeführten  $A$ -Polygons bestimmt.

Bringt man nun  $U_3$  mit  $A_4$  in  $C$  zum Schnitt, verbindet  $C$  mit 3 durch die Gerade  $L$ , zerlegt  $A_4$  nach den Richtungen von  $U_3$  und  $L$ , hierauf Hilfskraft  $L$  nach den Richtungen von  $O_4$  und  $D_4$ , so erhält man



$\frac{p\lambda}{2}$  hinzugefügt wurde. Am linken Auflager greift  $A_4$  an. Infolge dieser Belastung entstehen gleichzeitig:  $max D_3$  und  $min D_4$ . Bei der Anwendung des Culmannschen Verfahrens wurde  $O_3$  mit  $A_4$  in  $C$  zum Schnitte gebracht. Die Gerade  $L$  verbindet dann den Punkt  $C$  mit dem Knoten 3. Nach Ermittlung von  $D_4$  ergab sich  $D_3$  aus dem Kräftepolygone für den unteren Knoten 3\*).

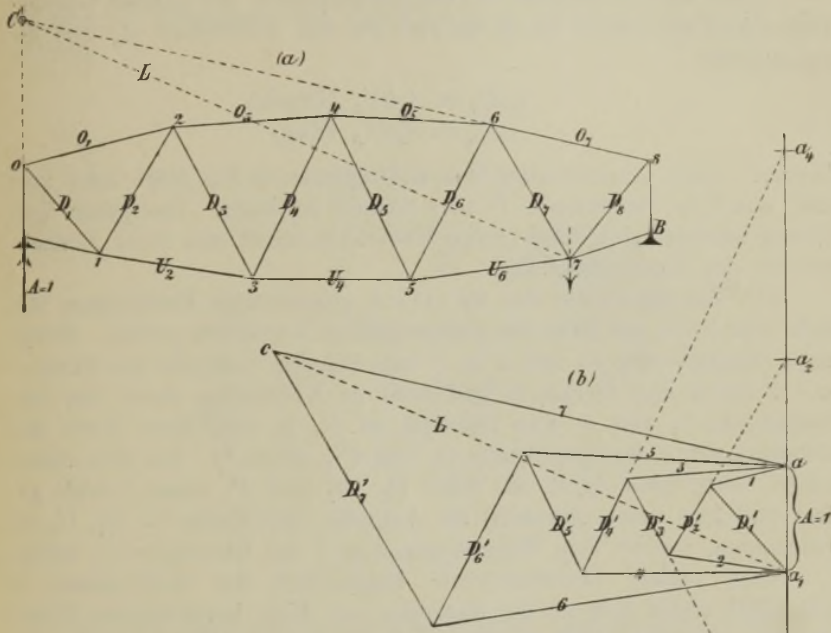


Fig. 239 a u. b.

**151. Zweites Verfahren.** Man denke den letzten Knotenpunkt vor dem Auflager  $B$  so belastet, daß am linken Auflager der Widerstand  $A = Eins$  hervorgerufen wird und zeichne einen Cremonaschen Kräfteplan, welcher nur die Spannkkräfte in den links von jenem belasteten Knoten befindlichen Stäben zu enthalten braucht\*\*), Fig. 239. Dieser Plan möge

\*) Man könnte auch  $U_2$  oder  $U_4$  mit  $A$  zum Schnitt bringen. Im ersten Falle verbindet  $L$  den Punkt  $A_4 U_2$  mit 2, im zweiten Falle den Punkt  $A_4 U_4$  mit 4. Wir empfehlen dem Leser, stets mehrere Verfahren anzuwenden, um durch Vergleichung der Ergebnisse die Zuverlässigkeit der Zeichnung zu prüfen.

\*\*) Es ist deshalb auch nicht nötig, anzugeben, wie groß die Last sein muß, welche  $A = 1$  hervorbringt.



für die Diagonalen die Spannkkräfte  $D'$  liefern. Greift nun die Verkehrsbelastung in den Knotenpunkten der oberen Gurtung an, und ist sie beispielsweise von  $B$  aus bis zum Knoten 4 vorgerückt, so entsteht gleichzeitig  ${}_{max}D_3$  und  ${}_{min}D_4$ . Bei dieser Laststellung wirkt am linken Auflager der Widerstand  $A_4$ ; er ruft die Spannkkräfte hervor

$$(1) \quad \begin{cases} {}_{max}D_3 = A_4 D'_3 & (\text{Zug}) \\ {}_{min}D_4 = A_4 D'_4 & (\text{Druck}). \end{cases}$$

Wirkt die Verkehrslast auf die Knotenpunkte der unteren Gurtung und reicht sie von  $B$  bis 5, so ruft sie den Widerstand  $A_5$  und die Spannkkräfte

$$\begin{aligned} {}_{min}D_4 &= A_5 D'_4 & (\text{Druck}) \\ {}_{max}D_5 &= A_5 D'_5 & (\text{Zug}) \end{aligned}$$

hervor. Nach Aufzeichnung des Kräfteplanes in Fig. 539b kann man also sämtliche Grenzwerte  $D$  sehr schnell ermitteln. Das ganze Verfahren zeichnet sich durch große Übersichtlichkeit und durch Einfachheit in der Begründung aus.

Die Zuverlässigkeit des für  $A = 1$  gezeichneten Kräfteplanes läßt sich sehr leicht mit Hilfe des Culmannschen Verfahrens prüfen. Bringt man beispielsweise  $O_7$  mit  $A$  in  $C$  zum Schnitt, verbindet den Punkt  $C$  mit 7 durch eine Gerade  $L$  und zieht im Kräfteplane durch den Anfangspunkt  $a_1$  von  $A$  eine Parallele zu  $L$ , so muß diese durch den Schnittpunkt  $c$  der Spannkkräfte  $O_7$  und  $D'_7$  gehen.\*) Um dies einzusehen, denke man durch die Stäbe  $O_7$ ,  $D_7$  und  $U_6$  einen Schnitt gelegt und löse (nach Culmann) die Aufgabe: drei Kräfte  $O_7$ ,  $D_7$ ,  $U_6$  zu bestimmen, welche dem Widerstande  $A = 1$  das Gleichgewicht halten.

Eine andere beachtenswerte Eigenschaft des Kräfteplanes in Fig. 239b ergibt sich aus der folgenden von *Mohr* herrührenden Untersuchung. Es sei durch das Fachwerk ein Schnitt geführt, welcher  $O_3$ ,  $D_3$  und  $U_2$  trifft, Fig. 240. Die am linken Trägereile angreifende Kraft  $A$  sei ersetzt durch zwei in 2 und 3 wirksame Kräfte  $P_1$  und  $P_2$ . Dieselben sind durch die Gleichungen gegeben

$$P_1 - P_2 = A; \quad P_1 \lambda_3 = A x_3.$$

Mit Hilfe der zweiten Bedingung läßt sich  $P_1$  auf die in der Fig. 240b angegebene Weise durch Zeichnung finden. Wird nun  $P_1$  nach den Richtungen von  $O_3$  und  $D_3$  zerlegt,  $P_2$  nach den Richtungen von  $U_2$  und  $D_3$ , so ergibt sich das in der Fig. 240c dargestellte, aus  $A$ ,  $O_3$ ,  $D_3$ ,  $U_2$  bestehende Kräftepolygon, und hieraus folgt, daß

\*) In der Fig. 239b haben wir die Spannkkräfte in den Gurtungen nur mit Ziffern bezeichnet.



in Fig. 239b die Verlängerung von  $D'_3$  auf der Richtungslinie von  $A$  die Strecke  $\overline{aa_3} = P_1$  abschneiden muß.

Sind die wagerechten Projektionen der Diagonalen gleich groß  $= \lambda$ , so ist  $x_3 = 3\lambda$  und  $P_1 = 3A$ . Dieser Fall ist in der Fig. 239 vorausgesetzt worden; es ergibt sich dann  $\overline{aa_3} = 3\overline{aa_1}$  und ebenso findet man  $a_1a_4 = 4a_1a$ , wobei  $a_4$  den Schnittpunkt von  $D'_4$  und  $A$  bezeichnet. Auf diese Weise ist man im stande, von vornherein auf der Verlängerung von  $A$  diejenigen Punkte anzugeben, durch welche im Kräfteplane die Verlängerungen der Spannkkräfte  $D'$  gehen müssen.

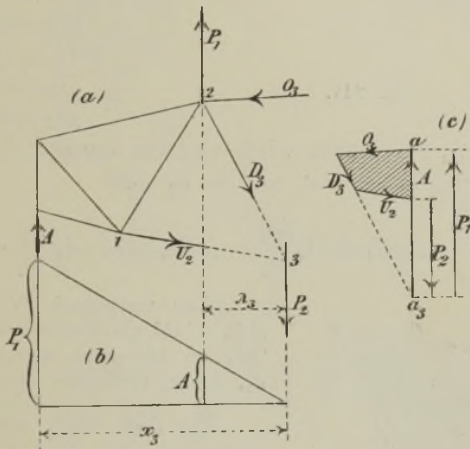


Fig. 240 a, b u. c.

Es kann vorkommen, daß sich für die Spannkkräfte der Stäbe in der Nähe von  $B$  sehr lange Linien ergeben. Man wähle dann für diese Kräfte einen kleineren Maßstab wie für die Spannkkräfte in der Nähe von  $A$ . Will man z. B.  $D'_8$ ,  $D'_6$  und  $D'_7$  in kleinerem Maßstabe haben, so verkleinere man das Kräftepolygon  $A O_3 D'_4 U_4$  und schließe an dieses verkleinerte Polygon (am besten in einer neuen Figur) die folgenden Kräftepolygone an. Noch zweckmäßiger ist es, das verkleinerte Polygon  $A O_3 D'_4 U_4$  mit Hilfe des Culmannschen Verfahrens zu ermitteln.

**152. Drittes Verfahren.** In der Figur 241 wurde die Spannkraft  $_{max}D_4$  für den Fall einer an der unteren Gurtung angreifenden Verkehrslast mittels des Culmannschen Verfahrens bestimmt und hierauf behufs Ermittlung von  $D_3$  das Kräftepolygon für den Knotenpunkt 3 gezeichnet. Es wurde jedoch die Reihenfolge der Kräfte in den einzelnen Polygonen anders gewählt wie früher. Die Last reicht von  $B$  bis 4,

so daß am linken Auflager der Widerstand  $A_4$  angreift. Legt man durch den Schnittpunkt  $C$  von  $U_3$  und  $A_4$  Parallelen zu  $O_4$  und  $O_2$ , deren erste den Stab 34 in  $4'$  und deren zweite den Stab 32 in  $3'$

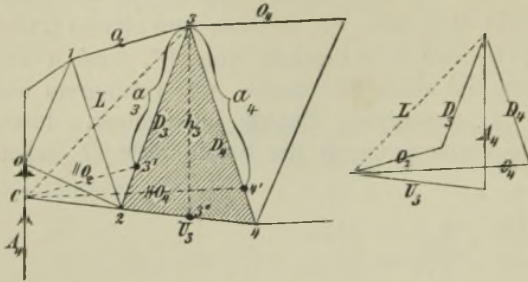


Fig. 241.

schneidet, zieht man ferner durch 3 eine Senkrechte, welche  $U_3$  in  $3''$  trifft, so ist das Dreieck  $C33''C$  ähnlich dem Kräftedreieck  $LA_4U_3$  und das Viereck  $C3'34'C$  ähnlich dem Kräfteviereck  $O_2D_3D_4O_4$ , und hieraus folgt, wenn die bei 3 gemessene senkrechte

Trägerhöhe mit  $h_3$  bezeichnet wird, und die Längen der Strecken  $34'$  und  $33'$  beziehungsweise  $= a_4$  und  $= a_3$  sind

$$(2) \quad \max D_4 = A_4 \frac{a_4}{h_3}; \quad \min D_3 = - A_4 \frac{a_3}{h_3}.$$

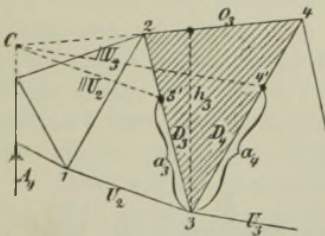


Fig. 242.

Das vorstehende Verfahren empfiehlt sich, sobald die Widerstände  $A$  mit Hilfe von Tabellen berechnet werden. Die Strecken  $a_4, a_3, h_3$  entnehme man einer Zeichnung.

Fig. 242 stellt den Fall dar, in welchem die Verkehrslast in den Knoten der oberen Gurtung angreift. Um  $\max D_3$  und  $\min D_4$  zu ermitteln, wird  $O_3$  mit  $A_4$  in  $C$  zum Schnitt gebracht. Durch  $C$  werden zu  $U_2$  und  $U_3$  Parallelen gezogen, welche beziehungs-

weise den Stab 32 in  $3'$  und den Stab 34 in  $4'$  treffen. Nach Messung von  $33' = a_3$  und  $34' = a_4$  ergibt sich

$$\max D_3 = + A_4 \frac{a_3}{h_3}; \quad \min D_4 = - A_4 \frac{a_4}{h_3}.$$

153. Der Lastenzug überschreitet die Grundstellung. Zunächst seien die Spannkraften  $\max D$  und  $\min D$  eines Balkens mit *oben* angreifender Verkehrslast gesucht, beispielsweise  $\max D_5$  und  $\min D_6$  für den Träger in Fig. 243. Der von  $B$  aus vorrückende Lastenzug habe die Grundstellung überschritten. Es greift dann links von dem durch  $O_5, D_6, U_6$  geführten Schnitte außer dem Stützenwiderstande  $A$  noch der Druck  $P'$  an, welchen die zwischen den Knoten 4 und 6 wirkenden

Lasten auf den Knoten 4 ausüben. Der Widerstand  $A$  wird stets durch die unter der ersten Last gelegene Ordinate des  $A$ -Polygons dargestellt, und  $P'$  kann nach dem auf Seite 139 angegebenen Verfahren bestimmt werden. In der Fig. 243 ist angenommen worden, daß die 2<sup>te</sup> Last beim Knoten 6 liegt. Es wird dann auf der Senkrechten durch 4, von der Wagerechten  $A'B'$  aus die Strecke  $\overline{ab} = P_1$  aufgetragen und die Gerade  $cb$

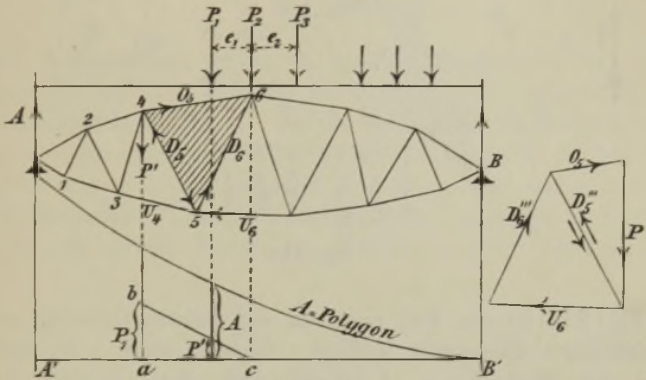


Fig. 243.

gezogen, wobei  $c$  den senkrecht unter 6 gelegenen Punkt der Geraden  $A'B$  bezeichnet. Die Gerade  $cb$  schneidet auf der Richtungslinie der Last  $P_1$  die Knotenlast  $P'$  ab. Steht die dritte Last bei 6, so muß

$$\overline{ab} = P_1 + P_2 \frac{e_2}{e_1 + e_2}$$

gemacht werden (Seite 139).

Die durch den Stützendruck  $A$  in den Diagonalen hervorgerufenen Spannkraften bestimme man auf die vorhin beschriebene Weise. Die von  $P'$  erzeugten Spannkraften sollen mit  $D'''$  bezeichnet werden; um sie zu finden, löse man die Aufgabe: „drei Kräfte  $O_5, D'''_6$  und  $U_6$  zu bestimmen, welche mit  $P'$  im Gleichgewichte sind.“ Da nun die (früher stets mit  $L$  bezeichnete) Linie, welche den Schnittpunkt von  $P'$  und  $O_5$  mit dem Schnittpunkte von  $U_6$  und  $D_6$  verbindet, mit  $D_5$  zusammenfällt, so hat man  $P'$  nach den Richtungen von  $O_5$  und  $D_5$  zu zerlegen, und  $D_5$  nach den Richtungen von  $D_6$  und  $U_6$ . Hierauf sind die Kräftepolygone so mit Pfeilen zu versehen, daß ihr Umfassungssinn ein stetiger ist. Man findet, daß  $P'$  in  $D_5$  einen Druck und in  $D_6$  einen Zug erzeugt.\*) Schließlich werden die durch  $A$  und  $P'$  hervorgerufenen

\*) Es ist meistens zu empfehlen, den Kräfteplan, welcher den Einfluß von  $P'$  angibt, in größerem Maßstabe zu zeichnen.



Spannkkräfte addiert. Ist beispielsweise der Einfluß von  $A$  mit Hilfe des zweiten Verfahrens (No. 151) ermittelt worden, so findet man

$$\max D_5 = AD'_5 + D'''_5; \quad \min D_6 = AD'_6 + D'''_6.$$

Es ist auf die Vorzeichen der Spannkkräfte zu achten.  $D'_5$  und  $D'''_6$  sind positiv,  $D'''_5$  und  $D'_6$  sind negativ.

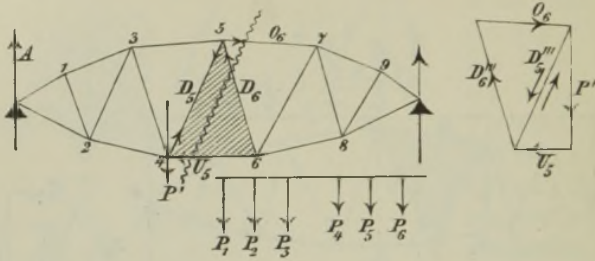


Fig. 244.

In Fig. 244 ist der Fall einer an der *unteren* Gurtung angreifenden Verkehrslast dargestellt worden. Gesucht sind  $\min D_5$  und  $\max D_6$ . Hat man den Einfluß von  $A$  wieder nach dem zweiten Verfahren bestimmt, so findet man

$$\min D_5 = A_6 D'_5 + D'''_5; \quad \max D_6 = A_6 D'_6 + D'''_6.$$

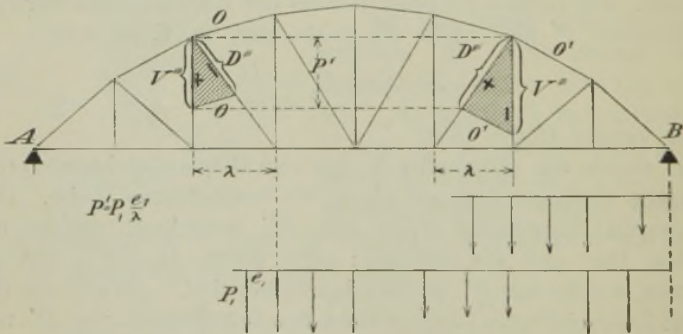


Fig. 245.

Die Spannkkräfte  $D'_6$  und  $D'''_5$  sind positiv;  $D'_5$  und  $D'''_6$  sind negativ.

Für den am häufigsten vorkommenden Fall eines Fachwerks mit Vertikalen und einer geraden Gurtung vereinfacht sich die vorstehende Untersuchung ganz erheblich. Liegt z. B. die Trägeranordnung in Fig. 245 vor, so findet man links von der Mitte  $V''' = + P'$ , während  $D''$



mittels einer Parallelen zu dem mit  $O$  bezeichneten Gurtstabe gewonnen wird. Rechts von der Mitte ist die senkrechte Projektion von  $D'''$  gleich  $P'$ ;  $V'''$  wird mittels einer Parallelen zum Gurtstabe  $O'$  bestimmt.

## § 33.

## Das Zimmermannsche Verfahren.

## a. Das Netzwerk.

154. Allgemeines. Durch ein irgendwie belastetes Netzwerk werde ein Schnitt  $tt$  geführt, welcher die Stäbe  $O_5$ ,  $D_5$ ,  $U_4$  trifft, Fig. 246. Die Mittelkraft aus den am linken Trägerteile angreifenden äußeren Kräften (welche sämtlich senkrecht sein mögen) sei  $Q$ ; sie habe von den Knoten 4 und 5 die Abstände  $e_4$  und  $e_5$  und werde in zwei senkrechte Seitenkräfte  $P_1$  und  $P_2$  zerlegt, von denen die erste durch den Knoten 4, die zweite durch den Knoten 5 geht. In der Fig. 246

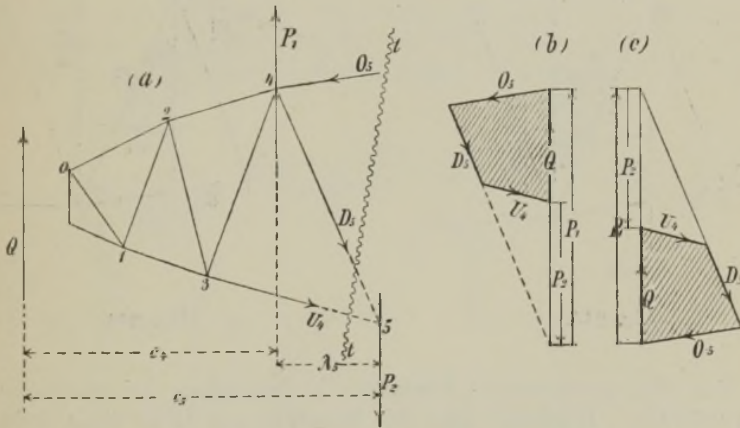


Fig. 246.

wurde die Querkraft  $Q$  positiv angenommen; sie ist dann nach oben gerichtet und liegt links vom Schnitte  $tt$ .  $P_1$  wirkt aufwärts,  $P_2$  abwärts; beide Kräfte sind, wenn die Horizontalprojektion der Länge des Stabes  $D_5$  mit  $\lambda_5$  bezeichnet wird, durch die Gleichungen gegeben

$$P_1 \lambda_5 = Q e_5; \quad P_2 \lambda_5 = Q e_4.$$

Außerdem ist

$$P_1 - P_2 = Q.$$

Beachtet man, daß  $Q e_5 = M_5$  das Angriffsmoment für den Knoten 5 ist und  $Q e_4 = M_4$  das Angriffsmoment für den Knoten 4, so erhält man

$$P_1 = \frac{M_5}{\lambda_5} \quad \text{und} \quad P_2 = \frac{M_4}{\lambda_5}.$$

Kennt man  $P_1$  und  $P_2$ , so kann man auf die bereits auf Seite 257 beschriebene Weise die Spannkraft  $O_5$ ,  $D_5$ ,  $U_4$  finden, indem man das Kräftepolygon in Fig. 246b oder 246c zeichnet. Dabei empfiehlt es sich, nach Zimmermann, das Kräftepolygon in das in entsprechend großem Maßstabe gezeichnete Trägernetz einzutragen, so zwar, daß die Spannkraft  $D_5$  mit dem Stabe  $D_5$  zusammenfällt. Man erhält dann die sehr übersichtlichen Anordnungen in Fig. 247 oder Fig. 248, welche den Figuren 246b und 246c entsprechen. Der Umfahrungssinn des geschlossenen Kräftepolygons ist durch den Sinn der Querkraft

$$Q = \frac{M_5}{\lambda_5} - \frac{M_4}{\lambda_5} \quad \text{gegeben.}$$

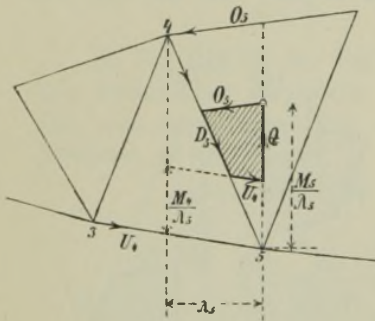


Fig. 247.

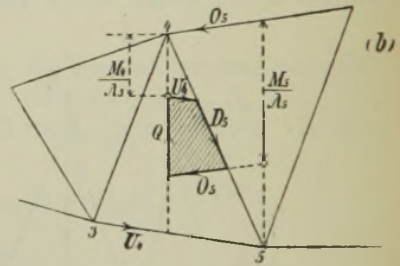


Fig. 248.

Das Zimmermannsche Verfahren ist besonders bei konstantem  $\lambda$  zu empfehlen. Bestimmt man die Momente mit Hilfe eines Seilpolygons, dessen Polweite  $= \varepsilon \lambda$  ist, wo  $\varepsilon$  eine beliebige Zahl bedeutet, und bezeichnet man die bei den Knoten 4 und 5 gemessenen Ordinaten des Seilpolygons mit  $y_4$ ,  $y_5$ , so erhält man (wegen  $M_m = H y_m = \varepsilon \lambda y_m$ ) sehr einfach:

$$\frac{M_5}{\lambda} = \varepsilon y_5; \quad \frac{M_4}{\lambda} = \varepsilon y_4.$$

Besitzen zwar nicht alle Diagonalen, jedoch die Mehrzahl derselben die gleiche Horizontalprojektion  $\lambda$ , so bleibt das Verfahren immerhin einfach, da man nur nötig hat, für die wenigen Felder mit verschiedenen großen  $\lambda$  eine kleine Hilfskonstruktion auszuführen. Hat z. B. die Horizontalprojektion der die Knoten 5 und 4 verbindenden Diagonale

die von  $\lambda = \frac{H}{\lambda}$  abweichende Länge  $\lambda'$ , so sind an Stelle der Werte  $\varepsilon y_5$  und  $\varepsilon y_4$  die Werte  $\frac{M_5}{\lambda'} = \frac{M_5}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{\lambda'} = \varepsilon y_5 \frac{\lambda}{\lambda'}$  und  $\frac{M_4}{\lambda'} = \varepsilon y_4 \frac{\lambda}{\lambda'}$  aufzutragen, welche nach Fig. 249 durch Zeichnung bestimmt werden können.\*)

In der Regel wird es sich empfehlen, die Strecken  $\varepsilon y$  durch die Ordinaten  $y$  zu ersetzen und den Kräftemaßstab entsprechend abzuändern. War dann beispielsweise der Kräftemaßstab für die Zeichnung, welche das Seilpolygon enthält: 1 Zentimeter =  $n$  Tonnen, so ergeben sich die Spannkkräfte im Maßstabe: 1 Zentimeter =  $\varepsilon n$  Tonnen.

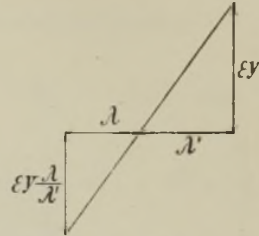


Fig. 249.

**155. Spannkkräfte in den Gurtungen.** Die Ermittlung der größten Spannkkräfte in den Gurtungen soll an dem in der Fig. 250 dargestellten Netzwerke erläutert werden. Die Verkehrslast bestehe aus einem Zuge von Einzellasten; sie erzeugt für die Knotenpunkte  $m$  Angriffsmomente, welche nach No. 82 mit Hilfe eines Seilpolygons in der Form  $M_m = H y_{p,m}$  dargestellt werden können, wobei  $H = \varepsilon \lambda$  zu wählen

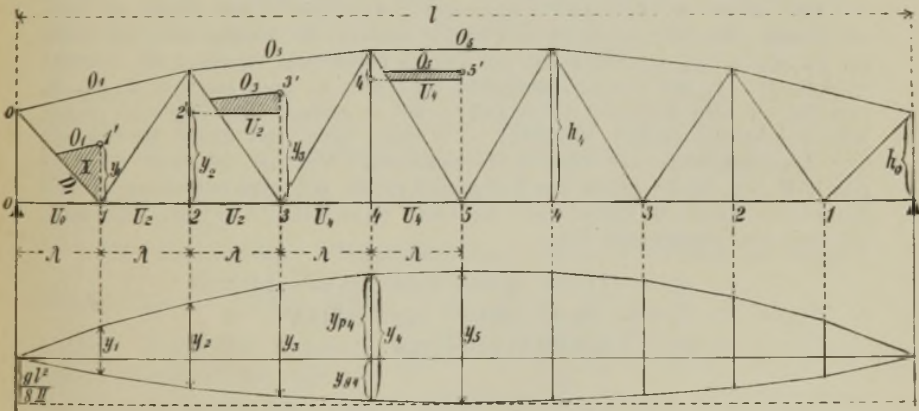


Fig. 250.

ist. Zu den Werten  $y_{p,m}$  sind noch die von der ständigen Belastung hervorgerufenen  $y_{g,m}$  zu fügen; letztere sind (nach Seite 142) die Ordinaten einer Parabel, deren Pfeil =  $\frac{gl^2}{8H}$  ist. Hat man sämtliche

\*) Dieser Fall kommt hauptsächlich bei schiefen Brücken vor, welche häufig ein kürzeres oder längeres Endfeld erhalten.



Werte  $y_m = y_{x_m} + y_{g_m}$  gefunden, so trägt man in das Trägernetz die Ordinaten ein:  $11' = y_1, 22' = y_2, 33' = y_3$  u. s. w. und findet nun die Spannkkräfte  $O$  und  $U$  auf die angegebene Weise. In Fig. 250 wurde dieselbe Anordnung gewählt wie in Fig. 247.\*)

Zu beachten ist, daß gleichzeitig mit der größten Spannkraft  $O_1$  die größten Spannkkräfte  $V_0$  und  $D_1$  in der Endvertikale und der ersten Diagonale entstehen.  $V_0$  und  $D_1$  ergeben sich aus dem für den oberen Knoten 0 gezeichneten Kräftepolygon. Wird der in 0 angreifende Teil der ständigen Belastung mit  $G_0$  bezeichnet, so findet man durch Vergleichung des Kräftepolygons in Fig. 252b mit dem Polygon  $I$  in Fig. 250: (ohne Vorzeichen)

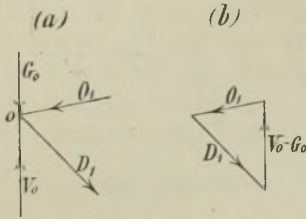


Fig. 252 a u. b.

$$V_0 - G_0 = y_1 \text{ und hieraus } V_0 = y_1 + G_0.$$

Die Endvertikale wird auf Druck beansprucht.

**Zahlenbeispiel.** Der in Fig. 250 abgebildete Träger habe eine Stützweite von 36m; ferner sei  $h_4 = 4,92^m, h_2 = 4,28^m; h_0 = 3,00^m$ . Der Träger sei ebenso belastet, wie der im § 19 untersuchte Balken. Es können dann die Werte  $y_1, y_2, y_3, y_4, y_6$  der Figur 130 auf Tafel I entnommen werden. Die Polweite ist dort:  $H = 4\lambda$  und der Kräftemaßstab:  $1^{\text{cm}} = 20^t$ ; die Spannkkräfte  $O, U, D_1, V_0$  sind also mit dem Maßstabe:  $1^{\text{cm}} = 4 \cdot 20 = 80^t$  zu messen. Das Trägernetz zeichne man in möglichst großem Maßstabe; es ist nicht nötig, daß dieser Maßstab mit dem Längenmaßstabe auf Tafel I übereinstimmt. Von der ständigen Belastung  $g = 1,74^t$  f. d. Meter greife der Teil  $g_0 = 0,45^t$  an der oberen Gurtung an; auf den oberen Knoten 0 kommt dann die Last:  $G_0 = 0,45 \cdot 3,6 = 1,62^t$ . Man findet auf dem oben angegebenen Wege

$$O_1 = -113,3^t; \quad O_2 = -200,3^t; \quad O_3 = -221,5^t;$$

$$U_0 = 0; \quad U_2 = +164,0^t; \quad U_4 = +211,4^t;$$

$$D_1 = +145,2^t; \quad V_0 = -114,4^t.$$

\*) Damit am unteren Knotenpunkte 2 Gleichgewicht besteht, müssen die Spannkkräfte in den Stäben 12 und 23 gleich groß sein, Fig. 251; sie wurden mit  $U_2$  bezeichnet.  $U_4$  ist die Spannkraft für den Teil 3—5 der unteren Gurtung. Dem Stabe 0—1 entspricht  $U_0 = 0$ . Die Vertikalen werden nur gezogen; der größte Zug in einer Vertikale ist gleich der größten Belastung ihres unteren Knotenpunktes.

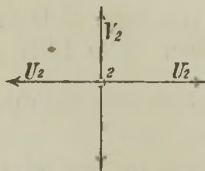


Fig. 251.



Liegen die Knotenpunkte eines Netzwerks zum Teil zwischen den Querträgern, wie bei dem in der Figur 253 dargestellten Träger, so muß, behufs Bestimmung der  $y_p$ , die ständige Belastung  $g$  in die Teile  $g_0$  und  $g_u$  zerlegt werden. Sodann sind zwei Parabeln zu zeichnen; die eine erhält den Pfeil  $\frac{g_0 l^2}{8H}$ , die andere den Pfeil  $\frac{g_u l^2}{8H}$ . In die erste Parabel wird ein Polygon beschrieben, dessen Ecken in den Senkrechten durch die oberen Knoten liegen, in die zweite ein Polygon, dessen Ecken den unteren Knoten entsprechen. Die Ordinaten beider Polygone werden addiert.

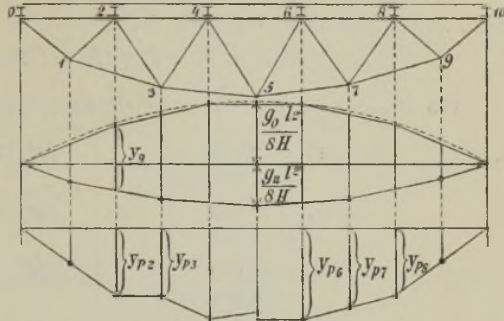


Fig. 253.

Die Angriffsmomente  $H y_p$  für die zwischen den Querträgern liegenden Knoten (1, 3, 5, 7, 9) müssen streng genommen nach dem auf Seite 143 beschriebenen Verfahren ermittelt werden. Man begeht jedoch einen nur unwesentlichen Fehler, wenn man sich darauf beschränkt, nach No. 82 die  $y_p$  für die Angriffspunkte (2, 4, 6, 8) der Querträger zu bestimmen, diese Werte als Ordinaten aufzutragen und deren Endpunkte durch gerade Linien zu verbinden, wie dies in der rechten Hälfte der Figur 253 angegeben worden ist. Das so erhaltene Polygon liefert dann genügend genaue Näherungswerte für die den übrigen Knoten (1, 3, 5, 7, 9) entsprechenden  $y_p$ .

Bei gleichförmiger Verkehrslast und konstanter Feldweite können

die Werte  $\frac{M_m}{\lambda}$  auch sehr

schnell berechnet werden. Liegt beispielsweise der in der Fig. 254 abgebildete symmetrisch belastete Balken vor,

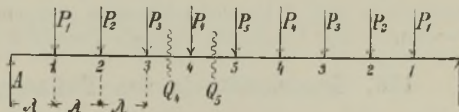


Fig. 254.

so bestimme man zuerst die Querkräfte  $Q$ . Für das 5<sup>te</sup> Feld erhält man

$$Q_5 = A - (P_1 + P_2 + P_3 + P_4)$$

und, da  $A = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + \frac{1}{2} P_5$  ist,  $Q_5 = \frac{1}{2} P_5$ . Für das 4<sup>te</sup> Feld wird erhalten

$$Q_4 = A - (P_1 + P_2 + P_3) = Q_5 + P_4,$$

für das 3<sup>te</sup> Feld

$$Q_3 = Q_4 + P_3, \text{ u. s. f.}$$

Nun ist aber  $\frac{M_m}{\lambda} - \frac{M_{m-1}}{\lambda} = Q_m$ , also  $\frac{M_m}{\lambda} = \frac{M_{m-1}}{\lambda} + Q_m$ , und man findet daher der Reihe nach (wegen  $M_0 = 0$ )

$$\frac{M_1}{\lambda} = Q_1; \quad \frac{M_2}{\lambda} = \frac{M_1}{\lambda} + Q_2; \quad \frac{M_3}{\lambda} = \frac{M_2}{\lambda} = Q_3 \text{ u. s. f.}$$

Für einen gleichmäßig mit 1,74' f. d. Meter belasteten Balken von 36<sup>m</sup> Stützweite, mit 10 gleichlangen Feldern, ist

$$P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P_5 = 1,74 \cdot 3,6 = 6,264'.$$

Die Berechnung der  $\frac{M}{\lambda}$  geschieht nach folgendem Ansatz:

$Q_5 = \frac{1}{2} P_5 = \frac{1}{2} \cdot 6,264 = 3,132$	$+ 6,264 = P_4$	$(M_1   \lambda^*) = 28,188 = Q_1$
$Q_4 = 9,396$	$+ 6,264 = P_3$	$(M_2   \lambda) = 50,112$
$Q_3 = 15,660$	$+ 6,264 = P_2$	$+ 15,660 = Q_3$
$Q_2 = 21,924$	$+ 6,264 = P_1$	$(M_3   \lambda) = 65,772$
$Q_1 = 28,188$ Tonnen		$+ 9,396 = Q_4$
		$(M_4   \lambda) = 75,168$
		$+ 3,132 = Q_5$
		$(M_5   \lambda) = 78,300$ Tonnen.

Im vorliegenden Falle hätte man sich auch (der gleich großen Lasten  $P$  wegen) der Parabelgleichung:  $M = \frac{1}{2} z x (l - x)$  bedienen können, wo  $z =$  Belastung für die Längeneinheit. Für den Knoten  $m$  erhält man mit  $x = m\lambda$  und  $l = 10\lambda$

$$\frac{M_m}{\lambda} = \frac{z\lambda}{2} m(10 - m) = \frac{1,74 \cdot 3,6}{2} m(10 - m) = 3,132 m(10 - m)$$

und hieraus der Reihe nach für  $m = 1, 2, 3, 4, 5$

$$\frac{M}{\lambda} = 28,188; 50,112; 65,772; 75,168; 78,300.$$

Bei dem in der Figur 253 dargestellten Träger sind die Belastungen der Knotenpunkte 1, 2, 3 . . . ungleich groß. Man muß hier entweder (wie leicht einzusehen) mit 2 Parabelgleichungen rechnen oder das zuerst angegebene, auf Berechnung der Querkräfte fußende Verfahren anwenden.

**156. Spannkkräfte in den Füllungsstäben.** Wir setzen zunächst voraus, daß die Grenzwerte der Spannkkräfte  $D$  durch Grundstellungen der Verkehrslast hervorgerufen werden und erläutern den einzuschlagenden Weg an dem in der Fig. 255 dargestellten Träger. Soll beispielsweise  ${}_{max} D_3$  bestimmt werden, so ist der Lastenzug von  $B$  aus bis zum Knoten 3 vorzuschieben; er ruft am linken Auflager den Widerstand  $A_3$  hervor und erzeugt die Momente:  $M_3 = A_3 x_3$  und  $M_2 = A_3 x_2$ ,

$$*) (M_1 | \lambda) = \frac{M_1}{\lambda}.$$

weshalb

$$y_{p3} = \frac{M_3}{\varepsilon \lambda} = \frac{A_3 x_3}{\varepsilon \lambda} = \frac{A_3 l}{\varepsilon \lambda} \frac{x_3}{l} \quad \text{und} \quad y_{p2} = \frac{A_3 l}{\varepsilon \lambda} \frac{x_2}{l}.$$

Trägt man also auf der rechten Auflagersenkrechten die Strecke  $\overline{B'R_3} = \frac{A_3 l}{\varepsilon \lambda}$  auf, und zieht die Gerade  $A'R_3$ , so schneidet diese auf den Senkrechten durch die Knoten 2 und 3 die Strecken  $\overline{CD} = y_{p2}$  und  $\overline{EF} = y_{p3}$  ab, zu denen noch die von der ständigen Belastung

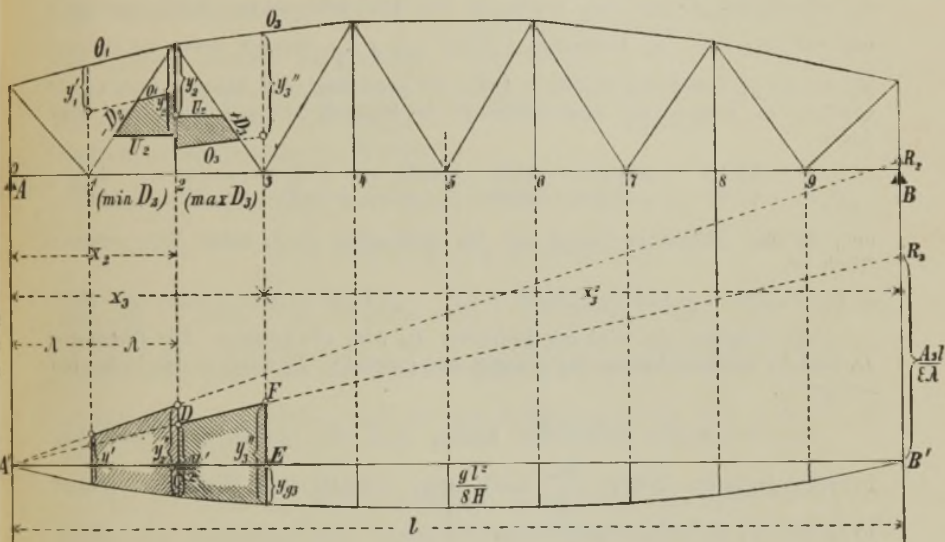


Fig. 255.

herrührenden Werte  $y_{p2}$  und  $y_{p3}$  zu fügen sind. Die Addition liefert die Werte  $y'_2$  und  $y''_3$ , aus denen nun mit Hilfe des Zimmermannschen Verfahrens die Spannkraft  $\max D_3$  gefunden werden kann. Auf dieselbe Art wird nach Auftragen von  $\overline{B'R_2} = A_2 \frac{l}{\varepsilon \lambda}$  die Spannkraft  $\min D_2$  bestimmt.

In der Fig. 255 wurde die in Fig. 248 angegebene Anordnung gewählt. Zeichnet man dann die Kräftepolygone, welche die größten Spannkraften in den Gurtungen liefern (Fig. 250) und diejenigen, welche die größten  $D$  ergeben (Fig. 255) in ein und dasselbe Trägernetz ein (was stets zu empfehlen ist), so liegen die Polygone nebeneinander, und der Kräfteplan gewinnt an Übersichtlichkeit.



Die Auflager-Widerstände  $A$  wurden in No. 82 mit Hilfe eines Seilpolygons dargestellt, welchem die Polweite  $l$  entspricht; vergl. auch Fig. 126 auf Tafel I. Entscheidet man sich nun für die Anwendung des *Zimmermannschen* Verfahrens, so ist es zweckmäßig, die Polweite  $l$  durch die Polweite  $\varepsilon\lambda$  zu ersetzen; die Ordinaten des Seilpolygons stellen dann die Werte  $A \frac{l}{\varepsilon\lambda}$  vor. Wir werden dieses Seilpolygon in der Folge das „ $A \frac{l}{\varepsilon\lambda}$ -Polygon“ nennen.

*Zahlenbeispiel.* Dem Leser wird empfohlen, auf dem angegebenen Wege die Spannkkräfte  $D$  für den bereits in No. 155 untersuchten Halbparabelträger von 36<sup>m</sup> Stützweite zu bestimmen. Wird das  $A \frac{l}{\varepsilon\lambda}$ -Polygon sowie die Parabel, welche die  $y_g$  liefert, im Maßstabe 1<sup>cm</sup> = 20<sup>t</sup> gezeichnet und  $H = 4\lambda$  (also  $\varepsilon = 4$ ) gewählt, so werden die Spannkkräfte  $D$  im Maßstabe 1<sup>cm</sup> = 80<sup>t</sup> erhalten. Man findet

$$\begin{array}{l|l|l|l} \min D_2 = -92,4^t & \min D_4 = -44,3^t & \min D_6 = -19,5^t & \min D_8 = +2,1^t \\ \max D_3 = +67,8^t & \max D_5 = +38,9^t & \max D_7 = +16,2^t & \max D_9 = -14,2^t \end{array}$$

und, da der Träger in Bezug auf die Senkrechte durch seine Mitte symmetrisch ist,

$$\max D_2 = \max D_9 = -14,2^t \quad \min D_3 = +2,1^t \quad \max D_4 = +16,2^t \quad \min D_5 = -19,5^t$$

Die Diagonale  $D_2$  wird nur gedrückt;  $D_3$  wird nur gezogen. Die Diagonalen  $D_4$  und  $D_5$  werden abwechselnd gezogen und gedrückt.  $D_1$  wurde bereits in No. 155 angegeben.

Bei konstanter Feldweite lassen sich die durch den Lastenzug hervorgerufenen Werte  $\frac{M_m}{\lambda}$  auch sehr schnell mit Hilfe der früher mitgeteilten Tabellen berechnen.

Wird z. B. der in Fig. 255 dargestellte Halbparabelträger durch einen von  $B$  bis zum Knoten 3 reichenden Lastenzug beansprucht, so entstehen die Momente  $M_2 = A_3 2\lambda$ ;  $M_3 = A_3 3\lambda$ . Haben die Fahrzeuge die in der Fig. 111 angegebenen Radstände und Achsenbelastungen und wird der Zug von drei vorwärts fahrenden Lokomotiven gezogen, so gilt die Tabelle I auf Seite 310.

Nun ist die Länge der zu belastenden Strecke:  $z'_3 = 7\lambda = 7 \cdot 3,6 = 25,2^m$ ; ihr entspricht laut Spalte 2 jener Tabelle die Zuglänge  $c_1 = 23,6$  und die Achsenzahl  $n = 12$ ; ferner ergibt sich:

$$\Psi_n = 132, \quad \Theta_n = 1647,0$$

und

$$b_n = x'_3 - c_1 = 1,6^m,$$

weshalb man erhält:

$$A_3 = \frac{\Theta_n + \Psi_n b_n}{l} = \frac{1647,0 + 132 \cdot 1,6}{36} = 51,6167$$

und

$$\frac{M_2}{\lambda} = 2A_3 = 103,233; \quad \frac{M_3}{\lambda} = 3A_3 = 154,850.$$

Die ständige Belastung ist  $g = 1,74'$  f. d. Meter; sie erzeugt (vergl. das Zahlenbeispiel auf Seite 266):  $\frac{M_2}{\lambda} = 50,112'$  und  $\frac{M_3}{\lambda} = 65,772'$ , so daß sich schließlich ergibt:

$$\frac{M_2}{\lambda} = 103,233 + 50,112 = 153,34'$$

und  $\frac{M_3}{\lambda} = 154,850 + 65,772 = 220,62'$ .

Besonders einfach gestaltet sich die Berechnung der  $\frac{M}{\lambda}$  bei gleich großen Feldweiten und Knotenlasten. Sollen z. B. für den in der Fig. 256 dargestellten Belastungsfall die Werte

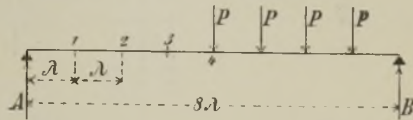


Fig. 256.

$\frac{M_3}{\lambda}$  und  $\frac{M_4}{\lambda}$  bestimmt werden, so findet man

$$A = P\left(\frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{3}{8} + \frac{4}{8}\right) = \frac{10}{8} P$$

und  $M_3 = 44\lambda$ ;  $M_4 = 45\lambda$  also:  $\frac{M_3}{\lambda} = \frac{40}{8} P$  und  $\frac{M_4}{\lambda} = \frac{50}{8} P$ .

Hierzu sind noch die von der ständigen Last herrührenden Werte  $\frac{M}{\lambda}$  zu addieren; sie werden auf die am Schluß von Nr. 165 angegebene Weise bestimmt.

Es sei noch der Fall untersucht, in welchem ein Zug von Einzelasten die Grundstellung überschreitet. Gesucht sei  $m_{ax}D_3$  für den Träger in Fig. 257. Das zweite Rad des von B aus vorrückenden Zuges liege am Knoten 3. Verlangt wird die zeichnerische Bestimmung der Werte  $y = \frac{M}{\epsilon\lambda}$ .

Nachdem man  $A \frac{l}{\epsilon\lambda}$  auf die vorhin angegebene Weise bestimmt hat\*), findet man:  $M_2 = Ax_2$  und  $M_3 = Ax_3 - P_1e_1$  also  $y_{p2} = \frac{M_2}{\epsilon\lambda} = A \frac{l}{\epsilon\lambda} \frac{x_2}{l}$  und  $y_{p3} = \frac{M_3}{\epsilon\lambda} = A \frac{l}{\epsilon\lambda} \frac{x_3}{l} - \frac{P_1e_1}{\epsilon\lambda}$ . Nun streiche man zunächst das zweite Glied des für  $y_{p3}$  gefundenen Ausdrucks und be-

\*) Zu beachten ist, daß  $A \frac{l}{\epsilon\lambda}$  gleich der unter der ersten Last gemessenen Ordinate des  $A \frac{l}{\epsilon\lambda}$ -Polygons ist.

stimme  $y'_2$  und  $y''_3$  genau wie in Fig. 255. Schließlich bringe man von  $y''_3$  den Wert  $\frac{P_1 e_1}{\epsilon \lambda}$  in Abzug; er wird zweckmäßig gerechnet und

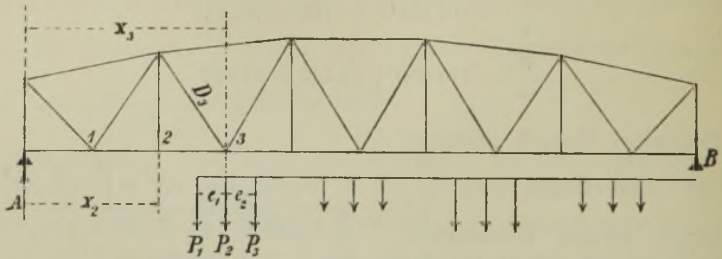


Fig. 257.

ist für den vorhin untersuchten Halbparabelträger  $= \frac{13 \cdot 1,4}{4 \cdot 3,6} = 1,27'$ .

Läge  $P_3$  am Knoten 3, so müßte  $y''_3$  um  $\frac{P_1(e_1 + e_2) + P_2 e_2}{\epsilon \lambda}$  verkleinert werden.

Durch Anwendung der eben entwickelten Regeln auf den vorhin untersuchten Halbparabelträger überzeugt man sich, daß die Grenzwerte der Spannkkräfte in den Diagonalen infolge von Grundstellungen entstehen. (Eine Ausnahme bildet  $D_{11}$ , welches gleichzeitig mit  $O_1$  seinen Grenzwert annimmt.)

**b. Das Fachwerk mit Vertikalen.**

157. Die Verkehrslast greift in den Knotenpunkten der oberen

**Gurtung an.** Wir betrachten das

$m^{te}$  Feld des Balkens (Fig. 258),

tragen auf der Vertikale  $mm$

aus die Strecke  $\overline{ma} = \frac{M_m}{\lambda_m}$  ab

und auf der  $(m - 1)^{ten}$  Vertikale

die Strecke  $\overline{(m - 1)b} = \frac{M_{m-1}}{\lambda_{m-1}}$ ,

ziehen durch  $a$  eine Parallele

zu  $O_m$ , welche die Diagonale  $D_m$

in  $c$  schneidet, hierauf durch  $b$

eine Parallele zu  $U_m$ , welche  $D_m$

in  $d$  und  $V_m$  in  $e$  trifft, und er-

halten: Spannkraft  $O_m =$  Strecke  $\overline{ac}$ , Spannkraft  $U_m =$  Strecke  $\overline{de}$ ,

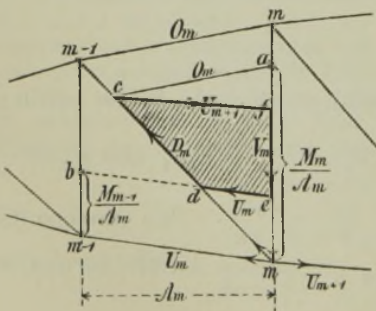


Fig. 258.

halten: Spannkraft  $O_m =$  Strecke  $\overline{ac}$ , Spannkraft  $U_m =$  Strecke  $\overline{de}$ ,



Spannkraft  $D_m = \text{Strecke } dc$ . Um die Spannkraft  $V_m$  zu finden, zeichnen wir das Kräftepolygon für den unteren Knotenpunkt  $m$ , ziehen also  $ef \parallel U_{m+1}$  und finden  $V_m = \overline{ef}$ . Dabei ist angenommen worden, daß nicht nur die Verkehrslast, sondern auch die gesamte ständige Belastung in den Knoten der oberen Gurtung angreift. Die in das Kräftepolygon  $edcfe$  des unteren Knotens  $m$  eingetragenen Pfeile geben an, in welchem Sinne die Kräfte  $U_m, D_m, U_{m+1}, V_m$  an diesem Knoten angreifen. In Figur 258 wird die Diagonale  $D_m$  gezogen, die Vertikale  $V_m$  gedrückt. Ein Irrtum bezüglich der Vorzeichen ist ausgeschlossen, wenn man daran denkt, daß die untere Gurtung stets gezogen ist.

Greift nun am unteren Knotenpunkte  $m$  die ständige Last  $G_u$  an, so entsteht das in der Figur 259b dargestellte Kräftepolygon. Der vorhin ermittelte Druck  $V_m = \overline{ef}$  ist um  $G_u$  zu verkleinern. Es empfiehlt sich nun, die Grenzwerte sämtlicher Kräfte  $V$  zunächst unter der Voraussetzung unbelasteter unterer Knotenpunkte zu ermitteln und hierauf zu jedem dieser Werte (unter Berücksichtigung der Vorzeichen) den Betrag  $(+ G_u)$  zu addieren.

Die in der Figur 258 angegebene Anordnung des Kräfteplanes empfiehlt sich bei der Bestimmung der Grenzwerte der Spannkkräfte  $D_m$  und  $V_m$ . Um die größten Spannkkräfte in den Gurtungen zu ermitteln, entscheidet man sich. (um das Zusammenfallen verschiedener Polygone zu vermeiden) zweckmäßiger für die Anordnung in Figur 260; alle diese Kräftepolygone werden in dasselbe Netz eingezeichnet.

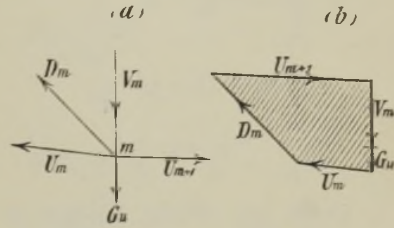


Fig. 259.

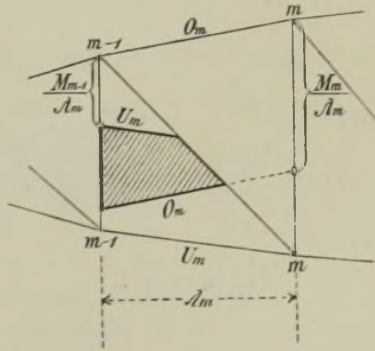


Fig. 260.

158. Die Verkehrslast greift in den Knotenpunkten der unteren Gurtung an. Trägt man auf den das Feld begrenzenden Vertikalen von den oberen Knotenpunkten  $m$  und  $m - 1$  aus die Strecken  $\overline{ma} = \frac{M_m}{\lambda_m}$

und  $(m - 1)b = \frac{M_{m-1}}{\lambda_m}$  ab, zieht  $ade \parallel O_m$  und  $bc \parallel U_m$  (Fig. 261), so erhält man  $\overline{bc} = U_m$ ,  $\overline{cd} = D_m$  und  $\overline{de} = O_m$ . Wird noch  $ef \parallel O_{m-1}$

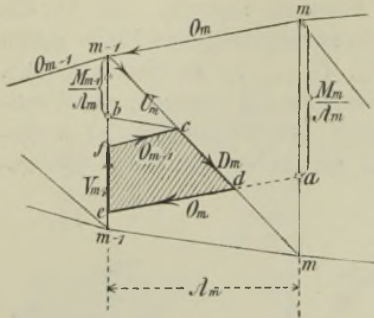


Fig. 261.

gezogen, so ist  $fcdef$  das Kräftepolygon für den oberen Knoten  $m - 1$  und man erhält  $\overline{ef} = V_{m-1}$ , vorausgesetzt, daß auch die ständige Belastung ausschließlich in den Knoten der unteren Gurtung wirkt. Die in die Fig. 261 eingetragenen Richtungspfeile geben an, in welchem Sinne die Spannkkräfte  $D_m$ ,  $O_m$ ,  $V_{m-1}$ ,  $O_{m-1}$  am oberen Knoten  $m - 1$  angreifen. Im vorliegenden Falle wird Diagonale  $D_m$  gezogen und Vertikale  $V_{m-1}$  gedrückt.

Greift am oberen Knoten  $m - 1$  die ständige Last  $G_0$  an, so entsteht das in der Fig. 262 b dargestellte Kräftepolygon; der vorhin

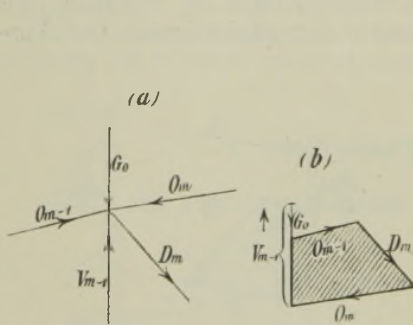


Fig. 262 a u. b.

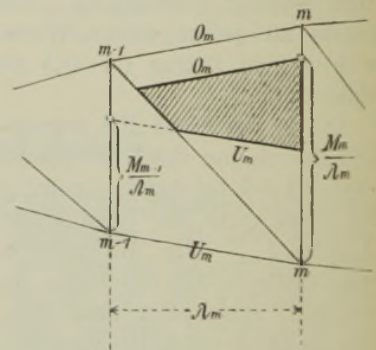


Fig. 263.

erhaltene Druck  $V_{m-1} = \overline{ef}$  wird um den Druck  $G_0$  vergrößert. Es ist ratsam, zunächst die Grenzwerte sämtlicher Kräfte  $V$  unter der Voraussetzung unbelasteter oberer Knoten zu bestimmen und hierauf zu jedem dieser Werte den Betrag ( $-G_0$ ) zu addieren.

Weiter empfiehlt es sich, die in der Fig. 261 angegebene Anordnung des Kräfteplanes nur bei Bestimmung der Grenzwerte  $D$  und  $V$  beizubehalten und die größten Spannkkräfte in den Gurtungen auf die in der Fig. 263 veranschaulichte Weise zu ermitteln.

§ 34.

Fachwerkträger mit Gegendiagonalen.

159. Hauptdiagonalen und Gegendiagonalen. Ein Fachwerkbalken, dessen Füllungsstäbe wechselweise Vertikalen und linkssteigende Diagonalen sind, Fig. 264, werde durch einen Schnitt  $tt$  in zwei Teile zerlegt.  $O_m$ ,  $U_m$ ,  $D_m$  sind die Spannkraften in den Stäben des  $m^{\text{ten}}$  Feldes,  $\beta_m$ ,  $\gamma_m$ ,  $\varphi_m$  deren Neigungswinkel gegen die Wagerechte.  $\gamma_m$  und  $\varphi_m$  werden nach unten positiv gezählt,  $\beta_m$  nach oben. Wirken auf den Träger nur senkrechte äußere Kräfte, so muß sein

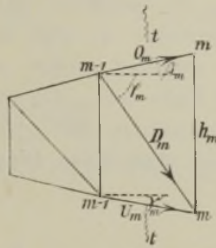


Fig. 264.

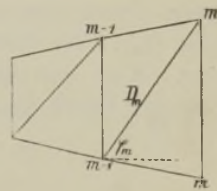


Fig. 265.

$$O_m \cos \beta_m + D_m \cos \varphi_m + U_m \cos \gamma_m = 0, \text{ also}$$

$$D_m \cos \varphi_m = -O_m \cos \beta_m - U_m \cos \gamma_m.$$

Nun ist aber (nach Seite 245):  $O_m = -\frac{M_m \sec \beta_m}{h_m} = -\frac{M_m}{h_m \cos \beta_m}$  und

$U_m = +\frac{M_{m-1}}{h_{m-1} \cos \gamma_m}$ , wobei  $h_m =$  Länge der  $m^{\text{ten}}$  Vertikale, mithin

$$D_m \cos \varphi_m = \frac{M_m}{h_m} - \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}}.$$

Ganz ebenso ergibt sich für eine rechtssteigende Diagonale (Fig. 265)

$$D_m \cos \varphi_m = \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}} - \frac{M_m}{h_m} = -\left[ \frac{M_m}{h_m} - \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}} \right],$$

so daß sich also — dieselben Momente vorausgesetzt — die wagenrechten Seitenkräfte der beiden Spannkraften  $D$  nur durch das Vorzeichen unterscheiden.

Die Belastung des Trägers bestehe aus einer ständigen und einer beweglichen. Erstere sei gleichmäßig über die Stützweite verteilt und  $=g$  für die Längeneinheit; sie erzeugt die Momente

$$M_{m,g} = \frac{g x_m x'_m}{2} \text{ und } M_{(m-1),g} = \frac{g x_{m-1} x'_{m-1}}{2},$$

wo  $x_m$  und  $x'_m$  die Abstände des Knotens  $m$  von den Auflagersenk-



rechten  $A$  und  $B$  bedeuten, Fig. 266. Wird zur Abkürzung gesetzt

$$\frac{x_m x'_m}{2h_m} = \eta_m,$$

so ergibt sich für die durch die ständige Belastung hervorgerufene Spannkraft in einer linkssteigenden Diagonale die Formel

$$D_{mg} \cos \varphi_m = g (\eta_m - \eta_{m-1}).$$

Es sei nun  $\eta_m > \eta_{m-1}$ , also  $D_{mg}$  positiv. Eine von  $B$  aus bis  $m$  vorrückende Verkehrslast\*) erzeugt ebenfalls eine positive Spannkraft  $D$ , und es ist deshalb  ${}_{max}D_m$  positiv. Wenn dagegen die Verkehrslast von  $A$  bis  $m-1$  vorrückt, so ruft sie in der fraglichen Diagonale einen Druck hervor, welcher größer oder kleiner sein kann als der Zug  $D_{mg}$ . Im ersten Falle ist  ${}_{min}D_m$  ein Druck, im zweiten Falle ein Zug. Wird nun angenommen, daß  ${}_{min}D_m$  für die linkssteigende Diagonale ein Druck ist, daß aber diese Diagonale aus einem Seile besteht,

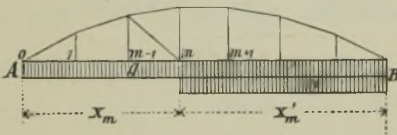


Fig. 266.

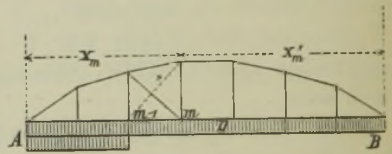


Fig. 267.

welches einem Drucke keinen Widerstand leistet, so muß, soll der Träger starr sein, in dem betreffenden Felde noch eine rechtssteigende Diagonale, die ebenfalls aus einem Seile bestehen darf, angeordnet werden. Bei jedem Belastungszustande, welcher die linkssteigende Diagonale auf Druck beansprucht, wird die rechtssteigende Diagonale gezogen.\*\*)

Diejenige der beiden sich kreuzenden Diagonalen, für welche  $D_{mg}$  positiv ist; nennen wir die *Hauptdiagonale*, die andere die *Gegendiagonale*.

\*) Wir sprechen, der kürzeren Ausdrucksweise wegen, nur von Grundstellungen der Verkehrslast.

\*\*) Es gibt Laststellungen, bei denen beide Diagonalen gleichzeitig gezogen werden; die Aufgabe, die Spannkräfte  $D$  zu berechnen, ist dann statisch unbestimmt und fällt unter die im II. Bande unseres Buches vorgetragenen Untersuchungen. Für die Praxis genügen indessen die oben gegebenen Formeln. In neuerer Zeit sucht man Fachwerke mit Gegendiagonalen zu vermeiden; ihre Theorie darf aber hier nicht fehlen, schon weil sie für die Umrechnung älterer Brücken auf Grund der neuen Belastungsvorschriften wichtig ist.

Nehmen also die Werte  $\eta$  von den Auflagern nach der Mitte hin zu, so sind auf der linken Hälfte des Trägers die linkssteigenden und auf der rechten Hälfte die rechtssteigenden Diagonalen die Hauptdiagonalen. Bei nach der Mitte hin abnehmenden  $\eta$  findet das Umgekehrte statt. Sind sämtliche  $\eta$  gleich groß, so ist das Eigengewicht — und überhaupt jede gleichmäßig über den ganzen Träger verteilte Belastung — ohne Einfluß auf die Spannkraft  $D$ . Die Trägerform, welche diesem Grenzfalle entspricht, findet man mittels der Gleichung

$$\eta = \frac{xx'}{2h} = \text{Konst.},$$

woraus

$$h = \frac{xx'}{2 \text{ Konst.}}$$

Soll  $h = f$  sein für  $x = x' = \frac{1}{2}l$  (Fig. 268), so folgt:  $f = \frac{l^2}{8 \text{ Konst.}}$

und  $\text{Konst.} = \frac{l^2}{8f}$ , weshalb

$$h = \frac{4fx(l-x)}{l^2}.$$

Dies ist die Gleichung einer *Parabel*, deren Pfeil  $= f$  ist, und der hiernach berechnete Träger heißt *Parabelträger*. Die eine Gurtung darf beliebig geformt werden; die Lagen der Knotenpunkte der anderen Gurtung ergeben sich mit Hilfe der Gleichung

$$h_m = \frac{4fx_m x'_m}{l^2}.$$

Zu beachten ist, daß  $f$  stets die Parabelordinate für  $x = \frac{1}{2}l$  bedeutet, daß also bei fehlender Mittelvertikale (Fig. 268)  $h_{\max} < f$  ist. Liegt  $h_{\max}$  bei  $x = \xi$ , und besitzt es einen gegebenen Wert, so findet man (wegen  $h_{\max} = \frac{4f\xi(l-\xi)}{l^2}$ )

$$f = \frac{h_{\max} l^2}{4\xi(l-\xi)}.$$

Es ist aber stets zu empfehlen,  $f$  anzunehmen und hierauf die Längen  $h$  durch Rechnung oder Zeichnung zu bestimmen. Wie man den einer beliebigen Abszisse  $x_m$  entsprechenden Punkt  $J$  einer Parabel  $AJSB$  durch Zeichnung findet, ist auf Seite 135 (Fig. 124) angegeben worden.

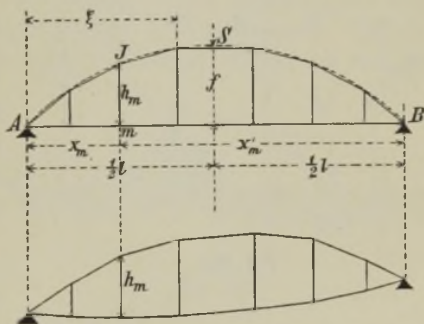


Fig. 268.

In den folgenden allgemeinen Untersuchungen über Träger mit ausschließlich gezogenen Diagonalen beschäftigen wir uns nur mit dem Falle nach der Mitte hin wachsender Werte  $\eta$ , da dieser bei allen im Hochbau und Brückenbau angewandten Trägern mit Gegendiagonalen vorliegt.

Um zu entscheiden, ob in irgend einem (z. B. dem  $m^{\text{ten}}$ ) Felde der linken Trägerhälfte eine linkssteigende Zugdiagonale genügt, bestimme man für diese Diagonale die Spannkraft  ${}_{\min}D$ . Soll dies beispielsweise mittels des Zimmermannschen Verfahrens geschehen, so werden die der gefährlichsten Belastung entsprechenden Werte  $\frac{M_m}{\lambda_m}$  und  $\frac{M_{m-1}}{\lambda_m}$  auf die in No. 156 angegebene Weise ermittelt, hierauf die Strecken

$$\overline{ma} = \frac{M_m}{\lambda_m} \text{ und } \overline{(m-1)b} = \frac{M_{m-1}}{\lambda_m} \text{ (vergl. Fig. 269a)}$$

aufgetragen und durch die Punkte  $a$  und  $b$  zu  $O_m$  bzw.  $U_m$  Parallelen gezogen, welche die fragliche Diagonale in den Punkten  $d$  und  $e$

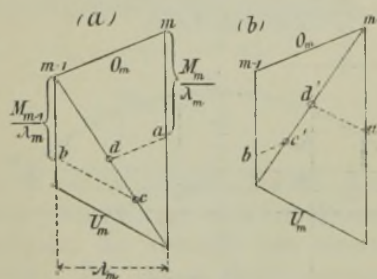


Fig. 269.

schneiden mögen. Die Strecke  $\overline{dc}$  stellt dann die Spannkraft  ${}_{\min}D$  vor, und zwar ist  ${}_{\min}D$  positiv oder negativ, je nachdem  $e$  oberhalb oder unterhalb  $d$  liegt. Vergl. Fig. 262. In dem in der Fig. 269a dargestellten Falle ergibt sich mithin für  ${}_{\min}D$  ein negativer Wert, und es ist deshalb eine Gegendiagonale nötig.

Zieht man nun nach Einzeichnung dieser Gegendiagonale:  $bc' \parallel O_m$  und  $ad' \parallel U_m$  (Fig. 269b), so findet man den größten Zug in der Gegendiagonale:  ${}_{\max}D = \text{Strecke } \overline{d'e'}$ .

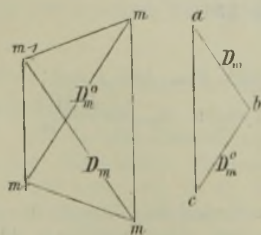


Fig. 270.

Hat man die Spannkraft  ${}_{\min}D_m$  in der Hauptdiagonale des  $m^{\text{ten}}$  Feldes nach einem der im § 32 beschriebenen Verfahren bestimmt und einen negativen Wert erhalten, welcher in Fig. 270 nach Größe und Richtung durch die Strecke  $ab$  dargestellt sein möge, so findet man den größten Zug  ${}_{\max}D_m^0$  durch welchen die in jenem Felde nötig



werdende Gegendiagonale beansprucht wird, indem man durch  $b$  eine Parallele zur Gegendiagonale und durch  $a$  eine Senkrechte zieht, welche jene Parallele in  $c$  schneidet. Es ist dann  $\overline{bc} = \max D_m^\circ$ .

Bei gewissen Trägerarten, z. B. beim Parabelträger und auch bei dem in No. 146 untersuchten Paulischen Träger, sind in allen Feldern Gegendiagonalen nötig, bei vielen Trägern (z. B. bei dem in der Fig. 271 dargestellten) nur in einzelnen und zwar dann in



Fig. 271.

den mittelsten Feldern. Die Spannkkräfte  $O$ ,  $U$ ,  $V$  in den Stäben der Felder ohne Gegendiagonalen werden auf die früher gezeigte Weise bestimmt; die Ermittlung der Spannkkräfte in den Feldern mit Gegendiagonalen soll im Folgenden gelehrt werden. Wir beginnen mit der

**160. Bestimmung von  $\min V_m$ .** Die fragliche Vertikale gehöre der linken Trägerhälfte an, und trenne zwei Felder mit Gegendiagonalen. Es sind zwei Belastungsfälle zu untersuchen. Greift die veränderliche Belastung an der unteren Gurtung an, so ist sie einmal von  $B$  bis  $m+1$  vorzuschieben, Fig. 272, ein zweites Mal von  $A$  bis  $m-1$ , Fig. 273. Im ersten Falle treten im  $m^{\text{ten}}$  und im  $(m+1)^{\text{ten}}$  Felde die linkssteigenden Diagonalen in Tätigkeit, im zweiten Falle die rechtssteigenden. Die Bestimmung von  $\min V_m$  kann mit Hilfe der in den §§ 32 und 33 angegebenen Verfahren erfolgen, wobei darauf zu achten ist, daß in dem in der Fig. 272 dargestellten Belastungsfalle neben

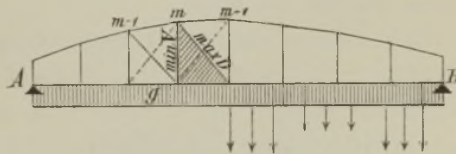


Fig. 272.

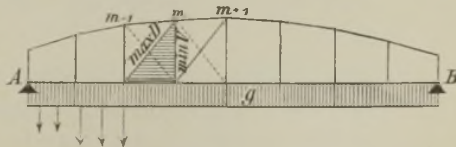


Fig. 273.

der Spannkraft  $\min V_m$  noch die größte Spannkraft in der  $(m+1)^{\text{ten}}$  Hauptdiagonale entsteht, während der Belastungsfall in Fig. 273 die größte Spannkraft in der Gegendiagonale des  $m^{\text{ten}}$  Feldes hervorbringt.

Greift die veränderliche Belastung an der oberen Gurtung an, so ist nacheinander der Einfluß einer von  $B$  bis  $m$  und einer von  $A$  bis  $m$  reichenden Belastung zu untersuchen. Fig. 274 und 275.

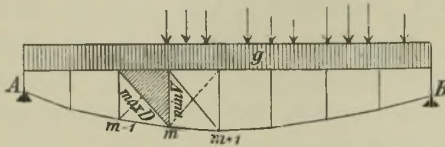


Fig. 274.

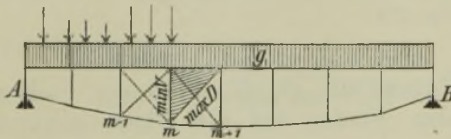


Fig. 275.

Die beiden, für  ${}_{min} V_m$  erhaltenen Werte werden schließlich miteinander verglichen; der ungünstigere der beiden Werte ist natürlich maßgebend für die Bestimmung des Querschnitts der Vertikale.

**161. Bestimmung von  ${}_{max} V_m$**  (Fig. 276). Unter der Voraussetzung, daß die Belastung in den Knoten der unteren Gurtung angreift, entsteht, wenn keine Gegendiagonalen vorhanden sind, die Spannkraft  ${}_{max} V_m$ , sobald

die veränderliche Belastung von  $A$  aus bis  $m$  vorgerückt ist. Sind aber Gegendiagonalen vorhanden, so wird bei dieser Laststellung die Gegendiagonale des  $(m+1)^{ten}$  Feldes die größte Inanspruchnahme erleiden, vielleicht wird auch in  $m^{ten}$  Felde eine dort etwa vorhandene Gegendiagonale gespannt. Auf jeden Fall lassen die bis jetzt abgeleiteten Gesetze im Stich.

Wir denken nun den Träger voll belastet. Auf der linken Hälfte sind dann die linkssteigenden Diagonalen gespannt, und wir dürfen behaupten:

- 1) Alle Lasten rechts von  $(m+1)$  tragen zu der Spannkraft  $V_m$  in *negativem* Sinne bei, alle Lasten links von  $m$  in *positivem* Sinne. Durch Entlastung des Trägers in der Nähe von  $B$  wird also  $V_m$  vergrößert. Es nähert sich  $V_m$  dem Werte  ${}_{max} V_m$ .
- 2) Alle Lasten rechts von  $(m+1)$  tragen zu der Spannkraft  $D_{m+1}$ , der linkssteigenden Diagonale in *positivem* Sinne bei, so daß Entlastung des Trägers in der Nähe von  $B$  die Kraft  $D_{m+1}$  verkleinert.

Jetzt entlasten wir den Träger rechts von  $(m+1)$ , vergrößern dadurch  $V_m$  und verkleinern  $D_{m+1}$  und setzen diese Entlastung so lange

fort, bis  $D_{m+1} = 0$ , bis also  $\frac{M_m}{h_m} = \frac{M_{m+1}}{h_{m+1}}$  ist.

Sobald dies erreicht ist, Fig. 276, greift am oberen Knotenpunkte  $m$  keine Diagonale an, und das Kräftepolygon für diesen Knotenpunkt

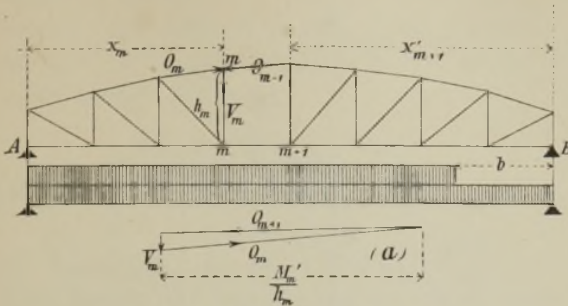


Fig. 276.

ist das in Fig. 276a dargestellte. Es besteht aus  $V_m$ ,  $O_m$  und  $O_{m+1}$ . Je größer  $O_m$  und  $O_{m+1}$  sind, desto größer wird  $V_m$  (\*). Da nun durch weitere Entlastung die Spannkraften  $O_m$  und  $O_{m+1}$  verkleinert werden, wird auch  $V_m$  wieder verkleinert. Daraus folgt der Satz:

*Entlastet man, von dem Zustande voller Belastung ausgehend, den Träger rechts von  $(m + 1)$  derart; daß beide Diagonalen des  $(m + 1)$ ten Feldes spannungslos sind, so nimmt die Spannkraft in der  $m$ ten Vertikale ihren größten positiven Wert an.*

Wir bezeichnen mit  $M_m$  und  $M_{m+1}$  die Momente infolge voller Belastung, mit  $M'_m$  und  $M'_{m+1}$  die Momente nach der Entlastung und nehmen an, daß der Träger nur rechts von  $(m + 1)$  entlastet wird. Bedeutet dann  $\Delta A$  die Abnahme des Stützenwiderstandes, so werden die Momente verkleinert um  $\Delta M_m = \Delta A x_m$  bzw.  $\Delta M_{m+1} = \Delta A x_{m+1}$ . Es entsteht  $M'_m = M_m - \Delta M_m$ , bzw.  $M'_{m+1} = M_{m+1} - \Delta M_{m+1}$ . Da nun  $\Delta M_m : \Delta M_{m+1} = x_m : x_{m+1}$ , so folgt: Trägt man auf den verlängerten Vertikalen  $m$  und  $m + 1$  von einer Wagerechten aus die Werte auf:  $\overline{DE} = M_m | \lambda_{m+1}$  (\*\*\*) und  $\overline{FH} = M_{m+1} | \lambda_{m+1}$  (Fig. 277) und macht hierauf:  $\overline{EE'} = \Delta M_m | \lambda_{m+1}$ , ferner  $\overline{HH'} = \Delta M_{m+1} | \lambda_{m+1}$ , so schneiden sich die Geraden  $E'H'$  und  $\overline{EH}$  in einem Punkte  $S$  der Auflagersenkrechten  $A$ . Die Strecken  $\overline{DE'}$  und  $\overline{FH'}$  stellen beziehungsweise die Werte  $M'_m | \lambda_{m+1}$  und  $M'_{m+1} | \lambda_{m+1}$  vor, und der

\*) Wir nehmen zunächst an, daß die gesamte ständige Belastung in den Knotenpunkten der unteren Gurtung angreift. Die unter dieser Voraussetzung ermittelten Spannkraften  $_{max} V_m$  müssen dann auf die in No. 158 angegebene Weise verbessert werden.

\*\*)  $M_m | \lambda_{m+1} = \frac{M_m}{\lambda_{m+1}}$ . Warum wir diese Verhältnisse (welche Kräfte sind) auftragen und nicht die Momente, wird sogleich einleuchten.



Schnittpunkt  $C'$  der Geraden  $E'H'$  und  $DF$  ist (nach No. 68) ein Punkt in der Richtung der für das  $(m+1)^{te}$  Feld sich ergebenden Querkraft

$$Q_{m+1} = \frac{M'_{m+1}}{\lambda_{m+1}} - \frac{M'_m}{\lambda_{m+1}}$$

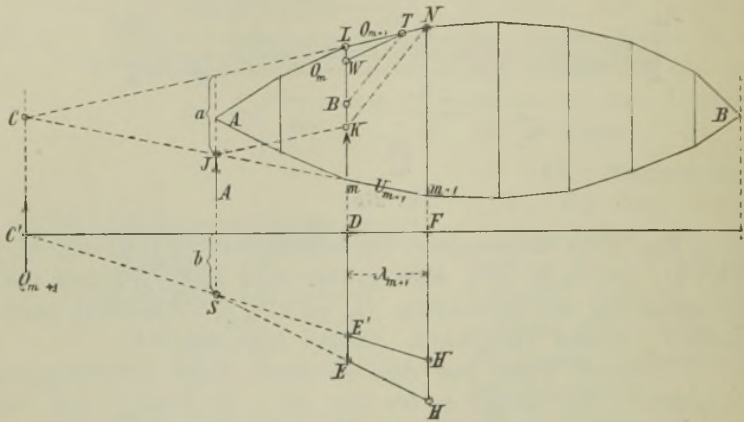


Fig. 277.

Um letzteres einzusehen, betrachte man  $E'H'$  und  $DF$  als Seite und Schlußlinie eines Seilpolygons, dessen Polweite  $= \lambda_{m+1}$  ist.

Soll nun die vorgenommene Entlastung des Trägers zur Spannkraft  $_{max}V_m$  führen, so müssen die Diagonalen des  $(m+1)^{ten}$  Feldes spannungslos sein, und es muß dann die Querkraft  $Q_{m+1}$  durch den Schnittpunkt  $C$  der Gurtkräfte  $O_{m+1}$  und  $U_{m+1}$  gehen. Durch diese Bedingung ist die Lage der Geraden  $C'SE'$  vollständig bestimmt; man ist somit im stande, den Wert  $M'_m | \lambda_{m+1}$  und mithin auch  $M'_m | h_m$  zu ermitteln, und zwar ohne erst angeben zu müssen, auf welche Weise der Träger rechts von  $m+1$  entlastet werden muß. Kennt man aber  $M'_m | h_m$ , so läßt sich  $_{max}V_m$  mit Hilfe des in der Fig. 276a dargestellten Kräftepolygons finden.

Da nun die Bestimmung des Punktes  $C$  in der Regel unbequem ist, so ist es zweckmäßiger, die Gleichung zu benutzen (siehe Fig. 277):

$$\overline{DE'} : h_m = b : a, \text{ woraus } \frac{M'_m}{\lambda_{m+1}} = \overline{DE'} = \frac{h_m b}{a}.$$

Es folgt dann

$$Q_{m+1} = \frac{M'_m}{h_m \cos \beta_{m+1}} = \frac{b}{a} \lambda_{m+1} \sec \beta_{m+1} = \frac{b}{a} \overline{LN},$$

wobei  $L$  und  $N$  die Endpunkte des Gurtstabes  $O_{m+1}$  (dessen Neigungswinkel  $= \beta_{m+1}$  und dessen Länge  $= \lambda_{m+1} \sec \beta_{m+1}$  ist) bezeichnen. Bringt man den Untergurtstab  $U_{m+1}$  mit der linken Auflagersenkrechten in  $J$  zum Schnitt, legt durch  $J$  zu  $O_{m+1}$  eine Parallele, welche die  $m^{\text{te}}$  Vertikale in  $K$  trifft, zieht die Gerade  $KN$ , macht  $\overline{LB} = b$  und  $BT \parallel KN$ , so ist (wegen  $\overline{LK} = a$ )

$$\overline{LT} = \overline{LN} \frac{b}{a} = O_{m+1}.$$

Wird schließlich noch  $TW \parallel O_m$  gezogen, so ist

$$\overline{LW} = {}_{\max} V_m.$$

Über die Darstellung der Werte  $M | \lambda$  wurde das Nötige im § 31 mitgeteilt. Besteht die Verkehrslast aus einem Zuge von Einzelasten, so empfiehlt es sich, diejenige Laststellung anzunehmen, welche das größte Moment  $M_m$  erzeugt.

Der Satz, auf welchen sich die beschriebene Darstellung von  ${}_{\max} V_m$  stützt, wurde vom Verfasser zuerst in der 11<sup>ten</sup> Auflage von des „Ingenieurs Taschenbuch“ (Hütte) veröffentlicht unter gleichzeitiger Mitteilung von Formeln für gleichförmige Belastung. Wir lassen die Ableitung der letzteren hier folgen.

Die Entlastung der Strecke  $b$  (Fig. 276), welche zunächst kleiner als  $x'_{m+1}$  vorausgesetzt werden möge, bewirkt eine Verkleinerung von  $A$  um  $\Delta A = \frac{pb^2}{2l}$ . Es entsteht deshalb

$$M'_m = M_m - \frac{pb^2}{2l} x_m \quad \text{und} \quad M'_{m+1} = M_{m+1} - \frac{pb^2}{2l} x_{m+1},$$

und man erhält zur Berechnung von  $b$  die Gleichung ( $M'_m | h_m = M'_{m+1} | h_{m+1}$ )

$$\frac{M_m}{h_m} - \frac{pb^2}{2l} \frac{x_m}{h_m} = \frac{M_{m+1}}{h_{m+1}} - \frac{pb^2}{2l} \frac{x_{m+1}}{h_{m+1}},$$

woraus (mit  $M = \frac{qxx'}{2}$ )

$$(I) \quad \frac{pb^2}{2l} = \frac{M_{m+1} h_m - M_m h_{m+1}}{x_{m+1} h_m - x_m h_{m+1}} \quad \text{und} \quad b^2 = \frac{gl}{p} \frac{x_m x_{m+1} h_m - x_m x'_m h_{m+1}}{x_{m+1} h_m - x_m h_{m+1}}.$$

Nun ergibt sich

$$\frac{M'_m}{h_m} = \frac{x_{m+1} M_m - x_m M_{m+1}}{x_{m+1} h_m - x_m h_{m+1}} = \frac{q x_m x_{m+1} \lambda_{m+1}}{2(x_{m+1} h_m - x_m h_{m+1})}$$

und nach Fig. 276 a, mit Beachtung der Winkel-Bezeichnungen in Fig. 264

$${}_{\max} V_m = \frac{M'_m}{h_m} (\operatorname{tg} \beta_m - \operatorname{tg} \beta_{m+1}),$$

wofür mit Rücksicht auf die oben angreifende ständige Belastung  $g_0$  der verbesserte Wert

$$(II) \quad {}_{\max} V_m = \frac{M'_m}{h_m} (\operatorname{tg} \beta_m - \operatorname{tg} \beta_{m+1}) - \frac{1}{2} g_0 (\lambda_m + \lambda_{m+1})$$

anzunehmen ist. Man erhält schließlich

$$(III) \quad {}_{\max} V_m = \frac{q x_m x_{m+1} \lambda_{m+1}}{2(x_{m+1} h_m - x_m h_{m+1})} (\operatorname{tg} \beta_m - \operatorname{tg} \beta_{m+1}) - \frac{1}{2} g_0 (\lambda_m + \lambda_{m+1}).$$

Liefert Gleichung I für  $b$  einen Wert, der größer ist als  $x'_{m+1}$ , so entsteht  $M'_{m+1} = M_{m+1} - \frac{pb^2}{2l} x_{m+1} + \frac{p(b-x'_{m+1})^2}{2}$ , und es müßte jetzt  $b$  aus der Bedingung

$$\frac{M_m}{h_m} - \frac{pb^2}{2l} \frac{x_m}{h_m} = \frac{M_{m+1}}{h_{m+1}} - \frac{pb^2}{2l} \frac{x_{m+1}}{h_{m+1}} + \frac{p(b-x'_{m+1})^2}{2h_{m+1}}$$

berechnet werden. Man findet aber dann  ${}_{max}V_m$  genügend genau und etwas zu groß, wenn man  $b = x'_{m+1}$  setzt. Es führt dies zu

$$(IV) \quad {}_{max}V_m = \frac{x_m(qx'_{m+1}l - px'_{m+1})^2}{2lh_m} (\operatorname{tg} \beta_m - \operatorname{tg} \beta_{m+1}) - \frac{1}{2} g_o (\lambda_m + \lambda_{m+1}).$$

Noch zweckmäßiger ist es, mit Rücksicht auf die geringere Bedeutung, welche die  ${}_{max}V$  gegenüber den  ${}_{min}V$  für die Querschnittsermittlung besitzen, die Berechnung von  $b$  zu sparen und stets die Gleichung III anzuwenden. Man erhält dann für  ${}_{max}V$  entweder einen genauen oder einen etwas zu großen Wert. Aus demselben Grunde ist es auch bei der oben gezeigten zeichnerischen Bestimmung von  ${}_{max}V$  nicht nötig, auf eine nähere Untersuchung der durch unseren Satz vorgeschriebenen Entlastung des Trägers einzugehen; vielmehr genügt es, vorauszusetzen, daß es möglich sei, durch Beseitigung von Lasten rechts von  $m+1$  die Spannkraft in der  $(m+1)$ ten Diagonale aufzuheben.

Wir wollen noch ein zweites und drittes Verfahren zur Ermittlung von  ${}_{max}V_m$  mitteilen und betrachten hierbei eine auf der rechten Hälfte des Trägers befindliche Vertikale  $mm$ . Es entsteht dann  ${}_{max}V_m$ , wenn der Balken so belastet ist, daß im  $m$ ten Felde keine Diagonale gespannt wird.

*Zweites Verfahren.* Wir setzen zunächst eine gleichmäßige Verkehrs- last ( $p$ ) voraus und nehmen an, daß die Strecke  $x'_m$  mit  $px'_m$  belastet ist,

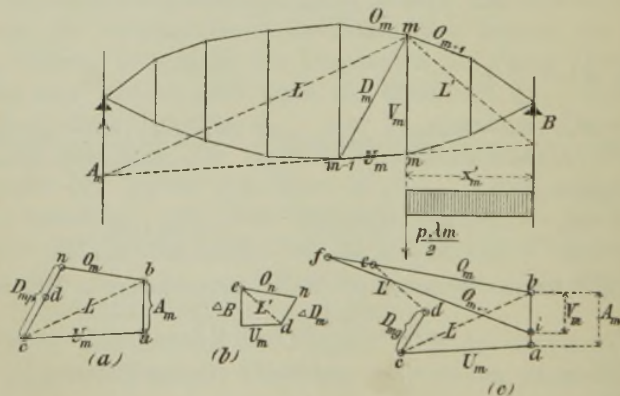


Fig. 278.

während in  $m$  die Einzellast  $\frac{p\lambda_m}{2}$  angreift, Fig. 278. Im  $m$ ten Felde sei vorläufig eine rechtssteigende Diagonale angenommen; sie wird



infolge der vorausgesetzten Belastung einen Druck  $D_{m,p}$  erleiden, welcher nach Ermittlung von  $A_m$  mit Hilfe des Culmannschen Verfahrens bestimmt werden kann. Vergl. Fig. 278a. Bringt man vom Drucke  $D_{m,p} = \overline{cn}$  den durch die ständige Belastung verursachten Zug  $D_{m,g} = \overline{cd}$  in Abzug, so bleibt, da ja im  $m^{\text{ten}}$  Felde eine Gegendiagonale notwendig sein soll, ein Druck  $D_m = \overline{dn}$  übrig, und dieser Druck möge nun durch eine links von  $m - 1$  aufgebrauchte Verkehrsbelastung aufgehoben werden. Der durch diese hinzugefügte Belastung erzeugte rechte Stützenwiderstand sei  $\Delta B$ , und der in der Diagonale hervorgebrachte Zug sei  $\Delta D_m$ ; er läßt sich mit Hilfe des Culmannschen Verfahrens bestimmen (Fig. 278b) und muß gleich dem vorhin erhaltenen Drucke  $D_m$  sein. Aus dieser Bedingung ergibt sich nun die in der Fig. 278c dargestellte Bestimmungsweise von  ${}_{max} V_m$ .

Man mache  $\overline{ab} = A_m$ , ziehe  $bc \parallel L$  und  $ac \parallel U_m$ , trage in  $c$  die zur Diagonale  $D_m$  parallele Strecke:  $\overline{cd} = D_m$  an und ziehe  $de \parallel L'$  und  $be \parallel O_m$ . Dann ist  $\overline{eb}$  gleich der von der Verkehrslast herrührenden Spannkraft  $O_m$ , entsprechend einem Belastungszustande, für welchen die Diagonalen des  $m^{\text{ten}}$  Feldes spannungslos sind. Um dies einzusehen, lege man die Figuren 278a und 278b so aneinander, daß sich die Strecken  $\Delta D_m$  und  $D_m$  decken. Verlängert man schließlich  $be$  um  $ef = O_m$ , (= Spannkraft infolge der ständigen Belastung) und zieht  $fi \parallel O_{m+1}$ , so schneidet man auf  $ba$  die Strecke

$$\overline{bi} = {}_{max} V_m$$

ab. Das Dreieck  $bif$  ist das Kräftepolygon für den oberen Knoten  $m$ .

Unser zweites Verfahren ist hauptsächlich dann zweckmäßig, wenn die von der Verkehrslast herrührenden Spannkräfte in sämtlichen Füllungsstäben nach Culmann und die durch die ständige Belastung erzeugten Spannkräfte nach Cremona ermittelt werden, weil man dann  $A_m, D_m, O_m$  ohnehin bestimmen muß.

Besteht die Verkehrslast aus einem von  $B$  aus vorrückenden Zuge von Einzellasten, so empfiehlt es sich, die zweite Last bei  $m$  liegend anzunehmen. An die Stelle  $A_m$  tritt jetzt die

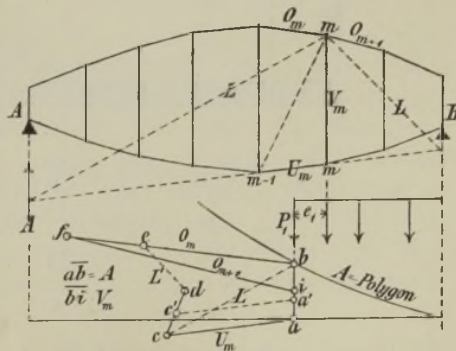


Fig. 279.

unter  $P_1$  gemessene Ordinate des  $A$ -Polygons. Nach Aufzeichnung des Dreiecks  $abc$  (wobei wie vorhin  $\overline{ab} = A$ ,  $ac \parallel U_m$  und  $bc \parallel L$ ) wird  $aa' = P' = P_1 \frac{e_1}{\lambda_m}$  gemacht und durch  $a'$  zu  $U_m$  eine Parallele gezogen, welche eine durch  $c$  zur Diagonale  $D_m$  gelegte Parallele in  $c'$  schneidet; worauf  $cc'$  um  $c'd = D_m$  verlängert und im übrigen wie vorhin verfahren wird. Die Strecke  $cc'$  stellt den Einfluß der in  $(m - 1)$  wirkamen Last  $P'$  auf die Spannkraft  $D_m$  dar.\*)

*Drittes Verfahren.* Es wird angenommen, daß der Balken außer der ständigen Belastung noch einen von  $B$  aus vorgeschobenen Zug von Einzellasten trägt, dessen zweite Last bei  $m$  liegt. Für diesen Belastungsfall werden die Werte  $M_m | \lambda_m$  und  $M_{m-1} | \lambda_m$  ermittelt und auf den Verlängerungen der Vertikalen  $m$  und  $m - 1$  als Ordinaten ( $DE$  und  $FH$  in Fig. 280) aufgetragen. Hierauf werden links von  $m - 1$  so lange Lasten aufgebracht, bis die anfänglich gezogene linkssteigende Diagonale des  $m^{\text{ten}}$  Feldes spannungslos wird. Es ändert sich hierbei der Stützenwiderstand  $B$  um  $+\Delta B$  und die Verhältnisse  $M | \lambda$  wachsen beziehungsweise um

$$\overline{EE'} = \frac{\Delta M_m}{\lambda_m} = \frac{\Delta B}{\lambda_m} x'_m \quad \text{und} \quad \overline{HH'} = \frac{\Delta M_{m-1}}{\lambda_m} = \frac{\Delta B}{\lambda_m} x'_{m-1},$$

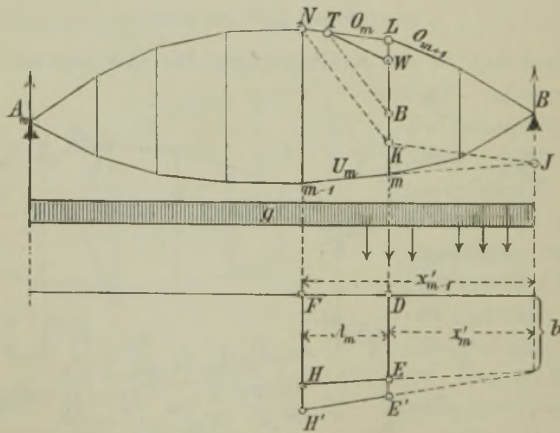


Fig. 280.

\*) Man hat sich hierbei (nach No. 153) die Einflüsse der links vom Knoten  $m - 1$  in Fig. 279 wirkenden äußeren Kräfte  $A$  und  $P'$  gesondert dargestellt zu denken. Die Spannkraft  $O_m$  wird dann durch  $P'$  nicht verändert.

wonach  $\overline{EE'} : \overline{HH'} = x'_m : x'_{m-1}$ . Hieraus folgt, daß sich die Geraden  $H'E'$  und  $HE$  in einem Punkte der Richtungslinie von  $B$  schneiden müssen, während sich aus der Bedingung, daß die Spannkraft  $D_m = 0$  sein soll, schließen läßt, daß der Schnittpunkt der Geraden  $H'E'$  und  $FD$  auf der Senkrechten durch den Schnittpunkt der Gurtstäbe  $O_m$  und  $U_m$  liegt. Überhaupt lassen sich jetzt Schritt für Schritt dieselben Schlüsse ziehen wie bei der Entwicklung des ersten Verfahrens, und es ergibt sich dann die folgende Darstellung von  ${}_{max}V_m$ .

Der Stab  $U_m$  der unteren Gurtung wird mit der Senkrechten durch  $B$  in  $J$  zum Schnitt gebracht und durch  $J$  zu  $O_m$  eine Parallele gezogen, welche die  $m^{\text{te}}$  Vertikale in  $K$  trifft. Vergl. Fig. 280. Nun wird die Gerade  $KN$  gezogen,  $LB$  gleich der Strecke  $b$  gemacht, welche die Geraden  $FD$  und  $HE$  auf der Richtungslinie von  $B$  abschneiden und  $BT \parallel KN$  gezogen. Schließlich wird noch  $TW \parallel O_{m+1}$  gemacht und  ${}_{max}V_m = \overline{LW}$  erhalten.

Unser drittes Verfahren ist hauptsächlich dann von Vorteil, wenn die Spannkraft  ${}_{max}D$  und  ${}_{min}V$  auf die von *Zimmermann* angegebene Weise (§ 31) bestimmt werden und die Verkehrslast aus einem Zuge von Einzellasten besteht, während das erste Verfahren namentlich bei gleichförmiger Belastung zu empfehlen ist.

Bei der Anwendung des zweiten und dritten Verfahrens braucht über Größe und Stellung der links von  $m - 1$  wirkenden Verkehrslast nichts bekannt zu sein. Es genügt, anzunehmen: der Träger ist links von  $m - 1$  so belastet, daß die in der Gegendiagonale des  $m^{\text{ten}}$  Feldes durch die ständige Last und durch den von  $B$  aus bis ins  $m^{\text{te}}$  Feld vorgeschobenen Lastenzug erzeugte Spannkraft wieder aufgehoben wird. Nun kann es aber vorkommen, daß zur Aufbringung jener Belastung der Raum fehlt, und daß selbst bei voller Belastung des Trägereiles links von  $m - 1$  in jener Gegendiagonale ein kleiner Zug übrig bleibt. Trotzdem ist es zulässig, jene Verfahren anzuwenden, weil sie einen etwas zu großen Wert  ${}_{max}V_m$  liefern, der indes von dem genaueren Werte nur wenig abweicht. Man kann übrigens den entstandenen Fehler leicht verkleinern, zuweilen sogar aufheben, wenn man sich an die Regel hält, daß bei der Ermittlung der  ${}_{max}V_m$  in die Kräftepolygone für die oberen Knotenpunkte  $m$  (Fig. 276 a) nicht Kräfte  $O$  eingeführt werden dürfen, welche die vorher aus den Momenten  ${}_{max}M$  gefolgerten größten Spannkraft  $O$  übersteigen.

*Greift die Belastung in den Knotenpunkten des Obergurtes an*, so ist die Bestimmung der Spannkraft  ${}_{max}V$  sehr umständlich; es genügt aber, die Kräfte  ${}_{min}V$  zu ermitteln und bei Berechnung der zulässigen Inanspruchnahme die zweite Grenzspannkraft = Null zu setzen. Da die  ${}_{max}V$  hier kleine Drücke sind, so erhält man die Querschnitte



etwas zu groß. Eine Ausnahme bilden die Sichelträger. Diese werden aber in der Regel als Parabelträger konstruiert, und dann entstehen die  ${}_{max}V$  bei gänzlicher Belastung; sie ergeben sich, da sämtliche Diagonalen spannungslos sind, aus den Kräften  ${}_{max}U$ . Es werden die Kräftepolygone für die Knotenpunkte der unteren Gurtung gezeichnet. Vergl. No. 169.

**162. Spannkkräfte in den Gurtungen.** Besteht die Verkehrslast aus einem Zuge von Einzellasten, so werden die Momente  ${}_{max}M$  im allgemeinen bei verschiedenen Laststellungen entstehen. Ist dann

$$\frac{{}_{max}M_m}{h_m} > \frac{{}_{max}M_{m-1}}{h_{m-1}},$$

so ist auch

$$\frac{{}_{max}M_m}{h_m} > \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}},$$

wo  $M_{m-1}$  dasjenige für den  $(m-1)$ ten Knotenpunkt gebildete Moment ist, welches bei der das Moment  ${}_{max}M_m$  erzeugenden Laststellung entsteht. Es ist also bei dieser Laststellung im  $m$ ten Felde die linkssteigende Diagonale gespannt und

$$O_m = -\frac{{}_{max}M_m}{h_m} \sec \beta_m.$$

Dagegen kann es vorkommen, daß im vorliegenden Falle

$$\frac{{}_{max}M_{m-1}}{h_{m-1}} > \frac{M_m}{h_m}$$

ist, wo  $M_m$  das gleichzeitig mit  ${}_{max}M_{m-1}$  entstehende Moment bedeutet. Da nun in diesem Falle die rechtssteigende Diagonale gespannt wird, so darf streng genommen nicht

$$(I) \quad U_m = \frac{{}_{max}M_{m-1}}{h_{m-1}} \sec \gamma_m$$

gesetzt werden, vielmehr ist

$$U_m < \frac{{}_{max}M_{m-1}}{h_{m-1}} \sec \gamma_m.$$

Der Fehler, der durch Anwendung von Formel I entsteht, ist indes gering. Er darf um so mehr zugelassen werden, als sich  $U_m$  etwas zu groß ergibt, und der Wert einer allzupeinlichen Rechnung — wie nicht oft genug betont werden kann — höchst zweifelhaft ist.

Deshalb setzen wir

$$\left. \begin{aligned} O_m \cos \beta_m &= -\frac{{}_{max}M_m}{h_m} \\ U_m \cos \gamma_m &= +\frac{{}_{max}M_{m-1}}{h_{m-1}} \end{aligned} \right\} \text{ sobald } \frac{{}_{max}M_m}{h_m} > \frac{{}_{max}M_{m-1}}{h_{m-1}}$$

und ganz entsprechend

$$\left. \begin{aligned} O_m \cos \beta_m &= - \frac{M_{m-1}}{k_{m-1}} \\ U_m \cos \gamma_m &= + \frac{M_m}{k_m} \end{aligned} \right\} \text{ sobald } \frac{M_{m-1}}{k_{m-1}} > \frac{M_m}{k_m}$$

Im ersten Falle ist bei der nächsten Ermittlung von  $O_m$  und  $U_m$  im  $m^{\text{ten}}$  Felde eine linkssteigende Diagonale anzunehmen (Fig. 263), im zweiten Falle eine rechtssteigende (Spiegelbild der Fig. 263, in welcher dann aber  $m-1$  und  $m$  miteinander zu vertauschen sind).

163. Der Schwedlerträger. Wird die Gurtung eines Fachwerkbalkens so gefurmt, daß die Spannkraft  $\pm D$  jeder Diagonale gleich Null ist, so genügt in jedem Felde des Balkens eine schaffe Hauptdiagonale. Gegendiagonalen sind überflüssig. Ein solcher Träger het, nach seinem Erfinder, ein *Schwedler-Träger*.

Bezeichnet man mit  $M_m$  und  $M_{m-1}$  die auf  $m$  und  $m-1$  bezogenen Angriffsmomente für diejenige Laststellung, welche  $\pm D_m$  erzeugt, so muß sein

$$(I) \quad \frac{M_m}{k_m} - \frac{M_{m-1}}{k_{m-1}} = 0, \text{ also } \frac{k_{m-1}}{k_m} = \frac{M_{m-1}}{M_m}$$

Mit Hilfe dieser Gleichung kann man, sobald  $k_m$  gegeben ist, die Länge  $k_{m-1}$  berechnen. Die Gestalt der einen Gurtung darf beliebig angenommen werden, diejenige der anderen ergibt sich dann durch wiederholte Anwendung der Gleichung (I).

Um  $k_{m-1}$  durch Zeichnung zu ermitteln, nehme man eine Gegendiagonale an (Fig. 281) und bestimme  $k_{m-1}$ , so, daß die Spannkraft

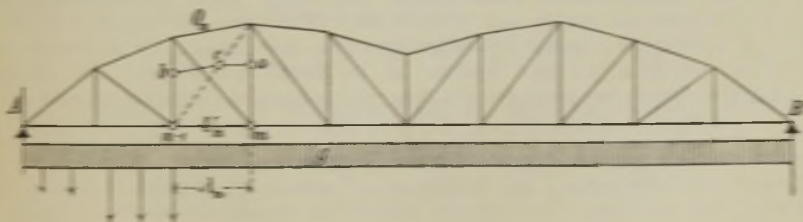


Fig. 281.

in dieser Gegendiagonale  $= 0$  wird. Dann trage man auf der  $m^{\text{ten}}$  und  $(m-1)^{\text{ten}}$  Vertikale von den unteren Knoten  $m$  und  $m-1$  aus die

Strecken  $\overline{ma} = \frac{M_m}{\lambda_m}$  und  $\overline{(m-1)b} = \frac{M_{m-1}}{\lambda_m}$  auf\*), lege durch  $a$  zu  $U_m$  eine Parallele, welche die Gegendiagonale in  $c$  schneidet, verbinde  $c$  mit  $b$  durch eine Gerade und ziehe  $O_m \perp cb$ . Die Richtigkeit dieses Verfahrens folgt aus dem Spiegelbilde der Figur 258 auf Seite 270; denn fallen in dieser Figur die Punkte  $d$  und  $e$  zusammen, so ist die Spannkraft  $D_m = cd = 0$ .

Für die in der Nähe der Trägermitte liegenden Felder ergibt sich in der Regel  $M_{m-1} > M_m$  also  $h_{m-1} > h_m$ , und es entsteht dann bei symmetrischer Anordnung des Trägers die in der Figur 281 dargestellte unschöne Form. Um diese zu vermeiden, führt man den mittleren Trägerteil mit parallelen Gurtungen aus, muß aber dann die Felder desselben mit Gegendiagonalen ausrüsten. Vergl. Fig. 282 und Fig. 283.

Bei Ermittlung der Höhen  $h_m$  ist insofern Vorsicht geboten, als die unter allen Umständen ungünstigste Belastung vorausgesetzt werden muß. Hat man z. B. für eine Eisenbahnbrücke die Verhältnisse  $\frac{h_{m-1}}{h_m}$  so gewählt, daß für die gefährlichsten Stellungen eines bestimmten Lastenzuges die Spannkräfte  ${}_{\min}D_m = 0$  werden, so wird, falls die Brücke einmal von einem schwereren Zuge befahren werden sollte, eine negative Spannkraft  ${}_{\min}D_m$  entstehen, welche von einer nur gegen Zug widerstandsfähigen Diagonale nicht aufgenommen werden kann. Die Starrheit des Trägers wird dann nur durch die an den Knotengelenken auftretenden Reibungswiderstände, oder durch die an Stelle jener Gelenke angeordneten Nietverbindungen gesichert, und es erfahren namentlich die Gurtungen größere Beanspruchungen auf Biegung. Um diesen vorzubeugen, nehme man eine möglichst große Verkehrsbelastung an, schätze dagegen die günstig wirkende ständige Belastung nicht zu hoch ab.

#### 164. Rechnerische Bestimmung der Form eines Schwedlerträgers.

a. Die Verkehrslast besteht aus Einzellasten. Wir lösen die folgende Aufgabe: Eine Eisenbahn soll durch Schwedlerträger von 40<sup>m</sup> Länge, 4<sup>m</sup> Feldweite und 6<sup>m</sup> Höhe überführt werden. Gesucht ist die Gestalt des Trägers. Die ständige Belastung schätzen wir nach der auf Seite 137 mitgeteilten Erfahrungsformel zu

$$g = 27,5 l + 750 = 27,5 \cdot 40 + 750 = 1850^* = 1,85^* \text{ f. d. Meter Gleis,}$$

wofür wir aber aus den oben angeführten Gründen den kleineren Wert  $g = 1,7^*$  in Rechnung stellen wollen. Die Belastung der ersten Lokomotivachse erhöhen wir auf 15<sup>t</sup> und beschränken uns auf den Einfluß von Grundstellungen.\*\*)

\*) Die zeichnerische Ermittlung der Werte  $\frac{M}{\lambda}$  ist in No. 156 beschrieben worden.

\*\*) Das Beispiel ist aus den früheren Auflagen übernommen. Über die z. Z. geltenden Belastungsannahmen vergl. man No. 66.



Das Angriffsmoment infolge der ständigen Belastung beträgt für den Knoten  $m$  (wegen  $x_m = m\lambda$  und  $l = 10\lambda$ )

$$M_{m, g} = \frac{g x_m (l - x_m)}{2} = \frac{g \lambda^2 m (10 - m)}{2} = \frac{1,7 \cdot 4,0^2 m (10 - m)}{2} \\ = 13,6 m (10 - m),$$

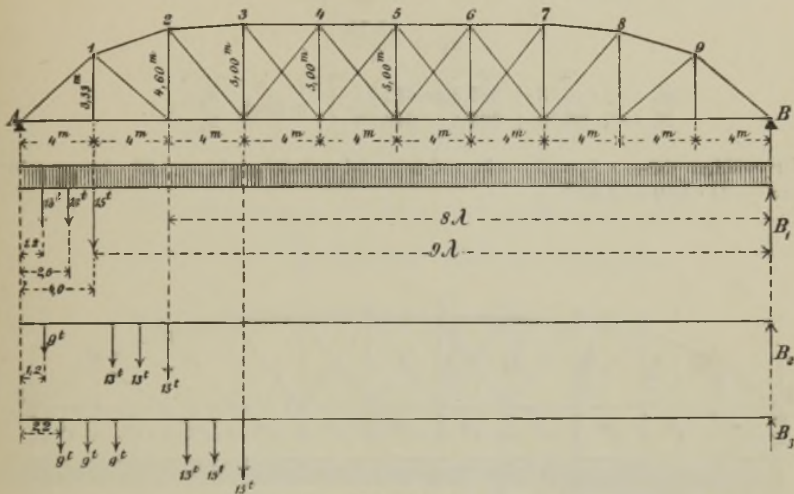


Fig. 282.

und hiernach ergibt sich der Reihe nach für  $m = 1, 2, 3, 4, 5$

$$\begin{array}{ll} M_{g1} = 13,6 \cdot 1 (10 - 1) = 122,4 \text{ tm} & M_{g4} = 13,6 \cdot 4 (10 - 4) = 326,4 \text{ tm} \\ M_{g2} = 13,6 \cdot 2 (10 - 2) = 217,6 \text{ tm} & M_{g5} = 13,6 \cdot 5 (10 - 5) = 340,0 \text{ tm} \\ M_{g3} = 13,6 \cdot 3 (10 - 3) = 285,6 \text{ tm} & \end{array}$$

Behufs Berechnung von  $\frac{h_1}{h_2}$  wird der Zug von  $A$  bis 1 vorgeschoben, er ruft am rechten Auflager den Widerstand hervor

$$B_1 = \frac{15 \cdot 4,0 + 13 (2,6 + 1,2)}{l} = \frac{109,4}{10\lambda} = \frac{10,94}{\lambda},$$

und es ergeben sich mit Berücksichtigung der ständigen Belastung die Angriffsmomente

$$\begin{array}{l} M_1 = B_1 9\lambda + M_{g1} = 9 \cdot 10,94 + 122,4 = 220,86 \text{ tm}, \\ M_2 = B_1 8\lambda + M_{g2} = 8 \cdot 10,94 + 217,6 = 305,12 \text{ tm}, \end{array}$$

weshalb

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{M_1}{M_2} = \frac{220,86}{305,12} = 0,724.$$

Jetzt wird der Zug bis zum Knoten 2 vorgeschoben; er erzeugt

$$B_2 = \frac{28,42}{\lambda},$$

und es folgt daher

$$\begin{aligned} M_2 &= 8 \cdot 28,42 + 217,6 = 444,96 \\ M_3 &= 7 \cdot 28,42 + 285,6 = 484,54 \\ \frac{h_2}{h_3} &= \frac{M_2}{M_3} = \frac{444,96}{484,54} = 0,92. \end{aligned}$$

Reicht der Zug bis zum Knoten 3, so entsteht

$$\begin{aligned} B_3 &= \frac{53,73}{\lambda} \\ \left. \begin{aligned} M_3 &= 7 \cdot 53,73 + 285,6 = 661,71 \\ M_4 &= 6 \cdot 53,73 + 326,4 = 648,78 \end{aligned} \right\} \text{wonach } \frac{h_3}{h_4} > 1. \end{aligned}$$

Wir wählen daher:  $h_3 = h_4 = h_5 = 5,0^m$  und erhalten:  $h_2 = 0,92 \cdot 5,0 = 4,60^m$ ;  $h_1 = 0,724 \cdot 4,60 = 3,33^m$ .

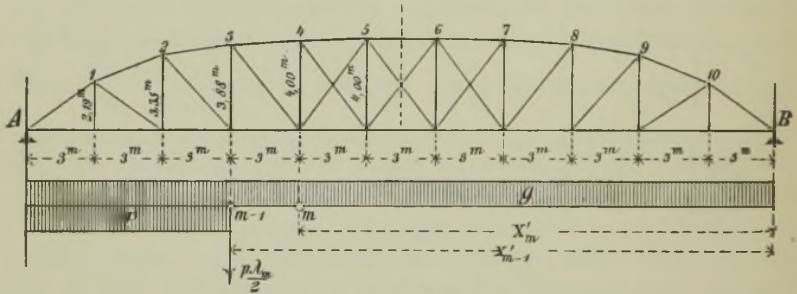


Fig. 283.

b. *Gleichförmige Belastung.* Um  $\min D_m$  zu erzeugen, wird der in der Fig. 283 dargestellte, besonders ungünstige Belastungszustand vorausgesetzt. Vergl. No. 148 Seite 248. Der von der Belastung  $p$  herrührende Widerstand des rechten Auflagers ist

$$B = \frac{p x_{m-1} x_m}{2l},$$

und es entstehen deshalb die Angriffsmomente

$$M_{m-1} = B x'_{m-1} + M_{(m-1)g} = \frac{p x_{m-1} x_m x'_{m-1}}{2l} + \frac{g x_{m-1} x'_{m-1}}{2}$$

$$M_m = B x'_m + M_{mg} = \frac{p x_{m-1} x_m x'_m}{2l} + \frac{g x_m x'_m}{2}.$$

Mithin ergibt sich

$$\frac{h_{m-1}}{h_m} = \frac{x_{m-1} x'_{m-1} (gl + p x_m)}{x_m x'_m (gl + p x_{m-1})}.$$

Sind die Feldweiten gleich groß, so darf in die vorstehende Gleichung der Wert  $\lambda = 1$  eingeführt werden. Liegt also beispielsweise ein Träger von  $33^m$  Stützweite vor mit 11 Feldern von  $3^m$  Länge, so darf gesetzt werden:  $x_3 = 3 \cdot 1$  und  $x'_3 = (11 - 3) \cdot 1 = 8$ . Man erhält dann, wenn  $g = 0,3'$  und  $p = 0,7^{**}$  ist

$$\begin{aligned} \frac{h_1}{h_2} &= \frac{1 \cdot 10 (0,3 \cdot 11 + 0,7 \cdot 2)}{2 \cdot 9 (0,3 \cdot 11 + 0,7 \cdot 1)} = \frac{47}{72} \\ \frac{h_2}{h_3} &= \frac{2 \cdot 9 (0,3 \cdot 11 + 0,7 \cdot 3)}{3 \cdot 8 (0,3 \cdot 11 + 0,7 \cdot 2)} = \frac{81}{94} \\ \frac{h_3}{h_4} &= \frac{3 \cdot 8 (0,3 \cdot 11 + 0,7 \cdot 4)}{4 \cdot 7 (0,3 \cdot 11 + 0,7 \cdot 3)} = \frac{61}{63} \\ \frac{h_4}{h_5} &= \frac{4 \cdot 7 (0,3 \cdot 11 + 0,7 \cdot 5)}{5 \cdot 6 (0,3 \cdot 11 + 0,7 \cdot 4)} > 1. \end{aligned}$$

Wird die Höhe des Trägers in der Mitte  $= 4^m$  gewählt, so ergibt sich

$$h_4 = h_5 = 4^m; h_3 = \frac{61}{63} \cdot 4 = 3,88^m \text{ (nach oben abgerundet);}$$

$$h_2 = \frac{81}{94} \cdot 3,88 = 3,35^m; h_1 = \frac{47}{72} \cdot 3,35 = 2,19^m.$$

### § 35.

#### Gleichmäßig belastete Parabelträger mit Gegendiagonalen.

165. **Spannkkräfte in den Gurtungen.** Wird die Gestalt der einen Gurtung bei *beliebig angenommener Form der anderen Gurtung* mittels der Parabelgleichung

$$(1) \quad h_m = \frac{4f x_m x'_m}{l^2}$$

bestimmt — vergl. Seite 275 und Fig. 268 —, so ergibt sich bei gänzlicher Belastung des Trägers mit  $q$

$$\frac{M_m}{h_m} = \frac{q x_m x'_m}{2 h_m} = \frac{q l^2}{8 f}.$$

Die Diagonalen sind spannungslos, und für die Spannkkräfte  $O$  und  $U$  erhält man die Formeln

$$(2) \quad - O_m \cos \beta_m = \frac{q l^2}{8 f} \text{ und } U_m \cos \gamma_m = \frac{q l^2}{8 f}.$$

\*) Diese Belastungen entsprechen einer Fußgängerbrücke mit 2 Hauptträgern, deren Bahn aus Bohlenbelag auf hölzernen Längsträgern und eisernen Querträgern besteht. Breite der Brücke  $3,5^m$ . Verkehrsbelastung (Menschengedränge)  $= 400^k$  f. d.  $qm$ , so daß auf jeden der beiden Träger  $p = \frac{3,5 \cdot 0,4}{2} = 0,7$  entfällt. Das Eigengewicht ist  $= 170^k$  f. d.  $qm$  Brückenbahn, also  $= \frac{3,5 \cdot 0,17}{2} = 0,3'$  f. d.  $m$  der Trägerlänge geschätzt worden.



Macht man also in Fig. 284 die Wagerechte  $\overline{CE} = \frac{ql^2}{8f}$ , und zieht durch  $C$  zu den Stäben  $O_1, O_2, O_3, \dots$  Parallelen, welche das in  $E$  auf  $CE$  errichtete

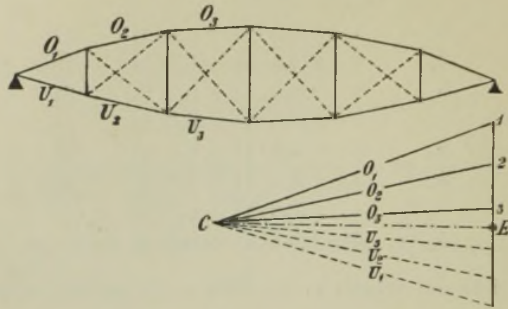


Fig. 284.

Lot in den Punkten 1, 2, 3, . . . schneiden, so stellen die Strecken  $C1, C2, C3, \dots$  die Spannkraften  $O_1, O_2, O_3, \dots$  dar. Ganz ebenso werden die Spannkraften  $U$  ermittelt.

**166. Spannkraften in den Diagonalen.** Der Einfluß der ständigen Belastung ist  $= 0$ . Die Spannkraft  $m_{a,z} D_m$  entsteht, wenn die Strecke  $x'_m$  mit  $p x'_m$  und der Knoten  $m$  [mit  $\frac{p \lambda_m}{2}$ ] belastet wird (Fig. 285). Vergl. Seite 249. Am linken Auflager wird der Widerstand

$$A_m = \frac{p x'_m x'_{m-1}}{2l}$$

hervorgehoben, und es entsteht (wegen  $x'_{m-1} + x'_m = \lambda_m$ )

$$\begin{aligned} D_m \cos \varphi_m &= \frac{M_m}{h_m} - \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}} = \frac{A_m x_m l^2}{4f x_m x'_m} - \frac{A_m x_{m-1} l^2}{4f x_{m-1} x'_{m-1}} = \frac{A_m l^3 \lambda_m}{4f x'_m x'_{m-1}} \\ &= \frac{p l \lambda_m}{8f} \end{aligned}$$

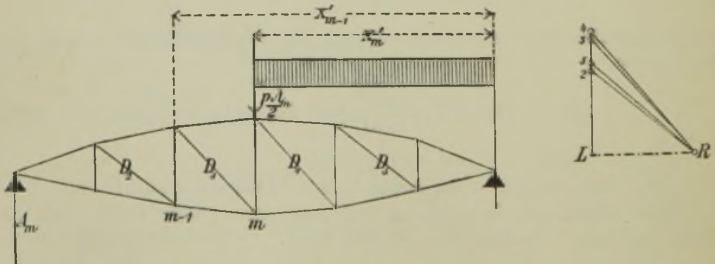


Fig. 285.

Macht man also in Fig. 285 die Wagerechte  $\overline{RL} = \frac{p \lambda_m}{8f}$  und zieht durch

$R$  zu den Diagonalen  $D_2, D_3, D_4 \dots$  Parallelen, welche das in  $L$  auf  $RL$  errichtete Lot in den Punkten 2, 3, 4,  $\dots$  schneiden, so stellen die Strecken  $R2, R3, R4, \dots$  die Spannkraften  $maxD_2, maxD_3, maxD_4, \dots$  vor.

Bezeichnet man die Länge der Diagonale des  $m^{ten}$  Feldes mit  $d_m$ , so darf man auch (wegen  $\lambda_m = d_m \cos \varphi_m$ ) schreiben

$$(3) \quad D_m = \frac{pl}{8f} d_m.$$

Wählt man den Kräftemaßstab  $\frac{pl}{8} = f$  (also beispielsweise für  $l = 40^m$ ,  $f = 6^m$  und  $p = 2,2^t$  den Maßstab  $11,0^t = 6^m$ ), so erhält man

$$D_m = d_m.$$

167. Spannkraften  $minV_{mp}$  infolge der beweglichen Belastung. *a. Beliebige Form der einen Gurtung.* Greift die Belastung an der unteren Gurtung an, so entsteht  $minV_m$  gleichzeitig mit  $maxD_{m+1}$ . Bringt man  $U_{m+1}$  mit  $A$  in  $C$  zum Schnitt, und zieht durch  $C$  Parallelen zu  $O_m$  und  $O_{m+1}$ , welche die fragliche Vertikale in  $E$  und die darauf folgende Diagonale in  $F$  schneiden, so ist nach

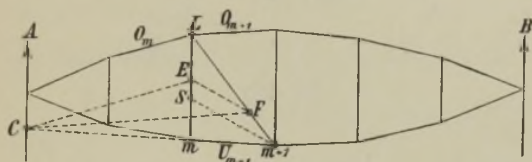


Fig. 286.

No. 152 und mit Bezugnahme auf Fig. 241

$$\frac{minV_{mp}}{maxD_{(m+1)p}} = - \frac{LE}{LF}, \text{ woraus } minV_m = - \frac{pl}{8f} d_{m+1} \frac{LE}{LF}.$$

Zieht man durch den unteren Knoten  $m+1$  zu  $FE$  eine Parallele, welche die fraglichen Vertikale in  $S$  schneidet und setzt  $LS = c_m$ , so findet man

$$(4) \quad minV_{mp} = - \frac{pl}{8f} c_m,$$

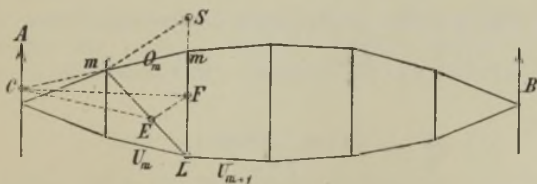


Fig. 287.

und es stellt demnach die im Kräftemaßstabe  $\frac{pl}{8} = f$  gemessene Strecke  $c_m$  die Spannkraft  $minV_{mp}$  vor.

Greift die Belastung an der oberen Gurtung an, so entsteht  $\min V_m$  gleichzeitig mit  $\max D_m$ . Man bringt  $O_m$  mit  $A$  in  $C$  zum Schnitt, Fig. 287, zieht  $CE \parallel U_m$ ,  $CF \parallel U_{m+1}$  und  $(m-1)S \parallel EF$ . Mit  $LS = c'_m$  findet man

$$\min V_m = -\frac{pl}{8f} c'_m.$$

b. Die Knotenpunkte beider Gurtungen liegen auf Parabeln, deren Gleichungen mit den Bezeichnungen in Fig. 288 lauten

$$(5) \quad h_{om} = \frac{4f_o x_m x'_m}{l^2}; \quad h_{um} = \frac{4f_u x_m x'_m}{l^2}.$$

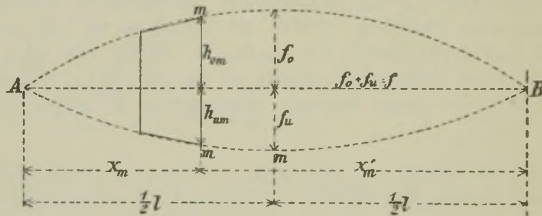


Fig. 288.

$$\text{Es ist dann } h_m = h_{om} + h_{um} = \frac{4f x_m x'_m}{l^2}.$$

Die Spannkraft  $\min V_{mp}$  wird hervorgerufen, wenn nur Lasten rechts von dem durch  $O_m$ ,  $V_m$ ,  $U_{m+1}$  geführten Schnitte wirken; sie ergibt sich aus der auf den Schnittpunkt von  $O_m$  und  $U_{m+1}$  bezogenen Ritterschen Momentengleichung (vergl. Fig. 289)

$$-V_{mp} e_m - A(e_m - x_m) = 0, \text{ woraus } V_{mp} = -A \frac{e_m - x_m}{e_m} = -A \frac{s}{h_m}.$$

Für die Strecke  $s$ , welche die Verlängerungen von  $O_m$  und  $U_{m+1}$  auf der linken Auflagersenkrechten abschneiden, ergibt sich leicht der Ausdruck

$$s = s_o + s_u = h_{om} - \frac{h_{om} - h_{o(m-1)}}{\lambda_m} x_m + h_{u(m+1)} - \frac{h_{u(m+1)} - h_{um}}{\lambda_{m+1}} x_{m+1}$$

und nach Einführung der oben für  $h_o$  und  $h_u$  angegebenen Werte

$$s = \frac{4x_m}{l^2} (f_o x_{m-1} + f_u x_{m+1}),$$

weshalb

$$\frac{s}{h_m} = \frac{f_o x_{m-1} + f_u x_{m+1}}{f x'_m}.$$

Je nachdem nun die Belastung an der unteren oder oberen Gurtung angreift, wirkt am linken Auflager (nach No. 148 Seite 249) der Widerstand:

$$A_{m+1} = \frac{p x'_m x'_{m+1}}{2l} \text{ oder } A_m = \frac{p x'_m x_{m-1}}{2l},$$

und man findet deshalb



$$(6) \left\{ \begin{array}{l} \text{bei unten wirkender Belastung } \min V_{pm} = -\frac{p x'_{m+1}}{2lf} (f_o x_{m-1} + f_u x_{m+1}) \\ \text{,, oben ,, ,, } \min V_{pm} = -\frac{p x'_{m-1}}{2lf} (f_o x_{m-1} + f_u x_{m+1}), \end{array} \right.$$

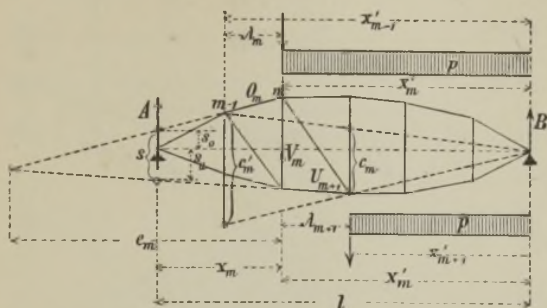


Fig. 289.

wofür man nach einer leichten Umformung auch schreiben darf

$$(7) \left\{ \begin{array}{l} \min V_{pm} = -\frac{pl}{8f} \left[ h_{u(m+1)} + h_{o(m-1)} \frac{x'_{m+1}}{x'_{m-1}} \right] \\ \min V_{pm} = -\frac{pl}{8f} \left[ h_{o(m-1)} + h_{u(m+1)} \frac{x'_{m-1}}{x'_{m+1}} \right]. \end{array} \right.$$

Aus diesen Formeln ergeben sich die folgenden Gesetze. Greift die Belastung an der unteren Gurtung an, so lege man durch  $B$  und den oberen Knoten  $m-1$  eine Gerade und bestimme die Strecke  $c_m$ , welche dieselbe auf der  $(m+1)$ ten Vertikale abschneidet. Man erhält dann  $\min V_{mp} = -\frac{pl}{8f} c_m$ .

Bei oben angreifender Belastung ist  $\min V_{mp} = -\frac{pl}{8f} c'_m$ , wobei  $c'_m$  die Strecke ist, welche eine von  $B$  aus durch den unteren Knoten  $m+1$  gelegte Gerade auf der  $(m-1)$ ten Vertikale abschneidet.

Es soll noch *unter der Voraussetzung gleich großer Feldweiten* eine Bestimmungsweise der  $\min V_{mp}$  mitgeteilt werden, welche zu außerordentlich übersichtlichen Kräfteplänen führt. Dabei mögen die folgenden Fälle behandelt werden.

1. Der Bogensehnenträger. Fig. 290.

Die Belastung greife an der unteren Gurtung an. Wegen  $f_u = 0$  geht die erste der Gleichungen (6) nach Einsetzen der Werte

$$x'_{m+1} = x'_m - \lambda; \quad x_{m+1} = x_m + \lambda; \quad x'_m = l - x_m$$

über in

$$(8) \quad \min V_{pm} = -\frac{p[x_m(l-x_m) - \lambda(l-\lambda)]}{2l}$$

Nimmt man jetzt in jedem Knoten eine Last  $p\lambda$  an (welche Annahme einer gleichmäßigen Belastung des ganzen Trägers mit  $p$  f. d. Längeneinheit

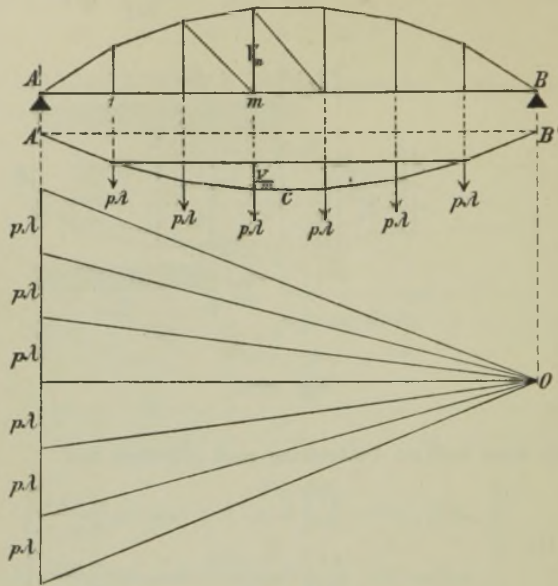


Fig. 290.

entspricht) und zeichnet zu dieser Belastung mit der Polweite  $l$  ein Seilpolygon  $A'CB'$ , so ist dessen Ordinate bei  $m$ :  $= \frac{px_m(l-x_m)}{2l}$ , nämlich gleich dem durch die Polweite  $l$  geteilten, durch gänzliche Belastung des Trägers hervorgerufenen Angriffsmomente  $\frac{px_m(l-x_m)}{2}$ . Die Ordinate bei 1 ist:  $= \frac{p\lambda(l-\lambda)}{2l}$  und es folgt daher aus Gleichung (8)

$$\min V_{pm} = -Y_m,$$

wo  $Y_m$  den Unterschied der den Knoten  $m$  und 1 entsprechenden Ordinaten des Seilpolygons  $A'CB'$  ist. Wir wollen dieses Seilpolygon in der Folge kurz das Polygon  $S$  nennen.

Man kann auch Gleich. (8) mit Rücksicht auf  $h = \frac{4fx(l-x)}{l^2}$  umformen in

$$\min V_{pm} = -\frac{pl}{8f}(h_m - h_1)$$

und erhält dann, wenn der Kräftemaßstab  $\frac{pl}{8} = f$  gewählt wird,

$$\min V_{pm} = -(h_m - h_1).$$

2. Der Fischbauchträger. Fig. 291.

Die Belastung greife oben an. Dann gilt die zweite der Gleichungen (6). Dieselbe läßt sich umformen in

$$(9) \quad \min V_{pm} = - \left[ \frac{p x_m (l - x_m)}{2l} + \frac{p \lambda (l + \lambda)}{2l} \right] = - Y_m$$

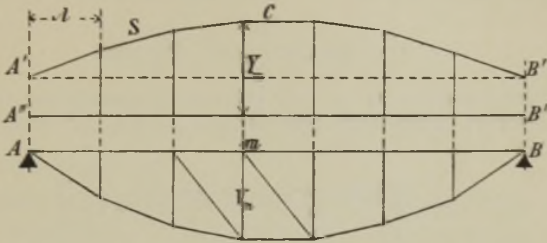


Fig. 291.

und hieraus folgt: Zieht man nach Aufzeichnung des Seilpolygons S im Abstände  $\overline{A'A''} = \frac{p \lambda (l + \lambda)}{2l}$  zur Schlußlinie  $A'B'$  eine Parallele  $A''B''$ , so ist  $Y_m$  die auf die Gerade  $A''B''$  bezogene Ordinate des Seilpolygons.

3. Der Fischträger. Fig. 292.

Es ist  $f_o = f_u = \frac{1}{3}f$ . Die Gleichungen (6) gehen dann über in

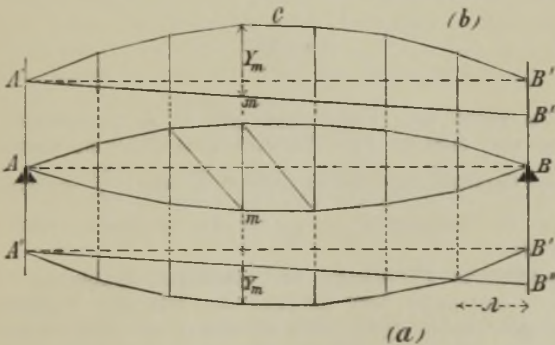


Fig. 292.

$$(10) \quad \begin{cases} \min V_{pm} = - \left[ \frac{p x_m (l - x_m)}{2l} - \frac{p \lambda x_m}{2l} \right] = - Y_m \\ \min V_{pm} = - \left[ \frac{p x_m (l - x_m)}{2l} + \frac{p \lambda x_m}{2l} \right] = - Y_m. \end{cases}$$





Liegen die Knotenpunkte beider Gurtungen auf Parabeln, gelten also die Gleichungen (5) auf Seite 294, so ist es möglich, für die Spannkkräfte  $V_g$  sehr einfache Formeln abzuleiten. Da nämlich die obere Gurtung das Seilpolygon für die in den oberen Knotenpunkten  $m$  angreifenden Kräfte  $V_{mg} + \frac{1}{2} g_o (\lambda_m = \lambda_{m+1})$  bildet und die untere Gurtung das Seilpolygon für die unten angreifenden Kräfte  $\frac{1}{2} g_u (\lambda_m + \lambda_{m+1}) - V_{mg}$ ; da ferner das Verhältnis  $\frac{h_{om}}{h_{um}}$  den festen Wert  $\frac{f_o}{f_u}$  besitzt und beiden Seilpolygonen dieselbe Polweite  $\frac{1}{8} g l^2$  entspricht, so folgt

$$\frac{V_{mg} + \frac{1}{2} g_o (\lambda_m + \lambda_{m+1})}{\frac{1}{2} g_u (\lambda_m + \lambda_{m+1}) - V_{mg}} = \frac{f_o}{f_u}$$

und hieraus

$$(12) \quad V_{mg} = \frac{1}{2} g_u (\lambda_m + \lambda_{m+1}) \frac{f_o}{f} - \frac{1}{2} g_o (\lambda_m + \lambda_{m+1}) \frac{f_u}{f}.$$

Insbesondere ergibt sich

- für den Bogensehenträger in Fig. 290  $V_{mg} = + \frac{1}{2} g_u (\lambda_m + \lambda_{m+1})$
- „ „ Fischbauchträger „ „ 291  $V_{mg} = - \frac{1}{2} g_o (\lambda_m + \lambda_{m+1})$
- „ „ Fischträger ( $f_o = f_u = \frac{1}{2} f$ ) in Fig. 292  $V_{mg} = + \frac{1}{4} (g_u - g_o) (\lambda_m + \lambda_{m+1})$
- „ „ Sichelträger in Fig. 293  $V_{mg} = \frac{1}{2} g_u (\lambda_m + \lambda_{m+1}) \frac{f_o}{f} + \frac{1}{2} g_o (\lambda_m + \lambda_{m+1}) \frac{f_u}{f}$ .

Für den Sichelträger kann man auch schreiben

$$V_{mg} = \frac{1}{2} \left( g \frac{f_u}{f} + g_u \right) (\lambda_m + \lambda_{m+1}), \text{ wo } g = g_o + g_u.$$

**169. Spannkkräfte  $_{max} V_m$ .** Während es bei der Bestimmung der  $_{min} V_m$  zweckmäßig ist, den Einfluß der beweglichen und ständigen Belastung getrennt zu ermitteln, empfiehlt es sich, bei der Untersuchung der  $_{max} V_m$  beide Belastungen gleichzeitig zu berücksichtigen.

Greift die bewegliche Belastung an der unteren Gurtung an, so entsteht  $_{max} V_m$  stets bei gänzlicher Belastung des Trägers, wie auch die Form der einen Gurtung gewählt werden mag. Die Diagonalen sind spannungslos, und man findet deshalb nach Ermittlung der Kräfte  $O$  die Spannkraft  $_{max} V_m$ , indem man das Kräftepolygon für den oberen Knoten  $m$  zeichnet. Für den *Bogensehenträger* ist  $_{max} V_m$  gleich der Belastung des unteren Knotenpunktes  $m$  d. h.

$$_{max} V_m = \frac{1}{2} (g_u + p) (\lambda_m + \lambda_{m+1}),$$

und für den in Fig. 292 dargestellten *Fischträger* erhält man, falls beide Gurtungen in Parabeln eingezeichnet sind und die bewegliche Last unten angreift

$$_{max} V_m = \frac{1}{4} (g_u - g_o + p) (\lambda_m + \lambda_{m+1}).$$

Die letzte Formel entsteht, wenn in dem für  $V_{mg}$  gefundenen Ausdrucke die Belastung  $g_u$  ersetzt wird durch  $g_u + p$ .

In den Vertikalen des *Sichelträgers* sind auch im Falle oben angreifender beweglicher Belastung größere Züge  $_{max} V_m$  möglich; sie treten ein bei gänzlicher Belastung und können nach Ermittlung der  $U$  mit Hilfe der Kräftepolygone für die Knoten der unteren Gurtung gefunden werden. Liegen die Knoten beider Gurtungen auf Parabeln (gelten also die Gleichungen 5), so ergibt sich

$$_{max} V_m = \frac{1}{2} \left( g \frac{f_u}{f} + g_u \right) (\lambda_m + \lambda_{m+1}).$$

## § 36.

**Kräfteplan für einen Parallelträger (Eisenbahnbrücke).**

Zahlenbeispiel. Tafel 3.

Eine zweigleisige Bahn soll mittels Parallelträger von der in der Fig. 294 angegebenen Anordnung überführt werden. Stützweite:  $l = 36^m$ , Trägerhöhe  $h = 3,6^m$ , Anzahl der Felder = 10 also Feldweite:  $\lambda = 3,6^m$ . Es sind zwei Hauptträger vorhanden; jeder derselben ist dann für die Belastung eines Gleises zu berechnen.

Die bewegliche Belastung besteht aus einem von drei Lokomotiven geführten Güterzuge, dessen Radstände und Achsenbelastungen in Fig. 111 angegeben sind. Die ständige Belastung (Eigengewicht) darf  $g = 1,74^t$  geschätzt werden. Vergl. Seite 137.

a. **Spannkkräfte in den Gurtungen.** In den Gurtstäben des  $m^{\text{ten}}$  Feldes entstehen die Spannkkräfte

$$(1) \quad O_m = -\frac{M_m}{h}; \quad U_m = +\frac{M_{m-1}}{h} = -O_{m-1}.$$

Die größten Momente infolge der Verkehrslast sind in Fig. 128 auf Tafel 1 mit Hilfe eines Seilpolygons bestimmt worden, dessen Polweite  $H = 115,2' = 14,4^m$  beträgt.\*) Wird  $H = 14,4^m$  angenommen, so sind die Ordinaten  $y_p$  des Seilpolygons mit dem Kräftemaßstabe zu messen. Es ist dies beim Parallelträger empfehlenswert, und zwar wird zweckmäßig  $H$  gleich einem Vielfachen von  $h$  gewählt. Im vorliegenden Falle ist  $H = 4h = 4 \cdot 3,6$  angenommen worden, und es ergibt sich dann  $M_{m_p} = 4hy_{m_p}$ .

Der Pfeil der Parabel, welcher die der ständigen Belastung entsprechenden Werte  $y_{m_g} = \frac{M_{m_g}}{H}$  liefert, ist

$$\frac{gl^2}{8H} = \frac{1,74 \cdot 36^2}{8 \cdot 4 \cdot 3,6} = 19,575^t.$$

Nach Aufzeichnung dieser Parabel (Fig. 294) wurden zu den  $y_{m_g}$  die der Fig. 128 auf Tafel 1 entnommenen  $y_{m_p}$  gefügt, worauf gemessen wurde

$$y_1 = y_{1_g} + y_{1_p} = 28,8^t; \quad y_2 = 48,7^t; \quad y_3 = 63,7^t; \quad y_4 = 72,2^t; \\ y_5 = 75,7^t.$$

Nun ist aber  $\frac{M_m}{h} = \frac{4hy_m}{h} = 4y_m$ , und es ergibt sich daher aus Gleichung (1)

\*) Beschreibung auf Seite 140 u. f.



$$\begin{aligned} O_1 &= -4y_1 = -113'; & U_1 &= 0 \\ O_2 &= -4y_2 = -195'; & U_2 &= 113' \\ O_3 &= -4y_3 = -255'; & U_3 &= 195' \\ O_4 &= -4y_4 = -289'; & U_4 &= 255' \\ O_5 &= -4y_5 = -303'; & U_5 &= 289'. \end{aligned}$$

Es ist hierbei gleichgültig, ob die Fahrbahn an der unteren oder an der oberen Gurtung liegt. (Fig. 300 u. 301.)

Werden die Diagonalen abwechselnd rechtssteigend und linkssteigend angeordnet, so entstehen die in den Figuren 302 und 303 dargestellten Trägerarten, welche man als *Netzwerke mit eingeschalteten Vertikalen* zu bezeichnen pflegt. Die Spannkraft in einem Gurtstabe ist  $= \pm \frac{M}{h}$ , wo  $M$  das Moment für den dem fraglichen Stabe gegenüberliegenden Knotenpunkt bedeutet. Es ergeben sich die in die Figuren 302 und 303 eingetragenen Kräfte.

**b. Spannkräfte in den Diagonalen.** Führt man durch das  $m^{\text{te}}$  Feld einen senkrechten Schnitt  $tt$ , Fig. 296, so findet man für irgend einen Belastungszustand zwischen der *Querkraft*  $Q_m = A - P_1 - P_2 - \dots - P_{m-1}$  und der Spannkraft  $D_m$  die Beziehung

$$(2) \quad Q_m - D_m \sin \varphi = 0 \quad \text{d. i.} \quad D_m = Q_m \operatorname{cosec} \varphi.$$

Die Querkräfte  $Q_m$  und mithin auch die Spannkräfte  $D_m$  sind unabhängig von der Höhenlage der Fahrbahn; denn es ist für die Größe von  $Q_m$  gleichgültig, ob die Lasten  $P$  in den Knoten der unteren oder oberen Gurtung oder zwischen beiden angreifen. Aus diesem Grunde ist es bei der Berechnung der  $Q$  und  $D$  nicht nötig, die ständige Belastung  $g$  in die Teile  $g_n$  und  $g_u$  zu zerlegen.

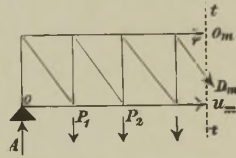


Fig. 296.

Die Querkräfte  $Q_m$  sind in der Fig. 295 dargestellt worden. Nach Eintragung der Geraden  $A''B''$  mit den Endordinaten  $\overline{A'A''} = +\frac{1}{2}gl = \frac{1}{2}1,74 \cdot 36 = 31,3'$  und  $\overline{B'B''} = -31,3'$  wurden durch die Punkte, in denen diese Gerade die Senkrechten durch die Feldmitten schneidet, Parallelen zu  $A'B'$  gezogen. Die Ordinaten dieser Parallelen geben die Querkräfte  $Q_g$  für die einzelnen Felder an; dieselben sind für die linke Hälfte des Trägers positiv, für die rechte Hälfte negativ.

Nun wurde für einen von  $B$  nach  $A$  sich bewegenden Güterzug das  $A$ -Polygon gezeichnet; es liefert die Querkräfte  ${}_{\max}Q_p$ . Vergl. Fig. 126 auf Tafel 1 und die Beschreibung in No. 81.



Für das vierte Feld entsteht  ${}_{max}Q_p$  infolge der Grundstellung der Verkehrslast; es muß die *erste Last* des von  $B$  nach  $A$  fahrenden Eisenbahnzuges beim Knoten 4 liegen. Man erhält  ${}_{max}Q_{p4}$  gleich der unter dem Knoten 4 gemessenen Ordinate des  $A$ -Polygons. Addiert man hierzu  $Q_{g4}$ , so erhält man  ${}_{max}Q_4$ .

Die Querkraft  $Q_3$  entsteht, sobald die 2<sup>te</sup> Achse des von  $B$  aus vorrückenden Zuges beim Knoten 3 liegt. Man muß also, um  ${}_{max}Q_3$  zu erhalten, die von Knoten 3 um  $e_1 = 1,4^{m*}$ ) entfernte Ordinate des  $A$ -Polygons zu  $Q_{g3}$  addieren und von der so erhaltenen Summe die im Knoten 2 angreifende Last  $P_1 \frac{e_1}{\lambda} = P'$  in Abzug bringen. Auch für das erste und zweite Feld ist die Grundstellung nicht die gefährlichste.

Die Querkräfte ergeben sich für die Felder 1 bis 7 positiv, für die Felder 8 bis 10 negativ. Da nun eine linkssteigende Diagonale (wie Gleichung 2 lehrt) gedrückt wird, sobald  $Q_m$  negativ ist, so müssen, wenn die Diagonalen stets gezogen sein sollen, in den Feldern 8, 9, 10 rechtssteigende Diagonalen angeordnet werden. Bewegt sich nun der Eisenbahnzug in der Richtung von  $A$  nach  $B$  über die Brücke, so sind in den Feldern 1 bis 3 linkssteigende und in den Feldern 4 bis 10 rechtssteigende Diagonalen erforderlich, und hieraus folgt, daß die Felder 4, 5, 6, 7 Gegendiagonalen erhalten müssen.

Aus den Querkräften  $Q$  lassen sich die Spannkkräfte  $D$  auf zeichnerischem Wege mit Hilfe der Bedingung finden, daß die senkrechte Seitenkraft ( $D_m \sin \varphi$ ) von  $D_m$  gleich  $Q_m$  sein muß. Es ergeben sich auf diesem Wege die folgenden Werte

$$\begin{array}{l|l} {}_{max}D_2 = + 124,7^t & {}_{max}D_4 = + 68,5^t \\ {}_{min}D_2 = {}_{min}D_9 = + 27,6^t & {}_{max}D_4 = {}_{max}D_7 = + 3,8^{t**}) \\ {}_{max}D_3 = + 95,3 & {}_{max}D_5 = + 44,4^t \\ {}_{min}D_3 = {}_{min}D_8 = + 13,1^t & {}_{max}D_5 = {}_{max}D_6 = + 22,3^t. \end{array}$$

Die größte Spannkraft in der Diagonale  $D_1$  entsteht gleichzeitig mit dem größten Drucke  $O_1$ ; sie ergibt sich aus dem Kräftepolygon des oberen Knotens 0 (Fig. 294a) und ist  ${}_{max}D_1 = 159,5^{t***})$ . Wirkt nur die ständige Belastung, so entsteht  ${}_{min}D_1 = {}_{min}D_{10} = + 39,7^t$ .

\*) Es bedeutet  $e_1$  den ersten Radstand.

\*\*) Die Spannkraft  ${}_{max}D_7$  wurde (weil sehr klein) im Kräfteplane fortgelassen.

\*\*\*) Es ist stets  $D_1 = -O_1 \sec \varphi$ . In Fig. 296a wurde der obere Knoten 0 unbelastet angenommen; indes ist hervorzuheben, daß  $D_1$  unabhängig ist von der Höhenlage der Belastung. Die größte positive Querkraft des ersten Feldes ist:  $Q_1 = -O_1 \operatorname{tg} \varphi$ , also im vorliegenden Falle:  $Q_1 = + 113^t$ .

Die vorstehenden Zahlenwerte sind in den Figuren 300 u. 301 übersichtlich zusammengestellt worden. In den Diagonalen des Netzwerks mit eingeschalteten Vertikalen entstehen die in den Figuren 302 und 303 angegebenen Spannkkräfte.

c. **Spannkkräfte in den Vertikalen.** Legt man durch die  $m^{\text{te}}$  Vertikale einen Schnitt  $tt$  (Fig. 297), welcher außerdem nur noch zwei Stäbe trifft, und setzt die Summe der auf den linken Trägerteil wirkenden senkrechten Kräfte gleich Null, so erhält man

$$(3) \quad V_m + Q = 0, \text{ also } V_m = -Q.$$

Je nachdem nun bei *linkssteigenden* Diagonalen sämtliche Lasten (auch das Eigengewicht) in den Knoten der unteren oder oberen Gurung angreifen, ergibt sich

$$(4) \quad V_m = -Q_{m+1}, \text{ wo } Q_{m+1} = A - (P_1 + P_2 + \dots + P_m)$$

oder

$$(5) \quad V_m = -Q_m, \text{ wo } Q_m = A - (P_1 + P_2 + \dots + P_{m-1});$$

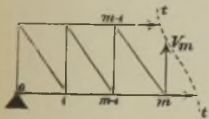


Fig. 297.

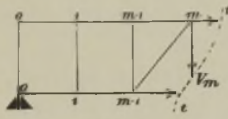


Fig. 298.

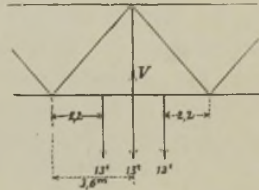


Fig. 299.

denn im ersten Falle gehört die  $m^{\text{te}}$  Knotenlast zum linken Trägerteile, im zweiten Falle zum rechten.

Ähnlich erhält man bei *rechtssteigenden* Diagonalen (Fig. 298):

$$(6) \quad V_m = +Q_{m+1} \text{ (Last oben)}$$

$$(7) \quad V_m = +Q_m \text{ (Last unten).}$$

Für den vorliegenden Träger ergeben sich nun aus der Fig. 295 die Querkräfte:

$$\begin{aligned} \max Q_2 &= + 88,2^t \\ \max Q_3 &= + 67,4^t \\ \max Q_4 &= + 48,4^t \\ \max Q_5 &= + 31,4^t \\ \max Q_6 &= + 15,7^t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max Q_7 &= + 2,7^t \\ \max Q_8 &= - 9,3^t \\ \max Q_9 &= - 19,5^t \\ \max Q_{10} &= - 28,1^t \end{aligned}$$

und es folgt mithin, wenn die *Fahrbahn unten liegt*

$$\begin{aligned} \min V_1 &= - 88,2^t \\ \min V_2 &= - 67,4^t \\ \min V_3 &= - 48,4^t \\ \min V_4 &= - 31,4^t \\ \min V_5 &= - 15,7^t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max V_0 &= \max V_{10} = - 28,1^t \\ \max V_1 &= \max V_9 = - 19,5^t \\ \max V_2 &= \max V_8 = - 9,3^t \end{aligned}$$

$\min V_0$  entsteht gleichzeitig mit  $\max D_1$  (Fig. 294a) und ist:  $V_0 = - 113^t$ .

Liegt die *Fahrbahn oben*, so findet man

$$\begin{array}{l|l} \min V_2 = -88,2' & \max V_1 = \max V_9 = -28,1' \\ \min V_3 = -67,4' & \max V_2 = \max V_8 = -19,5' \\ \min V_4 = -48,4' & \\ \min V_5 = -31,4' & \end{array}$$

Die Spannkraft  $\min V_1$  entsteht gleichzeitig mit  $\max D_1$  und  $\max U_2$  und ergibt sich aus dem Kräftepolygone für den unteren Knotenpunkt 1; man erhält:  $\min V_1 = -\max D_1 \sin \varphi = -113'$ \*, während in der Endvertikale ein Druck wirkt, welcher gleich dem Auflagerwiderstande  $A$  ist; es wird

$$\begin{array}{l} \min V_0 = -A''C = -130,8' \text{ bei vollbelasteter Brücke;} \\ \max V_0 = -B'B'' = -31,3' \text{ bei unbelasteter Brücke.} \end{array}$$

Die vorstehend angegebenen Werte  $V$  sind noch zu verbessern, da die ständige Belastung  $g$  nicht ausschließlich in den Knotenpunkten angreift, die zur Aufnahme der Verkehrslast dienen. Wird angenommen, daß bei *untenliegender Fahrbahn* der Teil  $g_0 = 0,45'$  des Eigengewichtes  $g$  in den oberen Knotenpunkten angreift, so ist zu jeder der vorhin ermittelten Spannkräfte  $V_1$  bis  $V_5$  der Betrag:  $-g_0\lambda = -0,45 \cdot 3,6 = -1,6'$  zu addieren, während  $V_0$  zu ändern ist um  $-\frac{1}{2}g_0\lambda = -0,8'$ . Es ergeben sich dann die in die Fig. 300 eingeschriebenen Werte.

Bei *obenliegender Fahrbahn* ( $g_0 = 1,29'$  und  $g_u = 0,45'$ ) ändern sich  $V_1$  bis  $V_5$  um je:  $+g_u\lambda = +1,6'$  und  $V_0$  um  $+\frac{1}{2}g_u\lambda = 0,8'$ ; man erhält die in Fig. 301 angegebenen Spannkkräfte.

Die Vertikalen des in der Fig. 302 dargestellten Trägers werden nur auf Zug beansprucht. Ihre größte Anstrengung erfolgt, wenn die mittelste Achse einer Lokomotive bei der fraglichen Vertikale liegt. Durch diese Belastung entsteht

$$V_p = 13 + 13 \frac{2,2}{3,6} \cdot 2 = +28,9' \text{ (s. Fig. 299),}$$

wozu die ständige Knotenlast  $g_u\lambda = (1,74 - 0,45) 3,6 = 4,6'$  zu addieren ist. Es folgt

$$\max V = 28,9 + 4,6 = +33,5' \text{ und } \min V = +4,6'.$$

Bei *obenliegender Fahrbahn* werden die Vertikalen des Netzwerks nur gedrückt; Fig. 303.

\*) Dieser Wert darf wieder der Fig. 294a entnommen werden. Ersetzt man dort  $O_1 = -113'$  durch  $U_2 = +113'$ , so erhält man das Kräftepolygon für den unbelasteten unteren Knoten 2.



## § 37.

**Kräfteplan für einen Fischbauchträger (Eisenbahnbrücke).**

Zahlenbeispiel. Tafel 3.

Die Stützweite des in der Fig. 307 dargestellten Trägers ist =  $36^m$ , die Feldweite =  $3,6^m$ . Die Knotenpunkte der unteren Gurtung liegen auf einem Kreisbogen, dessen Radius  $r = 36^m$  beträgt. Ständige Belastung  $g = 1,74$  für d. Meter Gleis; sie zerfällt in  $g_o = 1,29'$  und  $g_u = 0,45'$ . Die bewegliche Belastung besteht aus einem von drei Lokomotiven geführten Güterzuge, dessen Radstände und Achsenbelastungen in Fig. 111 angegeben sind. Die Brücke ist zweigleisig und besitzt zwei Hauptträger.

a. Die Spannkraften infolge der ständigen Belastung wurden in Fig. 305 mittels eines Cremonaschen Kräfteplanes bestimmt. Es genügte, die linke Hälfte des symmetrischen Trägers zu untersuchen. Jeder Knoten der oberen Gurtung trägt die Last:  $g_o \lambda = 1,29 \cdot 3,6 = 4,6'$ . Im Knoten 1 greift an:  $\frac{1}{2} \cdot 0,45 (2,4 + 3,0) = 1,2'$ , im Knoten 3 die Last:  $\frac{1}{2} \cdot 0,45 (3,0 + 3,6) = 1,5'$  und in jedem der Knoten 5, 7, 9 die Last:  $0,45 \cdot 3,6 = 1,6'$ . Es ergeben sich die folgenden Spannkraften\*)

$O_{1g} = -53'$	$U_{1g} = +60'$	$D_{2g} = -4,2'$	$D_{8g} = -2,9'$
$O_{3g} = -55'$	$U_{2g} = +60'$	$D_{3g} = -1,9'$	$D_{9g} = -2,1'$
$O_{5g} = -56'$	$U_{4g} = +60'$	$D_{4g} = -3,6'$	$D_{10g} = -2,5'$
$O_{7g} = -57'$	$U_{6g} = +59'$	$D_{5g} = -1,8'$	
$O_{9g} = -57'$	$U_{8g} = +58'$	$D_{6g} = -3,1'$	
	$U_{10g} = +58'$	$D_{7g} = -1,8'$	

b. Spannkraften in den Gurtungen. Um den Einfluß der Verkehrslast zu erhalten, wurde das in Fig. 233 auf Seite 245 dargestellte Verfahren angewendet. Mit Ausnahme der Stäbe  $U_1$  und  $U_2$  besitzen alle Gurtstäbe die gleiche Horizontalprojektion  $3,6^m$ , und es wurde deshalb die Polweite des für den Güterzug in Figur 128 auf Tafel I gezeichneten Seilpolygons =  $4 \cdot 3,6 = 14,4^m$  gewählt. Da nun der Zeichnung in Fig. 128 der Kräftemaßstab:  $1^m = 20'$  zu Grunde liegt, so liefert die ohne weitere Erläuterung verständliche Figur 306\*\*) die Spannkraften  $O_{p1}$  bis  $O_{p9}$  und  $U_{p4}$  bis  $U_{p10}$  im Maßstabe:  $1^m = 4 \cdot 20 = 80'$ . Man erhält

\*) In der Fig. 305 wurde der Zeiger  $g$  fortgelassen.

\*\*) Zu beachten ist nur, daß in Fig. 306 die Knotenpunkte andere Ziffern tragen, wie in Fig. 128. So ist z. B. das  $y_{p4}$  der Figur 306 gleich dem  $y_{p2}$  der Fig. 128. Nach Auftragung der durch die Figur 128 bestimmten Werte  $y_{p2}$ ,  $y_{p4}$ ,  $y_{p6}$ ,  $y_{p8}$ ,  $y_{p10}$  wurden die den unteren Knotenpunkten entsprechenden  $y_p$  mit Hilfe des auf Seite 142 begründeten Näherungsverfahrens ermittelt.



$$O_{p1} = -160'; \quad O_{p3} = -162'; \quad O_{p5} = -163'; \quad O_{p7} = -164'; \\ O_{p9} = -165';$$

$$U_{p4} = +184'; \quad U_{p6} = +175'; \quad U_{p8} = +169'; \quad U_{p10} = +169'.$$

Die Spannkraft  $U_{p1}$  ist  $= -O_{p1} \sec \gamma_1$ , wo  $\gamma_1$  den Neigungswinkel von  $U_1$  bedeutet, während sich  $U_{p2}$  nach Bestimmung von  $U_{p1}$  aus dem Kräftepolygone für den Knoten 1 ergibt. Auf diesem Wege wurde in Fig. 309 erhalten

$$U_{p1} = +181' \text{ und } U_{p2} = +186'.$$

Zu gleicher Zeit mit  $_{max}U_{p1}$  und  $_{max}U_{p2}$  entsteht in der Diagonale  $D_2$  der größte Druck  $_{min}D_{p2} = -16,1'$ .

Addiert man für jeden Gurtstab und für die Diagonale  $D_2$  die durch die ständige und die bewegliche Belastung erzeugten Spannkraft, so erhält man die in die Fig. 310 eingetragenen Werte.\*)

In Fig. 311 sind die Spannkraften in einem Bogensehnenträger mit gleichen Abmessungen angegeben worden. Die Verkehrslast ist dieselbe wie vorhin und greift unten an. Weiter ist  $g_u = 1,29'$  und  $g_o = 0,45'$ .

**c. Spannkraften in den Diagonalen.** Der von  $B$  aus vorrückende Lastenzug erzeugt in den linkssteigenden Diagonalen die Spannkraft  $_{max}D$ , in den rechtssteigenden die Spannkraft  $_{min}D$ . Zuerst wurde auf die in No. 149 beschriebene Art festgestellt, daß die Grenzwerte der Spannkraften  $D_3$  bis  $D_{16}$  infolge von Grundstellungen der Verkehrslast eintreten, während  $_{max}D_{17}$  und  $_{min}D_{18}$  dann entstehen, wenn die zweite Achse des Lastenzuges beim Knoten 18 liegt. Um nun beispielsweise  $_{max}D_7$  und  $_{min}D_8$  zu bestimmen, wurde der Stützpunkt  $A$  mit dem Knoten 7 durch die (blaue) Hilfslinie 7 verbunden und hierauf die bei 8 gemessene Ordinate  $A_8$  des  $A$ -Polygons nach den Richtungen der Linie 7 und der oberen Gurtung ( $O_7$ ) zerlegt, indem durch den Endpunkt von  $A_8$  eine Wagerechte bis zum Schnittpunkte  $a_7$  mit der Verlängerung der Linie 7 gezogen wurde. Legt man nun durch  $a_7$  Parallelen zu  $D_7$  und  $D_8$ , welche die von  $A$  aus zu  $U_6$  und  $U_8$  gezogenen Parallelen in den Punkten  $b_7$  und  $b_8$  schneiden, so ist

$$\text{Strecke } \overline{b_7 a_7} = _{max}D_{7,p} \text{ und } \overline{b_8 a_7} = _{min}D_{8,p};$$

die erstere Spannkraft bedeutet einen Zug, die letztere einen Druck. Es leuchtet ein, daß das vorstehende Verfahren mit dem in No. 150 auf Seite 253 entwickelten übereinstimmt und sich von diesem nur durch eine etwas übersichtlichere Lage der Kräftepolygone unterscheidet. Die Zeiger  $p$  wurden in der Figur 307 weggelassen.

\*) Es wurden für die Gurtungen und die Diagonale  $D_2$  nur die (ohne Vorzeichen genommen) größten Spannkraften angegeben; die kleinsten Spannkraften sind für alle diese Stäbe gleich den von der ständigen Last herrührenden.

Fig. 308 zeigt die Bestimmung von  $max D_{p17}$  und  $min D_{p18}$ ; der Kräftemaßstab ist doppelt so groß wie in Fig. 307. Die zweite Achse des Lastenzuges liegt beim Knoten 18. Der erste Radstand ist  $e_1 = 1,4^m$ , und es ist deshalb  $A$  gleich der im Abstände  $1,4^m$  vom Knoten 18 gemessenen Ordinate des  $A$ -Polygons. Wird zunächst die im Knoten 16 angreifende Last  $P' = P_1 \frac{e_1}{\lambda}$  (wobei  $P_1 =$  Belastung der ersten Achse

$= 13^t$ ) vernachlässigt, so ergibt sich auf dem vorhin beschriebenen Wege  $max D_{p17} = \overline{ab}_{17}$  und  $min D_{p18} = \overline{ab}_{18}$ . Trägt man nun in den Winkel  $nab_{17}$  die senkrechte Strecke  $dc = P'$  ein und zieht  $ce \parallel U_{18}$ , so geben (nach No. 154) die Strecken  $ac$  und  $ae$  beziehungsweise den Einfluß der Kraft  $P'$  auf die Spannkkräfte  $D_{17}$  und  $D_{18}$  an, und es entsteht deshalb, da der Einfluß von  $P'$  demjenigen von  $A$  entgegengesetzt ist:

$$max D_{p17} = \overline{cb}_{17} \text{ (Zug)} \text{ und } min D_{p18} = \overline{cb}_{18} \text{ (Druck)}.$$

Auf dem angegebenen Wege erhält man

$max D_{p3} = + 11,0^t$	$max D_{p11} = + 20,2^t$
$min D_{p4} = - 21,7^t$	$min D_{p12} = - 29,7^t$
$max D_{p5} = + 15,6^t$	$max D_{p13} = + 19,2^t$
$min D_{p6} = - 26,1^t$	$min D_{p14} = - 29,6^t$
$max D_{p7} = + 19,2^t$	$max D_{p15} = + 16,1^t$
$min D_{p8} = - 28,9^t$	$min D_{p16} = - 27,8^t$
$max D_{p9} = + 20,7^t$	$max D_{p17} = + 12,5^{t*}$
$min D_{p10} = - 30,2^t$	$min D_{p18} = - 31,0^{t*}$

Bewegt sich nun der Eisenbahnzug in der Richtung von  $B$  nach  $A$  über die Brücke, so findet man durch Untersuchung des Spiegelbildes von Fig. 307 die Werte

$min D_{p3} = min D_{p18} = - 31,0^t$	$min D_{p7} = - 29,6^t$
$max D_{p4} = max D_{p17} = + 12,5^t$	$max D_{p8} = + 19,2^t$
$min D_{p5} = - 27,8^t$	$min D_{p9} = - 29,7^t$
$max D_{p6} = + 16,1^t$	$max D_{p10} = + 20,2^t$ u. s. w.

Es genügt natürlich, die beiden Grenzwerte für jede Diagonale der linken Hälfte des symmetrischen Trägers anzugeben. Die Addition der durch die Verkehrslast und das Eigengewicht erzeugten Spannkkräfte liefert

$max D_3 = + 11,0 - 1,9 = + 9,1^t$	$max D_4 = + 12,5 - 3,6 = + 8,9^t$
$min D_3 = - 31,0 - 1,9 = - 32,9^t$	$min D_4 = - 21,7 - 3,6 = - 25,3^t$

u. s. w.

\*) Liegt die erste Achse des von  $B$  vorrückenden Zuges bei Knoten 18, so entsteht  $max D_{p17} = + 11,4^t$  und  $min D_{p18} = - 25,6^t$ .

$$\begin{aligned} \max D_5 &= +13,8 \\ \min D_5 &= -29,6 \\ \max D_6 &= +13,0 \\ \min D_6 &= -29,2 \\ \max D_7 &= +17,4 \\ \min D_7 &= -31,4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max D_8 &= +16,3 \\ \min D_8 &= -31,8 \\ \max D_9 &= +18,6 \\ \min D_9 &= -31,8 \\ \max D_{10} &= +17,7 \\ \min D_{10} &= -32,7. \end{aligned}$$

Die vorstehenden Zahlen wurden in der Fig. 310 übersichtlich zusammengestellt, während in der Fig. 311 die Spannkkräfte in den Diagonalen des Bogensehenträgers angegeben worden sind.

**Anmerkung.** Soll der beschriebene Kräfteplan zuverlässige Ergebnisse liefern, so müssen vor allem die Parallelen zu den Gurtstäben  $U_1, U_2, U_3 \dots$  sowie die Verlängerungen der Hilfslinien 3, 5, 7,  $\dots$  in Fig. 307 möglichst genau festgelegt werden. Zu diesem Zwecke empfiehlt es sich, diejenigen Punkte durch Rechnung zu bestimmen, in welchen die von  $A$  aus zu ziehenden Linien  $U_2, U_3 \dots, 3, 5, 7, \dots$  eine Senkrechte schneiden, die in beliebigem (möglichst großem) Abstände  $e$  vom Auflager  $A$  angenommen wird. Vorher werden die Höhen  $h_1, h_3, h_5 \dots$  mit Hilfe der Kreisgleichung

$$h_m = \sqrt{r^2 - (\frac{1}{2}l - x_m)^2} - c \quad \text{wo} \quad c = \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}l^2}$$

berechnet. Man erhält (wegen  $r = 36^m$  und  $l = 36^m$ ):  $c = 31,1769^m$  und hierauf

$$\begin{aligned} \text{für } \frac{1}{2}l - x_1 &= 15,6^m, \quad h_1 = 1,268^m \\ \text{,, } \frac{1}{2}l - x_3 &= 7 \cdot 1,8, \quad h_3 = 2,546^m \\ \text{,, } \frac{1}{2}l - x_5 &= 5 \cdot 1,8, \quad h_5 = 3,680^m \\ \text{,, } \frac{1}{2}l - x_7 &= 3 \cdot 1,8, \quad h_7 = 4,416^m \\ \text{,, } \frac{1}{2}l - x_9 &= 1,8, \quad h_9 = 4,778^m. \end{aligned}$$

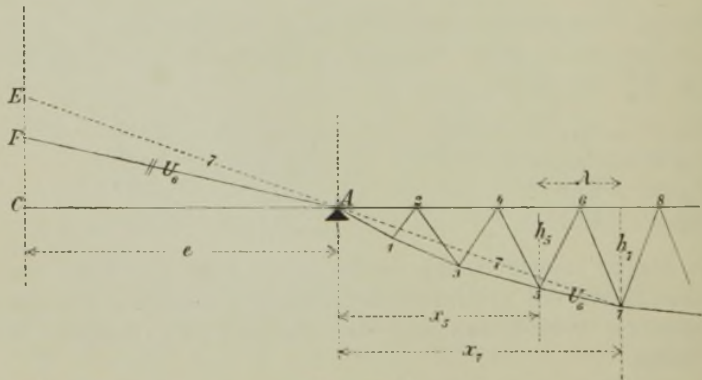


Fig. 312.

Nun kann man beispielsweise die von  $A$  aus zu  $U_6$  gezogene Parallele durch Auftragen der Strecke

$$\overline{CF} = (h_7 - h_8) \frac{e}{\lambda}$$



festlegen und die Verlängerung der Linie 7 durch Auftragen der Strecke:

$$\overline{CE} = h_7 \frac{e}{x_7}.$$

Wählt man z. B.  $e = 10\lambda$  (was bei Aufzeichnung der Fig. 307 geschehen ist), so findet man:  $\overline{CF} = 10(h_7 - h_5) = 10(4,416 - 3,680) = 7,36^m$  und  $\overline{CE} = \frac{10}{3,5} h_7 = 12,617^m$ .

### § 38.

## Kräfteplan für einen Halbparabelträger (Eisenbahnbrücke) und Entwicklung einiger allgemeiner Formeln.

Zahlenbeispiel. Tafel 4.

Der zu untersuchende Träger (Fig. 316 auf Seite 311) besitzt eine Stützweite von  $36^m$  und ist für dieselbe Belastung zu berechnen, wie die in den §§ 36 und 37 behandelten Fachwerke. Höhe am Ende:  $h_0 = 3,00^m$ , in der Mitte:  $h_5 = 5,00^m$ . Die Knotenpunkte der oberen Gurtung liegen auf einer Parabel. Der Träger soll schlaffe Diagonalen erhalten. Zur Ermittlung der Spannkkräfte möge das *Zimmermannsche* Verfahren dienen.

a. Die größten Spannkkräfte der Gurtungen sind in die linke Hälfte der Fig. 314 (Tafel 4) eingezeichnet worden.  $y_1, y_2, y_3, \dots$  bedeuten die auf Tafel 1 (Fig. 128 und 130) gewonnenen Ordinaten des Polygons der größten Momente\*); die Polweite ist  $H = 4\lambda = 4 \cdot 3,6 = 14,4^m$ . Da nun auf Tafel 1 der Kräftemaßstab:  $1^{cm} = 20^t$  ist, so liefert Fig. 313 die größten Spannkkräfte  $O$  und  $U$  im Maßstabe:  $1^{cm} = 4 \cdot 20 = 80^t$ ; (vergl. Seite 263, Absatz 2). Man findet

$$O_1 = -111^t; O_2 = -166^t; O_3 = -197^t; O_4 = -212^t; O_5 = -218^t; \\ U_1 = 0; U_2 = +109^t; U_3 = +164^t; U_4 = +196^t; U_5 = +211^t.$$

Gleichzeitig mit dem größten Drucke  $O_1$  entsteht der größte Zug in der Diagonale  $D_1$  und der größte Druck  $V_0$  in der Endvertikale. Aus dem Kräftedreieck für den oberen Knoten 0 (Dreieck I in Fig. 314) ergibt sich

$$D_1 = +142,0^t \quad V_0 = -112,8^{t.**})$$

\*) Beschreibung in No. 82 Seite 140.

\*\*) Es wird vorläufig vorausgesetzt, daß die gesamte ständige Belastung  $g$  in den Knoten der unteren Gurtung angreift. Die Diagonale  $D_1$  wird stets gezogen, die Vertikale  $V_0$  stets gedrückt. Bezeichnet man die ohne Vorzeichen zu nehmenden kleinsten und größten Spannkkräfte in den Stäben  $O_1, D_1, V_0$  beziehungsweise mit  $O'_1, D'_1, V'_0$  und  $O''_1, D''_1, V''_0$ , so besteht die Gleichung

$$\frac{O'_1}{O''_1} = \frac{D'_1}{D''_1} = \frac{V'_0}{V''_0} = \frac{y_{g1}}{y_1},$$

welche zu beachten ist, sobald bei der Querschnittsberechnung die zulässige Spannung vom Verhältnis der kleinsten zur größten Inanspruchnahme abhängig gemacht werden soll.

**b. Spannkkräfte in den Füllungsstäben.** Wir wollen ein gemischtes rechnerisches und zeichnerisches Verfahren anwenden, so zwar, daß wir die Verhältnisse  $M:\lambda$  für die in Frage kommenden Laststellungen mit Hilfe der folgenden Tabellen berechnen und hierauf das in No. 158 beschriebene Verfahren anwenden.

Zunächst sind die Stützenwiderstände  $A_2, A_3, \dots$  zu bestimmen, welche am linken Auflager durch einen Eisenbahnzug hervorgerufen werden, der von  $B$  aus bis Knoten 2, beziehungsweise bis Knoten 3 u. s. w. reicht. Die betreffenden Laststellungen wurden in Fig. 316 durch kräftige Striche angedeutet und sollen in der Folge als Zugstellung 2, Zugstellung 3, u. s. w. bezeichnet werden. Wir berechnen  $A$  auf die in No. 85 beschriebene Weise und benutzen die folgende Tabelle, welche für einen von drei vorwärts fahrenden Lokomotiven geführten Güterzug unter Voraussetzung der in Fig. 111, Seite 121 angegebenen Achslasten und Radstände berechnet ist.

Tabelle I.

1	2	3	4	1	2	3	4
$n$	$c_1$	$\mathfrak{P}_n$	$\mathfrak{E}_n$	$n$	$c_1$	$\mathfrak{P}_n$	$\mathfrak{E}_n$
1	0	13	0	26	61,4	270	9 344,7
2	1,4	26	18,2	27	64,4	279	10 154,7
3	2,8	39	54,6	28	67,4	288	10 991,7
4	6,8	48	210,6	29	70,4	297	11 855,7
5	8,3	57	282,6	30	73,4	306	12 746,7
6	9,8	66	368,1	31	76,4	315	13 664,7
7	13,8	79	632,1	32	79,4	324	14 609,7
8	15,2	92	742,7	33	82,4	333	15 581,7
9	16,6	105	871,5	34	85,4	342	16 580,7
10	20,6	114	1 291,5	35	88,4	351	17 606,7
11	22,1	123	1 462,5	36	91,4	360	18 659,7
12	23,6	132	1 647,0	37	94,4	369	19 739,7
13	27,6	145	2 175,0	38	97,4	378	20 846,7
14	29,0	158	2 378,0	39	100,4	387	21 980,7
15	30,4	171	2 599,2	40	103,4	396	23 141,7
16	34,4	180	3 283,2	41	106,4	405	24 329,7
17	35,9	189	3 553,2	42	109,4	414	25 544,7
18	37,4	198	3 836,7	43	112,4	423	26 786,7
19	40,4	207	4 430,7	44	115,4	432	28 055,7
20	43,4	216	5 051,7	45	118,4	441	29 351,7
21	46,4	225	5 699,7	46	121,4	450	30 674,7
22	49,4	234	6 374,7	47	124,4	459	32 024,7
23	52,4	243	7 076,7	48	127,4	468	33 401,7
24	55,4	252	7 805,7	49	130,4	477	34 805,7
25	58,4	261	8 561,7	50	133,4	486	36 236,7

Berechnung von  $A_2$ . Die Strecke  $B2$  hat die Länge  $8 \cdot 3,6 = 28,8^m$ ; ihr entspricht laut Tabelle I die Zuglänge  $c_1 = 27,6^m$ . Die Anzahl der

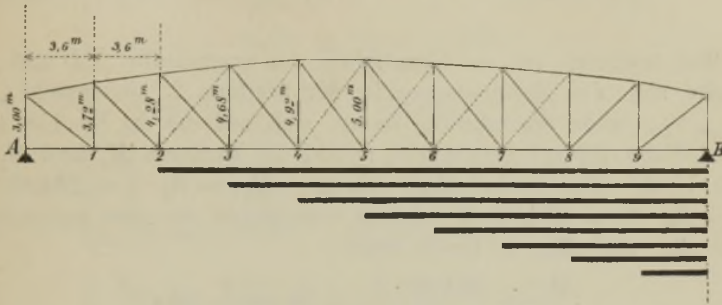


Fig. 316.

bei der Zugstellung 2 auf dem Balken ruhenden Lasten ist mithin:  $n = 13$ , und der Abstand der letzten Last vom Auflager  $B$  beträgt:  $b_n = 28,8 - 27,6 = 1,2^m$ . Man erhält:  $\mathfrak{P}_n = 145^t$ ,  $\mathfrak{S}_n = 2175,0^{tm}$  und

$$A_2 = \frac{1}{l} (\mathfrak{P}_n b_n + \mathfrak{S}_n) = \frac{1}{10\lambda} (145 \cdot 1,2 + 2175,0) = \frac{234,90}{\lambda}$$

Auf diese Weise sind die Werte  $A_2 \lambda$  bis  $A_9 \lambda$  ermittelt und in der folgenden Tabelle zusammengestellt worden.\*)

Tabelle II.

Zugstellung $m =$	Strecke $Bm =$	$c_1$	$n$	$\mathfrak{P}_n$	$\mathfrak{S}_n$	$b_n$	$A_m \lambda$
2	28,8	27,6	13	145	2175,0	1,2	234,90
3	25,2	23,6	12	132	1647,0	1,6	185,82
4	21,6	20,6	10	114	1291,5	1,0	140,55
5	18,0	16,6	9	105	871,5	1,4	101,85
6	14,4	13,8	7	79	632,1	0,6	67,95
7	10,8	9,8	6	66	368,1	1,0	43,41
8	7,2	6,8	4	48	210,6	0,4	22,98
9	3,6	2,8	3	39	54,6	0,8	8,58
	Meter	Meter		Tonnen	$tm$	Meter	$tm$

Außer dem Eisenbahnzuge wirkt auf den Träger noch eine gleichförmige ständige Belastung:  $g = 1,74^t$  f. d. Meter, welcher die (bereits auf Seite 266 berechneten) Werte

\*) Bei gleichen Feldweiten empfiehlt es sich (wie sogleich einleuchten wird), die Produkte  $A \lambda$  an Stelle der Widerstände  $A$  zu berechnen.



$$\frac{M_{1g}}{\lambda} = 28,188; \quad \frac{M_{2g}}{\lambda} = 50,112; \quad \frac{M_{3g}}{\lambda} = 65,772;$$

$$\frac{M_{4g}}{\lambda} = 75,168; \quad \frac{M_{5g}}{\lambda} = 78,300 \text{ Tonnen entsprechen.}$$

Wir beginnen mit der Ermittlung der Spannkkräfte  ${}_{max}D$  und  ${}_{min}V$ . Befindet sich der Eisenbahnzug in der Stellung 2, so entsteht  ${}_{max}D_2$  und  ${}_{min}V_1$ ; beide Spannkkräfte lassen sich auf die in No. 158 angegebene Weise schnell bestimmen, sobald die Momente  $M_1$  und  $M_2$  gegeben sind. Die Verkehrslast erzeugt:  $M_{1p} = A_2 \cdot \lambda = 234,90$  und  $M_{2p} = A_2 \cdot 2\lambda = 234,90 \cdot 2$ ; addiert man hierzu die oben angegebenen Werte  $M_{1g}$  und  $M_{2g}$ , so findet man

$$\frac{M_1}{\lambda} = \frac{234,90 \cdot 1}{3,6} + 28,188 = 93,4'$$

$$\frac{M_2}{\lambda} = \frac{234,90 \cdot 2}{3,6} + 50,112 = 180,6'$$

und kann nun das in der Figur 313 durch Schraffierung hervorgehobene Kräftepolygon (1) für den oberen Knotenpunkt 1 zeichnen. Es ergibt sich

$${}_{max}D_2 = + 88,4', \quad {}_{min}V_1 = - 69,1'.$$

Auf dieselbe Weise erhält man, unter der Annahme linkssteigender Diagonalen:\*)

$$\text{für Zugstellung 3} \left\{ \begin{array}{l} \frac{M_2}{\lambda} = \frac{185,82 \cdot 2}{3,6} + 50,112 = 153,3' \\ \frac{M_3}{\lambda} = \frac{185,82 \cdot 3}{3,6} + 65,772 = 220,6' \\ {}_{max}D_3 = + 63,6', \quad {}_{min}V_2 = - 47,2' \end{array} \right.$$

$$\text{für Zugstellung 4} \left\{ \begin{array}{l} \frac{M_3}{\lambda} = \frac{140,55 \cdot 3}{3,6} + 65,772 = 182,9' \\ \frac{M_4}{\lambda} = \frac{140,55 \cdot 4}{3,6} + 75,168 = 231,3' \\ {}_{max}D_4 = + 46,9', \quad {}_{min}V_3 = - 32,8' \end{array} \right.$$

\*) Zur Erzielung deutlicher Figuren wurden in den verschiedenen Feldern verschieden große Kräftemaßstäbe gewählt und neben den Kräftepolygonen angegeben. Der Längenmaßstab ist gleichgültig; er lautet:  $\lambda = 3,6^m = 4,2^m$ . Hervorzuheben ist, daß überall nur Grundstellungen des Eisenbahnzuges in Betracht kommen. Es wurde dies auf die in No. 149 beschriebene Weise festgestellt. Bei Ermittlung von  ${}_{max}D_2$  und  ${}_{min}V_1$  ist es gleichgültig, ob die erste oder zweite Achse des von B vorrückenden Eisenbahnzuges beim Knoten 2 liegt.

$$\text{für Zugstellung 5} \begin{cases} \frac{M_4}{\lambda} = \frac{101,85 \cdot 4}{3,6} + 75,168 = 188,3' \\ \frac{M_5}{\lambda} = \frac{101,85 \cdot 5}{3,6} + 78,300 = 219,8' \\ \text{max } D_5 = + 34,6', \quad \text{min } V_4 = - 22,2' \end{cases}$$

$$\text{für Zugstellung 6} \begin{cases} \frac{M_5}{\lambda} = \frac{67,95 \cdot 5}{3,6} + 78,300 = 172,7' \\ \frac{M_6}{\lambda} = \frac{67,95 \cdot 6}{3,6} + 75,168 = 188,4' \\ \text{max } D_6 = + 23,2', \quad \text{min } V_5 = - 13,0' \end{cases}$$

$$\text{für Zugstellung 7} \begin{cases} \frac{M_6}{\lambda} = \frac{43,41 \cdot 6}{3,6} + 75,168 = 147,5' \\ \frac{M_7}{\lambda} = \frac{43,41 \cdot 7}{3,6} + 65,772 = 150,2' \\ \text{max } D_7 = + 12,8', \quad \text{min } V_6 = - 5,1' \end{cases}$$

$$\text{für Zugstellung 8} \begin{cases} \frac{M_7}{\lambda} = \frac{22,98 \cdot 7}{3,6} + 65,772 = 110,5' \\ \frac{M_8}{\lambda} = \frac{22,98 \cdot 8}{3,6} + 50,112 = 101,2' \\ \text{max } D_8 = + 0,3', \quad \text{min } V_7 = + 3,5' \end{cases}$$

**Anmerkung 1.** Die kleine Spannkraft  $\text{max } D_8$  konnte in Fig. 313 nicht deutlich dargestellt werden, sie erscheint dort  $= 0$ ; um sie zu bestimmen, wähle man einen größeren Kräftemaßstab, wenn dann auch das Kräftepolygon außerhalb des Trägernetzes fällt. Will man  $D_8$  berechnen, so findet man nach der auf Seite 273 abgeleiteten Formel (mit  $h_8 = 4,28^m$  und  $h_7 = 4,68^m$ )

$$\text{max } D \cos \varphi_8 = \frac{M_8}{h_8} - \frac{M_7}{h_7} = \frac{364,33}{4,28} - \frac{397,64}{4,68} = + 0,158'$$

und  $\text{max } D_8 = + 0,3'$ .

Es möge an dieser Stelle noch eine bequeme Formel zur Berechnung der Spannkraft  $V_m$  abgeleitet werden. Führt man durch den Träger einen schrägen Schnitt, welcher die Stäbe  $O_m$ ,  $V_m$  und  $U_{m+1}$  trifft, zerlegt jede am linken Trägerteile angreifende Kraft in eine senkrechte und eine wagerechte Seitenkraft und setzt die Summe aller senkrechten Seitenkräfte  $= 0$ , so erhält man (Fig. 317)

$$V_m + O_m \sin \beta_m + Q = 0,$$

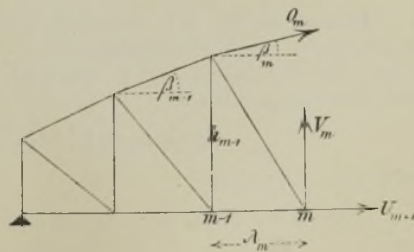


Fig. 317.

wo (nach Seite 273)

$$O_m = - \frac{M_m}{h_m \cos \beta_m}$$

Da die Last in den Knoten der unteren Gurtung angreift und der untere Knoten  $m$  zum linken Trägerteile gehört, so ist die Querkraft

$$Q = \frac{M_{m+1} - M_m}{\lambda_{m+1}}$$

und man erhält

$$V_m = \frac{M_m - M_{m+1}}{\lambda_{m+1}} + \frac{M_m}{h_m} \operatorname{tg} \beta_m.$$

Setzt man:  $\operatorname{tg} \beta_m = \frac{h_m - h_{m-1}}{\lambda_m}$ , so findet man für den Fall gleich großer

Feldweiten den bequemen Ausdruck:

$$(I) \quad V_m \lambda = M_m \frac{2h_m - h_{m-1}}{h_m} - M_{m+1}.$$

Beispielsweise ergibt sich hiernach für die gleichzeitig mit  $_{max} D_8$  entstehende Spannkraft  $_{min} V_7$  die Gleichung

$$\begin{aligned} V_7 \cdot 3,6 &= M_7 \frac{2h_7 - h_8}{h_7} - M_8 \\ &= 397,64 \frac{2 \cdot 4,68 - 4,92}{4,68} - 364,33 = + 12,92, \end{aligned}$$

woraus

$$_{min} V_7 = + 3,5 \text{ t.}$$

Selbstverständlich wird man, wenn die Spannkräfte  $D$  und  $V$  mittels der hier angewandten Formeln bestimmt werden sollen, nicht erst die Verhältnisse  $M:\lambda$ , sondern sofort die Momente berechnen. Bei der Zugstellung 8 entstehen z. B. infolge der Verkehrslast die Momente  $M_{7p} = A_8 \cdot 7\lambda = 7 \cdot 22,98$  und  $M_{8p} = A_8 \cdot 8\lambda = 8 \cdot 22,98$ , wozu dann  $M_{7g}$  und  $M_{8g}$  zu addieren sind. Für das Moment  $M_{m_g}$  findet man die Gleichung

$$M_{m_g} = \frac{1}{2} g x_m (l - x_m) = \frac{1}{2} 1,74 \lambda^2 m (10 - m) = 11,2752 m (10 - m),$$

aus welcher sich für  $m = 1, 2, 3, 4, 5$  der Reihe nach die Werte ergeben

$$M_g = 101,48; 180,40; 236,78; 270,60; 281,88 \text{ tm.}$$

**Anmerkung 2.** Wir wollen die rechnerische Bestimmung der Spannkräfte in den Vertikalen noch etwas allgemeiner behandeln. Bildet  $U_{m+1}$  mit der Wagerechten den Winkel  $\gamma_{m+1}$  (Fig. 264), so geht die vorhin angeschriebene Gleichgewichtsbedingung über in

$$V_m + O_m \sin \beta_m - U_{m+1} \sin \gamma_{m+1} + Q = 0,$$

und hierin ist zu setzen,

a) wenn die Verkehrslast in den Knoten der unteren Gurtung angreift

$$Q = \frac{M_{m+1} - M_m}{\lambda_{m+1}}$$



b) wenn sie in den Knoten der oberen Gurtung angreift

$$Q = \frac{M_m - M_{m-1}}{\lambda_m}.$$

Beachtet man noch die Gleichungen

$$O_m = -\frac{M_m}{h_m \cos \beta_m}; \quad U_{m+1} = +\frac{M_m}{h_m \cos \gamma_{m+1}},$$

so gelangt man zu den bequemen Formeln

$$(II) \quad V_m \lambda_{m+1} = M_m \left[ 1 + \frac{\lambda_{m+1}}{h_m} (\operatorname{tg} \beta_m + \operatorname{tg} \gamma_{m+1}) \right] - M_{m+1} \text{ (Last unten)}$$

$$(III) \quad V_m \lambda_m = M_{m-1} - M_m \left[ 1 - \frac{\lambda_m}{h_m} (\operatorname{tg} \beta_m + \operatorname{tg} \gamma_{m+1}) \right] \text{ (Last oben).}$$

Hierbei ist vorausgesetzt, daß — wie im vorliegenden Zahlenbeispiele — die gesamte ständige Belastung auf die Knotenpunkte derjenigen Gurtung verteilt wird, an welcher die Verkehrslast angreift. Nachträglich ist im ersten Falle zu  $V_m$  der Betrag:

$$V_{m0} = -\frac{1}{2} g_0 (\lambda_m + \lambda_{m+1})$$

zu addieren, im zweiten Falle der Betrag:

$$V_{mu} = +\frac{1}{2} g_u (\lambda_m + \lambda_{m+1}).$$

Liegt die Fahrbahn zwischen den beiden Gurtungen, so gelten für die Teile der Vertikalen  $\frac{\text{oberhalb}}{\text{unterhalb}}$  der Fahrbahn die für den Fall  $\frac{\text{unten}}{\text{oben}}$  angreifender Belastung abgeleiteten Formeln.

Die Formeln (II) und (III) setzen linkssteigende Diagonalen voraus. Bei rechtssteigenden Diagonalen betrachte man das Spiegelbild des Trägers.

Hervorgehoben werde, daß das Eigentümliche der vorstehenden Entwicklungen darin besteht, *sämtliche Spannkkräfte  $O$ ,  $U$ ,  $D$ ,  $V$  durch die auf die Knotenpunkte bezogenen Antriebsmomente  $M$  auszudrücken.*

**Anmerkung 3.** Die für die Spannkkräfte  $D$  und  $V$  gegebenen Formeln lassen sich leicht noch weiter entwickeln. Gesucht sei beispielsweise  $_{max} D_{mp}$  und  $_{min} V_{(m-1)p}$ , infolge der Verkehrslast, letztere Spannkraft für den Fall *unten* liegender Fahrbahn. Rückt der Eisenbahnzug von  $B$  aus bis  $m$  vor, so entsteht am linken Auflager der Widerstand  $A_m$ , welcher mit Hilfe der Tabelle I schnell berechnet werden kann; er erzeugt die Momente

$$M_{m-1} = A_m x_{m-1},$$

$$M_m = A_m x_m,$$

und es ergibt sich

$$(IV) \quad _{max} D_{mp} \cos \varphi_m = \frac{M_m}{h_m} - \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}} = A_m \varepsilon,$$

$$(V) \quad _{min} V_{(m-1)p} = -A_m \varepsilon' \text{ (nach Gleich. II),}$$

$$\text{wo } \varepsilon = \frac{x_m}{h_m} - \frac{x_{m-1}}{h_{m-1}} \text{ und}$$

$$\varepsilon' = \frac{x_m}{\lambda_m} - \frac{x_{m-1}}{\lambda_m} \left[ 1 + \frac{\lambda_m}{h_{m-1}} (\operatorname{tg} \beta_{m-1} + \operatorname{tg} \lambda_m) \right].$$

Bei wagerechter unterer Gurtung ist  $\varepsilon' = \varepsilon \frac{h_m}{\lambda_m}$ .

Liegt die zweite Last des Eisenbahnzuges beim Knoten  $m$ , so findet man, wenn  $P_1$  die erste Last und  $e_1$  den ersten Radstand bezeichnet, nach Berechnung des Auflagerdruckes  $A$

$$\begin{aligned} M_{m-1} &= A x_{m-1}, \\ M_m &= A x_m - P_1 e_1, \\ \text{(VI)} \quad \max D_{mP} \cos \varphi_m &= A \varepsilon - P_1 \frac{e_1}{h_m}; \end{aligned}$$

$$\text{(VII)} \quad \min V_{(m-1)P} = -A \varepsilon' + P_1 \frac{e_1}{\lambda_m}.$$

Infolge der Verschiebung der Last hat  $A$  zugenommen um

$$\Delta A = \frac{e_1}{l} \Sigma P + \frac{P' b}{l},$$

wo  $\Sigma P$  die Summe der vor der Verschiebung auf dem Träger befindlichen Lasten und  $P'$  eine etwa neu hinzutretene Last bezeichnet, welche von der Stütze  $B$  den Abstand  $b$  haben möge. Die Zunahme von  $D_m \cos \varphi_m$  beziehungsweise von  $(-V_{m-1})$  beträgt

$$\Delta D_m \cos \varphi_m = \Delta A \varepsilon - P_1 \frac{e_1}{h_m} \quad \text{und}$$

$$\Delta (-V_{m-1}) = \Delta A \varepsilon' - P_1 \frac{e_1}{\lambda_m}.$$

Hiernach muß  $\max D_m$  nach Gleichung VI berechnet werden, sobald

$$\Delta A \varepsilon > P_1 \frac{e_1}{h_m}$$

ist, und für  $\min V_{m-1}$  ist die Gleichung VII maßgebend, sobald

$$\Delta A \varepsilon' > P_1 \frac{e_1}{\lambda_m}$$

ist. Zu den von der Verkehrslast abhängigen Spannkraften treten noch infolge des Eigengewichts die Werte

$$\text{(VIII)} \quad D_{mG} \cos \varphi_m = \frac{M_{mG}}{h_m} - \frac{M_{(m-1)G}}{h_{m-1}},$$

$$\text{(IX)} \quad V_{(m-1)G} = \frac{1}{\lambda_m} [M_{(m-1)G} \varepsilon'' - M_{mG}],$$

wo

$$\varepsilon'' = 1 + \frac{\lambda_m}{h_{m-1}} (\operatorname{tg} \beta_{m-1} + \operatorname{tg} \gamma_m).$$

Im allgemeinen wird man erst die Ausdrücke  $\varepsilon''$  und hierauf die Werte

$$\varepsilon' = \frac{x_m}{\lambda_m} - \frac{x_{m-1}}{\lambda_{m-1}} \varepsilon''$$

ermitteln.

Die ganze Rechnung führe man in Tabellenform durch. Für die Spannkraft  $\max D$  kann man z. B. die folgende Anordnung wählen.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
<i>m</i>	$x_{m-1}$	$x_m$	$x'_{m-1}$	$x'_m$	$h_{m-1}$	$h_m$	$M_{avg} = \frac{1}{2} g x_m x'_m$	$M_{(m-1)g}$	$\frac{M_{mg}}{h_m}$	$M_{(m-1)g}$	$h_m$	$D_{mg} \cos \varphi_m$	Stellung der Verkehrslast	$A$	$\frac{P_1 e_1}{h_m}$	$\epsilon$	$\max D_{mp} \cos \varphi_m$	$\max D_m \cos \varphi_m$	$\cos \varphi_m$	$\min D_m$

Bezüglich der Bezeichnungen  $x$  und  $x'$  wird auf Fig. 267 verwiesen. In Spalte 13 deute man durch Eintragung von  $P_1$  oder  $P_2$  an, daß die erste oder zweite Last des von  $B$  aus vorrückenden Eisenbahnzuges beim Knoten  $m$  liegt. Spalte 15 ist nur auszufüllen, wenn Last  $P_2$  in  $m$  liegt. Bei gleichen Feldweiten achte man während der ganzen Rechnung darauf, daß  $x_m = m\lambda$ ,  $x_{m-1} = (m-1)\lambda$  u. s. w. ist. Die Werte  $A$  werden in einer besonderen Tabelle zusammengestellt. Vergl. Seite 313.

In ähnlicher Weise lassen sich die Tabellen zur Berechnung von  $\min D$ ,  $\min V$ ,  $\max V$  anordnen. Benutzt man die in der Anmerkung 1) angegebenen Formeln, so würde die Tabelle, welche  $\max D$  und  $\min V$  angibt, für den vorliegenden Halbparabelträger wie folgt einzurichten sein.

<i>m</i>	Zugstellung	$A\lambda$	Momente $M_p$	Momente $M_g$	$\frac{d_m^2}{\lambda^2}$	$h_{m-1}$ $h_{m-2}$ u. $h_m$	$\max D_m = \left( \frac{M_m}{h_m} - \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}} \right) \sqrt{\frac{d^2}{\lambda^2}}$	$\min V_{m-1} = \frac{1}{\lambda} \left( M_{m-1} \frac{2h_{m-1} - h_{m-2}}{h_{m-1}} - M_m \right)$
2	2	234,90	$M_1 = 234,9 \cdot 1$ $M_2 = 234,9 \cdot 2$	$M_1 = 101,48$ $M_2 = 180,40$	26,8	$h_0 = 3,00$ $h_1 = 3,72$ $h_2 = 4,28$	$\max D_2 = + 88,4$ Tonnen $\min V_1 = - 69,1$ "	
3	3	185,82	$M_2 = 185,82 \cdot 2$ $M_3 = 185,82 \cdot 3$	$M_2 = 180,40$ $M_3 = 236,78$	31,3	$h_1 = 3,72$ $h_2 = 4,28$ $h_3 = 4,68$	$\max D_3 = + 63,6$ " $\min V_2 = - 47,2$ "	

u. s. w.

Es leuchtet wohl ein, daß die Bildung solcher Tabellen die Prüfung der Rechnung außerordentlich erleichtert.

Wir fahren nun in der Erläuterung unseres Kräfteplanes fort. Nimmt man im neunten Felde zunächst eine linkssteigende Diagonale an, so findet man, daß diese infolge der Zugstellung 9 auf Druck beansprucht wird. Da die Diagonalen aber schlaff sein sollen, so ist eine rechtssteigende Diagonale nötig. Es ergibt sich

$$\text{für Zug-} \left\{ \begin{array}{l} \frac{M_8}{\lambda} = \frac{8,58 \cdot 8}{3,6} + 50,112 = 69,2' \\ \frac{M_9}{\lambda} = \frac{8,58 \cdot 9}{3,6} + 28,188 = 49,6' \\ \min D_9 = \min D_2 = +14,6' *); \max V_9 = \max V_1 = -10,0' **). \end{array} \right.$$

Aus den vorstehenden Rechnungen folgt, daß die sechs mittelsten Felder des Trägers mit Gegendiagonalen auszurüsten sind, welche durch die in der Figur 319 zusammengestellten Spannkkräfte beansprucht werden. Von den berechneten größten Drücken  $\min V_2$  bis  $\min V_7$  sind natürlich nur die ersten vier maßgebend, weil  $\min V_6 < \min V_4$  ist, während  $\min V_7$  sogar positiv ist.

Es sind jetzt nur noch die Spannkkräfte  $\max V_2, \max V_3, \max V_4, \max V_5$  in denjenigen Vertikalen zu bestimmen, an denen Gegendiagonalen angreifen.

Der größte positive Wert von  $V_5$  entsteht gleichzeitig mit dem größten Drucke  $O_5$  und ergibt sich aus dem für den oberen Knoten 5 in Fig. 315 auf Tafel 4 gezeichneten Kräfte-dreieck. Man findet:  $\max V_5 = +9,7'$ .

Die Spannkkräfte  $\max V_2, \max V_3, \max V_4$  sollen nach dem dritten der in No. 161 beschriebenen Verfahren ermittelt werden. Die Vertikalen mögen von  $B$  aus mit den Ziffern 0, 1, 2, ... versehen werden, Fig. 318. Um  $\max V_2$  zu erhalten, wird von  $B$  aus ein Eisenbahnzug vorgeschoben, dessen zweite Last beim Knoten 2 steht; er ruft am linken Auflager den mittels der Tabelle I berechneten Widerstand

$$A = \frac{1}{l} (\mathfrak{R}_n b_n + \mathfrak{S}_n) = \frac{1}{10\lambda} (57 \cdot 0,3 + 282,6) = \frac{29,97}{\lambda}$$

hervor und erzeugt die Momente

$$M_{3p} = A \cdot 7\lambda = 29,97 \cdot 7 = 209,79^m$$

$$M_{2p} = A \cdot 8\lambda - 13 \cdot 1,4 = 29,97 \cdot 8 - 18,2 = 221,56^m,$$

\*) Diagonale  $D_2$  erleidet ihre kleinste Inanspruchnahme, wenn der Eisenbahnzug von  $A$  aus bis Knoten 1 vorrückt, und in  $D_6$  entsteht  $\max D_9 = \max D_2 = +83,4'$ , wenn der Zug von  $A$  bis zum Knoten 8 vorrückt.

\*\*) Soll  $\max V_9$  mittels der vorhin abgeleiteten Gleichung (I) berechnet werden, so betrachte man das Spiegelbild des Trägers, damit aus der rechtssteigenden Diagonale eine linkssteigende wird. Man findet dann (mit  $M_0 = 178,70$ ;  $M_8 = 249,13$ ;  $h_9 = 3,72$ ;  $h_{10} = 3,00$ ):

$$\max V_9 \lambda = 178,70 \frac{2 \cdot 3,72 - 3,00}{3,72} - 249,13 = -35,85 \text{ und } \max V_9 = -10,0'.$$





Das Dreieck 2''' III 2 ist das Kräftepolygon für den oberen Knotenpunkt 2.

Um  ${}_{max}V_3$  zu bestimmen, wird für die Zugstellung (b) in Fig. 318 berechnet

$$A = \frac{52,65}{\lambda}, \text{ sodann } \frac{M_4}{\lambda} = \frac{52,65 \cdot 6}{3,6} + 75,168$$

$$\frac{M_3}{\lambda} = \frac{52,65 \cdot 7 - 13 \cdot 1,4}{3,6} + 65,772$$

$$b = \frac{4 M_3 - 3 M_2}{\lambda} = 163,6^t.$$

Schließlich ergibt sich für die Zugstellung (c) in Fig. 318 behufs Bestimmung von  ${}_{max}V_4$

$$A = \frac{79,79}{\lambda}; \quad \frac{M_5}{\lambda} = \frac{79,79 \cdot 5}{3,6} + 78,300$$

$$\frac{M_4}{\lambda} = \frac{79,79 \cdot 6 - 13 \cdot 1,4}{3,6} + 75,168$$

$$b = \frac{5 M_4 - 4 M_5}{\lambda} = 259,0^t.$$

Man erhält  ${}_{max}V_3 = + 6,6^t$  und  ${}_{max}V_4 = + 9,0^t$ .

Bislang wurde vorausgesetzt, daß die gesamte ständige Belastung  $g = 1,74^t$  in den Knotenpunkten der unteren Gurtung angreift. Wird

durch B abschneiden, während  $\beta_2$  und  $\beta_3$  die Neigungswinkel von  $O_2$  und  $O_3$  gegen die Wagerechte bezeichnen. Da nun  $a = 3h_2 - 2h_3$  ist, so folgt auch

$$(II) \quad {}_{max}V_2 = \frac{3M_2 - 2M_3}{3h_2 - 2h_3} (\text{tg } \beta_2 - \text{tg } \beta_3)$$

oder, wenn die Zeiger 2 und 3 durch die allgemeineren  $m$  und  $m+1$  ersetzt und ungleiche Feldweiten angenommen werden

$$(III) \quad {}_{max}V_m = \frac{x_{m+1} M_m - x_m M_{m+1}}{x_{m+1} h_m - x_m h_{m+1}} (\text{tg } \beta_m - \text{tg } \beta_{m+1}).$$

Liegen die Knoten der oberen Gurtung (wie im vorliegenden Falle) auf einer Parabel vom Pfeile  $f$ , so findet man:  $\text{tg } \beta_m - \text{tg } \beta_{m+1} = \frac{4f}{l^2} (\lambda_m + \lambda_{m+1})$  und bei gleichen Feldweiten

$$(IV) \quad {}_{max}V_m = \frac{(m+1) M_m - m M_{m+1}}{(m+1) h_m - m h_{m+1}} \cdot \frac{8f\lambda}{l^2}.$$

Für unser Beispiel ist  $f = 2,0^m$  also:  $\frac{8f\lambda}{l^2} = \frac{8 \cdot 2 \cdot \lambda}{36 \cdot 10\lambda} = \frac{1}{22,5}$  und

$${}_{max}V_2 = \frac{3M_2 - 2M_3}{3h_2 - 2h_3} \cdot \frac{1}{22,5}.$$

Mit  $h_2 = 4,28^m$  und  $h_3 = 4,68^m$  folgt nach Einsetzen der oben für  $M_2$  und  $M_3$  angegebenen Werte:  ${}_{max}V_2 = + 4,0^t$ .

nun angenommen, daß der Teil  $g_0 = 0,45'$  an der oberen Gurtung wirkt, so ist zu jeder der berechneten Spannkkräfte  $V$  der Wert:

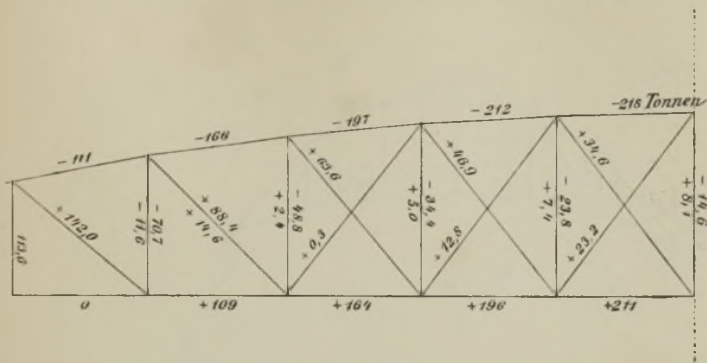


Fig. 319.

$-g_0\lambda = -0,45 \cdot 3,6 = -1,6'$  zu addieren, ausgenommen Spannkraft  $V_0$ , zu welcher nur der Betrag  $-0,8'$  hinzutritt. Es ergeben sich dann die in die Fig. 319 eingeschriebenen Werte.

§ 39.

Über die Berechnung von Dachbindern.

Bei der Berechnung eines Dachbinders empfiehlt es sich im allgemeinen, die Einflüsse von Winddruck, Schneedruck und Eigengewicht getrennt zu bestimmen. Der Gang der auszuführenden Untersuchungen soll hier für den Fall besprochen werden, daß die Dachbinder einander parallel sind.

170. Einfluß des Winddruckes. Es möge der in Fig. 320 dargestellte sichelförmige Dachbinder untersucht werden. Die auf die Dachflächen 0 I, I II, II III wirkenden Winddrücke seien  $W_1, W_2, W_3$ . Besitzen die Strecken 0 I, I II, II III die Längen  $o_1, o_2, o_3$  und schließen sie mit der Windrichtung ( $v$ ) beziehungsweise die Winkel  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  ein, so findet man

$$W_1 = weo_1 \sin^2 \alpha_1; \quad W_2 = weo_2 \sin^2 \alpha_2; \quad W_3 = weo_3 \sin^2 \alpha_3,$$

wo  $e$  = Abstand zweier benachbarter Binder,  
 $w$  = Druck auf die Einheit einer vom Winde rechtwinklig getroffenen ebenen Fläche.

Man pflegt durchschnittlich  $w = 120^k$  f. d.  $qm$  anzunehmen.

Um  $W_1$  zu bestimmen, berechne man die Belastung  $weo_1$ , stelle dieselbe in irgend einem Kräftemaßstabe durch die dem Stabe 0 I

parallele Strecke  $R1$  dar, Fig. 320a, und fälle vom Punkte 1 das Lot  $11'$  auf eine durch  $R$  zur Windrichtung gezogene Parallele und von  $1'$  auf  $R1$  das Lot  $1'1''$ . Man erhält: Winddruck  $W_1 = \text{Strecke } 1''1$ . Ganz

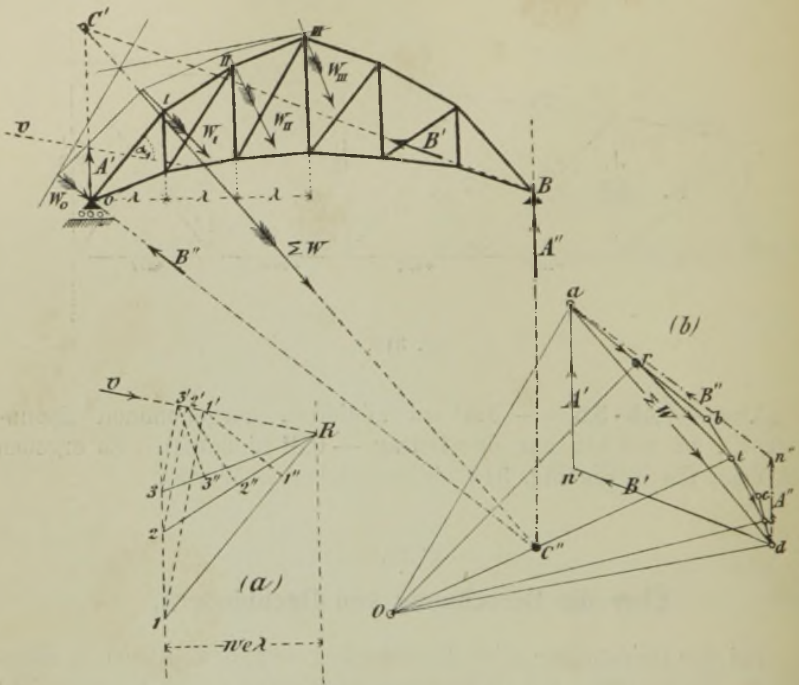


Fig. 320.

ebenso werden  $W_2$  und  $W_3$  gefunden. In Fig. 320 sind gleiche Feldweiten  $\lambda$  angenommen worden; es besitzen dann die Winddrücke  $W_1, W_2, W_3$  die gleiche Horizontalprojektion  $wel$ .

Reiht man  $W_1, W_2, W_3$  zu einem Kräftezuge aneinander, indem man (Fig. 320b)

$$\overline{ab} = W_1; \overline{bc} = W_2; \overline{cd} = W_3$$

macht (wobei  $ab \perp OI, bc \perp I II, cd \perp II III$ ), und halbiert hierauf die Strecken  $ab, bc, cd$  in den Punkten  $r, t, s$ , so stellen die Strecken  $ar, rt, ts, sd$  nach Größe, Richtung und Sinn beziehungsweise die Belastungen  $W_0, W_I, W_{II}, W_{III}$  der Knoten  $0, I, II, III$  dar; die Lage ihrer Mittelkraft:  $\Sigma W = ad$  kann mit Hilfe eines Seilpolygons bestimmt werden.

Um nun die Gegendrücke  $A'$  und  $B'$  der Auflager  $A$  und  $B$ , von denen das erstere auf wagerechter Bahn verschiebbar und das letztere



fest sein möge, zu bestimmen, wird der senkrecht gerichtete Widerstand  $A'$  mit  $\Sigma W$  in  $C'$  zum Schnitt gebracht, durch die Punkte  $C'$  und  $B$  die Richtung des Widerstandes  $B'$  festgelegt und  $an' \parallel C'A$  sowie  $dn' \parallel BC'$  gezogen. Man findet  $\overline{n'a} = A'$  und  $\overline{dn'} = B'$  und ist jetzt im stande, die durch den vorliegenden Belastungsfall in den einzelnen Stäben hervorgerufenen Spannkkräfte zu ermitteln, z. B. mit Hilfe eines *Cremonaschen* Kräfteplanes (vergl. § 27).

In gleicher Weise werden die Spannkkräfte für den Fall bestimmt, daß der Wind von der Seite kommt, auf welcher das feste Auflager liegt. Ist der Dachbinder symmetrisch in Bezug auf die Senkrechte durch die Mitte, so empfiehlt es sich, die Untersuchung dieses zweiten Belastungszustandes am Spiegelbilde des Binders durchzuführen. Man hat dann zur Ermittlung der Auflager-Widerstände, welche jetzt mit  $A''$  und  $B''$  bezeichnet werden mögen, nur nötig, in der Fig. 320 die beiden Auflager miteinander zu vertauschen, und erhält die in jener Figur durch strichpunktierte Linien dargestellten Werte:  $\overline{n''a} = B''$  und  $\overline{dn''} = A''$ .

**171. Einfluß des Schneedrucks und des Eigengewichtes.** Bei Untersuchung der Einwirkung des Schneedrucks auf Dachbinder, deren Stäbe nicht durchweg infolge gänzlicher Belastung am ungünstigsten beansprucht werden, beschränkt man sich meistens darauf, den Fall gänzlicher Belastung mit demjenigen der Belastung der linken, beziehungsweise rechten Dachhälfte zu vergleichen. Ist dann der Binder symmetrisch in Bezug auf die Senkrechte durch seine Mitte, und darf das Eigengewicht als eine gleichförmige, ausschließlich auf die Knoten der oberen Gurtung verteilte Belastung angesehen werden (was häufig der Fall ist), so lassen sich die Grenzwerte sämtlicher Spannkkräfte mit Hilfe eines einzigen Kräfteplanes feststellen. Man nehme zunächst nur die rechte Dachhälfte gleichmäßig belastet an, und zwar mit  $q = p + g$  f. d. Längeneinheit, wo  $g =$  ständige Belastung und  $p =$  Schneedruck (Fig. 321), verteile die Belastung auf die Knotenpunkte und ermittle nach irgend einem der beschriebenen Verfahren die in den Stäben hervorgerufenen Spannkkräfte. Für irgend einen Stab der linken Trägerhälfte möge sich die Spannkraft  $S'$  ergeben, für den entsprechenden Stab der rechten Hälfte die Spannkraft  $S''$ .

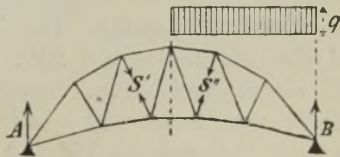


Fig. 321.

Wird nun gänzliche Belastung mit  $q$  vorausgesetzt (Fig. 322), so entsteht offenbar

$$(1) \quad S = S' + S''.$$

Wird die linke Dachhälfte mit  $g$ , die rechte mit  $q$  belastet, Fig. 323, so entsteht in einem Stabe der *linken* Trägerhälfte

$$(2) \quad S = S' + \frac{g}{q} S''.*)$$

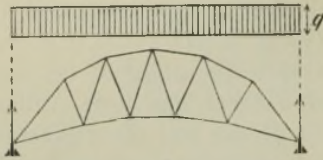


Fig. 322.

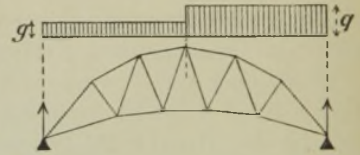


Fig. 323.

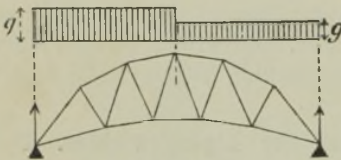


Fig. 324.

Ist schließlich die rechte Dachhälfte mit  $g$  und die linke mit  $q$  belastet, so ergibt sich für einen Stab der *linken* Hälfte

$$(3) \quad S = \frac{g}{q} S' + S''.$$

Die Spannkraften der Gurtstäbe nehmen bei gänzlicher Belastung des Trägers ihre größten Zahlenwerte an; sie werden deshalb mittels Gleichung (1) bestimmt. Hingegen sind die Kräfte  $S$  der Füllungsstäbe für einseitige Belastung nach den Gleichungen (2) und (3) zu berechnen.

Ist die ständige Belastung keine gleichförmig verteilte, oder ist es unzulässig, die gesamte Last  $g$  ausschließlich auf die Knoten der oberen Gurtung zu verteilen, so setze man in den vorstehenden Entwicklungen zunächst  $g = 0$  und bestimme hierauf den Einfluß der ständigen Belastung mittels eines besonderen Kräfteplanes.

**Zahlenbeispiel.** Der in der Fig. 325 dargestellte Dachbinder hat eine Stützweite von  $24^m$ ; die Knoten der oberen Gurtung liegen auf einem Kreisbogen, dessen Radius  $= 20^m$  ist. Der Abstand der Binder voneinander ist  $= 4,0^m$ , die ständige Belastung beträgt  $50^*$  und der Schneedruck  $75^*$  f. d.  $qm$  der Horizontalprojektion der Dachfläche; also ist  $g = 50 \cdot 4 = 200^* = 0,2^*$ ;  $p = 75 \cdot 4 = 300^* = 0,3^*$  und  $q = g + p = 0,5^*$ . Die gesamte ständige Belastung möge auf die Knoten der oberen Gurtung verteilt werden. Streng genommen greift allerdings ein Teil des Bindergewichts in den Knoten der

\*) Die Belastung der rechten Dachhälfte erzeugt für sich allein  $S'$ . Wäre nur die linke Dachhälfte und zwar mit  $g$  belastet, so würde in dem Stabe der linken Trägerhälfte  $S''$  entstehen; tritt  $g$  an die Stelle von  $q$ , so ist  $S''$  im Verhältnis  $g:q$  zu verkleinern. Durch diese Überlegung gelangt man zur Gleichung (2).

unteren Gurtung an; doch ist derselbe, verglichen mit dem Gewichte der Pfetten und der Dachdeckung in der Regel so gering, daß die oben gemachte Annahme vollkommen zulässig ist.

Zunächst wird der Einfluß der auf die rechte Dachhälfte wirkenden Last  $q$  untersucht. Der Knoten (3) wird hierbei mit  $\frac{1}{2} q \lambda = \frac{1}{2} \cdot 0,5 \cdot 4,0 = 1,0^t$  belastet und jeder der Knoten (1) und (2) mit  $0,5 \cdot 4,0 = 2,0^t$ . Man erhält

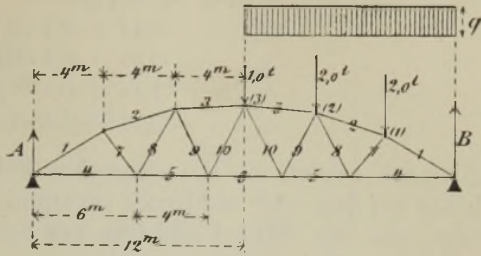


Fig. 325.

$$A = 2,0 \left( \frac{1}{3} + \frac{2}{6} \right) + 1,0 \frac{2}{3} = 1,5^t; \quad B = 3,5^{t*}$$

und findet (beispielsweise mit Hilfe eines Cremonaschen Planes) die in der folgenden Tabelle zusammengestellten, in Tonnen ausgedrückten Spannkraften  $S'$  und  $S''$ .

Gurtungen				Füllungsstäbe			
Linke Stab	Trägerhälfte $S'$	Rechte Stab	Trägerhälfte $S''$	Linke Stab	Trägerhälfte $S'$	Rechte Stab	Trägerhälfte $S''$
1	-2,98	1	-6,95	7	+0,72	7	-0,41
2	-3,19	2	-6,03	8	-0,60	8	+0,39
3	-3,97	3	-5,01	9	+1,26	9	-1,14
4	+2,57	4	+6,01	10	-1,24	10	+1,12
5	+3,33	5	+5,56				
6	+4,50	6	+4,50				

Nun entstehen bei gänzlicher Belastung des Trägers mit  $q$  (Fig. 322) in den Stäben der Gurtungen die Spannkraften

$$S_1 = -2,98 - 6,95 = -9,93^t \quad S_4 = +2,57 + 6,01 = +8,58^t$$

$$S_2 = -3,19 - 6,03 = -9,22^t \quad S_5 = +3,33 + 5,56 = +8,89^t$$

$$S_3 = -3,97 - 5,01 = -8,98^t \quad S_6 = +4,50 + 4,50 = +9,00^t$$

Für die Füllungsstäbe ergibt sich

a. Im Belastungsfall Fig. 323.

$$S = S' + \frac{q}{Q} S'' + S' + 0,4 S''$$

$$S_7 = +0,72 - 0,4 \cdot 0,41 = +0,56^t$$

$$S_8 = -0,60 + 0,4 \cdot 0,39 = -0,44^t$$

$$S_9 = +1,26 - 0,4 \cdot 1,14 = +0,80^t$$

$$S_{10} = -1,24 + 0,4 \cdot 1,12 = -0,79^t$$

\*)  $B$  bedeutet den Stützenwiderstand nach Abzug von  $\frac{1}{2} q \lambda$ .



b. Im Belastungsfall Fig. 324.

$$S = S'' + 0,4 S'$$

$$S_7 = -0,41 + 0,4 \cdot 0,72 = -0,12'$$

$$S_8 = +0,39 - 0,4 \cdot 0,60 = +0,15'$$

$$S_9 = -1,14 + 0,4 \cdot 1,26 = -0,64'$$

$$S_{10} = +1,12 - 0,4 \cdot 1,24 = +0,62'$$

Hiernach werden die linkssteigenden Füllungsstäbe der linken Trägerhälfte auf Zug oder auf Druck beansprucht, je nachdem nur die rechte oder nur die linke Dachhälfte mit Schnee belastet ist. Die rechtssteigenden Füllungsstäbe verhalten sich entgegengesetzt.

Zu den vorstehend angegebenen Werten  $S$  sind noch die durch den Winddruck hervorgerufenen Spannkkräfte zu addieren.

**172. Fortsetzung.** Sollen hinsichtlich der Belastung durch den Schneeedruck die denkbar ungünstigsten Annahmen gemacht werden, so sind die Spannkkräfte im allgemeinen nach den in den §§ 31 und 32 angegebenen Verfahren zu ermitteln. Für den besonders häufigen Fall eines symmetrischen Trägers mit gleich weiten Feldern empfehlen wir indes den folgenden kürzeren Weg.

Man belaste nur den der Stütze  $B$  benachbarten Knoten der oberen Gurtung, und zwar mit  $q\lambda$ , bestimme den am linken Auflager hervorgerufenen Widerstand  $A' = \frac{1}{n} q\lambda$ , wo  $n = \text{Anzahl der Felder und}$

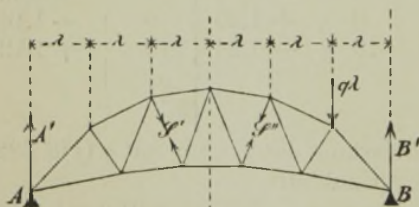


Fig. 326.

ermittle auf irgend eine Weise die Spannkkräfte der links von der Last  $q\lambda$  liegenden Stäbe. Für irgend einen Stab der linken Trägerhälfte möge sich die Spannkraft  $S'$  ergeben, für den entsprechenden Stab der rechten Trägerhälfte die Spannkraft  $S''$ . Fig. 326.

Wird nur der der linken Stütze ( $A$ ) benachbarte obere Knoten belastet — wieder mit  $q\lambda$  —, so entstehen in den Stäben der linken Hälfte die Spannkkräfte  $S''$ , in denen der rechten Hälfte die Spannkkräfte  $S'$ .

Es sei nun diejenige Spannkraft  $S$  gesucht, welche in einem Stabe der linken Trägerhälfte durch den in der Fig. 327 dargestellten Belastungszustand hervorgerufen wird. Jeder Knoten links vom Schnitte  $tt$  trägt die Last  $x'\lambda$  und jeder Knoten rechts von  $tt$  die Last  $x''\lambda$ . Durch den Schnitt  $tt$  werden außer dem fraglichen Stabe nur noch zwei Stäbe getroffen. Die Knotenbelastung links neben dem Schnitte  $tt$  habe von



der Auflagersenkrechten  $A$  den Abstand  $m'\lambda$ , und die Knotenbelastung rechts neben  $tt$  von  $B$  den Abstand  $m''\lambda$ . Werden zunächst sämt-

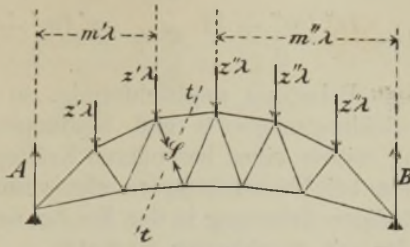


Fig. 327.

liche Lasten  $x'\lambda$  entfernt, so greift links von  $tt$  nur die äußere Kraft

$$A = \left( \frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \frac{3}{n} + \dots + \frac{m''}{n} \right) x''\lambda = \frac{m''(m''+1)}{2} \frac{x''}{q} \frac{q\lambda}{n}$$

$$= \frac{m''(m''+1)}{2} \frac{x''}{q} A'$$

an, und es entsteht deshalb die Spannkraft

$$S = \frac{m''(m''+1)}{2} \frac{x''}{q} S',$$

und ebenso findet man, daß die Lasten  $x'\lambda$  für sich allein die Spannkraft

$$S = \frac{m'(m'+1)}{2} \frac{x'}{q} S''$$

hervorbringen. Im ganzen entsteht also:

$$S = \frac{m''(m''+1)}{2} \frac{x''}{q} S' + \frac{m'(m'+1)}{2} \frac{x'}{q} S''.$$

Gehört der fragliche Stab einer *Gurtung* an, so ist gänzliche Belastung des Trägers vorauszusetzen, also  $x' = x'' = q$  einzuführen. Man findet dann

$$(1) \quad S = \frac{m''(m''+1)}{2} S' + \frac{m'(m'+1)}{2} S''.$$

In einem *linkssteigenden Füllungsstabe* entsteht  $_{max}S$  oder  $_{min}S$ , je nachdem der Schneeedruck nur rechts oder nur links vom Schnitte  $tt$  wirkt. Im ersten Falle setze man  $x' = g$  und  $x'' = q$ , im zweiten Falle  $x'' = g$  und  $x' = q$ . Es ergibt sich

$$(2) \quad \begin{cases} \text{max} S = \frac{m''(m''+1)}{2} S' + \frac{m'(m'+1)}{2} \frac{g}{q} S'' \\ \text{min} S = \frac{m''(m''+1)}{2} \frac{g}{q} S' + \frac{m'(m'+1)}{2} S'' \end{cases}$$

Für einen *rechtssteigenden* Füllungsstab erhält man schließlich

$$(3) \begin{cases} \max S = \frac{m''(m''+1)}{2} \frac{g}{q} S' + \frac{m'(m'+1)}{2} S'' \\ \min S = \frac{m''(m''+1)}{2} S' + \frac{m'(m'+1)}{2} \frac{g}{q} S'' \end{cases}$$

Ist die ständige Belastung ungleichförmig, so setze man in den vorstehenden Entwicklungen  $g = 0$  und bestimme den Einfluß der ständigen Belastung mittels eines besonderen Kräfteplanes, und ebenso verfährt man, wenn bei Netzwerkträgern ein wesentlicher Teil einer gleichförmigen ständigen Belastung in den Knoten der unteren Gurtung angreift (Dachbinder mit angehängter Decke).\*)

**Zahlenbeispiel.** Wir erläutern unser Verfahren an dem bereits in

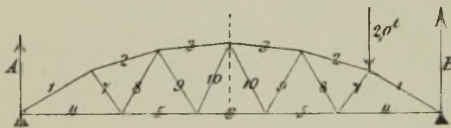


Fig. 328.

No. 171 untersuchten Dachbinder. Es ist  $q\lambda = 0,5 \cdot 4 = 2,0^t$  und wegen  $n = 6$ ,

$$A' = \frac{1}{n} q\lambda = \frac{1}{3} t. \text{ Dem}$$

Belastungszustande in Fig. 328 entsprechen die folgenden,

mit Hilfe eines *Cremonaschen* Planes gewonnenen Spannkrafte.

Stab	$S'$	$S''$	Stab	$S'$	$S''$
1	— 0,66		7	+ 0,16	— 1,25
2	— 0,71	— 2,13	8	— 0,13	+ 1,12
3	— 0,88	— 1,23	9	+ 0,28	— 0,52
4	+ 0,57		10	— 0,275	+ 0,51
5	+ 0,74	+ 1,48			
6	+ 1,00	+ 1,00			

Nun sind die größten Spannkraften in den Gurtungen nach Gleich. (1):

Stab	$m''$	$m'$	
1	5	0	$S_1 = -\frac{5 \cdot 6}{2} \cdot 0,66 = -9,90^t$
2	4	1	$S_2 = -\frac{4 \cdot 5}{2} \cdot 0,71 - \frac{1 \cdot 2}{2} \cdot 2,13 = -9,23^t$
3	3	2	$S_3 = -\frac{3 \cdot 4}{2} \cdot 0,88 - \frac{2 \cdot 3}{2} \cdot 1,23 = -8,97^t$

\*) Wir erinnern daran, daß bei den *Fachwerken mit Vertikalen* die ständige Belastung stets auf die Knoten einer der beiden Gurtungen verteilt werden darf. Man hat nur nötig, die Spannkraften  $V$  nachträglich auf die früher angegebene Weise (Seite 267 u. 268) zu verbessern.

Stab	$m''$	$m'$	
4	5	0	$S_4 = + \frac{5 \cdot 6}{2} \cdot 0,57 = + 8,55'$
5	4	1	$S_5 = + \frac{4 \cdot 5}{2} \cdot 0,74 + \frac{1 \cdot 2}{2} \cdot 1,48 = + 8,88'$
6	3	2	$S_6 = + \frac{3 \cdot 4}{2} \cdot 1,00 + \frac{2 \cdot 3}{2} \cdot 1,00 = + 9,00'$

Für die linkssteigenden Diagonalen erhält man, nach Gleich. (2),  
mit  $\frac{g}{q} = 0,4$ :

Stab	$m''$	$m'$	
7	4	1	$\begin{aligned} \max S_7 &= + \frac{4 \cdot 5}{2} \cdot 0,16 - \frac{1 \cdot 2}{2} \cdot 1,25 \cdot 0,4 = + 1,10' \\ \min S_7 &= + \frac{4 \cdot 5}{2} \cdot 0,16 \cdot 0,4 - \frac{1 \cdot 2}{2} \cdot 1,25 = - 0,61' \end{aligned}$
9	3	2	$\begin{aligned} \max S_9 &= + \frac{3 \cdot 4}{2} \cdot 0,28 - \frac{2 \cdot 3}{2} \cdot 0,52 \cdot 0,4 = + 1,06' \\ \min S_9 &= + \frac{3 \cdot 4}{2} \cdot 0,28 \cdot 0,4 - \frac{2 \cdot 3}{2} \cdot 0,52 = - 0,89' \end{aligned}$

und für die rechtssteigenden Diagonalen, nach Gleich. (3):

Stab	$m''$	$m'$	
8	4	1	$\begin{aligned} \max S_8 &= - \frac{4 \cdot 5}{2} \cdot 0,13 \cdot 0,4 + \frac{1 \cdot 2}{2} \cdot 1,12 = + 0,60' \\ \min S_8 &= - \frac{4 \cdot 5}{2} \cdot 0,13 + \frac{1 \cdot 2}{2} \cdot 1,12 \cdot 0,4 = - 0,85' \end{aligned}$
10	3	2	$\begin{aligned} \max S_{10} &= - \frac{3 \cdot 4}{2} \cdot 0,275 \cdot 0,4 + \frac{2 \cdot 3}{2} \cdot 0,51 = + 0,87' \\ \min S_{10} &= - \frac{3 \cdot 4}{2} \cdot 0,275 + \frac{2 \cdot 3}{2} \cdot 0,51 \cdot 0,4 = - 1,04' \end{aligned}$

Die Spannkraften in den Füllungsstäben ergeben sich hiernach wesentlich größer als nach der in No. 171 angestellten Rechnung; beispielsweise wird  $\max S_7$  fast doppelt so groß wie vorhin. Zu berücksichtigen ist allerdings, daß die zweite Rechnung sehr unwahrscheinliche Belastungsfälle annimmt.

## X. Abschnitt.

## Der Gerbersche Fachwerkbalken.

## § 40.

## Einflußlinien.

173. **Einleitung.** Wir betrachten den *Gerberschen* Träger unter denselben Voraussetzungen, die im vorigen Abschnitte bei der Behandlung des einfachen Balkens gemacht wurden, nehmen also an, daß sich die beweglichen Auflager auf *wagerechten* Bahnen verschieben, daß nur *senkrecht* und *abwärts* gerichtete Lasten wirken, und daß die gegliederten Scheiben, aus denen der Träger besteht, *einfache Dreiecknetze* sind. Die Koppelträger (beispielsweise die Teile *AB* des in der Fig. 329 dargestellten Trägers) verhalten sich wie einfache Balken, und

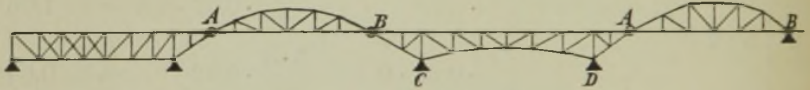


Fig. 329.

es bleibt also nur noch die Inanspruchnahme eines Balkens mit überstehenden Enden zu untersuchen. Dabei genügt es, die Gesetze für den Fall aufzustellen, daß *beide* Balkenenden außerhalb der Stützen liegen und durch angrenzende Koppelträger belastet werden. Nimmt man dann das eine überstehende Stück gewichtslos und unbelastet an, so ergeben sich die Gesetze für den Balken mit nur *einem* überragenden Ende.

Die Frage nach der Bestimmung der in den Gurtungen entstehenden Spannkraft  $O$  und  $U$  ist bereits durch die früheren Untersuchungen erledigt; denn die in No. 145 (Seite 245 und 246) gegebenen Regeln, um die  $O$  und  $U$  aus den auf die Knotenpunkte bezogenen Momenten  $M$  abzuleiten, gelten für jedes einfache Dreiecknetz, und die Aufsuchung der größten und kleinsten Momente  $M$  wurde bereits im Abschnitte VI gelehrt. Es ist daher hauptsächlich noch die Ermittlung der *Spannkraft in den Füllungsstäben* zu erörtern. Bei Parallelträgern mit wagerechten Gurtungen ergeben sich diese Kräfte am schnellsten aus den Querkraften, welche auf die im Abschnitte VI beschriebene und im folgenden Paragraph durch ein Zahlenbeispiel erläuterte Art bestimmt werden können.



Bei Trägern mit gebrochenen Gurtungen hingegen ist im allgemeinen die Benutzung der Einflußlinien als das übersichtlichste Verfahren am meisten zu empfehlen, wobei die Untersuchungen im § 19 zuweilen gute Dienste leisten werden. Außerdem verdient noch die Bestimmungsweise der Spannkkräfte nach *Zimmermann* hervorgehoben zu werden; zu der im § 36 gegebenen allgemeinen Entwicklung dieses Verfahrens, welche für jedes von parallelen äußeren Kräften ergriffene Dreiecknetz gilt, ist wenig hinzuzufügen. Es genügt, darauf hinzuweisen, daß beim *Gerberschen* Balken Momente von verschiedenen Vorzeichen auftreten. In der, einen Teil eines Netzwerks darstellenden Fig. 330 wurde vorausgesetzt, daß das Moment  $M_m$  positiv, hingegen  $M_{m-1}$  negativ ist. Die Strecken  $ma$  und  $bc$ , welche die Verhältnisse  $M_m : \lambda_m$  und  $M_{m-1} : \lambda_m$  darstellen, wurden von der unteren Gurtung aus aufgetragen (entsprechend der Anordnung in Fig. 247), beide aber in entgegengesetzter Richtung. Die Pfeile neben den die Spannkkräfte  $O$ ,  $D$ ,  $U$  darstellenden Strecken  $ad$ ,  $de$ ,  $ef$  deuten an, in welchem Sinne die Spannkkräfte an dem Trägerteile links von dem durch die Stäbe  $O$ ,  $D$ ,  $U$  geführten Schnitte  $tt$  angreifen. Um bei Feststellung dieses Sinnes keinen Fehler zu begehen, genügt es, daran zu denken, daß ein Stab der  $\frac{\text{oberen}}{\text{unteren}}$

$\frac{\text{gedrückt}}{\text{gezogen}}$  wird, sobald das Moment  $M$  für den gegenüberliegenden Knotenpunkt positiv ist, und daß die wagerechte Projektion des aus den Spannkkräften  $O$ ,  $D$ ,  $U$  bestehenden stetigen Kräftezuges  $= 0$  sein muß, weil sämtliche äußeren Kräfte senkrecht sind.

Man hätte in Fig. 330 auch den negativen Wert  $M_{m-1} : \lambda$  von der unteren Gurtung aus nach oben und das positive  $M_m : \lambda$  nach unten absetzen können; sind beide Momente negativ, so werden sie beide zweckmäßig nach oben hin aufgetragen, damit der aus  $O$ ,  $U$ ,  $D$  bestehende Kräftezug innerhalb des Trägernetzes liegt. Ganz entsprechend ist zu verfahren, wenn die in der Figur 248 dargestellte Anordnung gewählt wird.

In der Fig. 331 ist ein Trägerstück mit Vertikalen abgebildet worden; die Belastung ist an den Knotenpunkten der unteren Gurtung

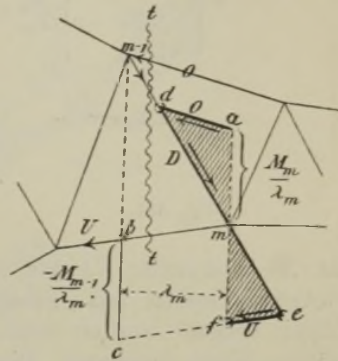


Fig. 330.

angreifend gedacht. Es wurde  $M_m$  positiv und  $M_{m-1}$  negativ angenommen und auf die in No. 158 beschriebene Weise das Kräftepolygon für den oberen Knoten  $m-1$  gezeichnet. Es ergibt sich  $O_m = de$ ;  $V_{m-1} = ef$ ;  $O_{m-1} = fc$ ;  $D_m = cd$ . Die in das Kräftepolygon eingetragenen Pfeile geben an, in welchem Sinne die Kräfte am oberen Knoten  $m-1$  angreifen. Zur Feststellung des Umlaufungssinnes dieses Kräftepolygons genügt es, zu wissen, daß  $O_m$  einen Druck bedeutet, weil  $M_m$  positiv ist.

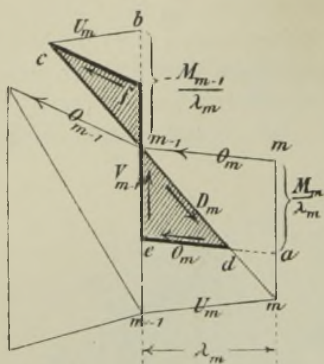


Fig. 331.

Um das *Zimmermannsche* Verfahren anwenden zu können, braucht man nur die Momente für die Knotenpunkte zu bestimmen. Hierzu reichen

die im Abschnitte VI für einen beliebigen Belastungszustand entwickelten Gesetze aus, sobald noch festgestellt worden ist, wie der Träger belastet werden muß, damit die fraglichen Spannkraft ihre größten Werte annehmen. Die letztere Frage wird am schnellsten durch die Betrachtung der Einflußlinien entschieden.

**174. Einflußlinie für die Spannkraft  $D$  in einem Füllungsstabe des Auslegers  $BC$  in Fig. 332.** Wir führen durch den fraglichen Stab einen Schnitt  $tt$ , welcher außerdem noch zwei Gurtstäbe ( $O$  und  $U$ ) trifft, wählen den Schnittpunkt  $E$  von  $O$  und  $U$  zum Drehpunkte und setzen die Summe der Momente aller am linken Trägerteile wirkenden Kräfte gleich Null.  $F_1$  und  $F_2$  seien die dem Schnitte  $tt$  benachbarten Querträger. Irgendwo zwischen  $F_1$  und dem Gelenke  $B$  greife eine Einzellast  $P_2$  an, im Abstände  $a_2$  von  $E$ , und auf den angrenzenden Koppelträger  $AB$  wirke eine Last  $P_1$  in der Entfernung  $a_1$  vom Gelenke  $A$ ; letztere übt auf  $B$  den Druck  $\frac{P_1 a_1}{l'}$  aus. Wird zunächst angenommen, daß  $E$  zwischen  $B$  und  $F_1$  liegt (im Abstände  $c$  von  $B$ ) und daß  $a_2$  positiv ist, sobald sich  $P_2$  links von  $E$  befindet, so ergibt sich, wenn die Rechtsdrehung als die positive angesehen und das Lot von  $E$  auf den fraglichen Füllungsstab mit  $r$  bezeichnet wird, die Gleichgewichtsbedingung

$$\pm Dr - \frac{P_1 a_1}{l'} c - P_2 a_2 = 0,$$

in welcher das obere oder das untere Vorzeichen gilt, je nachdem die

Spannkraft  $D$  rechts oder links um  $E$  dreht. In dem in der Fig. 332 vorausgesetzten Falle ergibt sich

$$D = + \frac{1}{r} \left( \frac{P_1 a_1}{l'} c + P_2 a_2 \right).$$

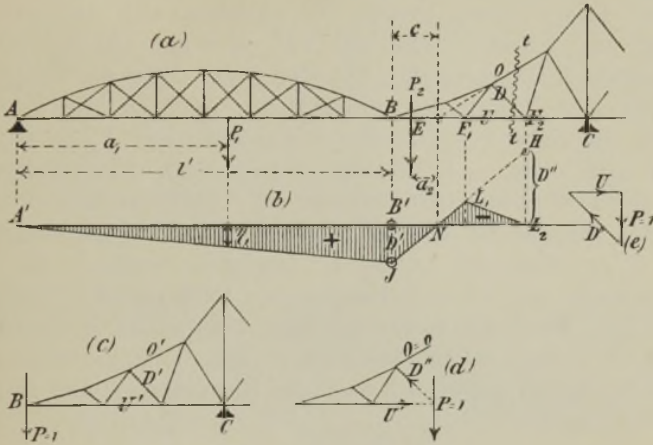


Fig. 332.

Da dieser Ausdruck in Bezug auf die Veränderlichen  $a_1$  und  $a_2$  vom ersten Grade ist, und da ferner eine in  $F_2$  oder rechts von  $F_2$  angreifende Last ohne Einfluß auf  $D$  ist, so besteht die Einflußlinie für  $D$  aus drei Geraden  $A'J$ ,  $JL_1$  und  $L_1L_2$  (Fig. 332 b), welche den Trägerteilen  $AB$ ,  $BF_1$  und  $F_1F_2$  entsprechen, und deren mittelste senkrecht unter  $E$  die Ordinate Null besitzt, da eine durch  $E$  gehende Last  $P_2$  die Spannkraft  $D = 0$  erzeugt. Kennt man also beispielsweise die Spannkraft  $\overline{B'J} = D'$ , welche eine in  $B$  angreifende Last  $P = 1$  in dem fraglichen Stabe hervorruft, so ist man im stande, die Einflußlinie aufzuzeichnen und den Einfluß jeder Last  $P$  in der Form  $D = P\eta$  anzugeben. Die Kräfte  $D'$  aber findet man u. a. mit Hilfe eines Cremonaschen Planes, welcher für den in der Fig. 332 c dargestellten Belastungszustand gezeichnet wird. Sehr einfach ist auch die Festlegung der Einflußlinie mittels der Strecke  $\overline{L_2H} = D''$ , welche von der Geraden  $JL_1$  auf der Senkrechten durch  $F_2$  abgeschnitten wird und in folgender Weise bestimmt werden kann. Man betrachte das Trägerstück links vom Schnitte  $tt$  und suche diejenigen Kräfte  $O$ ,  $D''$ ,  $U$ , welche mit einer durch den Punkt  $F_2$  gehenden Last  $P = 1$  im Gleichgewichte sind (Fig. 332 d). Man findet  $O = 0$ , während  $U$  und  $D''$







Hinsichtlich der Benutzung der Einflußlinien zur Ermittlung der Grenzwerte der Spannkkräfte verweisen wir auf den § 14.

175. Einflußlinie für die Spannkraft  $D$  in einem Füllungsstabe des Trägerteiles  $CD$  in Fig. 334. Solange es sich nur um den Einfluß von Lasten handelt, welche zwischen den Stützen  $C$  und  $D$  auf den Träger wirken, verhält sich das Trägerstück  $CD$  wie ein einfacher Balken, und es besteht deshalb der zwischen  $C$  und  $D$  gelegene Teil der Einflußlinie (nach No. 143) aus den drei mit  $II$ ,  $III$  und  $IV$  bezeichneten Geraden, deren erste und letzte auf den Senkrechten durch die Stützpunkte  $D$  und  $C$  die Strecken  $D''$  und  $D'$  abschneiden, wobei  $D'$  diejenige Spannkraft ist, welche im Stabe  $D$  entsteht, sobald links vom Schnitte  $tt$  nur die äußere Kraft  $C = 1$  angreift (Fig. 335), während  $D''$  erzeugt wird, falls rechts von  $tt$  ausschließlich der Stützenwiderstand  $D = 1$  wirkt.\*) Um den Einfluß von Lasten zu bestimmen,

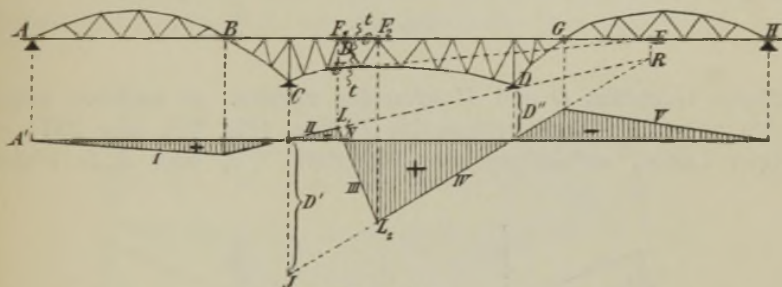


Fig. 334.

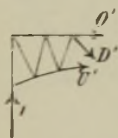


Fig. 335.

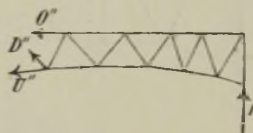


Fig. 336.

welche auf dem Ausleger  $DG$  und dem angrenzenden Koppelträger  $GH$  ruhen, erwäge man, daß im Falle ausschließlicher Belastung des Trägerteiles  $F_2H$  am Trägerabschnitte links von  $tt$  nur der Stützenwiderstand  $C$  als äußere Kraft angreift, woraus dann folgt, daß die Ordinaten der Einflußlinie für die Spannkraft  $D$  zwischen  $F_2$  und  $H$  den entsprechenden Ordinaten der (in No. 93 bestimmten) Einflußlinie

\*) In der Fig. 334 ist die Belastung an der oberen Gurtung angreifend gedacht.  $F_1$  und  $F_2$  sind die dem Schnitte  $tt$  benachbarten Auflager.

für  $C$  proportional sein müssen. Hiernach entspricht dem Trägerstücke  $DG$  die Verlängerung der Geraden  $IV$  und dem Stücke  $GH$  die Gerade  $V$ , welche die  $IV$  auf der Senkrechten durch  $G$  trifft. In gleicher Weise läßt sich auf den Einfluß von Lasten links von  $C$  schließen. Hervorzuheben ist, daß sich die Geraden  $II$  und  $IV$  auf der Senkrechten durch den Schnittpunkt  $E$  der vom Schnitte  $tt$  ge-

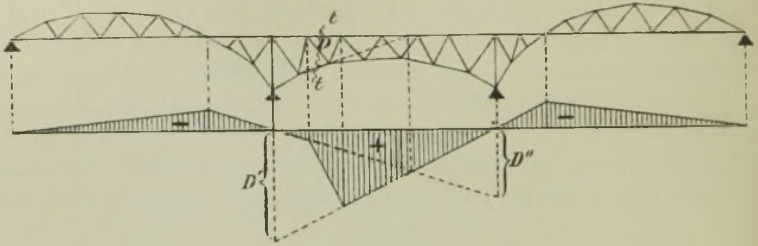


Fig. 337.

troffenen Gurtstäbe  $O$  und  $U$  schneiden müssen. Je nachdem nun  $E$  rechts oder links vom Stützpunkte  $D$  liegt (Fig. 334 oder 337), erzeugen Lasten, welche auf die Trägereile  $CF_1$  oder  $F_2D$  wirken,

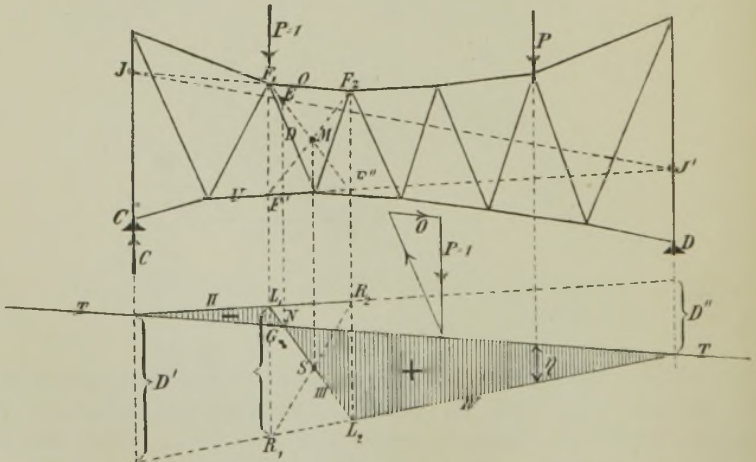


Fig. 338.

Spannkkräfte  $D$  von gleichem oder entgegengesetztem Vorzeichen. Punkt  $E$  kann bei günstiger Lage zur Aufzeichnung der Einflußlinie für  $D$  benutzt werden; es genügt dann,  $D'$  oder  $D''$  aufzutragen.

Wir erinnern noch an die in No. 143, Fig. 226 nachgewiesenen wichtigen Eigenschaften, daß  $M$  und  $E$  senkrecht über  $S$  und  $N$  liegen und Strecke  $\overline{L_1 R_1} = v$  ist.

Um die entsprechende Figur für eine rechtssteigende Diagonale zu erhalten, betrachte man das Spiegelbild der Fig. 338. Kehrt man Fig. 338 um, so daß  $F_1 F_2$  der unteren Gurtung angehört, so hat man den Fall einer unten angreifenden Belastung; man muß aber die Vorzeichen umkehren. Das Verfahren gilt natürlich auch dann, wenn sich  $O$  und  $U$  zwischen den Stützen treffen. Wir empfehlen dem Leser, alle diese Fälle aufzuzeichnen.

176. Die Einflußlinien für die Spankräfte in den Gurtungen können aus den Einflußlinien für die den Gurtstäben gegenüberliegenden Momente mittels Division durch den Hebelarm der fraglichen Spankraft abgeleitet werden. Kürzer ist aber das folgende Verfahren.

a. Spankräfte  $O$  und  $U$  des Auslegers  $BC$ . Die in der Fig. 339 dargestellten Einflußlinien für die Spankräfte  $O$  und  $U$  in den Gurt-

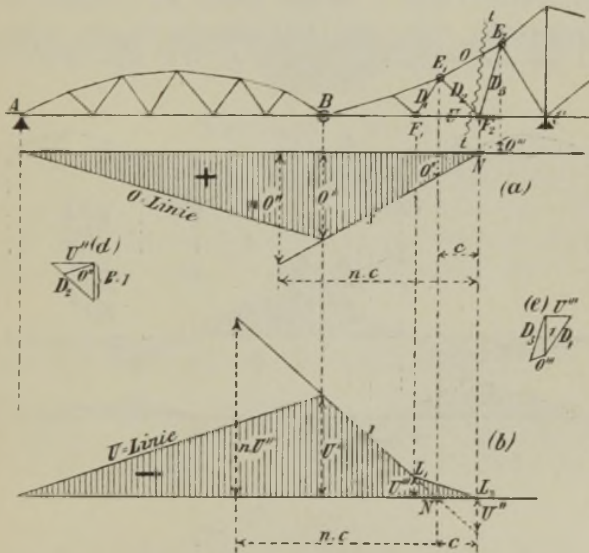


Fig. 339.

stäben, welche der zwischen den Querträgern  $F_1$  und  $F_2$  geführte Schnitt  $tt$  trifft, können in einfacher Weise durch die (mit Hilfe eines Cremonaschen Planes zu ermittelnden) Spankräfte  $O'$  und  $U'$  bestimmt werden, welche eine in  $B$  angreifende Last  $P=1$  hervorbringt (Fig. 332 c). Ferner können sie mit Hilfe der Spankräfte  $O''$  und  $U''$



gezeichnet werden. Die Größe von  $O''$  wird durch Zerlegung von  $P=1$  nach den Richtungen von  $O$  und  $D_2$  gewonnen, diejenige von  $U''$  durch Zerlegung von  $P=1$  nach den Richtungen von  $U$  und  $D_2$  (Fig. 339 d). Bei Anwendung der zweiten Bestimmungsart vermeidet man die Zeichenfehler, welche die Festlegung der Linien  $I$  durch kleine, den Nullpunkten  $N$  nahe Ordinaten leicht im Gefolge haben, wenn man in  $n$ -fachen Abständen von jenen Nullpunkten die durch Zerlegung einer Last  $n \cdot 1$  gewonnenen Werte  $nO''$  und  $nU''$  aufträgt, wobei  $n$  eine beliebige gerade Zahl bedeutet.

Man kann auch die Gerade  $I$  in Fig. 339a mit Hilfe der dem Punkte  $E_2$  entsprechenden (negativen) Ordinate  $O'''$  festlegen, deren Größe durch Zerlegung von  $P=1$  nach den Richtungen von  $O$  und  $D_3$  erhalten wird, und schließlich läßt sich die Gerade  $I$  in Fig. 339b mittels der zu  $F_1$  gehörigen Ordinate  $U'''$  bestimmen. Die Größe der letzteren ergibt sich, wenn die Last  $P=1$  nach den Richtungen der Stäbe  $U$  und  $D_1$  zerlegt wird. Die Darstellung von  $O'''$  und  $U'''$  an Stelle von  $O''$  und  $U''$  wird nötig, sobald der Stab  $D_2$  vertikal hegt.

b. *Spannkräfte  $O$  und  $U$  in den Stäben des zwischen den Stützen liegenden Trägerteiles  $CD$ .* Die Einflußlinien für die Spannkräfte  $O$  und  $U$  sind hier durch die Spannkräfte  $O'$ ,  $U'$  oder  $O''U''$  bestimmt,

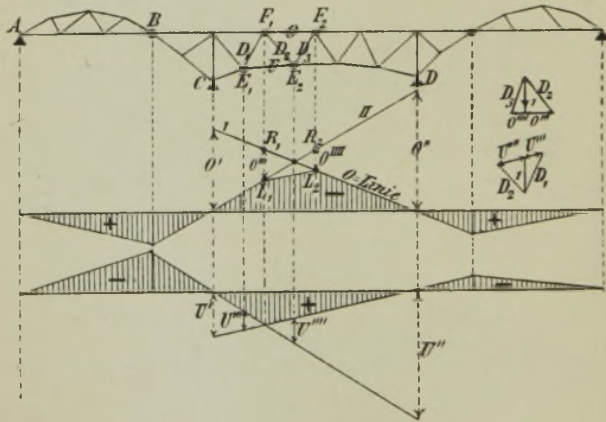


Fig. 340.

welche den in den Figuren 335 und 336 dargestellten Belastungsfällen entsprechen. Der Trägerteil zwischen den Stützen verhält sich wie ein einfacher Balken. In der Fig. 340 ist der Fall eines Balkens mit oben angreifender Belastung behandelt worden.

Indem wir auf die am Schluß von No. 175 durchgeführte Unter-

suchung der Eigenschaften der Einflußlinie für die Spannkraft  $D$  verweisen (Fig. 338), überlassen wir es dem Leser, selbst die folgenden Gesetze mittels ähnlicher Betrachtungen abzuleiten.

Die beiden durch die Werte  $O'$  und  $O''$  bestimmten Geraden  $I$  und  $II$  schneiden auf der Senkrechten durch  $F_1$  eine Spannkraft  $\overline{R_1 L_1} = O'''$  ab, deren Größe durch Zerlegung der Last  $P=1$  nach den Richtungen der beiden im Punkte  $F_1$  zusammentreffenden Stäbe  $O$  und  $D_2$  erhalten wird, und die in der Figur 340 mit  $O''''$ ,  $U''''$ ,  $U''''$  bezeichneten Spannkräfte können der Reihe nach bestimmt werden durch Zerlegung von  $P=1$  nach den Richtungen  $O$  und  $D_3$ , beziehungsweise  $U$  und  $D_1$ , beziehungsweise  $U$  und  $D_2$ . Es leuchtet ein, daß im allgemeinen *einer* der vier Werte  $O'$ ,  $O''$ ,  $O'''$ ,  $O''''$  zur Bestimmung der  $O$ -Linie und *einer* der vier Werte  $U'$ ,  $U''$ ,  $U'''$ ,  $U''''$  zur Bestimmung der  $U$ -Linie ausreicht.\*) Besser ist es jedoch, stets mehrere dieser Werte zu ermitteln, um die Zuverlässigkeit der Zeichnung prüfen zu können.

### § 41.

## Kräfteplan für eine Eisenbahnbrücke mit Gerberschen Balken.

Zahlenbeispiel. Tafel 5.

Es ist der in der Fig. 341 (Tafel 5) dargestellte Hauptträger einer zweigleisigen Eisenbahnbrücke mit mehreren Öffnungen zu untersuchen. Die bewegliche Belastung bestehe aus einem Güterzuge mit 3 Lokomotiven, und die ständige Belastung sei  $g = 1,74'$  f. d. Meter.\*\*)

\*) Beim Fachwerke mit Vertikalen werden einige Werte  $O''$ ,  $O''''$ ,  $U''$ ,  $U''''$  gleich Null.

\*\*) Wir wählen dieselbe Belastung wie in den auf den Tafeln 1, 3, 4 behandelten Zahlenbeispielen, um Ergebnisse früherer Rechnungen benutzen zu können. Hervorzuheben ist, daß bezüglich der Ausbildung der Auflager des Trägers zwei

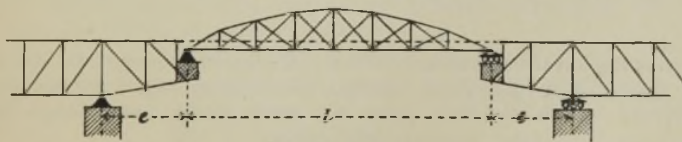


Fig. 342.

Fälle möglich sind. Erstens kann man, nach dem Vorschlage *Gerbers*, die Koppelträger gelenkartig mit den Auslegern verbinden, und zweitens kann man jeden schwebenden Teil auf die in der Fig. 342 dargestellte Art mit einem festen und

I. **Spannkkräfte in den Gurtungen des Auslegers  $BC$ .** Wir wenden das *Zimmermannsche* Verfahren an, und bestimmen die Werte  $M : \lambda$  teils durch Rechnung, teils durch Zeichnung.

1. *Momente infolge der ständigen Belastung.* Die Feldweite ist für den überragenden Teil:  $\lambda = 3,0^m$ . Der Knoten 1 (Fig. 343) wird daher belastet mit:  $g\lambda = 1,74 \cdot 3 = 5,22^t$  und Knoten 0, welcher das

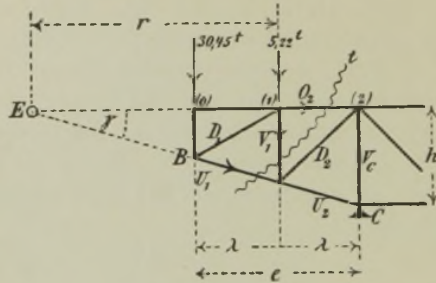


Fig. 343.

halbe Gewicht des  $32^m$  langen schwebenden Teiles aufzunehmen hat, mit:  $\frac{1}{2} \cdot 1,74 \cdot 32 + \frac{1}{2} \cdot 5,22 = 30,45^t$ . Es ergibt sich daher

$$(1) \begin{cases} M_{1g} = -30,45 \cdot \lambda \\ M_{2g} = -30,45 \cdot 2\lambda - 5,22\lambda = -66,12\lambda = \text{Stützenmoment } M_{Cg}. \end{cases}$$

2. *Momente infolge der beweglichen Belastung.* Es wurde für einen hinlänglich langen Eisenbahnzug in der Fig. 344 (Tafel 5) ein Seilpolygon gezeichnet und, um dieses Polygon auch zur Untersuchung der Parallelträger  $CD$  und  $C'D'$  bequem benutzen zu können, die Polweite gleich einem Vielfachen der Höhe jener Träger gewählt; sie ist:  $H = 4 \cdot 3,6 = 14,4^m$ . Nun wurde der Träger in die (rot eingezeichnete) Stellung  $I$  gegen den Eisenbahnzug gebracht und die dem Koppelträger entsprechende Schlußlinie  $s_1$  eingetragen und nach rechts gehörig verlängert. Aus den auf den Senkrechten durch

einem beweglichen Auflagergelenke versehen. Im ersten Falle darf auf den Pfeilern nur *ein* festes Lager angeordnet werden; alle übrigen Lager müssen beweglich sein, während im zweiten Falle jeder der durch Pfeiler unterstützten Teile ein festes und ein bewegliches Auflagergelenk erhält.

Welche der beiden Anordnungen vorliegt, ist für die Berechnung der durch senkrechte Lasten hervorgerufenen Spannkkräfte und Stützenwiderstände gleichgültig.

Die letzte Anordnung findet sich bei der im Jahrgange 1877 der Zeitschrift für Bauwesen (Seite 41 u. ff.) beschriebenen *Warthe-Brücke bei Posen*, deren Hauptträger dem hier untersuchten Balken ähnlich sind.



Knoten 1 und Stütze  $C$  vom Seilpolygon und der Geraden  $s_1$  abgeschnittenen Strecken  $y_1$  und  $y_2$  \*) ergab sich

$$M_{1p} = -Hy_1 \text{ und } M_{2p} = -Hy_2 = \text{Stützenmoment } M_{Cp}.$$

Die ungünstigste Stellung des Trägers gegen den Lastenzug wurde durch Probieren bestimmt, wobei sich herausstellte, daß beide Momente bei ein und derselben Stellung ihre größten Werte annahmen.

Nach Division durch  $\lambda = 3^m$  folgt

$$\frac{M_{1p}}{\lambda} = -y_1 \frac{H}{\lambda} = -y_1 \cotg \alpha \text{ und } \frac{M_{2p}}{\lambda} = -y_2 \cotg \alpha$$

wo  $\cotg \alpha = \frac{H}{\lambda}$ . Man findet

$$(2) \quad \frac{M_{1p}}{\lambda} = -92,1' \text{ und } \frac{M_{2p}}{\lambda} = -192,0^{***})$$

und nach Hinzurechnung der Wirkung der ständigen Belastung

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{M_1}{\lambda} = -92,1 - 30,4 = -122,5' \\ \frac{M_2}{\lambda} = -192,0 - 66,1 = -258,1'. \end{cases}$$

Mittels dieser Werte sind in Fig. 345 (Tafel 5) die größten Spannkkräfte  $U_1, U_2, O_2$ , und die gleichzeitig mit  $U_1$  ihren größten Wert annehmende Spannkraft der ersten Diagonale nach dem *Zimmermannschen* Verfahren bestimmt worden, wobei die Verhältnisse  $M:\lambda$  von den oberen Knotenpunkten aus abgetragen worden sind. Die Kräftepolygone wurden (der rot eingetragenen Trägerstellung  $I$  entsprechend) durch rote Schraffierung hervorgehoben und mit den Ziffern  $I$  versehen. Es ergab sich

$$U_1 = -142'; U_2 = -225'; O_2 = +136'; D_1 = +159'.$$

Wir wollen noch die rechnerische Bestimmung der von der veränderlichen Belastung erzeugten Momente  $M$  erläutern. Gesucht sei  $M_C$  für die in der Fig. 346 angegebene Laststellung. Der Druck  $B$ , welchen die beiden auf dem Koppelträger ruhenden Lokomotiven auf das Gelenk  $B$  ausüben, bestimmen wir nach dem auf Seite 145 entwickelten Verfahren mittels der Tabelle I (Seite 310), und erhalten (wegen  $b_n = 2,0$ ;  $\mathfrak{P}_n = 132'$ ;  $\mathfrak{S}_n = 1647,0'$ )

$$B' = 2,0 \cdot 132 + 1647,0 = 1911^{**}.$$

Rechnen wir die in  $B$  angreifende Last mit zur Belastung des Teiles  $AB$ , so entsteht

$$B = \frac{1911 + 13(32 - 1,4)}{32} + 13 = 85,15'$$

\*) Wir unterließen es, die  $y$  mit dem Zeiger  $p$  zu versehen.

\*\*) Diese Werte lassen sich auf die in der Fig. 344 angegebene Weise durch Zeichnung bestimmen, werden aber besser gerechnet, nachdem  $y$  gemessen worden ist.

und, wegen  $\lambda = 3,0^m$ ,

$$M_C = -85,15 \cdot 2\lambda - 9 \cdot 0,6 - 13 \cdot 4,6 = -192,03 \lambda.$$

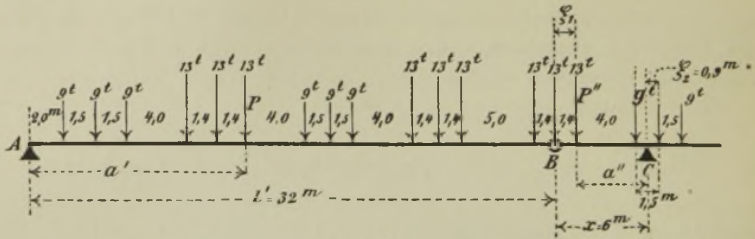


Fig. 346.

Bevor diese Rechnung ausgeführt wird, ist zu entscheiden, ob die angegebene Zugstellung auch am ungünstigsten wirkt. Bezeichnen wir zu diesem Zwecke jede zwischen  $A$  und  $B$  liegende Last mit  $P'$ , jede Last zwischen  $B$  und  $C$  mit  $P''$  und die Abstände dieser Lasten von  $A$  beziehungsweise dem Querschnitte  $C$  mit  $a'$  und  $a''$ , so ergibt sich:  $Bl' = \Sigma P'a'$  und

$$M_C = -Bx - \Sigma P''a'' = -\left[\frac{x}{l'} \Sigma P'a' + \Sigma P''a''\right].$$

Wird der Zug um die unendlich klein gedachte Strecke  $\xi$  nach rechts verschoben, so geht  $a'$  über in  $a' + \xi$  und  $a''$  in  $a'' - \xi$ , und es ändert sich  $(-M_C)$  um  $\left(\frac{x}{l'} \Sigma P' - \Sigma P''\right) \xi$ . Soll nun  $(-M_C)$  infolge der Verschiebung abnehmen, so muß sein

$$(I) \quad x \Sigma P' < l' \Sigma P''$$

und ebenso folgt, daß  $(-M_C)$  infolge einer Verschiebung des Zuges nach links abnimmt, sobald

$$(II) \quad x \Sigma P' > l' \Sigma P''.$$

Die beiden Ungleichungen müssen erfüllt werden, falls die angenommene Laststellung die gefährlichste sein soll. Dabei ist zu beachten, daß die in  $B$  ruhende Last zu den Lasten  $P'$  oder  $P''$  zu rechnen ist, je nachdem der Zug nach links oder nach rechts verschoben wird. Im vorliegenden Falle erhält man infolge einer Verschiebung nach rechts:  $\Sigma P' = 6 \cdot 9 + 7 \cdot 13 = 145^t$ ,  $\Sigma P'' = 2 \cdot 13 + 9 = 35^t$  und (wegen  $x = 6^m$  und  $l' = 32^m$ )

$$6 \cdot 145 < 32 \cdot 35$$

und infolge einer Verschiebung nach links:  $\Sigma P' = 145 + 13 = 158^t$ ,  $\Sigma P'' = 35 - 13 = 22^t$  und

$$6 \cdot 158 > 32 \cdot 22.$$

Es werden mithin beide Ungleichungen (I) und (II) befriedigt.

Im allgemeinen dürfte das zeichnerische Verfahren den Vorzug verdienen; denn man beachte wohl, daß die in obigen Ungleichungen gewonnenen Kennzeichen der ungünstigsten Zugstellungen an die Annahme unendlich kleiner Verschiebungen des Lastenzuges gebunden sind. Verschiebt man im vorliegenden Falle den Zug um  $1,4^m$  nach links, so findet man zufällig eine andere

Stellung desselben, welche ebenfalls den Bedingungen *I* und *II* genügt. Die Summe  $\Sigma P''$  hat hier nicht nur durch den Übertritt der vorher in *B* angreifenden 13', sondern auch durch das Hinzutreten einer Last 9' eine Änderung erfahren. Nun begegnet es zwar keinerlei Schwierigkeiten, die infolge endlicher Verschiebungen entstehenden Änderungen der Summen  $\Sigma P'a'$  und  $\Sigma P''a''$  zu verfolgen und die Bedingungen *I* und *II* entsprechend zu ergänzen; das Kennzeichen der gefährlichsten Stellung wird aber dadurch wesentlich umständlicher, namentlich gegenüber der so bequemen versuchsweisen zeichnerischen Ermittlung der größten Momente. Wir wollen die Rechnung im vorliegenden Falle durchführen, wobei wir auf die Bezeichnungen  $\xi_1$  und  $\xi_2$  in Fig. 346 verweisen. Infolge einer Verschiebung des Zuges nach links um  $\xi_2$  wächst ( $-Mc$ ) um  $(\Sigma P'' - \frac{x}{l'} \Sigma P') \xi_2$ , wobei  $\Sigma P' = 158'$  und  $\Sigma P'' = 22'$ . Dieser Wert ist negativ, weil, wie vorhin gezeigt, die Ungleichung *II* befriedigt wird. Infolge einer weiteren Verschiebung um  $\xi_1 - \xi_2$  wächst ( $-Mc$ ), da zur  $\Sigma P''$  die Last  $P_0 = 9'$  hinzutritt, während die  $\Sigma P'$  ungeändert bleibt, um  $(\Sigma P'' + P_0 - \frac{x}{l'} \Sigma P') (\xi_1 - \xi_2)$ . Im ganzen nimmt also ( $-Mc$ ) zu um

$$\begin{aligned} & (\Sigma P'' - \frac{x}{l'} \Sigma P') \xi_2 + (\Sigma P'' + P_0 - \frac{x}{l'} \Sigma P') (\xi_1 - \xi_2) \\ &= (\Sigma P'' - \frac{x}{l'} \Sigma P') \xi_1 + P_0 (\xi_1 - \xi_2) = (22 - \frac{6}{32} \cdot 158) 1,4 \\ & \quad + 9(1,4 - 0,9) = -6,18'. \end{aligned}$$

Das Moment ( $-Mc$ ) wird also infolge der Verschiebung des Zuges um  $\xi = 1,4^m$  verkleinert.

II. Spannkkräfte in den Füllungsstäben  $V_1, D_2, V_C$  des Auslegers *BC* (Fig. 343). Bezeichnet man für irgend einen Belastungszustand mit  $M_E$  das auf den Schnittpunkt *E* der Gurtstäbe  $O_2$  und  $U_1$  als Drehpunkt bezogene Moment der links vom Schnitte *tt* angreifenden äußeren Kräfte und mit  $r$  den Abstand der Kraft  $V_1$  von *E*, so ist

$$V_1 r + M_E = 0 \quad \text{und} \quad V_1 = -\frac{M_E}{r}.$$

Dem größten Momente  $M_E$  entspricht mithin der größte Druck  $V_1$ . Nun geht aus der in No. 174 durchgeführten Untersuchung der Einflußlinie hervor, daß im Falle eines links von *B* gelegenen Drehpunktes in der (als linkssteigender Füllungsstab zu betrachtenden) Vertikale nur Druckspannungen entstehen, daß zur Erzielung von  $_{min} V_1$  der Koppelträger *AB* und der Ausleger *B(1)* voll zu belasten sind, und daß endlich die schwersten Lasten bei dem links vom Schnitte *tt* gelegenen Knoten (1) aufzustellen sind. Es wurde deshalb der Träger in die (in Fig. 344 blau eingezeichnete) Stellung *II* gegen den Lastenzug gebracht und nach Eintragung der dem Koppelträger entsprechenden Schlußlinie  $s_2$  und der zum Felde 1—2 gehörigen Schlußlinie *s* die



Strecke  $\eta$  bestimmt, welche die Geraden  $s_2$  und  $s$  auf der Senkrechten durch den Drehpunkt  $E$  abschneiden. Denkt man nämlich die am Koppelträger  $AB$  angreifenden Lasten auf die Auflager  $A$  und  $B$  verteilt, desgleichen die im Felde 1—2 ruhende Last auf die Knoten 1 und 2, so sind  $s_2$  und  $s$  als die äußersten Seilpolygonseiten für die auf das Trägerstück  $B1$  wirkenden äußeren Kräfte zu betrachten, und es folgt dann nach dem auf Seite 18 bewiesenen Gesetze:

$$M_E = +H\eta, \text{ woraus sich schließlich } (-V_1)_p = \frac{H\eta}{r} \text{ ergibt. Dieser}$$

Wert ist in der Figur 348, in welcher  $\overline{E(1)} = r$  und  $\overline{ER} = H$  ist, dargestellt worden. Nach Bestimmung von  ${}_{\min}V_{p1}$  ergab sich (in Fig. 348)  ${}_{\max}D_{p2}$  durch Zerlegung von  $V_{p1}$  nach den Richtungen von  $U$  und  $D_2$ .\*) Die von der ständigen Belastung herrührenden Spannkkräfte  $V_{g1}$  und  $D_{g2}$  können nun mit Hilfe eines *Cremonaschen* Planes oder nach dem *Zimmermannschen* Verfahren (mittels der bereits bekannten Werte  $M_{g1}:\lambda$  und  $M_{g2}:\lambda$ ) bestimmt werden. Auf Tafel 5 wurde dieser Weg nicht weiter verfolgt; dafür ist in der Fig. 345 die (nach der Ansicht des Verfassers zweckmäßigere\*\*) Ermittlung von  ${}_{\max}D_2$  und  ${}_{\min}V_1$  aus den Werten  $M_2:\lambda$  und  $M_1:\lambda$  dargestellt worden, wobei die von der beweglichen Belastung abhängigen Teile dieser Werte mit Hilfe des Seilpolygons in Fig. 344 bestimmt wurden. Die Ergebnisse lauten

$$\begin{aligned} \frac{M_1}{\lambda} &= \frac{M_{p1}}{\lambda} + \frac{M_{p2}}{\lambda} = -30,4 - \frac{Hy'}{\lambda} = -30,4 - 78,7 = -109,1'; \\ \frac{M_2}{\lambda} &= -66,1 - \frac{Hy''}{\lambda} = -66,1 - 184,3 = -250,4'; \\ {}_{\max}D_2 &= +118'; \quad {}_{\min}V_1 = -104,8'. \end{aligned}$$

Bislang wurde die gesamte ständige Belastung  $g$  an der oberen Gurtung angreifend gedacht. Zerlegt man  $g$  in  $g_u = 0,45'$  und  $g_o = 1,74 - 0,45$ , so kommt auf den unteren Knoten (1) die Last  $g_u\lambda = 0,45 \cdot 3,0 = 1,35'$ , und es ergibt sich  $V_1 = -104,8 + g_u\lambda = -103'$ .

Die Spannkraft  $V_C$  in der Vertikale über dem zweiten Mittelpfeiler  $C$ , Fig. 343 und 341, folgt aus der Gleichgewichtsbedingung für den Knotenpunkt  $C$ . Es muß sein (vergl. Fig. 349):

\*) Es ist diese bequeme Bestimmung von  ${}_{\max}D_{p2}$  hier möglich, weil  $U_1$  und  $U_2$  dieselbe Richtung haben; im Gegenfalle müßte  $D_{p2}$  aus der für den Schnittpunkt von  $O_2$  und  $U_2$  aufgestellten *Ritterschen* Momentengleichung ermittelt werden.

\*\*) Kleine Fehler bei Festlegung der vorhin benutzten Schlußlinie  $s$  können zu erheblichen Ungenauigkeiten Veranlassung geben.

$V_c + U_2 \sin \gamma + C - G_u = 0$ , also  $V_c = -C - U_2 \sin \gamma + G_u$ , wobei  $G_u = 0,45 (3,0 + 3,6) \frac{1}{2} = 1,5'$  die ständige Belastung des Knotens  $C$  bedeutet. Wegen  $U_2 \cos \gamma = \frac{M_c}{h}$  ( $h =$  Höhe der fraglichen Vertikale) ergibt sich

$$(4) \quad V_c = -C - \frac{M_c}{h} \operatorname{tg} \gamma + G_u.$$

Hiernach erhält man die Einflußlinie für  $V_c$ , indem man zu den Ordinaten der  $C$ -Linie (d. i. die Einflußlinie für  $C$ ) die mit  $\frac{1}{h} \operatorname{tg} \gamma$

multiplizierten Ordinaten der  $M_c$ -Linie addiert. Der feste Wert  $G_u$  wird zunächst  $= 0$  gesetzt.

Fig. 350 zeigt die aus den Geraden  $I, II, III$  bestehende  $C$ -Linie und die aus den Geraden  $IV, V$  bestehende  $M_c$ -Linie; erstere besitzt bei  $C$  die Ordinate 1, letztere bei  $B$  die Ordinate  $e$ . Macht man also  $\varepsilon = \operatorname{tg} \gamma \frac{e}{h}$ , so stellt die in

der Figur 350 schraffierte Fläche die Einflußfläche für die Spannkraft  $V_c$  dar. \*) Aus dem Verlaufe der Einflußlinie folgt nun, daß die fragliche Vertikale den größten Druck ( $_{\min} V_c$ ) erleidet, sobald der Träger nur zwischen  $A$  und  $D$  belastet wird und die schwersten Lasten in

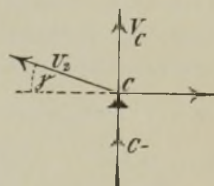


Fig. 349.

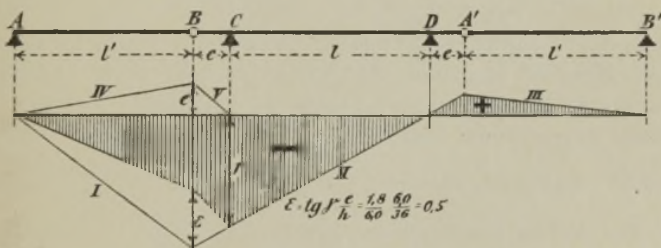


Fig. 350.

der Nähe von  $C$  liegen, während der kleinste Druck, bezw. der größte Zug ( $_{\max} V_c$ ) bei ausschließlicher Belastung des über die Stütze  $D$

\*) Ist auch das rechts an  $C$  grenzende Gurtstück geneigt (und zwar unter  $\gamma'$ ) so muß  $\varepsilon = \frac{h}{e} (\operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \gamma')$  gemacht werden; Fig. 351.

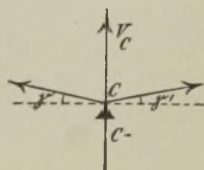


Fig. 351.

ragenden Trägerstückes  $DA'$  und des hieran grenzenden Koppelträgers  $A'B'$  entsteht, wobei dann die schwersten Lasten in der Nähe von  $A'$  liegen müssen. Um zunächst  $\min V_C$  zu bestimmen, wurde der Träger in die Stellung *III* (Fig. 344) gebracht, hierauf die dem schwebenden Teile  $AB$  entsprechende Schlußlinie  $s_3$  eingezeichnet und die Gerade  $s'_3$  gezogen, welche die beiden Punkte verbindet, in denen die Auflagersenkrechten  $D$  und  $C$  vom Seilpolygon und der Linie  $s_3$  geschnitten werden. Zwei durch den Pol zu  $s_3$  und  $s'_3$  gelegte Parallelen schneiden auf dem Kräftezuge den dem angenommenen Belastungsfalle *III* entsprechenden Widerstand  $C_p$  ab, und durch die unter  $C$  gemessene Ordinate  $y$  ist der Wert  $\frac{M_{C_p}}{\lambda} = -\frac{Hy}{\lambda}$  bestimmt.

Man findet  $C_p = 191,0'$  und  $M_{C_p} = -157,6 \cdot \lambda$ .

Die ständige Belastung erzeugt

$$(5) \quad C_g = \frac{1}{2} gl' + ge + \frac{1}{2} gl = 1,74 \left[ \frac{1}{2} 32 + 6 + \frac{1}{2} 36 \right] = 69,6'$$

und, nach Gleich. (1):  $M_{C_g} = -66,1 \lambda$ .

Durch den Wert  $\frac{M_C}{\lambda} = -157,6 - 66,1 = -223,7'$  ist die Spannkraft  $U_2$  bestimmt; sie wurde in Fig. 345 dargestellt, in welcher nach Auftragen von  $a\bar{2} = 223,7'$  erhalten wurde: Druck  $U_2 =$  Strecke  $ac$ . Nun konnte nach Berechnung von  $C - G_u = 191,0 + 69,6 - 1,5 = 259'$  das Kräftepolygon für den Knoten  $C$  (Fig. 347) gezeichnet werden. Dasselbe liefert:  $\min V_C = -203'$ .\*)

Um  $\max V_C$  zu finden, setze man diejenige Laststellung voraus, welche das größte Moment  $M_D$  über der Stütze  $D$  hervorruft und vernachlässige die etwa links von der Stütze  $D$  wirkenden Lasten.\*\*\*) Die Verkehrslast erzeugt nach Gleich. (3):  $M_D = -258,1 \lambda = -258,1 \cdot 3,0 = -774,3'$  und infolgedessen:  $\min C_p = \frac{M_D}{l} = -\frac{774,3}{36} = -21,5'$ .

Nun ist die vorhin beschriebene Ermittlung von  $V_C$  durchzuführen mit Einführung der Werte

$$\min C = \min C_p + C_g = -21,5 + 69,6 = 48,1'$$

$$\text{und } \frac{M_C}{\lambda} = \frac{M_{C_g}}{\lambda} = -66,1'$$

Die betreffende Figur wurde auf Tafel 5 fortgelassen; sie ergab  $\max V_C = -30'$ .

\*) Die Rechnung führt im vorliegenden Falle ebenso schnell zum Ziele. Man findet (wegen  $\lambda = 3,0^m$ ;  $\operatorname{tg} \gamma = \frac{1,8}{6,0}$  und  $h = 3,6^m$ ) den Wert  $V_C = -C + G_u - \frac{1}{4} \frac{M_C}{\lambda}$ .

\*\*) Wir erinnern an die Auseinandersetzungen in No. 99, Seite 168.



Um die Spannkraft in der Vertikale über dem ersten Mittelpfeiler ( $D'$ ) zu erhalten (vergl. Fig. 341), braucht die soeben gezeigte Berechnung von  $V_c$  nur unter der Voraussetzung wiederholt zu werden, daß in der Fig. 350 (Seite 345) das Trägerstück  $DB'$  fehlt. Der durch die ständige Last erzeugte Stützenwiderstand  $C$  folgt dann aus der Gleichung

$$(6) \quad C_g l = g \frac{(l+e)^2}{2} + g \frac{l'}{2} (l+e).$$

Man findet

$$\begin{aligned} C_g &= g \frac{(l+e)}{2l} [l+e+l'] \\ &= 1,74 \frac{36+6}{2 \cdot 36} [36+6+32] = 75,1. \end{aligned}$$

Bei derjenigen Stellung, welche  $_{min} V$  hervorbringt, ergeben sich wieder die vorhin erhaltenen Werte:  $C_p = 191,0'$  und  $\frac{M_c}{\lambda} = -223,7'$ , und es ändert sich deshalb (weil früher  $C_g = 69,6'$  betrug) der größte Druck  $V$  um  $75,1 - 69,6 = 5,5'$  (rund); er beträgt also  $203 + 5,5 = 208,5'$ . Die fragliche Vertikale wird nur gedrückt. Ihre kleinste Inanspruchnahme ergibt sich, wenn nur die ständige Belastung vorhanden ist; um diese zu bestimmen, werden die vorhin beschriebenen Konstruktionen mit den Werten  $C = C_g = 75,1'$  und  $M_c = M_{c_g} = -66,1 \lambda$  durchgeführt. Man findet rund  $V = -60'$ .

Eine übersichtliche Zusammenstellung der auf ganze Tonnen abgerundeten Spannkräfte des Auslegers  $BC$  zeigt die Figur 359. Für jede der Kräfte  $D_1, V_1, D_2, O_2, U_1, U_2$  ist nur der größte Zahlenwert angegeben; die entsprechenden Stäbe werden entweder nur gedrückt oder nur gezogen. Will man die zulässige Inanspruchnahme eines Stabes von dem Verhältnis der kleinsten zur größten Spannkraft abhängig machen, so kann man die kleinsten Spannkräfte, welche entstehen, sobald nur die ständige Belastung auf das Trägerstück  $BC$  wirkt, leicht gesondert bestimmen, beispielsweise mit Hilfe eines Cremonaschen Planes. Es empfiehlt sich dann aber, in den obigen Entwicklungen  $g=0$  anzunehmen, also den Einfluß der veränderlichen Belastung für sich allein zu ermitteln.

III. Grenzwerte des Stützenwiderstandes  $C$ . Der Stützendruck  $C$  nimmt den größten Wert an, sobald der Träger gegen den Lastenzug in die Stellung  $IV$  (Fig. 344) gebracht wird. Die Lasten links von  $D$  sind beseitigt zu denken. Es werden die Geraden  $s_4$  und  $s'_4$  eingetragen und zu ihnen durch den Pol die gleichbezeichneten Parallelen gelegt, welche letztere auf dem Kräftezuge den Widerstand  $_{max} C_p = 193,7'$  abschneiden. Die gefährlichste Laststellung ist durch Probieren gefunden worden. Wegen  $C_g = 69,6$  folgt schließlich  $_{max} C = 193,7 + 69,6 = 263'$ .

Für den kleinsten Stützenwiderstand wurde bereits vorhin der Wert  $_{min} C = 48'$  angegeben. Wäre  $_{min} C$  negativ, so müßte das Auflager an dem Pfeiler verankert werden.

Der Druck auf den ersten Mittelpfeiler ist stets positiv. Sein größter Wert ist  $193,7 + 80,0 = 373,7$  (s. Gleich. 6).

**IV. Spannkraften in den Gurtungen der Parallelträger. a. Träger-teil mit zwei Auslegern (dritte Öffnung).** Um für irgend einen Belastungszustand das Moment  $M_m$  für den Knotenpunkt  $m$  zu bestimmen, denke man zunächst die Ausleger beseitigt, betrachte also das Trägerstück  $CD$  als einfachen Balken. Von dem unter dieser Voraussetzung für  $m$  erhaltenen Momente  $M_{0,m}$  bringe man nun die dem Punkte  $m$  entsprechende Ordinate einer Geraden  $C'D'$  in Abzug (Fig. 150, Seite 162), welche durch die negativen Stützenmomente:  $CC' = M_C$  und  $DD' = M_D$  bestimmt ist, und die wir in der Folge als *Schlußlinie*  $s$  bezeichnen wollen. Aus dem Momente  $M_m$  findet man für die Größe der Spannkraft des dem Knoten  $m$  gegenüberliegenden Gurtstabes den Wert:  $\frac{M_m}{h}$ . Sind die Momente mit Hilfe

eines Seilpolygons bestimmt worden, welchem die Polweite  $H = \varepsilon h$  entspricht, wo  $\varepsilon$  eine beliebige Zahl bedeutet, so ergibt sich

$$\frac{M_m}{h} = \frac{Hy_m}{h} = \varepsilon y_m.$$

Die größten und kleinsten Werte  $y_m$  sind nun für den vorliegenden Träger in der Fig. 352 dargestellt worden. Die rechte Hälfte enthält die Werte  $_{max}y_m$ , die linke Hälfte die  $_{min}y_m$ . Erstere entstehen, wenn das Trägerstück  $CD$  gänzlich belastet wird, während die Ausleger und die angrenzenden Koppelträger unbelastet bleiben. Die Stützenmomente  $M_C$  und  $M_D$  nehmen dann, nach der letzten der Gleichungen (1), die Werte an

$$M_{C_g} = M_{D_g} = -66,1 \cdot 3,0;$$

denselben entspricht, da die Polweite  $= 4h = 4 \cdot 3,6^m$  ist,

$$y_{C_g} = y_{D_g} = -\frac{66,1 \cdot 3,0}{4 \cdot 3,6} = -13,8'$$

und hierdurch ist die (wagerechte) Schlußlinie  $s_1$  in Fig. 352 bestimmt. Die Ordinaten des  $M_0$ -Polygons stimmen mit denen des in der Fig. 130 auf Tafel 1 dargestellten Polygons der größten Momente eines einfachen Balkens überein; die Ermittlung derselben ist in No. 82 beschrieben worden.\*) Es ergibt sich (wegen  $\varepsilon = 4$ ):

\*) Es ist also beispielsweise die Ordinate  $22'$  in Fig. 352 gleich der Ordinate  $y_2$  in Fig. 130. Man achte auf die Verschiedenheit der Kräftemaßstäbe der Tafeln 1 und 5.

$max y_0 = -13,8^t$	$min O_1 = -4 \cdot 14,4 = -58^t$ *	$max U_1 = -4 \cdot 13,8 = -55^t$
$max y_1 = +14,4^t$	$min O_2 = -4 \cdot 34,9 = -140^t$	$max U_2 = +58^t$
$max y_2 = +34,9^t$	$min O_3 = -4 \cdot 49,9 = -200^t$	$max U_3 = +140^t$
$max y_3 = +49,9^t$	$min O_4 = -4 \cdot 58,4 = -234^t$	$max U_4 = +200^t$
$max y_4 = +58,4^t$	$min O_5 = -4 \cdot 61,9 = -248^t$	$max U_5 = +234^t$
$max y_5 = +61,9^t$		

Wird der Träger links von  $C$  und rechts von  $D$  so belastet, daß die größten Momente  $M_C$  und  $M_D$  entstehen, während auf den Teil  $CD$  nur die ständige Belastung wirkt, so ergeben sich die in der linken Hälfte der Fig. 352 dargestellten größten negativen Werte  $y$ . An die Stelle des  $M_0$ -Polygon tritt das  $M_{0g}$ -Polygon, dessen Eckpunkte auf einer Parabel mit dem Pfeile  $\frac{gl^2}{8H} = \frac{1,74 \cdot 36^2}{8 \cdot 4 \cdot 3,6} = 19,6'$  liegen, und die Schlußlinie  $s_1$  ist durch die um  $\frac{M_{cp}}{H} = -y_c$  höher liegende  $s_2$  zu ersetzen, wobei  $y_c$  mit dem in Figur 344 der Trägerstellung  $I$  entsprechenden  $y_2$  übereinstimmt.

Man findet

$min y_0 = -53,8^t$	$max O_1 = +4 \cdot 46,7 = +187^t$	$min U_1 = -4 \cdot 53,8 = -215^t$
$min y_1 = -46,7^t$	$max O_2 = +4 \cdot 41,3 = +165^t$	$min U_2 = -187^t$
$min y_2 = -41,3^t$	$max O_3 = +4 \cdot 37,3 = +149^t$	$min U_3 = -165^t$
$min y_3 = -37,3^t$	$max O_4 = +4 \cdot 34,9 = +140^t$	$min U_4 = -149^t$
$min y_4 = -34,9^t$	$max O_5 = +4 \cdot 34,2 = +137^t$	$min U_5 = -140^t$
$min y_5 = -34,2^t$		

b. *Trägerteil mit einem Ausleger (erste Öffnung)*. Wir bezeichnen wieder die linke Stütze mit  $C$ , die rechte mit  $D$  und nehmen den Träger zwischen  $C$  und  $D$  gänzlich belastet, rechts von  $D$  unbelastet an. Die Schlußlinie  $s_1$  geht durch den linken Stützpunkt (Fig. 353a auf Tafel 5) und besitzt bei  $D$  die Ordinate  $-13,8^t$ . Das  $M_0$ -Polygon ist dasselbe wie in der Fig. 352.

Da der größte Wert  $y$  dem Knoten 5 entspricht, so sind bei der Berechnung der Spannkkräfte in den Gurtungen links und rechts von 5 beziehungsweise links- und rechtssteigende Diagonalen vorauszusetzen.

Man findet

$max y_1 = +26,8^t$	$min O_1 = -4 \cdot 26,8 = -107^t$	$U_1 = 0$
$max y_2 = +45,9^t$	$min O_2 = -4 \cdot 45,9 = -184^t$	$max U_2 = +107^t$
$max y_3 = +59,6^t$	$min O_3 = -4 \cdot 59,6 = -238^t$	$max U_3 = +184^t$
$max y_4 = +66,7^t$	$min O_4 = -4 \cdot 66,7 = -267^t$	$max U_4 = +238^t$
$max y_5 = +68,8^t$	$min O_5 = -4 \cdot 68,8 = -275^t$	$max U_5 = +267^t$
$max y_6 = +63,9^t$	$min O_6 = min O_5 = -275^t$	$max U_6 = +256^t$
$max y_7 = +54,1^t$	$min O_7 = -4 \cdot 63,9 = -256^t$	$max U_7 = +216^t$
$max y_8 = +37,7^t$	$min O_8 = -4 \cdot 54,1 = -216^t$	$max U_8 = +151^t$
$max y_9 = +15,8^t$	$min O_9 = -4 \cdot 37,7 = -151^t$	$max U_9 = +63^t$
$max y_{10} = -13,8^t$	$min O_{10} = -4 \cdot 15,8 = -63^t$	$max U_{10} = -4 \cdot 13,8 = -55^t$

\*) Die Multiplikationen mit 4 kann man umgehen, indem man in der Fig. 352 den Kräftemaßstab  $1^{cm} = 30^t$  ändert in  $1^{cm} = 4 \cdot 30 = 120^t$ . Dann stellen die Ordinaten  $y$  die Kräfte  $O$  und  $U$  dar.



Um nun die Werte  $\min y$  zu erhalten, ist der Träger rechts von  $D$  so zu belasten, daß das größte Stützenmoment  $M_D$  entsteht, während zwischen  $C$  und  $D$  nur ständige Belastung anzunehmen ist.

Man gelangt dann zu der Figur 353b und findet, da der größte (positive) Wert  $y$  dem Knoten 2 entspricht, daß bei der Berechnung

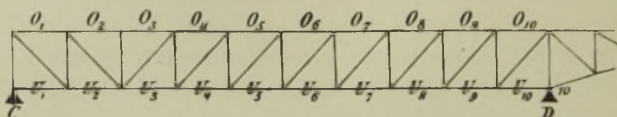


Fig. 354.

der Gurtkräfte der in der Figur 354 angegebene Spannungszustand der Diagonalen vorauszusetzen ist. Es ergibt sich:

$\min y_1 = +1,7^t$	$\max O_1 = -4 \cdot 1,7 = -7^t$	$U_1 = 0$
$\min y_2 = +1,8^t$	$\max O_2 = -4 \cdot 1,8 = -7^t$	$\min U_2 = +7^t$
$\min y_3 = +0,3^t$	$\max O_3 = \max O_3 = -7^t$	$\min U_3 = +1^t$
$\min y_4 = -2,7^t$	$\max O_4 = -4 \cdot 0,3 = -1^t$	$\min U_4 = -11^t$
$\min y_5 = -7,3^t$	$\max O_5 = +4 \cdot 2,7 = +11^t$	$\min U_5 = -29^t$
$\min y_6 = -13,5^t$	$\max O_6 = +4 \cdot 7,3 = +29^t$	$\min U_6 = -54^t$
$\min y_7 = -21,2^t$	$\max O_7 = +4 \cdot 13,5 = +54^t$	$\min U_7 = -85^t$
$\min y_8 = -30,5^t$	$\max O_8 = +4 \cdot 21,2 = +85^t$	$\min U_8 = -122^t$
$\min y_9 = -41,4^t$	$\max O_9 = +4 \cdot 30,5 = +122^t$	$\min U_9 = -166^t$
$\min y_{10} = -53,8^t$	$\max O_{10} = +4 \cdot 41,4 = +166^t$	$\min U_{10} = -4 \cdot 53,8 = -215^t$

Eine Zusammenstellung der Spannkkräfte  $O$  und  $U$  findet sich in der Fig. 359.

### V. Spannkkräfte in den Füllungsstäben der Parallelträger.

a. Trägerteil mit zwei Auslegern (dritte Öffnung). Die Spannkkräfte in den Füllungsstäben eines Parallelträgers lassen sich (nach § 36) schnell ermitteln, sobald die Querkräfte  $Q$  bekannt sind. Um  $\max Q_m$  für das  $m^{\text{te}}$  Balkenfeld zu erhalten, belasten wir den Träger links von  $C$  so, daß das größte Moment  $M_C$  entsteht, und nehmen außerdem

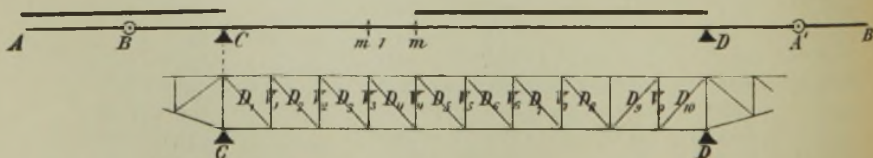


Fig. 355.

einen von  $D$  bis  $m$  reichenden Lastenzug an. Den Einfluß des letzteren bestimmen wir in bekannter Weise mit Hilfe des in No. 81 eingeführten

Seilpolygons, welches wir jetzt das  $C$ -Polygon nennen wollen; es ist in der Fig. 126 auf Tafel 1 für einen  $36^m$  langen Balken gezeichnet worden.\*) Die negativen Beitragsstrecken wurden aus den in No. 151 angeführten Gründen frei von jeder Verkehrslast gedacht; hingegen wurde, um nicht allzu ungünstig zu rechnen, davon abgesehen, den Lastenzug über  $m$  hinaus in das fragliche Feld vorzuschieben. Der Einfluß der auf der Strecke  $Dm$  liegenden Verkehrslast auf die Querkraft  $Q$  ist dann gleich der dem Punkte  $m$  entsprechenden Ordinate  $C_m$  des  $C$ -Polygons. Die Wirkung der übrigen Belastung wird wie folgt bestimmt. Man betrachtet  $CD$  zunächst als einfachen Balken und bestimmt die von der ständigen Belastung abhängigen Querkräfte auf die in No. 72 beschriebene Weise mit Hilfe einer Geraden, welche auf der linken und rechten Auflagersenkrechten beziehungsweise die Ordinaten:  $+\frac{1}{2}gl = \frac{1}{2} \cdot 1,74 \cdot 36 = +31,32'$  und  $-31,32'$  abschneidet. Zu jedem der so gewonnenen Werte  $Q$  addiert man nun (nach Gleichung 2 auf Seite 162) den Betrag:  $\frac{1}{l}(M_D - M_C)$ . Hierbei ist zu setzen

$$M_D = M_{D_g} = -66,1 \cdot 3,0 \text{ und } M_C = -258,15 \cdot 3,0, (**)$$

so daß sich ergibt

$$\frac{1}{l}(M_D - M_C) = \frac{3}{36}(258,15 - 66,1) = +16,0'$$

Die vorstehenden Erörterungen führen zu der in der Fig. 356 gegebenen Darstellung der Querkräfte  $_{max}Q$ . Es wurde nach Aufzeichnung des  $C$ -Polygons die Gerade  $C'D'$  mittels der Strecken  $\overline{CC'} = +31,32 + 16,00 = +47,3'$  und  $\overline{DD'} = -31,32 + 16,00 = -15,3'$  bestimmt. Durch die den Feldmitten entsprechenden Punkte der Linie  $C'D'$  wurden wagerechte Gerade gezogen und deren Ordinaten mit Berücksichtigung der Vorzeichen zu den den Knoten 1, 2, 3, . . . entsprechenden Ordinaten der  $C$ -Linie addiert. Aus den Querkräften  $Q$  ergeben sich schließlich auf die im § 36 erläuterte Weise und mit Bezugnahme auf Fig. 355 die folgenden Spannkkräfte  $D$  und  $V^{***}$ ;

\*) In die Figuren 356—358 wurden nur die den Knotenpunkten entsprechenden Ordinaten dieser (früher als  $A$ -Polygon bezeichneten) Linie übertragen und zwar im Maßstabe  $1^m = 25'$ .

\*\*) Siehe die Gleichungen (1) und (3) auf Seite 340 und 341, in welche  $\lambda = 3,0^m$  einzusetzen ist.

\*\*\*) Bei Berechnung der  $V$  ist das Glied  $g_n \lambda = 0,45 \cdot 3,6 = 1,6'$  berücksichtigt worden. Wir erinnern noch daran, daß die Fahrbahn oben liegt.

$\min V_1 = -Q_1 + 1,6 = -124^t$	$\max D_1 = +178^t$	$\max V_9 = +Q_{10} + 1,6$
$\min V_2 = -Q_2 + 1,6 = -102^t$	$\max D_2 = +146^t$	$= -12,2 + 1,6 = -11^t$
$\min V_3 = -Q_3 + 1,6 = -82^t$	$\max D_3 = +118^t$	$\min D_9 = +5^t$
$\min V_4 = -Q_4 + 1,6 = -63^t$	$\max D_4 = +91^t$	$\min D_{10} = +17^t$
$\min V_5 = -Q_5 + 1,6 = -46^t$	$\max D_5 = +67^t$	
$\min V_6 = -Q_6 + 1,6 = -30^t$	$\max D_6 = +45^t$	
$\min V_7 = -Q_7 + 1,6 = -17^t$	$\max D_7 = +26^t$	
	$\max D_8 = +10^t$	

Um die Querkräfte  $\min Q$  zu erhalten, genügt es, der im vorliegenden Falle bestehenden Symmetrie wegen, das Spiegelbild der Fig. 356 zu betrachten und die Vorzeichen der Kräfte  $Q$  umzukehren. Man findet dann, daß in den sechs Mittelfeldern Gegendiagonalen nötig werden. Eine Zusammenstellung der Grenzwerte der Spannkraft  $D$  und  $V$  zeigt die Figur 359; für die Vertikalen, an denen Gegendiagonalen angreifen, braucht nur der größte Druck (also  $\min V$ ) angegeben zu werden.\*)

b. *Träger teil mit einem Ausleger (erste Öffnung)*. Um zunächst die Kräfte  $\max Q$  zu bestimmen, wurden in Fig. 357 zu den Ordinaten des  $C$ -Polygons die den Feldmitten entsprechenden Ordinaten einer Geraden  $C'D'$  addiert, welche, wegen  $M_C = 0$ , auf den Senkrechten durch die Stützpunkte  $C$  und  $D$  die Strecken

$$\overline{CC'} = \frac{gl}{2} + \frac{M_D}{l} \quad \text{und} \quad \overline{DD'} = -\frac{gl}{2} + \frac{M_D}{l}$$

abschneidet. Rechts von  $D$  ist nur ständige Belastung anzunehmen, weshalb:  $M_D = M_{Dg} = -66,1 \cdot 3,0$  zu setzen ist. Hiernach ergibt sich

$$\overline{CC'} = 31,32 - \frac{66,1 \cdot 3,0}{36} = +25,8^t$$

$$\text{und} \quad \overline{DD'} = -31,32 - \frac{66,1 \cdot 3,0}{36} = -36,8^t$$

und nach Aufzeichnung des Kräfteplanes in Fig. 357

$\min V_1 = -Q_1 + 1,6 = -103^t$	$\max D_1 = -O_1 \sec \varphi = +151^{t**}$
$\min V_2 = -Q_2 + 1,6 = -80^t$	$\max D_2 = +115^t$
$\min V_3 = -Q_3 + 1,6 = -60^t$	$\max D_3 = +87^t$
$\min V_4 = -Q_4 + 1,6 = -41^t$	$\max D_4 = +61^t$
$\min V_5 = -Q_5 + 1,6 = -25^t$	$\max D_5 = +37^t; \max D_6 = +15^t$
$\max V_7 = +Q_8 + 1,6 = -14,7 + 1,6 = -13^t$	$\min D_7 = +4^t$
$\max V_8 = +Q_9 + 1,6 = -23^t$	$\min D_8 = +21^t$
$\max V_9 = +Q_{10} + 1,6 = -32^t$	$\min D_9 = +35^t$
	$\min D_{10} = +48^t$

\*) Macht man die zulässige Inanspruchnahme einer solchen Vertikale abhängig vom Verhältnis der Grenzwerte der Spannkraft, so setze man  $\max V = -g_0 \lambda$ .

\*\*) Der größte Zug  $D_1$  entsteht gleichzeitig mit dem größten Drucke  $O_1$  und wurde in Fig. 357 fortgelassen.



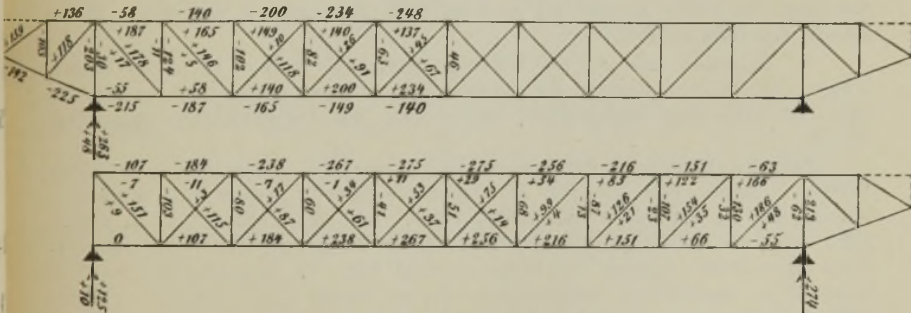
Damit im  $m^{\text{ten}}$  Felde die Querkraft  $_{\min}Q_m$  entsteht, muß ein Eisenbahnzug von  $C$  aus bis  $m - 1$  vorgeschoben werden. Außerdem ist der Balken rechts von  $D$  so zu belasten, daß das Stützenmoment  $M_D$  seinen größten negativen Wert:  $M_D = -258,15 \cdot 3,0$  annimmt. Der Einfluß des von  $C$  bis  $m - 1$  reichenden Lastenzuges auf  $Q_m$  ist gleich der dem Knoten  $m - 1$  entsprechenden Ordinate des  $D$ -Polygons (Spiegelbild des  $C$ -Polygons); der Einfluß der übrigen Belastung ist dargestellt durch die zur Feldmitte gehörige Ordinate einer Geraden  $C'D'$  (Fig. 358), welche auf den Auflagersenkrechten die Strecken

$$\overline{CC'} = \frac{gl}{2} + \frac{M_D}{l} = 31,32 - \frac{258,15 \cdot 3,0}{36} = 31,32 - 21,51$$

$$= +9,8' \text{ und } DD' = -\frac{gl}{2} + \frac{M_D}{l} = -31,32 - 21,51 = -52,8'$$

abschneidet. Man findet

$_{\min}V_2 = Q_3 + 1,6 = -11'$	$_{\min}D_1 = +9'$
$_{\min}V_3 = Q_4 + 1,6 = -23'$	$_{\max}D_2 = +3'*)$
$_{\min}V_4 = Q_5 + 1,6 = -36'$	$_{\max}D_3 = +17'$
$_{\min}V_5 = Q_6 + 1,6 = -51'$	$_{\max}D_4 = +34'$
$_{\min}V_6 = Q_7 + 1,6 = -68'$	$_{\max}D_5 = +53'$
$_{\min}V_7 = Q_8 + 1,6 = -87'$	$_{\max}D_6 = +75'$
$_{\min}V_8 = Q_9 + 1,6 = -107'$	$_{\max}D_7 = +99'$
$_{\min}V_9 = Q_{10} + 1,6 = -130'$	$_{\max}D_8 = +126'$
	$_{\max}D_9 = +154'$
	$_{\max}D_{10} = +186'$



Für die Endvertikale ergeben sich, da der größte Stützenwiderstand  $C_{max} = \overline{C'C''}$  (in Fig. 357) = 125,3' und der kleinste  $C_{min} = \overline{CC'}$  (in Fig. 358) = 9,8' ist, die Spannkkräfte

$${}_{min}V_0 = -C_{max} + \frac{1}{2}g_u\lambda = -125,3 + 0,8 = -125',$$

$${}_{max}V_0 = -C_{min} + \frac{1}{2}g_u\lambda = -9,8 + 0,8 = -9'.$$

## § 42.

**Gerberscher Fachwerkbalken mit Gelenkvierecken.**

177. **Einleitung.** Wir gehen jetzt zur Untersuchung eines Gerberschen Balkens über, bei welchem an Stelle eines jeden der bislang vorausgesetzten *wirklichen* Mittelgelenke zwei Stäbe treten, deren Schnittpunkt (nach der in No. 141 gegebenen Erklärung) die Rolle des Gelenkes spielt. In der Fig. 360 ist ein Stück eines solchen Balkens dargestellt worden. Der Koppelträger *II* ist mit den angrenzenden gestützten Teilen *I* und *III* durch je zwei Stäbe verbunden. Die Achsen der Stäbe  $A_o$  und  $A_u$  schneiden sich im Punkte *A*,

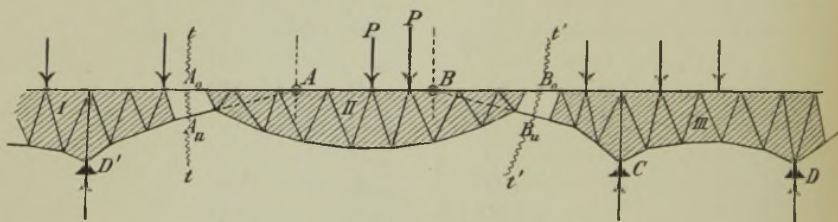


Fig. 360.

diejenigen der Stäbe  $B_o$  und  $B_u$  im Punkte *B*; dann sind *A* und *B* die *Mittelgelenke der Öffnung D'C*.

Im folgenden soll nur die Wirkung senkrechter Lasten unter der Voraussetzung wagerechter Bahnen der beweglichen Auflager untersucht werden, und zwar mit Hilfe der Einflußlinien, welche hier am übersichtlichsten zum Ziele führen.

Zunächst bestimmen wir die am Koppelträger *II* in Fig. 360 angreifenden Kräfte. Gegeben sind die auf *II* wirkenden Lasten, gesucht die Spannkkräfte  $A_o$ ,  $A_u$ ,  $B_o$ ,  $B_u$  der gleichbezeichneten Stäbe. Die Mittelkraft *A* aus  $A_o$  und  $A_u$  geht durch das Gelenk *A*, die Mittelkraft *B* aus  $B_o$  und  $B_u$  durch das Gelenk *B*. Beide Mittelkräfte müssen senkrecht gerichtet sein, da *sämtliche* auf den hier betrachteten Gerberschen Balken (der nur *ein* festes Lager besitzt) wirkenden äußeren Kräfte senkrecht sind und mithin den äußeren Kräften links vom Schnitte *tt'* (Fig. 360), sowie den äußeren Kräften rechts von *t't'* nur durch senkrechte Kräfte *A*, beziehungsweise *B* das Gleichgewicht gehalten werden kann. Wir nehmen *A* und *B* positiv an, wenn sie auf den Koppelträger nach *oben*, also auf die Ausleger nach *unten* wirken; beide Kräfte sind nur von den auf den Koppelträger wirkenden Lasten *P* abhängig. Man findet, mit den aus der Fig. 361 ersichtlichen Bezeichnungen, den Einfluß einer Last  $P=1$  mittels der auf die Punkte *B* und *A* bezogenen Momentengleichungen:

$$Al - Pb = 0 \text{ und } Bl - Pa = 0,$$

woraus

$$A = P \frac{b}{l} = 1 \frac{b}{l} \text{ und } B = P \frac{a}{l} = 1 \frac{a}{l}.$$

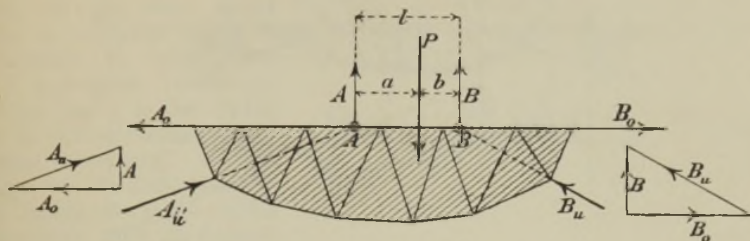


Fig. 361.

Liegt  $P$  rechts von  $B$ , so wird  $b$  negativ, befindet es sich links von  $A$ , so ändert  $a$  das Vorzeichen. Die Einflußlinien für  $A$  und  $B$  sind in den Figuren 363 u. 364 für zwei verschiedene gegenseitige Lagen der Gelenke  $A$  und  $B$  dargestellt worden. Die  $A$ -Linie besteht zwischen  $R_1$  und  $T_1$  aus einer Geraden, welche auf der Senkrechten durch  $A$  und  $B$  beziehungsweise die Ordinaten 1 und 0 abschneidet, und an welche sich links und rechts die den Feldern  $R_1 R_2$  und  $T_1 T_2$  entsprechenden Geraden schließen. Lasten, welche durch  $R_2$  und  $T_2$  gehen, entspricht  $A = 0$ . Ebenso wird die  $B$ -Linie bestimmt. In den Figuren 363 und 364 wurde die  $A$ -Fläche durch Schraffierung hervorgehoben. Aus den Grenzwerten der Kräfte  $A$  und  $B$  lassen sich die größten und kleinsten Spannkkräfte in den Stäben  $A_o$ ,  $A_u$ ,  $B_o$ ,  $B_u$  durch einfache Zerlegung von  $A$  und  $B$  ermitteln.

In den folgenden Untersuchungen, die sich auf das einfache Dreiecknetz beschränken, bezeichnen wir die Spannkkräfte ganz allgemein mit  $S$  und deuten damit an, daß alle zur Bestimmung der Einflußlinien für diese Kräfte gegebenen Regeln sowohl für die Gurtstäbe als auch für die Füllungsstäbe gelten.

**178. Um die Einflußlinien für die Spannkkräfte in den Stäben eines Koppelträgers** (bei dessen Betrachtung wir  $A$  und  $B$  zu den äußeren Kräften rechnen) zu bestimmen, denken wir uns diesen Trägerteil am rechten Ende festgehalten und ermitteln diejenigen Spannkkräfte  $S'$ , welche in den Stäben entstehen, sobald nur zwei Kräfte  $A_o$  und  $A_u$  angreifen, deren Mittelkraft  $A = 1$  ist. In gleicher Weise bestimmen wir die Spannkkräfte  $S''$  für den am linken Ende festgehaltenen und mit  $B = 1$  belasteten schwebenden Teil.

Liegt nun die über den Träger wandernde Last  $P = 1$  rechts von dem Schnitte  $tt$ , welcher den Stab, für dessen Spannkraft  $S$  die Einflußlinie gesucht wird, und höchstens noch zwei andere Stäbe trifft,

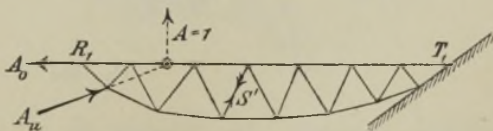


Fig. 362.

so greift links von  $tt$  nur die äußere Kraft  $A$  an, und es entsteht daher  $S = AS'$ , während eine links von  $tt$  sich befindende Last 1 für sich allein die Spannkraft



$S = BS''$  hervorrufft. Sind  $F_1$  und  $F_2$  die Querträger links und rechts vom Schnitte  $tt$  (Fig. 363), so folgt:

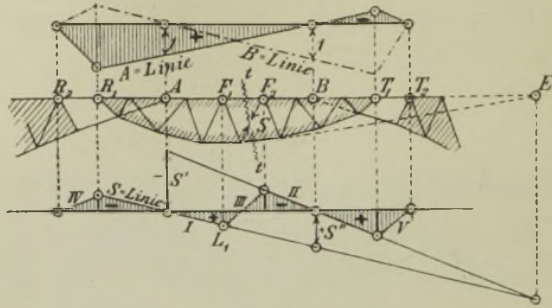


Fig. 363.

Die Ordinaten des rechts von  $E_2$  gelegenen Teiles der Einflußlinie für  $S$  (kurz:  $S$ -Linie) sind gleich den mit  $S'$  multiplizierten entsprechenden Ordinaten der  $\frac{A\text{-Linie}}{B\text{-Linie}}$ .

Durch diesen Satz und durch die Werte  $S'$  und  $S''$  ist die  $S$ -Linie eines jeden Stabes vollständig bestimmt; sie wurde in den Figuren 363 und 364 für eine linkssteigende Diagonale unter Voraussetzung verschiedener gegenseitiger Lagen der Gelenke  $A$  und  $B$  und des Schnittpunktes  $E$  der von  $tt$  getroffenen

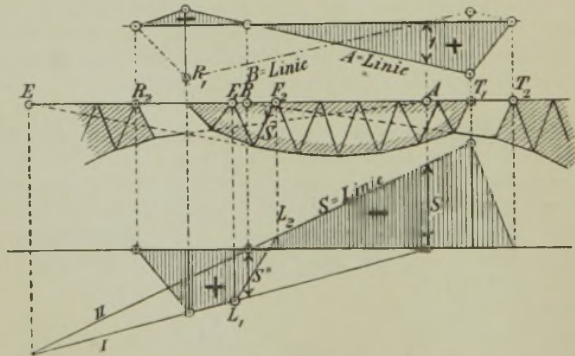


Fig. 364.

Gurtstäbe dargestellt. Die Belastung ist an der oberen Gurtung angreifend gedacht. Mit Hilfe der Werte  $S'$  und  $S''$ , deren erster im vorliegenden Falle positiv ist, während  $S''$  einen Druck bedeutet, wurden die Geraden  $I$  und  $II$  festgelegt; erstere gilt zwischen  $F_1$  und  $R_1$ , letztere zwischen  $F_2$  und  $T_1$ . Den Feldern  $R_2R_1, F_1F_2, T_1T_2$  entsprechen beziehungsweise die Geraden  $IV, III, V$ .

Wir weisen noch besonders auf die ähnlichen Untersuchungen in No. 143 und 175 hin, deren Ergebnisse auch im vorliegenden Falle zur Bestimmung der Geraden *I* und *II* verwendet werden können. Beispielsweise müssen sich *I* und *II* in einem Punkte der Senkrechten durch *E* treffen.

**179. Einflußlinie für die Spannkraft *S* in einem Stabe eines Auslegers.** Wir betrachten das über die Stütze *C* ragende Stück des Trägerteiles *CD* (Fig. 360), denken die Stäbe *B<sub>o</sub>* und *B<sub>u</sub>* durch zwei bis zum Gelenke *B* reichende Stäbe ersetzt (Fig. 365) und bestimmen hierauf diejenigen Spannkraft *S'*, welche eine in *B* angreifende, abwärts gerichtete Last 1 in den Stäben des zu untersuchenden Trägerteiles hervorbringt. Nun gelangen wir zur Einflußlinie für die Spannkraft *S* in irgend einem Stabe durch die folgende einfache Überlegung:

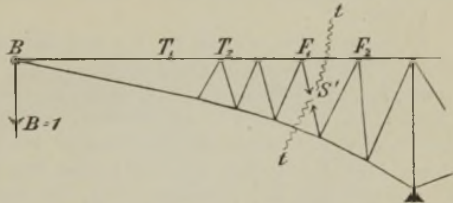


Fig. 365.

Der Einfluß einer Einzelast  $P=1$ , welche auf den in der Fig. 365 dargestellten Träger wirkt und links von dem Felde  $F_1F_2$ , durch das der Schnitt *tt* geht, angreift, ist durch die Ordinate einer Geraden (*I*) gegeben, welche bei *B* die Ordinate *S'* besitzt und deren Nullpunkt *N* senkrecht unter dem Schnittpunkte *E* der beiden Stäbe liegt, die außer dem fraglichen Stabe noch vom Schnitte *tt* getroffen werden. Diese Gerade darf für

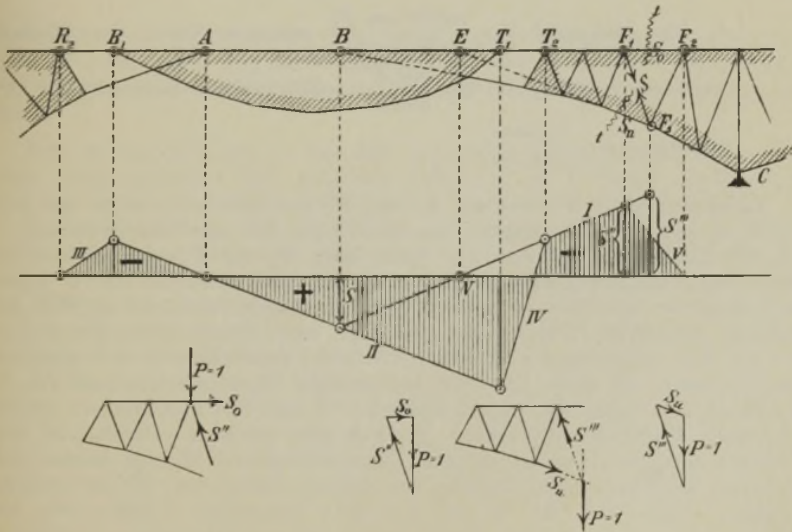


Fig. 366.

den Träger in Fig. 366 natürlich nur zwischen  $T_2$  und  $F_1$  benutzt werden. Ruht die über den Träger wandernde Lasteinheit auf dem anliegenden Koppel-

träger, so übt sie auf den Ausleger einen im Punkte  $B$  angreifenden Druck  $B$  aus und erzeugt die Spannkraft  $S = B \cdot S'$ . Die Ordinaten der links von  $T_1$  gelegenen Teile  $II$  und  $III$  der gesuchten  $S$ -Linie sind also gleich den mit  $S'$  multiplizierten Ordinaten der  $B$ -Linie, während sich die den Feldern  $T_1 T_2$  und  $F_1 F_2$  entsprechenden Teile der  $S$ -Linie mit Hilfe des Satzes ergeben, daß jede Einflußlinie zwischen zwei benachbarten Querträgern eine Gerade ist. Der Nullpunkt von  $II$  entspricht dem Gelenke  $A$ .

In der Figur 366 ist die Einflußlinie für die Spannkraft in einer linkssteigenden Diagonale dargestellt worden. Die Spannkraft  $S'$  ist im vorliegenden Falle positiv.

Es möge noch an die in No. 174 durchgeführten Untersuchungen erinnert werden. Danach kann die Einflußlinie in Fig. 366 auch durch die den Punkten  $F_1$  und  $F_2$  entsprechenden Ordinaten  $S''$  und  $S'''$  der Geraden  $I$  festgelegt werden. Um  $S''$  und  $S'''$  zu erhalten, zerlegt man eine in  $F_1$  angreifend gedachte Last  $P=1$  nach den Richtungen von  $S$  und  $S_0$ , sodann eine in  $F_2$  angreifende Last  $P=1$  nach den Richtungen von  $S$  und  $S_u$ . Auf welche Weise der Sinn von  $S''$  und  $S'''$  bestimmt wird, ist durch die neben die Kräfdreiecke (deren Umfassungssinn ein stetiger sein muß) gesetzten Figuren angedeutet worden.

180. Die Einflußlinie für die Spannkraft in irgend einem Stabe des zwischen den Stützen  $C$  und  $D$  gelegenen Trägereiles (Fig. 367) ist nach Ermittlung der Spannkraft  $S'$  und  $S''$ , welche beziehungsweise mit den in No. 143 eingeführten Spannkraften  $O'$ ,  $U'$ ,  $D'$  und  $O''$ ,  $U''$ ,  $D''$  übereinstimmen, durch den Satz gegeben:

Die Ordinaten des  $\frac{\text{rechts von } F_2}{\text{links von } F_1}$  gelegenen Teiles der Einflußlinie für  $S$  sind gleich den  $\frac{\text{mit } S'}{\text{mit } S''}$  multiplizierten entsprechenden Ordinaten der  $\frac{C\text{-Linie}}{D\text{-Linie}}$ .

Dabei bedeuten, wie früher,  $F_1$  und  $F_2$  die links und rechts von dem Schnitte  $tt$  gelegenen Querträger. Die Einflußlinie für den Stützenwiderstand  $C$  (d. i. die  $C$ -Linie) ist zwischen den Querträgern  $T_2$  und  $T'_2$  eine Gerade ( $I$ ), welche durch die Bedingungen bestimmt ist, daß einer senkrecht über  $C$  liegenden Last  $P=1$  der Wert  $C=1$  entspricht und einer senkrecht über  $D$  angreifenden der Wert  $C=0$ . Es gibt aber diese Gerade auch den Einfluß einer auf dem linksseitigen Koppelträger ruhenden, durch das Gelenk  $B$  gehenden Last Eins an, weil diese Last auf den Ausleger  $T_2 C$  (welchen man sich in der durch die Figur 365 veranschaulichten Weise bis  $B$  verlängert denken kann) einen Druck  $B=1$  ausübt. Da nun eine durch  $A$  gehende Last den Wert  $B=0$  erzeugt, so ist sie auch ohne Einfluß auf  $C$ , und hieraus und aus einer ähnlichen, den Einfluß von Lasten rechts von  $T'_2$  betreffenden Überlegung ergibt sich die in der Fig. 367a dargestellte  $C$ -Linie. Sie besteht aus der Geraden  $I$ , den beiden Geraden  $II$  und  $III$ , welche beziehungsweise durch die Schnittpunkte der  $I$  mit den Senkrechten durch die Gelenke  $B$  und  $B'$  gehen, und deren Nullpunkte den Gelenken  $A$  und  $A'$  entsprechen, schließlich aus den Geraden  $IV$ ,  $V$ ,  $VI$ ,  $VII$ , gehörig zu den Feldern  $R, R_1$ ,  $T_1 T_2$ ,  $T'_2 T'_1$ ,  $R'_2 R'_1$ . In Fig. 367 wurden zu beiden Seiten der Öffnung  $CD$  verschiedene gegenseitige Lagen der Mittelgelenke  $A$  und  $B$ ,  $A'$  und  $B'$  vorausgesetzt.



Ganz ebenso wird die (in der Fig. 367a strichpunktierte) Einflußlinie für den Stützenwiderstand  $D$  bestimmt, und nun unterliegt es keinerlei Schwierigkeit mehr,

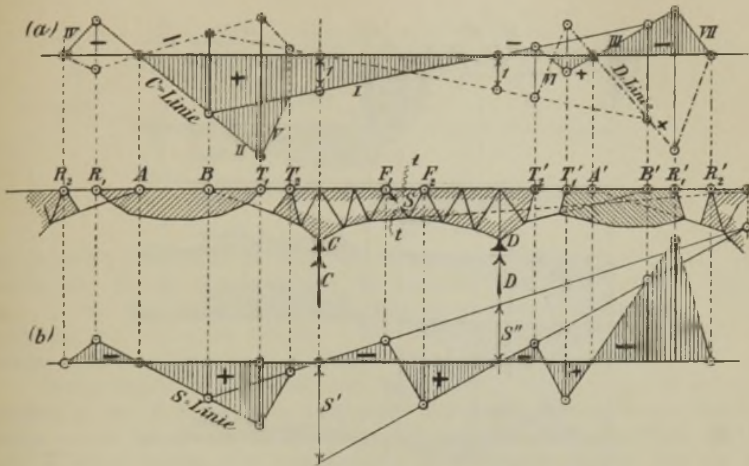


Fig. 367.

die Einflußlinie für die Spannkraft  $S$  in irgend einem Füllungsstabe mit Hilfe von  $S'$  und  $S''$  aufzutragen. Fig. 367 b enthält die Anwendung unseres Verfahrens auf die Ermittlung der Einflußlinie für die Spannkraft  $S$  in einer linkssteigenden Diagonale.

181. Es soll noch der in Fig. 368 dargestellte Fachwerkbalken untersucht werden, dessen gestützter Teil  $AG_1$  drei Auflager  $A, B, C$  besitzt. Zwischen  $B$  und  $C$  liegt ein von senkrechten Füllungsstäben begrenztes Feld ohne Diagonale.

Um die *Einflußlinie für den Stützenwiderstand  $C$*  zu bestimmen, wird die über den Träger wandernde Last *Eins* zuerst irgendwo zwischen  $C$  und  $G_1$  angenommen und die Summe der auf das Trägerstück  $CG_1$  wirkenden senkrechten Kräfte gleich Null gesetzt. Da die Spannkraft  $S_0$  im Stabe  $S_0$  wagerecht ist, so ergibt sich  $C = 1$ , und hierdurch ist die in der Fig. 368 a dargestellte *C-Linie* bestimmt. Lasten links von  $B$  sind ohne Einfluß auf den Widerstand  $C$ .

Die *Einflußlinien für die Stützenwiderstände  $A$  und  $B$*  sind in den Figuren 368 b und c angegeben; die Gerade  $I$  der ersteren besitzt bei  $A$  die Ordinate 1, diejenige der letzteren bei  $B$  die Ordinate 1; in beiden Figuren sind die Geraden  $I$  und  $II$  einander parallel; denn so lange der Trägerteil  $AB$  nur zwischen  $A$  und  $B$  belastet ist, verhält er sich wie ein einfacher Balken; greift die Last *Eins* in  $G_1$  an, so erzeugt sie:

$$S_0 = +1 \frac{e}{h} \quad \text{und} \quad A = -S_0 \frac{h}{l} = -1 \frac{e}{l},$$

$$\text{ferner } B = -A = +1 \frac{e}{l}.$$

Um die *Einflußlinie für die Spannkraft in irgend einem Stabe des Trägerteiles  $AB$*  zu finden, betrachte man  $AB$  zuerst als einfachen Balken und verfähre



innerlich statisch bestimmt. Um beispielsweise die Spannkraften  $D_1, D_2, \dots, D_8$  im Stabe 1 und in den Diagonalen 2, 3, . . . . 8 zu finden, führe man zuerst

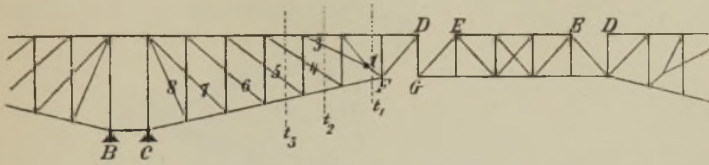


Fig. 369.

den Schnitt  $t_1$ , bestimme  $D_1$  nach dem *Ritterschen* Verfahren, hierauf  $D_2$  und  $D_3$ , welche mit  $D_1$  im Gleichgewichte sein müssen, und führe nun die Schnitte  $t_2, t_3, \dots$ , um der Reihe nach mittels *Ritterscher* Momentengleichungen die Spannkraften  $D_4, D_5, \dots$  zu erhalten. Wir werden uns im letzten Abschnitte dieses Bandes noch eingehender mit derartigen Fachwerken beschäftigen.

Hinzuzufügen ist, daß bei der Niagarabrücke die Knoten  $E$  und  $D$ , dergleichen  $G$  und  $F$  durch Stäbe miteinander verbunden wurden, deren Befestigungsbolzen jedoch bei  $E$  und  $G$  durch länglich geformte Löcher greifen. Es ist deshalb an diesen Stellen eine Verschiebung der Stabenden möglich, und der Koppelträger verhält sich wie ein einfacher Balken.

## § 43.

**Gerberscher Balken mit Hängegurtung.**

182. Fig. 370 stellt einen in neuerer Zeit öfter ausgeführten Gerberschen Balken mit Hängegurtung dar. Die gestrichelten Gurtstäbe sind an dem einen Ende durch Bolzen, welche durch längliche Löcher gesteckt sind, befestigt; sie sind wirkungslos und werden nur mit Rücksicht auf das bessere Aussehen des Trägers angeordnet. Führt man durch das erste Feld rechts von der Mittelstütze einen Schnitt, so kann man die Spannkraft  $S'_1$  in dem obersten Kettengliede aus der Momentengleichung für den Stützpunkt  $B$  bestimmen. Zerlegt man  $S'_1$  nach wagerechter und senkrechter Richtung (Fig. 371), so findet man für den Einfluß einer am Ausleger  $BG_1$  angreifenden Last  $P$  auf die wagerechte Seitenkraft  $H$  den Wert

$$H = P \frac{\xi'}{f}.$$

Die Einflußfläche für  $H$  ist demnach ein Dreieck (Fig. 370 a) von der Höhe  $1 \frac{l'}{f}$ . Sind Ausleger und Koppelträger unbelastet, so ist  $H = 0$ .

Lasten, welche auf das Trägerstück  $AB$  wirken, üben also keinen Einfluß auf  $H$  aus. Nach Ermittlung von  $H_{max}$  findet man die Spann-



kräfte  $S$  und  $S'$  in der Hängegurtung nach Fig. 370b aus der Bedingung, daß die wagerechten Projektionen dieser Kräfte sämtlich

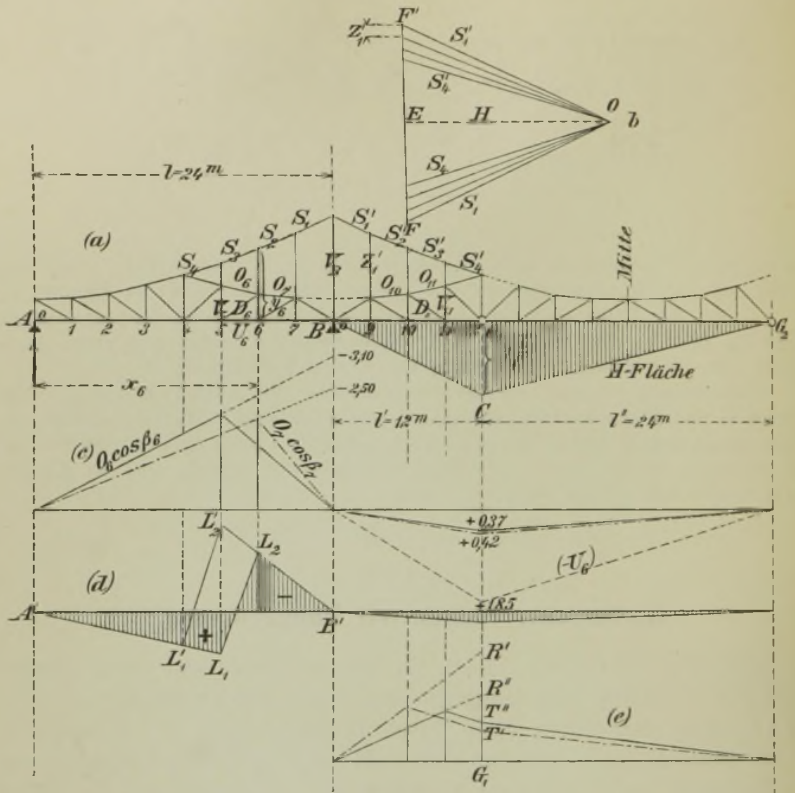


Fig. 370.

gleich  $H$  sind. Die Strecken, welche die  $S'$  und  $S$  auf der Vertikalen  $F'F$  abschneiden, stellen die Spankräfte  $Z$  in den Hängestangen dar und die Strecke  $F'F$  den Druck in der Vertikalen  $V_B$ .

Die Einflußlinien für die Spankräfte  $O$ ,  $U$ ,  $D$  und  $V$  der gegliederten Scheibe  $AB$  verlaufen zwischen  $A$  und  $B$  genau wie beim einfachen Balken; zwischen  $B$  und  $G_2$  aber ist jede Einflußfläche ein Dreieck, dessen Spitze in der Senkrechten durch  $G_1$  liegt und das durch den Einfluß einer in  $G_1$  angreifenden Last 1 bestimmt ist. Zu den in No. 143 benutzten Kräfteplänen für die Zustände  $A=1$  und  $B=1$  tritt noch ein dritter über den Träger-Teil  $ABG_1$  auszuwehnender Kräfteplan, für dessen Herstellung die folgende kurze An-

weisung genügt. Die in  $G_1$  angreifende Last 1 erzeugt am Auflager  $A$  den Widerstand  $A = -1 \frac{l'}{l}$  und in der Hängegurtung den Horizontalzug  $H = 1 \frac{l'}{f}$ , ein Wert, der auch durch Zerlegung der Last 1

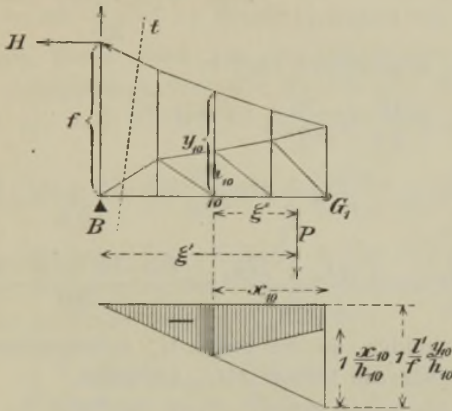


Fig. 371.

nach den Richtungen der in Fig. 371 vom Schnitte  $t$  getroffenen drei Stäbe zeichnerisch dargestellt werden kann. Nun lassen sich nach Fig. 370b die Spannkkräfte in den Kettenstäben und den Hängestäben ermitteln, und damit sind alle an den Dreiecknetzen  $AB$  und  $BG_1$  angreifenden Kräfte bestimmt. Für die Dreiecknetze werden Cremonasche Kräftepläne gezeichnet.

Sehr schnell führt auch das folgende rechnerische Verfahren, das durch ein Zahlenbeispiel erläutert werden möge, zum Ziele. Es sei  $l = 24^m$ ,  $l' = 12^m$ ,  $l'' = 24^m$ ,  $\lambda$  (Feldweite)  $= 3^m$ . Die Höhen der Dreiecknetze seien in den Punkten

{	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
[	$h = 2,0$	$2,1$	$2,4$	$2,9$	$3,6$	$2,9$	$2,4$	$2,1$	$2,0$	$2,1$	$2,4$	$2,9$	$3,6^m$

und die von der Geraden  $ABG_1$  aus gemessenen Ordinaten der Hängegurtung in den Punkten

5	6	7	8	9	10	11
$y = 4,5$	$5,6$	$6,9$	$8,4$	$6,9$	$5,6$	$4,5^m$ .

Gesucht sei zunächst die Einflußlinie für  $O_7 \cos \beta_7$ , wo  $\beta_7$  den Neigungswinkel von  $O_7$  gegen die Wagerechte bedeutet. Da

$$O_7 \cos \beta_7 = - \frac{M_6}{h_6}$$

ist, so erzeugt  $B = 1$  die Spannkraft

$$O_7 \cos \beta_7 = -1 \frac{2 \cdot 3,0}{2,4} = -250'$$

und durch diesen Wert ist die strichpunktierte Einflußlinie (Fig. 370c) für  $O_7 \cos \beta_7$  im Gebiete  $AB$  bestimmt. Die ausgezogene Linie gehört zu  $O_6 \cos \beta_6$ ; sie ist festgelegt durch  $-1 \frac{3 \cdot 3,0}{2,9} = -3,10$ . Nun erzeugt eine in  $G_1$  angreifende Last 1:

$$A = -0,5, H = 1 \frac{12}{8,4} = \frac{10}{7}$$

$$O_7 \cos \beta_7 = -\frac{M_6}{h_6} = -\frac{Ax_6 + Hy_6}{h_6} = \frac{0,5 \cdot 18 - \frac{10}{7} \cdot 5,6}{2,4} = +0,42$$

$$O_6 \cos \beta_6 = -\frac{M_5}{h_5} = -\frac{Ax_5 + Hy_5}{h_5} = \frac{0,5 \cdot 15 - \frac{10}{7} \cdot 4,5}{2,9} = +0,37$$

und durch diese beiden, an der Stelle  $G_1$  aufzutragenden Werte sind die Einflußlinien für das Gebiet  $BG_2$  bestimmt.

Führt man nun einen Schnitt durch die Stäbe  $S_2$ ,  $O_7$ ,  $V_6$  und  $U_6$ , und setzt man die Summe der am abgeschnittenen Fachwerksteile angreifenden wagerechten Kräfte gleich Null, so erhält man

$$U_6 + O_7 \cos \beta_7 + H = 0$$

und hieraus folgt

$$-U_6 = O_7 \cos \beta_7 + H.$$

Die Einflußlinie für  $(-U_6)$  stimmt also zwischen  $A$  und  $B$  mit der Einflußlinie für  $O_7 \cos \beta_7$  überein, weil Lasten, die am Trägerstück  $AB$  angreifen, in den Kettenstäben keine Beanspruchungen erzeugen. Liegt

die Last 1 in  $G_1$ , so erzeugt sie  $H = \frac{10}{7} = 1,43$  und  $-U_6 = +0,42 + 1,43 = 1,85$  und durch diesen Wert ist der zur Trägerstrecke  $BG_2$  gehörige, in Fig. 370c gestrichelte Teil der  $(-U_6)$ -Linie bestimmt.

Bedeutet  $\varphi_6$  den Neigungswinkel der Diagonale  $D_6$ , so muß sein

$$D_6 \cos \varphi_6 = O_7 \cos \beta_7 - O_6 \cos \beta_6.$$

Der Unterschied der für  $O_7 \cos \beta_7$  und  $O_6 \cos \beta_6$  gezeichneten Einflußflächen ist also gleich der Einflußfläche für  $D_6 \cos \varphi_6$ . Diese Fläche wurde in Fig. 370d — im doppelten Maßstabe — auf eine wagerechte Nulllinie zurückgeführt.

Jetzt läßt sich auch sofort die Einflußfläche für den Wert  $(-V_5 \cotg \varphi_6)$  angeben. Solange nämlich der Knotenpunkt unbelastet ist, muß

$$V_5 = -D_6 \sin \varphi_6,$$



also

$$-V_5 \cotg \varphi_6 = D_6 \cos \varphi_6$$

sein; und da ferner die  $V_5$ -Linie von Stütze  $B$  bis Knotenpunkt 5 geradlinig verlaufen muß, und im Felde 4—5 ihren Nullpunkt besitzt, so braucht man, um aus der  $D_6 \cos \varphi_6$ -Linie die  $(-V_5 \cotg \varphi_6)$ -Linie zu erhalten, nur die Gerade  $L_1 L_2$  durch die Gerade  $L'_1 L'_2$  zu ersetzen.

In derselben Weise wird bei der Untersuchung des Auslegers verfahren; es genügt auch hier die Berechnung der  $O \cos \beta$ -Linien. Eine zwischen  $G_1$  und Knoten 10 liegende Last  $P=1$  (Fig. 371) erzeugt

$$O_{10} \cos \beta_{10} = -\frac{M_{10}}{h_{10}} = -\left(\frac{Hy_{10}}{h_{10}} = 1 \frac{\xi''}{h_{10}}\right)$$

und aus dieser Gleichung folgt, daß die in Fig. 371 schraffierte Fläche den zum Gebiete  $BG_1$  gehörenden Teil der Einflußfläche für  $O_{10} \cos \beta_{10}$  darstellt; sie ist bestimmt durch die Strecken

$$1 \frac{l'}{f} \frac{y_{10}}{h_{10}} \quad \text{und} \quad 1 \frac{x_{10}}{h_{10}} \quad \text{für} \quad \xi'' = x_{10}.$$

In Fig. 370e sind die Einflußlinien für  $O_{10} \cos \beta_{10}$  und  $O_{11} \cos \beta_{11}$  in  $\frac{2}{3}$  des der Fig. 370c zu Grunde gelegten Maßstabes aufgetragen worden; sie sind bestimmt durch die Strecken

$$\overline{G_1 R'} = \frac{10}{7} \cdot \frac{5,6}{2,4} = 3,33, \quad \overline{G_1 R''} = \frac{10}{7} \cdot \frac{4,5}{2,9} = 2,22$$

$$\overline{R' T'} = \frac{6,0}{2,4} = 2,50, \quad \overline{R'' T''} = \frac{3,0}{2,9} = 1,03.$$

Der Unterschied beider Flächen ist Einflußfläche für  $D_{11} \cos \varphi_{11}$ , aus welcher sich die  $V_{11}$ -Fläche mittels Ziehen einer Geraden ableiten läßt.

Hinsichtlich der aus der Form der Einflußlinien für die kürzeste Berechnung der größten und kleinsten Spannkkräfte zu ziehenden Schlüsse verweisen wir auf die früheren Untersuchungen. Vergl. namentlich § 19, Seite 157.

## XI. Abschnitt.

## Der Fachwerkbogen mit drei Gelenken.

## § 44.

## Anwendung der Verfahren von Culmann und Ritter.

Wir setzen voraus, daß die beiden gegliederten Scheiben, aus denen der Fachwerkbogen mit drei Gelenken besteht, einfache Dreiecknetze sind und erläutern zunächst die

183. Anwendung der Ritterschen Momentengleichungen. Auf den Bogen mögen beliebig gerichtete Lasten wirken. Die von ihnen

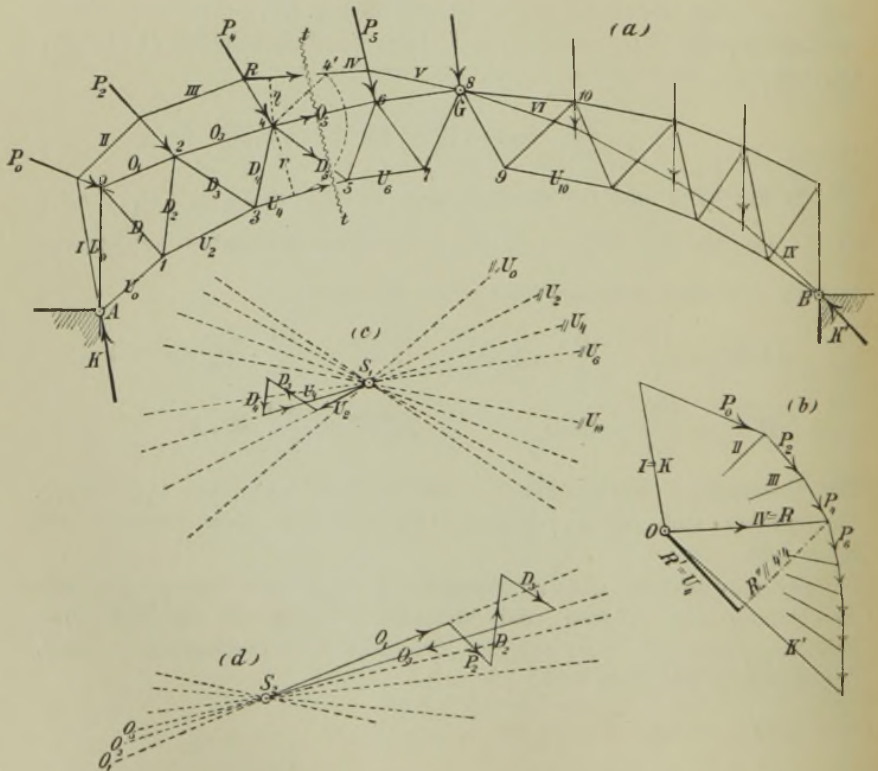


Fig. 372.

hervorgerufenen Stützenwiderstände seien bekannt; auch sei ein durch die drei Gelenke  $A, G, B$  gehendes Seilpolygon  $I II III \dots$

der äußeren Kräfte gegeben\*). Gesucht sei die Spannkraft  $U_4$  in Fig. 372.

Durch die Stäbe  $U_4, D_5, O_5$  wird ein Schnitt  $tt$  geführt; er trifft die Seilpolygonseite  $IV$ , welche die Lage der Mittelkraft  $R$  der links von  $tt$  wirkenden äußeren Kräfte bestimmt, während der entsprechende Seilstrahl  $\overline{IV} = R$  die Größe und den Sinn dieser Kraft angibt. Bezeichnen  $\eta$  und  $r$  die auf den Knotenpunkt 4 als Drehpunkt bezogenen Hebelarme von  $R$  und  $U_4$ , so lautet die Momentengleichung  $R\eta - U_4r = 0$ , und es folgt der leicht durch Zeichnung zu bestimmende Ausdruck  $U_4 = \frac{R\eta}{r}$ .

Ein anderer Weg ist der folgende: Ist  $\eta < r$ , so beschreibe man um den Drehpunkt 4 mit  $r$  einen Kreisbogen, bestimme dessen Schnittpunkt  $4'$  mit der Seilpolygonseite  $IV$  und zerlege  $R$  in zwei im Punkte  $4'$  angreifende Seitenkräfte  $R'$  und  $R''$ , deren erste senkrecht auf der Geraden  $4'4$  steht, während  $R''$  mit dieser Geraden zusammenfällt. Die Momentengleichung geht dann über in  $R'r - U_4r = 0$  und liefert  $U_4 = R'$ . Ist  $\eta > r$ , so zerlege man  $R$  in einem beliebigen Punkte seiner Richtung in eine durch 4 gehende Seitenkraft  $R''$  und eine zweite, welche den um 4 mit  $r$  beschriebenen Kreisbogen berührt. Fig. 373. Man findet dann wieder  $U_4 = R'$ .

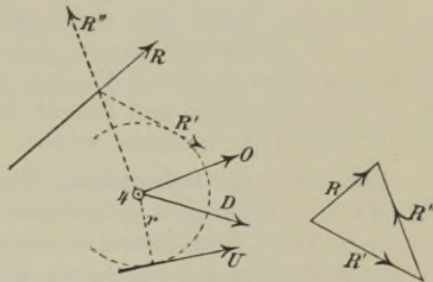


Fig. 373.

In gleicher Weise werden die Kräfte  $O$  gefunden. Zur Ermittlung der Spannkraft  $D$  in den Füllungsstäben ist indes das vorstehend beschriebene Verfahren, wegen der in der Regel unbequem gelegenen Drehpunkte, selten geeignet, und es empfiehlt sich deshalb, die  $D$  den Kräftepolygonen zu entnehmen, welche sich für die Knoten der unteren oder oberen Gurtung übersichtlich aufzeichnen lassen, sobald die Spannkraft  $U$  oder  $O$  gegeben sind. Das Verfahren ist in den Figuren 372c und d dargestellt worden; die dort von Parallelen zu den Gurtstäben  $O$  und  $U$  gebildeten Strahlenbüschel  $S_1$  und  $S_2$  lassen sich für alle zu untersuchenden Belastungsfälle verwenden. Es genügt natürlich, die eine der beiden Figuren zu zeichnen; entwirft man aber beide, so erhält

\*) Vergl. No. 116, 117, 158.



man jede Kraft  $D$  zweimal und ist dann im stande, durch Ver gleichung der Ergebnisse, die Güte der Zeichnung zu prüfen\*).

Das beschriebene Verfahren kann u. a. zur Ermittlung der in einem Dach bender durch den Winddruck und die ständige Belastung hervorgerufenen Spann kräfte empfohlen werden und ist dann häufig der Anwendung eines *Cremonaschen* Kräfteplanes (§ 27) vorzuziehen; denn bei Fachwerken mit größerer Stabzahl pflanzen sich bei der letzteren Bestimmungsweise die Zeichenfehler zuweilen in recht unliebsamer Weise fort, und es ist zum mindesten empfehlenswert, von Zeit zu Zeit eine Spannkraft durch unmittelbare Bestimmung derselben zu prüfen. Bei Bogenträgern ist aber im allgemeinen die Feldweite geringer und mithin die Stab zahl größer als bei Balkenträgern von gleicher Stützweite.

Auch das folgende, dem *Cremonaschen* ähnliche Verfahren ver dient hier angeführt zu werden. Man zeichnet der Reihe nach die Kräftepolygone für die Knoten  $A$ ,  $0$ ,  $1$ ,  $2$  . . . und bestimmt nach einander:  $D_0$  und  $U_0$ ,  $D_1$  und  $O_1$ ,  $D_2$  und  $U_2$ , wobei man aber, an statt die Kräftepolygone auf die im § 27 beschriebene Weise zu einer, jede Spannkraft nur einmal enthaltenden Figur zu vereinigen, ab wechselnd die Strahlenbüschel  $S_1$  und  $S_2$  benutzt\*\*). Zuweilen wird einer der Werte  $U$  und  $O$  in der oben gezeigten Art mittels einer *Ritterschen* Momentengleichung geprüft.

Wird der Bogen nur durch senkrechte Lasten beansprucht, so können die größten positiven und negativen Momente  $M_m$  für die Knotenpunkte  $m$  auch auf die im § 24 angegebene Weise in der Form  $M_m = H\eta_m$  dargestellt und hierauf die Grenzwerte der Spannkraft  $O$  und  $U$  nach § 31 bestimmt werden.

184. Soll das *Culmannsche* Verfahren zur Ermittlung der in Fig. 372 vom Schnitte  $tt$  getroffenen Gurtstäbe benutzt werden, so ist nur die in No. 12 behandelte Aufgabe zu lösen: Drei Kräfte  $O$ ,  $U$  und  $D$  zu finden, welche der gegebenen Kraft  $R$  das Gleichgewicht halten.

Die früher gegebene Lösung der Aufgabe stößt bei ihrer Anwen dung auf Bogenträger zuweilen auf Schwierigkeiten. So ist es zum Beispiel in der Fig. 372 zwar möglich, den Schnittpunkt ( $RD$ ) von  $R$  und  $D$  scharf zu bestimmen; die Schnittpunkte ( $RO$ ), ( $RU$ ) und ( $OU$ ) hingegen fallen häufig außerhalb des Zeichenblattes. Man ersetze dann  $R$  in irgend einem Punkte seiner Richtung durch zwei Seitenkräfte  $R'$  und  $R''$ , welche durch die Schnittpunkte ( $OD$ ) und ( $UD$ ) gehen, und

\*) Um genaue Werte zu erhalten, scheue man ja die kleine Mühe nicht, die Strahlenbüschel  $S_1$  und  $S_2$  in Fig. 372 in der auf Seite 308 angegebenen Weise durch Rechnung festzulegen. Parallelen zu den kurzen Gurtstäben zu ziehen, ist nach den Erfahrungen des Verfassers unbedingt zu verwerfen.

\*\*) Es stimmt dieses Verfahren im wesentlichen mit demjenigen überein, welches zuerst von *Lang* im Civilingenieur 1882 auf Tafel XIV zur Untersuchung eines sichelförmigen Balkens (*Dachbinder*) angewendet worden ist.

zerlege  $R'$  nach den Richtungen von  $O$  und  $D$ , ferner  $R''$  nach den Richtungen von  $U$  und  $D$ . Man gelangt dann zu dem in der Fig. 374 dargestellten Kräftepolygone.

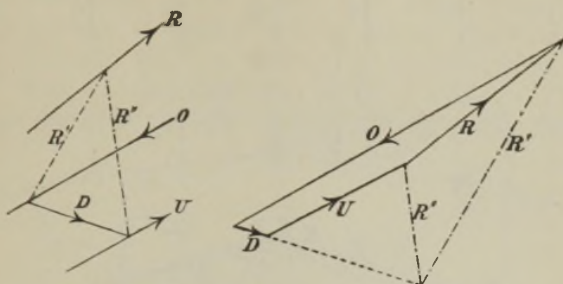


Fig. 374.

Es soll noch eine oft benutzte Anwendung des *Culmannschen* Verfahrens zur Ermittlung der durch eine *gleichförmige bewegliche Belastung* hervorgerufenen Grenzwerte der Spannkkräfte an einem Beispiele erläutert werden. Die Feldweiten seien gleich groß vorausgesetzt, und die Belastung eines Feldes werde mit  $p\lambda = P$  bezeichnet. Die Zeiger 1, 2, 3, . . . . in der Figur 375 deuten also nur an, daß die gleich großen Lasten  $P_1, P_2, P_3 \dots$  in den Knoten 1, 2, 3 . . . . angreifen.

Zuerst werden die von jeder einzelnen Last herrührenden, in  $A$  und  $B$  angreifenden Stützenwiderstände  $K_1, K_2, K_3, \dots$  und  $K'_1, K'_2, K'_3, \dots$  gesondert bestimmt. Um z. B.  $K_2$  und  $K'_2$  zu erhalten, wird  $P_2$  mit der Kämpferdrucklinie in 2 zum Schnitte gebracht und hierauf die von  $A$  aus auf einer Senkrechten aufgetragene Last  $P$  nach den Richtungen  $A2$  und  $B2$  zerlegt. Es liegen dann die Endpunkte von  $K_1, K_2, K_3, K_4, K_5$  auf einer Geraden, desgl. die Endpunkte von  $K'_5, K'_6, K'_7, K'_8, K'_9$ . Nach Bestimmung sämtlicher  $K$  und  $K'$  werden die in  $A$  angreifenden Stützenwiderstände in der Reihenfolge  $K_1, K_2 \dots$  zu einem Polygone  $LN$  zusammengesetzt, die in  $B$  angreifenden in der Reihenfolge  $K'_9, K'_8 \dots$  zu einem Polygone  $L'N^*$ .

Jetzt kann zur Ermittlung der Spannkkräfte geschritten werden. Gesucht sei z. B. die Spannkraft  $O_3$ , welche dem Momente  $M_3$  für den gegenüberliegenden Knoten 3 proportional ist und den größten positiven oder den größten negativen Wert annimmt, je nachdem der Träger so belastet wird, daß  $_{min}M_3$  oder  $_{max}M_3$  entsteht. Legt man nun durch  $A$  und den Knoten 3 eine Gerade, welche die Kämpfer-

\*) Für Fig. 375b wurde ein kleinerer Kräftemaßstab gewählt wie für Fig. 375a.  
Müller-Breslau, Graphische Statik. I.

drucklinie in  $E$  schneidet, so ist die Senkrechte durch  $E$  nach § 24 eine Belastungsscheide; jede Last rechts von  $E$  erzeugt ein negatives

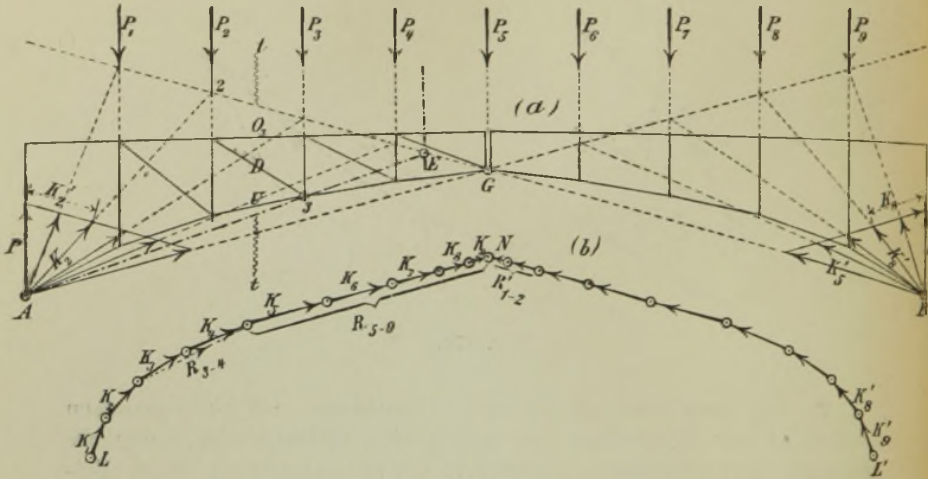


Fig. 375.

$M_3$ , jede Last links ein positives. Um also den größten Zug  $O_3$  zu erhalten, werden alle Lasten links von  $E$  beseitigt. Es greift dann am Trägerteile links vom Schnitte  $tt$  nur eine äußere Kraft an, nämlich die durch  $A$  gehende Mittelkraft  $R_{5-9}$  der Widerstände  $K_5$ ,  $K_6$ , . . . bis  $K_9$ , und mit dieser müssen die ebenfalls am linken Trägerteile angreifenden Spannkraften  $O$ ,  $U$ ,  $D$  im Gleichgewichte sein. Die Ermittlung der letzteren Kräfte erfolgt nun nach Fig. 374.

Um  $_{min}O_3$  zu erhalten, ist der Träger rechts von  $E$  zu entlasten; die verbleibenden Lasten werden in die durch den Schnitt  $tt$  geschiedenen Gruppen  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_3$ ,  $P_4$  getrennt, deren Einflüsse gesondert bestimmt und schließlich addiert werden. Wirken nur  $P_1$  und  $P_2$ , so zeichnet man das Kräftepolygon für die rechts vom Schnitte  $tt$  wirksamen Kräfte  $O$ ,  $U$ ,  $D$ ,  $R'_{1-2}$ , wobei  $R'_{1-2}$  die in  $B$  angreifende Mittelkraft aus  $K'_1$  und  $K'_2$  ist, und um den Einfluß von  $P_3$  und  $P_4$  zu erhalten, wird der linke Trägerteil betrachtet, an welchem nur die äußere Kraft  $R_{3-4}$ , d. i. die Mittelkraft aus  $K_3$  und  $K_4$  angreift.

Auf dem beschriebenen Wege können auch die größten Spannkraften in den Füllungsstäben (für welche die ungünstigste Belastung im folgenden § mit Hilfe der Einflußlinien ermittelt werden soll) bestimmt werden; doch halten wir das ganze Verfahren für wenig zweckmäßig, weil es zu sehr unübersichtlichen und deshalb schwierig zu prüfenden Kräfteplänen führt.



§ 45.

Belastung durch senkrecht gerichtete Kräfte.

185. Einflußlinien. Wir setzen den Träger zunächst nur links vom Scheitelgelenke  $G$  belastet voraus, denken den Stützenwiderstand  $K'$  in der Richtung  $BG$  von  $B$  bis nach  $G$  verschoben und zerlegen  $K$  und  $K'$  in die senkrechten Seitenkräfte  $A'$  und  $B'$  und in die entgegengesetzt gleichen, in die Gerade  $AG$  fallenden Seitenkräfte  $Q$ ,

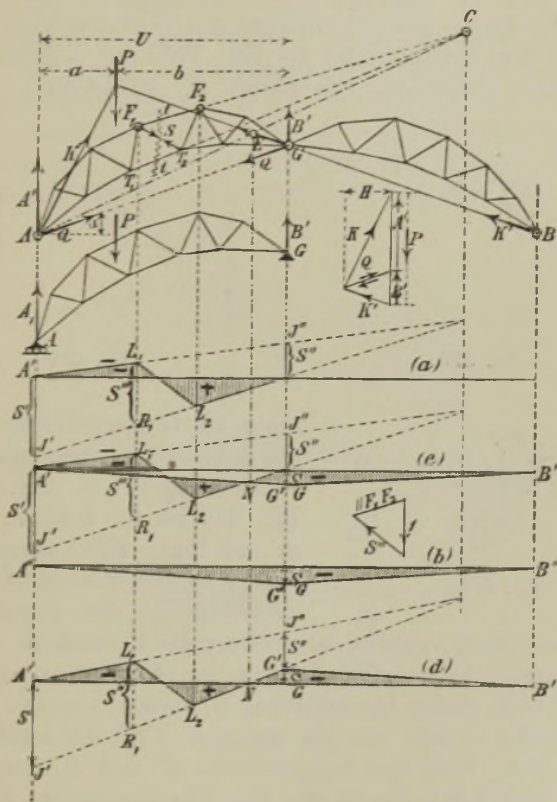


Fig. 376.

Fig. 376. Wäre  $Q = 0$ , so würde sich der Trägerteil  $AG$  wie ein einfacher Balken verhalten, und man könnte dann die Einflußlinie für irgend eine Spannkraft  $S$  (gleichgültig, ob diejenige eines Füllungs- oder Gurtstabes) auf die im § 30 beschriebene Weise mit Hilfe der den Belastungszuständen  $A' = 1$  und  $B' = 1$  (Fig. 377 und 378) ent-

sprechenden Spannkraften  $S'$  und  $S''$  zeichnen;\* ) sie ist in der Figur 376a für einen linkssteigenden Füllungsstab unter der Voraussetzung eines positiven  $S'$  und eines negativen  $S''$  dargestellt worden.

Um nun den Einfluß der beiden Kräfte  $Q$  zu bestimmen, beachte man, daß, wegen  $Q = H \sec \alpha$  (wo  $\alpha =$  Neigungswinkel der Geraden  $AG$ ), der von  $Q$  herrührende und dieser Kraft proportionale Teil der Spannkraft  $S$  auch proportional  $H$  sein muß, daß also der noch fehlende, die Wirkung der Kräfte  $Q$  darstellende Teil der Einflußfläche ein Dreieck ( $A''G'B''$  in Fig. 376b) ist, dessen Spitze dem Gelenke  $G$  entspricht.\*\* ) Dieses Dreieck, welches mit Berücksichtigung des Vorzeichens zu der Einflußfläche in Fig. 376a zu addieren ist, läßt sich mit Hilfe derjenigen Spannkraft  $S_G$  bestimmen, welche von

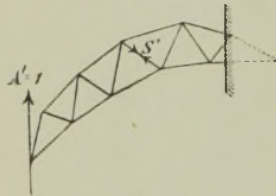


Fig. 377.

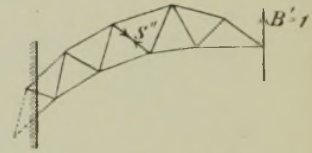


Fig. 378.

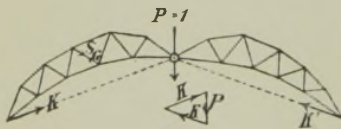


Fig. 379.

einer in  $G$  angreifenden Last 1 im fraglichen Stabe hervorgerufen wird (Belastungsfall in Fig. 379). In Fig. 376 ist  $S_G$  negativ; so daß die in der Figur 376c dargestellte Einflußfläche für  $S$  entsteht. Man kann

auch die in der Figur 376d angegebene Anordnung wählen, bei welcher die Einflußlinie  $A'L_1L_2G'B'$  auf eine gerade Achse  $A'B'$  bezogen ist; hier sollen positive Werte  $S'$ ,  $S_G$ ,  $S''$  nach unten hin aufgetragen werden, negative Werte nach oben, die beiden ersten von der Geraden  $A'B'$ , der letzte Wert vom Punkte  $G'$  aus. Sind also beispielsweise  $S'$  und  $S_G$  positiv, und  $S''$  negativ, so ergibt sich die in der Fig. 380 dargestellte Fläche.

Bei bequemer Lage des Schnittpunktes  $C$  der beiden Stäbe, welche der Schnitt  $tt$  außer  $S$  noch trifft, kann die Ermittlung eines der beiden Werte  $S'$ ,  $S''$  gespart und z. B. die Gerade  $A'L_1$  mit Hilfe der

\*) In den Figuren 377 und 378 denke man sich den Träger rechts oder links von der anschräftigten Geraden festgehalten.

\*\*) Vergl. No. 113. Dort ist gezeigt, daß die Einflußfläche für  $H$  ein Dreieck ist.

Bedingung festgelegt werden, daß sich die Geraden  $A'L_1$  und  $J'L_2$  auf der Senkrechten durch  $C$  schneiden müssen. Aber auch die übrigen im § 30 nachgewiesenen Eigenschaften der Einflußlinien für die Spannkraften einfacher Balken lassen sich zur Bestimmung oder Prüfung der Einflußfläche in Fig. 376a sowie des Liniengebildes in Fig. 376d benutzen. So ist beispielsweise für den in Fig. 376 behandelten Fall eines linkssteigenden Füllungsstabes und einer an der oberen Gurtung angreifenden Belastung die Länge der Strecke  $L_1R_1$  gleich der Größe einer Spannkraft  $S''$ , die sich durch Zerlegung der Last  $P=1$  nach den Richtungen der Stäbe  $F_1F_2$  und  $S$  ergibt.

Ein weiteres wichtiges Gesetz folgt aus der Bedingung, daß eine in der Fig. 376 durch den Schnittpunkt  $E$  der Geraden  $AC$  und  $BG$  gehende Last die Spannkraft  $S=0$  erzeugt, weil sie am linken Auflager einen durch den Punkt  $C$  gehenden Stützenwiderstand hervorruft. Hieraus folgt aber, daß sich die Geraden  $J'L_2$  und  $A'G'$  in Fig. 376c und ebenso die Geraden  $J'L_2$  und  $A'B'$  in der Fig. 376d auf der

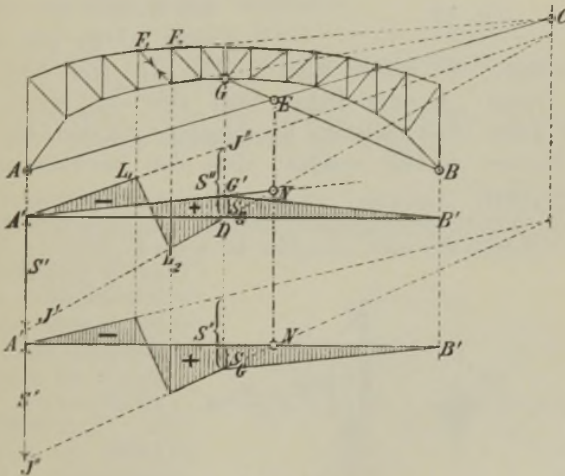


Fig. 380.

Senkrechten durch  $E$  schneiden müssen. Dies ist auch dann der Fall, wenn  $E$  unter  $G$  liegt, wie in Fig. 380; denn es geben hier die Unterschiede der Ordinaten der über die Scheitelsenkrechte verlängerten Geraden  $J'L_2D$  und  $A'G'$  den Einfluß  $S$  derjenigen beiden, links von  $tt$  wirkenden Kräfte  $A'$  und  $Q$  an, welche durch eine, rechts von  $G$  gelegene, jedoch auf den Trägerteil  $AG$  wirkende Last *Eins* hervorgerufen werden, und dieser Einfluß ist  $= 0$ , sobald jene Last durch  $E$  geht. Hinsichtlich der Spannkraften in den Gurtungen, welche den





sie gestatten eine sehr übersichtliche Feststellung der ungünstigsten Belastungsweise. Es genügt nämlich, das Vorzeichen der Spannkraft  $S$  anzugeben (am besten durch Anwendung des *Ritterschen* Verfahrens auf den Zustand  $A' = 1$ ), um sofort mittels Ziehen von wenigen Geraden zum Ziele zu gelangen. Liegt z. B. der in Fig. 376 dargestellte Fall eines linkssteigenden Füllungsstabes  $S$  vor, so leuchtet sofort ein, daß der rechts um  $C$  drehenden äußeren Kraft  $A' = 1$  nur durch eine am linken Trägerabschnitte angreifende, links drehende Spannkraft  $S'$  das Gleichgewicht gehalten werden kann; es muß also  $S$  von  $F_1$  nach  $T_2$  gerichtet, d. h. positiv sein, und hierdurch sind die Vorzeichen der einzelnen Teile der Einflußfläche bestimmt. Man findet, daß im vorliegenden Falle  $max S_p$  entsteht, sobald nur die Knotenpunkte zwischen  $tt$  und der Senkrechten durch  $E$  belastet werden, während  $min S_p$  durch ausschließliche Belastung der übrigen Knoten hervorgerufen wird. Selbstverständlich genügt es, um dieses Ergebnis zu finden, die Einflußlinie aus freier Hand zu skizzieren.\*)

Dem Leser wird empfohlen, als Beispiel einen linkssteigenden Füllungsstab unter folgenden Voraussetzungen zu untersuchen:

1. Punkt  $C$  liegt rechts vom Schnitte  $tt$ , aber unterhalb der Geraden  $BG$ . (Alle Lasten links von  $E$  erzeugen Zugspannungen, alle Lasten rechts von  $E$  Druckspannungen)
2.  $C$  liegt links von  $A$  und oberhalb der Geraden  $GA$ . (Lasten links von  $tt$  erzeugen Druck, rechts von  $tt$  Zug.)

**186. Vereinfachungen für einen besonders wichtigen Fall parabelförmiger Bogenträger.** Sind die Füllungsstäbe abwechselnd senkrecht und geneigt angeordnet (Fig. 384), und liegen die Knotenpunkte der unteren Gurtung — welche das Scheitelgelenk enthalten möge — auf einer Parabel mit senkrechter Achse, so fällt bei *gänzlicher gleichförmiger Belastung* das durch die drei Gelenke  $A, G, B$  geführte Seilpolygon vollständig mit der unteren Gurtung zusammen. Denn die Eckpunkte dieses

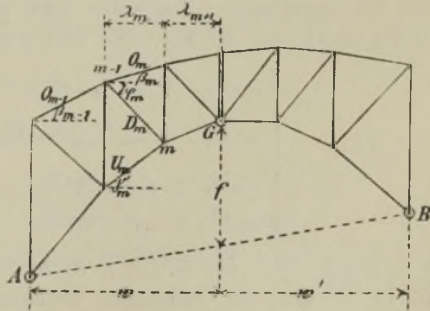


Fig. 384.

\*) Wir setzen hierbei voraus, daß im Falle gleichförmiger Belastung nach Seite 118 (Fig. 109) mit festen Werten der Knotenlasten gerechnet wird. Es ist dann die Aufsuchung der genauen Lage einer etwa im Felde  $F_1F$ , vorhandenen Belastungsscheide nicht nötig.

Seilpolygons gehören einer Parabel an, deren Achse senkrecht ist und welche durch drei Punkte  $A, G, B$  eindeutig bestimmt ist.

Hieraus folgt, daß die Momente  $M_m$  für sämtliche Knotenpunkte der unteren Gurtung und infolgedessen auch sämtliche Spannkkräfte  $O$  gleich Null sind, und da nun für jeden oberen Knotenpunkt die Gleichgewichtsbedingung  $D_m \cos \varphi_m = O_{m-1} \cos \beta_{m-1} - O_m \cos \beta_m$  besteht, so müssen auch alle Spannkkräfte  $D = 0$  sein. Es werden also infolge einer gänzlichen, gleichförmigen Belastung nur die Vertikalen und die Untergurtstäbe beansprucht, und zwar die ersteren durch Drücke, welche gleich den entsprechenden Knotenlasten sind, während sich für einen unter  $\gamma_m$  gegen die Wagerechte geneigten Stab der unteren Gurtung der Wert  $U_m = -H \sec \gamma_m$  ergibt, wo  $H =$  Horizontalschub. Ist also die ständige Belastung ( $g = g_o + g_u$ ) eine gleichförmige, so erzeugt sie die Spannkkräfte

$$(1) \quad V_{mg} = -\frac{1}{2} g_o (\lambda_m + \lambda_{m+1}) \quad \text{und} \quad U_{mg} = -\frac{g w w'}{2f} \sec \gamma_m, *)$$

während einer gänzlichen, gleichförmigen beweglichen Belastung  $p$  die Werte entsprechen

$$(2) \quad V_{mp} = -\frac{1}{2} p (\lambda_m + \lambda_{m+1}) \quad \text{und} \quad U_{mp} = -\frac{p w w'}{2f} \sec \gamma_m.$$

Da nun für jede Spannkraft  $S$  eines beliebigen Trägers die Gleichung besteht

$$(3) \quad S_p = \max S_p + \min S_p,$$

wo  $S_p =$  Spannkraft infolge gänzlicher Belastung mit  $p$ , während  $\max S_p$  und  $\min S_p$  die Einflüsse der auf den positiven, beziehungsweise negativen Beitragstrecken liegenden Last  $p$  bedeuten, so ergeben sich für den Parabelbogen in Fig. 384 die wichtigen Beziehungen

$$(4) \quad \begin{cases} \max V_{pm} + \min V_{pm} = -\frac{1}{2} p (\lambda_m + \lambda_{m+1}) \\ \max U_{pm} + \min U_{pm} = U_{pm} = -\frac{p w w'}{2f} \sec \gamma_m \\ \max O_m + \min O_m = 0 \\ \max D_m + \min D_m = 0, \end{cases}$$

deren beide letzte die Zeiger  $p$  nicht enthalten, weil die Spannkkräfte  $O$  und  $D$  infolge der ständigen Belastung  $= 0$  sind. Es braucht jetzt nur noch der eine der beiden, von der Belastung  $p$  abhängigen Grenzwerte  $V, U, O, D$  angegeben zu werden; der andere ist dann sofort durch die Gleich. (4) bestimmt. Werden die Einflußlinien benutzt, so genügt es zuweilen, Teile derselben aufzuzeichnen. So wird man sich beispielsweise, um die Spannkraft in einem Stabe der oberen Gurtung

\*) Vergl. die auf S. 188 gezeigte Berechnung von  $H$ .



zu bestimmen (Fig. 381), darauf beschränken, die Geraden  $J'G'$  und  $G'B'$  mit Hilfe von  $S'$  und  $N$  festzulegen, da durch diese Geraden der positive Teil  $NG'B'$  der Einflußfläche und mithin auch  $_{max}S$  bestimmt ist, worauf dann  $_{min}S = -_{max}S$  gefunden wird.

An Stelle der Einflußlinien kann man auch das folgende übersichtliche und schnell zum Ziele führende Verfahren benutzen, das hier an der Hand eines *Zahlenbeispiels* beschrieben werden soll. Verlangt sei die

**187. Berechnung einer Fußgängerbrücke mit Parabelbögen.** Die 3,8<sup>m</sup> breite Brücke besitzt zwei Hauptträger, deren Anordnung in der Fig. 385 angegeben ist. Die obere Gurtung ist wagerecht; die

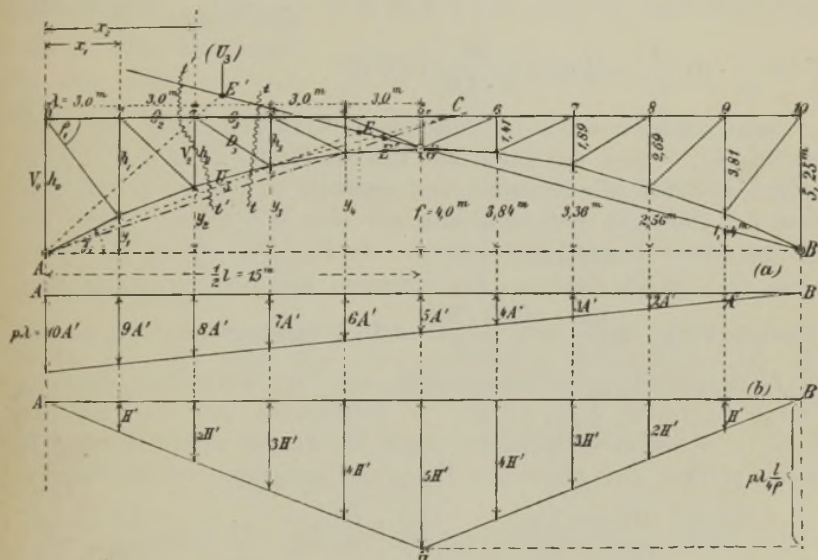


Fig. 385.

Knotenpunkte der unteren Gurtung liegen auf einer Parabel. Es ist  $l = 30^m$ ;  $\lambda = 3^m$ ;  $f = 4,0^m$ ;  $h_0 = 5,25^m$ . Das Eigengewicht ist zu  $194^{kg}$  f. d.  $qm$  der Brückenbahn geschätzt worden,\*) die ständige Belastung (Menschengedränge) zu  $350^{kg}$  f. d.  $qm$ ,\*\*) weshalb  $g = 0,194 \cdot \frac{3,8}{2} = 0,37'$ ;

\*) Es wird vorausgesetzt, daß die Brückenbahn aus einem einfachen Bohlenbelage auf eisernen Querträgern besteht. Dann darf man nach *Heinzerling* die ständige Belastung für das  $qm$  der Brückenbahn  $= 1,36l^m + 153^{kg}$  annehmen; dies gibt  $1,36 \cdot 30 + 153 = 194^{kg}$ . Vergl. *Heinzerling, die Brücken der Gegenwart*, Abteil. I, Heft 5, Seite 22.

\*\*) Für Brücken mit geringerem Verkehr, sonst 400 bis  $500^{kg}$ .

$p = 0,350 \cdot \frac{3,8}{2} = 0,665'$  und  $q = g + p = 1,035'$ . Die bewegliche Belastung eines Feldes ist  $p\lambda = 0,665 \cdot 3 = 2,0'$ . Eine Zerlegung von  $g$  in  $g_o$  und  $g_u$  ist überflüssig.

Wir beginnen mit der Bestimmung der Stützenwiderstände  $A$  und  $H$ , welche eine der Reihe nach in den Knotenpunkten 1, 2, 3 . . . angreifende Last  $p\lambda$  hervorruft. Liegt die Last bei 9, so möge  $A = A'$  und  $H = H'$  sein. Die den übrigen Knoten entsprechenden Werte  $A$  und  $H$  sind durch die in Fig. 385 a u. b dargestellten Einflußlinien bestimmt. Im vorliegenden Falle ist  $A' = \frac{1}{10} p\lambda = 0,2'$  und (da eine im Scheitel angreifende Last  $P = p\lambda$  den Schub  $H = \frac{Pl}{4f} = \frac{p\lambda l}{4f}$  hervorbringt)

$$H' = \frac{1}{5} \cdot p\lambda \frac{l}{4f} = \frac{1}{5} \cdot 2,0 \frac{30}{4 \cdot 4,0} = 0,75'.$$

Jetzt zeichnen wir zwei *Cremonasche* Kräftepläne (Fig. 386 u. 387 auf Tafel 6), welche die durch die äußeren Kräfte  $A'$  und  $H'$  hervorgerufenen Spannkkräfte enthalten, und ermitteln zu gleicher Zeit die Einflüsse der ständigen Belastung und der über den ganzen Träger verteilt gedachten beweglichen Last  $p$ . In Fig. 386 wurde die Wagerechte  $\overline{BC}_0$  gleich dem von der ständigen Belastung erzeugten Horizontalschub:  $H_g = \frac{gl^2}{8f} = \frac{0,37 \cdot 30^2}{8 \cdot 4} = 10,4'$  gemacht (und zwar in dem mit  $II$  bezeichneten Kräftemaßstabe); auf der Senkrechten durch  $C_0$  wurden die Lasten  $\frac{1}{2} g\lambda, g\lambda, g\lambda \dots$  aufgetragen und die Teilpunkte  $C_4, C_5 \dots$  mit  $B$  verbunden. Dann ist, da die untere Gurtung als das Seilpolygon der gänzlichen Belastung betrachtet werden darf:

$$\begin{aligned} \text{Strecke } \overline{BC}_1 &= U_{1g} = -11,5'; & \overline{BC}_2 &= U_{2g} = -11,1'; \\ \overline{BC}_3 &= U_{3g} = -10,8'; & \overline{BC}_4 &= U_{4g} = -10,5'; \\ \overline{BC}_5 &= U_{5g} = -10,4'. \end{aligned}$$

In gleicher Weise wurden aus  $\overline{BE}_0 = H_p = \frac{pl^2}{8f} = \frac{10p\lambda \cdot l}{8f}$

$$= \frac{10 \cdot 2,0 \cdot 3,0}{8 \cdot 4} = 18,75' \quad (\text{Kräftemaßstab } 10^{\text{cm}} = 20') \quad \text{die Werte abgeleitet}$$

$$\begin{aligned} U_{1p} &= -20,8'; & U_{2p} &= -20,0'; & U_{3p} &= -19,4'; & U_{4p} &= -18,9'; \\ & & & & & & U_{5p} &= -18,8'. \end{aligned}$$

\*) Man erhält bei diesem Verfahren gleichzeitig die Größe der Spannkkräfte  $U$  und die *Richtungen* dieser Kräfte. Parallelen zu den kurzen Linien des Trägernetzes zu ziehen, ist nicht ratsam. Damit infolge der Abrundungen von  $g\lambda$  und  $H_g$  keine Zeichenfehler entstehen, beachte man, daß sich

Der Kräfteplan für  $A' = 0,2'$  (Maßstab  $I$ ) bedarf keiner Erläuterung; zu beachten ist, daß nach No. 151 die Verlängerungen der Spannkkräfte  $D$  auf der Senkrechten durch  $B$  die Strecken  $A$  abschneiden müssen.

Der in Fig. 387 für den Zustand  $H' = 0,75'$  gezeichnete Plan (Maßstab  $I$ ) läßt sich in ähnlicher Weise prüfen. Bei gleichen Feldweiten müssen sich nämlich (wie zuerst *Mohr* gezeigt hat) die Verlängerungen sämtlicher  $D$  in einem Punkte  $T$  der durch  $R$  bestimmten Senkrechten treffen. Es folgt dies aus der nachstehenden Untersuchung.

Fügt man im Knotenpunkte 1 der Fig. 388a zwei sich aufhebende Kräfte  $H'$  hinzu, so wirkt links vom Schnitte  $tt$  ein Kräftepaar, dessen Moment  $= H'h_0$  ist und eine in 1 angreifende Kraft  $H'$ . Das Kräftepaar läßt sich ersetzen durch zwei in 1 und 2 wirksame, entgegengesetzt gleiche, senkrechte Kräfte  $Q$ , deren Moment  $Q\lambda$  dem Momente  $H'h_0$  entgegengesetzt gleich ist. Zeichnet man nun die Kräftepolygone der Knoten 1 und 2, so gelangt man zu der Fig. 388b, welche einen Teil der Fig. 387 ausmacht, und aus welcher hervorgeht, daß die Verlängerung von  $D$  auf der Senkrechten durch  $R$  die im vor-

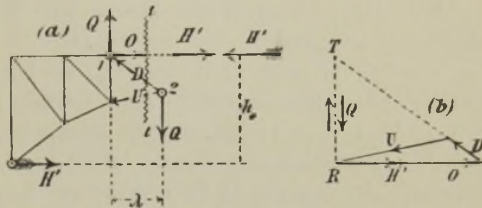


Fig. 388.

liegenden Falle für alle Diagonalen gleich große Strecke  $Q = \frac{H'h_0}{\lambda}$

$$= \frac{0,75 \cdot 5,25}{3} = 1,3125'$$

abschneidet.

Für die durch  $A'$  und  $H'$  erzeugten Spannkkräfte ergeben sich die folgenden Werte:\*)

(mit  $l = n\lambda$ ) verhalten muß  $\overline{C_1 C_0} : \overline{C_0 B} = \frac{n-1}{2} g\lambda : \frac{gl^2}{8f} = \frac{(n-1)4f}{n^2\lambda}$ . Im vorliegenden Falle ergibt sich:  $\overline{C_1 C_0} : \overline{C_0 B} = \frac{9 \cdot 4 \cdot 4}{10^2 \cdot 3} = 0,48$ . Es wurde in der

Fig. 386 die wagerechte Strecke  $\overline{BN} = 12,5$  gemacht, die senkrechte Strecke  $\overline{NL} = 0,48 \cdot 12,5 = 6,0$ , hierauf  $\overline{NL}$  in 9 gleiche Teile geteilt und mit Hilfe der Teilpunkte der Strahlenbüschel der Spannkkräfte  $U$  festgelegt. Natürlich wird man  $\overline{BN}$  und  $\overline{NL}$  nicht zu klein wählen.

\*) Es lassen sich diese Werte auch schnell berechnen. Man findet z. B. für den ersten Fall (Einfluß von  $A'$ ) mit den aus der Fig. 385 ersichtlichen Bezeichnungen mit Hilfe *Ritterscher* Momentengleichungen die Spannkkräfte in der oberen Gurtung

$$O_1 = -\frac{A'x_1}{h_1}; \quad O_2 = -\frac{A'x_2}{h_2} \text{ u. s. w.}$$



Stab	Spannkraft infolge		Stab	Spannkraft infolge	
	$A' = 0,2$	$H' = 0,75$		$A' = 0,2$	$H' = 0,75$
$O_4$	-1,702	+2,043	$U_5$	+1,705	-2,797
$O_3$	-0,952	+1,333	$U_4$	+0,965	-2,110
$O_2$	-0,446	+0,714	$U_3$	+0,462	-1,515
$O_1$	-0,157	+0,283	$U_2$	+0,168	-1,103
$D_1$	+0,255	-0,458	$V_0$	-0,200	+0,360
$D_2$	+0,388	-0,578	$V_1$	-0,259	+0,386
$D_3$	+0,598	-0,732	$V_2$	-0,319	+0,390
$D_4$	+0,828	-0,784	$V_3$	-0,352	+0,333
$D_5$	+0,756	-0,387	$V_4$	-0,291	+0,149

Mit Hilfe dieser Werte lassen sich die von der Verkehrslast herührenden Grenzwerte der Spannkraften  $S$  schnell berechnen.

Handelt es sich z. B. um  $O_3$ , so wird von  $A$  durch den gegenüberliegenden Knotenpunkt eine Gerade gelegt und deren Schnittpunkt  $E$  mit der Geraden  $BG$  bestimmt, Fig. 385. Die Senkrechte durch  $E$  ist Belastungsscheide; alle Lasten rechts von  $E$  erzeugen ein positives, alle Lasten links von  $E$  ein negatives  $O$ . Werden also nur die Knoten 5, 6, 7, 8, 9 belastet angenommen und zwar jeder mit  $p\lambda^*$ ), so entsteht  ${}_{max}O_3$ . Links von  $E$  greifen nur die äußeren Kräfte  $A$  und  $H$  an; erstere ist  $A = A' + 2A' + 3A' + 4A' + 5A' = 15A'$ , letztere:  $H = 15H'$ . Da nun  $A'$  die Spannkraft  $O_3 = -0,952$  erzeugt und  $H'$  die Spannkraft  $O_3 = -1,333$ , so entsteht

$${}_{max}O_3 = -0,952 \cdot 15 + 1,333 \cdot 15 = +5,7'$$

Die ständige Belastung ist ohne Einfluß auf  $O$ .

Um den einen Grenzwert von  $U_{3p}$  zu ermitteln, wird der Schnittpunkt  $E'$  (Fig. 385) der von  $A$  durch den oberen Knoten 2 gelegten Geraden  $BG$  bestimmt. Ausschließliche Belastung rechts von  $E'$  erzeugt  ${}_{min}U_{3p}$ . Es entsteht:  $A = A' (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7)$

hierauf  $U_1 = 0; U_2 = -O_1 \sec \gamma_2; U_3 = -O_2 \sec \gamma_3; \dots$

sodann  $D_1 = (O_1 - O_2) \sec \varphi_1; D_2 = (O_2 - O_3) \sec \varphi_2; \dots$

schließlich  $V_0 = -D_1 \sin \varphi_1; V_1 = -D_2 \sin \varphi_2; \dots$

In gleich einfacher Weise lassen sich die durch  $H'$  erzeugten Spannkraften berechnen. Hier ergibt sich

$$U_1 = -H' \sec \gamma_1; U_2 = -\frac{H'h_0}{h_1} \sec \gamma_2; U_3 = -\frac{H'h_0}{h_2} \sec \gamma_3; \dots$$

$$O_1 = +\frac{H'h_0}{h_1} - H'; O_2 = +\frac{H'h_0}{h_2} - H'; \dots$$

worauf die Werte  $D$  und  $V$  wie vorhin bestimmt werden.

Bei ungleichen Feldweiten sind an Stelle der Belastungszustände  $A = A'$  und  $H = H'$  die Zustände  $A = 1$  und  $H = 1$  zu untersuchen.

\*) Wir rechnen, nach Seite 118, mit festen Werten der Knotenlasten.

$$= 28 A' \text{ und } H = H' (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 4 + 3) = 22 H', \text{ weshalb}$$

$$\min U_{3p} = + 0,462 \cdot 28 - 1,515 \cdot 22 = - 20,4'.$$

Befindet sich der dem Stabe  $U$  gegenüberliegende Knotenpunkt oberhalb der Geraden  $BG$ , so wird (wie aus der Gestalt der Einflußlinie hervorgeht)  $U$  bei gänzlicher Belastung des Trägers am größten.\*\* Dies ist der Fall hinsichtlich  $U_5$ , und man erhält deshalb (nach Hinzurechnung des Einflusses der ständigen Last)  $\min U_5 = U_{5p} + U_{5g} = - 18,8 - 10,4 = - 29,2'$ . Ebenso nimmt, da für jeden Belastungszustand  $U_1 = - H \sec \gamma_1$  ist, die Spannkraft  $U_1$  bei gänzlicher Belastung ihren größten negativen Wert an. Man findet  $\min U_1 = - 20,8 - 11,5 = - 32,3'$ .

Wird ein Grenzwert der (von  $g$  unabhängigen) Spannkraft  $D_3$  gesucht, so wird der Schnittpunkt  $C$  von  $O_3$  und  $U_3$  mit  $A$  durch eine Gerade verbunden, welche die  $BG$  in  $E''$  schneiden möge. Liegt, wie in Fig. 385, der Punkt  $E''$  oberhalb  $G$ , so ist die Senkrechte durch  $E''$  Belastungsscheide; liegt  $E''$  auch links von  $C$ , so ist auch ein durch das Feld  $2\bar{3}$  geführter Schnitt eine Belastungsscheide.  $\max D$  entsteht dann infolge ausschließlicher Belastung der Knoten zwischen  $tt$  und  $E''$ , im vorliegenden Falle also, sobald nur die Knoten 3 und 4 belastet werden. Man findet  $A = (7 + 6) A' = 13 A'$ ;  $H = (3 + 4) H' = 7 H'$  und

$$\max D_3 = + 0,598 \cdot 13 - 0,732 \cdot 7 = + 2,7'.$$

Die den Stäben  $D_1$  und  $D_2$  entsprechenden Punkte  $E$  liegen ebenfalls oberhalb  $G$  und links von den zugehörigen Punkten  $C$ . Dagegen entsprechen den Stäben  $D_4$  und  $D_5$  Punkte  $E$ , die unterhalb  $G$  liegen. Dann sind zur Erzielung von  $\max D$  alle Knoten rechts vom fraglichen Felde zu belasten. Würde  $E$  oberhalb  $G$ , aber rechts von  $C$  liegen, welcher Fall eintritt, sobald sich  $C$  unterhalb der Geraden  $BG$  befindet, so würde nur die Senkrechte durch  $E$  (nicht aber der Schnitt  $tt$ ) eine Belastungsscheide sein. Man würde dann alle Knoten rechts von  $E$  belasten und  $\min D$  bestimmen.\*\*\*)

Um einen Grenzwert von  $V_{p2}$  zu erhalten, wird der Schnitt  $tt'$  geführt, und der Schnittpunkt von  $O_2$  und  $U_3$  mit  $A$  verbunden. Bezüglich der gegenseitigen Lage der Punkte  $E, C, G$  sind dieselben Fälle zu unterscheiden wie bei der Berechnung der  $D$ . Im vorliegenden

\*) Es empfiehlt sich, die Belastungsscheiden in einer (in nicht zu kleinem Maßstabe gezeichneten) besonderen Figur zusammenzustellen und an dieselben — in Klammern — die entsprechenden Spannkraft zu schreiben, wie dies z. B. in Fig. 385 hinsichtlich  $U_3$  geschehen ist.

\*\*) Wir verweisen auf Tafel 6 u. 7, auf denen die Einflußlinien für sämtliche Spannkraft des vorliegenden Trägers abgebildet sind.

\*\*\*) Der Leser skizziere für diesen im vorliegenden Beispiele nicht enthaltenen Fall die Einflußlinie.

Falle entsteht in  $V_2$  der größte Druck, sobald nur die Knoten 2, 3, 4 (zwischen  $tt$  und  $E''$ ) belastet werden. Man erhält  $A = (8 + 7 + 6) A' = 21 A'$ ;  $H = (2 + 3 + 4) H' = 9 H'$ , also

$$\min V_{2p} = -0,319 \cdot 21 + 0,390 \cdot 9 = -3,2'$$

Auf die beschriebene Weise ist für jede Spannkraft der eine der beiden von der beweglichen Belastung abhängigen Grenzwerte bestimmt und in die folgende Tabelle eingetragen worden.

Gesucht:	Zu belasten sind die Knoten	$\frac{A}{A'} =$	$\frac{H}{H'} =$	Spannkräfte in Tonnen
$\max O_4$	5, 6, 7, 8, 9	15	15	$\max O_4 = +5,1$
$\max O_3$	5, 6, 7, 8, 9	15	15	$\max O_3 = +5,7$
$\max O_2$	4, 5, 6, 7, 8, 9	21	19	$\max O_2 = +4,2$
$\max O_1$	4, 5, 6, 7, 8, 9	21	19	$\max O_1 = +2,1$
$\min U_4$	4, 5, 6, 7, 8, 9	21	19	$\min U_{p4} = -19,8$
$\min U_3$	3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	28	22	$\min U_{p3} = -20,4$
$\min U_2$	2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	36	24	$\min U_{p2} = -20,4$
$\max D_1$	1, 2, 3	24	6	$\max D_1 = +3,4$
$\max D_2$	2, 3, 4	21	9	$\max D_2 = +2,9$
$\max D_3$	3, 4	13	7	$\max D_3 = +2,7$
$\max D_4$	4, 5, 6, 7, 8, 9	21	19	$\max D_4 = +2,5$
$\max D_5$	5, 6, 7, 8, 9	15	15	$\max D_5 = +5,5$
$\min V_0$	0, 1, 2, 3*)	29	6	$\min V_{p0} = -3,6$
$\min V_1$	1, 2, 3, 4	30	10	$\min V_{p1} = -3,9$
$\min V_2$	2, 3, 4	21	9	$\min V_{p2} = -3,2$
$\min V_3$	3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	28	22	$\min V_{p3} = -2,5$
$\min V_4$	4, 5, 6, 7, 8, 9	21	19	$\min V_{p4} = -3,3$

Nun ergibt sich, nach den Gleichungen (4) für sämtliche  $O$  und  $D$

$$\min O = -\max O \text{ und } \min D = -\max D,$$

ferner

$$\max U_{pm} = -\min U_{pm} + U_{pm} \text{ also:}$$

$$\max U_{p2} = +20,4 - 20,0 = +0,4'$$

$$\max U_{p3} = +20,4 - 19,4 = +1,0'$$

$$\max U_{p4} = +19,8 - 18,9 = +0,9'$$

und

$$\max V_{pm} = -\min V_{pm} - p\lambda, \text{ d. i.}$$

$$\max V_{p1} = +3,9 - 2,0 = +1,9' \quad \max V_{p3} = +2,5 - 2,0 = +0,5'$$

$$\max V_{p2} = +3,2 - 2,0 = +1,2' \quad \max V_{p4} = +3,3 - 2,0 = +1,3'$$

Für die Endvertikale ist  $\frac{1}{2} p\lambda$  statt  $p\lambda$  zu setzen, weshalb

$$\max V_{p0} = +3,6 - 1,0 = +2,6'$$

Addiert man zu den Grenzwerten von  $U_p$  und  $V_p$  noch die von

\*) Zu beachten ist, daß der Knoten 0 nur die Last  $\frac{1}{2} p\lambda$  trägt, weshalb  $A = (\frac{1}{2} + 9 + 8 + 7) A' = 29 A'$ .



der ständigen Belastung herrührenden Spannkkräfte  $U_g$  und  $V_g$ , so erhält man (wegen  $g\lambda = 1,1'$ ) schließlich

$\min U_2 = -20,4 - 11,1 = -31,5^t$	$\max U_2 = +0,4 - 11,1 = -10,7^t$
$\min U_3 = -20,4 - 10,8 = -31,2^t$	$\max U_3 = +1,0 - 10,8 = -9,8^t$
$\min U_4 = -19,8 - 10,5 = -30,3^t$	$\max U_4 = +0,9 - 10,5 = -9,6^t$
$\min V_0 = -3,6 - \frac{1}{2} \cdot 1,1 = -4,2^t$	$\max V_0 = +2,6 - \frac{1}{2} \cdot 1,1 = +2,1^t$
$\min V_1 = -3,9 - 1,1 = -5,0^t$	$\max V_1 = +1,9 - 1,1 = +0,8^t$
$\min V_2 = -3,2 - 1,1 = -4,3^t$	$\max V_2 = +1,2 - 1,1 = 0$ gesetzt
$\min V_3 = -2,5 - 1,1 = -3,6^t$	$\max V_3 = +0,5 - 1,1 = -0,6^t$
$\min V_4 = -3,3 - 1,1 = -4,4^t$	$\max V_4 = +1,3 - 1,1 = 0$ gesetzt.

Jede der im Scheitel angeordneten beiden Vertikalen hat den *Druck*:  $\frac{1}{2}q\lambda = 1,6'$  auszuhalten. Eine übersichtliche Zusammenstellung sämtlicher Spannkkräfte findet sich in der folgenden Figur.

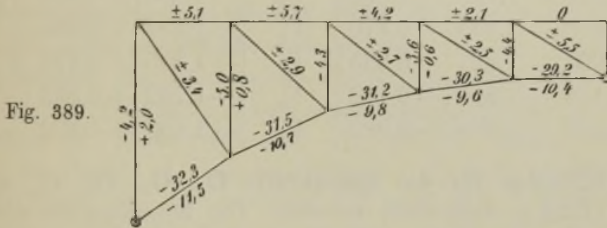


Fig. 389.

§ 46.

**Zahlenbeispiel. Einflußlinien für einen Bogenträger von 30<sup>m</sup> Stützweite.**

Es sollen die Einflußlinien für den in der Fig. 385 abgebildeten Bogenträger dargestellt und zur Bestimmung der Spannkkräfte infolge verschiedenartiger Belastungsfälle benutzt werden.\*)

Wir wählen ein Verfahren, das auch dann schnell zum Ziele führt, wenn die in Fig. 376 mit  $C$  bezeichneten Schnittpunkte der Gurtstäbe  $O$  und  $U$  ungünstig liegen. Zunächst sind die Spannkkräfte  $S'$  und  $S_G$  zu bestimmen. Die ersteren, dem Zustande  $A' = 1$  entsprechend, können dem auf Tafel 6, Fig. 386, gezeichneten Kräfteplane entnommen werden. Wird dort  $A' = 1$  vorausgesetzt, so gilt der Kräftemaßstab  $II$ . Die Ergebnisse enthält die nachfolgende Tabelle. Um die Spannkkräfte  $S_G$  infolge einer im Scheitel angreifenden Last 1 zu bestimmen, zerlege man

\*) Wir empfehlen dem Leser, dieses Beispiel auch mit Hilfe der im § 19 entwickelten Verfahren durchzuarbeiten und sämtliche Spannkkräfte mit Hilfe eines einzigen Seilpolygons zu ermitteln; sie lassen sich alle auf die Form  $\frac{\xi}{x} \cdot Hy$  bringen. Vergl. die Figuren 145, 146 u. 147.

den Kämpferdruck in  $A' = \frac{1}{2}$  und  $H' = 1 \frac{l}{4f} = 1 \cdot \frac{30}{4 \cdot 4} = 1,875$  und bestimme die Einflüsse von  $A'$  und  $H'$  getrennt. Den von  $H'$  herührenden Teil von  $S_G$  liefert der Kräfteplan in Fig. 387 (Maßstab III); wird dieser Teil mit  $S_H$  bezeichnet, so folgt  $S_G = \frac{1}{2} S' + S_H$ . Man findet

Stab	$S'$	$S_H$	$S_G$	Stab	$S'$	$S_H$	$S_G$
$O_1$	-0,787	+0,709	+0,315	$U_2$	+0,840	-2,758	-2,338
$O_2$	-2,230	+1,784	+0,669	$U_3$	+2,308	-3,787	-2,633
$O_3$	-4,762	+3,333	+0,952	$U_4$	+4,822	-5,275	-2,864
$O_4$	-8,511	+5,106	+0,851	$U_5$	+8,523	-6,991	-2,730
$D_1$	+1,273	-1,145	-0,509	$V_0$	-1,000	+0,900	+0,400
$D_2$	+1,938	-1,445	-0,476	$V_1$	-1,294	+0,965	+0,318
$D_3$	+2,992	-1,831	-0,335	$V_2$	-1,595	+0,976	+0,179
$D_4$	+4,142	-1,959	+0,112	$V_3$	-1,762	+0,833	-0,048
$D_5$	+3,780	-0,968	+0,922	$V_4$	-1,454	+0,372	-0,355

Die Einflußlinien für die Spannkkräfte  $O_1, O_2, O_3, O_4$  sind in der Fig. 390 (Tafel 6) dargestellt worden. Um beispielsweise die Linie für  $O_2$  zu erhalten, wurden (im Maßstabe  $3,0 = 5^m$ ) die Strecken aufgetragen  $A_2 J_2 = S' = -2,230$  und  $\overline{GG'} = S_G = +0,669$ ,\*) und hierauf die Geraden  $I, II, III$  gezogen. Will man die Ermittlung von  $S_G$  sparen, so lege man nach Bestimmung des Punktes  $J_2$  die Gerade  $I$  mit Hilfe des senkrecht unter  $E_2$  gelegenen Nullpunktes  $N_2$  fest.  $E_2$  ist der Schnittpunkt einer durch  $A$  und den unteren Knoten 2 gelegten Geraden mit der Geraden  $BG$ . Ist weder  $S_G$  noch  $S'$  gegeben, so bestimme man die Strecke  $\overline{RT} = O_2'''$ , welche die Geraden  $I$  und  $III$  auf der Senkrechten durch den Knoten 1 abschneiden, indem man die Last 1 nach den Richtungen von  $O_2$  und  $D_2$  zerlegt, Fig. 390f. Nun gebe man der Geraden  $I$  eine beliebige Lage (Fig. 390e), trage  $\overline{RT} = O_2'''$  auf, ziehe  $III$  und, nach Ermittlung des Nullpunktes  $N_2$ , die Geraden  $A_2 B_2$  und  $II$ .

Das zuletzt beschriebene Verfahren führt am schnellsten zum Ziele, erfordert aber ein sehr genaues Zeichnen, nämlich scharfe Bestimmung des Punktes  $N$ . Im allgemeinen liefert die Benutzung der Werte  $S'$  und  $S_G$  die zuverlässigsten Zeichnungen, deren Güte man leicht prüfen kann, indem man nachträglich die Punkte  $N$  mit Hilfe der Punkte  $E$  und die Strecken  $\overline{RT} = O'''$  durch Zerlegung einer Last 1 bestimmt.

\*) Es genügen bereits zwei Dezimalstellen. Die oben angegebenen Zahlenwerte wurden vom Verfasser gerechnet.

Die Einflußlinien für  $U_2, U_3, U_4, R_5$ \*) zeigt Fig. 391. Bei gegebenen Werten  $S'$  und  $S_c$  wird z. B. die Gerade  $I$  der  $U_3$ -Linie mit Hilfe der Ordinaten  $A_3 J_3 = S' = +2,308$  und  $G G' = S_c = -2,633$  bestimmt. An Stelle von  $S_c$  kann man auch den Nullpunkt  $N_3$  benutzen. Schließlich läßt sich auch die Strecke  $\overline{RT} = U_3'''$  auf der Senkrechten durch den Knoten 3 durch Zerlegung der Last 1 nach den Richtungen von  $D_3$  und  $U_3$  ermitteln, Fig. 391e, worauf die Bestimmung der  $U_3$ -Linie mit Hilfe von  $U_3'''$  und Punkt  $N_3$  erfolgen kann.

Die dem Stabe  $U_5$  entsprechenden Punkte  $E_5$  und  $N_5$  befinden sich links von dem oberhalb der Kämpferdrucklinie gelegenen Knoten 4 der oberen Gurtung. Infolgedessen sind sämtliche Ordinaten der  $U_5$ -Linie negativ.

Die Einflußlinien für die Spannkkräfte  $D$  und  $V$  in den Füllungsstäben sind auf Tafel 7 zusammengestellt worden. Wir beschreiben die Erzeugung der  $D_3$ -Linie Fig. 392c. Es wird  $\overline{A_3 J_3} = S' = +2,992$  und  $\overline{G G'} = S_c = -0,335$  aufgetragen und die Gerade  $I$  gezogen; sie schneidet die Senkrechte durch den Schnittpunkt  $C_3$  von  $O_3$  und  $U_3$  im Punkte  $C_3'$ , und durch diesen Punkt ist die Gerade  $II$  bestimmt.\*\*\*) Nun zieht man  $III$  und  $IV$ . Man kann auch  $I$  mit Hilfe der Punkte  $J_3$  und  $N_3$  festlegen;  $N_3$  liegt senkrecht unter dem Schnittpunkte  $E_3$  der Geraden  $BG$  und  $AC_3$ . Außerdem läßt sich die Strecke  $\overline{RT} = D_3'''$  leicht angeben, welche die Geraden  $I$  und  $II$  auf der Senkrechten durch den Knoten 2 abschneiden. Man hat nur nötig, die Last 1 nach den Richtungen  $D_3$  und  $O_3$  zu zerlegen, Fig. 392f.

Am schnellsten gelangt man wieder zum Ziele, wenn man die Einflußlinie mit Hilfe der Strecke  $D'''$  und mittels der Punkte  $E$  und  $C$  bestimmt. Man zieht dann die Gerade  $I$  beliebig, setzt die Strecke  $\overline{RT} = D'''$  ab, zieht  $III$ , bestimmt auf  $I$  die Punkte  $C'$  und  $N$ , legt durch  $C'$  und  $T$  die Gerade  $II$  und durch  $A$  und  $N$  die Gerade  $AB$ . Schließlich zieht man  $IV$ . Es setzt dieses Verfahren allerdings eine bequeme Lage der Punkte  $E$  und  $C$  voraus, welcher Bedingung im vorliegenden Falle hinsichtlich sämtlicher Füllungsstäbe genügt wird.

Man vergleiche übrigens die Anmerkung am Schluß der Beschreibung der  $O$ -Linien.\*\*\*)

\*)  $U_1$  ist für jeden Belastungszustand (wenn nur senkrechte Lasten wirken)  $= -H \sec \gamma_1$ , hiernach ergeben sich die Grenzwerte von  $U_1$  aus denen von  $H$ . Die Einflußlinie für  $H$  ist in No. 113 behandelt worden. Hervorzuheben ist, daß die Grenzwerte von  $H$  zur Berechnung der Widerlager gegeben sein müssen.

\*\*) Die Punkte  $C$  werden zweckmäßig durch Rechnung bestimmt. Die Entfernung des Punktes  $C_3$  von der Vertikalen 2 ist z. B.

$$\lambda \frac{h_2}{h_2 - h_3} = 3,0 \frac{2,69}{2,69 - 1,89} = 10,09 \text{ m.}$$

\*\*\*)  $N_1$  in Fig. 392 a hat dieselbe Lage wie in  $N_1$  in Fig. 390 a.



Um die Einflußlinie für  $V_2$  (Fig. 393c) zu bestimmen, kann man die Lage der Geraden  $I$  mit Hilfe der Werte finden  $\overline{A_2 J_2} = S' = -1,595$  und  $\overline{GG'} = S_G = +0,179$  oder mittels  $S'$  und des Nullpunktes  $N$ , welcher im vorliegenden Falle mit dem Nullpunkte  $N_3$  in Fig. 392c übereinstimmt, weil sich  $O_2$  und  $U_3$  in demselben Punkte  $C_3$  schneiden wie  $O_3$  und  $U_3$ . Nun wird die Senkrechte durch  $C_3$  im Punkte  $C_3'$  mit  $I$  zum Schnitte gebracht, die Gerade  $II$  gezogen und hierauf  $III$  und  $IV$ . Auch die von  $I$  und  $II$  auf der Senkrechten durch den Knoten 2 abgeschnittene Strecke  $\overline{RT} = V_2'''$  läßt sich schnell durch Zerlegung der Last 1 nach den Richtungen von  $O_2$  und  $V_2$  ermitteln. Man findet  $V_2''' = 1$ .

Wir gehen jetzt dazu über, die Benutzung der dargestellten Einflußlinien an einigen Beispielen zu erläutern, und behandeln zunächst den

**Einfluß einer gleichförmigen Belastung.** Gesucht seien die Grenzwerte für die Spannkraft  $U_3$  unter der Voraussetzung, daß  $g = 0,37'$ ,  $p = 0,665'$  also  $q = g + p = 1,035'$  ist.

Bedeutet  $\overline{F}$  den Inhalt des negativen Teiles der Einflußfläche und  $F$  den Inhalt des positiven Teiles, so ergibt sich nach Seite 117 (Gleich. 5 u. 6)

$$\begin{aligned} \max U_3 &= q \overline{F}_+ - g F_- = qa \left( \frac{F_+}{a} - \frac{g}{q} \frac{F_-}{a} \right) \\ \min U_3 &= g \overline{F}_+ - q F_- = qa \left( \frac{g}{q} \frac{F_+}{a} - \frac{F_-}{a} \right), \end{aligned}$$

wo  $a$  die Länge einer beliebigen Strecke bedeutet. Verwandelt man nun die Flächen  $\overline{F}$  und  $F$  in Dreiecke, deren Grundlinien  $= a$  sind, und bezeichnet die Höhen dieser Dreiecke mit  $h_{II}$  und  $h_I$ , so erhält man

$$(1) \quad \max U_3 = \frac{qa}{2} \left( h_{II} - \frac{g}{q} h_I \right); \quad \min U_3 = \frac{qa}{2} \left( \frac{g}{q} h_{II} - h_I \right).$$

Die Länge  $a$  wähle man so, daß  $\frac{1}{2} qa$  durch eine bequeme Zahl ausgedrückt wird.\*) Wird im vorliegenden Falle  $a = 19,324^m$  gewählt, so ergibt sich  $\frac{1}{2} qa = 10,000'$ . Man findet durch Zeichnung:  $h_{II} = 0,12$ ;  $h_I = 3,14$ , also

\*) Maßgebend für die Länge von  $a$  ist natürlich auch die Bedingung, daß sich bei der Flächenverwandlung nicht schleifende Schnitte ergeben dürfen. Zuweilen ist es zweckmäßig, eine sehr kleine Fläche in ein Dreieck mit der Grundlinie  $\frac{1}{n} a$  zu verwandeln und dann die Höhe dieses Dreiecks durch  $n$  zu dividieren, wobei  $n$  eine beliebige ganze Zahl ist.

$$\max U_3 = 10 \left( 0,12 - \frac{0,37}{1,035} \cdot 3,14 \right) = -10^t \text{ (abgerundet);}$$

$$\min U_3 = 10 \left( \frac{0,37}{1,035} \cdot 0,12 - 3,14 \right) = -31^t \text{ (*)}$$

In Fig. 391 b wurden nur die Hilfslinien zur Ermittlung von  $h_I$  eingetragen. Es ist  $\overline{B_3 K} = a$ , ferner  $G'S$  wagerecht und  $N_3 H \parallel KS$ , schließlich  $\overline{B_3 H} = h_I$ .

Will man die Multiplikation mit  $\frac{1}{2} qa$  sparen, so ersetze man bei Aufzeichnung der Einflußlinien die über den Träger wandernde Last 1 durch eine Last  $\frac{1}{2} qa$ . Dann erhält man für irgend eine Spannkraft  $S$  die Grenzwerte:  $\max S = h_{II} - \frac{g}{q} h_I$  und  $\min S = \frac{g}{q} h_{II} - h_I$ .

Ein anderes, schon auf Seite 118 für den Fall gleich weiter Felder besprochenes Verfahren soll an der Bestimmung der Grenzwerte von  $V_2$  erläutert werden. Um  $\max V_2$  zu erhalten, wird jeder Knoten einer positiven Beitragstrecke mit  $q\lambda = 1,035 \cdot 3,0 = 3,11^t$  belastet, jeder Knoten einer negativen Beitragstrecke mit  $g\lambda = 0,37 \cdot 3,0 = 1,11$ . Die Summe der den ersten Knoten entsprechenden Ordinaten ist in Fig. 393 c:  $\Sigma_2 = \eta_1 + \eta_6 + \eta_6 + \eta_7 + \eta_8 + \eta_9 = 0,59$  und die Summe der Ordinaten unter den übrigen Knoten:  $\Sigma_1 = \eta_2 = \eta_3 = \eta_4 = 1,59$ , weshalb (nach Gleich. 7, Seite 118)

$$\max V_2 = 3,11 \cdot 0,59 - 1,11 \cdot 1,59 = +0,1^t$$

und nach Vertauschung der Lasten  $q\lambda$  und  $g\lambda$

$$\min V_2 = 1,11 \cdot 0,59 - 3,11 \cdot 1,59 = -4,3^t \text{ (**)}$$

Besteht die bewegliche Belastung aus den Raddrücken von Fahrzeugen, während die ständige Belastung eine gleichförmige ist, so kann der Einfluß der letzteren auf die eben beschriebene Weise in der Form:  $\frac{1}{2} ga (h_{II} - h_I)$  oder  $g\lambda (\Sigma_2 - \Sigma_1)$  dargestellt werden. Die Verwandlungsgrundlinie  $a$  wähle man dann so, daß ein bequemer Multiplikator  $\frac{1}{2} ga$  entsteht. (\*\*\*)

**Einfluß der aus Einzelkräften bestehenden Verkehrslast einer Eisenbahnbrücke.** Es sollen Fahrzeuge mit den in Fig. 111 (Seite 121) angegebenen Radständen und Achsenbelastungen vorausgesetzt werden. Wegen der Kürze der Brücke kommen nur Lokomotiven und Tender in Betracht. Die Brücke sei eingleisig und besitze zwei Hauptträger.

\*) Vergl. das Zahlenbeispiel in No. 187.

\*\*) Für den vorliegenden Parabelbogen muß sich bei gänzlicher Belastung mit  $p$  ergeben:  $V_p = -p\lambda$ . In der Tat ist auch  $V_p = p\lambda [\Sigma_2 - \Sigma_1] = -p\lambda$ . Die Spannkraft  $O$  und  $D$  werden infolge gänzlicher Belastung  $= 0$ , und es muß also beispielsweise in Fig. 392 c sein  $r_1 + r_2 + r_5 + r_6 + r_7 + r_8 + r_9 = r_3 + r_4$ .

\*\*\*) Oft empfiehlt sich ein Cremonascher Plan. Beim Parabelbogen benutze man die Gleichungen (1) auf Seite 376.

Es ist dann mit den Raddrücken  $L = \frac{1}{2} 13'$  (Lokomotive) und  $T = \frac{1}{2} 9'$  (Tender) zu rechnen.

Gesucht seien die Grenzwerte von  $U_4$ , Fig. 391c auf Tafel 6. Um  $_{min}U_4$  zu erhalten, wird ein Zug auf die negative Beitragstrecke gestellt, so daß die schwersten Lasten in der Nähe von  $G$  und eine schwere Last bei  $G$  selbst liegt. Hierauf wird der Wert  $_{min}U_{p4} = L\Sigma\eta_L = T\Sigma\eta_T$  berechnet. Die gefährlichste Stellung des Lastenzuges findet man am schnellsten durch Probieren. Ist die Einflußlinie für eine Strecke eine Gerade, so dürfen beliebige innerhalb dieser Strecke liegende Lasten zu einer Mittelkraft vereinigt werden. Bei der in der Figur angegebenen Laststellung, welche sich als die gefährlichste erwies, ist die (mit dem Zirkel zu bestimmende) Summe der den fünf Lasten  $L$  entsprechenden Ordinaten = 8,33. Dem mittelsten Rade des Tenders, welcher ein Gewicht von  $27'$  besitzt, entspricht  $\eta = 1,55$ . Mithin ergibt sich

$$_{min}U_{p4} = -\frac{1}{2} [13 \cdot 8,33 + 27 \cdot 1,55] = -75,1'$$

In gleicher Weise findet man, daß die Belastung der positiven Beitragstrecke erzeugt

$$_{max}U_{p4} = +\frac{1}{2} 39 \cdot 0,18 + \frac{1}{2} 9 \cdot 0,07 = +3,8'$$

Es sollen noch die Grenzwerte von  $D_2$  bestimmt werden. Die positive Beitragstrecke ist hier so kurz, daß bei Aufstellung einer Lokomotive nebst Tender der größere Teil des letzteren jenseits der Belastungsscheide  $N_2$  liegt. Der in Fig. 392b abgebildeten ungünstigsten Zugstellung entspricht

$$_{max}D_3 = \frac{1}{2} 13 \cdot 2,22 - \frac{1}{2} \cdot 27 \cdot 0,14 = +14,43 - 1,89 = +12,5'$$

Läßt man den Tender fort, so erhält man den Wert  $_{max}D_3 = 14,4'$ . Trotzdem diese Beanspruchung, des höchst unwahrscheinlichen Belastungszustandes wegen, etwas zu ungünstig gerechnet ist, dürfte es sich empfehlen, der fraglichen Diagonale einen entsprechend großen Querschnitt zu geben. Jedenfalls ist der erstgerechnete Wert  $_{max}D_3 = 12,5'$  als zu klein anzusehen, sobald nicht die Untersuchung der Wirkung kürzerer, wenn auch leichterer Fahrzeuge das Gegenteil bewiesen hat. Besonders aber wäre noch der Einfluß einer sogenannten Tender-Lokomotive schwerster Art zu bestimmen.\*)

Die negative Beitragstrecke der  $D_2$ -Linie besteht aus zwei Teilen. Schließt man die Belastung der eingleisigen Brücke durch zwei getrennte Züge als unwahrscheinlich aus, so erhält man für den in der Fig. 393b von  $B$  aus vorgeschobenen Lastenzug

$$_{min}D_2 = -\frac{1}{2} (39 \cdot 0,43 + 27 \cdot 0,21 + 13 \cdot 0,04) = -11,5'$$

\*) Vergl. No. 99, Seite 168.



## XII. Abschnitt.

## Statisch bestimmte Hängebrücken und Gelenkbögen, versteift durch Balken.

## § 47.

### Hängebrücken, deren Hauptträger aus einfachen Dreiecknetzen bestehen.

#### a. Untersuchung des in Fig. 394 dargestellten Hängewerks.

188. Der vorliegende Träger besteht aus vier gegliederten Scheiben *I, II, III, IV*, deren jede auf zwei wagerechten Gleitlagern ruht, und welche durch die Stäbe  $B_1C$ ,  $CA$ ,  $BD$ ,  $DA_2$  miteinander verbunden sind. Die Stützpunkte *C* und *D* werden ebenfalls auf wagerechten Geraden geführt. In  $A_1$  und  $B_2$  greifen die Rückhaltketten an. Die Spannkraften in den Kettengliedern  $A_1L$  und  $B_2N$  sollen zu den Stützen-



Fig. 394.

widerständen gerechnet werden. Jede der beiden Scheiben *I* und *IV* ist dann durch drei Widerstände gestützt, deren Richtungen sich nicht in einem und demselben Punkte schneiden, so daß alle auf *I* und *IV* wirkenden Kräfte in eindeutiger Weise auf die Widerlager übertragen werden. Die Scheiben *II* und *III* bilden einen Dreigelenkbogen, dessen Kämpferwiderstände sich aus den in *E* und *F* angreifenden lotrechten Auflagerkräften und den Spannkraften der Stäbe  $CA$  und  $BD$  zusammensetzen. Die Spannkraften der Stäbe  $CA$  und  $BD$  aber sind im Gleichgewicht mit den in *C* und *D* angreifenden lotrechten Widerständen der Mittelpfeiler und den Spannkraften der Stäbe  $B_1C$  und  $A_2D$ . Ergeben sich an den Gleitlagern negative Auflagerdrücke, so muß für eine Verankerung dieser Lager gesorgt werden.

189. **Untersuchung der Mittelöffnung.** Wir ziehen hier nur die Wirkung senkrechter, abwärts gerichteter Lasten in Betracht und verfolgen zunächst den Einfluß einer über der Mittelöffnung ruhenden Einzellast  $P$ . Dabei setzen wir den allgemeineren Fall ungleich hoch liegender Aufhängepunkte  $A$  und  $B$  voraus. Fig. 395. Die Spannkraften  $S_a$  und  $S_a^*$ ) der in  $A$  und  $B$  angreifenden Stäbe zerlegen wir in die senkrechten Seitenkräfte  $A_u$  und  $B_u$  und in die beiden mit der Schlußlinie  $AB$  zusammenfallenden, entgegengesetzt gleichen Seitenkräfte  $H'$ . Hierauf denken wir uns die Angriffspunkte der an den

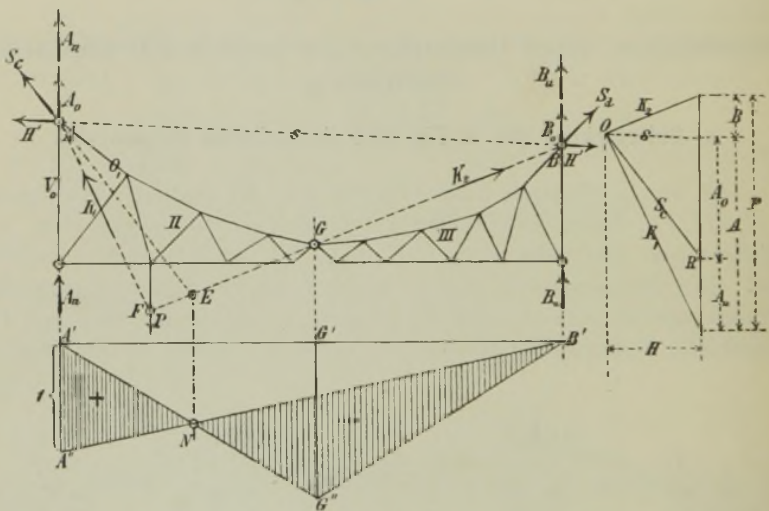


Fig. 395.

Auflagern der Scheiben  $II$  und  $III$  wirksamen senkrechten Widerstände  $A_u$  und  $B_u$  nach  $A$  und  $B$  verlegt, und vereinigen  $A_o$  und  $A_u$  zu  $A = A_o + A_u$ , desgl.  $B_o$  und  $B_u$  zu  $B = B_o + B_u$ . Es verhält sich jetzt der Trägerteil  $AGB$  wie ein Bogen mit drei Gelenken, auf welchen die Ergebnisse der im § 24 und im Abschnitte XI durchgeführten Untersuchungen angewendet werden können. Zu diesem Zwecke verwandele man das Hängewerk durch Umkehrung in einen Bogenträger, berechne die Spannkraften auf die früher angegebene Weise und ändere schließlich sämtliche Vorzeichen. Nur bei der Berechnung

\*) Wir bezeichnen die Spannkraften in den Stäben  $LA_1$ ,  $B_1C$ ,  $CA$ ,  $BD$ , der Reihe nach mit  $S_a$ ,  $S_b$ ,  $S_c$ ,  $S_d$ .

der Spannkraft  $V_0$  in einer Endvertikalen ist die Verlegung von  $A_u$  unzulässig. Man bestimme  $S_0$  mit Hilfe der Bedingung, daß die wagerechte Projektion dieser Kraft  $= H$  sein muß, zeichne hierauf das Kräftepolygon für den Knoten  $A$  und entnehme diesem  $V_0$ . Fällt  $S_0$  mit  $O_1$  zusammen, wie bei dem in der Fig. 396 abgebildeten Träger, so ergibt sich  $V_0 = 0$ . Die Endvertikale darf dann weggelassen werden.\*)

Ist die Mittelöffnung unbelastet, so verschwinden innerhalb derselben sämtliche Spannkräfte. Lasten, welche auf die Scheiben  $I$  und  $IV$  (Fig. 394) wirken, sind ohne Einfluß auf die Inanspruchnahme des Trägerteiles  $AGB$ ; sie erzeugen auch in den Stäben  $CA, BD, B_1C, DA_2, LA_1, B_1N$  keine Spannungen, und es verhalten sich dann die Scheiben  $I$  und  $IV$  wie einfache Balken.

**Zahlenbeispiel.** Fig. 396 stellt die Hälfte des einen Hauptträgers einer Fußgängerbrücke dar, welche die in dem Zahlenbeispiele in No. 187 angenommenen Belastungen  $g = 0,37'$ ,  $p = 0,665'$ ,  $q = 1,035'$  f. d. Meter erfährt. Die Mittelöffnung hat dieselben Abmessungen wie der früher behandelte Bogenträger (Fig. 385). Es entstehen dann im Trägerteile dieser Öffnung Spannkräfte, welche sich von den in der Fig. 389 zusammengestellten nur durch die Vorzeichen unterscheiden, mit Ausnahme von  $V_0$ , welches hier  $= 0$  wird.

Um noch die Grenzwerte des Stützenwiderstandes  $A_u$  (Fig. 395) zu bestimmen, suchen wir zunächst die Einflußlinie für  $A_u$ . Es ist  $A_u = A - A_0$ , wobei  $A$  den Auflagerdruck eines einfachen Balkens  $AB$  bedeutet, während  $A_0$  — ebenso wie die Spannkraft  $S_0$  — proportional dem Horizontalschube  $H$  ist. Die Einflußlinie für  $A_0$  besteht (wie die  $H$ -Linie) aus zwei Geraden  $A'G''$  und  $G''B'$ , deren Schnittpunkt  $G''$  dem Scheitelgelenk entspricht, und es ist deshalb die schraffierte Fläche in der Fig. 395 (in welcher die Gerade  $B'A''$  die Einflußlinie für  $A$  bedeutet) die gesuchte Einflußfläche für  $A_u$ ; sie ist bestimmt, sobald die Lage des Nullpunktes  $N$  gegeben ist. Um  $N$  zu finden, untersuchen wir den Einfluß einer links von  $G$  angreifenden Last  $P$ , welche die Gerade  $BG$  (Fig. 395) in  $F$  schneidet, zerlegen  $P$  in  $K_2 \parallel BG$  und

\*) Soll sich der Trägerteil  $AGB$  vollständig wie ein umgekehrter Fachwerkbogen verhalten, so müssen die in Fig. 394 angeordneten Auflager der Scheiben  $II$  und  $III$  fortbleiben, und die Mittellinien der Endvertikalen von  $II$  und  $I$  müssen in die Senkrechte durch  $C$  fallen; es können diese Stäbe in einem entsprechenden Hohlraume des Pfeilers untergebracht werden.  $C$  wird wie vorhin auf einer Wagerechten geführt. Diese Anordnung ist jedoch nicht zu empfehlen. Verfasser hält es für das beste, die Endvertikale fortzulassen und das Gelenk  $G$  in die untere Gurtung zu legen.



in  $K_1 \parallel AF$  und ziehen hierauf im Kräfteplane den Strahl  $s \parallel AB$ ; er zerlegt  $P$  in  $A$  und  $B$ . Wird noch der Strahl  $OR \parallel S_e$  gezogen, so gibt die Strecke  $OR$  die Größe der Spannkraft  $S_e$  an, und der

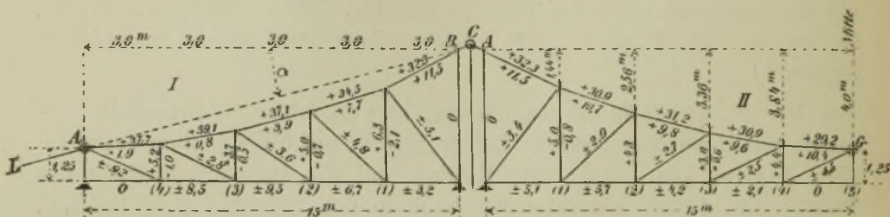


Fig. 396.

Punkt  $R$  zerlegt  $A$  in  $A_o$  und  $A_u$ . Fällt die Gerade  $AF$  mit der Richtung von  $S_e$  zusammen, geht also  $P$  durch den Schnittpunkt  $E$  von  $S_e$  und  $BG$ , so ergibt sich  $A_u = 0$ , und hieraus folgt, daß der Nullpunkt  $N$  auf der Senkrechten durch  $E$  liegt.

Im vorliegenden Beispiele liegt  $E$  im vierten Felde. Die Ermittlung von  $_{max}A_u$  und  $_{min}A_u$  geschieht hier, mit Beachtung der für den Parabelbogen nachgewiesenen einfachen Gesetze und mit Bezugnahme auf die Rechnungen in No. 187, wie folgt. Belastet man, um  $_{min}A_{uP}$  zu erhalten, nur die Knoten 4 bis 9 und zwar mit je  $p\lambda$ , so entsteht (nach Seite 382)

$$A = 21 \quad A' = 21 \cdot 0,2 = 4,2^t, \quad H = 19 \quad H' = 19 \cdot 0,75 = 14,25^t.$$

Da nun  $A_o = H \operatorname{tg} \gamma_1$  und  $A_u = A - A_o = A - H \operatorname{tg} \gamma_1$  ist (wo  $\gamma_1$  Neigungswinkel von  $CA$ ), so folgt

$$_{min}A_{uP} = 4,2 - 14,25 \frac{1,44}{3,00} = -2,6^t.$$

Bei gänzlicher Belastung mit  $p$  wird (wegen des Zusammenfallens des Seilpolygons mit der oberen Gurtung)  $A_{uP} = \frac{1}{2} p\lambda = 1,0^t$ ; ferner ist  $_{max}A_{uP} + _{min}A_{uP} = A_{uP}$ , also  $_{max}A_{uP} = +2,6 + 1,0 = +3,6^t$ . Die ständige Belastung erzeugt  $A_{uG} = \frac{1}{2} g\lambda = \frac{1}{2} \cdot 0,37 \cdot 3,0 = 0,6^t$  weshalb sich schließlich ergibt  $_{min}A_u = -2,6 + 0,6 = -2,0^t$  und  $_{max}A_u = +3,6 + 0,6 = +4,2^t$ .\*)

Wegen des negativen Wertes  $_{min}A_u$  muß das fragliche Auflager verankert werden.

\*) Es unterscheiden sich diese Werte von den für die Endvertikale des Bogensträgers in Fig. 389 gefundenen nur durch die Vorzeichen.

190. **Untersuchung der Seitenöffnung.** So lange nur Lasten zwischen  $A_1$  und  $B_1$  wirken, verhält sich der Trägerteil  $A_1 B_1$  wie ein einfacher Balken; es gelten die im § 30 abgeleiteten Gesetze. Wird also die Einflußlinie für irgend eine Spannkraft  $S$  gesucht (Fig. 397), so ermittelt man die Spannkraft  $S'$  für den früher erklärten Zustand  $A_1 = 1$  (vergl. No. 143) sowie den Schnittpunkt  $E$  der beiden anderen vom Schnitte  $tt$  getroffenen Stäbe und legt nun der Reihe nach die drei Geraden fest, aus denen die Einflußlinie besteht. Befindet sich  $E$  links von  $A_1$ , so entsteht im  $m^{\text{ten}}$  Felde eine Belastungsscheide. Liegt  $E$  zwischen  $A_1$  und  $B_1$ , so tragen alle innerhalb  $A_1 B_1$  angreifenden Lasten zu der fraglichen Spannkraft in gleichem Sinne bei. Wie bei ungünstiger Lage des Punktes  $E$  zu verfahren ist, und auf welche Weise die Schärfe der Zeichnung geprüft werden kann, ist früher auseinandergesetzt worden. Vergl. Seite 336.

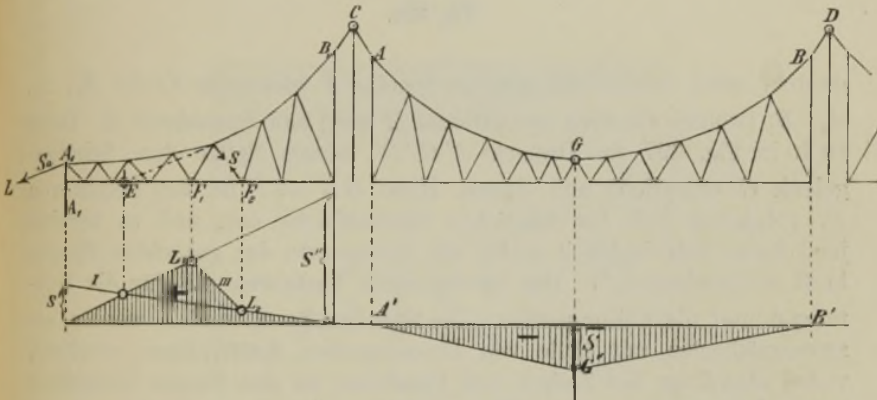


Fig. 397.

Es bleibt jetzt nur noch der Einfluß einer über der Mittelöffnung ruhenden Belastung anzugeben. Hat man den durch diese Belastung hervorgerufenen Horizontalschub  $H$  bestimmt, so findet man die Spannkraften  $S_1$  und  $S_2$  nach Fig. 398 mittels der Bedingung, daß Gleichgewicht nur möglich ist, wenn die wagerechte Projektion jeder dieser Kräfte  $= H$  ist. Indem man jetzt  $LA_1 B_1 C$  als ein Seilpolygon auffaßt, welches mit der Polweite  $H$  zu den Kräften  $A_1$  und  $B_1$  gezeichnet ist, und im Kräfteplane durch  $O$  zu  $A_1 B_1$  eine Parallele ( $s$ ) zieht, kann man auf die in der Fig. 398 angegebene Weise die Größe und den Sinn von  $A_1$  und  $B_1$  feststellen. Fällt die Richtung von  $S_2$  mit der Geraden  $A_1 B_1$  zusammen, wie dies in dem Beispiele in Fig. 396 angenommen wurde, so ergibt sich  $A_1 = 0$ .

Gesetzt nun, es stelle die Kraft  $H$  in Fig. 398 den Horizontal Schub infolge einer im Scheitelgelenk  $G$  der Mittelöffnung angreifenden Last *Eins* vor, und es entstehe in dem Stabe  $S$ , dessen Einflußlinie

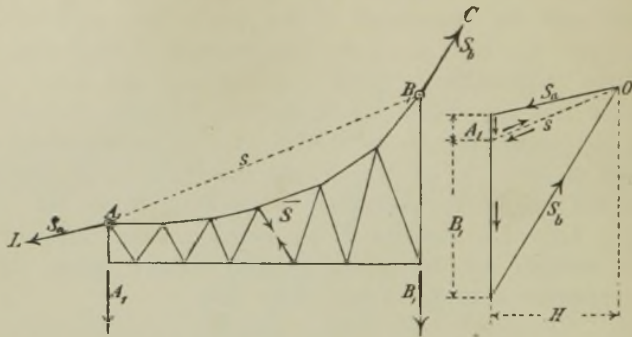


Fig. 398.

gesucht wird, infolge der auf die Scheibe  $I$  wirkenden Kräfte  $S_a$ ,  $S_b$ ,  $A_1$ ,  $B_1$  (welche sämtlich proportional  $H$  sind) eine Spannkraft  $\bar{S}$ . Dann stellt in Fig. 397 das Dreieck  $A'G'B'$ , dessen Spitze dem Scheitelgelenk  $G$  entspricht und dessen Höhe  $\overline{GG'} = \bar{S}$  ist, den rechts von  $B_1$  gelegenen Teil der fraglichen Einflußfläche dar, und es bereitet jetzt keine Schwierigkeit mehr, die Grenzwerte der gesuchten Spannkraft zu bestimmen.\*) Das beschriebene Verfahren gilt für die Gurtungen und die Füllungsstäbe. Die Spannkräfte  $S'$  und  $\bar{S}$  werden am zweckmäßigsten mit Hilfe von *Cremonaschen* Kräfteplänen ermittelt, wobei allerdings das Ziehen von Parallelen zu den kurzen Gurtstäben vermieden werden muß. Wir verweisen in dieser Beziehung auf Seite 308 und 378.

**Zahlenbeispiel.** Bei dem in der Fig. 396 dargestellten gleichmäßig mit  $q = 0,37'$  und  $p = 0,665'$  belasteten Fachwerke mit Vertikalen lassen sich, da die Knotenpunkte der oberen Gurtung jeder der beiden kongruenten Scheiben  $I$  und  $II$  auf Parabeln liegen, deren senkrechte Achsen durch  $A$ , beziehungsweise  $G$  gehen, wesentliche Vereinfachungen erzielen, wie die folgenden Rechnungen zeigen werden.

Zunächst sollen diejenigen Spannkkräfte  $S_M$  bestimmt werden, welche in den Stäben der Seitenöffnung entstehen, sobald die Mittelöffnung

\*) Für den in der Fig. 397 dargestellten Fall ergibt sich  $S'$  positiv und  $S$  negativ. Lasten, welche auf Scheibe  $IV$  wirken (Fig. 394) sind ohne Einfluß auf die Inanspruchnahme der Scheibe  $I$ .



gänzlich und zwar mit  $p$  belastet wird. Es greift dann am linken Ende nur eine von  $B_1$  nach  $A_1$  gerichtete äußere Kraft  $S_0$  an, Fig. 399,

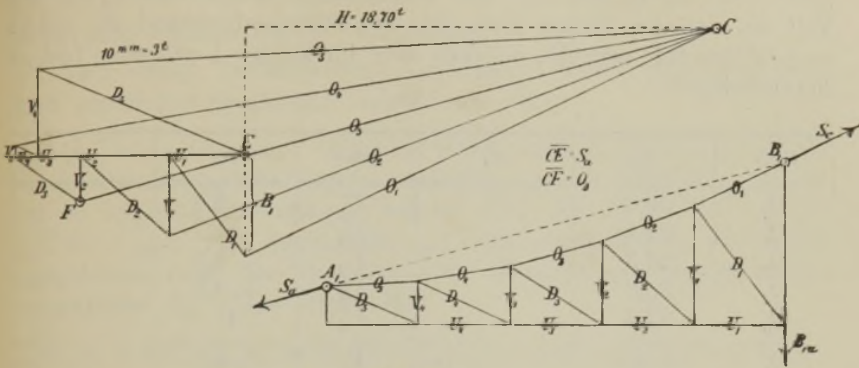


Fig. 399.

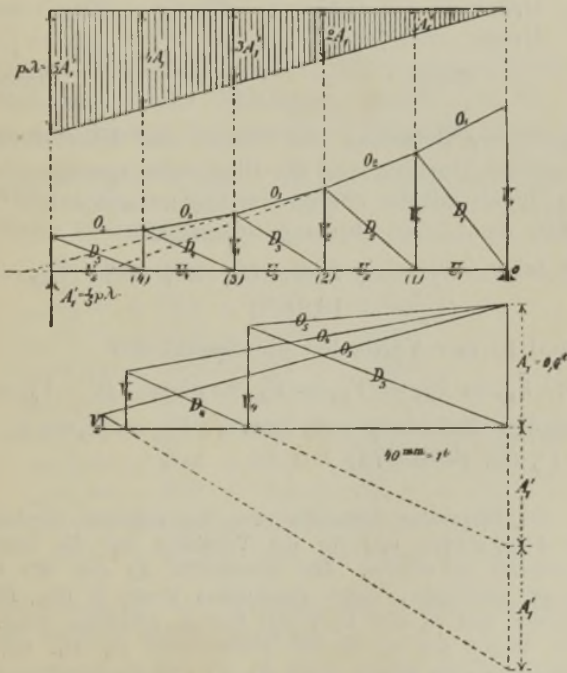


Fig. 400.

deren wagerechte Projektion  $= H_2 = \frac{pl^2}{8f} = 18,70t$  ist. Der für diesen

Zustand in Fig. 399 gezeichnete Cremonasche Plan liefert die in der folgenden Tabelle zusammengestellten Werte  $S_M$ . Dieselbe Tabelle gibt noch die in der Fig. 400 dargestellten Spannkkräfte  $S_A$  für den Fall an, daß am linken Ende nur der Stützenwiderstand  $A'_1 = \frac{1}{5} p \lambda = \frac{1}{5} \cdot 2,0 = 0,4^t$  angreift, welchen eine im Knoten 1 wirksame Last  $p \lambda$  hervorbringt.\*)

Stab	$S_M$	$S_A$	Stab	$S_M$	$S_A$
$O_1$	20,8		$U_1$	— 3,2	
$O_2$	23,4		$U_2$	— 6,7	
$O_3$	26,3		$U_3$	— 9,5	
$O_4$	28,6		$U_4$	— 8,5	
$O_5$	27,3		$U_5$	0	
$D_1$	+ 5,1		$V_1$	— 3,2	
$D_2$	+ 4,8		$V_2$	— 1,8	— 0,04
$D_3$	+ 3,35	+ 0,08	$V_3$	Zug	— 0,20
$D_4$	Druck	+ 0,47	$V_4$	Zug	— 0,35
$D_5$	Druck	+ 0,92			
		Tonnen			Tonnen

Bei gänzlicher Belastung von Seiten- und Mittelöffnung sind die Stäbe der unteren Gurtung und die Diagonalen spannungslos, weil das Mittelkraftspolygon mit der oberen Gurtung zusammenfällt\*\*), während in den Stäben der oberen Gurtung Spannkkräfte

$$O_{1p} = + 20,8^t; \quad O_{2p} = + 20,0; \quad O_{3p} = + 19,4; \quad O_{4p} = + 18,9; \\ O_{5p} = + 18,8^{***})$$

entstehen und in den Vertikalen die Spannkkräfte

$$V_{0p} = 0; \quad V_{1p} = V_{2p} = V_{3p} = V_{4p} = p \lambda = 2,0^t; \quad V_{5p} = - A_{1p}.$$

Die ständige Belastung ruft hervor  $U_{mg} = H_g \sec \beta_m$  d. i. (vergl. die Werte  $U_g$  auf Seite 378)

\*) Für die Diagonalen brauchen (wie die folgenden Rechnungen lehren werden) nur die positiven und für die Vertikalen nur die negativen Spannkkräfte  $S_M$  gemessen zu werden. Die Spannkkräfte  $S_A$  sind nur für diejenigen Füllungsstäbe zu bestimmen, deren zugehöriger Punkt  $E$  (Fig. 397) links von  $A_1$  liegt. Da sich nun  $O_3$  und  $U_2$  rechts von  $A_1$  schneiden, desgl.  $O_1$  und  $U_1$ , so genügt die Angabe der  $S_A$  für die Füllungsstäbe  $D_5, D_4, D_3, V_4, V_3, V_2$ . Hierauf ist namentlich zu achten, wenn die  $S_A$  und  $S_M$  berechnet werden sollen. Bei ungleichen Feldweiten ist nicht der Zustand  $A_1 = A'_1$  zu untersuchen, sondern der Zustand  $A_1 = 1$ .

\*\*) Vergl. Seite 375.

\*\*\*) Es ist  $O_{mp} = H_p \sec \beta_m$ , wo  $\beta_m =$  Neigungswinkel von  $O_m$ . Hiernach sind die  $O_{mp}$  entgegengesetzt gleich den auf Seite 378 ermittelten  $U_{mp}$ .

$$O_{1g} = + 11,5^t; \quad O_{2g} = + 11,1^t; \quad O_{3g} = + 10,8^t; \quad O_{4g} = + 10,5^t;$$

$$O_{5g} = + 10,4^t;$$

$$V_{0g} = 0; \quad V_{1g} = V_{2g} = V_{3g} = V_{4g} = g\lambda; \quad V_{5g} = -A_{1g};$$

sie ist ohne Einfluß auf die Spannkraften  $D$  und  $U$ .

Nach diesen vorbereitenden Rechnungen lassen sich die Grenzwerte sämtlicher Spannkraften schnell angeben.

1) *Untere Gurtung.* In irgend einem Stabe  $U$  entsteht der größte Druck oder der größte Zug, je nachdem nur die Mittelöffnung oder nur die fragliche Seitenöffnung belastet wird. Da  $U_g = 0$  ist, so folgt  ${}^{max}U = - {}^{min}U$ . Die Spannkraften  ${}^{min}U$  sind gleich den in der Tabelle angegebenen (von der Belastung der Mittelöffnung herrührenden) Spannkraften  $S_M$ . Man erhält also

$${}^{max}\{U_1 = \pm 3,2^t; \quad {}^{max}\{U_2 = \pm 6,7^t; \quad {}^{max}\{U_3 = \pm 9,5^t; \quad {}^{max}\{U_4 = \pm 8,5^t.$$

Die Spannkraft  $U_5$  ist  $= 0$ .

2) *Obere Gurtung.* Belastet man nur die Mittelöffnung mit  $p$ , so entsteht  ${}^{max}O_p = S_M$ ; wird nur die Seitenöffnung mit  $p$  belastet, so wird  ${}^{min}O_p$  erzeugt. Dabei ist  ${}^{min}O_p + {}^{max}O_p = O_p =$  Spannkraft infolge gänzlicher Belastung beider Öffnungen, woraus  ${}^{min}O_p = -S_M + O_p$ . Rechnet man den Einfluß der ständigen Belastung hinzu, so entsteht

$${}^{max}O = S_M + O_g \quad \text{und} \quad {}^{min}O = -S_M + O_p + O_g.$$

Auf diese Weise findet man

$$\begin{aligned} {}^{max}O_1 &= + 20,8 + 11,5 = + 32,3^t \\ {}^{max}O_2 &= + 23,4 + 11,1 = + 34,5^t \\ {}^{max}O_3 &= + 26,3 + 10,8 = + 37,1^t \\ {}^{max}O_4 &= + 28,6 + 10,5 = + 39,1^t \\ {}^{max}O_5 &= + 27,3 + 10,4 = + 37,7^t \\ {}^{min}O_1 &= - 20,8 + 20,8 + 11,5 = + 11,5^t \\ {}^{min}O_2 &= - 23,4 + 20,0 + 11,1 = + 7,7^t \\ {}^{min}O_3 &= - 26,3 + 19,4 + 10,8 = + 3,9^t \\ {}^{min}O_4 &= - 28,6 + 18,9 + 10,5 = + 0,8^t \\ {}^{min}O_5 &= - 27,3 + 18,8 + 10,4 = + 1,9^t. \end{aligned}$$

Die obere Gurtung wird hiernach nur auf Zug beansprucht, darf also auch aus flachen Stäben bestehen.

Für die Rückhaltkette  $A_1L$  (Fig. 396), deren Neigungswinkel gegen die Wagerechte  $= \alpha$  sei, erhält man

$${}^{max}S_a = (H_g + H_p) \sec \alpha = (10,4 + 18,70) 1,035 = + 30,2^t$$

$${}^{min}S_a = H_g \sec \alpha - 10,4 \cdot 1,035 = + 10,8^t.$$



3) *Diagonalen.* Da der Schnittpunkt von  $O_1$  und  $U_1$  rechts von  $A_1$  liegt, desgleichen der Schnittpunkt von  $O_2$  und  $U_2$ , so tragen alle über der Seitenöffnung befindlichen Lasten zu den Spannkraften  $D_1$  und  $D_2$  in gleichem Sinne bei. Ausschließliche Belastung der Mittelöffnung erzeugt (da  $D_g = 0$  ist) die Spannkraften

$${}_{max}D_1 = S_M = +5,1^t \text{ und } {}_{max}D_2 = +4,8^t.$$

Ausschließliche Belastung der Seitenöffnung erzeugt (wegen  ${}_{min}D = -{}_{max}D$ ) die Spannkraften

$${}_{min}D_1 = -5,1^t \text{ und } {}_{min}D_2 = -4,8^t.$$

In jeder der übrigen Diagonalen rufen Lasten, welche auf der Seitenöffnung ruhen, Zug oder Druck hervor, je nachdem sie rechts oder links von der fraglichen Diagonale liegen. Da nun der Wert  $S_M$  für die Diagonale  $D_3$  positiv ist, so entsteht  ${}_{max}D_3$ , wenn jeder der Knoten 2 und 1 mit  $p\lambda$  und außerdem die ganze Mittelöffnung belastet wird. Die in 2 und 1 angreifenden Lasten  $p\lambda$  erzeugen:  $A'_1 = A' + 2A'_1 = 3A'_1$  (siehe Fig. 400) und  $D_3 = 3S_A = 3 \cdot 0,08 = 0,24^t$ , weshalb

$${}_{max}D_3 = 0,24 + S_M = 0,24 + 3,35 = +3,6^t = -{}_{min}D_3.$$

In  $D_4$  und  $D_5$  erzeugt die Belastung der Mittelöffnung Druckspannungen. Um  ${}_{max}D_4$  zu erhalten, belastet man nur die Knoten 1, 2, 3 und um  ${}_{max}D_5$  zu erzeugen, nur die Knoten 1, 2, 3, 4. Im ersten Falle ergibt sich

$$A_1 = A'_1(1 + 2 + 3) = 6A'_1;$$

$${}_{max}D_4 = 6 \cdot 0,47 = +2,8^t = -{}_{min}D_4.$$

Im zweiten Falle findet man

$$A_1 = A'_1(1 + 2 + 3 + 4) = 10A'_1;$$

$${}_{max}D_5 = 10 \cdot 0,920 = +9,2^t = -{}_{min}D_5.$$

4) *Vertikalen.* In der Vertikale  $V_1$  erzeugt, da der Schnittpunkt von  $O_2$  und  $U_1$  rechts von  $A_1$  liegt, jede Last über der Seitenöffnung einen Zug. Es entsteht also  ${}_{min}V_{1p} = S_M$  infolge ausschließlicher und gänzlicher Belastung der Mittelöffnung mit  $p$ , ferner, wenn nur die Seitenöffnung mit  $p$  belastet wird,  ${}_{max}V_{1p} = -S_M + V_p$ .\* Rechnet man  $V_g = g\lambda = 1,11$  hinzu, so findet man

$${}_{min}V_1 = S_M + g\lambda = -3,2 + 1,1 = -2,1^t;$$

$${}_{max}V_1 = -S_M + p\lambda + g\lambda = +3,2 + 2,0 + 1,1 = +6,3^t.$$

In der Vertikale  $V_2$  erzeugen (da der Schnittpunkt von  $O_3$  und  $U_2$  links von  $A_1$  liegt) die Belastungen der Knoten 2, 3, 4, Zugspannungen.

\*) Es ist  ${}_{max}V_p + {}_{min}V_p$  gleich der infolge gänzlicher Belastung beider Öffnungen entstehenden Spannkraft  $V_p$ .

Um  ${}_{\min}V_{2p}$  zu erhalten, wird, da  $S_M$  negativ ist, die Mittelöffnung mit  $p$  belastet und außerdem nur der Knoten 1 mit  $p\lambda$ . Letztere Last ruft hervor:  $A_1 = A'_1$ , also  $V_{2p} = S_A = -0,04$ , weshalb  ${}_{\min}V_{2p} = S_M + S_A = -1,8 - 0,04 = -1,84'$ . Man erhält nun

$${}_{\min}V_2 = -1,84 + g\lambda = -1,84 + 1,11 = -0,7'$$

$${}_{\max}V_2 = +1,84 + p\lambda + g\lambda = +1,84 + 2,0 + 1,11 = +5,0'.$$

In den Vertikalen  $V_3$  und  $V_4$  entstehen infolge der Belastung der Mittelöffnung Zugspannungen. Man findet  ${}_{\min}V_{p3}$  und  ${}_{\min}V_{p4}$ , indem man zuerst nur die Knoten 1 und 2, hierauf nur die Knoten 1, 2, 3 mit je  $p\lambda$  belastet. Im ersteren Falle entsteht

$$A_1 = A'_1(1 + 2) = 3A'_1; \quad {}_{\min}V_{p3} = 3S_A = -3 \cdot 0,20 = -0,60'$$

$${}_{\min}V_3 = -0,60 + g\lambda = +0,5'$$

$${}_{\max}V_3 = +0,60 + p\lambda + g\lambda = +3,7',$$

und im zweiten Falle

$$A_1 = A'_1(1 + 2 + 3) = 6A'_1; \quad {}_{\min}V_{p4} = 6S_A = -6 \cdot 0,35 = -2,10'$$

$${}_{\min}V_4 = -2,10 + g\lambda = -1,0'$$

$${}_{\max}V_4 = +2,10 + p\lambda + g\lambda = +5,2'.$$

Die gewonnenen Spannkkräfte sind in der Fig. 396 übersichtlich zusammengestellt worden.

Es sind noch die Grenzwerte der an der Scheibe  $I$  angreifenden Stützenwiderstände  $B_1$  und  $A_1$  anzugeben. Bei gänzlicher Belastung der 15<sup>m</sup> weiten Seitenöffnung mit  $p = 0,665'$  und unbelasteter Mittelöffnung ergibt sich:  ${}_{\max}B_{1p} = \frac{1}{2} \cdot 0,665 \cdot 15 = 4,99'$ . Ausschließliche und gänzliche Belastung der Mittelöffnung mit  $p$  erzeugt den größten negativen Widerstand  $B_{1p}$  (d. i.  ${}_{\min}B_{1p}$ ); er ist durch den Kräfteplan in Fig. 399 gegeben, kann aber auch im vorliegenden

Falle mittels der Gleichung  ${}_{\min}B_{1p} + {}_{\max}B_{1p} = \frac{p\lambda}{2} = 1,0'$  bestimmt

werden. Man findet:  ${}_{\min}B_{1p} = -4,99 + 1,0 = -3,99'$ . Die ständige Belastung ruft hervor:  $B_{1g} = \frac{1}{2} g\lambda = \frac{1}{2} \cdot 1,11 = 0,56'$  und es ergibt sich schließlich

$${}_{\max}B_1 = 4,99 + 0,56 = +5,5'; \quad {}_{\min}B_1 = -3,99 + 0,56 = -3,4'.$$

Da  ${}_{\min}B_1$  negativ ist, muß die Scheibe  $I$  bei  $B_1$  an dem Pfeiler verankert werden.

Am Auflager  $A_1$  ruft ausschließliche und gänzliche Belastung der Seitenöffnung mit  $p = 0,665'$  den Widerstand  $A_{1p} = \frac{1}{2} \cdot 0,665 \cdot 15 = 4,99'$  hervor, ausschließliche und gänzliche Belastung der Mittelöffnung den Widerstand  $A_1 = 0$ . Die ständige Belastung  $g = 0,37'$  erzeugt hiernach:  $A_{1g} = \frac{1}{2} \cdot 0,37 \cdot 15 = 2,77'$  und im ganzen entsteht  $A_1 = 4,99 + 2,77 = +7,8'$ . Der Widerstand  $A_1$  ist stets positiv

b. Untersuchung des aus Fischbauchträgern zusammengesetzten Hängewerks in Fig. 401.\*)

191. Das vorliegende Hängewerk, dessen Auflagergelenke  $A$  und  $B$  auf wagerechten Geraden geführt werden, und welches an den Enden (bei  $A_1$ ) in derselben Art gestützt wird, wie der vorhin untersuchte Träger (Fig. 394), kann auch in derselben Weise wie jener berechnet werden. Der mittlere Teil  $AGB$  ist ein umgekehrter Bogen mit drei Gelenken, während sich jede Seitenöffnung  $A_1A$  unter dem Einflusse der auf ihr ruhenden Lasten wie ein einfacher Balken verhält

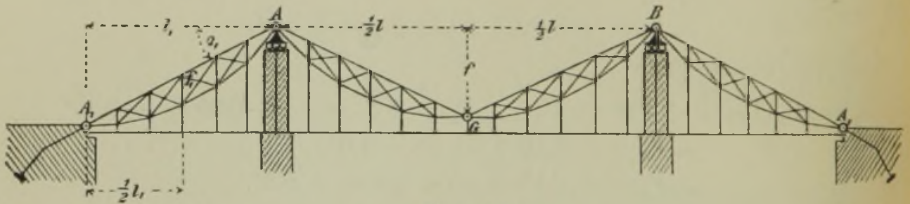


Fig. 401.

und infolge Belastung der Mittelöffnung noch durch zwei in  $A_1$  und  $A$  angreifende, entgegengesetzt gleiche Kräfte beansprucht wird, welche die Richtungen  $AA_1$  und  $A_1A$  haben. Es möge nur noch auf einige Vereinfachungen hingewiesen werden, die wegen der geradlinigen oberen Gurtungen möglich ist.

Zerlegt man die am Trägerteile  $AG$  in  $A$  und  $G$  angreifenden Widerstände auf die in No. 185 angegebene Art in die Seitenkräfte  $A'$ ,  $B'$  und  $Q$  (Fig. 402b) und denkt die Spannkraften  $U$ ,  $D$  und  $V$  mittels *Ritterscher* Momentengleichungen bestimmt, so sieht man sofort ein, daß alle diese Spannkraften unabhängig von  $Q$  sind, da sämtliche Drehpunkte in der Geraden  $AG$  liegen. Hieraus folgt aber, daß bei der Ermittlung der  $U$ ,  $D$  und  $V$  das Trägerstück  $AG$  als einfacher Balken behandelt werden darf.

Ist also sowohl die ständige als auch die veränderliche Belastung eine gleichförmig verteilte ( $g$  und  $p$ ), und liegen die Knotenpunkte der unteren Gurtung auf einer Parabel mit senkrechter Achse, in welchem Falle, mit den in der Fig. 402 a und b angegebenen Bezeichnungen,

\*) In ähnlicher Weise ist die Hängebrücke über den *Monongahela* bei *Pittsburgh* (Nord-Amerika) ausgeführt. An Stelle der seitlichen Fischbauchträger sind (wie in Fig. 403) geradlinige Rückhaltketten vorhanden.



$$y_m = \frac{4fx_m(l-x_m)}{l^2} \text{ und } h_m = \frac{4f'x_m(l'-x_m)}{l'^2}, \text{ ferner } f' = \frac{1}{4} f^*)$$

ist, so gelten die Gleichungen

$$(1) \max U_m = \frac{ql'^2}{8f'} \sec \gamma_m = \frac{ql^2}{8f} \sec \gamma_m^{**})$$

$$(2) \max D_m = \frac{pl'}{8f'} d_m$$



Fig. 402.

wonach  $d_m$  = Länge der Diagonale. In der Fig. 402 sind in jedem Felde zwei sich kreuzende schlaife Diagonalen vorausgesetzt worden. Je nachdem sich die veränderliche Belastung ( $p$ ) von  $G$  nach  $A$  oder von  $A$  nach  $G$  über die Brücke bewegt, treten die linkssteigenden oder die rechtssteigenden Diagonalen in Tätigkeit.

Zu beachten ist, daß bei gleich großen Feldweiten  $\lambda$  die waagrechten Projektionen der Spannkraften  $D_m$  und  $D_m^0$  sämtlicher links- und

\*) Diese Beziehung gilt auch, wenn bei  $x = \frac{1}{2} l'$  keine Vertikale vorhanden ist, in welchem Falle  $f'$  die auf die Gerade  $AG$  bezogene senkrechte Ordinate der umschriebenen Parabel bedeutet. Vergl. auch Fig. 268.

\*\*\*) Vergl. § 35. Für die untere Gurtung ist  $\frac{\min U}{\max U} = \frac{g}{q}$ .

rechtssteigenden Diagonalen den gleichen Wert  $\frac{pl'}{8f'} \lambda$  besitzen; vergleiche Fig. 402 c.

Um den in der  $m^{\text{ten}}$  Vertikale infolge der von  $G$  nach  $A$  vorrückenden Belastung entstehenden größten Druck  ${}_{\min} V_m$  zu bestimmen, zeichne man (da  ${}_{\min} V_m$  gleichzeitig mit  ${}_{\max} D_{m+1}$  entsteht) ein Kräfte-dreieck, dessen Seiten parallel  $D_{m+1}$ ,  $O$  und  $V_m$  sind, und dessen eine Seite  $= {}_{\max} D_{m+1}$  ist. Fig. 402 c. Man findet dann leicht

$$(-{}_{\min} V_m) : {}_{\max} D_{m+1} = h_{m+1} : d_{m+1}, \text{ woraus } {}_{\min} V_m = -\frac{pl'}{8f'} h_{m+1}.$$

Der an der oberen Gurtung angreifende Teil  $g_0$  der ständigen Belastung  $g$  erzeugt  $V_{mg} = -\frac{1}{2} g_0 (\lambda_m + \lambda_{m+1})$ , und es ergibt sich daher der (auch für ungleichweite Felder gültige) Ausdruck

$$(3) \quad {}_{\min} V_m = -\frac{pl'}{8f'} h_{m+1} - \frac{1}{2} g_0 (\lambda_m + \lambda_{m+1}),$$

während  ${}_{\max} V_m = V_{mg}$  ist. Rückt die bewegliche Belastung von  $A$  aus nach  $G$  vor, so werden die rechtssteigenden Diagonalen gespannt, und es entsteht

$$(4) \quad {}_{\min} V_m = -\frac{pl'}{8f'} h_{m-1} - \frac{1}{2} g_0 (\lambda_m + \lambda_{m+1}).$$

Von den beiden Werten (3) und (4) ist der größere zu wählen. Für die Vertikalen links von  $f'$  gilt also Gleichung (3), für die anderen Gleichung (4). Zeichnet man ein Polygon,\* dessen Ecken auf einer Parabel mit dem Pfeile  $\frac{pl'}{8}$  liegen (Fig. 402 d) und den Knotenpunkten des Trägers  $AG$  entsprechen, so ist die Ordinate  $Y_m$  dieses Polygons  $= \frac{pl'}{8f'} h_m$ , und es folgt für eine links von  $f'$  befindliche Vertikale der Ausdruck

$$(5) \quad {}_{\min} V_m = -Y_{m+1} - \frac{1}{2} g_0 (\lambda_m + \lambda_{m+1})$$

und für eine rechts von  $f'$  gelegene

$$(6) \quad {}_{\min} V_m = -Y_{m-1} - \frac{1}{2} g_0 (\lambda_m + \lambda_{m+1}).$$

Die Gleichungen (1) bis (6) gelten auch für die *Seitenöffnungen*, sobald  $l'$  und  $f'$  durch  $l_1$  und  $f_1$  ersetzt werden, Fig. 401.\*\*)

\*) Das Polygon in Fig. 402 d läßt sich als ein Seilpolygon betrachten, welches mit der Polweite  $l'$  zu den Knotenlasten eines gleichmäßig belasteten Balkens  $A''B''$  gezeichnet ist.

\*\*)  $f_1$  ist die in senkrechter Richtung gemessene Höhe des Fischbauchträgers bei  $x = \frac{1}{2} l_1$ . Ist an dieser Stelle keine Vertikale vorhanden, so ist  $f_1$  die auf  $A_1 A_1$  bezogene Höhe der umschriebenen Parabel.

Wir gehen nun zur Bestimmung der Spannkkräfte  $O$  für den Fall parabelförmiger unterer Gurtungen über und betrachten zuerst die Mittelöffnung. Der Punkt  $E$ , in welchem eine durch  $A$  und den unteren Knoten  $m$  gelegte Gerade die Gerade  $BG$  trifft, ist Belastungsscheide für das Moment  $M_m$ . Die von  $B$  bis  $E$  reichende bewegliche Belastung erzeugt

$$(7) \quad \min M_m = -\frac{px_m(l^2 - 3lx_m + 2x_m^2)^*}{2(3l - 2x_m)}$$

und (da die linkssteigenden Diagonalen gespannt werden)

$$\max O_m = -\frac{M_m}{h_m} \sec \beta = +\frac{px_m(l^2 - 3lx_m + 2x_m^2)}{2(3l - 2x_m)h_m} \sec \beta.$$

Dieser Ausdruck läßt sich durch Einsetzen von

$$h_m = \frac{4f'x_m(l' - x_m)}{l'^2} = \frac{2fx_m(l - 2x_m)}{l^2}$$

leicht umformen in

$$(8) \quad \max O_m = \frac{pl^2}{8f} \sec \beta \frac{l - x_m}{1,5l - x_m}$$

und führt zu der folgenden einfachen Darstellung von  $\max O_m$ . Man trägt von einer Wagerechten  $A'B'$  aus, im Abstände  $B'L = \frac{1}{2}l^{**}$  von der Senkrechten durch  $B$  die senkrechte Strecke  $\overline{LJ} = \frac{pl^2}{8f}$  auf, zieht  $JR \parallel A'B'$  und  $LR \perp AG$  und findet zunächst  $\overline{LR} = \frac{pl^2}{8f} \sec \beta$ . Bestimmt man nun senkrecht unter  $m$  den Punkt  $C$  der Geraden  $A'B'$  und zieht die Gerade  $CR$ , so schneidet diese auf einer durch  $B'$  parallel zu  $LR$  gelegten Geraden die Strecke ab

$$\overline{B'F} = \overline{LR} \frac{l - x_m}{1,5l - x_m} = \max O_m.$$

Wird nur die positive Beitragstrecke  $AE$  mit  $p$  belastet, so entsteht das Moment  $\max M_m$ , welches sich von dem durch die Gleich. (7) gegebenen Momente  $\min M_m$  nur durch das Vorzeichen unterscheidet, da gänzliche Belastung der Mittelöffnung den Wert  $M_m = 0$  erzeugt. Es treten jetzt aber die rechtssteigenden Diagonalen in Tätigkeit, und es ergibt sich mithin

$$\min O_{m+1} = -\frac{M_m}{h_m} \sec \beta = -\max O_m.$$

\*) Nach Gleich. (9) Seite 205.

\*\*\*) In Fig. 402 wurde, um Raum zu sparen,  $B'L$  kleiner als  $\frac{1}{2}l$  gezeichnet.



Im ersten Felde ist  $\min O_1 = -\max O_1$ , und ebenso verhält sich auch das an  $G$  grenzende Feld.

Um die Spannkraft  $O$  für die Seitenöffnung zu finden, beachte man, daß ausschließliche und gänzliche Belastung der Seitenöffnung in der oberen Gurtung die größten Drücke erzeugt, während ausschließliche und gänzliche Belastung der Mittelöffnung die stärkste Beanspruchung auf Zug hervorbringt. Im ersteren Falle entsteht in jedem Stabe der Gurtung  $A_1 A$  Fig. 401

$$(9) \quad \min O_p = -\frac{pl_1^2}{8f_1} \sec \beta_1 \quad (\text{nach § 35})$$

und im zweiten

$$(10) \quad \max O_p = +\frac{pl^2}{8f} \sec \beta_1, \quad (\text{weil } H_p = \frac{pl^2}{8f}).$$

Die ständige Belastung erzeugt

$$(11) \quad O_g = \frac{g \sec \beta_1}{8} \left( \frac{l^2}{f} - \frac{l_1^2}{f_1} \right).$$

Wählt man  $f_1 = f \frac{l^2}{l_1^2}$  (also, wenn  $l_1 = l' = \frac{1}{2} l$  ist,  $f_1 = \frac{1}{4} f = f'$ ),

so ergibt sich  $O_g = 0$  und

$$(12) \quad \max O = \frac{pl^2}{8f} \sec \beta_1 = -\min O.*$$

## § 48.

### Kette, versteift durch einen Balken.

#### a. Kettenbrücke mit einer Öffnung.

**192. Einleitung.** Eine aus geraden, gelenkartig miteinander verbundenen Stäben bestehende, zunächst gewichtslos gedachte Kette, in deren Knotenpunkten Kräfte  $Z_1, Z_2, Z_3, \dots$  angreifen, nimmt die Form eines diesen Kräften entsprechenden Seilpolygons an. Sind Größe und Lage sämtlicher Kräfte  $Z$  gegeben, so ist die von den Stabachsen gebildete Kettenlinie bestimmt, sobald drei Punkte derselben — in der Regel die beiden Stützpunkte  $R$  und  $T$  und ein Punkt  $W$  in der Nähe des Scheitels — bekannt sind (Fig. 404); denn durch

\*) Der Bedingung  $f_1 : f = l_1^2 : l^2$  müssen auch die in Parabeln einbeschriebenen oberen Gurtungen des Hängewerks in Fig. 396 genügen, sobald im Falle ungleicher Scheiben  $I$  und  $II$  bei gänzlicher Belastung sämtliche Spannkraft  $U$  und  $D$  gleich Null sein sollen.

drei Punkte läßt sich nur ein einziges Seilpolygon der Kräfte  $Z$  zeichnen.\*) Mit der Belastung ändert sich im allgemeinen auch die Form der Kette.

Betrachten wir nun die in Fig. 403 dargestellte Kettenbrücke.  $RWT$  ist die *Tragkette*,  $RL$  und  $TN$  sind die *Rückhaltketten*; bei  $R$  und  $T$  sind, um die hohen Pfeiler nur in senkrechter Richtung zu belasten, bewegliche Lager mit wagerechten Führungen angeordnet (Fig. 404). Die senkrechten Hängestangen tragen die Querträger, diese

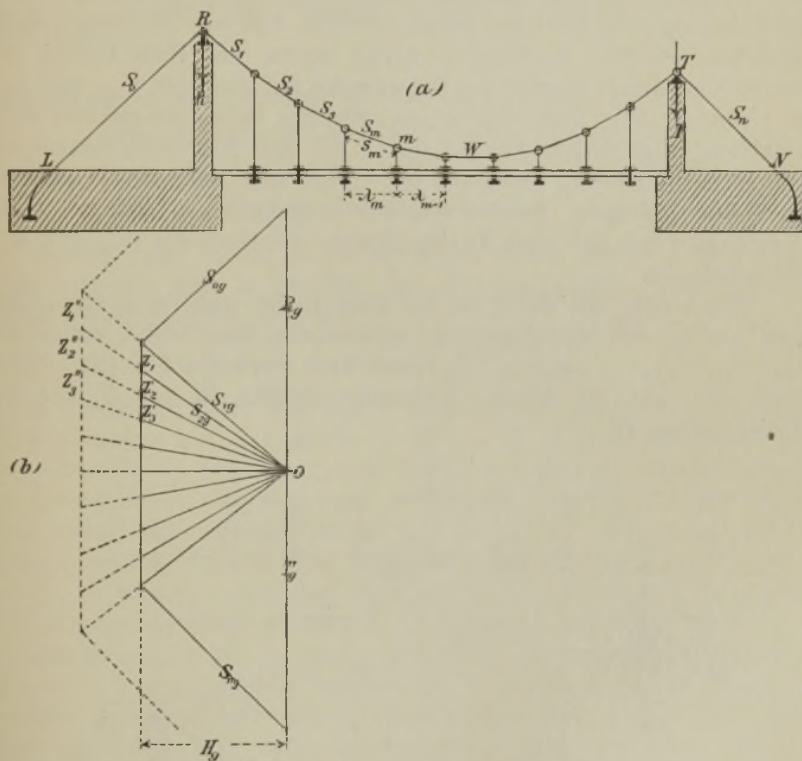


Fig. 403.

die Längsträger, letztere die Bahn. Die Brücke sei frei von Verkehrslast. Dann ist die Spannkraft in der  $m^{\text{ten}}$  Hängestange

$$Z_{mg} = \frac{1}{2} g_f (\lambda_m + \lambda_{m+1}) + G_{mh}$$

\*) Die Aufgabe: Zu gegebenen Kräften durch drei vorgeschriebene Punkte ein Seilpolygon zu zeichnen, ist in No. 108 gelöst worden.





kann man u. a. auch den folgenden Weg einschlagen. Man ermittelt die Biegemomente  $M_1, M_2, M_3, \dots$  für die den Knotenpunkten der Kette entsprechenden Querschnitte 1, 2, 3 . . . eines einfachen Balkens  $RT$ , welcher die Lasten  $Z_1, Z_2, Z_3, \dots$  trägt, desgleichen das Moment  $M_w$  für den dem Punkte  $W$  entsprechenden Balkenquerschnitt  $W$ , und findet dann mittels der Gleichung

$$M_w = Hh.$$

wo  $h$  die gegebene Ordinate des Punktes  $W$  ist, den Horizontalzug  $H$  und hierauf mittels der Gleichungen

$$M_1 = Hy_1, M_2 = Hy_2 \dots$$

die Ordinaten  $y_1, y_2, \dots$ . Die Spannkkräfte  $S_0, S_1, S_2, \dots S_n$  der unter  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n$  gegen die Wagerechte geneigten. Kettenglieder werden mittels der Formel

$$(1) S_m = H \sec \varphi_m$$

berechnet, und für die Drücke auf die Pfeiler findet man die Werte

$$(2) R = H (\operatorname{tg} \varphi_0 + \operatorname{tg} \varphi_1); \quad T = H (\operatorname{tg} \varphi_{n-1} + \operatorname{tg} \varphi_n).^*)$$

Ist die Gestalt der Kette und der Horizontalzug  $H$  gegeben, so ergibt sich

$$(3) Z_m = H (\operatorname{tg} \varphi_m - \operatorname{tg} \varphi_{m+1}).$$

Werden die Lasten  $Z'_m$  (Fig. 403b) durch Lasten  $Z''_m$  ersetzt, diese letzteren aber so gewählt, daß das gegenseitige Verhältnis der Lasten dasselbe bleibt, daß also

$$Z''_1 : Z''_2 : Z''_3 : \dots = Z'_1 : Z'_2 : Z'_3 : \dots$$

ist, so behält die Kette ihre Form; es ändert sich nur die Größe des Horizontalzuges und der Kräfte  $S, R$  und  $T$ , und hieraus folgt, daß eine gleichförmig über die ganze Brücke verteilte Verkehrsbelastung nur unwesentliche Verrückungen der Knoten der Kette verursachen wird, sobald die ständige Belastung zum größten Teile eine gleichförmig verteilte ist. Erfährt jedoch die Brücke eine einseitige Belastung, so können unzulässige Formänderungen entstehen, die um so beträchtlicher ausfallen, je kleiner die ständige und je größer die bewegliche Belastung ist. Um eine wellenförmige Bewegung der Brückenbahn beim Übergange der Verkehrslast zu verhüten, ist die Kette zu versteifen, beispielsweise durch einen Balken  $AB$ , der an der Kette hängt (dessen Gewicht also bei der Berechnung von  $g_f$  zu berücksichtigen ist) und der bei  $A$  ein festes, bei  $B$  ein auf einer Wagerechten bewegliches Auflagergelenk besitzt. Fig. 405. Die Ermittlung der an diesem Balken angreifenden Kräfte bildet den Gegenstand der folgenden Untersuchungen. Im Verlaufe derselben wird sich zeigen, daß, zur Erzielung statischer Bestimmtheit, der Balken aus zwei durch ein Gelenk  $G$  miteinander bestehenden Teilen herzustellen ist.

Die nachstehenden Entwicklungen knüpfen wir an die Annahme

\*)  $\varphi_{n-1} = \text{spitzer Winkel des Stabes gegen die Wagerechte.}$

vollkommener Starrheit des Balkens, der Hängestangen und der Kette. Wir setzen also wie in den früheren Abschnitten vernachlässigbar kleine elastische Formänderungen voraus, und dürfen dann die Kettenlinie auch als das Seilpolygon derjenigen Kräfte  $Z_p$  betrachten, welche in den Hängestangen durch die nach Ausführung der Versteifung aufgebrauchten Lasten  $P$  hervorgerufen werden.

Die Kräfte  $Z_p$  und die von ihnen in den Kettengliedern und an den Auflagern ( $R$  und  $T$ ) erzeugten Kräfte  $S_p, R_p, T_p$  sind bekannt, sobald der — ebenfalls von den Lasten  $P$  herrührende — Horizontalzug  $H_p$  gegeben ist; man hat nur nötig, in Fig. 403b  $H_p$  durch  $H_p$  zu ersetzen. Werden die dem größten Werte  $H_p$  entsprechenden Kräfte  $Z_p, S_p, R_p, T_p$  zu denjenigen addiert, die bereits vor der Versteifung der Kette wirksam waren, so ergeben sich die größten Spannkraftkräfte, welche überhaupt in den Hängestangen und Kettengliedern auftreten, sowie die größten Drücke auf die Kettenpeiler. (Man erhält sie, sobald man in Fig. 403  $H_p$  durch  $H_p + H_p$  ersetzt.) Wir haben uns deshalb im folgenden nur noch mit der Bestimmung von  $H_p$  und mit der Inanspruchnahme des Versteifungsbalkens zu beschäftigen. Bevor wir mit diesen Untersuchungen beginnen, heben wir noch besonders hervor, daß es bei der Berechnung der Inanspruchnahme einer Kettenbrücke stets zulässig ist, die Knotenpunkte der Kette auf einer Parabel mit senkrechter Achse liegend anzunehmen, entsprechend der Voraussetzung einer gleichförmigen ständigen Belastung  $g$ . Die vorhin gelehrt genauere Formbestimmung ist hauptsächlich von Wert für die Aufstellung der Brücke, muß aber noch durch die (im zweiten Bande dieses Buches gelehrt) Berücksichtigung der Dehnungen der elastischen Kette ergänzt werden.

### 193. Allgemeine Untersuchung des Versteifungsbalkens.

Bezeichnet

- $M_p$  das Moment für irgend einen Querschnitt  $C$  des an der Kette hängenden Balkens  $AB$ ,
- $M_{0p}$  das durch die Lasten  $P$  hervorgerufene Biegemoment für den Querschnitt  $C$  eines nur bei  $A$  und  $B$  gestützten (nicht an der Kette hängenden) einfachen Balkens  $AB$ ,
- $y$  die senkrechte Ordinate des dem Querschnitte  $C$  entsprechenden Punktes  $C'$  der Kette, bezogen auf die Verbindungslinie der Punkte  $A'$  und  $B'$ , in denen die Kette von den Senkrechten durch die Stützpunkte  $A$  und  $B$  geschnitten wird, Fig. 405,

so ist

$$(4) \quad M_p = M_{0p} - M_p y.$$

Das zweite Glied dieser Gleichung gibt den Einfluß der Kräfte  $Z_p$  an; man erhält es, indem man die Fläche zwischen der Schlußlinie  $A'B'$  und der Kettenlinie  $A'G'B'$  als die den Kräften  $Z_p$  entsprechende Culmannsche Momentenfläche ansieht und nach No. 69 verfährt. — Für das Mittelgelenk  $G$  ergibt sich

$$M_G = M_{0G} - H_p l$$

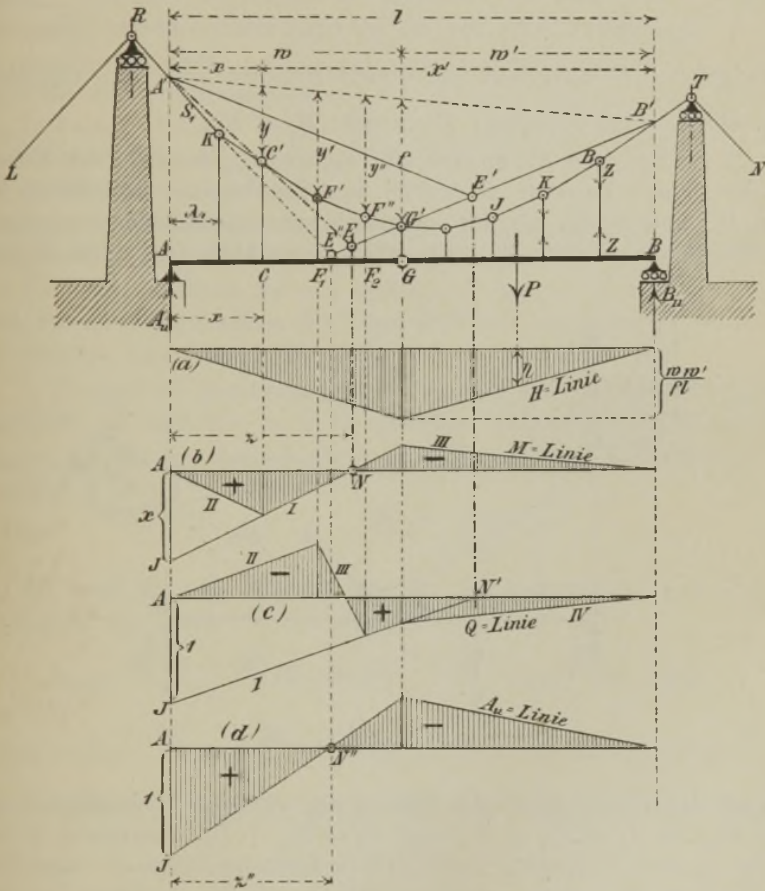


Fig. 405.

und hieraus folgt, da  $M_G = 0$  sein muß

$$(5) \quad H_p = \frac{M_{0G}}{f}$$



Bei fehlendem Mittelgelenke ist es nicht möglich,  $H_p$  lediglich mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen anzugeben; der Träger ist dann ein statisch unbestimmter.

Da die Gleichungen (4) und (5) mit den auf Seite 183 für den Bogen mit drei Gelenken abgeleiteten Gleichungen (2) und (3) übereinstimmen, so können die im § 24 zur Ermittlung von  $M$  und  $H$  angegebenen Verfahren auch auf den vorliegenden Fall angewendet werden. Es mögen die wichtigsten Gesetze hier wiederholt werden.

1. Die Einflußfläche für  $H_p$  ist ein Dreieck, dessen Spitze dem Mittelgelenke  $G$  entspricht und dessen Höhe  $= \frac{ww'}{lf}$  ist; vergleiche Fig. 405a. Eine Einzellast  $P$  erzeugt:  $H_p = P\eta$ .

2. Zerlegt man die Spannkkräfte  $S_{1p}$  und  $S_{2p}$  der äußersten Kettenlieder in den Punkten  $A'$  und  $B'$  in die senkrechten Seitenkräfte  $A_{op}$  und  $B_{op}$  und in die mit der Schlußlinie zusammenfallenden, entgegengesetzt gleichen Kräfte  $H'_p$  (Fig. 406\*), setzt hierauf  $A_{op}$  und  $B_{op}$  mit

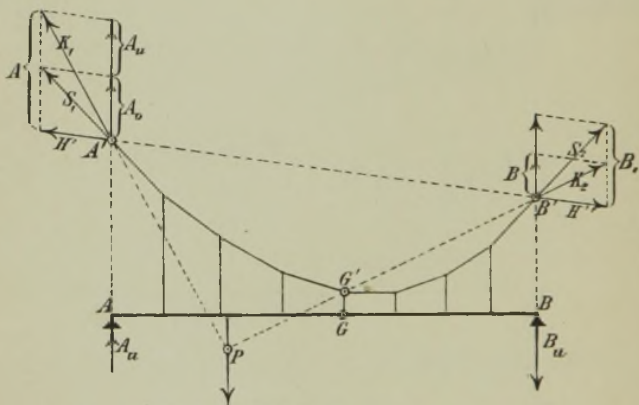


Fig. 406.

den an den Stützpunkten des Balkens angreifenden Widerständen  $A_{op}$  und  $B_{op}$  zu  $A_p = A_{op} + A_{up}$  und  $B_p = B_{op} + B_{up}$  zusammen, so besitzen  $A_p$  und  $B_p$  dieselbe Größe wie die Stützwiderstände eines nicht an der Kette hängenden einfachen Balkens. Greift am Träger nur eine einzige Last  $P$  an, so treffen sich  $K_1$  (d. i. Mittelkraft von  $A_p$  und  $H'_p$ ),  $K_2$  (d. i. Mittelkraft von  $B_p$  und  $H'_p$ ) und  $P$  in einem Punkte. Liegt  $P$  links von  $G$ , so geht  $K_2$  durch den dem Gelenke  $G$  entsprechenden Punkt  $G'$  der Kette; befindet sich  $P$  rechts von  $G$ , so geht  $K_1$  durch  $G'$

\*) In dieser Figur haben wir die Zeiger  $p$  weggelassen.

3. Für den Stützenwiderstand  $A_{u,p}$  erhält man die in der Fig. 405d dargestellte Einflußfläche; sie ist bestimmt durch  $\overline{AJ} = 1$  und durch den Nullpunkt  $N''$ , welcher senkrecht unter dem Punkte  $E''$  liegt, in dem die Gerade  $B'G'$  vom ersten Kettengliede ( $S_1$ ) getroffen wird. Da sich für  $A_{u,p}$  (und ebenso für  $B_{u,p}$ ) je nach dem Belastungszustande des Balkens positive und negative Werte ergeben, so müssen die Auflagergelenke des Balkens mit den Pfeilern verankert werden. Die ständige Belastung übt auf das Auflager  $A$  einen Druck  $A_{u,p}$  aus, welcher gleich der Hälfte des Gewichtes des Balkenfeldes  $\lambda_1$  ist. Bedeutet also  $g'$  die ständige Belastung f. d. Längeneinheit, ausschließlich des Gewichtes der Kette und der Hängestangen, so ist  $A_{u,p} = \frac{1}{2} g' \lambda_1$ . Ebenso wird  $B_{u,p}$  bestimmt. Ist die Verkehrslast eine gleichförmig verteilte ( $= p$  f. d. Längeneinheit), so entsteht infolge gänzlicher Belastung:  $A_{u,p} = \frac{1}{2} p \lambda_1$  und es folgt dann:  $_{max} A_{u,p} + _{min} A_{u,p} = \frac{1}{2} p \lambda_1$ .

4. Die Einflußlinie für das den Balken-Querschnitt  $C$  beanspruchende Moment  $M_p$  besteht aus den Geraden  $I, II, III$ , in Fig. 405b und ist bestimmt durch  $\overline{AJ} = x$  und durch den senkrecht unter dem Schnittpunkt  $E$  der Geraden  $A'C'$  und  $B'G'$  gelegenen Nullpunkt  $N$ . — Die ständige Last erzeugt  $M_p = 0$ .

5. Um auch die Ermittlung der an den Balkenabschnitten wirksamen Querkräfte  $Q_p$  auf die im § 24 gelösten Aufgaben zurückzuführen, bringen wir die den Querschnitten des Feldes  $F_1 F_2 = \lambda$  entsprechende Querkraft

$$(6) \quad Q_p = \frac{M_{2p} - M_{1p}^*}{\lambda}$$

(wo  $M_{2p}$  und  $M_{1p}$  die Momente für die Querschnitte  $F_2$  und  $F_1$  bedeuten) auf die Form

$$Q_p = \frac{M_2 \cdot 0 - M_1 \cdot 0}{\lambda} - H_p \frac{y'' - y'}{\lambda}, \quad (\text{vergl. Fig. 405})$$

setzen hierauf  $\frac{M_2 \cdot 0 - M_1 \cdot 0}{\lambda} = Q_0 =$  Querkraft für das Feld  $F_1 F_2$  eines einfachen, nicht an der Kette hängenden Balkens  $AB$  und erhalten

$$(7) \quad Q_p = Q_0 - H_p \frac{y'' - y'}{\lambda}.$$

Schließen die Geraden  $F'F''$  und  $A'B'$  mit der Wagerechten die Winkel  $\varphi$  und  $\alpha$  ein (Fig. 404), so ist

$$\frac{y'' - y'}{\lambda} = \text{tg } \varphi - \text{tg } \alpha = \frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\cos \varphi \cos \alpha}$$

\*) Vergl. Seite 262.

und  $H_p = H'_p \cos \alpha$ , und es ergibt sich dann

$$(8) \quad Q_p = Q_0 - \frac{H'_p \sin(\varphi - \alpha)}{\cos \varphi} = \frac{1}{\cos \varphi} [Q_0 \cos \varphi - H'_p \sin(\varphi - \alpha)].$$

Die Klammergröße dieses Ausdrucks stellt nach Gleich. (5) auf Seite 186 die Querkraft für einen Querschnitt des Feldes  $F'F''$  eines steifen Bogens  $A'G'B'$  vor; bezeichnen wir sie mit  $\bar{Q}$ , so erhalten wir

$$(9) \quad Q = \bar{Q} \frac{1}{\cos \varphi},$$

und hieraus und aus den in No. 120 gewonnenen Ergebnissen läßt sich auf die in Fig. 405 c und in Fig. 407 dargestellte Einflußlinie für  $Q$  schließen; dieselbe ist bestimmt durch  $AJ = 1$  und den Nullpunkt  $N'$  der Geraden  $I$ . Es liegt nämlich  $N'$  auf der Senkrechten durch den Punkt  $E'$ , in welchem die Gerade  $B'G'$  von einer durch  $A'$  zum Kettengliede  $F'F''$  gezogenen Parallelen getroffen wird. Liegt  $E'$  links von  $G$ , so ist die Senkrechte durch  $E'$  eine Belastungsscheide, Fig. 407.

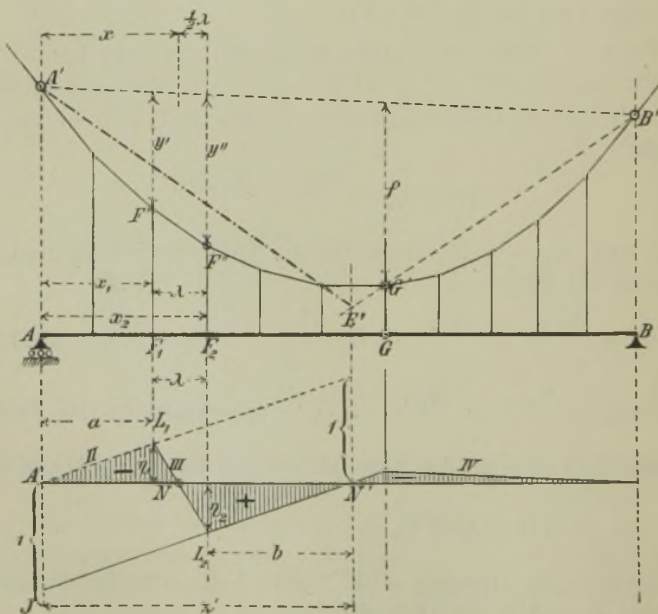


Fig. 407.

Mit Hilfe der angegebenen Einflußlinien lassen sich die Grenzwerte von  $M_p$ ,  $Q_p$ ,  $A_{u,p}$ ,  $B_{u,p}$ ,  $H_p$  nach § 15 bestimmen.



194. **Gegliedertcr Versteifungsbalken.** Die in Fig. 405 für  $H_x$  und  $A_{u,p}$  angegebenen Einflußlinien gelten auch dann, wenn der Versteifungsbalken aus zwei gegliederten Scheiben besteht. Die Einflußlinien für die in den Gurtungen entstehenden Spannkkräfte lassen sich leicht aus denen für die Momente ableiten. Die schraffierte Fläche in Fig. 408 a stellt die Einflußfläche für die Spannkraft  $O$  in dem dem Knotenpunkte  $C$  gegenüberliegenden Stabe der oberen Gurtung dar; sie ist bestimmt durch den Nullpunkt  $N$  und die Strecke  $\overline{AJ} = 1 \cdot \frac{x}{h}$

(welche an die Stelle von  $\overline{AJ} = x$  in Fig. 405 b tritt).  $h$  bedeutet den Hebelarm von  $O$  in Bezug auf den Drehpunkt  $C$ . Die zur Bestimmung der Belastungsscheide zu ziehende Gerade  $A'E$  geht durch den dem Punkte  $C$  entsprechenden Punkt  $C'$  der Kette. Die Belastung

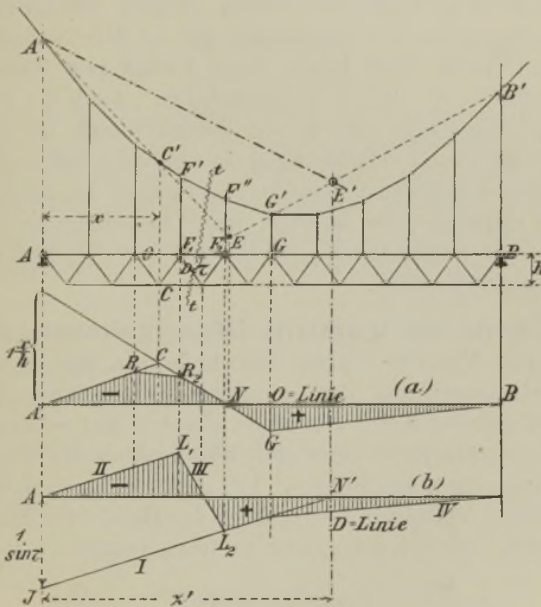


Fig. 408.

ist an den Knoten der oberen Gurtung des Balkens wirkend gedacht. *Das beschriebene Verfahren gilt für Balken mit beliebig geformten Gurtungen.*

Die schraffierte Fläche in Fig. 408 b stellt die Einflußfläche für die Spannkraft  $D_p$  in der linkssteigenden Diagonale eines Balkens mit wagerechten Gurtungen dar. Man geht hier am zweckmäßigsten von

der Gleichung  $D_p \sin \tau = Q_p$  aus\*) (wo  $\tau$  den Neigungswinkel der Diagonale gegen die Wagerechte bezeichnet) und kann dann die in No. 193 hinsichtlich  $Q_p$  angestellten Untersuchungen benutzen. Zuerst wird die Gerade  $I$  mit Hilfe des Nullpunktes  $N'$  und der Ordinate  $\overline{AJ} = \frac{1}{\sin \tau}$  (welche an die Stelle von  $\overline{AJ} = 1$  in Fig. 407 tritt) festgelegt, wobei zu beachten ist, daß die Gerade  $A'E'$  parallel zu demjenigen Kettengliede  $F'F''$  sein muß, welches von dem durch die Diagonale  $D$  und zwei Gurtstäbe geführten Schnitte  $tt$  (der also im ganzen vier Stäbe schneidet) getroffen wird. Nun wird  $II \parallel I$  gezogen, hierauf  $III$  und  $IV$ . Fig. 408 b setzt eine an der oberen Gurtung wirkende Belastung voraus.

Der Einfluß der ständigen Belastung auf die Spannkkräfte  $O, U, D$  ist gleich Null. Bei beliebig geformten Gurtungen können die Einflußlinien für die Spannkkräfte in den Füllungsstäben auf dem im § 45 eingeschlagenen Wege bestimmt werden. Wegen der geringeren Wichtigkeit dieses Gegenstandes unterlassen wir es hier, näher darauf einzugehen, raten jedoch dem Leser, diese Linien (am besten mit Hilfe der Spannkkräfte  $S', S'', S_G, S'''$ ) darzustellen. Auch die Untersuchung eines Versteifungsbalkens mit einem Gelenkviereck ist als eine sehr lehrreiche Übung in der selbständigen Anwendung der in diesem Buche gelehrteten Behandlungsweise derartiger Aufgaben zu empfehlen.

Sehr zu empfehlen ist es auch, nach Aufzeichnung der  $O$ -Linien und  $U$ -Linien die Füllungsstäbe mit Hilfe des in No. 143 angegebenen Verfahrens zu untersuchen.

**195. Momente und Querkräfte infolge gleichmäßiger Belastung.** Am Schluß von No. 192 wurde hervorgehoben, daß es stets zulässig ist, bei der Untersuchung der Inanspruchnahme einer Kettenbrücke die Knotenpunkte der Kette auf einer Parabel mit senkrechter Achse anzunehmen, entsprechend einer gleichförmig über die Wagerechte  $AB$  verteilten ständigen Belastung ( $g$ ). Ist auch die bewegliche Belastung eine gleichförmig verteilte ( $= p$ ), so ist der Balken bei Eintreten gänzlicher Belastung spannungslos, und es folgt deshalb

$$\min M_p = - \max M_p; \quad \min Q_p = - \max Q_p.$$

Es genügt also stets, den einen der beiden Grenzwerte der fraglichen Unbekannten anzugeben. Man gelangt hier auch sehr schnell durch Rechnung zum Ziele, indem man Formeln anwendet, die sich aus der Betrachtung der Einflußlinien ergeben. So findet man z. B. für das einem Knotenpunkte entsprechende Moment  $\max M_p$ , indem man den Inhalt der positiven Einflußfläche mit  $p$  multipliziert, unter Einführung

\*) Für eine rechtssteigende Diagonale ist  $D_p \sin \tau = - Q_p$ .

der in der Fig. 405b angegebenen Bezeichnungen, den Wert

$$(10) \quad M_{max} = + p \frac{x(z-x)^*}{2}.$$

Bedeutet nun  $c$  den senkrechten Abstand des Punktes  $E$  von der Schlußlinie  $A'B'$ , so ist einerseits:  $c = y \frac{z}{x}$ , andererseits  $c = f \frac{l-x}{w'}$ , mithin

$$yxw' = fx(l-x) \text{ und } z = \frac{flx}{yw' + fx}.$$

Setzt man noch (nach der Parabelgleichung)

$$(11) \quad y = f \frac{xx'}{ww'},$$

so findet man

$$(12) \quad z = \frac{wl}{w+x'} \text{ und (da } M_g = 0 \text{ ist)}$$

$$(13) \quad M_{max} = \frac{p x x' (w-x)}{2(w+x')} = - M_{min} (**)$$

Es genügt stets, die Momente für die Knotenpunkte des Balkens zu berechnen. Trägt man sie in den Knotenpunkten als Ordinaten auf und verbindet ihre Endpunkte durch Gerade (wie dies z. B. in Fig. 130 auf Tafel 1 bei Untersuchung eines einfachen Balkens geschah), so geben die Ordinaten dieser Geraden genügend genau die größten Momente für die Querschnitte zwischen den Knotenpunkten an.

Um für die Querkraft  $Q_p$  irgend eines Feldes  $F_1F_2$  einen einfachen Ausdruck zu erhalten, sollen die in Fig. 407 angegebenen Bezeichnungen eingeführt werden. Es verhält sich  $\overline{AN} : \overline{NN'} = a : b$  und man findet (wegen  $\overline{AN} + \overline{NN'} = z'$ , und  $a + b = z' - \lambda$ )

$$\overline{AN} = a \frac{z'}{z' - \lambda}; \quad \overline{NN'} = b \frac{z'}{z' - \lambda}.$$

Die Inhalte der Dreiecke  $NL_2N'$  und  $AL_1N$  sind beziehungsweise

$$\mathfrak{F}_+ = \frac{1}{2} \eta_2 \overline{NN'} = \frac{1}{2} \cdot b \frac{z'}{z' - \lambda} \cdot \overline{NN'} = \frac{1}{2} \frac{b^2 z'}{z' - \lambda}$$

$$\text{und } \mathfrak{F}_- = \frac{1}{2} \frac{a^2 z'}{z' - \lambda} (***)$$

Liegt nun der Punkt  $E'$  links vom Scheitelgelenk, so besteht

\*) Moment f. d. Querschnitt  $x$  eines einfachen Balkens von der Länge  $z$ . Vergl. auch die Untersuchungen in No. 117, Seite 190.

\*\*) Mit  $w = \frac{1}{2} l$  entsteht die Gleich. (9) auf Seite 205.

\*\*\*) Links von  $N'$  stimmt die Einflußfläche mit derjenigen überein, die sich für die Querkraft  $Q$  eines einfachen Balkens von der Länge  $z'$  ergibt. Vergl. Fig. 121.



der positive Teil der Einflußfläche nur aus dem Dreieck  $NL_2N'$ , und es ergibt sich dann (wegen  $Q_g = 0$ )

$$(14) \quad \max Q = + \frac{pb^2}{2(x' - \lambda)} = - \min Q.$$

Befindet sich  $E'$  rechts von  $G$  (Fig. 405 c), so besteht der negative Teil der Einflußfläche aus einem einzigen Dreieck, nämlich dem Dreieck  $AL_1N$  (Bezeichnung in Fig. 407), und man findet dann

$$(15) \quad \min Q = - \frac{pa^2}{2(x' - \lambda)} = - \max Q.$$

Die Ausdrücke (14) und (15) gelten auch für ungleiche Feldweiten. Für  $x'$  findet man leicht den Wert

$$(16) \quad x' = \frac{lw}{l - 2x + w},$$

wo  $x$  = Abstand der Mitte des Gliedes  $F'F''$  von der Senkrechten durch  $A$  bedeutet, Fig. 407.\*)

Der größte Horizontalzug ist

$$(17) \quad \max H = q \frac{ww'}{2f}$$

und die größte Spannkraft in der  $m^{\text{ten}}$  Hängestange

$$(18) \quad \max Z_m = \frac{1}{2} (p + g') (\lambda_m + \lambda_{m+1}),$$

wo  $g'$  = ständige Belastung nach Abzug des Gewichtes der Hängestangen und der Kette.

Um die Grenzwerte des Stützenwiderstandes  $A_u$  zu bestimmen, ermittelt man zuerst (vergl. Fig. 405 d)

$$(19) \quad x'' = \frac{lw}{l - \lambda_1 + w} \quad (\text{nach Gleichung 16})$$

und findet nun

$$\max A_{u_p} = \frac{px''}{2}; \quad \min A_{u_p} + \max A_{u_p} = \frac{p\lambda_1}{2}; \quad A_{u_g} = \frac{g'\lambda_1}{2},$$

mithin

$$(20) \quad \max A_u = \frac{px'' + g'\lambda_1}{2}; \quad \min A_u = - \frac{px'' - (p = g')\lambda_1}{2}.$$

Ganz ebenso werden die Grenzwerte von  $B_u$  bestimmt.

\*) Um (16) zu erhalten, gehe man von der Gleichung aus:  $\{(y'' - y') \frac{x'}{\lambda} = f \frac{l - z'}{w}\}$  und setze (nach der Parabelgleichung)

$$y'' - y' = \frac{f}{ww'} [x_2(l - x_2) - x_1(l - x_1)] = \frac{f(x_2 - x_1)}{ww'} [l - (x_1 + x_2)] \\ = \frac{f\lambda}{ww'} (l - 2x).$$

Mit Hilfe der Gleichungen 14, 15, 16 lassen sich auch die Spannkraften in den Füllungsstäben eines Versteifungsbalkens mit parallelen Gurtungen berechnen, da diese nach No. 194 den Querkräften  $Q$  proportional sind.

### b. Kettenbrücke mit mehreren Öffnungen.

**196. Kettenbrücke mit drei Öffnungen, versteift durch Einzelbalken.** Fig. 409. Sind die Punkte  $R, G', T$  der Mittelöffnung gegeben, so läßt sich die Form der Kette auf die in No. 192 angegebene Weise bestimmen, und hierbei ergibt sich dann auch der durch die ständige Belastung erzeugte Horizontalzug  $H_g$ . Die Gestalt der Kette über den Seitenöffnungen kann jetzt durch Lösung der einfachen Aufgabe gefunden werden: zu gegebenen senkrechten Kräften ein Seilpolygon zu zeichnen, welches durch 2 gegebene Punkte ( $R$  und  $L$ , bzw.  $T$  und  $N$ ) geht und dessen Polweite ( $H_g$ ) bekannt ist.

Bei Untersuchung der Inanspruchnahme der Brücke darf man stets mit einer gleichförmigen ständigen Belastung  $g$  rechnen und dementsprechend die Knoten der Ketten auf Parabeln mit senkrechten Achsen liegend annehmen. Für die Mittelöffnung gilt dann die Gleichung

$$(1) \quad y = f \frac{xx'}{ww'}$$

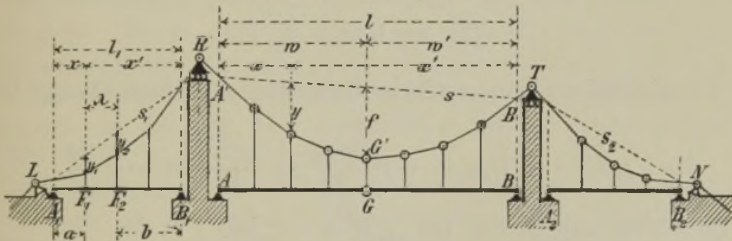


Fig. 409.

und für die Seitenöffnung  $A_1B_1$  die Gleichung

$$y = f_1 \frac{xx'}{w_1w'_1}$$

wobei  $f_1$  die der Stelle  $x = w_1$  und  $x' = l - w_1 = w'_1$  entsprechende Parabelordinate bedeutet. Die Ordinaten sind auf die den Einzelbalken  $AB$  und  $A_1B_1$  entsprechenden Schlußlinien zu beziehen. — Da nun einerseits:  $H_g = \frac{gw w'}{2f}$  und andererseits auch  $H_g = \frac{gw_1 w'_1}{2f_1}$  ist, so

folgt:

$$\frac{w_1 w'_1}{2f_1} = \frac{w w'}{2f} \text{ und } f_1 = f \frac{w_1 w'_1}{w w'}, \text{ *)}$$

womit sich für die Seitenöffnung ebenfalls die Gleichung ergibt

$$(1) \quad y = f \frac{x x'}{w w'}$$

Der Versteifungsbalken  $AB$  der Mittelöffnung wird genau so berechnet wie derjenige einer Kettenbrücke mit einer Öffnung. Es gelten alle in No. 193 bis 195 abgeleiteten Gesetze. Ist  $AB$  unbelastet, so ist  $H_p = 0$ . Lasten, welche über einer Seitenöffnung ruhen, haben keinen Einfluß auf  $H_p$ . Die Balken  $A_1 B_1$  und  $A_2 B_2$  (von denen jeder, ebenso wie  $AB$ , ein festes und ein auf wagerechter Bahn bewegliches Lager erhält) verhalten sich unter der Einwirkung solcher Lasten wie einfache (nicht an der Kette hängende) Balken. Lasten über der Mittelöffnung erzeugen einen (nach No. 193 zu bestimmenden) Horizontalzug  $H_p$  und beispielsweise für den Querschnitt  $F_1$  des Balkens  $A_1 B_1$  das Biegemoment  $M = -H_p y_1$ , ferner für das Feld  $F_1 F_2$  die Querkraft:  $-H_p \frac{(y_1 - y_2)}{\lambda}$ . Hiernach lassen sich die Grenzwerte von  $M$  und  $Q$  leicht angeben. Es sei z. B. die bewegliche Belastung eine gleichförmige ( $= p$ ). Dann erzeugt gänzliche Belastung von  $A_1 B_1$  bei unbelasteter Mittelöffnung  $AB$  für irgend einen Querschnitt  $x$  des Balkens  $A_1 B_1$  das Moment

$$(2) \quad \max M = p \frac{x x'}{2}$$

Ausschließliche und gänzliche Belastung der Mittelöffnung bringt hervor

$$(3) \quad \min M = -H_p y = -p \frac{w w'}{2f} \cdot f \frac{x x'}{w w'} = -p \frac{x x'}{2}$$

Es ergibt sich also in der Tat  $\max M = -\min M$ .

Um die Grenzwerte von  $Q$  für ein Feld  $F_1 F_2$  des Balkens  $A_1 B_1$  zu bestimmen, sind die Fälle  $y_2 > y_1$  und  $y_1 > y_2$  zu unterscheiden. Ist  $y_2 > y_1$ , so erzeugt die Belastung der Mittelöffnung einen negativen Wert  $Q$ . Um  $\max Q$  zu erhalten, wird deshalb die Mittelöffnung unbelastet angenommen und der Balken  $A_1 B_1$  nur zwischen  $B_1$  und der im Felde  $F_1 F_2$  gelegenen Belastungsscheide belastet.  $A_1 B_1$  verhält sich dann wie ein einfacher Balken. Man findet (vergl. die in Fig. 121

\*) Mit  $w = w' = \frac{1}{2} l$  und  $w_1 = w'_1 = \frac{1}{2} l_1$  entsteht (wie auf Seite 404):  
 $f_1 = f \frac{l_1^2}{l^2}$ .



auf Seite 132 abgeleitete Einflußlinie sowie die Entwicklungen auf Seite 416)

$$(4) \quad \max Q = + \frac{pb^2}{2(l_1 - \lambda)} = - \min Q,$$

wo  $b$  den Abstand des Querträgers  $F_2$  vom Auflager  $B$  bedeutet (Fig. 409).

Im Falle  $y_2 < y_1$  erzeugt die Belastung der Mittelöffnung ein positives  $Q$ , und man berechnet dann zweckmäßig  $\min Q$ , indem man wieder nur  $A_1B_1$  und zwar zwischen  $A_1$  und der im Felde  $F_1F_2$  gelegenen Belastungsscheide mit  $p$  belastet. Man erhält

$$(5) \quad \min Q = - \frac{pa^2}{2(l_1 - \lambda)} = - \max Q^*.$$

Das größte Moment für den Balken  $AB$  ist im Falle  $w = w' = \frac{1}{2}l$  (nach Seite 205)  $M = 0,019 pl^2$ , und für den Balken  $A_1B_1$  ergibt sich  $M = \frac{pl_1^2}{8}$ . Sollen beide Momente gleich groß werden, so muß sein  $l_1^2 = 8 \cdot 0,019 l^2$  also  $l_1 = 0,39 l$ .

**197. Kettenbrücke mit beliebig vielen Öffnungen und mit durchgehendem Versteifungsbalken.** Sind drei Punkte der über eine der Öffnungen zu spannenden Kette gegeben, so läßt sich die Form dieser Kette und die Größe von  $H_p$  nach No. 192 bestimmen, und die Gestalt der Ketten über den Seitenöffnungen kann dann (da die Aufhängepunkte stets gegeben sind) durch Lösung der Aufgabe gefunden werden: zu gegebenen senkrechten Lasten ein Seilpolygon mit vorgeschriebener Polweite zu zeichnen, das durch zwei gegebene Punkte geht. Es ist stets zulässig, eine gleichförmige ständige Belastung anzunehmen, und es können dann die Ordinaten auch auf die in No. 196 angegebene Weise berechnet werden. Hierbei sind z. B. die Ketten der in der Fig. 410 dargestellten Brücke zunächst auf die Schlußlinien  $s'_1, s'_2, s'_3$  zu beziehen.

Der durchgehende Versteifungsbalken  $A, B, C, \dots$  erhält ebenso viele Gelenke, als die Brücke Öffnungen zählt. Die Gelenke sind so zu verteilen, daß nach Weglassung irgend eines Gelenkes ein an der Kette hängender Gerberscher Balken entsteht. Die Auflager seien — mit Ausnahme des einen festen Lagers — auf wagerechten Bahnen geführt.

Um die Momente und Querkräfte des Versteifungsbalkens schnell zu finden, denke man zunächst das eine Mittelgelenk beseitigt und betrachte den Gerberschen Balken, an dem außer den beweglichen Lasten  $P$  noch die Spannkkräfte  $Z_p$  der Hängestangen angreifen.

\*) Man kann auch  $\max Q$  und  $\min Q$  in der auf Seite 133 angegebenen Weise durch Zeichnung bestimmen, da man es ja in beiden Fällen ( $y_2 \leq y_1$ ) nur mit einem einfachen Balken  $A_1B_1$  zu tun hat.

Den Einfluß der  $P$  und  $Z_p$  bestimme man getrennt und löse den zweiten Teil der Aufgabe mit Hilfe des in No. 92 Seite 163 und Fig. 151 beschriebenen Verfahrens. Man findet dann das von den

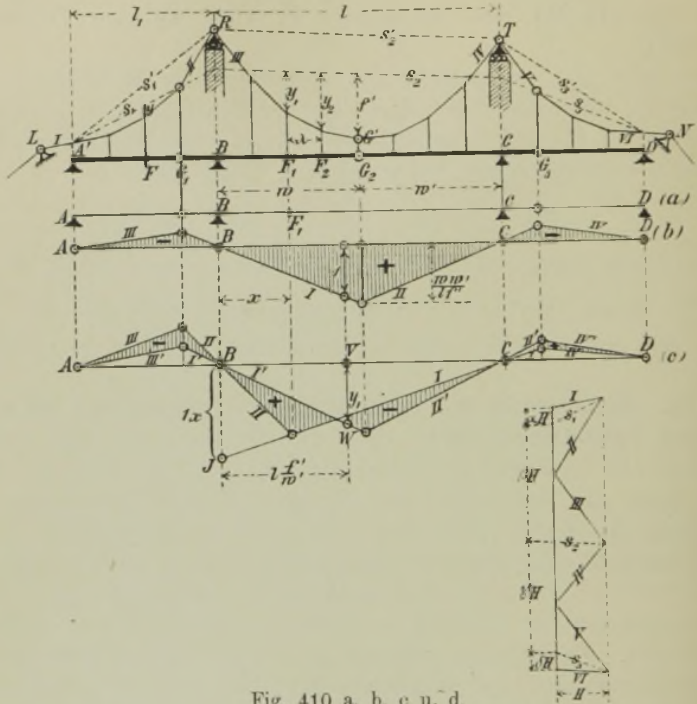


Fig. 410 a, b, c u. d.

Kräften  $Z_p$  herrührende Moment in der Form  $(-H_p y)$ , wo  $y$  die Ordinate der Kettenlinie, bezogen auf den durch die Gelenke des Gerberschen Balkens eindeutig bestimmten Schlußlinienzug bedeutet. Auf diese Weise gelangt man z. B. in dem in der Fig. 410 dargestellten Falle, wenn  $G_2$  das vorübergehend beseitigte Gelenk ist, zu dem Gerberschen Balken  $ABCD$  (Fig. 410a) und zu dem Schlußlinienzuge  $s_1 s_2 s_3$ , dessen Ecken auf den Senkrechten durch  $B$  und  $C$  liegen, und welcher durch die den Gelenken  $G_1$  und  $G_3$  entsprechenden Punkte der Kettenlinie geht. Bezeichnet man dann für irgend einen Querschnitt  $F_1$  oder irgend ein Feld  $F_1 F_2$  (gleichgültig innerhalb welcher Öffnung) mit  $M_0$  und  $Q_0$  dasjenige Moment oder diejenige Querkraft, welche entstehen, wenn auf den Gerberschen Balken nur die Kräfte  $P$  wirken, so ergibt sich im ganzen

$$M_p = M_0 - H_p y_1 \quad \text{und} \quad Q_p = Q_0 - H_p \frac{y_2 - y_1}{\lambda}.$$

Liegt die Kettenlinie oberhalb des Schlußlinienzuges, so ist  $y$  negativ. Dem Querschnitte  $G_2$  entspricht

$$M_G = M_{0G} - H_p f',$$

und es folgt, da dieses Moment = 0 sein muß

$$H_p = \frac{M_{0G}}{f'}.$$

Hiernach erhält man die Einflußlinie für den Horizontalzug  $H_p$ , indem man die Einflußlinie für das dem Querschnitte  $G_2$  entsprechende Moment eines Gerberschen Balkens  $ABCD$  bestimmt und die Ordinaten dieser Linie durch  $f'$  dividiert. Auf diesem Wege ergibt sich die in der Fig. 410b dargestellte Einflußlinie für  $H_p$ ; sie besitzt bei  $G_2$  die Ordinate  $\frac{ww'}{lf'}$  und — was für die Folge wichtig ist — im Abstände

$l \frac{f'}{w'}$  von der Stütze  $B$  die Ordinate 1.

Um nun die Einflußlinie für das irgend einem Querschnitte entsprechende Biegemoment  $M_p = M_0 - H_p y$  zu bestimmen, hat man nur nötig, auf die im Abschnitte VI (Seite 167) angegebene Weise die Einflußlinie für  $M_0$  zu zeichnen und von dieser die mit  $y$  multiplizierten Ordinaten der  $H_p$ -Linie in Abzug zu bringen. Hiernach stellt z. B. die schraffierte Fläche in Fig. 410c die Einflußfläche für das Moment  $M_p$  des Querschnittes  $F_1$  vor. Es wurde zunächst  $ABCD$  als ein nicht an der Kette hängender Gerberscher Balken betrachtet und die Einflußlinie für  $M_0$  aufgetragen; sie besteht aus den Geraden  $I, II, III, IV$  und ist bestimmt durch  $\overline{B\bar{J}} = 1 \cdot x$ . Von den Ordinaten dieser Linie wurden diejenigen der aus den Geraden  $I' II', III' IV'$  bestehenden  $H y_1$ -Linie abgezogen, wobei dieser zweite Linienzug durch die im Abstände  $l \frac{f'}{w'}$  von Stütze  $B$  gelegenen Ordinate  $\overline{V\bar{W}} = 1 \cdot y_1$  bestimmt werden konnte, da ja die  $H$ -Linie an dieser Stelle die Ordinate 1 besitzt.

In gleicher Weise kann die Einflußlinie für die in irgend einem Felde auftretende Querkraft  $Q_p$  ermittelt werden. Man betrachte den Balken zunächst als nicht an der Kette hängenden Gerberschen Balken, zeichne nach No. 94 (Seite 166) die Einflußlinie für  $Q_0$  und subtrahiere von den Ordinaten derselben diejenigen der  $H_p \frac{y_2 - y_1}{\lambda}$ -Linie. Letztere

Linie besitzt im Abstände  $l \frac{f'}{w'}$  von  $B$  die (leicht durch Zeichnung zu bestimmende) Ordinate  $1 \cdot \frac{y_2 - y_1}{\lambda}$ .



Das beschriebene Verfahren ist für Kettenbrücken mit beliebig vielen Öffnungen anwendbar und führt stets sehr schnell zum Ziele; es läßt sich auch zur Ermittlung der an den Auflagern  $A, B, C, D, \dots$  des Versteifungsbalkens wirksamen Stützenwiderstände, welche kurz mit  $A, B, C, D, \dots$  bezeichnet werden sollen, benutzen, da sich diese Widerstände leicht auf die Form bringen lassen

$A = A_0 - \alpha H; B = B_0 - \beta H; C = C_0 - \gamma H; D = D_0 - \delta H; \dots$   
wobei  $A_0, B_0, C_0, D_0, \dots$  die Stützenwiderstände für den nicht an der Kette hängenden Balken und  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$  feste Zahlenwerte bedeuten. Für den in der Fig. 410 dargestellten Fall erhält man z. B. die einem beliebigen Horizontalzuge  $H$  entsprechenden Werte  $\alpha H, \beta H, \gamma H, \delta H$  mit Hilfe der ohne weitere Erklärung verständlichen und aus der Fig. 151 b abgeleiteten Fig. 410 d, deren Geraden  $I, II, III, \dots, s_1, s_2, s_3$  den gleichbezeichneten äußersten Kettengliedern und Schlußlinien der einzelnen Öffnungen parallel sind. Zeichnet man also diese Figur für  $H = 1$ , so findet man die festen Werte  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ .

## § 49.

**Gelenkbogen, versteift durch einen Balken.**

198. Gelenkbogen, versteift durch einen darüber liegenden Balken. Ein aus geraden, gelenkartig miteinander verbundenen Stä-

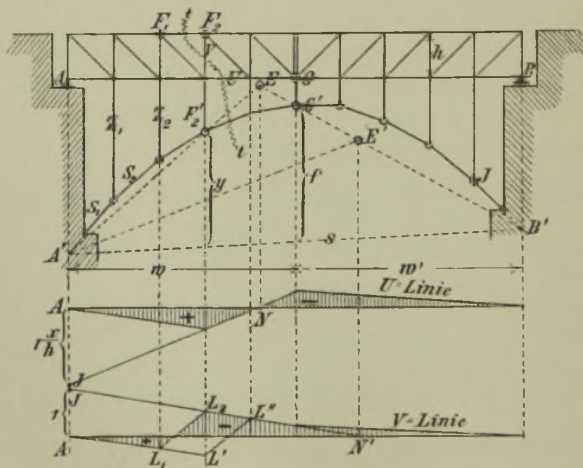


Fig. 411.

ben bestehender Bogenträger werde auf die in der Fig. 411 veranschaulichte Weise durch senkrechte Stangen mit einem Balken ver-

bunden, welcher ein festes und ein auf wagerechter Bahn bewegliches Auflager besitzt und durch ein Mittelgelenk  $G$  in zwei starre Teile zerlegt wird. Es entsteht ein Träger, welcher als die Umkehrung der durch einen Balken versteiften Kette angesehen werden kann, und für welchen deshalb die in No. 192 bis 195 entwickelten Gesetze gelten. Die Spannkraften  $Z$  und  $S$  haben natürlich entgegengesetzte Vorzeichen wie die für die Kettenbrücke gefundenen; sie rufen jetzt Druckspannungen hervor. Auch ist zu beachten, daß die Endpunkte  $A'$  und  $B'$  der Schlußlinie  $s$  unterhalb der Kämpfergelenke auf den verlängerten Mittellinien der äußersten Glieder des Bogens liegen, sobald die Stützweite des Balkens (wie in Fig. 411) größer ist als diejenige des Bogens. In Fig. 411 wurden als Beispiele die Einflußlinien für eine Spannkraft  $U$  und eine Spannkraft  $V$  vorgeführt.

Die  $U$ -Linie ist bestimmt durch die Belastungsscheide  $E$  und durch  $\overline{AJ} = 1 \frac{x}{h}$ . Die Gerade  $A'E$  geht durch den dem Knoten  $F_2$  (welcher  $U$  gegenüberliegt) entsprechenden Punkt  $F'_2$  des Bogens.

Die  $V$ -Linie ist (wegen  $V = -Q$ ) bestimmt durch  $\overline{AJ} = -1$  und durch den Punkt  $E'$ . Die Gerade  $A'E'$  ist hierbei parallel zu dem vom Schnitte  $tt$  getroffenen Gliede des Bogens zu ziehen. In der Fig. 411 wurde vorausgesetzt, daß die Belastung, um deren Einfluß es sich handelt, in den Knoten der oberen Gurtung angreift. Wirkt sie in den Knoten der unteren Gurtung, so ist die Gerade  $L_1L_2$  zu ersetzen durch  $L'L''$ .

Wird der Bogen so geformt, daß seine Mittellinie mit dem der ständigen Belastung entsprechenden und durch die Punkte  $A'$ ,  $G'$ ,  $B'$  geführten Seilpolygone zusammenfällt, so werden nur die Vertikalen des Versteifungsbalkens infolge der ständigen Belastung beansprucht. In der die Felder  $\lambda_m$  und  $\lambda_{m+1}$  trennenden Vertikale  $V_m$  entsteht  $V_{mg} = -\frac{1}{2} g_0 (\lambda_m + \lambda_{m+1})$ , wobei  $g_0$  der an der oberen Gurtung angreifende Teil der ständigen Last ist. Die Spannkraften  $O$ ,  $U$ ,  $D$  sind nur von der beweglichen Belastung abhängig, und es gelten die Gleichungen  $max O + min O = 0$ ;  $max U + min U = 0$ ;  $max D + min D = 0$ .

**199. Gelenkbogen, versteift durch einen darunter liegenden, den Horizontalschub des Bogens aufnehmenden Balken.** Einen solchen Träger zeigt die Fig. 412. An dem einen Ende ist ein festes Auflager, an dem andern ein bewegliches mit wagerechter Bahn angeordnet worden, so daß der Träger bei ausschließlich senkrechten Lasten auf die Pfeiler nur senkrechte Drücke ausübt, welche mit denen eines einfachen Balkens  $AB$  übereinstimmen. Die Versteifung wird bewirkt durch zwei gegliederte, bei  $G$  gelenkartig miteinander befestigte

starre Scheiben, die mit dem Bogen durch senkrechte Hängestangen verbunden sind.

Wir führen durch den Träger einen Schnitt, welcher vier Stäbe ( $U_{m-1}$ ,  $D_m$ ,  $O_m$ ,  $S$ ) trifft, Fig. 413, und betrachten das linke Trägerstück. Die Mittelkraft der an ihm angreifenden Lasten sei  $\Sigma P$ ; sie ruft im Verein mit dem Stützenwiderstande  $A$  in Bezug auf die Knoten  $m$  und  $(m-1)$  Momente  $M_{0m}$  und  $M_{0(m-1)}$  hervor, welche ebenso groß sind wie die Momente für dieselben Knoten eines einfachen,

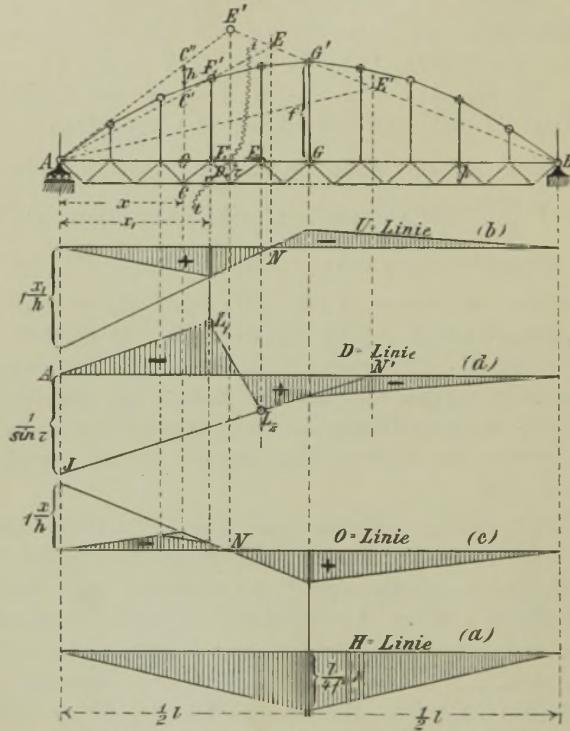


Fig. 412.

nicht am Bogen hängenden Balkens  $AB$ . Zerlegt man nun den im geschnittenen Bogengliede wirksamen Druck  $S$  im Punkte  $m'$  in eine wagerechte und in eine senkrechte Seitenkraft, von denen die erstere gleich dem Horizontalschube  $H$  ist, so lautet die auf den Knoten  $m$  bezogene Rittersche Momentengleichung

$$M_{0m} - H(y_m + h) + O_m h = 0$$

und hieraus folgt

$$O_m = -\frac{M_m}{h}, \text{ wo } M_m = M_{0m} - H(y_m + h).$$



Auf demselben Wege findet man

$$U_{m-1} = + \frac{M_{m-1}}{h}; \text{ wo } M_{m-1} = M_{0(m-1)} - Hy_{m-1}.$$

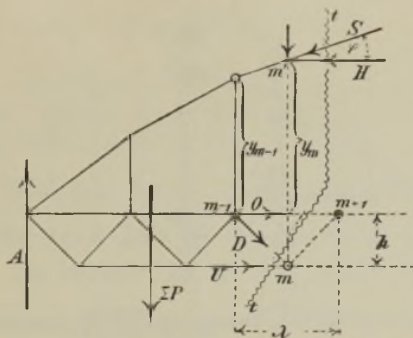


Fig. 413.

Für den Punkt  $G$  findet man (Fig. 412)

$$M_G = M_{0G} - Hf = 0,$$

weshalb:

$$H = \frac{M_{0G}}{f}.$$

Die für  $M$  und  $H$  gefundenen Ausdrücke stimmen mit denen überein, die sich im § 48 für den Versteifungsbalken der Kette ergaben. Nur tritt, wenn der fragliche Knotenpunkt der unteren Balkengurtung angehört, an die Stelle von  $y_m$  der Wert  $y_m + h$ . Für den Horizontalschub  $H$  und für die Spannkkräfte  $U$  und  $O$  ergeben sich deshalb die in den Figuren 412, a, b, c dargestellten Einflußlinien, wobei angenommen ist, daß die Belastung in den Knoten der oberen Gurtung angreift. Die Figuren (a) und (b) bedürfen keiner Erläuterung. Zu Figur (c) ist zu bemerken, daß die Belastungsscheide durch den Punkt  $E'$  geht, in welchem die Gerade  $BG'$  von der durch  $A$  und einen um  $h$  oberhalb  $C'$  gelegenen Punkt  $C''$  bestimmten Geraden geschnitten wird.

In der Fig. 414 gehört das Mittelgelenk  $G$  der unteren Gurtung des Balkens an, während die Kämpfergelenke des Bogens wie vorhin in der oberen Gurtung liegen. Es ergibt sich jetzt

$$H = \frac{M_{0G}}{f+h}.$$

Die Höhe des die Einflußfläche für  $H$  darstellenden Dreiecks ist nicht mehr  $\frac{l}{4f}$ , sondern  $\frac{l}{4(f+h)}$  und die Gerade  $B'G'$  ist zu ersetzen durch die Gerade  $B'G''$ , wobei  $G'$  um  $h$  höher liegt als  $G$ .



Die Querkraft für den Schnitt  $tt$  in Fig. 413 ist, wenn  $A - \Sigma P = Q_0$  (= Querkraft für den durch einen einfachen Balken geführten Schnitt  $tt$ ) gesetzt wird

$$Q = Q_0 - H \operatorname{tg} \varphi = Q_0 - H \frac{y_{m+1} - y_m}{\lambda_m};$$

sie erscheint in derselben Form wie beim Versteifungsbalken der Kette und kann deshalb auf die im § 48 angegebene Weise ermittelt werden. Fig. 412d zeigt beispielsweise die Einflußlinie für die Spannkraft

$$D = + \frac{Q}{\sin \tau}.$$

Der den Punkt  $N'$  bestimmende Punkt  $E'$  liegt auf

der Geraden  $B'G'$ , und  $AE'$  ist parallel dem vom Schnitte  $tt$  getroffenen Gliede des Bogens. Es ist  $AL_1 \parallel JL_2$ . Würde man  $\overline{AJ} = 1$  machen, statt  $\overline{AJ} = \frac{1}{\sin \tau}$ , so würde man die Einflußlinie für die

dem Felde  $F_1F_2$  entsprechende Querkraft  $Q$  erhalten. In dem in der Fig. 414 dargestellten Falle liegen die Punkte  $E'$  auf der Geraden  $B'G''$ .

Ist die ständige Belastung eine gleichförmige, und gehören die Knoten des Bogens einer Parabel mit senkrechter Achse an, so sind in dem in der Fig. 412 dargestellten Falle die Spannkräfte  $D_g$  und  $U_g = 0$ , vorausgesetzt, daß es zulässig ist, den am Balken angreifenden Teil der ständigen Belastung ausschließlich auf die oberen Knoten desselben zu verteilen. Für sämtliche Stäbe der oberen Gurtung ergibt sich

$$O_g = + H_g = + \frac{gl^2}{8f}.$$

Ist auch die bewegliche Belastung eine gleichförmige (=  $p$ ), so entsteht bei gänzlicher Belastung des Balkens mit  $p$  in der oberen Gurtung  $O_p = + \frac{pl^2}{8f}$ , während  $D_p$  und  $U_p$  wieder = 0 werden. Es folgt dann

$$\max U + \min U = 0; \max D + \min D = 0.$$

## § 50.

### Verwertung der Kettenlinie zur Linienführung der Gurtungen.

200. Gelegentlich der Bearbeitung eines Brückenentwurfs kam der Verfasser auf den Gedanken, die Gurtungen eines Auslegerbalkens als Seillinien für eine gesetzmäßig sich ändernde Belastung aufzufassen und gelangte auf diesem Wege zu einem Verfahren, das zu einer sehr einfachen Berechnung der für die Zulage der Eisenkonstruktion in der Werkstatt erforderlichen genauen Ordinaten führte und eine schnelle



Vergleichung verschiedener, lediglich nach ästhetischen Gesichtspunkten gewählten Linienführungen möglich machte.\*)

Es handelte sich bei jenem Entwurfe um eine über drei Öffnungen reichende symmetrische, hängende Gurtung (Fig. 415), deren äußere Teile  $AB$  den Eindruck von Rückhaltketten machen sollten und deshalb in strafferer Spannung am Portal über dem Strompfeiler

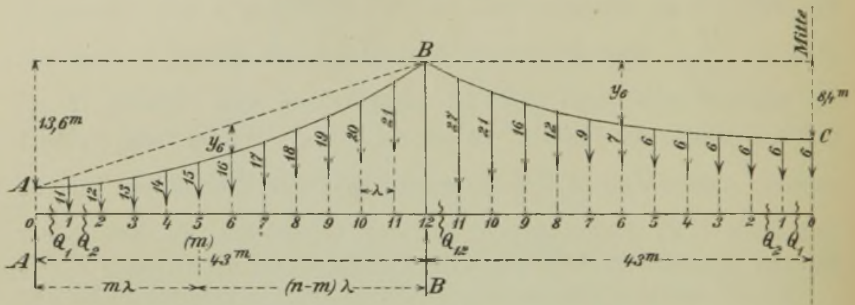


Fig. 415.

angreifen mußten, während sich für die Kette  $BCB$  eine etwas stärkere Krümmung als vorteilhaft erwies. Nach verschiedenen Proben wurde die Gurtung  $AB$  als Seileck senkrechter Lasten geformt, die sich zueinander verhalten wie die Zahlen 11, 12, 13 . . . bis 21. Die Knotenpunkte der Gurtung  $CB$  liegen im mittleren Teile in einer Parabel; hier wurde die Belastungsziffer konstant = 6 angenommen; nach dem Kämpfer hin steigt die Belastung, einer Differenzreihe zweiter Ordnung folgend, bis auf 27.

Die auf die Verbindungslinie der Aufhängepunkte bezogenen Seileckordinaten  $y$  verhalten sich zueinander wie die Biegemomente eines einfachen Balkens (s. Seite 406 Fig. 404). Die überall gleiche Feldweite darf bei der Berechnung der Momente gleich 1 gesetzt werden, so daß sich für die schrittweise Ermittlung der Querkräfte und Momente der Mittelöffnung die Formeln ergeben

$$Q_{m+1} = Q_m + P_m$$

$$M_m = M_{m+1} + Q_{m+1},$$

wo  $P_m$  die im  $m^{\text{ten}}$  Knotenpunkte angreifende Last bedeutet. Für das erste Feld ist  $Q_1 = \frac{1}{2} P_0^{**}$ ; ferner ist  $M_{11} = Q_{12}$ . Nach Berechnung

\*) Müller-Breslau. Der Kaisersteg über die Oberspre bei Oberschöne-  
weide. Zeitschrift für Bauwesen, 1900, Heft I.

\*\*) Bei ungerader Felderzahl ist  $Q_1 = 0$ .

der Momente findet man die Ordinaten mittels der Beziehung

$$y_m = y_0 \frac{M_m}{M_0} = 8,4 \frac{M_m}{558}.$$

Die nachstehende Tabelle enthält die vollständige Zahlenrechnung für die Mittelöffnung.

$m$	$P_m$	$Q_m$	$M_m$	$y_m$
0	6		558	8,400 <sup>m</sup>
1	6	3	555	8,355
2	6	9	546	8,219
3	6	15	531	7,994
4	6	21	510	7,677
5	6	27	483	7,271
6	7	33	450	6,774
7	9	40	410	6,172
8	12	49	361	5,434
9	16	61	300	4,516
10	21	77	223	3,357
11	27	98	125	1,882
12		125	0	

In ähnlicher Weise wird auch die Seitenöffnung  $AB$  behandelt. Man berechnet zuerst den linken Auflagerwiderstand des mit den Werten 11, 12, 13, . . . . . 21 belasteten Balkens und findet

$$Q_1 = A = \frac{1}{12}(21 + 2 \cdot 20 + 3 \cdot 19 + \dots + 11 \cdot 11) = \frac{946}{12} = 78,83$$

$$Q_2 = Q_1 - P_1,$$

$$Q_m = Q_{m-1} - P_{m-1},$$

$$M_1 = Q_1, M_2 = M_1 + Q_2, \text{ u. s. w. } M_m = M_{m-1} + Q_m.$$

Die Ordinaten der Gurtung sind

$$y_m = \frac{M_m}{100}.$$

Damit  $A$  den runden Wert 78 annimmt, wurde Last 21 durch 22 ersetzt, 11 durch 10, Änderungen, welche die Gestalt der Gurtung nur wenig beeinflussen. Hiernach entstand die folgende Tabelle:

$m$	$P_m$	$Q_m$	$M_m$	$y_m$
1	10	+ 78	78	0,78 <sup>m</sup>
2	12	+ 68	146	1,46
3	13	+ 56	202	2,02
4	14	+ 43	245	2,45
5	15	+ 29	274	2,74
6	16	+ 14	288	2,88
7	17	— 2	286	2,86
8	18	— 19	267	2,67
9	19	— 37	230	2,30
10	20	— 56	174	1,74
11	22	— 76	98	0,98
12		— 98	0	0

Folgen die Lasten dem Gesetze

$$P_m = a + a_1 m + a_2 m^2 + a_3 m^3 + \dots$$

wo  $a, a_1, a_2, \dots$  feste Zahlenwerte sind, und ist die Anzahl der Felder  $= n$ , so erhält man für die Reaktionen  $B$  und  $A$  die Werte

$$B = \sum P_m \frac{m}{n} = \frac{1}{n} (a S_1 + a_1 S_2 + a_2 S_3 + a_3 S_4 + \dots);$$

$$A = \sum P - B$$

$$\text{wo } S_r = \sum_{m=1}^{m=(n-1)} m^r.$$

Man findet

$$S_1 = \frac{(n-1)n}{2}$$

$$S_2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{2 \cdot 3}$$

$$S_3 = \left[ \frac{(n-1)n}{2} \right]^2$$

$$S_4 = \frac{n(n-1)(6n^3 - 9n^2 + n + 1)}{30}$$

$$\text{Ist } P_m = a, \text{ so wird } Q_1 = A = \frac{n-1}{2} a,$$

$$,, P_m = m, ,, ,, Q_1 = \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n+1}{3},$$

$$,, P_m = m^2, ,, ,, Q_1 = \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{6},$$



$$\text{Ist } P_m = m^3, \text{ so wird } Q_1 = \frac{n-1}{2} \cdot \frac{(n+1)(3n^2-2)}{30}.$$

Wählt man also beispielsweise

$$P_m = a + 0,5m^2, \text{ so erhält man}$$

$$Q_1 = \frac{n-1}{2} \left( a + \frac{n(n+1)}{12} \right).$$

Wird  $P_m = 10 + m$  angenommen, so ergibt sich für  $n = 12$

$$Q_1 = \frac{n-1}{2} \left( 10 + \frac{n+1}{3} \right) = \frac{11}{2} \left( 10 + \frac{13}{2} \right) = 78,83.$$

201. Einhüftige Seilpolygone  $AB$  (Fig. 416a) können auch aus symmetrischen Seilpolygone  $B'A'B'$  (Fig. 416b) in der Weise abgeleitet werden, daß, nach Berechnung der auf die Gerade  $B'B'$  bezogenen Ordinaten  $y$ , die lotrechten Abstände  $\eta$  der Knotenpunkte von der Sehne  $A'B'$  bestimmt und von einer anders geneigten Sehne  $AB$  aus aufgetragen werden.

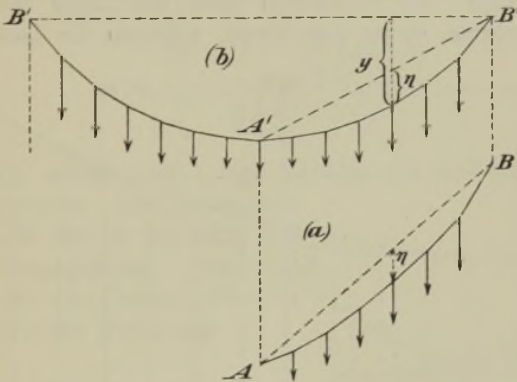


Fig. 416.

Sehr zweckmäßig ist auch bei einseitigen Seilpolygone die Berechnung der auf die Verlängerung der ersten oder letzten Seite bezogenen Ordinaten (Fig. 417), da man häufig über die Richtung der einen dieser beiden Seiten von vornherein verfügen wird. Die Ordinaten  $y_m$  verhalten sich hier zueinander wie die Momente  $M_m$  eines Freitragers. Zählt man die Lasten von  $A$  aus und bezieht man das Seileck auf die an  $B$  grenzende Seite, so erhält man, wenn man die konstant angenommene Feldweite wieder gleich 1 setzt,

$$Q_m = Q_{m+1} + P_m \text{ und } M_m = M_{m+1} + Q_{m+1}.$$

Für das in Fig. 417 dargestellte Seileck, welches von dem in Fig. 415 abgebildeten nur wenig abweicht, ergeben sich die folgenden Zahlenwerte.

$m$	$P_m$	$Q_m$	$M_m$	$y_m = g_A \frac{M_m}{M_A} = \frac{12 M_m}{1166} = \frac{6 M_m}{583}$
11	21	21	0	0
10	20	41	21	0,216 <sup>m</sup>
9	19	60	62	0,638
8	18	78	122	1,256
7	17	95	200	2,058
6	16	111	295	3,036
5	15	126	406	4,178
4	14	140	532	5,475
3	13	153	672	6,916
2	12	165	825	8,491
1	11	176	990	10,189
			1166	12,000

Verfügt man von vornherein über die Lagen der ersten und letzten Polygonseite, so ist das Gesetz, welchem die Lasten  $P$  folgen,

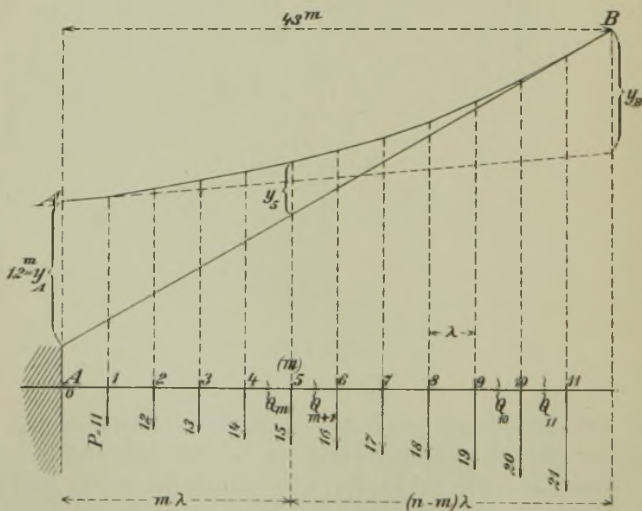


Fig. 417.

einer Einschränkung unterworfen. Es müssen sich nämlich die Strecken  $y_A$  und  $y_B$ , welche die äußersten Polygonseiten auf den Senkrechten durch die Endpunkte  $A$  und  $B$  abschneiden, zueinander verhalten wie die Biegemomente  $M_A$  und  $M_B$  zweier Freiträger, die bei  $A$  oder  $B$

eingespannt und mit den Kräften  $P$  belastet sind. Zählt man die Lasten von  $A$  aus, so erhält man die Gleichung

$$\frac{y_A}{y_B} = \frac{\sum P_m m}{\sum P_m (n - m)} = \frac{\sum P_m m}{n \sum P_m - \sum P_m m},$$

wo (nach Seite 430)

$$\begin{aligned} \sum P_m m &= a S_1 + a_1 S_2 + a_2 S_3 + \dots \\ \sum P_m &= a (n - 1) + a_1 S_1 + a_2 S_2 + \dots \end{aligned}$$

Ist z. B.

$$P_m = a + a_1 m + a_2 m^2,$$

so wird

$$\sum P_m m = \frac{(n-1)n}{2} \left[ a + \frac{1}{3} a_1 (2n-1) + \frac{1}{2} a_2 (n-1)n \right]$$

$$\sum P_m = (n-1) \left[ a + \frac{1}{2} a_1 n + \frac{1}{6} a_2 n (2n-1) \right]$$

und

$$\frac{y_A}{y_B} = \frac{a + \frac{1}{3} a_1 (2n-1) + \frac{1}{2} a_2 (n-1)n}{a + \frac{1}{3} a_1 (n+1) + \frac{1}{6} a_2 (n+1)n}$$

Wählt man  $P_m = a + m$ , so findet man für  $a$  den Wert

$$a = \frac{2n-1 - \frac{y_A}{y_B} (n+1)}{3 \left( \frac{y_A}{y_B} - 1 \right)}$$

202. Wir wollen noch einige Formeln für Seillinien mit stetiger Belastung herleiten und betrachten zu dem Zwecke die in Fig. 418 dargestellte Belastungsfläche. Die Belastungslinie sei eine Parabel  $r$ -ter Ordnung und habe die Gleichung

$$z_x = z_l \frac{x^r}{l^r},$$

wo  $z_l$  die Belastungshöhe an der Stelle  $x = l$  bedeutet. Der Inhalt der Belastungsfläche ist



Fig. 418.

$$F = \int_0^l z_x dx = \frac{z_l l}{r+1}$$

und das statische Moment der Fläche, bezogen auf die Senkrechte durch  $A$

$$M_A = \int_0^l z_x x dx = \frac{z_l l^2}{r+2}$$



Die Abstände des Schwerpunktes der Fläche von den Senkrechten durch  $A$  und  $B$  sind demnach

$$\xi = l \frac{r+1}{r+2} \quad \text{und} \quad \xi' = l - \xi = l \frac{1}{r+2}$$

und das Moment der Fläche in Bezug auf die Senkrechte durch  $B$

$$M_B = \frac{x_1 l^2}{(r+1)(r+2)}$$

Wirkt die betrachtete Belastung auf einen bei  $B$  eingespannten Freitragler, so ist das Biegemoment an der Stelle  $x$

$$M = \frac{x_x x^2}{(r+1)(r+2)} = \frac{x_2 x^{r+2}}{(r+1)(r+2)l^r}$$

Besteht nun die Belastungsfläche einer einhüftigen Kettenlinie (Fig. 419) aus einem Rechteck von der Höhe  $x$  [und einem von einer Parabel  $r^{\text{ter}}$  Ordnung begrenzten Teile, so lautet die Gleichung der Kettenlinie, bezogen auf die Tangente im Endpunkte  $A$

$$y = y_B \frac{M}{M_B},$$

worin zu setzen

$$M = \frac{x x^2}{2} + \frac{x_1 x^{r+2}}{(r+1)(r+2)l^r},$$

$$M_B = \frac{x l^2}{2} + \frac{x_1 l^2}{(r+1)(r+2)}$$

Man erhält demnach

$$y = y_B \frac{x^2}{l^2} \frac{1 + \epsilon \frac{x^r}{l^r}}{1 + \epsilon}$$

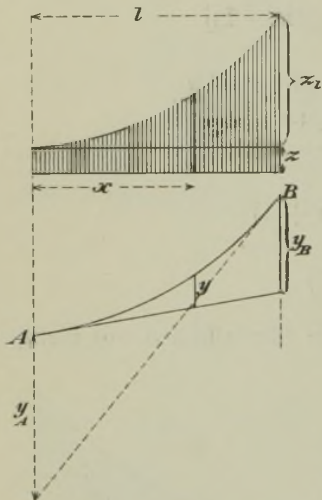


Fig. 419.

wo

$$\epsilon = 2 \frac{x_1}{x} \frac{1}{(r+1)(r+2)}$$

ist. Schreibt man auch der Tangente in  $B$  eine bestimmte Lage vor, so muß sein

$$\frac{y_B}{y_A} = \frac{M_B}{M_A} = \frac{\frac{x l^2}{2} + \frac{x_1 l^2}{(r+1)(r+2)}}{\frac{x l^2}{2} + \frac{x_1 l^2}{(r+2)}}$$

$$\frac{y_B}{y_A} = \frac{1 + \epsilon}{1 + \epsilon(r+1)}$$

Beginnt die parabolische Belastung ( $x_x = x_b \frac{x^r}{l^r}$ ) erst im Abstände  $a = l - b$  von  $A$ , Fig. 420, so ist für den Abschnitt  $a$

$$M = \frac{x x^2}{2}$$

und für den Abschnitt  $b$

$$M = \frac{x(a+x)^2}{2} + \frac{x_b x^{r+2}}{(r+1)(r+2)b^r}$$

Ferner ist

$$M_B = \frac{x l^2}{2} + \frac{x_b b^2}{(r+1)(r+2)}$$

$$M_A = \frac{x l^2}{2} + \frac{x_b b}{r+1} \left( a + b \frac{r+1}{r+2} \right)$$

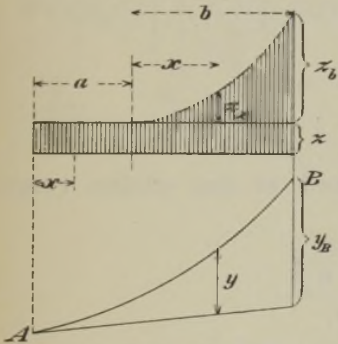


Fig. 420.

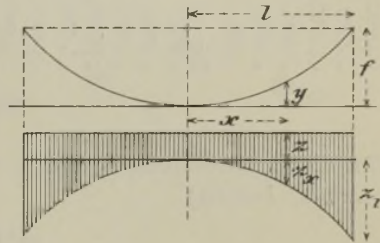


Fig. 421.

Die vorstehenden Gleichungen lassen sich auch für die symmetrische Kette verwenden; denn diese besteht aus zwei einhäufigen Ketten mit wagerechter Scheiteltangente. Für den in Fig. 421 dargestellten Fall erhält man also

$$y = f \frac{x^2}{l^2} \frac{1 + \varepsilon \frac{x^r}{l^r}}{1 + \varepsilon}$$

Als **Beispiel** wählen wir die in Fig. 422 abgebildete Auslegerbogenbrücke. Stützweite der Seitenöffnung  $6 \cdot 3 = 18^m$ , der Mittelöffnung  $16 \cdot 3 = 48^m$ , Pfeilhöhe  $6,0^m$ . Für die Mittelöffnung setzen wir  $r = 2$  und erhalten für den Knotenpunkt  $m$  (wegen  $x = m \lambda$  und  $l = 8 \lambda$ )

$$y_m = 6,0 \frac{m^2}{64} \frac{1 + \varepsilon \frac{m^2}{64}}{1 + \varepsilon}$$

Die Ziffer  $\varepsilon$  wollen wir so wählen, daß  $f - y_7$  ungefähr  $2,0^m$ , also  $y_7$  ungefähr  $4,0^m$  wird. Aus der Gleichung

$$4,0 = 6,0 \frac{49}{64} \frac{1 + \varepsilon}{1 + \varepsilon}$$

folgt  $\varepsilon = 1,23$ , wofür wir den durch 64 teilbaren Wert 1,28 nehmen. Dann ergibt sich

$$y_m = \frac{m^2 (1 + 0,02 m^2)}{24,32}$$

also für $m =$	1	2	3	4	5	6	7
$y =$	$0,042^m$	$0,178^m$	$0,437^m$	$0,869^m$	$1,542^m$	$2,546^m$	$3,989^m$
$f - y =$	$5,958^m$	$5,822^m$	$5,563^m$	$5,131^m$	$4,458^m$	$3,454^m$	$2,011^m$

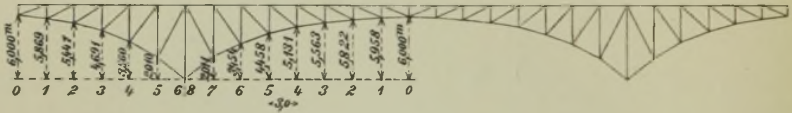


Fig. 422.

Für die Seitenöffnung nehmen wir  $r = 1$  an und erhalten (wegen  $x = m\lambda$ ,  $l = 6\lambda$ )

$$y_m = \frac{m^2 \left(1 + \varepsilon \frac{m}{6}\right)}{6(1 + \varepsilon)}$$

Die Ziffer  $\varepsilon$  möge so bestimmt werden, daß die Ordinate  $y_5$  der Seitenöffnung ebenso groß wird, wie die Ordinate  $y_7$  der Mittelöffnung. Aus der Gleichung

$$3,989 = \frac{25 \left(1 + \varepsilon \frac{5}{6}\right)}{6(1 + \varepsilon)}$$

ergibt sich  $\varepsilon = 0,344$ , wofür der durch 6 teilbare Wert 0,342 genommen werden möge. Dann wird

$$y_m = \frac{m^2 (1 + 0,057 m)}{8,052}$$

also für $m =$	1	2	3	4	5
$y =$	$0,131^m$	$0,553^m$	$1,309^m$	$2,440^m$	$3,990^m$
$f - y =$	$5,869^m$	$5,447^m$	$4,691^m$	$3,560^m$	$2,010^m$

**203.** Bei Bogen- und Hängebrücken werden die Gurtungen öfter aus krummen Stäben gebildet. Kreisbögen oder Korbbögen erhalten dann in der Regel, wegen der größeren Einfachheit der Werkstattarbeit, den Vorzug. Die zuerst nach irgend welchen Grundsätzen gezeichnete Linie muß durch Kreis-



bögen ersetzt werden. Soll z. B. ein symmetrischer Korbbogen (Fig. 423) durch die Punkte  $C_0, C_1, C_2, C_3$  gelegt werden, so berechnet man die Winkel  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  mittels der Gleichungen

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{h_1}{e_1}, \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{h_2}{e_2}, \quad \operatorname{tg} \alpha_3 = \frac{h_3}{e_3},$$

findet hierauf

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \alpha_1 \\ \beta_2 &= \alpha_2 - 2\beta_1 \\ \beta_3 &= \alpha_3 - 2\beta_1 - 2\beta_2 \end{aligned}$$

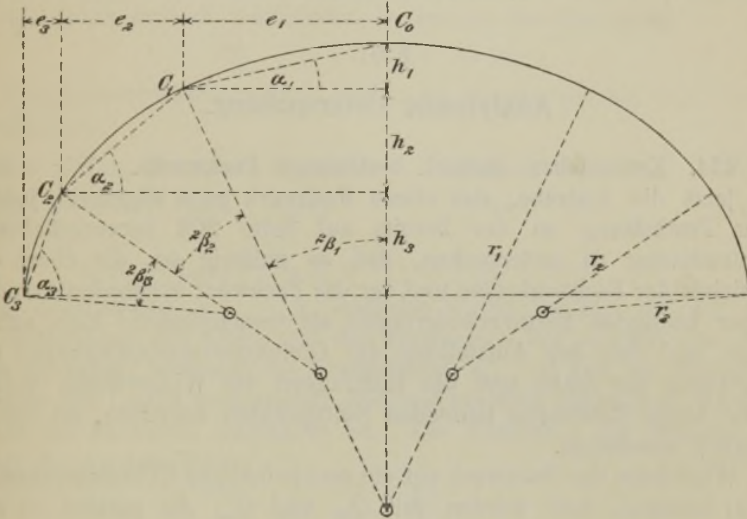


Fig. 423.

und erhält die Halbmesser

$$r_1 = \frac{e_1}{2 \sin \beta_1 \cos \alpha_1}, \quad r_2 = \frac{e_2}{2 \sin \beta_2 \cos \alpha_2}, \quad r_3 = \frac{e_3}{2 \sin \beta_3 \cos \alpha_3}$$

Ist die Feldweite  $\lambda$  konstant, so achte man bei der Berechnung der Kreislinien-Ordinaten darauf, daß die Werte  $y^2$  eine Differenzreihe zweiter Ordnung bilden und sich auf die Form

$$y_m^2 = a + bm + cm^2$$

bringen lassen. Für die in Fig. 424 angenommenen Koordinaten ist beispielsweise  $a = k^2, b = 2c\lambda, c = -\lambda^2$ .

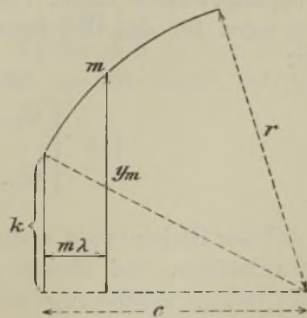


Fig. 424.

## XIII. Abschnitt.

## Allgemeine Theorie des statisch bestimmten ebenen Fachwerks.

## § 51.

## Analytische Untersuchung.

204. **Kennzeichen statisch bestimmter Fachwerke.** Wir stellen uns jetzt die Aufgabe, das ebene Fachwerk ganz allgemein, jedoch unter Festhaltung an der bereits auf Seite 208 hervorgehobenen Voraussetzung zu untersuchen, daß es zulässig sei, die durch die Elastizität der Fachwerkstäbe und der das Fachwerk stützenden fremden Körper bedingten Formveränderungen als verschwindend klein aufzufassen und bei der Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen die Richtungen der Stäbe und die Richtungen der Widerstände, welche in den längs Führungen laufenden Stützpunkten angreifen, als unveränderlich anzusehen.

Wird dann das Fachwerk auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem  $(x, y)$  bezogen, und werden mit  $Q_{xm}$  und  $Q_{ym}$  die parallel zu den Koordinatenachsen gebildeten Seitenkräfte der im Knotenpunkte  $m$  angreifenden äußeren Kraft  $Q_m$  (welche gegebene Last oder unbekannter Stützenwiderstand sein kann) bezeichnet, ferner mit  $S_1, S_2, \dots, S_p$  die Spannkkräfte in den von  $m$  ausgehenden Stäben und mit  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$  die Neigungswinkel dieser Stäbe gegen die  $x$ -Achse, so lauten die Bedingungen für das Gleichgewicht der auf den Knoten  $m$  wirkenden Kräfte:

$$(1) \quad \begin{cases} Q_{xm} + \sum_1^p S \cos \alpha = 0 \\ Q_{ym} + \sum_1^p S \sin \alpha = 0. \end{cases}$$

Zwei solcher Gleichungen ersten Grades lassen sich für jeden Knotenpunkt aufstellen, und ebenso groß muß auch die Anzahl der unbekanntenen Stützenwiderstände und Stabkräfte sein, wenn das Fachwerk ein statisch bestimmtes sein soll.

Der Widerstand eines beweglichen Auflagers ist nur der Größe nach unbekannt; seine Richtung fällt in die Normale der Bahn, längs





Fachwerk erstens *statisch bestimmt*, weil sich die Spannkkräfte und Stützenwiderstände für jeden Belastungszustand eindeutig berechnen lassen, und zweitens ist es *unbeweglich*, weil die Gleichungen (1) und (3) ausdrücken, daß an jedem Knotenpunkte Gleichgewicht besteht. Ist hingegen  $D = 0$ , so sind die Unbekannten  $x_1 \dots x_i$  entweder nicht alle eindeutig bestimmt oder nicht alle endlich, oder es gelingt ihre Berechnung nur für gewisse Belastungsweisen, oder es ist ein Gleichgewichtszustand nur dann möglich, wenn die Kräfte bestimmten Bedingungen genügen. Welcher dieser Fälle auch vorliegen möge, das eine steht fest: *im Falle  $D = 0$  ist das Fachwerk kein statisch bestimmtes.*

Es ist nun besonders hervorzuheben, daß sich durch geschickte Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen die zeitraubende Arbeit der Ausrechnung der Determinante  $D$  von  $2k$  Gleichungen stets umgehen läßt. In den meisten Fällen der Praxis ist es sogar möglich, diese Bedingungen so zu bilden, daß jede Gleichung nur eine einzige Unbekannte enthält. Alle in den früheren Abschnitten behandelten Fachwerke lassen sich auf diesem Wege berechnen; man braucht nur Momentengleichungen aufzustellen und die Drehpunkte passend zu wählen. In anderen Fällen ist es wieder möglich, zwei Gleichungen mit je zwei Unbekannten zu bilden und nach Auflösung derselben jede der übrigen Unbekannten mittels einer Gleichung zu berechnen, die nur noch eine Unbekannte enthält; die Entscheidung der Frage nach der statischen Bestimmtheit erfordert dann nur die Ausrechnung einer Determinante zweiten Grades u. s. w. Unsere Aufgabe wird also darin bestehen, den Grad der Determinante, welche über die statische Bestimmtheit Aufschluß gibt, möglichst zu erniedrigen. Bevor wir dieselbe lösen, wollen wir diejenigen Bildungsgesetze statisch bestimmter Fachwerke zusammenstellen, welche zu Stabgebilden führen, die mit Hilfe der in den früheren Abschnitten entwickelten Verfahren berechnet werden können. Schwierigere Fälle werden wir dann auf einfachere zurückführen.

Bei dieser allgemeinen Untersuchung wird es zuweilen zweckmäßig sein, die nach festen Richtungen wirkenden Seitenkräfte der Stützenwiderstände als die Spannkkräfte von Stäben aufzufassen, welche die Stützpunkte mit außerhalb des Fachwerks gelegenen festen Punkten verbinden und *Auflagerstäbe* genannt werden. Zu einem festen Auflager gehören zwei, zu einem beweglichen Auflager ein Auflagerstab. Da man nun jene festen Punkte als Knotenpunkte eines die Gesamtheit aller Widerlager vorstellenden statisch bestimmten Fachwerks — z. B. eines Dreiecknetzes — ansehen darf, so erkennt man, daß man schließlich jedes irgendwie gestützte Fachwerk auf eine einzige starre Scheibe zurückführen kann, an welcher ein System im Gleichgewicht befindlicher äußerer Kräfte angreift. Bedeutet  $k$  die Anzahl

der Knotenpunkte dieser Scheibe, so stehen  $2k$  Gleichgewichtsbedingungen zur Verfügung. Da nun die äußeren Kräfte nicht beliebig angenommen werden dürfen, sondern drei Gleichgewichtsbedingungen, welche in jenen  $2k$  Gleichungen mit enthalten sind, genügen müssen, so beträgt die notwendige und hinreichende Anzahl der Stäbe einer Scheibe

$$(6) \quad r = 2k - 3.$$

Diese Beziehung kann auch aus der Gleichung (2) hergeleitet werden; denn zur Stützung einer starren Scheibe sind erforderlich und hinreichend: entweder ein festes und ein bewegliches Auflager ( $n''=1$ ,  $n'=1$ ) oder drei bewegliche Auflager ( $n'=3$ ). Wenn wir also in der Folge bei allgemeineren Untersuchungen nur von unbekanntem Stabkräften reden (wie in No. 206) oder nur von einem Fachwerk von  $2k-3$  Stäben (wie in No. 207), so liegt darin keineswegs eine Einschränkung.

**205. Die einfachsten Bildungsgesetze der statisch bestimmten Fachwerke.** 1) Schließt man an zwei Knotenpunkte  $A$  und  $B$  eines statisch bestimmten Fachwerks einen neuen, nicht in die Gerade  $AB$  fallenden Knotenpunkt  $C$  durch zwei Stäbe  $AC$  und  $BC$  an, so ist das neue Fachwerk ebenfalls statisch bestimmt. Die Spannkraften der hinzugefügten Stäbe sind nur von der in  $C$  angreifenden äußeren Kraft  $P_C$  abhängig und können mit Hilfe eines Krätedreiecks bestimmt werden. Auf diese Weise kann man beliebig viele Knotenpunkte mit zwei festgehaltenen Stützpunkten in Verbindung bringen, oder man kann, von einem Dreieck ausgehend, eine gegliederte Scheibe bilden, deren Knotenpunkte sich gegeneinander nicht bewegen können. Die Festhaltung der Scheibe in der Konstruktionsebene erfolgt schließlich mit Hilfe von drei Auflagerstäben, deren Achsen sich aber nicht in einem und demselben Punkte schneiden dürfen (vergl. S. 112).

Fällt der Knotenpunkt  $C$  in die Gerade  $AB$ , so haben die um  $A$  und  $B$  mit den Halbmessern  $AC$  und  $BC$  beschriebenen Kreise ein Bogenelement gemein, innerhalb dessen sich der Punkt  $C$  frei bewegen kann. Punkt  $C$  wird also nicht festgelegt, sondern behält eine *unendlich kleine Beweglichkeit*. Gleichgewicht ist nur dann möglich, wenn auch  $P_C$  in die Gerade  $BC$  fällt; der Gleichgewichtszustand ist aber unbestimmt, weil sich für die Stäbe  $AC$  und  $BC$  unendlich viele Spannkraften angeben lassen, deren Differenz gleich  $P_C$  ist. Liegt aber  $P_C$  nicht in der Geraden  $AB$ , so tritt der Gleichgewichtszustand erst nach einer unendlich kleinen Verrückung des Punktes  $C$  ein, und die Zerlegung von  $P_C$  nach den beiden nur unendlich wenig voneinander abweichenden Richtungen  $AC$  und  $BC$  liefert unendlich große Spannkraften.

In Wirklichkeit ändern sich allerdings die Längen aller von  $P_c$  beanspruchten Fachwerkstäbe schon bei der geringsten Belastung des Knotens  $C$ . Dreht sich dann  $AC$  gegen  $BC$ , so liefert die Zerlegung von  $P_c$  nach den beiden Stabrichtungen endliche Spannkkräfte. Aber auch dann, wenn  $A$ ,  $B$  und  $C$  in einer Geraden liegen bleiben und  $P_c$  in diese Gerade fällt, entstehen in  $AC$  und  $BC$  ganz bestimmte endliche Spannkkräfte, welche sich aus der Bedingung folgern lassen, daß die Summe der Änderungen der Längen dieser beiden Stäbe gleich der Strecke ist, um die sich der Abstand  $AB$  infolge der Verschiebungen der Knotenpunkte  $A$  und  $B$  ändert. Diese einfache Betrachtung lehrt ganz deutlich, daß beim Auftreten unendlich kleiner Beweglichkeit und dem damit stets Hand in Hand gehenden Auftreten unendlich großer Wurzeln der linearen Gleichgewichtsbedingungen die Voraussetzung verschwindend kleiner Formveränderungen unzulässig ist. Schon in der Nähe der durch den Ausnahmefall gekennzeichneten Grenzlage wird jene Voraussetzung hinfällig.

2) Schließt man an zwei Knotenpunkte  $A$  und  $B$  eines statisch bestimmten Fachwerks einen neuen, nicht in die Gerade  $AB$  fallenden Knotenpunkt  $C$  durch zwei statisch bestimmte Scheiben  $AC$  und  $BC$  an, so ist das neue Fachwerk ebenfalls statisch bestimmt. Die Kräfte mit denen die beiden Scheiben in  $C$  aufeinander wirken, und die Kräfte, welche sie bei  $A$  und  $B$  auf das ursprüngliche Fachwerk ausüben, findet man mit Hilfe der in No. 108, Seite 176 angegebenen Verfahren; denn es liegt gewissermaßen ein Dreigelenkbogen vor, dessen Widerlager das ursprüngliche Fachwerk ist. Diese zweite Bildungsweise schließt die erste als Sonderfall ein, da biegungsfeste Stäbe nur besondere Fälle von Scheiben sind.

3) Gliedert man an drei Knotenpunkte  $A$ ,  $B$ ,  $C$  eines statisch bestimmten Fachwerks eine statisch bestimmte Scheibe durch drei Stäbe  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  an, so ist das neue Fachwerk ebenfalls statisch bestimmt. Die Ermittlung der Spannkkräfte in den drei Stäben erfolgt mit Hilfe des Ritterschen oder des Culmannschen Verfahrens (§ 26). Zu vermeiden ist nur der Ausnahmefall, daß sich die drei Geraden  $AA_1$ ,  $BB_1$  und  $CC_1$  in einem Punkte schneiden, weil es sonst möglich ist, das Dreieck  $A_1 B_1 C_1$  unendlich wenig zu verschieben. Sind die drei Stäbe parallel und gleich lang, so ist die Beweglichkeit sogar eine endliche; Gleichgewicht ist in diesem Falle nur möglich, wenn die Mittelkraft der auf die Scheibe  $A_1 B_1 C_1$  wirkenden äußeren Kräfte parallel zu den Verbindungsstäben ist. An die Stelle der drei Verbindungsstäbe dürfen auch drei statisch bestimmte Scheiben treten: die an ihnen angreifenden äußeren Kräfte werden nach den im § 28 gezeigten Verfahren auf die Knotenpunkte  $A$ ,  $A_1$ ,  $B$ ,  $B_1$ ,  $C$ ,  $C_1$  verteilt.



4) Eine vierte Bildungsweise erhält man aus der zweiten, wenn man jedes der drei Gelenke  $A, B, C$ , in denen die beiden hinzugefügten Scheiben mit dem bereits vorliegenden Fachwerk und miteinander zusammenhängen, durch ein Stäbepaar ersetzt, dessen Schnittpunkt nach einer schon früher angestellten Untersuchung (No. 141, S. 233) dieselbe Rolle spielt wie ein Gelenk. An die Stelle der Verbindungsstäbe dürfen auch statisch bestimmte Scheiben treten. Liegen die drei Gelenkpunkte  $A, B, C$  in einer Geraden, so besitzt das Fachwerk unendlich kleine Beweglichkeit.

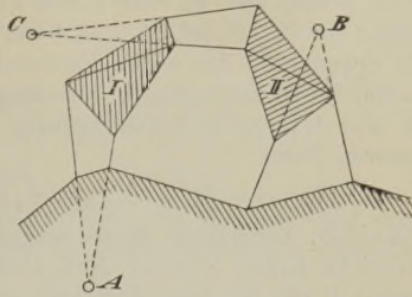


Fig. 425.

Dieser Fall liegt z. B. bei dem in Fig. 426 dargestellten *Pascalschen* Sechseck vor; denn dieses Stabgebilde besteht aus drei zu Stäben zusammengeschrumpften Scheiben  $I, II, III$ , welche durch drei Stäbepaare, deren Schnittpunkte  $A, B, C$  in eine Gerade fallen, miteinander verbunden sind.

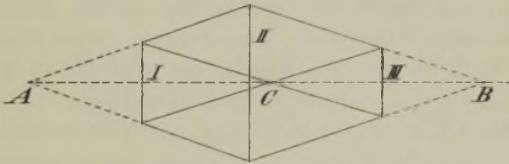


Fig. 426.

Es verdient noch hervorgehoben zu werden, daß die vierte Bildungsweise die drei anderen mit enthält. Läßt man z. B. zwei Gelenkvierecke zu einfachen Gelenken zusammenschrumpfen und eine der beiden hinzugefügten Scheiben zu einem Stabe, so erhält man die dritte Bildungsweise.

Wir haben die beschriebenen Bildungsgesetze die einfachsten genannt, weil sie Fachwerke liefern, deren statische Bestimmtheit ohne weiteres einleuchtet, und weil auch die Ausnahmefälle unendlich kleiner oder endlicher Beweglichkeit auf den ersten Blick zu erkennen sind.

**206. Ein ganz allgemeines Verfahren zur Berechnung statisch bestimmter Fachwerke** ist nun das folgende.

Man verwandle das Fachwerk durch Beseitigung von Stäben und Hinzufügung von ebensoviel neuen Stäben, welche kurz *Ersatzstäbe* genannt werden sollen, in ein Stabgebilde, dessen statische Bestimm-



1) Sind sämtliche Elemente einer Zeile oder einer Spalte einer Determinante gleich Null, so ist die Determinante gleich Null.

2) Sind die Elemente zweier Zeilen oder zweier Spalten einer Determinante entsprechend gleich oder proportional, so ist die Determinante gleich Null. Z. B.:

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_1 b_1 c_1 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_1, -a_1 c_1 \\ a_2, -a_2 c_2 \\ a_3, -a_3 c_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 b_1 \lambda b_1 \\ a_2 b_2 \lambda b_2 \\ a_3 b_3 \lambda b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

In den nachstehenden Anwendungen werden wir zur Erzielung einer kurzen Ausdrucksweise die Ersatzstäbe *Y*-Stäbe nennen und die weggenommenen Stäbe: *Z*-Stäbe.

Manchem Leser dürfte die folgende kurze Anweisung zur Berechnung der Determinanten erwünscht sein. Eine Determinante vom  $r^{\text{ten}}$  Grade läßt sich in  $r$ -Unterdeterminanten vom  $(r-1)^{\text{ten}}$  Grade zerlegen. Die Unterdeterminante zum Element  $a_k$  findet man, indem man die Spalte  $a$  und die  $k^{\text{te}}$  Zeile der ursprünglichen Determinante streicht; sie erhält das Vorzeichen  $+$  oder  $-$ , je nachdem der Zeiger  $k$  ungerade oder gerade ist. Hiernach ergibt sich das folgende Schema:

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 c_2 \\ b_3 c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 c_1 \\ b_3 c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 c_1 \\ b_2 c_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 d_1 \\ a_2 b_2 c_2 d_2 \\ a_3 b_3 c_3 d_3 \\ a_4 b_4 c_4 d_4 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 c_2 d_2 \\ b_3 c_3 d_3 \\ b_4 c_4 d_4 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 c_1 d_1 \\ b_3 c_3 d_3 \\ b_4 c_4 d_4 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 c_1 d_1 \\ b_2 c_2 d_2 \\ b_4 c_4 d_4 \end{vmatrix} - a_4 \begin{vmatrix} b_1 c_1 d_1 \\ b_2 c_2 d_2 \\ b_3 c_3 d_3 \end{vmatrix}$$

Besonders wichtig ist der folgende Satz.

Addiert man die mit einer beliebigen Größe multiplizierten Elemente einer Zeile oder Spalte zu den entsprechenden Elementen einer anderen Zeile oder Spalte, so ändert sich der Wert der Determinante nicht. Z. B. ist

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1, b_1 + \lambda a_1, c_1 + \lambda' a_1 \\ a_2, b_2 + \lambda a_2, c_2 + \lambda' a_2 \\ a_3, b_3 + \lambda a_3, c_3 + \lambda' a_3 \end{vmatrix}$$

Wählt man nun  $\lambda = -\frac{b_1}{a_1}$  und  $\lambda' = -\frac{c_1}{a_1}$ , so erhält man

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ a_2, b_2 - \frac{b_1}{a_1} a_2, c_2 - \frac{c_1}{a_1} a_2 \\ a_3, b_3 - \frac{b_1}{a_1} a_3, c_3 - \frac{c_1}{a_1} a_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 - \frac{b_1}{a_1} a_2, c_2 - \frac{c_1}{a_1} a_2 \\ b_3 - \frac{b_1}{a_1} a_3, c_3 - \frac{c_1}{a_1} a_3 \end{vmatrix}$$

Damit ist gezeigt, wie man den Grad einer Determinante erniedrigen kann.



**Beispiel.** Figur 427 stellt ein symmetrisches Fachwerk vor, welches man ein *sechsfaches Netzwerk* zu nennen pflegt, weil jede von Gurtung zu Gurtung reichende Strebe durch die Schar der anders gerichteten Streben in *sechs* Abschnitte zerlegt wird. Die Stützweite wird durch die Knotenpunkte der einen Gurtung in zwei halbe Felder und  $n$  ganze Felder eingeteilt.

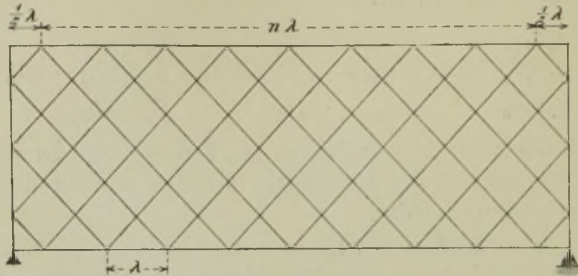


Fig. 427.

Sowohl die senkrechte als auch die wagerechte Mittellinie sind Symmetrieachsen. Die Abzählung der Stäbe und Knotenpunkte lehrt, daß das Fachwerk einen Stab zu wenig besitzt, wobei es ganz gleichgültig ist, ob die Streben an den Kreuzungsstellen miteinander verbunden sind oder nicht. Wir wollen den

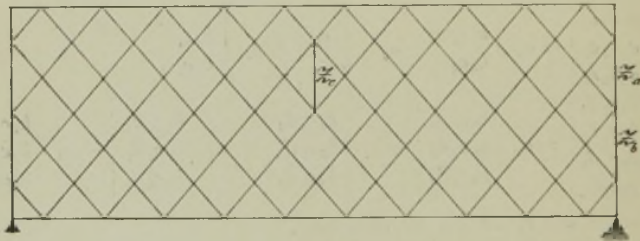


Fig. 428.

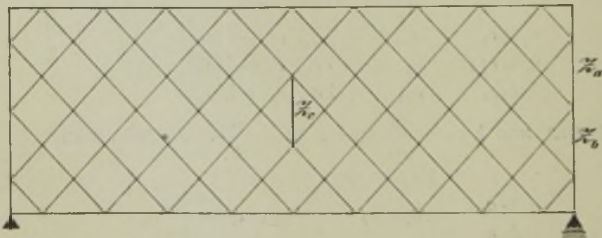


Fig. 429.

ersteren Fall voraussetzen, weil er der üblichen Ausführungsweise entspricht, und weil engmaschige Fachwerke ganz besonders für zerlegbare Brücken in Betracht kommen. Bei diesen aber sind kurze Stablängen am Platz, damit Transport und Zusammenbau leicht von statten gehen. Den fehlenden Stab fügen wir in der Weise hinzu, daß wir ein in der Mitte liegendes Viereck versteifen, wobei die in den Figuren 428 bis 430 dargestellten Anordnungen in Betracht

kommen können. Die ganze Abzählung ist übrigens überflüssig; denn ein Blick auf die Figur 431 lehrt, daß sich nach Einfügung von drei  $Y$ -Stäben und Wegnahme von drei  $Z$ -Stäben ein statisch bestimmtes Fachwerk ergibt, welches sich nach dem ersten Bildungsgesetze an eine aus aneinandergereihten Dreiecken bestehende Scheibe

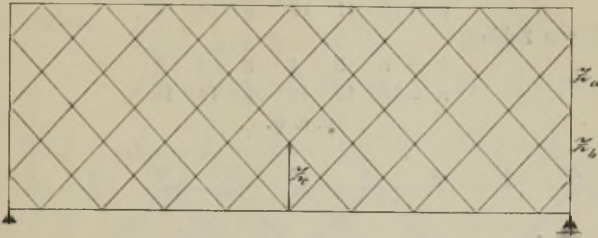


Fig. 430.

angliedern läßt. Wäre die Aussteifung des einen Vierecks durch den Stab  $Z_c$  unterblieben, so würden den drei  $Y$ -Stäben nur zwei  $Z$ -Stäbe gegenüberstehen.

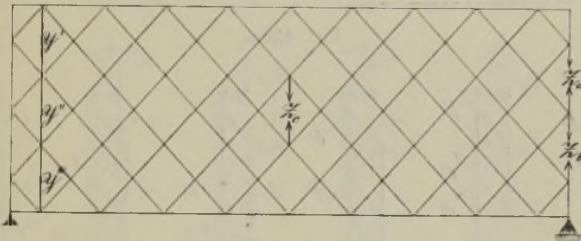


Fig. 431.

Nachdem nunmehr für die erforderliche Stabzahl gesorgt worden ist, muß zur Untersuchung der Determinante

$$(10) \quad D = \begin{vmatrix} Y_a' & Y_b' & Y_c' \\ Y_a'' & Y_b'' & Y_c'' \\ Y_a''' & Y_b''' & Y_c''' \end{vmatrix}$$

geschritten werden. Wir beginnen mit der Ermittlung der Spannkkräfte für den in Fig. 432a dargestellten Zustand  $Z_a = 1$ . Die gedrückten Streben und gedrückten Gurtstäbe sind unterstrichen, die spannungslosen Streben fortgelassen und die spannungslosen Gurtstäbe gestrichelt worden. Die Spannkkräfte in den Streben sind

$$\mu = \pm \frac{1}{2 \sin \varphi},$$

wo  $\varphi$  den Neigungswinkel der Streben gegen die Wagerechte bedeutet. In den Gurtungen entstehen die Spannkkräfte

$$\nu = +1 \cdot \cotg \varphi.$$

In unserer Figur ist  $n = 12$  angenommen worden; es greifen dann an der aus Dreiecken bestehenden Scheibe nur die Spannkkräfte von 4 Streben an. Rückt man die Stütze um eine Feldweite nach rechts ( $n = 11$ ), so gesellt sich zu den 4 Streben noch ein Gurtstab, dessen Spannkraft mit derjenigen der angrenzenden Strebe zu einer Mittelkraft von der Größe  $\mu$  und der Neigung  $\varphi$  vereinigt werden kann. Es

leuchtet ein, daß es stets genügt, die Spannkkräfte in den Streben zu verfolgen, weil sich die an der Scheibe angreifenden Gurtkräfte ohne weiteres aus der Bedingung ergeben, daß sich die Scheibe im Gleichgewicht befinden muß. Auf diese Weise gelangt man sehr schnell zu den sechs in Fig. 432b dargestellten möglichen Belastungsweisen der Endscheibe; sie entsprechen nicht nur den Zahlen

$$n = 12 \quad 11 \quad 10 \quad 9 \quad 8 \quad 7$$

sondern auch den Zahlen

$$n = 6 \quad 5 \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1$$

$$n = 18 \quad 17 \quad 16 \quad 15 \quad 14 \quad 13$$

u. s. w.

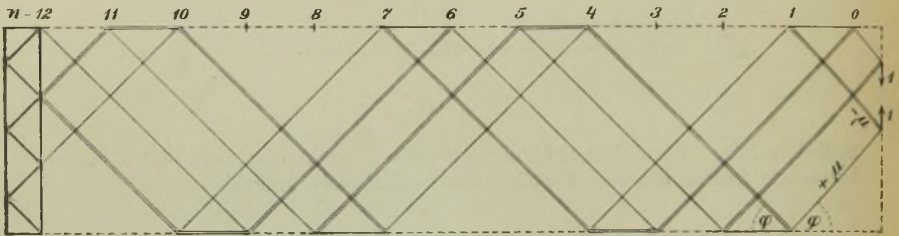


Fig. 432 a.

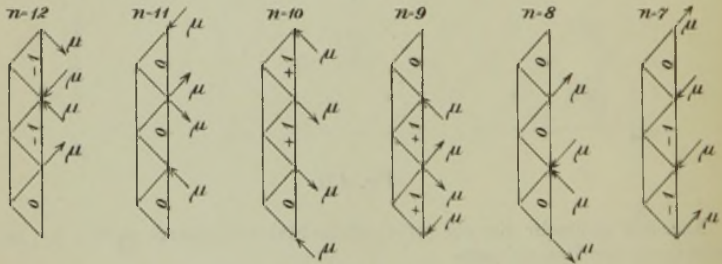


Fig. 432 b.

und liefern für die Spannkkräfte  $Y_a' Y_a'' Y_a'''$  der Ersatzstäbe die in die Figuren eingetragenen Werte. Da nun für

$$n = 2, 5, 8, 11, 14, 17, \dots$$

alle drei Werte  $Y_a$  gleich Null sind, was zur Folge hat, daß auch die Determinante  $D$  gleich Null wird, so erweist sich das Fachwerk als unbrauchbar, sobald die Zahl  $n - 2$  den Teiler 3 besitzt.

Der Belastungszustand  $Z_o = 1$  ist das Spiegelbild des Zustandes  $Z_o = 1$ .

Für die weitere Untersuchung sind die drei in den Figuren 428, 429 und 430 dargestellten Fälle zu unterscheiden. Wir nehmen zunächst an, es sei  $n$  ungerade. Fig. 428.

Fig. 433 stellt den Spannungszustand  $Z_o = 1$  dar. Die Spannkkräfte in den Streben sind wieder

$$\mu = \pm \frac{2}{2 \sin \varphi},$$

in den Gurtstäben:

$$v = + 1 \cdot \cotg \varphi.$$





dieselben sind gleich Null, weil die Elemente zweier Spalten entsprechend gleich oder proportional sind. *Das untersuchte Fachwerk ist deshalb für jedes ungerade  $n$  unbrauchbar.*

Ist  $n$  eine gerade Zahl, so sind die beiden in den Figuren 429 und 430 dargestellten Fälle zu unterscheiden. Für den ersten zeigt Fig. 435 den Spannungszustand  $Z_a = 1$ ; die Figuren 436 geben Aufschluß über die 6 Angriffsweisen, denen die Endscheibe für verschiedene  $n$  ausgesetzt ist, und über die bei diesen Angriffsweisen in den Ersatzstäben hervorgerufenen Spannkkräfte. Sie entsprechen der Reihe nach den Werten

- beziehungsweise  $n = 18, 16, 14, 12, 10, 8$   
 oder  $n = 6, 4, 2$   
 oder  $n = 30, 28, 26, 24, 22, 20$  u. s. w.

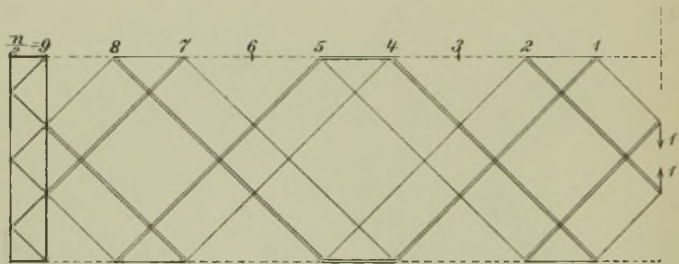


Fig. 435.

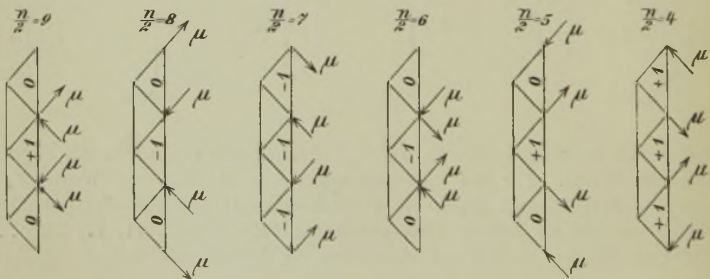


Fig. 436.

Nach Ausscheidung der bereits bei der Untersuchung des Zustandes  $Z_a = 1$  als unbrauchbar erkannten Fälle

$$n = 2, 8, 14, 20, \dots$$

findet man für die Determinanten  $D$  die Werte

$$D = \begin{vmatrix} +1 & 0 & 0 \\ +1 & +1 & -1 \\ 0 & +1 & 0 \end{vmatrix} = +1 \text{ für } n = 4, 16, 28, \dots$$

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & +1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \text{ für } n = 6, 18, 30, \dots$$

$$D = \begin{vmatrix} +1 & 0 & 0 \\ +1 & +1 & +1 \\ 0 & +1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \text{ für } n = 10, 22, 34, \dots$$

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = +1 \text{ für } n = 12, 24, 36, \dots$$

und erkennt, daß das Fachwerk in Fig. 429 statisch bestimmt ist, sobald  $n - 2$  nicht durch 3 teilbar ist. Für die brauchbaren  $n$  ist die Determinante  $D$  gleich  $+1$  oder gleich  $-1$  je nachdem  $\frac{n}{2}$  eine gerade oder eine ungerade Zahl ist.

Zu einem ähnlichen Ergebnis führt die Untersuchung des in Fig. 430 dargestellten Falles der Aussteifung eines an einer Gurtung liegenden Vierecks. Die Belastung  $Z_c = 1$ , Fig. 437, erzeugt in den durch eine eingeklammerte 2 gekennzeichneten Streben doppelt so große Spannkraft ( $\frac{\pm 1}{\sin \varphi}$ ) wie in den übrigen. [Die

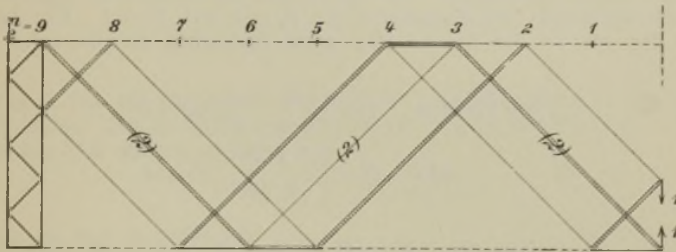


Fig. 437.

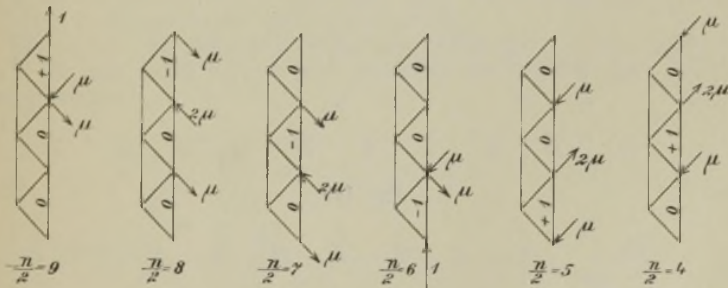


Fig. 438.

Spannkraften in den Gurtungen sind wieder gleich  $\pm 1 \cdot \cotg \varphi$ . In den Figuren 438 sind die 6 verschiedenen Belastungsfälle für die Endscheibe angegeben. Man findet

$$D = \begin{vmatrix} +1 & 0 & -1 \\ +1 & +1 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \text{ für } n = 4, 16, 28, \dots$$

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 0 & +1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = +1 \text{ für } n = 6, 18, 30, \dots$$



$$D = \begin{vmatrix} +1 & 0 & 0 \\ +1 & +1 & 0 \\ 0 & +1 & +1 \end{vmatrix} = +1 \text{ für } n = 10, 22, 34, \dots$$

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \text{ für } n = 12, 24, 36, \dots$$

Das Fachwerk in Fig. 430 ist also statisch bestimmt, sobald  $n - 2$  nicht durch 3 teilbar ist. Für die brauchbaren  $n$  ist die Determinante  $D$  gleich  $-1$  oder gleich  $+1$ , je nachdem  $\frac{n}{2}$  eine gerade oder eine ungerade Zahl ist.

Weitere Übungsbeispiele liefern die Figuren 439 bis 442.

In den Figuren 439 und 440 bilden die Streben einen einzigen zusammenhängenden Stabzug  $0\ 1\ 2\ 3\ 4\ \dots$ , der von einem Eckknoten ausgeht und in einem anderen Eckknoten endet. Derartige mehrfache Strebenfachwerke sind stets statisch bestimmt. In jedem der beiden vorgeführten Beispiele sind zwei  $Y$ -Stäbe und zwei  $Z$ -Stäbe einzuführen. Die mit (a) und (b) bezeichneten Figuren zeigen die Belastungszustände der Endscheibe für  $Z_a = 1$  und  $Z_b = 1$ . Für das Fachwerk in Fig. 439 ist der Zustand  $Z_b = 1$  das Spiegelbild des Zustandes  $Z_a = 1$ . Man findet

für Fig. 439  $D = \begin{vmatrix} 0 & +1 \\ +1 & 0 \end{vmatrix} = -1$

„ „ 440  $D = \begin{vmatrix} +1 & +1 \\ 0 & +1 \end{vmatrix} = +1.$

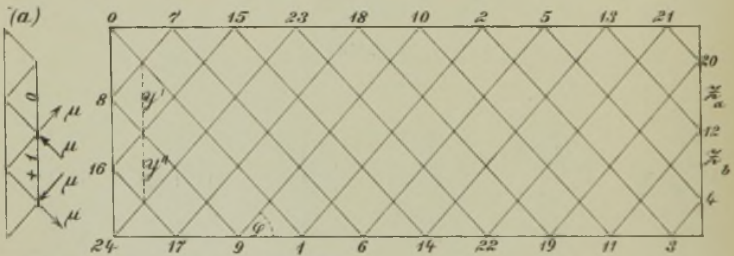


Fig. 439.

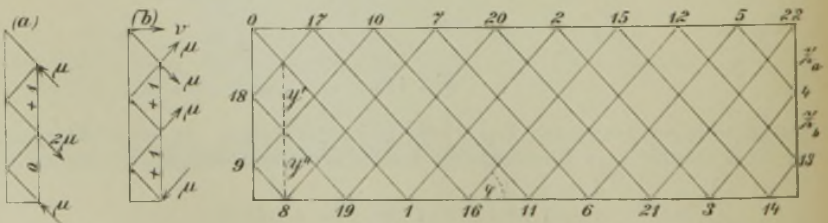


Fig. 440.

Fas Fachwerk in Fig. 441 ist statisch unbestimmt, weil die Anzahl der  $Z$ -Stäbe um 1 größer ist, als die Anzahl der  $Y$ -Stäbe. Dieser Fall liegt immer

vor, wenn ein Strebenzug vorkommt, der mit den Gurtungen und Endständern zusammen ein Dreiecknetz bildet (wie *I II III IV*); daneben treten dann stets *geschlossene* Strebenzüge auf, z. B. 0, 1, 2, 3, . . . 8. Bei der Berechnung von *D* ist ein *Z*-Stab (gleichgültig, welcher) fortzulassen. Man findet stets  $D=0$ . Um dies für Fig. 441 nachzuweisen, genügt es, den Zustand  $Z_a=1$  zu untersuchen; man findet  $Y_a'=0, Y_a''=0$ . Das Fachwerk ist also beweglich, trotzdem es einen überzähligen Stab besitzt.

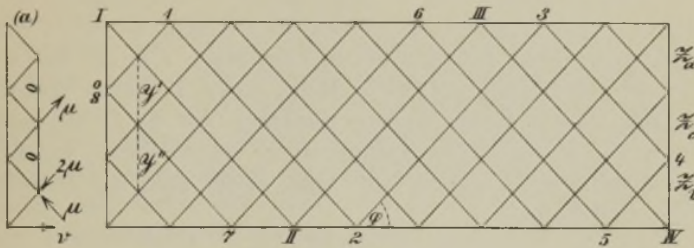


Fig. 441.

Das in Fig. 442 dargestellte Fachwerk ist ebenfalls statisch unbestimmt, weil zwei *Y*-Stäben drei *Z*-Stäbe gegenüberstehen. Es ist unbeweglich. Läßt man nämlich den Stab  $Z_c$  fort, so findet man

$$D = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

Läßt man  $Z_b$  fort, so ergibt sich

$$D = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1.$$

Das Fachwerk besitzt zwei Strebenzüge. Der eine beginnt im Knotenpunkte  $A_1$  und endet in  $E_1$ , der andere führt von  $A_2$  bis  $E_2$ .

Beispiele für die graphische Behandlung mehrteiliger Strebenfachwerke finden sich in No. 210 und § 53. In § 53 wird auch die Ermittlung der Einflußlinien erläutert werden.

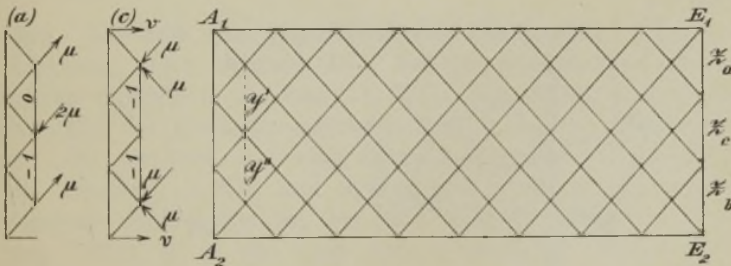


Fig. 442.

207. Das Verfahren von Henneberg. Aus einem statisch bestimmten Fachwerke von  $k$  Knotenpunkten und  $2k - 3$  Stäben, bei welchem zwei Knotenpunkte  $A$  und  $B$  durch einen Stab verbunden

sind, kann man im allgemeinen ein solches von  $k + 1$  Knotenpunkten in der Weise herleiten, daß man einen neuen Knotenpunkt  $D$  mit den Punkten  $A$  und  $B$  und einem dritten Knotenpunkte  $C$  durch Stäbe verbindet und den Stab  $AB$  wegnimmt. Das neue Fachwerk besitzt dann  $2k - 3 + 2 = 2(k + 1) - 3$  Stäbe, und diese Anzahl ist notwendig und hinreichend. Ist man nun im stande, die Spannkraften in dem Fachwerk von  $k$  Knotenpunkten zu ermitteln, so kann man auch die Spannkraften in dem neuen Fachwerke von  $k + 1$  Knotenpunkten finden. Man hat nur nötig, dem Stabe  $CD$  die Rolle eines  $Z$ -Stabes und dem Stabe  $AB$  die Rolle eines  $Y$ -Stabes zuzuweisen und die Spannkraft  $Y$  als lineare Funktion der in  $D$  angreifenden äußeren Kraft  $P_D$  und der Spannkraft  $Z$  darzustellen. Indem man dann die Spannkraft  $Y$  gleich Null setzt, erhält man zur Berechnung von  $Z$  die Gleichung

$$(11) \quad 0 = Y_0 + Y'Z.$$

Hat man aber  $Z$  gefunden, so kann man die Spannkraften in den Stäben  $DA$  und  $DB$  ermitteln und kennt nunmehr alle am Fachwerk von  $k$  Knotenpunkten angreifenden Kräfte. Ist  $Y' = 0$ , so ist das Fachwerk unbrauchbar; es kann von unendlich kleiner oder endlicher Beweglichkeit sein.

Ein Beispiel für den Fall unendlich kleiner Beweglichkeit ist das bereits in No. 205 behandelte Pascalsche Sechseck (Fig. 443); hier tritt das Gleichgewicht erst nach einer unendlich kleinen Bewegung ein und erfordert bei vollkommen starren Stäben unendlich große Spannkraften. Ein Beispiel für endliche Beweglichkeit zeigt Fig. 444; hier liegen zwei durch gleichlange parallele Stäbe verbundene Dreiecke vor. Gleichgewicht ist bei diesem Fachwerk überhaupt nur dann möglich, wenn auch  $Y_0 = 0$  ist; dann aber ist der Gleichgewichtszustand kein bestimmter. Der Nachweis, daß in beiden Fällen  $Y' = 0$  ist, ist leicht zu führen.

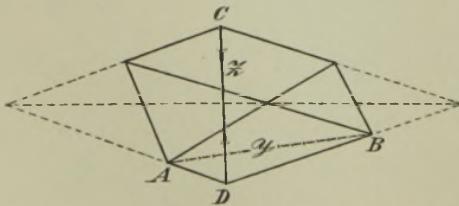


Fig. 443.

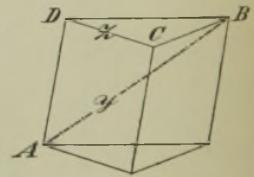


Fig. 444.

Da nun ein statisch bestimmtes Fachwerk von  $k$  Knotenpunkten und  $2k - 3$  Stäben mindestens einen Knotenpunkt besitzt, in welchem



höchstens drei Stäbe zusammenkommen (denn liefern in allen Knotenpunkten mindestens vier Stäbe zusammen, so müßten wenigstens  $\frac{4k}{2} = 2k$  Stäbe vorhanden sein), so setzt uns das Hennebergsche Bildungsgesetz in Verbindung mit dem auf Seite 441 unter (1) beschriebenen einfachsten Bildungsgesetze in den Stand, jedes Fachwerk von  $k$  Knotenpunkten aus dem einfachsten statisch bestimmten Fachwerke, dem Dreieck, durch schrittweise Angliederung neuer Knotenpunkte herzu-  
leiten. Indem man diesen Aufbau verfolgt, findet man stets einen rechnerischen oder zeichnerischen Weg zur Ermittlung der Spannkraft; derselbe kann allerdings, wenn mehrere Knotenpunkte durch drei Stäbe angeschlossen werden müssen, recht langwierig und deshalb für die Praxis unbrauchbar werden; denn die Schwäche des ganzen Verfahrens liegt darin, daß immer erst die Berechnung des Fachwerks von  $k - 1$  Knotenpunkten erledigt werden muß, bevor die Gleichung 11 aufgestellt werden kann. Den Unterschied zwischen der Methode von Henneberg und dem in No. 206 mitgeteilten ganz allgemeinen Verfahren der Stabvertauschung wird man sofort deutlich erkennen, wenn man versucht, die vorhin gelösten Aufgaben nach der Vorschrift von Henneberg zu behandeln.

## § 52.

### Die kinematische Theorie des Fachwerks.

Zu weiteren Eigenschaften statisch bestimmter Fachwerke werden uns einige einfache Sätze der Bewegungslehre führen, die wir zunächst ableiten wollen.

**208. Der Satz vom augenblicklichen Drehpunkte.** Eine irgendwie begrenzte ebene Scheibe  $ABC$  bewege sich in ihrer Ebene aus einer Lage  $A_1B_1C_1$  in die Lage  $A_2B_2C_2$ , Fig. 445. Werden in den Mittelpunkten der Verbindungsgeraden  $A_1A_2$  und  $B_1B_2$  gleichliegender Punkte Lote errichtet und wird deren Schnittpunkt  $\mathfrak{P}$  bestimmt, so sind die Dreiecke  $A_1\mathfrak{P}B_1$  und  $A_2\mathfrak{P}B_2$  gleichartig kongruent, und es kann deshalb die Scheibe aus der Lage  $A_1B_1C_1$  durch eine Drehung um den Punkt  $\mathfrak{P}$  in die Lage  $A_2B_2C_2$  gebracht werden. Ist die Zeitdauer der Bewegung unendlich klein, so dürfen bei endlichen Geschwindigkeiten die Geraden  $A_1A_2$  und  $B_1B_2$  als die augenblicklichen Bewegungsrichtungen der Punkte  $A_1$  und  $B_1$  betrachtet werden, und hieraus folgt, daß sich die Bewegung der Scheibe in jedem Augenblicke auf eine Drehbewegung um einen festen Punkt  $\mathfrak{P}$  zurückführen läßt.

Man nennt diesen Punkt den *augenblicklichen Drehpunkt* oder auch den *augenblicklichen Pol*; seine Lage ist bestimmt, sobald die augenblicklichen Bewegungsrichtungen von irgend zwei Punkten der Scheibe gegeben sind. Man errichtet in jenen Punkten auf deren Bewegungsrichtungen Lote und findet den Pol als den Durchschnittspunkt dieser Lote. Fig. 446.

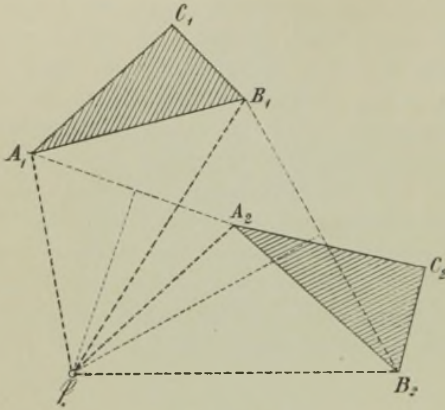


Fig. 445.

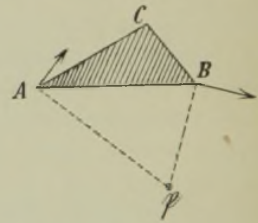


Fig. 446.

Werden z. B. zwei Scheiben *I* und *II* durch zwei Stäbe *AC* und *BD* miteinander verbunden, Fig. 447, und wird *II* festgehalten, so kann sich der Punkt *A* nur auf einem Kreisbogen bewegen, der mit der Stablänge *AC* um *C* beschrieben wird. Die

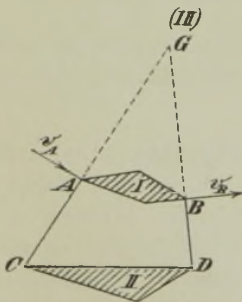


Fig. 447.

Geschwindigkeit  $v_A$  des Punktes *A* ist also rechtwinklig zu *AC*. Ganz ebenso findet man, daß die Geschwindigkeit  $v_B$  des Punktes *B* rechtwinklig zu *BD* ist. Im Schnittpunkte *G* der beiden Stabachsen liegt mithin der augenblickliche Drehpunkt der Scheibe *I*. In diesem Punkte sind die Scheiben gewissermaßen durch ein Gelenk miteinander befestigt, und man darf deshalb, so lange es sich nur um unendlich kleine Bewegungen handelt, den Punkt *G* als den gemeinschaftlichen Punkt der beiden Scheiben ansehen. Wir werden *G* auch den Pol von *I* gegen *II* oder, was dasselbe ist, von *II* gegen *I* nennen und mit  $(I II)$  bezeichnen.

**209. Darstellung der Geschwindigkeiten.** Bedeutet  $\omega$  die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit der Drehbewegung um  $\mathfrak{P}$ , so ist die Geschwindigkeit irgend eines Punktes  $A$  der Scheibe  $v_A = \omega \mathfrak{P}A$ . Das gegenseitige Verhältnis der Geschwindigkeiten verschiedener Punkte  $A, B, C$  (Fig. 448) ist durch die Gleichung bestimmt

$$(1) \quad v_A : v_B : v_C = \overline{\mathfrak{P}A} : \overline{\mathfrak{P}B} : \overline{\mathfrak{P}C}.$$

Denkt man sämtliche Geschwindigkeiten in gleichem Sinne um einen rechten Winkel gedreht, so daß also

$$AA' = v_A; \quad BB' = v_B; \quad CC' = v_C$$

ist, so folgt unmittelbar aus der Gleichung (1), daß

$$A'B' \parallel AB \text{ ist, } B'C' \parallel BC \text{ und } C'A' \parallel CA.$$

Die Strecken  $AA', BB', CC'$  nennt man die *lotrechten Geschwindigkeiten der Punkte  $A, B, C$*  und erhält den Satz:

*Die Endpunkte  $A'B'C' \dots$  der lotrechten Geschwindigkeiten der Punkte  $ABC \dots$  bilden eine Figur, welche ähnlich und ähnlich liegend zu der sich bewegendem Figur  $ABC \dots$  ist. Der Pol  $\mathfrak{P}$  ist der Ähnlichkeitspunkt beider Figuren.*

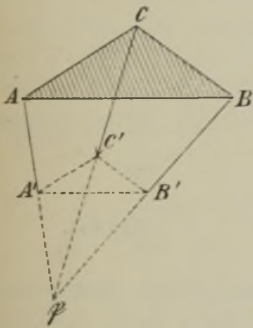


Fig. 448.

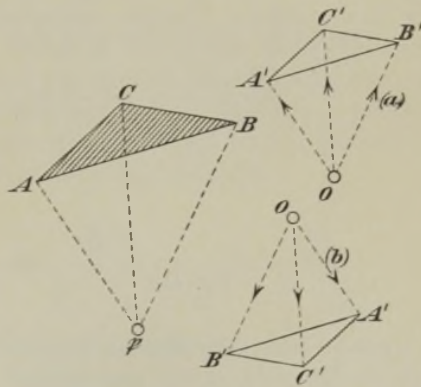


Fig. 449.

Die Figuren  $ABC \dots$  und  $A'B'C' \dots$  werden wir kurz mit  $\mathfrak{F}$  und  $\mathfrak{F}'$  bezeichnen und  $\mathfrak{F}'$  den Geschwindigkeitsplan von  $\mathfrak{F}$  nennen. Zuweilen wird es sich auch als nützlich erweisen, die lotrechten Geschwindigkeiten zu einem Strahlenbüschel zu vereinigen. Die Figuren 449 (a) und (b) veranschaulichen diese Darstellungsweise; die von irgend einem Nullpunkte  $O$  aus aufgetragenen Strecken  $OA', OB', OC'$  geben nach Größe und Richtung die um  $90^\circ$  gedrehten Geschwindig-



keiten  $v_A, v_B, v_C$  der Punkte  $A, B, C$  an. Die Figuren  $\mathfrak{F}'$  und  $\mathfrak{F}$  sind wieder ähnlich, sie brauchen aber nicht mehr ähnlich zu liegen.

**210. Geometrisches Kennzeichen eines beweglichen Fachwerks.** Wir betrachten jetzt eine ebene Stabverbindung  $\mathfrak{F}$  mit den Knotenpunkten  $1, 2, 3, \dots, k$  und denken uns irgend eine Figur  $\mathfrak{F}'$  gezeichnet, bestehend aus geraden Linien, durch welche die den Fachwerkknoten entsprechenden Punkte  $1', 2', 3' \dots k'$  miteinander verbunden werden, so zwar, daß jedem Stabe  $ik$  eine zu  $ik$  parallele Gerade  $i'k'$  entspricht. Werden dann die Strecken  $ii'$  und  $kk'$  als die augenblicklichen lotrechten Geschwindigkeiten der Knotenpunkte  $i$  und  $k$  aufgefaßt, so ist der Schnittpunkt  $\mathfrak{P}_{ik}$  der Geraden  $ii'$  und  $kk'$  der augenblickliche Pol des Stabes  $ik$ . Gelingt es nun, zu der Fachwerkfigur  $\mathfrak{F}$  eine Figur  $\mathfrak{F}'$  zu zeichnen, welche der Figur  $\mathfrak{F}$  nicht ähnlich ist (wie bei dem unversteiften Viereck  $1\ 2\ 3\ 4$  in Fig. 450),

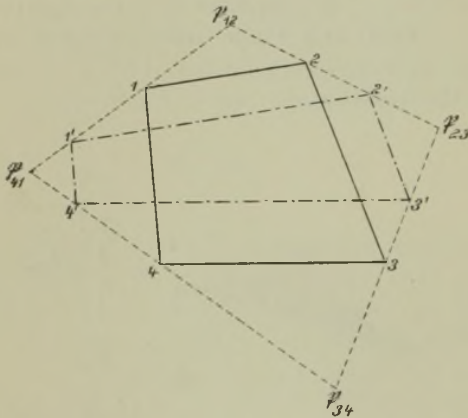


Fig. 450.

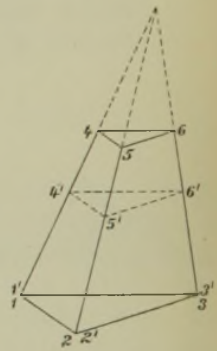


Fig. 451.

so ergeben sich verschiedene augenblickliche Drehpunkte, und hieraus folgt die Möglichkeit, die gegenseitige Lage der Stäbe durch unendlich kleine Drehungen der Stäbe um jene verschiedenen Pole zu ändern. Es folgt hieraus der Satz:

*Est es möglich, zu der Fachwerkfigur  $\mathfrak{F}$  eine Figur  $\mathfrak{F}'$  zu zeichnen, welche der Figur  $\mathfrak{F}$  nicht ähnlich ist, so ist das Fachwerk kein starres.*

In diesem Satze besitzen wir ein in der Regel sehr leicht zu handhabendes Hilfsmittel, diejenigen Fachwerke zu erkennen, welche mindestens von unendlich kleiner Beweglichkeit sind, trotzdem sie die notwendige Stabzahl oder sogar noch mehr Stäbe, als erforderlich sind,

besitzen. Zur Erläuterung des Verfahrens mögen folgende Beispiele dienen.

1) Ein Blick auf Fig. 451 lehrt, daß zwei miteinander durch drei Stäbe verbundene starre Scheiben ein bewegliches Fachwerk bilden, sobald sich die drei Verbindungsstäbe in einem Punkte treffen.

2) Um die Beweglichkeit des in Fig. 452 dargestellten Fachwerks zu beweisen, genügt es, zu dem Sechsecke 1 2 3 4 5 6, an welches sich die übrigen Knotenpunkte durch je zwei Stäbe angliedern lassen, eine unähnliche Figur 1' 2' 3' 4' 5' 6' zu zeichnen, deren Punkte 1', 3', 4', 6' wir mit den entsprechenden Fachwerksknoten zusammenfallen lassen.

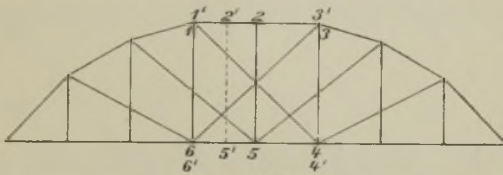


Fig. 452.

3) Das sechsteilige Netzwerk in Fig. 453 ist bereits in No. 206 analytisch untersucht und als beweglich erkannt worden, weil die Anzahl der ganzen Felder 8 ist, und weil  $8 - 2$  den Teiler 3 besitzt (Seite 448). Man erkennt, daß sich die mit kleinen Kreisen bezeichneten Punkte, welche einem geschlossenen, keinen Teil des versteiften Vierecks  $ABCD$  enthaltenden Strebenzuge 1 2 3 4 5 6 7 8 1 angehören, bewegen lassen, während alle übrigen Punkte festliegen.

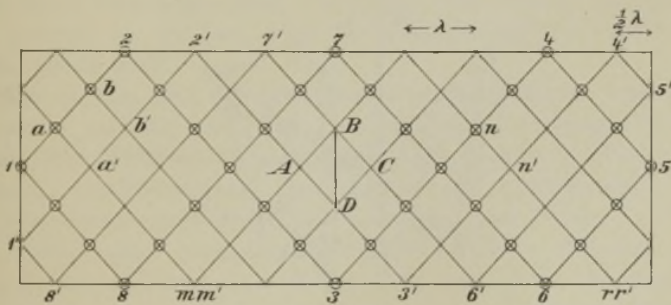


Fig. 453.

In Fig. 453 ist ein System möglicher Geschwindigkeiten 11', 22' ... der auf dem Rande liegenden Punkte 1, 2, ... angegeben worden; außerdem sind noch die Geschwindigkeiten von drei Zwischenpunkten

$a, b, n$  eingetragen worden. Der Geschwindigkeitsplan läßt sich danach leicht vervollständigen.

4) Das unsymmetrische sechsteilige Netzwerk in Fig. 454 ist ebenfalls schon in No. 206 untersucht und als beweglich erkannt worden. Der nur für die rechte Trägerhälfte durch Ziffern beschriebene Geschwindigkeitsplan dürfte einer besonderen Erläuterung nicht bedürfen.

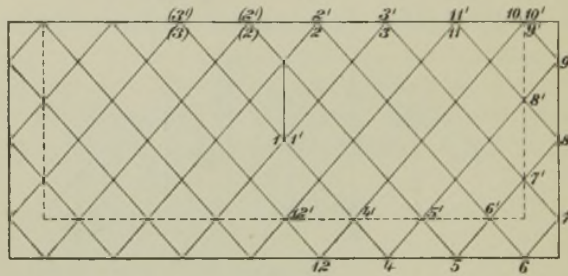


Fig. 454.

5) Soll das Sechseck in Fig. 455 untersucht werden, so zeichnet man zu dem Viereck 1 2 3 4 die unähnliche Figur 1'2'3'4', bestimmt 5' mittels 2'5'  $\parallel$  25 und 4'5'  $\parallel$  45, schließlich 6' mittels 3'6'  $\parallel$  36 und 1'6'  $\parallel$  16. Ist dann 5'6'  $\parallel$  56, so ist das Sechseck beweglich. Daß

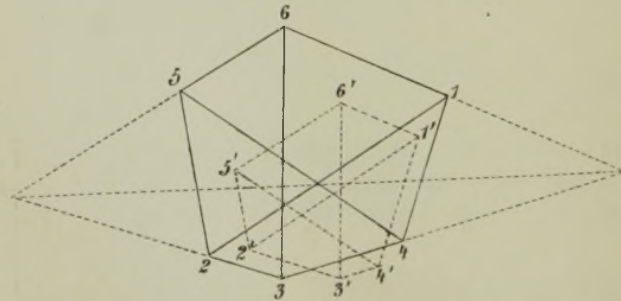


Fig. 455.

dies nur dann der Fall ist, wenn das Sechseck ein *Pascalsches* ist, wurde auf Seite 443 gezeigt, ließe sich aber auch leicht geometrisch nachweisen.



6) Figur 426 zeigt ein Fachwerk mit drei festen Auflagerge-  
lenken 1, 2, 8 und genügend viel Stäben. Man weise dem Knotenpunkte 3  
des Gelenkvierecks 1 2 3 4 den in der Geraden 1 3 liegenden Punkt 3'  
zu und bestimme nun schrittweise die Punkte 4'5'6' und 7'. Fällt 7'  
in die Gerade 7 8, so ist das Fachwerk beweglich.

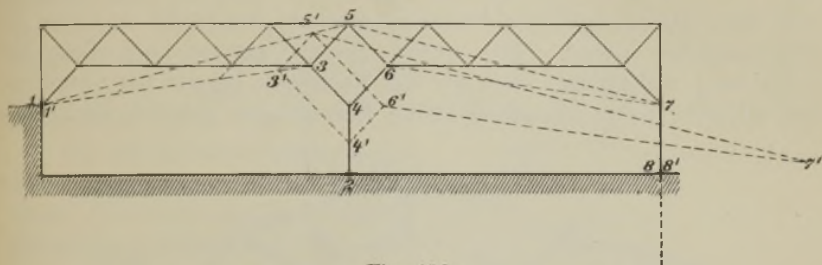


Fig. 456.

211. Die zwangläufige kinematische Kette. An das letzte Bei-  
spiel wollen wir noch eine Betrachtung knüpfen, die uns zu weiteren  
Anwendungen hinüberleiten wird. Beseitigen wir den Stab 7 8 (Fig. 456),  
so wird das Fachwerk auf jeden Fall beweglich; es besitzt aber nur  
*eine* Bewegungsfreiheit, weil durch Wegnahme des einen Stabes nur  
*eine* Starrheitsbedingung fortgefallen ist. Alle Punkte des Fachwerks  
sind gezwungen, sich nach *bestimmten Richtungen* zu bewegen, und  
nur über die *Größe* der Geschwindigkeit *eines einzigen Punktes* darf  
frei verfügt werden. Ändert sich diese *freie Geschwindigkeit*, so be-  
schreiben die Endpunkte der lotrechten Geschwindigkeiten gerade  
ähnliche Punktreihen; das gegenseitige Verhältnis der Geschwindig-  
keiten bleibt also ungeändert. Wird die freie Geschwindigkeit gleich  
Null gesetzt, so werden auch die Geschwindigkeiten aller übrigen  
Punkte gleich Null.

Wir nennen nun ein bewegliches Gebilde, dessen Glieder derart  
miteinander *verkettet* sind, daß sie nach Feststellung *eines* Gliedes (des  
*Gestells* oder *Widerlagers*) *gezwungen* sind, bestimmte Bewegungen zu  
vollziehen, (nach *Reuleaux*) eine *zwangläufige kinematische Kette* oder  
auch kurz eine *zwangläufige Kette* und sagen: *der Punkt 7 in Fig. 456*  
*wird mittels einer zwangläufigen Kette geführt*. Zwingen wir nun  
diesen Punkt, sich auf einer zweiten, die erste Bahn kreuzenden Bahn  
zu bewegen, indem wir ihn durch einen Stab mit einem festen Punkte  
verbinden, oder, allgemeiner, indem wir ihn mit Hilfe einer zweiten  
zwangläufigen Kette führen, so halten wir ihn offenbar in der Ebene  
fest und rauben damit zugleich allen Gliedern der beiden Ketten die  
Fähigkeit, sich zu bewegen. Aus den beiden zwangläufigen Ketten  
wird ein starres Fachwerk.

Besitzen jedoch die beiden Bahnen eine gemeinsame Tangente, so bleibt innerhalb eines beiden Bahnen gemeinsamen Bogenelements eine unendlich kleine Beweglichkeit bestehen. Haben die beiden Bahnen ein endliches Stück gemein, so ist die Beweglichkeit sogar eine endliche. Ob unendlich kleine oder endliche Beweglichkeit vorliegt, darüber gibt die Figur  $\mathfrak{F}'$  natürlich keinen Aufschluß, da sie nur einen augenblicklichen Bewegungszustand beschreibt und nur die Bahntangenten liefert. Für unsere Zwecke genügt aber diese Beschreibung vollständig, weil wir das Fachwerk bereits für unbrauchbar erklären, wenn unendlich kleine Bewegungen möglich sind. Wir

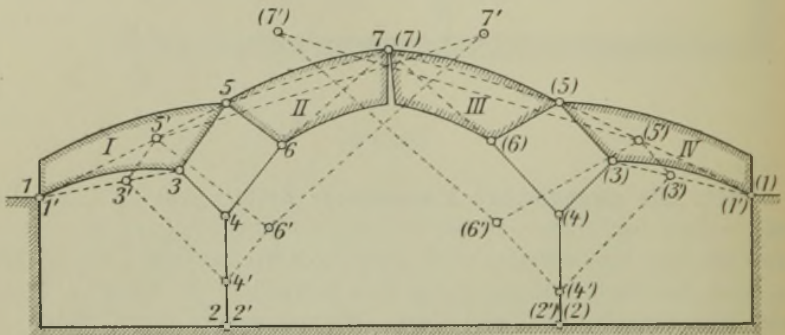


Fig. 457.

empfehlen sogar, noch einen Schritt weiter zu gehen und dafür zu sorgen, daß sich die beiden Bahnen nicht unter zu spitzen Winkeln schneiden, damit die von der Elastizität der Stäbe und Widerlager herrührenden Verschiebungen der Knotenpunkte (deren Ermittlung zu den Aufgaben des zweiten Bandes dieses Buches gehört) nicht zu groß ausfallen.

Ein übersichtliches Beispiel zu den vorstehenden Ausführungen ist der in Fig. 457 dargestellte, über drei Öffnungen gespannte, aus vier starren Scheiben und sechs Stäben bestehende Bogenträger, dessen Scheitelgelenk durch zwei zwangläufige Ketten geführt wird, deren Gliederung mit der Gliederung der in Fig. 456 zur Führung des Punktes 7 benutzten Kette übereinstimmt. Fallen die Geraden  $7\ 7'$  und  $(7)\ (7')$  zusammen, so ist das Fachwerk kein starres.

Ein anderes Verfahren, eine zwangläufige Kette in ein starres Gebilde zu verwandeln, besteht darin, zwei Punkte  $i$  und  $k$  durch einen Stab oder eine starre Scheibe miteinander zu verbinden. Allerdings darf die durch die Punkte  $i'$  und  $k'$  des Geschwindigkeitsplanes der Kette bestimmte Gerade  $i'k'$  nicht parallel zu  $ik$  sein; sonst bleibt auch nach Einfügung der starren Verbindung  $ik$  mindestens eine unendlich kleine Beweglichkeit bestehen. In Fig. 458 mögen die Strecken  $i\ (i)$  und  $k\ (k)$  nach Größe und Richtung die wirklichen Geschwindigkeiten

der Punkte  $i$  und  $k$  darstellen; die Punkte  $i$  und  $k$  nähern sich dann einander mit der Geschwindigkeit  $c = v_{ik} + v_{ki}$ , wo  $v_{ik}$  und  $v_{ki}$  die Längen der von  $i'$  und  $k'$  auf  $ik$  gefällten Lote bedeuten. Die Einfügung einer starren Verbindung bewirkt nun, daß  $c = 0$  wird. Dies erfordert aber entweder  $v_{ki} = -v_{ik}$ , woraus dann  $i'k' \parallel ik$  folgt, oder es bedingt:  $v_{ki} = 0$  und  $v_{ik} = 0$ ; dann werden aber die Geschwindigkeiten aller Punkte der Kette gleich Null.

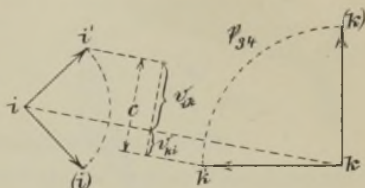


Fig. 458.

Die auf die beschriebene Weise aus zwangläufigen Ketten gewonnenen Fachwerke besitzen keinen überzähligen Stab, weil die eine Bewegungsfreiheit der Kette durch eine einzige Starrheitsbedingung vernichtet wurde. Dabei muß allerdings vorausgesetzt werden, daß die aus starren Scheiben bestehenden Glieder nicht mehr Stäbe enthalten, als erforderlich sind.

Die Herleitung starrer Fachwerke aus zwangläufigen Ketten gibt meistens einen besonders klaren Einblick in das Wesen der bei gewissen ausgezeichneten Lagen ihrer Glieder auftretenden Ausnahmefälle, und schon aus diesem Grunde halten wir es für nützlich, uns etwas eingehender mit den zwangläufigen Ketten zu beschäftigen.

**212. Bildungsgesetze und Geschwindigkeitspläne zwangläufiger Ketten.** 1) Das einfachste, schon in den beiden vorhin behandelten Beispielen (Fig. 456 und Fig. 457) benutzte Bildungsgesetz besteht darin, an zwei Knotenpunkte  $A$  und  $B$  einer zwangläufigen Kette, die kurz mit  $\mathfrak{K}$  bezeichnet werden möge, einen neuen Knoten  $C$  durch zwei starre Scheiben  $AC$  und  $BC$  anzuschließen. Aus den lotrechten Geschwindigkeiten  $AA'$  und  $BB'$  der Punkte  $A$  und  $B$  findet man diejenige von  $C$ , indem man  $A'C' \parallel AC$  und  $B'C' \parallel BC$  zieht, Fig. 459. Durch die Punkte  $A'$  und  $C'$  ist die Bewegung der Scheibe  $AC$  vollständig bestimmt, ebenso durch  $B'$  und  $C'$  die Bewegung der Scheibe  $BC$ . Den zum Punkte  $D$  der Scheibe  $AC$  gehörigen Punkt  $D'$  findet man z. B. durch Ziehen der Geraden  $A'D' \parallel AD$  und  $C'D' \parallel CD$ .

Dieses einfachste Bildungsgesetz setzt uns in den Stand, von einem Gelenkvierneck ausgehend, leicht zu überschauende Ketten zu bilden; es birgt zwei Ausnahmefälle.

Liegt nämlich  $C$  in der Geraden  $AB$  und ist die Gerade  $A'B'$  parallel zu  $AB$ , so darf man den Punkt  $C'$  nach Belieben in der Geraden  $A'B'$  wählen. Die neue Kette ist also nicht zwangläufig, sondern besitzt zwei Bewegungsfreiheiten.



Fällt dagegen  $C$  in die Gerade  $AB$  und liegen  $A'$  und  $B'$  nicht in einer Parallelen zu  $AB$ , so führt unsere Konstruktion des Punktes  $C'$  zu einer unendlich großen Geschwindigkeit  $CC'$ . Damit nun diese

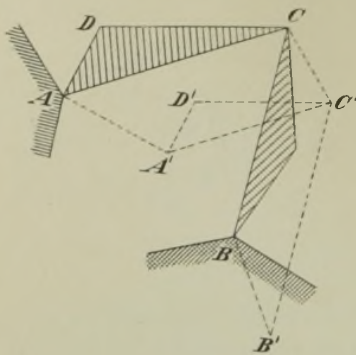


Fig. 459.

Strecke endlich werde, müssen die Geschwindigkeiten der Punkte  $A$  und  $B$  gleich Null sein; es muß also die freie Geschwindigkeit der Kette  $\mathfrak{K}$  den Wert Null annehmen. Dann ruht die Kette  $\mathfrak{K}$ , und die Bewegung des Punktes  $C$  ist zwangläufig.

Dieses Ergebnis darf uns nicht überraschen. Würden wir nämlich die Knotenpunkte  $A$  und  $B$  der Kette  $\mathfrak{K}$  durch einen Stab verbinden, so würden wir ein starres Fachwerk erhalten; Kräfte, die an den Gliedern desselben angreifen,

sind nicht im stande, eine Bewegung hervorzubringen. Dieser Gleichgewichtszustand bleibt aber auch dann bestehen, wenn wir den Stab  $AB$  durch ein in die Gerade  $AB$  fallendes Gelenk in zwei gegeneinander drehbare Teile zerlegen, wenn wir nur dafür sorgen, daß an den Teilen  $AC$  und  $CB$  keine äußeren Kräfte angreifen. Ruft die Belastung der übrigen Glieder der Kette  $\mathfrak{K}$  in  $AB$  einen Zug hervor, so besteht sogar sicheres Gleichgewicht; wird Stab  $AB$  gedrückt, so ist das Gleichgewicht zwar unsicher, es bleibt aber ungestört, so lange die drei Punkte  $A$ ,  $C$  und  $B$  in einer Geraden liegen; und nur dieser augenblickliche Zustand steht hier zur Beurteilung. Dagegen kann man  $C$  in Bewegung setzen, indem man das Glied  $AC$  oder das Glied  $BC$  oder irgend eines der mit  $C$  durch weitere Angliederung zwangläufig in Verbindung gebrachten Teile der aus  $\mathfrak{K}$  abgeleiteten neuen Kette  $\mathfrak{K}'$  durch eine äußere Kraft antreibt. Sämtliche Glieder der Kette  $\mathfrak{K}$  bleiben hierbei in Ruhe,  $A'$  fällt mit  $A$  zusammen,  $B'$  mit  $B$ ;  $C'$  wird in der Geraden  $AB$  angenommen.

Von einer Kette, die sich den Belastungen gewisser Glieder gegenüber wie ein starres Gebilde verhält, sagt man, sie befindet sich gegenüber den an jenen Gliedern angreifenden Kräften in einer *Todlage*. Sie verliert diese Eigenschaft im allgemeinen, sobald das festgestellte Glied freigegeben und dafür ein anderes Glied zum Widerlager gemacht wird.

So befindet sich ein Gelenkviereck 1 2 3 4, dessen Knotenpunkte 1 2 3 in einer Geraden liegen, in einer *Todlage*, sobald das Glied 1 4

festliegt und die antreibende Kraft am Gliede 3 4 angreift. Wird aber eines der beiden Glieder 1 2 oder 2 3 zum Gestell gemacht, so kann die Kette mit Hilfe eines jeden der drei übrigen Glieder bewegt werden. Liegen alle vier Punkte in einer Geraden, so besitzt die Kette zwei Bewegungsfreiheiten. Man kann, wenn man das Glied 1 4 festhält, den Punkten 2 und 3 beliebig große, voneinander unabhängige endliche Geschwindigkeiten erteilen.

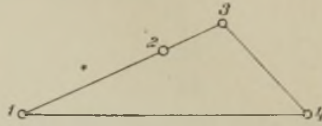


Fig. 460.

2) Zu einer wesentlichen Erweiterung des ersten Bildungsgesetzes gelangt man, wenn man jedes der drei Gelenke  $A$ ,  $B$  und  $C$  auf die in Fig. 461 veranschaulichte Weise durch zwei Stäbe (an deren Stelle auch zwei Scheiben treten dürfen) ersetzt. Die Knotenpunkte 1, 2, 5, 6 mögen einer zwangläufigen Kette  $\mathcal{R}$  angehören, ihre lotrechten Geschwindigkeiten  $1 1'$ ,  $2 2'$ ,  $5 5'$ ,  $6 6'$  seien bekannt.

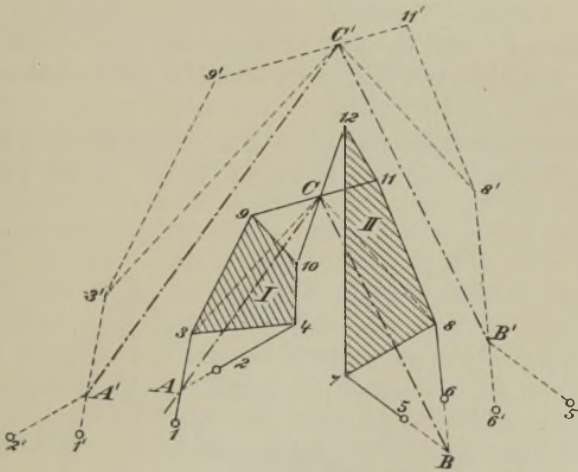


Fig. 461.

Die Schnittpunkte  $A$ ,  $B$ ,  $C$  der drei Stäbepaare

$$1-3, 2-4 \mid 5-7, 6-8 \mid 9-11, 10-12$$

spielen dieselbe Rolle wie vorhin die Gelenke  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Man bestimmt also

$$\begin{aligned} A' & \text{ mit Hilfe von } 1'A' \parallel 1A \text{ und } 2'A \parallel 2A, \\ B' & \text{ " " " } 5'B' \parallel 5B \text{ " } 6'B' \parallel 6B, \\ C' & \text{ " " " } A'C' \parallel AC \text{ " } B'C' \parallel BC, \end{aligned}$$

betrachtet nun  $C$  als gemeinschaftlichen Punkt der beiden Scheiben  $I$  und  $II$  und findet dann

$$\begin{array}{l} 3' \text{ mit Hilfe von } 1'3' \parallel 13 \text{ und } C'3' \parallel C3, \\ 9' \text{ " " " } 3'9' \parallel 39 \text{ " } C'9' \parallel C9, \\ 8' \text{ " " " } 8'C' \parallel 8C \text{ " } 6'8' \parallel 68, \\ 11' \text{ " " " } 8'11' \parallel 811 \text{ " } C'11' \parallel C11. \end{array}$$

Jetzt sind für jede Scheibe die Geschwindigkeiten zweier Punkte gegeben, und damit sind die Bewegungszustände der beiden Scheiben vollständig bestimmt. Man kann auch nach Aufsuchung der Punkte  $A'B'C'$  die Geschwindigkeiten der anderen Punkte in einer anderen Reihenfolge ermitteln, z. B. erst  $4'$  mit Hilfe von  $2'4' \parallel 24$  und  $C'4' \parallel C4$ , sodann  $7'$  und  $12'$  und gewinnt so verschiedene Proben für die Schärfe der Zeichnung.

Ein anderes Verfahren, welches voraussetzt, daß sich die Punkte  $ABC$  in unbequemer Lage befinden und deshalb nicht benutzt werden können, ist das folgende.

Man ziehe durch  $1'$  eine Parallele zu  $13$ , weise in dieser dem vorläufig unbekanntem Punkte  $3'$  probeweise verschiedene Lagen zu, z. B. die Lagen  $3'_1$  und  $3'_2$  und bestimme die zugehörigen Lagen des Punktes  $4'$  mit Hilfe von  $3'4' \parallel 34$  und  $2'4' \parallel 24$ , sodann die zugehörigen Lagen

$$\begin{array}{l} \text{von } 9' \text{ mit Hilfe von } 3'9' \parallel 39 \text{ und } 4'9' \parallel 49 \\ \text{" } 10' \text{ " " " } 9'10' \parallel 910 \text{ " } 4'10' \parallel 4'10. \end{array}$$

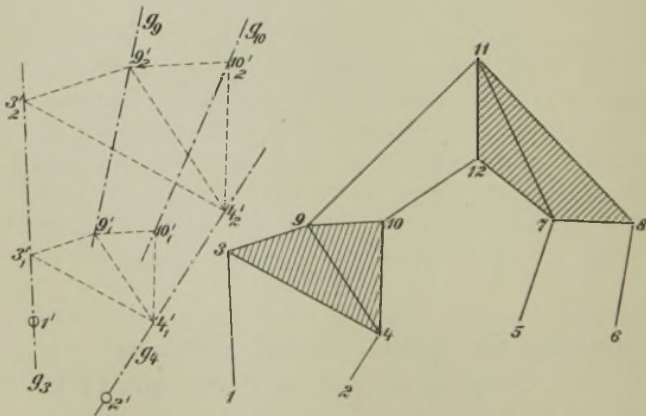


Fig. 462.

Da sich nun die Punkte  $3'$  und  $4'$  in Geraden  $g_3$  und  $g_4$  bewegen, so müssen auch die Punkte  $9'$  und  $10'$  gerade Linien  $g_9$  und  $g_{10}$  be-



schreiben.\*) In derselben Weise lassen sich auch die Geraden  $g_{11}$  und  $g_{12}$  finden, in denen die Punkte  $11'$  und  $12'$  liegen müssen, und es bleibt jetzt nur noch die auf Seite 230 erledigte Aufgabe zu lösen, ein Viereck zu zeichnen, dessen Ecken in gegebenen Geraden liegen und dessen Seiten gegebene Richtungen haben.

Besonders wichtig ist der in Fig. 463 dargestellte Sonderfall einer Scheibe, die mit den Punkten  $1, 2$  und  $B$  einer zwangsläufigen Kette  $\mathfrak{K}$  durch drei Stäbe  $1, 3$ ,  $2, 4$  und  $BC$  verbunden ist. Wir haben schon durch die ganze Bezeichnung hervorgehoben, daß zwei der vorhin angenommenen Stäbepaare zu Gelenken  $B$  und  $C$  zusammengeschumpft sind.

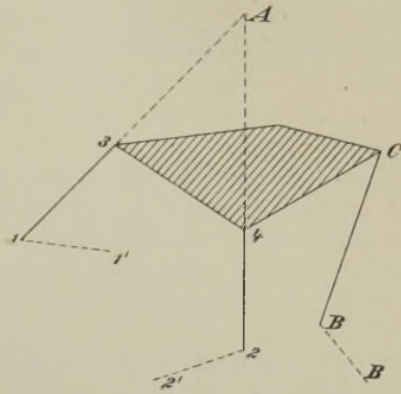


Fig. 463.

3) Verbindet man einen Stab  $3, 4$  (Fig. 464) durch zwei Stäbe  $1, 3$  und  $2, 4$  mit Punkten  $1$  und  $2$  einer zwangsläufigen Kette  $\mathfrak{K}$ , so erhält man ein bewegliches Gebilde, das zwei Bewegungsfreiheiten besitzt, da man den Punkten  $3$  und  $4$  Geschwindigkeiten erteilen kann, die unabhängig von dem durch die Angabe einer Geschwindigkeit vollständig beschriebenen Bewegungszustand der Kette  $\mathfrak{K}$  sind. Bedingung ist nur, daß  $3'$  in der durch  $1'$  parallel zu  $1, 3$  gezogenen Geraden  $g_3$  liegen muß und  $4'$  in der durch  $2'$  parallel zu  $2, 4$  gezogenen Geraden  $g_4$ . Nimmt man  $3'$  willkürlich an, so ist  $4'$  bestimmt durch  $3'4' \parallel 3, 4$ . Schließt man nun einen neuen Knoten  $5$  durch zwei Stäbe an den Punkt  $3$  und einen der Kette  $\mathfrak{K}$  angehörigen Punkt  $6$  an, so dann  $7$  an  $4$  und  $5$  und fährt in dieser Weise fort, so kann man die zum Geschwindigkeitspunkte  $3'$  gehörigen Geschwindigkeitspunkte  $5', 7', \dots$  mittels Ziehen von Parallelen festlegen. Weist man  $3'$  die beiden Lagen  $3_1'$  und  $3_2'$  zu, so erhält man für jeden auf die beschriebene Weise angeschlossenen Knotenpunkt  $n$  zwei Punkte  $n_1'$  und  $n_2'$ , und diese bestimmen eine Gerade  $g_n$ , in der sich  $n'$  bewegt, sobald  $3'$  die Gerade  $g_3$  beschreibt.

Die Lage der Geraden  $g_n$  hängt von der Größe der freien Geschwindigkeit der Kette  $\mathfrak{K}$  ab. Da aber  $g_3, g_4, g_6$  eine feste

\*) Die zu den Punkten einer starren Scheibe gehörigen Geraden  $g$  schneiden sich in einem Punkte.

Richtung besitzen, weil sie der Reihe nach parallel zu den Stabachsen 1 3, 2 4 und 6 5 sind, so behalten auch alle übrigen Geraden  $g_n$  ihre Richtungen unverändert bei, wenn sich die Größe der Geschwindigkeiten der Punkte 1, 2, 6 ändert. Ruht die Kette  $\mathfrak{K}$ , so fällt 1' mit 1 zusammen, 2' mit 2, 6' mit 6; es geht dann  $g_3$  durch 3,  $g_4$  durch 4 und allgemein  $g_n$  durch  $n$ .

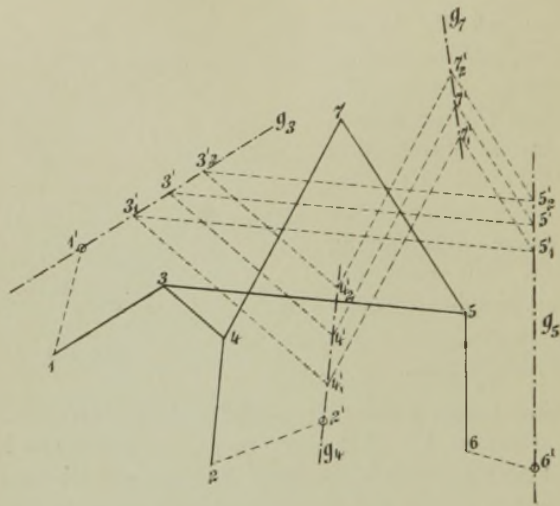


Fig. 464.

Soll nun die neue Kette zwangsläufig werden, so muß die zweite Bewegungsfreiheit verschwinden. Dies kann man dadurch erreichen, daß man irgend einen der an  $\mathfrak{K}$  angeschlossenen Knotenpunkte  $n$  durch eine andere zwangsläufige Kette führt, beispielsweise durch einen Stab  $nf$ , welcher  $n$  mit einem Punkte  $f$  des Widerlagers verbindet. Der Punkt  $n'$  muß dann in der Geraden  $nf$  liegen; er fällt also in den Schnittpunkt der Geraden  $g_n$  und  $nf$ . Durch diese Angabe sind aber die Geschwindigkeiten sämtlicher Punkte der an die Kette  $\mathfrak{K}$  und den Punkt  $f$  angeschlossenen Glieder eindeutig bestimmt.

Wir wollen die auf diesem Wege schließlich erhaltene Kette mit  $\mathfrak{K}'$  bezeichnen, und die an die Kette  $\mathfrak{K}$  und den Punkt  $f$  angeschlossenen Glieder unter der kurzen Bezeichnung  $\mathfrak{K}' - \mathfrak{K}$  zusammenfassen.

Es sind zwei Ausnahmefälle zu beachten. Geht nämlich die Gerade  $g_n$  durch die beiden Punkte  $n$  und  $f$ , so darf  $n'$  nach Belieben in der Geraden  $nf$  angenommen werden; die Kette  $\mathfrak{K}'$  ist also nicht zwangsläufig, sondern behält zwei Bewegungsfreiheiten. Ist zweitens  $fn$  parallel zu der nicht durch  $n$  gehenden Geraden  $g_n$ , so rückt  $n'$  zu-

nächst ins Unendliche. Es müssen dann die Geschwindigkeiten der Punkte 1, 2, 6 gleich Null gesetzt werden. Die Kette  $\mathfrak{K}$  ruht nunmehr, die Gerade  $g_n$  fällt mit der Achse des Stabes  $fn$  zusammen und es ist möglich, dem Punkte  $n$  und allen Gliedern der Gruppe  $\mathfrak{K}' - \mathfrak{K}$  eine beliebige Geschwindigkeit  $nn'$  zu erteilen. Die Kette  $\mathfrak{K}'$  ist also zwangläufig, sie befindet sich aber gegenüber allen an Gliedern der Kette  $\mathfrak{K}$  angreifenden Kräften in einer Todlage und kann nur durch Antreiben von Gliedern der Gruppe  $\mathfrak{K}' - \mathfrak{K}$  bewegt werden. Die Glieder der Kette  $\mathfrak{K}$  bleiben bei jeder auf diese Weise eingeleiteten Bewegung in Ruhe.

Wir dürfen natürlich nicht vergessen, daß wir uns auf die Beschreibung einer unendlich kleinen Bewegung beschränkt haben, und daß die Kette durch die geringsten elastischen Formänderungen aus der durch  $fn \parallel g_n$  gekennzeichneten besonderen Lage gebracht werden kann. Es gibt aber auch Fälle, in denen bei Belastung der Kette  $\mathfrak{K}$  *sicheres* Gleichgewicht vorhanden ist.

Ein anderes Verfahren, die zweite Bewegungsfreiheit aufzuheben, besteht darin, zwei Knotenpunkte  $m$  und  $n$ , von denen aber wenigstens einer ein Knotenpunkt der an  $\mathfrak{K}$  angeschlossenen Gliedergruppe sein möge, durch einen Stab zu verbinden. Gehört nun  $m$  der Kette  $\mathfrak{K}$  an, so ist  $n'$  ohne weiteres als Schnittpunkt der Geraden  $g_n$  und der durch  $m'$  parallel zu  $mn$  gezogenen Geraden  $g$  bestimmt, vorausgesetzt, daß  $g$  und  $g_n$  nicht zusammenfallen oder nicht parallel sind. Fällt  $g$  mit  $g_n$  zusammen, so darf  $n'$  beliebig in  $g_n$  angenommen werden; die neue Kette  $\mathfrak{K}'$  ist trotz Einfügung des Stabes  $mn$  nicht zwangläufig, sondern behält zwei Bewegungsfreiheiten. Ist  $g_n \parallel g$ , so befindet sich die Kette nach Einfügung des Stabes  $mn$  gegenüber den an  $\mathfrak{K}$  angreifenden Kräften in einer Todlage, sie ist aber zwangläufig.

Gehören beide Punkte  $m$  und  $n$  dem Teile  $\mathfrak{K}' - \mathfrak{K}$  an, so läuft die Aufgabe, die Punkte  $m'$  und  $n'$  in den Geraden  $g_m$  und  $g_n$  so zu bestimmen, daß  $m'n' \parallel mn$  ist und jedem Stabe  $ik$  des Teiles  $\mathfrak{K}' - \mathfrak{K}$  eine zu  $ik$  parallele Gerade  $i'k'$  entspricht, wieder darauf hinaus, ein Polygon  $3' 4' 5' \dots m' \dots n'$  zu zeichnen, dessen Ecken in gegebenen Geraden  $g_3, g_4, g_5, \dots g_m \dots g_n$  liegen und dessen Seiten gegebene Richtungen haben. Man erhält dann (s. Seite 230) für  $n'$  noch einen zweiten Ort  $g'_n$ . Fallen die Geraden  $g'_n$  und  $g_n$  zusammen, so bleibt die zweite Bewegungsfreiheit bestehen. Ist  $g'_n \parallel g_n$ , so besitzt die Kette  $\mathfrak{K}'$  wieder eine Todlage und kann durch Glieder der Kette  $\mathfrak{K}$  nicht angetrieben werden; sie ist aber zwangläufig.

Eine zweite Lösung der vorliegenden Aufgabe stützt sich darauf, daß die Strecke  $nn'$  nicht nur als die um  $90^\circ$  gedrehte *endliche Geschwindigkeit* des Punktes  $n$  aufgefaßt werden darf, sondern auch als die in unendlich großem Maßstabe aufgetragene, um  $90^\circ$  gedrehte



verschwindend kleine Verschiebung dieses Punktes. Die Strecke  $\lambda_{mn}$ , um welche sich der Abstand  $l_{mn}$  der Punkte  $m$  und  $n$  ändert, wird durch den Abstand der durch  $m'$  und  $n'$  zu  $mn$  gezogenen beiden Parallelen dargestellt, Fig. 465 (vergl. auch Seite 463 Fig. 458); ihr Vorzeichen sei durch die Bestimmung gegeben, daß die lotrechten Verschiebungen  $mm'$  und  $nn'$  der Knotenpunkte durch Rechtsdrehung in ihre wirklichen Lagen  $m(m)$  und  $n(n)$  gebracht werden. Daraus folgt z. B. daß  $\lambda_{mn}$  in Fig. 465 positiv ist, weil sich  $m$  von  $n$  entfernt.

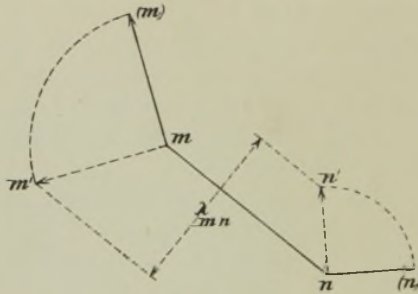


Fig. 465.

Nehmen wir nun an, es sei die lotrechte Verschiebung  $33'$  des Knotenpunktes 3 der vorhin untersuchten Kette (Fig. 464) die Folge der Längenänderung  $\lambda_{23}$  eines dehnbaren Stabes, der 3 mit 2 verbindet, so können wir die Änderung  $\lambda_{mn}$  der Strecke  $mn$  als Funktion ersten Grades der Größe  $\lambda_{23}$  und der die Bewegung der Kette  $\mathfrak{K}$  bestimmenden freien Geschwindigkeit darstellen. Es geht dies ohne weiteres daraus hervor, daß die Punkte  $3'm'n'$  ähnliche, gerade Punkt-reihen beschreiben, welche durch Angabe der Größe der Geschwindigkeit eines Punktes der Kette  $\mathfrak{K}$  bestimmt sind.

Wir erhalten einen Ausdruck von der Form

$$(2) \quad \lambda_{mn} = \lambda'_{mn} + \lambda''_{mn} \cdot \lambda_{23}.$$

Hierin bedeutet  $\lambda'_{mn}$  die Änderung, welche der Abstand  $mn$  für den Fall erfährt, daß  $\lambda_{23} = 0$  ist, daß also der Stabzug 1342 durch Einfügung eines starren Stabes 23 zwangläufig an die Kette  $\mathfrak{K}$  angeschlossen ist, und  $\lambda''_{mn}$  bezeichnet den Einfluß der Ursache  $\lambda_{23} = 1$  auf  $\lambda_{mn}$ , das ist die Änderung, welche der Abstand  $mn$  erleidet, wenn  $\lambda'_{mn} = 0$  gesetzt und der Stab 23 um  $\lambda_{23}$  verlängert wird. Die Kette  $\mathfrak{K}$  bleibt bei der Ermittlung von  $\lambda''_{mn}$  in Ruhe, und der Punkt  $3'$  wird in der Geraden 13 so angenommen, daß die Länge des von  $3'$  auf die Gerade 23 gefällten Lotes gleich  $+\lambda_{23}$  ist.

Werden nun die Punkte  $m$  und  $n$  durch einen starren Stab verbunden, so ergibt sich die Starrheitsbedingung  $\lambda_{mn} = 0$ , und aus dieser folgt dann für die dem Stabe 2 3 zuzuschreibende Längenänderung der Wert

$$(3) \quad \lambda_{23} = -1 \frac{\lambda'_{mn}}{\lambda''_{mn}}$$

Ist  $\lambda''_{mn} = 0$  und zugleich auch  $\lambda'_{mn} = 0$ , so bleibt  $\lambda_{23}$  unbestimmt; die Kette behält die zweite Bewegungsfreiheit. Verschwindet aber nur  $\lambda''_{mn}$ , während  $\lambda'_{mn}$  endlich ist, so muß, damit  $\lambda'_{mn} = 0$  werde, die Kette  $\mathfrak{K}$  in Ruhe bleiben, und es tritt dann die mit Zwangläufigkeit verbundene Todlage ein.

Durch die vorstehende Untersuchung sind wir nun zu dem folgenden ganz allgemeinen Verfahren geführt worden.

Hat man eine Kette  $\mathfrak{K}'$  durch Beseitigung von Stäben (deren Längen gleich  $x_a, x_b, \dots, x_r$  seien) und Einfügung von ebensoviel dehnbaren Ersatzstäben (welche die Längen  $y_a, y_b, \dots, y_r$  haben) in eine zwangläufige Kette  $\mathfrak{K}$  verwandelt, für welche die Konstruktion des Verschiebungsplanes bekannt ist, so ist man im stande, die Längenänderungen  $\zeta_a, \zeta_b, \dots, \zeta_r$  der Strecken  $x_a, x_b, \dots, x_r$  als Funktionen ersten Grades der Längenänderungen  $\eta_a, \eta_b, \dots, \eta_r$  der dehnbaren Ersatzstäbe und der freien Geschwindigkeit der Kette  $\mathfrak{K}$  darzustellen. Man findet

$$(4) \quad \begin{cases} \zeta_a = \zeta_{a0} + \zeta_{aa}\eta_a + \zeta_{ab}\eta_b + \dots + \zeta_{ar}\eta_r \\ \zeta_b = \zeta_{b0} + \zeta_{ba}\eta_a + \zeta_{bb}\eta_b + \dots + \zeta_{br}\eta_r \\ \dots \\ \zeta_r = \zeta_{r0} + \zeta_{ra}\eta_a + \zeta_{rb}\eta_b + \dots + \zeta_{rr}\eta_r \end{cases}$$

wo

$$\zeta_{a0}, \zeta_{b0}, \dots, \zeta_{r0}$$

die Änderungen der Längen  $x_a, x_b, \dots, x_r$  für den Fall bedeuten, daß alle  $\eta$  gleich Null sind, daß also die Ersatzstäbe starr angenommen werden, während

$$\zeta_{aa}, \zeta_{bb}, \dots, \zeta_{rr}$$

die Längenänderungen der Strecken  $x_a, x_b, \dots, x_r$  infolge der Ursache  $\eta_a = 1$  sind, ebenso

$$\zeta_{ab}, \zeta_{bb}, \dots, \zeta_{rb}$$

die Änderungen der  $x$  infolge von  $\eta_b = 1$ , u. s. w.

Setzt man schließlich sämtliche Werte  $\zeta_a, \zeta_b, \dots, \zeta_r$  gleich Null, so erhält man ein System linearer Gleichungen, deren Wurzeln

$\eta_a, \eta_b, \dots, \eta_r$  diejenigen Längenänderungen angeben, welche die Ersatzstäbe erfahren müssen, wenn es möglich sein soll, die beseitigten Stäbe wieder einzusetzen, ohne die Bewegung der Kette aufzuheben. Verschwindet die Determinante jener  $r$  Gleichungen, so ist die Kette  $\mathfrak{R}'$  nicht zwangläufig, trotzdem sie die erforderliche Gliederzahl besitzt, oder sie ist zwar zwangläufig, läßt sich aber nicht mit Hilfe eines jeden Gliedes antreiben.

Ersetzt man z. B. den in Fig. 464 an die Knoten 1 und 2 einer zwangläufigen Kette  $\mathfrak{R}$  angeschlossenen Stabzug 1 3 4 2 durch einen aus vier Stäben bestehenden Zug 1 3 4 5 2 und schließt man, genau wie vorhin, weitere Knotenpunkte zweistäbig an, so erhält man zunächst eine Kette, welche drei freie Geschwindigkeiten besitzt. Die Zwangläufigkeit kann dann im allgemeinen durch Hinzufügung von zwei Stäben  $x_a, x_b$  erreicht werden, denen zwei vom Knotenpunkte 2 nach den Knotenpunkten 3 und 4 gehende, eingefügte dehnbare Stäbe  $y_a, y_b$  gegenüberstehen. Zur Berechnung von  $\eta_a$  und  $\eta_b$  dienen die Gleichungen

$$(5) \quad \begin{cases} 0 = \zeta_{aa} + \zeta_{aa}\eta_a + \zeta_{ab}\eta_b \\ 0 = \zeta_{ba} + \zeta_{ba}\eta_a + \zeta_{bb}\eta_b, \end{cases}$$

sie liefern die Werte

$$(6) \quad \eta_a = -\frac{D_a}{D}, \quad \eta_b = -\frac{D_b}{D}$$

wo

$$D = \begin{vmatrix} \zeta_{aa} & \zeta_{ab} \\ \zeta_{ba} & \zeta_{bb} \end{vmatrix} = \zeta_{aa}\zeta_{bb} - \zeta_{ba}\zeta_{ab}$$

$$D_a = \begin{vmatrix} \zeta_{aa} & \zeta_{ab} \\ \zeta_{ba} & \zeta_{bb} \end{vmatrix} = \zeta_{aa}\zeta_{bb} - \zeta_{ba}\zeta_{ab}$$

$$D_b = \begin{vmatrix} \zeta_{aa} & \zeta_{aa} \\ \zeta_{ba} & \zeta_{ba} \end{vmatrix} = \zeta_{aa}\zeta_{ba} - \zeta_{ba}\zeta_{aa}$$

Ist  $D \not\leq 0$ , so sind  $\eta_a$  und  $\eta_b$  eindeutig bestimmt, und die Kette  $\mathfrak{R}$  ist zwangläufig.

Ist  $D = 0$  und  $D_a \not\leq 0$ , so ist  $D_b \leq 0$ , und man erhält  $\eta_a = \mp \infty$ ,  $\eta_b = \pm \infty$ . Sollen aber diese Strecken endlich werden, so müssen  $\zeta_{aa}$  und  $\zeta_{ba}$  gleich Null sein. Die Kette  $\mathfrak{R}$  muß also ruhen, und die Kette  $\mathfrak{R}'$  befindet sich gegenüber den an  $\mathfrak{R}$  angreifenden Kräften in einer Todlage; sie ist aber zwangläufig, denn zwischen  $\eta_a$  und  $\eta_b$  besteht die Beziehung

$$\eta_a : \eta_b = -\zeta_{ab} : \zeta_{aa} = -\zeta_{ba} : \zeta_{ba},$$

welche für die Verhältniszahl  $\eta_a : \eta_b$  einen endlichen Wert liefert.



In allen anderen Fällen ist die Kette  $\mathfrak{K}'$  nicht zwangsläufig, sondern besitzt zwei oder drei Bewegungsfreiheiten.

Das Verfahren, die Darstellung der Geschwindigkeiten einer kinematischen Kette auf die wiederholte Lösung einer einfachen geometrischen Aufgabe und die Auflösung eines Systems linearer Gleichungen zurückzuführen, entspricht dem in No. 206 zur Berechnung der Spannkraft in den Stäben eines Fachwerks benutzten allgemeinen Verfahren der Stabvertauschung. Auch im zweiten Bande werden wir bei der Ermittlung der von den elastischen Längenänderungen der Fachwerkstäbe herrührenden Verschiebungen der Knotenpunkte in schwierigen Fällen mit einfachen geometrischen Konstruktionen und linearen Gleichungen, deren Wurzeln die Längenänderungen gewisser eingefügter Ersatzstäbe sind, arbeiten, so daß wir es hier mit einem sehr fruchtbaren allgemeinen Verfahren zu tun haben.\*)

Wir heben schon an dieser Stelle unseres Buches hervor, daß die Aufgabe: die Verschiebungen der Knotenpunkte infolge der Änderungen *sämtlicher* Stablängen zu finden, die vorhin gelöste Aufgabe als Sonderfall einschließt, weil es sich bei dieser Untersuchung nur um den Einfluß der Längenänderungen *einzelner* Stäbe — der *y*-Stäbe — gehandelt hatte.

**213. Abänderung der Auflagerbedingungen einer zwangsläufigen Kette.** Es ist häufig zweckmäßig, den Geschwindigkeitsplan einer zwangsläufigen Kette zunächst unter der Voraussetzung zu zeichnen, daß nicht das wirkliche Widerlager ( $w$ ) sondern irgend ein anderes Glied der Kette festgestellt wird. Ist dann  $\mathfrak{P}$  der augenblickliche Drehpunkt des Widerlagers  $w$  und  $nn'$  die Geschwindigkeit irgend eines Punktes von  $w$ , so kann man die wirklichen Auflagerbedingungen nachträglich in der Weise leicht erfüllen, daß man die ganze Kette, die man nunmehr als starr ansieht, so um den Pol  $\mathfrak{P}$  dreht, daß sich der Punkt  $n$  mit einer Geschwindigkeit  $n''n$  bewegt, die gleich und entgegengesetzt der Geschwindigkeit  $nn'$  ist. Es ergeben sich dann für alle Punkte  $i$  der Kette Geschwindigkeiten  $i''i$ , welche nach Seite 457 durch die Bedingung bestimmt sind, daß die Punkte  $i''$  eine Figur  $\mathfrak{F}''$  bilden müssen, welche ähnlich und ähnlich liegend zu der Figur  $\mathfrak{F}$  der Kette ist, so zwar, daß der Pol  $\mathfrak{P}$  der Ähnlichkeitspunkt beider Figuren

\*) Besonders brauchbar ist dieses Verfahren für das räumliche Fachwerk, dessen allgemeine Untersuchung der Verfasser in einer Reihe von Abhandlungen im Zentralblatt der Bauverwaltung 1891, 1892, 1902, 1903 durchgeführt hat. Eine Zusammenfassung dieser Arbeiten findet der Leser im letzten Abschnitte der 1904 erschienenen dritten Auflage von Müller-Breslau, Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen.



Bewegt sich eine ebene Scheibe  $I$  gegen eine ruhende Scheibe  $II$ , so dreht sich  $I$  augenblicklich um einen festen Pol, der mit  $(I II)$  bezeichnet werden möge; in ihm sind die beiden Scheiben  $I$  und  $II$  gewissermaßen gelenkartig miteinander verbunden. Wird nun beiden Scheiben gleichzeitig noch eine Bewegung gegen eine dritte Scheibe  $III$  erteilt, so dreht sich  $I$  um einen augenblicklichen Pol  $(I III)$  und  $II$  um einen augenblicklichen Pol  $(II III)$ . Der vorhin ruhende Pol  $(I II)$  bewegt sich; ein in ihm auf seiner augenblicklichen Bewegungsrichtung errichtetes Lot muß sowohl durch den Pol  $(I III)$  als auch durch den Pol  $(II III)$  gehen, weil  $(I II)$  als gemeinschaftlicher Punkt der beiden Scheiben  $I$  und  $II$  betrachtet werden darf. Hieraus folgt, daß die drei Pole  $(I II)$ ,  $(I III)$ ,  $(II III)$  in einer Geraden liegen.

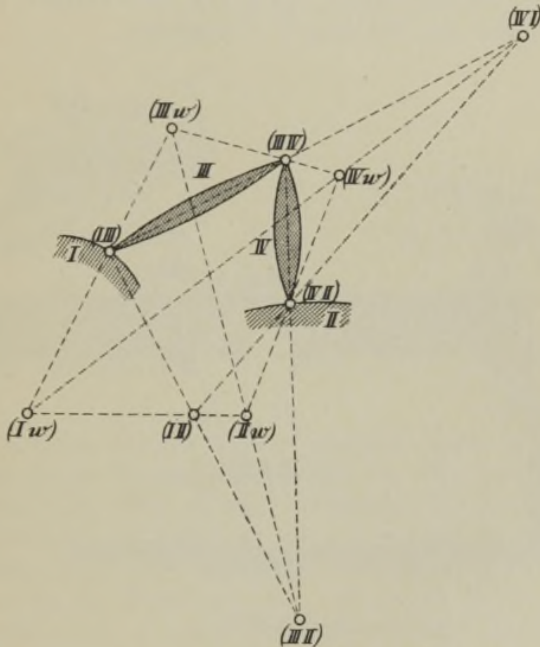


Fig. 467.

Folgt eine zwangläufige Kette einem der in No. 213 unter 1) und 2) beschriebenen Bildungsgesetze, so beruht die Ermittlung ihrer Pole auf der Lösung der *Grundaufgabe*: Seien (Fig. 467)  $I$  und  $II$  Glieder einer zwangläufigen Kette,  $(Iw)$  und  $(IIw)$  ihre Pole gegen das Widerlager  $w$ ,  $(I II)$  der Pol von  $I$  gegen  $II$ ; seien ferner  $III$



und *IV* zwei Scheiben, die in der Weise an *I* und *II* zwangläufig angeschlossen sind, daß sich *III* gegen *I* um den Pol (*III I*) dreht, *IV* gegen *II* um (*IV II*) und *III* gegen *IV* um (*III IV*); gesucht seien die Pole, um welche sich *III* und *IV* gegen *w* drehen.\*)

Man findet mit Hilfe des oben bewiesenen Satzes der Reihe nach (*III II*) als Schnittpunkt der Geraden (*III IV*) (*IV II*) und (*III I*) (*II I*)  
 (*IV I*) „ „ „ „ (*IV II*) (*II I*) „ (*IV III*) (*III I*)  
 (*III w*) „ „ „ „ (*III I*) (*I w*) „ (*III II*) (*II w*)  
 (*IV w*) „ „ „ „ (*IV II*) (*II w*) „ (*IV I*) (*I w*)  
 oder „ „ (*III IV*) (*III w*) „ (*IV I*) (*I w*).

Nach diesem Schema ist z. B. die Polkonfiguration der in Fig. 468 dargestellten zwangläufigen Kette gezeichnet worden. Zuerst wurden die Pole des Gelenkvierecks *w III III* und hierauf der Pol der Scheibe *IV* gegen das Widerlager *w* bestimmt.

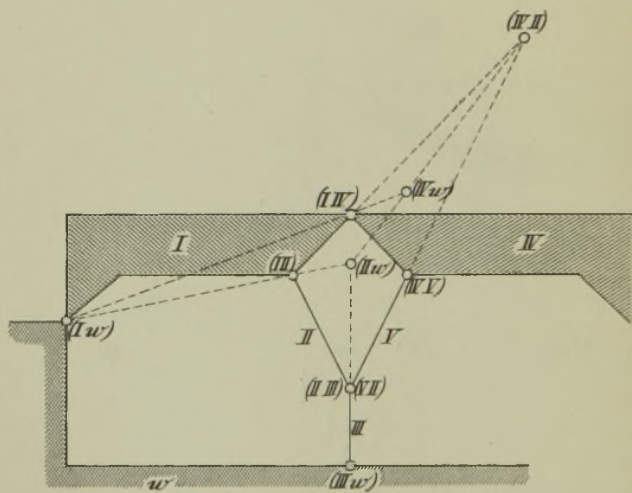


Fig. 468.

Die Ermittlung der Pole ohne Zuhilfenahme eines Geschwindigkeitsplanes läßt sich auch bei den zwangläufigen Ketten leicht durchführen, die aus Gebilden mit zwei Bewegungsfreiheiten durch Hinzufügung einer Starrheitsbedingung gewonnen werden. Sie stützt sich

\*) Es ist nicht notwendig, daß die Scheiben *I*, *III*, *IV*, *II* in Gelenken (*I III*), (*III IV*), (*IV II*) aneinanderhängen, wie dies in Fig. 467 vorausgesetzt ist.

darauf, dass, solange die zweite Bewegungsfreiheit besteht, für jeden Pol mindestens ein geometrischer Ort angegeben werden kann. Da dieses Verfahren aber meistens weniger einfach ist als die Polbestimmung mit Hilfe eines Geschwindigkeitsplanes (dessen Konstruktion ebenfalls auf der Ermittlung der Örter  $g_n$  der Punkte  $n'$  beruht) so gehen wir hier nicht weiter darauf ein. Ein Beispiel findet sich in No. 216, Fig. 487.

215. Berechnung der innern Kräfte und Stützenwiderstände eines Fachwerks mit Hilfe der Figur  $\mathfrak{F}'$ . Auf eine starre Scheibe mögen beliebige äußere Kräfte  $Q_1, Q_2, \dots, Q_m$  wirken, welche miteinander im Gleichgewicht sind. Ihre Hebelarme in Bezug auf irgend einen Drehpunkt  $\mathfrak{P}$  seien  $h_1, h_2, \dots, h_m$  (Fig. 469). Dann besteht die Gleichgewichtsbedingung

$$(8) \quad \Sigma Qh = 0,$$

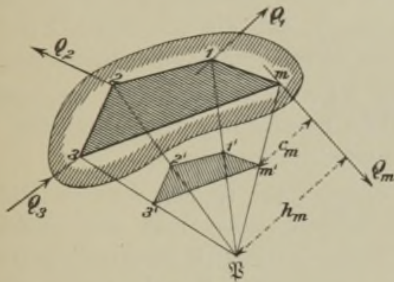


Fig. 469.

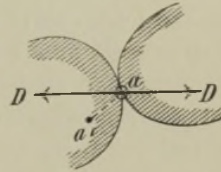


Fig. 470.

in welcher sich das Zeichen  $\Sigma$  über sämtliche Kräfte  $Q$  erstreckt. Betrachtet man  $\mathfrak{P}$  als den augenblicklichen Pol einer unendlich kleinen Drehbewegung und stellt man die lotrechten Geschwindigkeiten der in den Richtungen der Kräfte  $Q_1, Q_2 \dots Q_m$  beliebig angenommenen Angriffspunkte  $1, 2, \dots, m$  mit Hilfe einer Figur  $\mathfrak{F}'$  dar, so besteht zwischen den von den Punkten  $1', 2', \dots, m'$  auf die Kräfte  $Q_1, Q_2 \dots Q_m$  gefällten Loten  $c_1, c_2 \dots c_m$  und den entsprechenden Hebelarmen  $h$  die Beziehung

$$\frac{c_1}{h_1} = \frac{c_2}{h_2} = \dots = \frac{c_m}{h_m} = \text{Konstante},$$

denn es ist ja

$$\frac{1'1}{1\mathfrak{P}} = \frac{2'2}{2\mathfrak{P}} = \dots = \frac{m'm}{m\mathfrak{P}} = \text{Konstante}.$$

Die Gleichung 8 geht also über in

$$(9) \quad \Sigma Qc = 0.$$

Es liege nun ein aus mehreren Scheiben zusammengesetztes Gebilde vor, an welchem sich äußere Kräfte  $Q$  das Gleichgewicht halten. Das Gebilde sei kein starres; es sei vielmehr möglich, die einzelnen, in reibungslosen Gelenken aneinander hängenden Scheiben um verschiedene Pole zu drehen. Für irgend einen augenblicklichen Bewegungszustand sei eine Figur  $\mathfrak{F}'$  gezeichnet, und für jede Scheibe sei die Gleichgewichtsbedingung (9) aufgestellt. Dann werden in diesen Gleichungen neben den äußeren Kräften auch die Kräfte  $D$  vorkommen, mit denen die Scheiben in den Gelenken aufeinander wirken, Fig. 470. Werden aber schließlich alle jene Gleichungen addiert, so heben sich die von den Kräften  $D$  herrührenden Glieder paarweise auf, und daraus folgt, daß die Gleichung (9) nicht nur für eine einzelne Scheibe, sondern auch für ein Scheibengebilde gilt, u. a. auch für ein Fachwerk, denn Stäbe sind besondere Fälle von Scheiben. Beachtet man schließlich noch, daß  $c_m$  die Projektion der Geschwindigkeit des Angriffspunktes  $m$  der Kraft  $Q_m$  auf die Richtung von  $Q_m$  darstellt, so erkennt man auch, daß die Gleichung  $\sum Qc = 0$  das bekannte Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten ausspricht.

Die Gleichgewichtsbedingung  $\sum Qc$  gestattet häufig eine außerordentlich schnelle und übersichtliche Berechnung der Spannkraften und Stützenwiderstände statisch bestimmter Fachwerke.

Soll die Spannkraft  $S_{ik}$  in einem zwei Knoten  $i$  und  $k$  verbindenden Stabe berechnet werden, so verwandle man das Fachwerk durch Wegnahme jenes Stabes in eine zwangsläufige kinematische Kette, lasse an dieser in  $i$  und  $k$  die Spannkraften  $S_{ik}$  als äußere Kräfte angreifen, zeichne einen Geschwindigkeitsplan  $\mathfrak{F}'$ , wobei die Größe der Geschwindigkeit irgend eines Punktes beliebig groß angenommen werden darf, und stelle für alle an der beweglichen Stabverbindung angreifenden Kräfte die Gleichgewichtsbedingung  $\sum Qc = 0$  auf. Werden bei der gedachten unendlich kleinen Bewegung die Auflagerbedingungen erfüllt, so entspricht sämtlichen Stützenwiderständen der Wert  $c = 0$ , und die Gleichgewichtsbedingung enthält nur die eine Unbekannte  $S_{ik}$ .

Sind die Stützenwiderstände bereits bekannt, so darf irgend ein Glied der Kette als ruhend angenommen werden.

Wird eine nach bestimmter Richtung wirkende Seitenkraft eines Stützenwiderstandes gesucht, so wird die Beweglichkeit des Fachwerks durch Beseitigung der jenem Widerstande gleichwertigen Auflagerbedingung erreicht.

**Beispiel.** An dem in Fig. 471a dargestellten Fachwerk von 6 Knotenpunkten mögen sich die äußeren Kräfte  $P_1, P_2, \dots, P_6$  das Gleichgewicht halten. Gesucht ist die Spannkraft  $S$  im Stabe 16.



Der Stab 16 wird weggelassen; in den Knotenpunkten 1 und 6 werden die gesuchten Spannkraften  $S$  als äußere Kräfte angebracht. Sodann wird ein Geschwindigkeitsplan  $\mathfrak{F}'$  gezeichnet, am einfachsten in der Weise, daß die Punkte 1 und 2 festgelegt werden und dem Punkte 3 die beliebig große lotrechte Geschwindigkeit  $33'$  erteilt wird. Bedeutet  $c$  das Lot vom Punkte  $6'$  auf  $S$ , so nimmt die Gleichung  $\sum Qc = 0$  die Form an

$$P_3c_3 - P_4c_4 - P_5c_5 - P_6c_6 - Sc = 0;$$

sie liefert für  $S$  einen endlichen Wert, solange  $c$  endlich ist. Wird  $c = 0$ , so ergibt sich der unbrauchbare Wert  $S = \infty$ . Das Fachwerk ist dann mindestens von unendlich kleiner Beweglichkeit.

Eine zweite Anordnung zeigt die Figur 471b; in derselben sind die lotrechten Geschwindigkeiten von einem Nullpunkte  $O$  aus aufgetragen worden.\*) Die Punkte  $1'$  und  $2'$  fallen mit  $O$  zusammen. Die zu 23 parallele Strecke  $2'3'$  wurde beliebig groß gewählt. Sodann wurde

- 4' bestimmt mittels  $1'4' \parallel 14$  und  $3'4' \parallel 34$ ,
- 5' " "  $2'5' \parallel 25$  "  $4'5' \parallel 45$ ,
- 6' " "  $3'6' \parallel 36$  "  $5'6' \parallel 56$ .

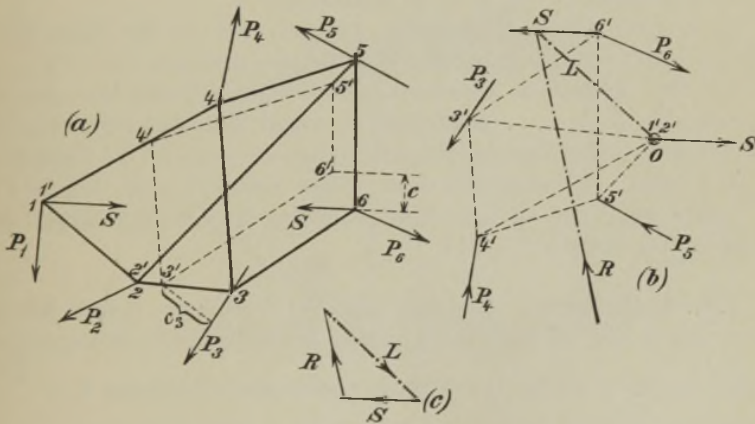


Fig. 471.

Die Gleichung  $\sum Qc = 0$ , ausgedehnt über alle Kräfte  $P$  und über die Spannkraften  $S$  drückt jetzt die Bedingung aus, daß die Summe der Momente der in den entsprechenden Punkten der Figur  $\mathfrak{F}'$  (b) angreifenden Kräfte  $P$  und  $S$  in Bezug auf den Drehpunkt  $O$  gleich Null sein muß.

\*) Vergl. auch Fig. 449 a u. b auf Seite 457.

Bildet man also die Mittelkraft  $R$  der Kräfte  $P_3, P_4, P_5$  und  $P_6$ , so muß das Moment von  $S$  in Bezug auf den Drehpunkt  $O$  dem Momente von  $R$  entgegengesetzt gleich sein. Bei bequemer Lage des Schnittpunktes der Kraft  $R$  und der in  $6'$  angreifenden Kraft  $S$ , verbinde man diesen Schnittpunkt mit dem Nullpunkte  $O$  durch eine Gerade  $L$  und zerlege  $R$ , nach den Richtungen von  $L$  und  $S$ . Das Kräftedreieck in Fig. 471c liefert die gesuchte Spannkraft  $S$ , weil  $L$  durch den Drehpunkt  $O$  geht, mithin keinen Einfluß auf das Moment der Kraft  $R$  hat.

Schneiden sich  $R$  und  $S$  außerhalb des Zeichenblattes, so ersetze man  $R$  durch zwei Seitenkräfte  $R'$  und  $R''$ , von denen  $R''$  durch den Punkt  $O$  geht.  $R''$  ist ohne Einfluß auf  $S$ ;  $R'$  wird so angenommen, daß es  $S$  in einem bequem gelegenen Punkte schneidet; dann wird es genau wie vorhin nach den Richtungen  $S$  und  $L$  zerlegt.

Wäre die Geschwindigkeit des Angriffspunktes 1 der zweiten Kraft  $S$  nicht gleich Null, so müßte man das in der Fig. 471b auftretende aus zwei Kräften  $S$  bestehende Kräftepaar erst so verschieben, daß die eine der beiden Kräfte  $S$  durch den Nullpunkt  $O$  geht.

Nach Ermittelung von  $S$  kann man die Spannkräfte in den übrigen Stäben des Fachwerks der Reihe nach mit Hilfe der Kraftpolygone für die Knotenpunkte 5, 4, 3, 2 bestimmen.

Noch eine kurze Bemerkung knüpfen wir an die Figur 471b. Da nämlich die vom Nullpunkte  $O$  ausgehenden Strecken  $OB', OC', \dots$  die um  $90^\circ$  gedrehten Geschwindigkeiten oder Verschiebungen der Knotenpunkte 3, 4,  $\dots$  darstellen, so erhält man die wirklichen Geschwindigkeits- oder Verschiebungsrichtungen, wenn man die Figur 471b um  $90^\circ$  dreht; es entspricht dann jedem Stabe  $ik$  eine Gerade  $i'k'$ , die rechtwinklig zu  $ik$  ist. Eine wichtige Anwendung dieser Darstellungsweise enthält No. 217.

**216. Einflußlinien.** Das kinematische Verfahren liefert bei Annahme eines die Auflagerbedingungen befriedigenden Bewegungszustandes für die gesuchte Unbekannte  $S$  stets eine Gleichung  $S = \frac{\sum Pc}{c'}$ , welche den Einfluß jeder einzelnen Last angibt und deshalb ohne weiteres Schlüsse auf die ungünstigste Belastungsweise gestattet; es wird sich daher auch ganz besonders zur Ermittlung der Einflußlinien eignen. Hier handelt es sich um den Sonderfall paralleler Lasten. Wählt man  $c' = 1$ , so ist die Ordinate der Einflußlinien gleich der Projektion  $c$  der Geschwindigkeit des Angriffspunktes der Kraft  $P$  auf die Richtung von  $P$ , oder, etwas kürzer ausgedrückt, gleich der Geschwindigkeit des Angriffspunktes von  $P$  in der Richtung von  $P$ .

Dreht sich nun irgend eine der starren Scheiben, aus denen die zu untersuchende zwangsläufige Kette besteht, mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um ihren augenblicklichen Pol (Fig. 472), so bewegt sich der Angriffspunkt einer im Abstände  $x$  von jenem Pole an der Scheibe angreifenden Kraft  $P$  in der Richtung von  $P$  mit der Geschwindigkeit  $c = x\omega$ ; und aus dieser linearen Beziehung folgt der wichtige Satz: *Zu jeder starren Scheibe gehört eine gerade Einflußlinie, deren Nullpunkt dem augenblicklichen Pole der Scheibe entspricht.*

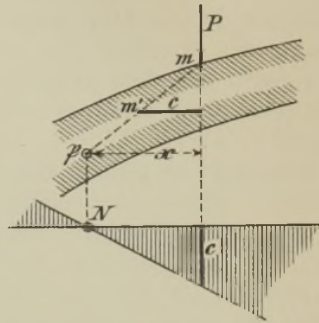


Fig. 472.

Besteht also die zwangsläufige Kette, in welche das Fachwerk durch Beseitigung eines Stabes übergeht, aus den Scheiben  $\dots I, II, III, \dots$  so setzt sich die Einflußlinie für  $S$  aus ebensoviel geraden Linien  $\dots I', II', III' \dots$  zusammen, deren Nullpunkte  $\dots N_1, N_2, N_3, \dots$  den Polen  $\dots (I), (II), (III) \dots$  entsprechen, um welche sich die Scheiben gegen das Widerlager drehen.\*) Sind die Scheiben so an-

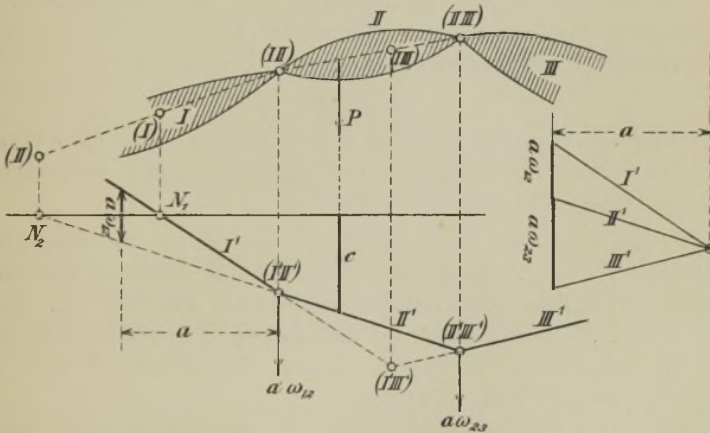


Fig. 473.

einander gereiht, daß jede Scheibe mit der vorhergehenden und der nachfolgenden durch ein Gelenk verbunden ist, Fig. 473, so fassen wir

\*) Es sind also  $\dots (I) (II) (III) \dots$  die kurzen Bezeichnungen für die früher gebrauchten  $\dots (Iw), (IIw), (IIIw) \dots$ , wo  $w$  das Widerlager bedeutet. Der Satz: es liegen die drei Pole  $(Iw) (IIw) (III)$  in einer Geraden, nimmt dann die ebenso übersichtliche Form an: es liegen  $(I) (II) (II)$  in einer Geraden.



sie unter dem Namen *Scheibenzug* zusammen. Den Gelenken . . . . (*I II*), (*II III*) . . . . als den gemeinschaftlichen Punkten zweier Scheiben entsprechen die Schnittpunkte . . . . (*I II'*), (*II' III'*) . . . . der Geraden *I'*, *II'*, *III'*, . . . . . Aber auch dann, wenn zwei Scheiben nicht unmittelbar aneinanderhängen, z. B. *I* und *III*, darf ihr gegenseitiger Pol (*I III*) als gemeinschaftlicher Punkt beider Scheiben angesehen werden; ihm wird daher ebenfalls der Schnittpunkt der zu jenen Scheiben gehörigen Geraden *I'* und *III'* entsprechen. Es ist deshalb keineswegs erforderlich, behufs Auftragung der Einflußlinie . . . *I'*, *II'*, *III'* . . . . sämtliche Pole . . . (*I*) (*II*) (*III*) . . . . zu bestimmen; es können vielmehr auch andere Pole, nämlich die gegenseitigen Drehpunkte einzelner Scheiben, die sich oft viel leichter finden lassen, benutzt werden. Sind genügend viele Pole ermittelt worden, so erfordert die Aufzeichnung der Einflußlinie nur die Angabe einer einzigen Ordinate *c* oder, allgemeiner, die Angabe der Strecke, welche irgend zwei dem Linienzuge . . . *I' II' III'* . . . angehörige Gerade auf irgend einer, zur Richtung der Kraft *P* parallelen Geraden abschneiden. Diese letztere Bestimmungswise wird uns häufig durch den *Satz* ermöglicht werden:

*Drehen sich zwei Scheiben I und II (die nicht unmittelbar aneinander zu hängen brauchen) mit den Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_1$  und  $\omega_2$  um ihre Pole (I) und (II), so ist die relative Winkelgeschwindigkeit von I gegen II*

$$\omega_{12} = \omega_1 - \omega_2,$$

*und es schneiden deshalb die Geraden I' und II' auf einer im beliebigen Abstände a vom Punkte (I' II') parallel zu P gezogenen Geraden die Strecke  $a\omega_{12}$  ab.*

Aus diesem Satze folgt zunächst, daß man die Einflußlinie . . . *I' II' III'* . . . . auch als ein mit der Polweite *a* gezeichnetes Seilpolygon auffassen darf, welches die in den Punkten . . . (*I' II'*), (*II' III'*) . . . . angreifenden, zu den Lasten *P* parallelen Gewichte . . .  $a\omega_{12}$ ,  $a\omega_{23}$ , . . . . verbindet. Durch den Punkt (*I' III'*) geht das Gewicht  $a\omega_{13} = a\omega_{12} + a\omega_{23}$ .

Bedeutet die Strecken *c* nicht endliche Geschwindigkeiten, sondern unendlich kleine Verschiebungen, die in unendlich großem Maßstabe aufgetragen worden sind, so sind . . .  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  . . . . die unendlich kleinen Winkel, um welche sich die Scheiben . . . *I*, *II*, *III*, . . . . drehen, und  $\omega_{12}$  ist der Drehungswinkel der Scheibe *I* gegen die Scheibe *II*.

In Fig. 474 haben wir die Scheiben durch gerade Linien dargestellt und die unteren Winkel des Polygons . . . *I II III* . . . . mit . . .  $\mathfrak{D}_1$ ,  $\mathfrak{D}_2$ , . . . bezeichnet. Wählen wir dann die Richtung der

Schwerkraft zur positiven  $P$ -Richtung, so dürfen wir die Einflußlinie ...  $I' II' III' \dots$  als Kettenlinie der Gewichte ...  $\Delta \mathfrak{S}_1, \Delta \mathfrak{S}_2 \dots$  betrachten. Einem positiven  $\Delta \mathfrak{S}_1$  entspricht eine Rechtsdrehung der Scheibe  $I$  gegen die Scheibe  $II$  und infolgedessen ein nach unten zeigender Knick der Kettenlinie. Die Polweite ist gleich 1. Zwischen den Änderungen der unteren und oberen Polygonwinkel  $\mathfrak{S}$  und  $\alpha$  besteht die Beziehung  $\Delta \mathfrak{S} = -\Delta \alpha$ .

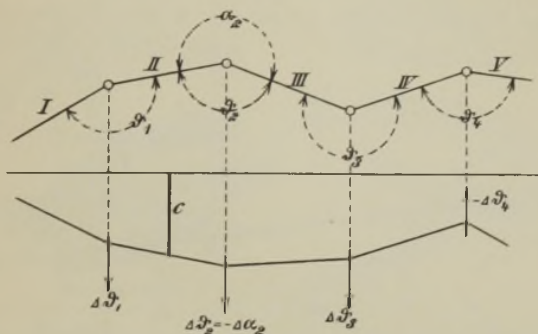


Fig. 474.

Treibt man nun die zwangsläufige Kette, in welche das Fachwerk durch Beseitigung eines Stabes von der Länge  $s$  übergeht, dadurch an, daß man  $s$  um die verschwindend kleine Strecke  $\Delta s$  vergrößert, so leisten die beiden an der Kette angreifenden Kräfte  $S$  (Fig. 475) die virtuelle Arbeit  $-S\Delta s$ , und es nimmt die Gleichung  $\sum Qc = 0$  bei Erfüllung der Auflagerbedingungen die Form

$$-S\Delta s + \sum Pc = 0$$

an; sie liefert, wenn  $\Delta s = 1$  (gleich der in unendlich großem Maßstabe aufzutragenden unendlich kleinen Einheit der verschwindend kleinen Verschiebungen) angenommen wird, für  $S$  den Wert

$$S = \sum Pc.$$

Verbindet der Stab, dessen Spannkraft  $S$  gesucht wird, zwei Scheiben  $I$  und  $II$ , Fig. 475, und bezeichnet  $r$  das Lot vom Pole ( $III$ ) auf die Stabachse und  $\Delta \mathfrak{S}$  den Winkel, um den sich  $I$  gegen  $II$  um den Pol ( $III$ ) dreht, so ist offenbar

$$\Delta s = r\Delta \mathfrak{S},$$

folglich

$$\Delta \mathfrak{S} = \frac{\Delta s}{r} = \frac{1}{r},$$

und es schneiden daher die Geraden  $I'$  und  $II'$  auf einer im Abstände  $a$

vom Pole (*III*) parallel zu *P* gezogenen Geraden (*v*) die Strecken  $v = a \Delta \mathfrak{S} = 1 \frac{a}{r}$  ab. Nimmt *v* die durch die Pole (*I*) und (*II*) bestimmten besonderen Lagen ( $v_1$ ) und ( $v_2$ ) an, so erhält man die Strecken

$$v_1 = 1 \frac{a_1}{r} \quad \text{und} \quad v_2 = 1 \frac{a_2}{r},$$

von denen bereits eine zur Festlegung der Linien *I'* und *II'* genügt. Verbindet man die Punkte, in denen die Achse des Stabes *S* die Ge-

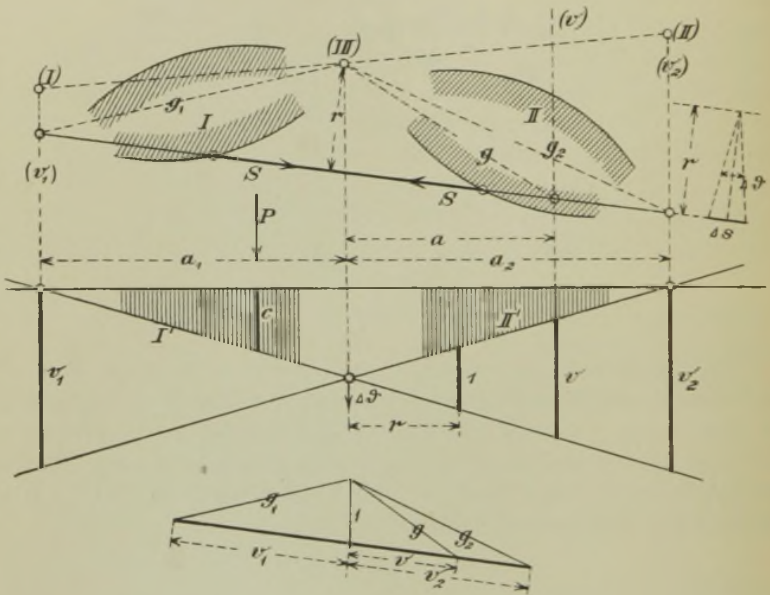


Fig. 475.

raden (*v*), ( $v_1$ ), ( $v_2$ ) schneidet, mit dem Pole (*III*) durch die Geraden *g*,  $g_1$ ,  $g_2$  und zerlegt man die zur Kraft *P* parallele Strecke 1 nach der Richtung *S* und, der Reihe nach, nach den Richtungen der Geraden *g*,  $g_1$ ,  $g_2$ , so sind die zu *S* parallelen Seitenwerte der Reihe nach gleich den Strecken *v*,  $v_1$ ,  $v_2$ . Im Abstände *r* vom Pole (*III*) ist die senkrechte Entfernung der Geraden *I'* und *II'* gleich 1. Wählt man diese Strecke als Maß für die Lasteinheit, so gibt die Strecke *c* die von der Last  $P=1$  herrührende Spannkraft *S* an.

Stellt nun Fig. 476 einen Teil einer durch die Beseitigung eines Gurtstabes *U* gewonnenen zwangsläufigen Kette dar, so findet man zu der beliebig gezogenen Geraden *I'* nach Auftragung der Strecke 1 sofort die zugehörige Gerade *II'* und mit Hilfe der den Polen (*I*) und



(II) entsprechenden Nullpunkte  $N_1$  und  $N_2$  die Nullachse  $AB$  und kennt somit die zu den Scheiben  $I$  und  $II$  gehörigen Teile der Einflußlinie für  $U$ . Zu beachten ist, daß einer Dehnung des Gurtstabes  $U$  ein positives  $\Delta S$ , mithin ein nach unten zeigender Knick der Kettenlinie  $I' II'$  entspricht.

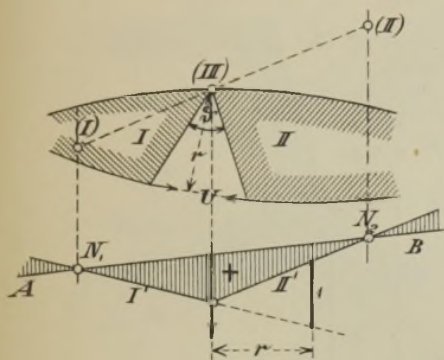


Fig. 476.

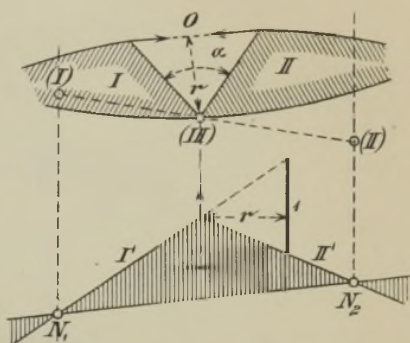


Fig. 477.

Handelt es sich um einen Stab  $O$  der oberen Gurtung, Fig. 477, so ist  $\alpha$  der infolge einer Dehnung des Stabes zunehmende Winkel; es zeigt dann der Knick der Kettenlinie  $I' II'$  nach oben.

Vergleicht man diese Ergebnisse mit den auf Seite 241 für den einfachen Fachwerkbalken gewonnenen, so erkennt man, daß die zwischen den Polen  $(I)$  und  $(II)$  liegenden Teile der  $U$ -Linie und  $O$ -Linie übereinstimmen mit der  $U$ -Linie und  $O$ -Linie eines einfachen Balkens, dessen Stützweite gleich der wagerechten Projektion der Strecke  $N_1 N_2$  ist.

Eine andere wichtige Anwendung der in der Fig. 475 dargestellten allgemeinen Gesetze zeigt Fig. 478. Dieselbe veranschaulicht einen Teil einer kinematischen Kette, die aus einem Fachwerke durch Beseitigung einer Diagonale  $D$  entstanden ist. Die Lasten sind an der unteren Gurtung angreifend gedacht. Zu den Gliedern  $I, II, III$  gehören die drei Geraden  $I' II' III'$ .  $I'$  und  $III'$  treffen sich in der Senkrechten durch den Schnittpunkt  $(I III)$  der die Scheiben  $I$  und  $III$  verbindenden Gurtstäbe.  $I'$  und  $II'$  bilden, da  $\alpha$  infolge einer Dehnung der Diagonale  $D$  zunimmt, einen nach oben zeigenden Knick, sie schneiden auf der Senkrechten durch den Knotenpunkt  $(II III)$  die Strecke  $v = 1 \frac{\lambda}{r}$  ab, wo  $\lambda$  die Feldweite bedeutet. Da die zu dieser Senkrechten gehörige Gerade  $g$  mit dem Gurtstabe  $U$  zusammenfällt, kann  $v$  durch Zerlegung der senkrechten Strecke 1 nach den Richtungen der Stäbe  $U$



Punkte 3 eine lotrechte Verschiebung  $2'3' \parallel 23$  zu, deren Projektion auf die Normale zu  $D$  gleich 1 ist. Sodann ermitteln wir die lotrechte

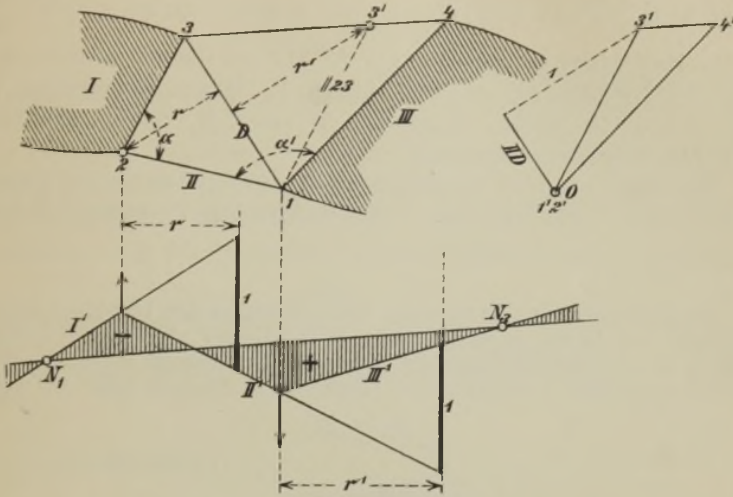


Fig. 479.

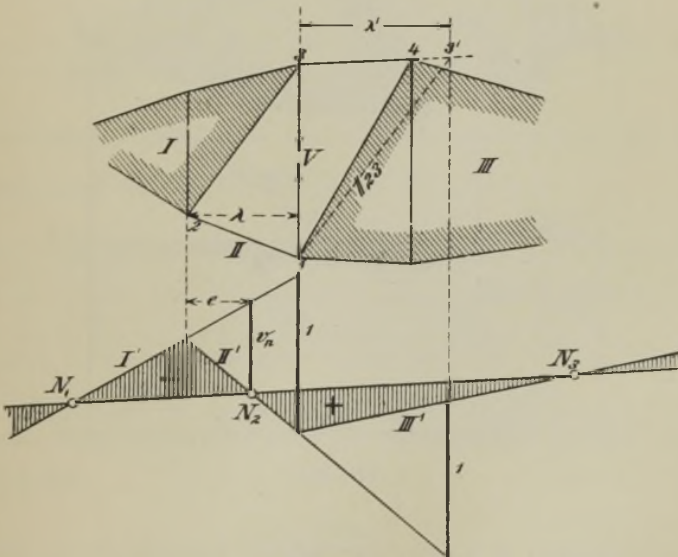


Fig. 480.

Verschiebung  $1'4'$  mit Hilfe von  $1'4' \parallel 14$  und  $3'4' \parallel 34$  und erhalten den Winkel  $\Delta\alpha'$ , um den sich  $III$  gegen  $II$  dreht:  $\Delta\alpha' = -\frac{1'4'}{14}$ .



Bestimmen wir nun auf dem Stabe 3 4 einen Punkt 3' so, daß  $1 3' \parallel 2 3 \parallel 2' 3'$  ist und bezeichnen das Lot von 3' auf  $D$  mit  $r'$ , so ergibt sich  $\overline{1' 4'} : \overline{1 4} = 1 : r'$ , und wir erhalten daher  $\Delta \alpha' = -\frac{1}{r'}$ .

In der Entfernung  $r'$  vom Punkte  $II' III'$  ist also der senkrechte Abstand der Geraden  $II'$  und  $III'$  gleich 1. Durch die Strecken  $r$ ,  $r'$  und 1 und die beiden Nullpunkte  $N_1$  und  $N_3$  ist die Einflußlinie  $I' II' III'$  vollständig bestimmt.

Fig. 480 stellt den Sonderfall eines senkrecht stehenden Füllungsstabes  $V$  dar. Hier ist  $r = \lambda$ . Im Nullpunkte  $N_2$  besitzt  $I'$  die Ordinate  $v_n = 1 \frac{e}{\lambda}$ .

Die Möglichkeit, die Ordinate  $v_n$  durch Zerlegung der Lasteinheit nach den Richtungen von  $D$  und  $g_n$  zu gewinnen, führt zu einer sehr übersichtlichen Ermittlung der in den Füllungsstäben eines einfachen Balkens durch eine gleichmäßige Verkehrslast hervorgerufenen Spannkkräfte. Fig. 481 zeigt die Einfluß-

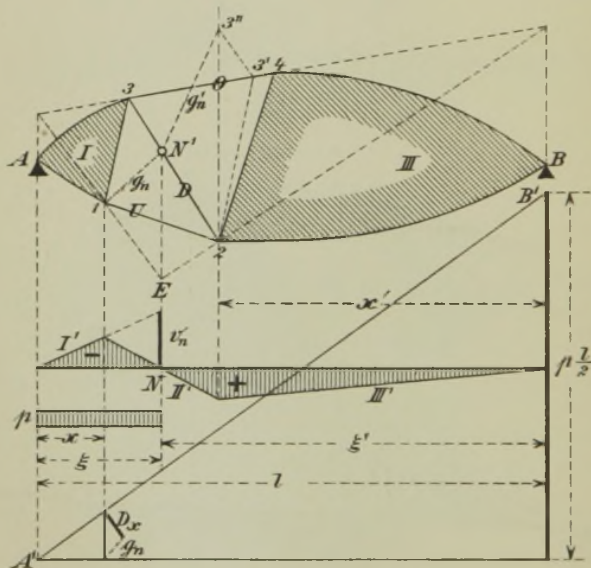


Fig. 481.

fläche der Spannkraft  $D$  in einer linkssteigenden Diagonale für den Fall unterfliegender Fahrbahn. Die Belastungsscheide  $E$  ist nach dem auf Seite 237 beschriebenen Verfahren bestimmt worden.  $min D_p$  entsteht infolge Belastung der Strecke  $\xi$ . Die negative Einflußfläche ist ein Dreieck von der Höhe  $v_n \frac{x}{4r'}$  und dem Inhalte

$$\underline{F} = v_n \frac{x}{\xi} \cdot \frac{\xi}{2} = \frac{v_n x}{2}$$

und es ergibt sich deshalb

$$\min D_p = -p \underline{F} = -\frac{px}{2} v_n.$$

Man erhält also  $\min D_p$ , wenn man (an Stelle der Last 1) die Last  $\frac{px}{2}$  nach den Richtungen von  $g_n$  und  $D$  zerlegt. Wir haben  $\frac{px}{2}$  als Ordinate einer Geraden  $A'B'$ , die bei  $B$  die Ordinate  $\frac{pl}{2}$  besitzt, dargestellt und den Seitenwert von  $\frac{px}{2}$  nach der Richtung von  $D$  mit  $D_x$  (absolut genommen) bezeichnet; wir erhalten also

$$\min D_p = -D_x.$$

Erzeugt nun eine gleichmäßige, über die ganze Trägerlänge sich erstreckende Belastung von der Größe 1 für die Längeneinheit, die Spannkraft  $D_o$ , so ist der Einfluß der an der unteren Gurtung angreifend gedachten ständigen Belastung ( $g$  f. d. Längeneinheit)

$$D_g = g D_o,$$

und es ergibt sich mithin

$$\min D = g D_o - D_x.$$

Die Belastung der Strecke  $\xi'$  erzeugt

$$\max D_p = p D_o + D_x,$$

weil  $\max D_p + \min D_p$  den der gänzlichen Belastung mit  $p$  entsprechenden Wert  $p D_o$  liefern muß, und es folgt also, wenn  $g + p = q$  gesetzt wird,

$$\max D = q D_o + D_x.$$

Die Spannkraft  $D_o$  findet man am schnellsten mit Hilfe eines Cremonaschen Kräfteplanes.

Man könnte auch, wie leicht einzusehen ist,  $\max D_p$  in der Form

$$\max D_p = +D_{x'}$$

darstellen, wobei  $D_{x'}$  der zu  $D$  parallele Seitenwert einer nach den Richtungen von  $D$  und  $g'_n$  zerlegten Last  $\frac{px'}{2}$  ist und  $g'_n$  wie folgt erhalten wird. Man bestimme in der Geraden 34 den Punkt 3' mit Hilfe von  $23' \parallel 13$ , ziehe  $3'3'' \parallel D$  bis zur Senkrechten durch 2 und verbinde 3'' mit  $N'$  durch  $g'_n$ . Die erste Bestimmungsweise ist jedoch vorzuziehen.

Handelt es sich um den senkrechten Stab  $V$  des in Fig. 482 abgebildeten Fachwerks, dessen Belastung wieder an der unteren Gurtung angreifen möge, so ist

$$v_n = \frac{e}{\lambda} 1 \text{ und}$$

$$\underline{F} = v_n \frac{x'}{2} = \frac{x'}{2} \frac{e}{\lambda}.$$

Es ist also

$$\min V_p = -p \underline{F} = -\frac{px'}{2} \frac{e}{\lambda} = -V_{x'},$$

wo  $V_{x'}$  gedeutet werden kann als der auf den Knotenpunkt 1 entfallende Teil einer

im Punkte  $N_2$  des Zwischenträgers 12 angreifenden Last  $\frac{px'}{2}$ . Nach Ermittlung von  $V_z'$  auf dem in Fig. 482 angegebenen Wege findet man

$$\begin{aligned} \min V &= g V_o - V_z' \\ \max V &= q V_o + V_z'. \end{aligned}$$

$V_o$  entsteht bei derselben Belastung wie  $D_o$ .\*)

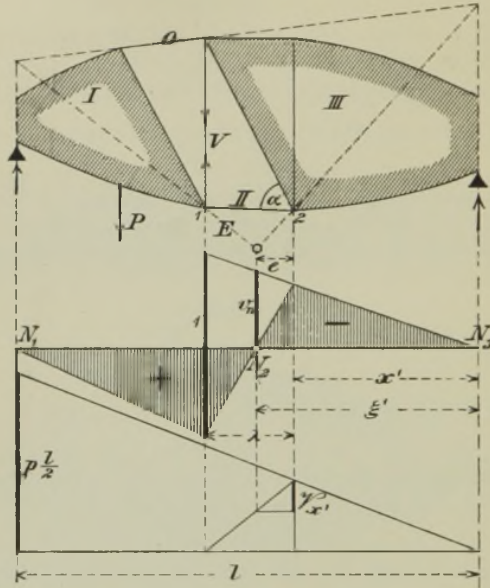


Fig. 482.

Wir lassen nun eine Reihe von Beispielen folgen, die nach den vorstehenden ausführlichen Erörterungen nur noch einer kurzen Erläuterung bedürfen werden.

**1. Beispiel.** Bogenträger mit einem festen Auflagergelenk  $B$  und einem auf schräger Bahn geführten Auflagergelenk  $A$ , Fig. 483. Gesucht ist die Einflußlinie für  $U$ . Der Pol ( $I$ ) liegt in der Normalen zur Auflagerbahn und in der Geraden ( $II$ ) ( $I II$ ). Durch die Nullpunkte  $N_1$  und  $N_2$  und die Strecke  $v_1$  ist die  $U$ -Linie bestimmt.

**2. Beispiel.** Bogenträger mit festem Auflager  $B$  und schrägem Gleitlager  $A$ , Fig. 484. Die Einflußlinie für  $D$  wurde mit Hilfe der

\*) Für den Sonderfall eines Fachwerks mit Vertikalen ist die Ermittlung der Werte  $\min D_p = -D_x$ ,  $\max D_p = +D_x'$  und  $\min V_p = -V_z'$ , bereits von Prof. Herzog (Zürich) gezeigt worden. Vergl. Schweiz. Bauzeitung, Bd. XV, No. 8.



Pole (I) und (II) und der Strecke  $v_n$  bestimmt. (I) ist der Schnittpunkt der Normalen zur Bahn des Auflagers A und der Geraden (III) (I III).

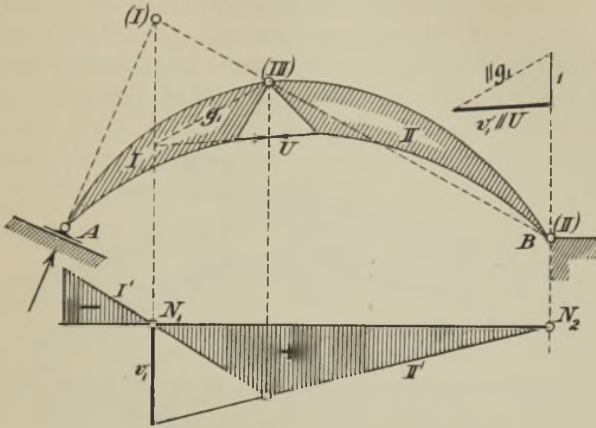


Fig. 483.

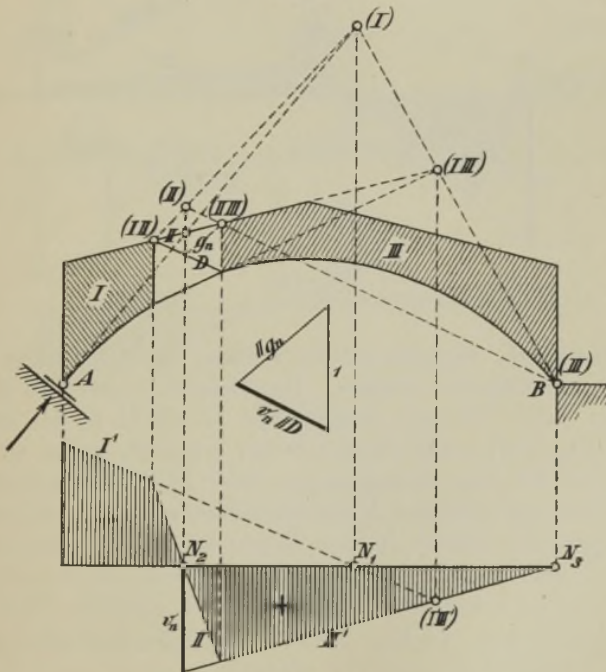


Fig. 484.

**3. Beispiel.** Dreigelenkbogen. Gesucht ist die Einflußlinie für D, Fig. 485. Es wurde der Pol (III) als Schnittpunkt der Geraden



lagern als gleichwertig zu erachten sind, gestützt. Gesucht ist die Einflußlinie für  $O$ . Der Pol  $(II)$  wurde in derselben Weise ermittelt wie im Beispiel 4. Wäre die Lage von  $(IV)$  bekannt, so könnte man auf die Lage von  $(III)$  in derselben Weise schließen wie von  $(I)$  auf  $(II)$ . Geben wir nun  $(IV)$  in der Normalen zur Bahn des Auflagers  $A$  die Lagen  $(IV)_1$  und  $(IV)_2$ , so finden wir den zu  $(II)$  symmetrisch liegenden Pol  $(III)_1$  und den mit  $(IV)_2$  zusammenfallenden  $(III)_2$ . Diese beiden Punkte bestimmen die Gerade, welche  $(III)$  durchläuft, während  $IV$  die Bahnnormale beschreibt. Da nun aber  $(III)$  auch in

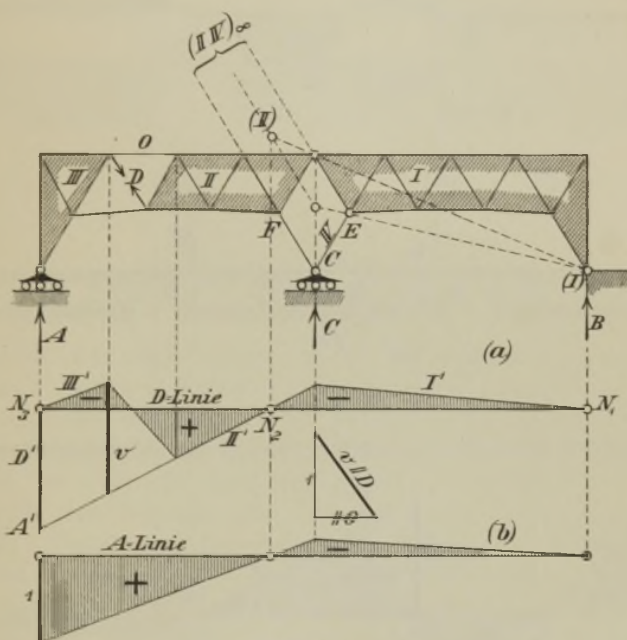


Fig. 486.

der Geraden  $(II)$  ( $III$   $II$ ) liegen muß, so ist sowohl die Lage von  $(III)$  als auch die von  $(IV)$  eindeutig bestimmt, und man kennt jetzt die Nullpunkte  $N_1 N_2 N_3 N_4$  der  $O$ -Linie. Die Gerade  $II'$  besitzt an der Stelle  $N_3$  die Ordinate  $1 \frac{x_m}{h}$ .

Wird die Einflußlinie für die Spannkraft  $D$  gesucht, so ist das starre Fachwerk durch Beseitigung der Diagonale in eine kinematische Kette zu verwandeln. Der Pol von  $III$  gegen  $II$  fällt dann mit dem unendlich fernen Schnittpunkte der wagerechten Gurtstäbe  $O$  und  $U$  zusammen, und es muß daher  $(III)$  in der Wagerechten durch  $(II)$



liegen. Es fällt also  $(III)$  mit  $(III)_1$  und  $(IV)$  mit  $(IV)_1$  zusammen. Der zwischen  $N_3$  und  $N_2$  gelegene Teil der  $D$ -Linie stimmt mit der  $D$ -Linie eines einfachen Balkens von der Stützweite  $N_3N_2$  überein. Die Gerade  $II'$  besitzt an der Stelle  $N_3$  die Ordinate  $\frac{1}{\sin \varphi}$ , wo  $\varphi$  den Neigungswinkel der Diagonale gegen die Wagerechte bedeutet.

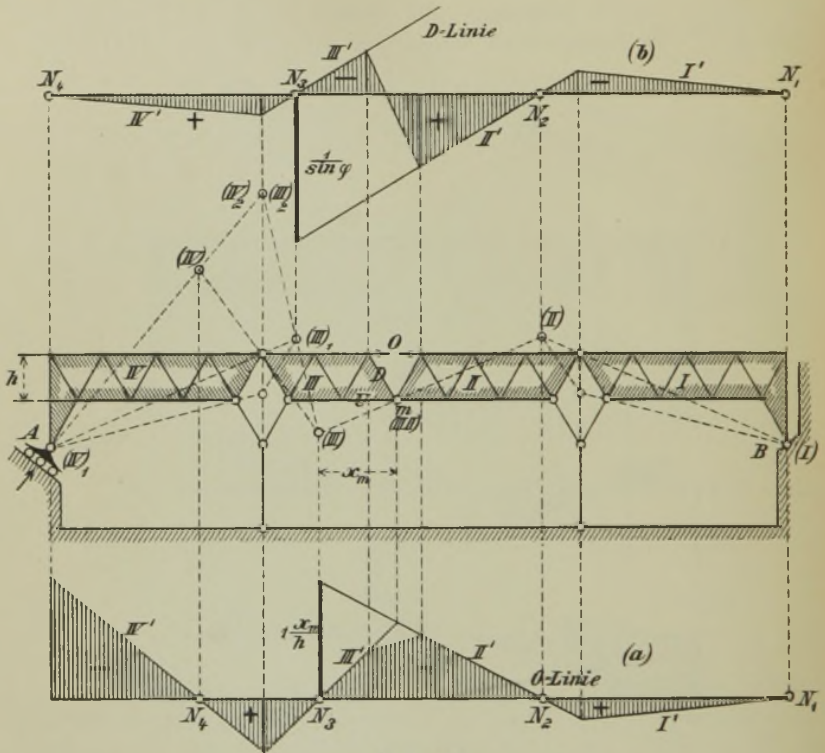


Fig. 487.

Wird das Auflager  $A$  in einer Wagerechten geführt, so rückt der Punkt  $(IV)_2$  ( $III)_2$  ins Unendliche, und die Gerade  $(III)_1$  ( $III)_2$  wird senkrecht. Die Höhenlage des Punktes  $IV$  ist, solange nur senkrechte Lasten in Frage kommen, gleichgültig; denn die Nullpunkte  $N_3$  für alle Spannkkräfte  $O$ ,  $U$  und  $D$  der Mittelöffnung liegen in der durch den Punkt  $(III)_1$  bestimmten Senkrechten. Es ist in diesem Falle einerlei, ob das feste Auflager in  $B$  oder in  $A$  liegt.

**6. Beispiel.** Fig. 487 zeigt einen aus drei Scheiben und vier Stäben bestehenden Träger, der bei  $D$  ein festes, und bei  $A$ ,  $B$ ,  $C$

bewegliche Auflagergelenke besitzt. Gesucht ist die Einflußlinie für den Stützenwiderstand  $C$ . Die Lasten mögen an der oberen Gurtung angreifen. Wir denken uns die Führung des Punktes  $C$  beseitigt und bestimmen die Pole der Scheiben  $I$ ,  $II$  und  $III$ .

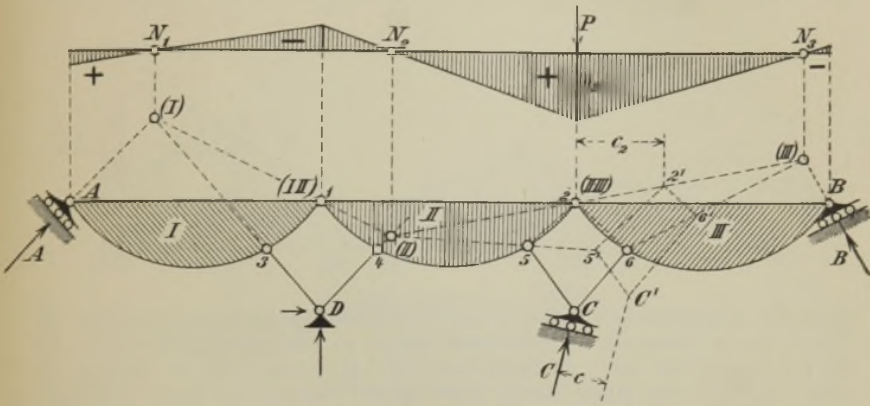


Fig. 488.

Da Punkt  $A$  in einer Geraden, die wir kurz mit  $l_a$  bezeichnen wollen, und Punkt  $3$  in einem Kreisbogen, dessen Mittelpunkt  $D$  ist, geführt wird, so schneidet der Stab  $D3$  die Normale zu  $l_a$  im Pole  $(I)$ . Eine durch die Punkte  $(I)$  und  $(III)$  gelegte Gerade trifft die Achse des Stabes  $D4$  im Pole  $(II)$  und eine durch  $(II)$  und  $(II III)$  gelegte Gerade trifft die Normale zur Führung  $l_b$  des Stützpunktes  $B$  im Pole  $(III)$ . Damit sind die Nullpunkte  $N_1, N_2, N_3$  bestimmt. Die Ermittlung der dem Punkte  $2$  entsprechenden Ordinate  $\eta_2$  der  $C$ -Linie soll nun mit Hilfe eines Geschwindigkeitsplanes erfolgen. Wir nehmen für das Gelenk  $2$  die mit der Geraden  $2(III)$  zusammenfallende lotrechte Geschwindigkeit  $22'$  beliebig an, legen durch  $2'$  Parallelen zu den Geraden  $25$  und  $26$ , welche die Geraden  $5(II)$  und  $6(II)$  beziehungsweise in  $5'$  und  $6'$  schneiden und ziehen  $5'C' \parallel 5C$  sowie  $6'C' \parallel 6C$ . Bezeichnet  $c$  den Abstand des Widerstandes  $C$  vom Punkte  $C'$  und  $c_2$  den Abstand der in  $2$  angreifenden Last  $P$  vom Punkte  $2'$ , so besteht die Gleichung  $Cc - Pc_2 = 0$ ; sie liefert für  $\eta_2$  den Wert

$$\eta_2 = 1 \frac{c_2}{c}.$$

Die Figuren 489, 490 und 491 zeigen verschiedenartig geformte, über mehrere Öffnungen gespannte Balkenbrücken, die sich zu Übungsaufgaben eignen. In Fig. 492 sind die von den Mittelstützen ausgehenden schrägen Stäbe durch gleichwertige Gleitlager ersetzt worden. Treten nur senkrechte Lasten auf, so

ist es gleichgültig, welches Auflagergelenk das feste ist, und es empfiehlt sich daher, in jedem einzelnen Falle eine zu möglichst einfachen Polbestimmungen führende Annahme zu machen. Würde man z. B. in Fig. 486 das Gelenk  $C$  als

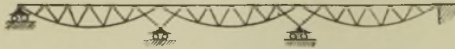


Fig. 489.



Fig. 491.

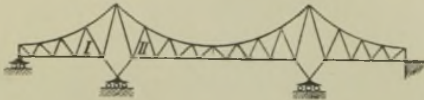


Fig. 490.

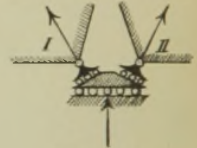


Fig. 492.

festliegend betrachten und dafür  $B$  wagerecht geführt ansehen, so würde sich der Pol ( $I$ ), den wir jetzt mit ( $I'$ ) bezeichnen wollen, als Schnittpunkt der Stabachse  $CE$  mit der Senkrechten durch  $B$  ergeben und ( $II'$ ) als Schnittpunkt der Geraden ( $I'$ ) ( $III$ ) und  $CF$  und dieser Punkt würde in der Senkrechten durch ( $II$ ) liegen, mithin denselben Nullpunkt  $N$ , liefern, so daß sich aus dieser Zulässigkeit der

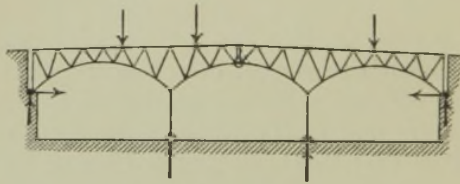


Fig. 493.

Auflagervertauschung eine ganze Reihe von Zeichnungsproben herleiten lassen. — Auch die Untersuchung des in Fig. 493 abgebildeten Bogenträgers ist als lehrreiche Übungsaufgabe zu bezeichnen.

**7. Beispiel.** Es soll der bereits im § 43, Fig. 370 auf anderem Wege untersuchte *Gerbersche Balken mit Hängegurtung* nunmehr kinematisch behandelt werden.

Fig. 494 zeigt den Ausleger und den Koppelträger. Gesucht seien die Einflußlinien für die Spannkraft  $U$  der unteren Gurtung und die wagerechte Seitenkraft  $O \cos \beta$  der unter  $\beta$  geneigten Spannkraft  $O$  des Auslegers. Handelt es sich um  $U$ , so ist der obere Knotenpunkt  $m$  der Pol von  $III$  gegen  $II$ . Die Pole ( $a III$ ) und ( $b III$ ) der Kettenglieder  $a$  und  $b$  gegen die Scheibe  $III$  fallen wegen der parallelen Hängestangen ins Unendliche; es liegen daher die Pole ( $a$ ) und ( $b$ ) der Glieder  $a$  und  $b$  gegen das Widerlager in der Senkrechten durch ( $III$ ). Da nun der Knotenpunkt  $C$  mit dem über die Seitenöffnung gestreckten,



das Widerlager des Auslegers bildenden Trägers  $AB$  (Fig. 495) fest verbunden ist, so fällt  $(a)$  mit  $C$  zusammen und es muß auch  $(b)$  mit  $C$  zusammenfallen, weil  $(a)$ ,  $(ab)$ ,  $(b)$  in einer Geraden liegen. Hätte die Scheibe  $III$  drei oder noch mehr Felder, so würden auch die Pole  $(c)$   $(d)$  . . . der übrigen mit  $(III)$  durch parallele Hängestangen verbundenen

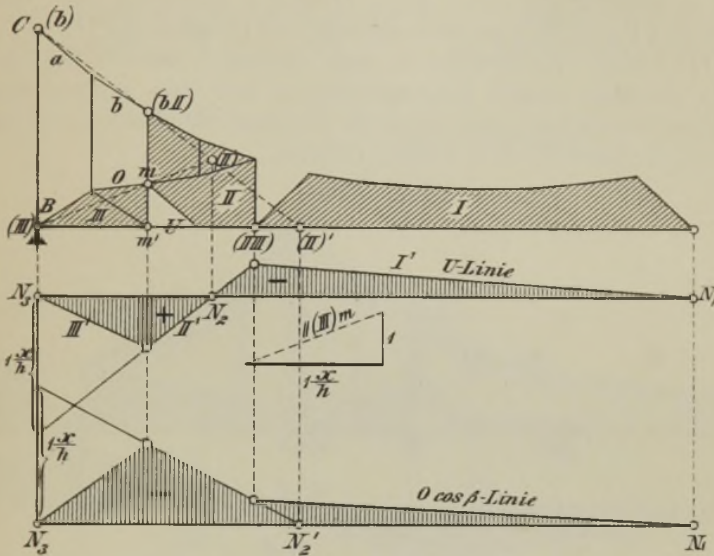


Fig. 494.

Kettenglieder  $c$ ,  $d$ , . . . mit  $C$  zusammenfallen, weil  $(b)$ ,  $(bc)$ ,  $(c)$  in einer Geraden liegen, desgleichen  $(c)$   $(cd)$   $(d)$  u. s. w. Durch die beiden Geraden  $(b)$   $(bII)$  und  $(III)$   $m$  ist jetzt der Pol  $(II)$  und damit auch der Nullpunkt  $N_2$  bestimmt. Wird  $O$  gesucht, so hängen die Scheiben  $III$  und  $II$  in  $m'$  zusammen, und die Scheibe  $II$  dreht sich um den in den Geraden  $(b)$   $(bII)$  und  $(III)$   $m'$  liegenden Pol  $(II)'$ . Nach Ermittlung der Nullpunkte wurden die Einflußlinien für  $U$  und  $O \cos \beta$  mit Hilfe der Strecke  $1 \frac{x}{h}$  bestimmt, wo  $h$  die Länge der Vertikale  $mm'$  bedeutet. Wie man aus den  $U$ -Linien und  $O \cos \beta$ -Linien sehr schnell die Einflußlinien für  $D \cos \varphi$  und  $-V \cotg \varphi$  finden kann, ist im § 43 beschrieben worden.

Fig. 495 zeigt die Einflußlinien für die Spannkraft  $U$  und  $O \cos \beta$  in zwei Gurtstäben der Seitenöffnung  $AB$ . So lange die über den Träger wandernde Last zwischen  $A$  und  $B$  liegt, ist die Kettengurtung spannungslos, und das Trägerstück  $AB$  verhält sich wie ein einfacher Balken. Die  $O \cos \beta$ -Linie unterscheidet sich von der  $U$ -Linie nur durch

das Vorzeichen; beide Linien sind durch ein und dieselbe Strecke  $v = 1 \frac{x}{h}$  bestimmt. Um den Einfluß der Belastung des Auslegers und des Koppelträgers zu ermitteln, braucht man nur den Pol (*I III*) von *I* gegen *III* anzugeben. Da nun der Punkt *C* jetzt zur Scheibe *III* gehört, so fällt der Pol von *b* gegen *III* mit *C* zusammen, und man gewinnt den Pol (*I III*) als Schnittpunkt der Geraden (*b III*) (*b I*) und (*II III*) (*II I*). Je nachdem es sich nun um *U* oder *O* handelt, fällt (*II I*) mit dem oberen Knotenpunkte *m* oder dem unteren Knotenpunkte *m'* zusammen; man erhält für den gesuchten Pol von *I* gegen *III* die beiden Lagen (*I III*) und (*I III*)'.

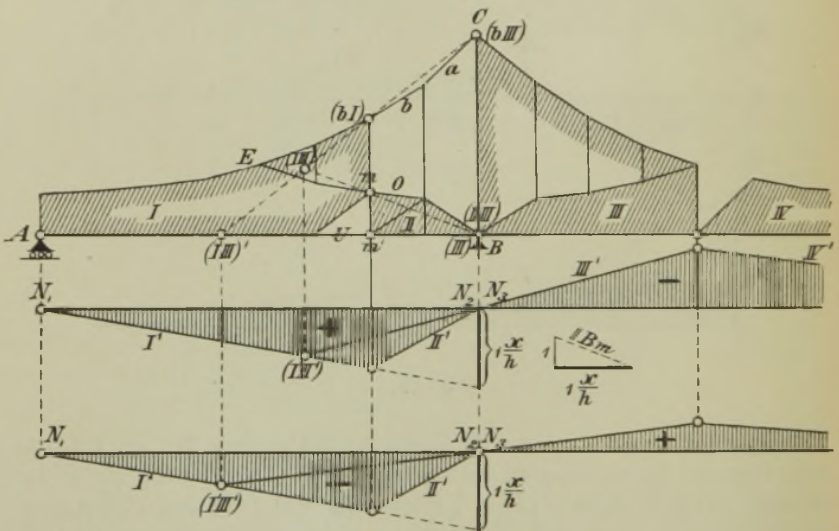


Fig. 495.

Wir empfehlen dem Leser, eine ähnliche Untersuchung über die *D*-Linie anzustellen und auch die (besonders einfache) Bestimmung des Poles (*I III*) für den Fall vorzunehmen, daß die fraglichen Stäbe links vom Endpunkte *E* der Hängegurtung liegen.

217. Herleitung der Einflußfiguren für schräge Lasten aus den Einflußlinien für senkrechte Lasten. Es seien  $0, 1, 2, 3, \dots, n$  die Knotenpunkte eines Stabzuges oder Scheibenzuges einer zwangläufigen Kette, in welche ein Fachwerk behufs Berechnung irgend einer Unbekannten *S* verwandelt worden ist, Fig. 496 a; es seien ferner (in Fig. 496 b)  $0, 1, 2, 3, \dots, n$  die entsprechenden Punkte der auf eine wagerechte Nulllinie *AB* bezogenen Einflußlinie für *S*, gültig für senkrechte

Lasten  $P$ . Die Ordinaten  $\eta_0, \eta_1, \eta_2 \dots \eta_n$  dieser Einflußlinie dürfen stets als die senkrechten Projektionen der Geschwindigkeiten der Knotenpunkte  $0, 1, 2, 3, \dots n$  aufgefaßt werden, und daraus folgt, daß die Endpunkte  $0', 1', 2', 3' \dots n'$  der von einem in der  $AB$  angenommenen Nullpunkte  $O$  aus aufgetragenen Geschwindigkeiten der Punkte  $0, 1, 2, 3, \dots n$  in den durch die entsprechenden Punkte der Einflußlinie gelegten Wagerechten liegen müssen. Da nun außerdem die Geraden  $0'1', 1'2', 2'3' \dots$  der Reihe nach rechtwinklig

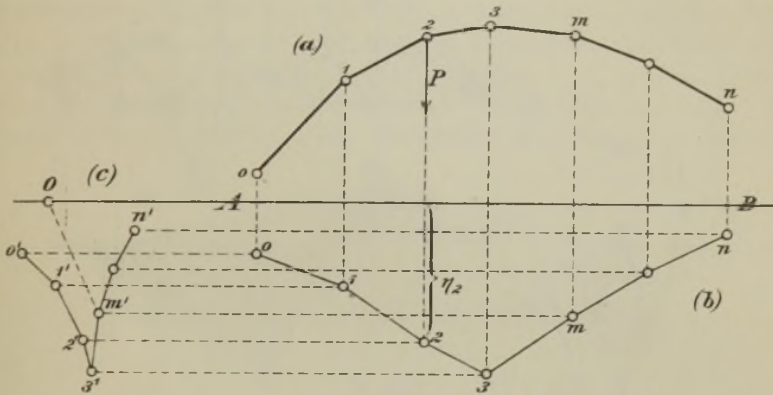


Fig. 496.

zu den Verbindungsgeraden  $01, 12, 23, \dots$  der Knotenpunkte sein müssen (vergl. den Schluß von No. 215), so ist der Geschwindigkeitsplan in Fig. 496 c vollständig bestimmt, sobald die Richtung oder die Größe der Geschwindigkeit eines einzigen Punktes  $m$  des Scheibenzuges gegeben ist. Die Ermittlung der Geschwindigkeiten der übrigen Punkte erfolgt dann mit Hilfe des durch den bekannten Punkt  $m'$  zu führenden *Normalenzuges*  $0'1'2'3' \dots n'$ .

**Beispiel.** Nach diesem Verfahren ist in Figur 497 der Einfluß schräger Lasten auf die Spannkraft  $O$  des Obergurtstabes  $1-3$  des Versteifungsfachwerks eines Gelenkbogens untersucht worden, indem zuerst die Einflußlinie für die lotrechte Belastung auf die im § 49 angegebene Weise gezeichnet wurde. Der dem fraglichen Stabe gegenüberliegende Knotenpunkt  $4$  liegt im Abstände  $h$  unterhalb der die Auflagergelenke verbindenden Geraden, und es wurde daher das Maß  $h$  vom entsprechenden Bogenpunkte  $b$  aus nach oben aufgetragen, hierauf durch  $O$  und den Endpunkt der Strecke  $h$  eine Gerade gelegt, welche die Verbindungslinie  $14-c$  in  $E$  trifft. Lotrecht unter  $E$



liegt der Nullpunkt der Einflußlinie, welche aus drei Geraden besteht, deren mittelste auf der Senkrechten durch  $O$  die Strecke  $1 \frac{x}{r}$  abschneidet, wo  $r$  das Lot von  $4$  auf  $O$  bedeutet. Diese Einflußlinie

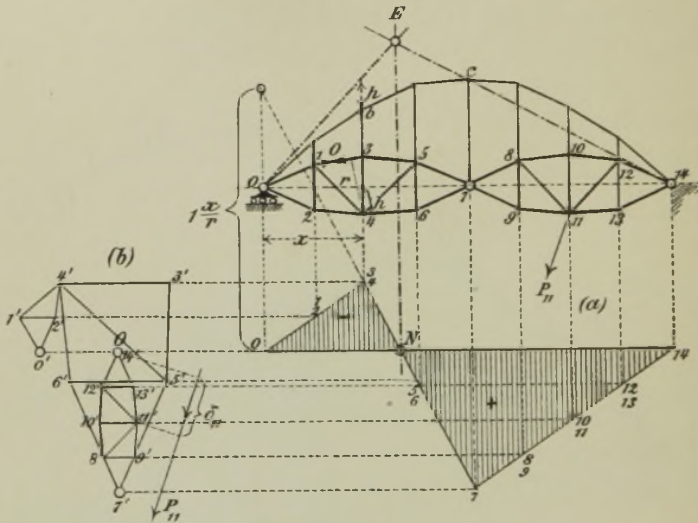


Fig. 497.

gilt für oben und unten angreifende Lasten und kann nun zur Bestimmung der Fig. 497b benutzt werden.  $O$  ist der in der Nulllinie angenommene Pol.  $14'$  fällt mit  $O$  zusammen. Sollen nur die unten angreifenden Lasten berücksichtigt werden, so genügt es, den der unteren Gurtung entsprechenden Normalenzug  $14'13'11'9'7'6'4'2'0'$  zu zeichnen. Der Einfluß von  $P_{11}$  auf  $O$  ist z. B.

$$O = + P_{11} \delta_{11}.$$

Dreht man die Last  $P_{11}$  rechts herum um  $90^\circ$  und weist man ihr den Punkt  $11'$  als Angriffspunkt zu, so ist  $P_{11} \delta_{11}$  das Moment von  $P_{11}$  in Bezug auf den Nullpunkt  $O$ ; es ist positiv anzunehmen, sobald es rechts um  $O$  dreht. Auf diese Weise kann man den Ausdruck  $\Sigma P \delta$ , ganz ebenso wie dies in No. 215 mit dem Ausdruck  $\Sigma P c$  geschehen ist, als das Moment der Kräfte  $P$  in Bezug auf den Pol  $O$  deuten.

## § 53.

**Aufgaben über mehrteilige Fachwerke.**

218. Ein Fachwerk wird ein  $t$ -teiliges genannt, wenn seine Gurtungen durch zwei einander kreuzende Scharen von Füllungsstäben verbunden sind und ein von Gurtung zu Gurtung reichender Stab der einen Schar durch Stäbe der anderen Schar in  $t$ -Teile zerlegt wird.

Die bisher ausgeführten mehrteiligen Fachwerke sind mit wenigen Ausnahmen statisch unbestimmt; es unterliegt aber nicht den geringsten Schwierigkeiten, auch brauchbare statisch bestimmte mehrteilige Fachwerke zu bilden. Beispiele für statisch bestimmte mehrteilige Netzwerke haben wir bereits im § 51, Seite 446 u. f., kennen gelernt, solche für statisch bestimmte mehrteilige Ständerfachwerke zeigen die Figuren 498 und 499.\*) Beim Fachwerke Fig. 498 gehe man von

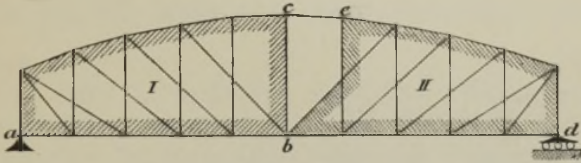


Fig. 498.

den Endständern aus, bilde mittels zweiständigen Anschlusses der Knotenpunkte die Scheiben I und II und verbinde diese miteinander durch das Gelenk  $b$  und den Stab  $ce$ . Die Kreuzungspunkte der Diagonalen und Vertikalen dürfen auch als Knotenpunkte aufgefaßt werden. Das Fachwerk in Fig. 499 wird vom Mittelständer aus, durch zweiständigen Anschluß der Knotenpunkte gebildet.

Die Berechnung mehrteiliger Fachwerke erfolgt am zweckmäßigsten mit Hilfe von Einflußlinien; sie soll durch eine Reihe von Beispielen, die sich auf Balken mit zwei Stützpunkten beziehen, erläutert werden.

**a. Balken mit gebrochenen Gurtungen.]**

219. Einflußlinie für die Vertikale  $V$  des Ständerfachwerks in Fig. 499. Wird der Stab 87 beseitigt, so entsteht eine zwangsläufige Kette. Der rechts vom Stabe 69 gelegene schraffierte Teil des Fachwerks ist eine starre Scheibe und soll zunächst als ruhend

\*) Eine ähnliche Anordnung zeigt der auf Seite 361 abgebildete Ausleger der Niagarabrücke.

angesehen werden. An denselben schließt sich das Gelenkviereck 6 4 7 9 an, und mit diesem sind die übrigen Knotenpunkte durch je zwei Stäbe verbunden. Fig. 499a stellt die um  $90^\circ$  gedrehten Geschwindigkeiten dar. Nach Übertragung des ruhenden Stabes 6 9\*) wurde der Punkt 7' auf der zum Stabe 7 9 parallelen Geraden 7'9' beliebig angenommen, und hierauf wurden der Reihe nach die Punkte 5', 4', 3', 2', 1' und 0' ermittelt.

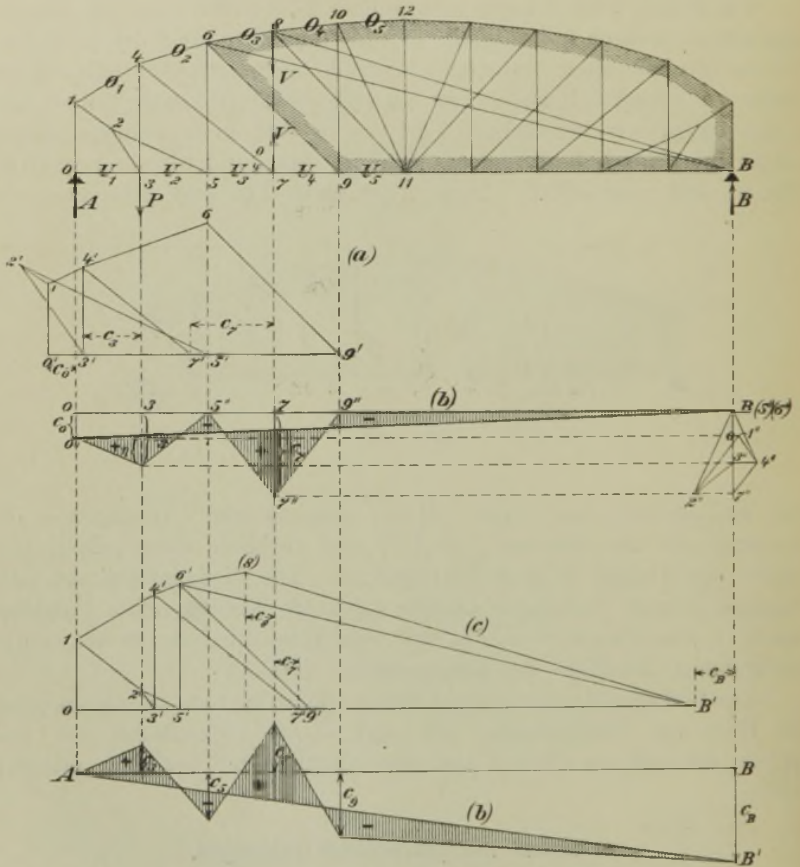


Fig. 499.

Der Einfluß irgend einer Last  $P$  ergibt sich nun aus der Gleichgewichtsbedingung  $\sum Qc = 0$ . Greift  $P$  in 3 an, so erhält man

$$Pc_3 - Ac_0 - Vc_7 = 0$$

\*) Der größeren Übersichtlichkeit wegen empfiehlt es sich, den Geschwindigkeitsplan vom Trägernetz zu trennen.



und hieraus

$$V = \frac{P}{c_7} \left( c_3 - \frac{1}{P} c_0 \right) = \frac{P}{c_7} \left( c_3 - \frac{b}{l} c_0 \right),$$

wo  $b$  den Abstand der Last  $P$  von der Stütze  $B$  und  $l$  die Stützweite bedeutet. Setzt man

$$c_3 - \frac{b}{l} c_0 = \eta,$$

so findet man

$$V = P \frac{\eta}{c_7}.$$

Die Einflußfläche für  $V$  zeigt Fig. 499b. Es wurde gemacht:  $00'' = c_0$ ,  $33'' = c_3$ ,  $77'' = c_7$ ; die Geschwindigkeiten der Punkte 5 und 9 und aller Knotenpunkte der Scheibe  $6B$  sind gleich Null. Weiter wurde  $0''$  mit  $B$  durch eine Gerade verbunden, deren unter  $P$  gemessene Ordinate  $= \frac{b}{l} c_0$  ist. Wählt man den Kräftemaßstab  $c_7 = P$ , so erhält man  $V = \eta$ .

In Fig. 499b ist außerdem noch die Anwendung eines Geschwindigkeitsplanes gezeigt worden, der die vom Nullpunkte  $B$  aus in den wirklichen Richtungen aufgetragenen Geschwindigkeiten darstellt.\*) Es wurde  $B7''$  gleich der beliebig anzunehmenden Geschwindigkeit  $c_7$  gemacht; die Punkte  $5''$ ,  $6''$  fallen mit  $B$  zusammen.

4'' wurde bestimmt mit Hilfe von  $6''4'' \perp 64$  und  $7''4'' \perp 74$   
 3'' " " " " " "  $5''3'' \perp 53$  „  $4''3'' \perp 43$   
 . . . . .

Eine dritte Lösung der vorliegenden Aufgabe zeigen die Figuren 499c und 499d. Es wurde der Stab  $01$  als ruhend angesehen. Nach Annahme von  $3'$  ergaben sich der Reihe nach  $2'$ ,  $4'$ ,  $5'$ ,  $6'$ ,  $7'$ ,  $9'$ . Nun wurde, da der schraffierte Teil der kinematischen Kette starr ist, der Punkt  $B'$  bestimmt mit Hilfe von  $9'B' \parallel 9B$  und  $6'B' \parallel 6B$ , und schließlich wurde  $8'$  bestimmt mittels  $B'8' \parallel B8$  und  $6'8' \parallel 68$ . Die Gleichgewichtsbedingung  $\sum Qc = 0$  lautet, wenn die Last  $P$  in  $3$  angreift,

$$- P c_3 + V c_8 + V c_7 - B c_B = 0,$$

woraus

$$V (c_7 + c_8) = P \left( c_3 + \frac{B}{P} c_B \right).$$

Die in der Fig. 499d schraffierte Fläche ist Einflußfläche für  $V (c_7 + c_8)$ . Die dritte Lösung bietet den Vorteil, daß ein Teil der Fig. 499c

\*) Vergl. den Schluß von No. 215.

auch zur Berechnung anderer Spannkraften  $V$  benutzt werden kann. Handelt es sich beispielsweise um die Spannkraft  $V$  im Stabe 5 6, so können die Punkte 2', 3', 4', 5', 7' beibehalten werden. Die Division mit  $(c_7 + c_8)$  braucht man nur mit einer Ordinate vorzunehmen, weil die Einflußlinie durch eine Ordinate und durch die Nullpunkte bestimmt ist.

Aus dem Geschwindigkeitsplane Fig. 499c lassen sich mit wenigen Strichen die Einflußlinien für die Spannkraften  $D_{8-11}$  und  $D_{10-11}$  in den Stäben 8—11 und 10—11 folgern. Wird z. B. die kinematische Kette durch Beseitigung des Stabes 8—11 erzielt, so rückt 8' in die Senkrechten durch 7'; Punkt 10' wird in der Senkrechten durch 9' mittels  $8' 10' \parallel 8 10$  bestimmt; sodann werden in der Wagerechten durch 9' die Punkte 11' und B' durch Ziehen von  $10'-11' \parallel 10-11$  und  $10'B' \parallel 10 B$  festgelegt. Die Spannkraften in den übrigen Diagonalen und in den Gurtungen werden mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen durch die Spannkraften  $V$ ,  $D_{8-11}$  und  $D_{10-11}$  ausgedrückt. So besteht z. B. zwischen den Spannkraften  $V$  und  $D$  der Stäbe 7 8 und 7 4, falls Knotenpunkt 7 unbelastet ist, die Beziehung

$$D \sin \varphi = -V,$$

so daß sich die Ordinaten der Einflußlinien für  $D \sin \varphi$  und  $V$  in allen Knotenpunkten mit Ausnahme des Punktes 7 nur durch das Vorzeichen unterscheiden. Liegt  $P$  in 7, so ist  $D \sin \varphi = -V + P$ ; es ist dann die Ordinate der  $D \sin \varphi$ -Linie gleich der Lastenheit, vermindert um die entsprechende Ordinate der  $V$ -Linie.

Zwischen  $U_4$ ,  $D$  und  $U_3$  besteht die Gleichung

$$U_4 = U_3 + D \cos \varphi = U_3 + D \sin \varphi \cdot \cotg \varphi.$$

Da nun  $U_1 = 0$  ist, so kann man aus den  $D \sin \varphi$ -Linien schrittweise alle  $U$ -Linien herleiten und aus den Werten  $U$  findet man die Spannkraften  $O_1$ ,  $O_2$ ,  $O_3$  der unter den Winkeln  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\beta_3$  gegen die Wagerechte geneigten Obergurtstäbe der ersten drei Felder

$$O_1 = -U_3 \sec \beta_1, \quad O_2 = -U_3 \sec \beta_2, \quad O_3 = -U_5 \sec \beta_3.$$

Die Spannkraft  $O_5$  wird wie beim einfachen Dreieckssystem mittels der Gleichung

$$O_5 \cos \beta_5 = -\frac{\mathfrak{M}_{11}}{h_{11}}$$

gefunden, wo  $h_{11}$  die Länge des Stabes 11—12 bedeutet und für  $O_4$  gilt die Gleichung

$$O_4 \cos \beta_4 = O_5 \cos \beta_5 - (D \cos \varphi)_{10-11}.$$

Die Spannkraft  $V$  im Stabe 11—12 ist durch das Kräftepolygon für den Knotenpunkt 11 bestimmt.

220. Zweiteiliges Netzwerk mit einem Ständer in der Mitte.  
 Fig. 500. Die Lasten mögen in den Knotenpunkten der unteren Gurtung angreifen. Die Einflußlinien für die Stäbe  $O$ ,  $U$  und  $D$  sollen mit Hilfe von Kräfteplänen bestimmt werden.

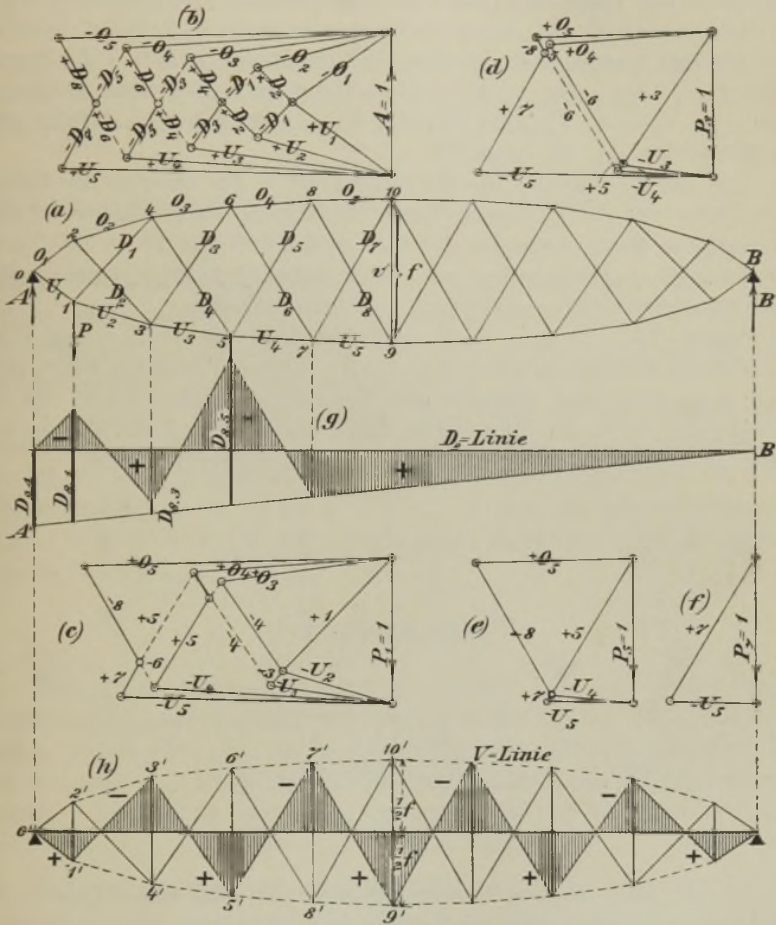


Fig. 500.

Wir betrachten die linke Trägerhälfte als einen an der Stelle 9—10 eingespannten, mit den äußeren Kräften  $A$ ,  $P_1$ ,  $P_3$ ,  $P_5$ ,  $P_7$  belasteten Freitragler und ermitteln der Reihe nach die Spannkraften infolge der Belastungen

$$A = 1, P_1 = 1, P_3 = 1, P_5 = 1, P_7 = 1$$

mit Hilfe der einer näheren Erläuterung nicht bedürftigen Kräfte-



pläne  $[b]$ ,  $[c]$ ,  $[d]$ ,  $[e]$ ,  $[f]$ .\*) Durch diese 5 Pläne sind die Einflußlinien für sämtliche Diagonalen und Gurtstäbe bestimmt.

Figur 500 g zeigt die  $D_8$ -Linie. Die dem Plane  $[b]$  entnommene positive Spannkraft  $D_{8 \cdot 4}$  infolge  $A=1$  bestimmt die Gerade  $A'B'$ , welche für alle Lagen der Last  $P=1$  den Einfluß des Stützdruckes  $A$  auf die Spannkraft  $D_8$  angibt. Trägt man nun, von dieser Geraden aus, auf den Senkrechten durch die Knotenpunkte 1, 3, 5, 7 die Spannkraften  $D_{8 \cdot 1}$ ,  $D_{8 \cdot 3}$ ,  $D_{8 \cdot 5}$ ,  $D_{8 \cdot 7}$  ab, welche in  $D_8$  beziehungsweise infolge von  $P_1=1$ ,  $P_3=1$ ,  $P_5=1$ ,  $P_7=1$  entstehen, so erhält man die Eckpunkte der  $D_8$ -Linie.\*\*)

Um die Einflußlinie für die Spannkraft  $V$  des Ständers zu finden, verwandeln wir das Fachwerk durch Beseitigung dieses Stabes in eine kinematische Kette, bewegen die Knotenpunkte 9 und 10 in der Vertikalen 9—10 gegeneinander mit einer beliebig großen Geschwindigkeit  $c$ , bestimmen die zugehörigen Geschwindigkeiten  $c_0, c_1, c_3, c_5, \dots$  der Punkte 0, 1, 3, 5, ... und ermitteln dann die  $V$ -Linie mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingung  $\sum Qc = 0$ . Dieses Verfahren führt stets rasch zum Ziele und gestaltet sich besonders einfach, wenn, wie im vorliegenden Falle, die Senkrechte durch die Mitte und die Wagerechte durch die Stützpunkte Symmetrieachsen des Fachwerks sind.

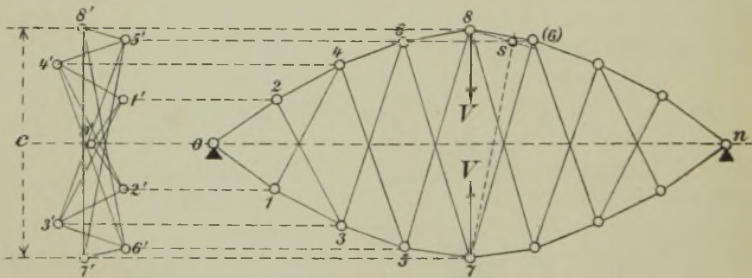


Fig. 501.

In Fig. 501 ist der Geschwindigkeitsplan für einen Träger mit 8 Feldern und (der größeren Deutlichkeit wegen) mit steileren Gurten gezeichnet worden. Die Geschwindigkeiten wurden nicht um  $90^\circ$  gedreht, sondern in ihren wirklichen Richtungen aufgetragen. Die in einer Senkrechten gelegenen Punkte  $7'$  und  $8'$  wurden in den Wagerechten durch die Knotenpunkte 7 und 8 angenommen; ihre

\*) In den Plänen  $[c]$  bis  $[f]$  haben wir die Bezeichnungen  $D_1, D_3, D_5, \dots$  durch die kürzeren 1, 2, 3, ... ersetzt.

\*\*) Dieses Verfahren läßt sich natürlich auch zur Berechnung des in Fig. 499 dargestellten Trägers benutzen.



Figur 502a zeigt die  $D_5 \sin \varphi$ -Linie sowohl für untenliegende als auch für obenliegende Fahrbahn.

Beseitigt man  $D_4$  und bestimmt man in derselben Weise einen Geschwindigkeitsplan, so findet man, daß 11' mit 11 zusammenfällt.

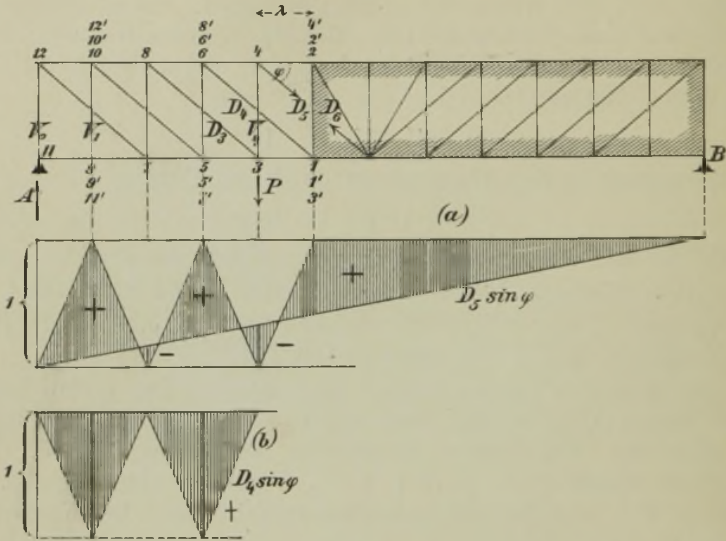


Fig. 502.

Es entsteht die in Fig. 503b gezeichnete  $D_4 \sin \varphi$ -Linie. Damit sind die Bildungsgesetze für die  $D \sin \varphi$ -Linien gefunden. Für alle Diagonalen, welche dem vom Endknoten 12 ausgehenden Stabzuge 12—7—8—3 . . . angehören, ergeben sich Einflußlinien von der Art Fig. 502a, für die anderen solche von der Art Fig. 502b. Dies gilt auch für  $D_6 \sin \varphi_6$ , welches im vorliegenden Falle zur zweiten Gruppe [Fig. 502b] gehört.

Kennt man die Grenzwerte  $_{max} D \sin \varphi$  und  $_{min} D \sin \varphi$ , so findet man die Spannkräfte in den Vertikalen mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen für die Knotenpunkte. Beispielsweise ergibt sich für  $V_4$  bei untenliegender Fahrbahn der Wert

$$V_4 = - D_5 \sin \varphi - g_o \lambda$$

wo  $g_o \lambda$  die ständige Belastung des Knotenpunktes 4 bedeutet, und bei obenliegender Fahrbahn wird

$$V_4 = - D_5 \sin \varphi + g_u \lambda$$

wo  $g_u \lambda$  die ständige Belastung des Knotenpunktes 3 ist.



Fig. 503 zeigt die Einflußlinie für die Spannkraft  $U$  in einem Stabe der unteren Gurtung. Die schraffierte Scheibe ist wieder als ruhend angesehen worden;  $1'$  fällt also mit  $1$  zusammen,  $2'$  mit  $2$ . Punkt  $3'$  darf nach Belieben in der Geraden  $23$  angenommen werden;

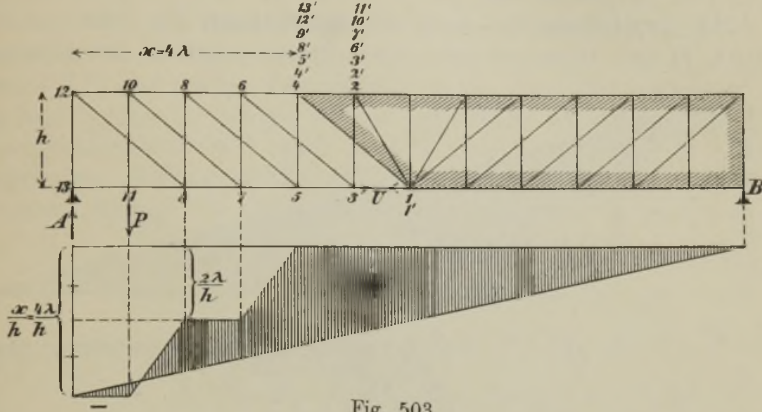


Fig. 503.

er wurde mit  $2$  zusammenfallend gewählt. Dann fallen auch  $6'$ ,  $7'$ ,  $10'$ ,  $11'$  mit  $2$  zusammen, während  $4'$ ,  $5'$ ,  $8'$ ,  $9'$ ,  $12'$ ,  $13'$  mit  $4$  zusammenfallen. Für eine in  $11$  angreifende Last  $P$  findet man

$$A \cdot 4\lambda - P4\lambda - Uh = 0$$

$$U = A \frac{4\lambda}{h} - P \frac{4\lambda}{h}.$$

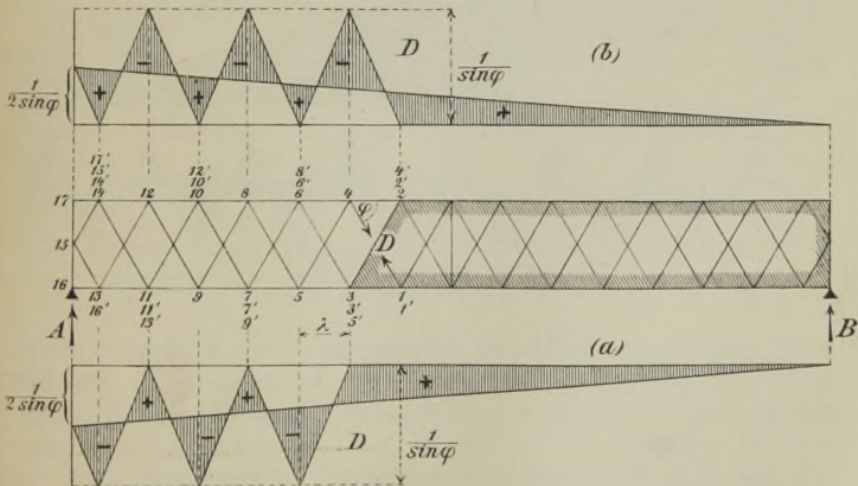


Fig. 504.

Den Knotenpunkten 9 und 7 entsprechen die Geschwindigkeiten  $2\lambda$ ; die Knotenpunkte 5, 3, 1 . . .  $B$  bewegen sich nicht; es entsteht also die durch Schraffierung hervorgehobene Einflußfläche für  $U$ , welche sowohl für untenliegende als auch für obenliegende Fahrbahn gilt und deren Bildungsgesetz leicht zu übersehen ist.

**223. Zweiteiliges Netzwerk mit Mittelständer** Fig. 504 und 505. Die für  $D$  und  $O$  gezeichneten Einflußlinien ( $a$  gilt für untenliegende,

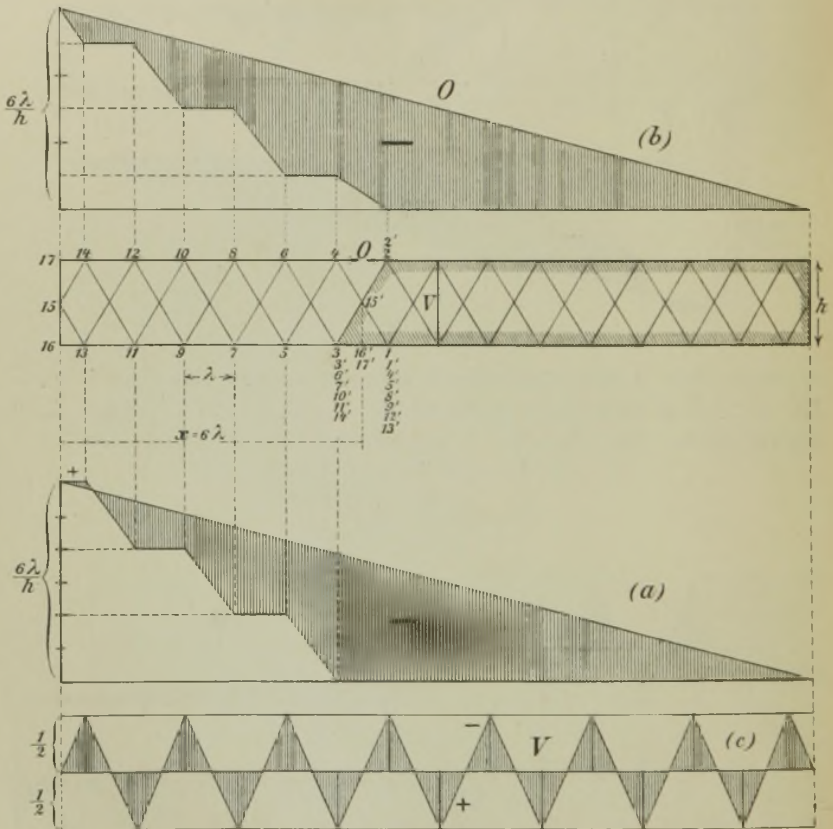


Fig. 505.

$b$  für obenliegende Fahrbahn) dürften nach den vorstehenden Entwicklungen eine weitere Erklärung nicht mehr erfordern. Die Einflußlinie für  $V$  folgt aus dem in No. 220 (Fig. 500h) gefundenen allgemeinen Gesetze.

**224.** Fig. 506 zeigt ein zweiteiliges Fachwerk, das sich von dem soeben untersuchten im wesentlichen nur dadurch unterscheidet,

daß der Mittelständer durch einen wagerechten Stab  $CC_1$  ersetzt worden ist. Außerdem wurden durch Einschaltung von Vertikalen in der belasteten Gurtung neue Knotenpunkte zur Stützung von Querträgern geschaffen. Die Ordinaten der Einflußlinien für die Spannkraft  $H$  im Stabe  $CC_1$  sind gleich  $\pm \lambda : h$ ; es hat diese Linie dieselbe Form wie die  $V$ -Linie des vorhin untersuchten Systems. In Fig. 506a ist ein Geschwindigkeitsplan für die durch Beseitigung des Stabes  $CC_1$  gewonnene zwangläufige Kette gezeichnet worden. Den Punkten  $C$  und  $C_1$  wurden die entgegengesetzt gleichen wagerechten Geschwindigkeiten  $OC'$  erteilt und in ihren wirklichen Richtungen aufgetragen, sodann wurde  $5'$  mittels  $C'5' \perp C5$  und  $C_1'5' \perp C_15$  bestimmt, hierauf  $(5)'$  sodann  $4'$  u. s. w. Es fallen zusammen

- mit  $(5)'$  die Punkte  $3'$ ,  $(1)'$  und  $7'$ ,  $(9)'$
- „  $5'$  „ „  $(3)'$ ,  $1'$  „  $(7)'$ ,  $9'$
- „  $O$  „ „  $4'$ ,  $2'$ ,  $0'$  „  $6'$ ,  $8'$ ,  $10'$
- „  $C'$  der Punkt  $A'$
- „  $C_1'$  der Punkt  $B'$ .

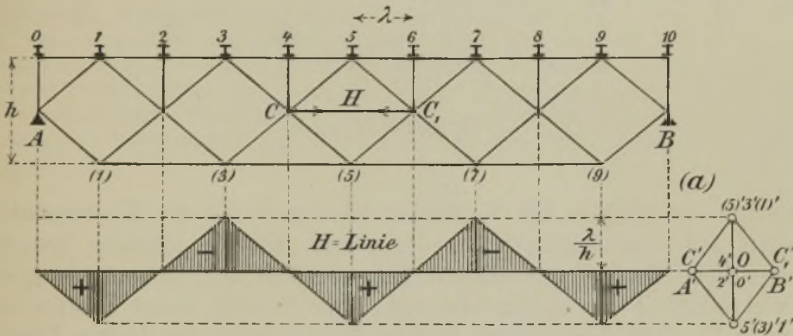


Fig. 506.

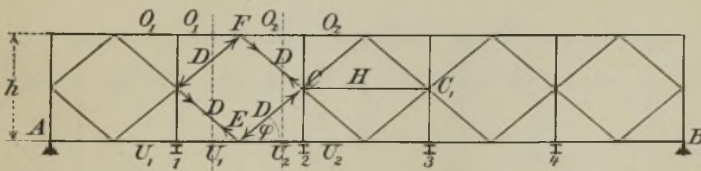


Fig. 507.

Lasten, welche in den Knotenpunkten 0, 2, 4, 6, 8, 10 angreifen, sind ohne Einfluß auf  $H$ .

Werden also nur in den Knotenpunkten der Vertikalen Querträger angeordnet (Fig. 507), so ist der Einfluß der Verkehrslast auf  $H$  gleich



Null. Auch das auf alle Knotenpunkte sich verteilende Eigengewicht erzeugt im Stabe  $CC_1$  nur eine geringe Beanspruchung. Sehr einfach gestaltet sich bei dieser Anordnung die Berechnung der Spannkkräfte in den Diagonalen und Gurtungen. Es ist nämlich immer zulässig, das Eigengewicht nur auf die Knotenpunkte 1, 2, 3 . . . zu verteilen und die Knotenpunkte  $E$  und  $F$  unbelastet anzunehmen. Dann ergeben sich für die beiden in  $E$  angreifenden Diagonalen entgegengesetzt gleiche Spannkkräfte und ebenso auch für die beiden in  $F$  sich treffenden. Da nun aber die Querkraft  $Q$  für alle zwischen den beiden Knotenpunkten 1 und 2 geführten Schnitte gleich groß ist, so erhält man für alle vier dem Felde 1—2 angehörigen Diagonalen denselben Wert  $D$ , so zwar, daß die linkssteigenden Diagonalen bei positivem  $Q$ , mit

$$D = \frac{1}{2} \frac{Q}{\sin \varphi}$$

auf *Zug* und die rechtssteigenden ebenso stark auf *Druck* beansprucht werden. Für die Gurtungen erhält man aus den Angriffsmomenten  $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \dots$  die Spannkkräfte

$$-O_1 = +U_1 = \frac{\mathfrak{M}_1}{h}$$

$$-O_2 = +U_2 = \frac{\mathfrak{M}_2}{h}$$

Die unteren Hälften der Vertikalen werden durch die Knotenpunktlasten auf *Zug* beansprucht, die oberen Hälften erfahren nur unwesentliche Drücke und dienen hauptsächlich zur Unterstützung der Knickfestigkeit der oberen Gurtung. Der Vorzug dieses Trägers und des in Fig. 506 dargestellten besteht überhaupt in den kurzen Längen der auf *Druck* beanspruchten Stäbe.

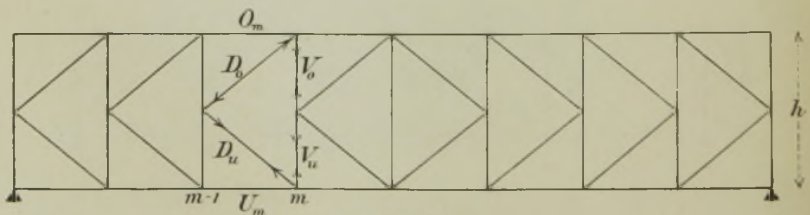


Fig. 508.

Eine verwandte Anordnung zeigt Fig. 508; sie ist in neuerer Zeit vielfach bei ebenen Windverstrebenungen zur Ausführung gekommen und vom Verfasser schon seit Jahren in seinen Übungen im Entwerfen

eiserner Brücken empfohlen worden. Für die Spannkraft  $D$  gilt hier ebenfalls die Formel

$$(\text{Zug}) D_u = + \frac{1}{2} \frac{Q_m}{\sin \varphi} = D_o (\text{Druck}).$$

In den Gurtungen entstehen die Spannkräfte

$$U_m = + \frac{M_{m-1}}{h}; \quad O_m = - \frac{M_{m-1}}{h}.$$

In den Vertikalen entsteht

$$V_o = D_o \sin \varphi = \frac{1}{2} Q_m$$

$$V_u = P_m - D_u \sin \varphi = P_m - \frac{1}{2} Q_m.$$

225. Eine umfangreiche Anwendung mehrteiliger Fachwerke mit kurzen Stab-  
längen zeigt das von mir im Jahre 1894 konstruierte, in Fig. 509 skizzierte **Bau-  
gerüst des Berliner Domes**. Es bestand aus Pfeilern, deren Stabwerk durch  
kräftigere Linien hervorgehoben wurde, und aus darauf ruhenden Sprengwerken.  
Die Stäbe  $s$  sollten nur den Anschluß leichter Maurer-Rüstungen und die Schaffung  
von Arbeitsböden ermöglichen. Seitenriß und Grundriß geben Auskunft über die  
Anordnung der Windverstrebrungen. Das Gewicht der großen Schiebebühne mit  
Elektromotor, Winde, Katze und Drahtseil betrug 14 400  $kg$ , die Nutzlast 15 000  $kg$ .  
Der von einem Stiele aufzunehmende größte Druck (einschließlich der Wirkungen  
des Eigengewichts und eines Winddruckes von 100  $kg$  f. d.  $qm$ ) war rund  $P = 25\,000$   $kg$ .  
Die größte Geschoßhöhe war  $h = 5,7$   $m$ . Wären die einzelnen Felder des Pfeilers  
in der gewöhnlichen Weise durch zwei sich kreuzende Diagonalen versteift worden,  
so wäre nach der bekannten *Eulerschen* Formel ein kleinstes Querschnitts-Trägheits-  
moment

$$J_{min} = \frac{n Ph^2}{\pi^2 E}$$

erforderlich gewesen, wo  $n$  den Sicherheitsgrad und  $E$  den Elastizitätsmodul be-  
deutet. Setzt man  $\pi^2 E = 1\,000\,000$   $kg/qcm$  und wählt  $n = 6$ , so erhält man

$$J_{min} = \frac{6 \cdot 25\,000 \cdot 570^2}{1\,000\,000} = 48\,735 \text{ cm}^4.$$

Infolge der Halbierung der freien Längen der Stirnwand geht dieser Wert  
herab auf

$$J_{min} = \frac{48\,735}{4} = \text{rd. } 12\,200 \text{ cm}^4,$$

und es erwiesen sich daher zwei Hölzer von 13  $cm \times 18$   $cm$  Stärke mit

$$J_{min} = \frac{2 \cdot 13 \cdot 18^3}{12} = 12\,640 \text{ cm}^4$$

als vollkommen sicher.

Zur Schätzung der durch Halbierung der freien Längen erzielten Holzersparnis  
genügt folgende kurze Überslagsrechnung. Sind  $l_1$  und  $l_2$  die Längen zweier  
gleich stark auf Knicken beanspruchten Stäbe,  $F_1$  und  $F_2$  die Inhalte,  $J_1$  und  $J_2$   
die kleinsten Trägheitsmomente ihrer Querschnitte, und sind die beiden Querschnitte  
einander ähnlich, so verhält sich

$$F_1 : F_2 = \sqrt{J_1} : \sqrt{J_2} = l_1 : l_2,$$

und man findet daher für  $l_1 = \frac{1}{2} l_2$  das Verhältnis  $F_1 = \frac{1}{2} F_2$ .

Der Materialverbrauch ist deshalb für die erste Anordnung nur halb so groß wie für die zweite. In Wirklichkeit ändert sich natürlich diese Zahl etwas, wegen der gebotenen Anpassung an die im Handel vorkommenden Holzstärken; dafür tritt aber noch der Umstand hinzu, daß sehr starke Hölzer — wie sie hier für eine freie Länge von 5,7<sup>m</sup> erforderlich gewesen wären — teurer sind, wie solche mittlerer Abmessungen. Ich hebe noch hervor, daß bei der Domrüstung an einer

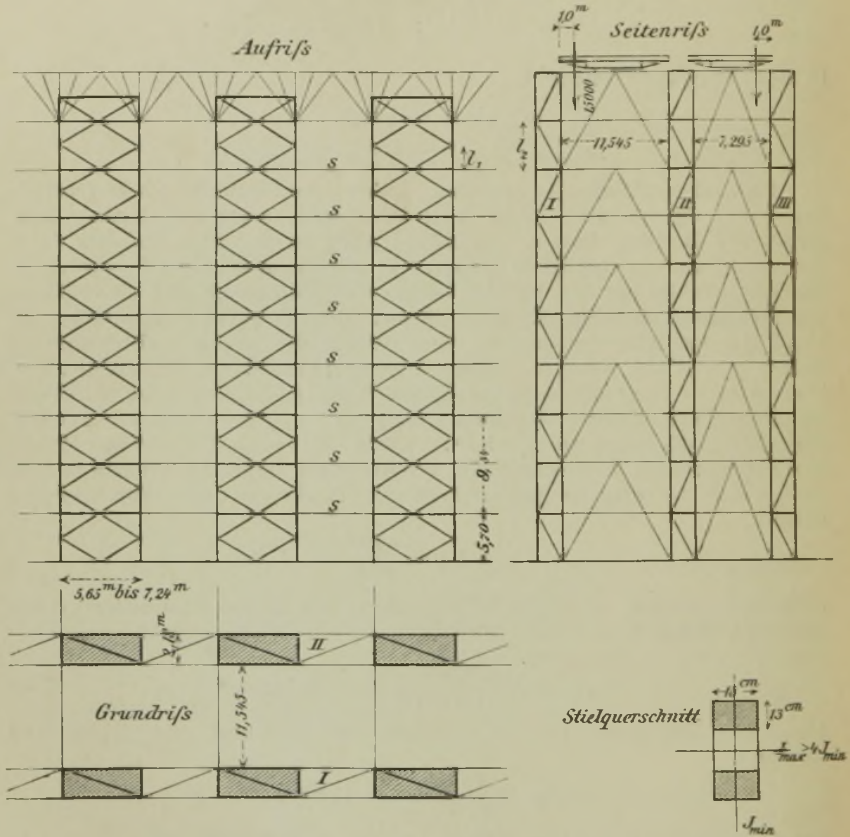


Fig. 509.

Stelle auch eine größere Spannweite mit *Hoveschen* Trägern (d. h. Parallelträger mit hölzernen Gurtungen, hölzernen gedrückten Diagonalen und eisernen gezogenen Vertikalen) überbrückt worden ist und schließe diese kurze Mitteilung mit dem Rate, große Baugerüste auch für Hochbauten stets nach den im Brückenbau geltenden Grundsätzen zu entwerfen. Ob man nun eine sogenannte Gerüstbrücke (wie die in Fig. 509 dargestellte) baut, oder ob man Träger mit größeren Spannweiten verwendet, muß von Fall zu Fall entschieden werden.

**226. Unsymmetrisches zweiteiliges Netzwerk, Fahrbahn unten.** Die Figuren 510 und 511 zeigen die Ermittlung der Einflußlinien



für  $D_1$  und  $O_5$ . Das Fachwerk stimmt mit dem in Fig. 509 als Pfeiler verwendeten überein.

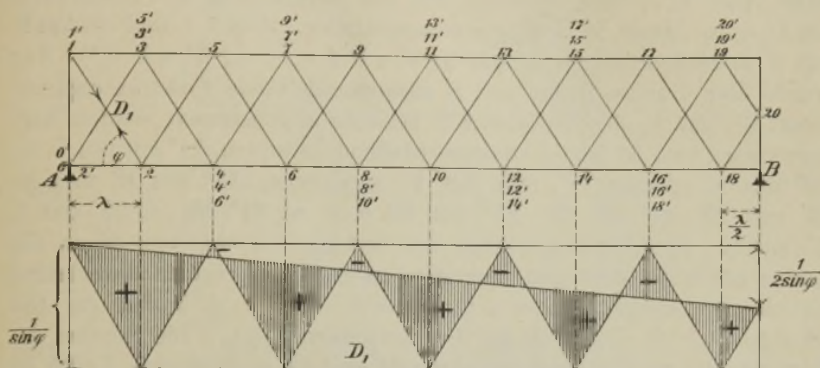


Fig. 510.

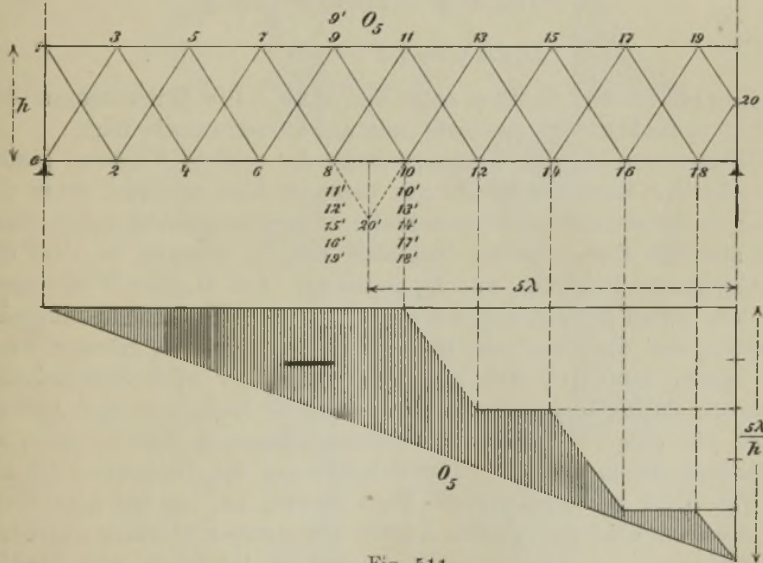


Fig. 511.

227. Unsymmetrisches vierteiliges Netzwerk. Fig. 512. Die Streben bilden einen zusammenhängenden Stabzug, der in einem Endknoten des linken Ständers beginnt und in dem anderen Endknoten

endigt; das Netzwerk ist statisch bestimmt (vergl. Seite 452). Der Träger besitzt 14 ganze und ein halbes Feld; seine Stützweite ist  $29^m$ , seine Höhe  $4^m$ . Wir beginnen mit der Ermittlung der Einflußlinie für  $D_1 \sin \varphi$ , lassen  $A'$  mit  $A$  zusammenfallen,  $1'$  mit  $1$  und finden  $2'$  mit  $2$  zusammenfallend,  $3'$  mit  $3$ ,  $4'$  mit  $4$  u. s. w.,  $8'$  mit  $8$ .) Nun wurde dem Punkte 9 der mit 8 zusammenfallende Geschwindigkeitspunkt  $9'$ , der in der Geraden 8 9 beliebig angenommen werden darf, zugewiesen und  $10'$  mit 7 zusammenfallend gefunden,  $11'$  mit 6 u. s. w.,  $16'$  mit 1. Punkt  $17'$  fällt mit 17 zusammen,  $18'$  mit 18 u. s. w.  $23'$  mit 23,  $24'$  mit 23,  $25'$  mit 22 u. s. w.  $31'$  mit  $A$ ,  $32'$  mit 1,  $B'$  mit 8. Den Knotenpunkten der unteren Gurtung, in denen alle Lasten (auch die ständigen) angreifen mögen, entsprechen abwechselnd die Geschwindigkeiten  $c = \lambda$  und  $c = 0$ . Punkt  $A$  besitzt die Geschwindigkeit 0, Punkt  $B$  die Geschwindigkeit  $\frac{1}{2} \lambda$ . Die Summe der Momente der in den Knotenpunkten 31 und 32 angreifenden Kräfte  $D_1$  in Bezug auf die zugehörigen Geschwindigkeitspunkte  $31'$  und  $32'$  ist  $-2D_1 \lambda \sin \varphi$ , und es ergibt sich daher für jede, in einem der Knotenpunkte (1), (3), (5), . . . . .\*\*) angreifende Last die Gleichung

$$-2D_1 \lambda \sin \varphi + P\lambda - B \frac{\lambda}{2} = 0,$$

woraus

$$D_1 \sin \varphi = \frac{1}{2} P - \frac{1}{4} B.$$

Die Einflußlinie für  $D_1 \sin \varphi$  zeigt Fig. 512b. Die Untersuchung der übrigen Spannkkräfte  $D$  geschieht nun am kürzesten wie folgt.

Greifen nur in den Knotenpunkten der unteren Gurtung Lasten an, so ist der Knotenpunkt 32 nur dann im Gleichgewicht, wenn die beiden in 32 angreifenden Spannkkräfte  $D$  entgegengesetzt gleich sind; wird also die linkssteigende Diagonale mit  $D_1$  gezogen, so wird die rechtssteigende Diagonale mit  $D_1$  gedrückt. Auf dieselbe Weise kann man nun durch Betrachtung des Gleichgewichts des Knotenpunktes 16 schließen, daß die Diagonale 16 — 15 ebenfalls mit  $D_1$  gezogen wird. Wir setzen nun fest, daß *die Stabkraft  $D$  für eine linkssteigende Diagonale positiv angenommen wird, wenn sie Zugspannungen hervorbringt, für eine rechtssteigende Diagonale hingegen positiv, wenn sie Druckspannungen erzeugt.* Die Bezeichnung der Diagonalen ist aus der Fig. 512a zu ersehen; die Pfeile deuten an, in welchem Sinne die positiven Kräfte  $D$  an den Knoten der unteren Gurtung angreifen. Mit Ausnahme von  $D_2$  kommt jede Spannkraft  $D$  zweimal vor. Greifen in den Knoten (1), (2), (3), . . . . . der unteren Gurtung die Lasten  $P_1, P_2, P_3, \dots$  an, so muß sein:

\*) In Fig. 512a sind die Knotenpunkte in der Reihenfolge nummeriert worden, in welcher die Geschwindigkeiten am zweckmäßigsten bestimmt werden.

\*\*) So wollen wir die Angriffsstellen der Lasten fortan bezeichnen, siehe Fig. 512b.





$$(I) \left\{ \begin{array}{l} D_4 \sin \varphi = D_1 \sin \varphi - P_1 \\ D_8 \sin \varphi = D_4 \sin \varphi - P_5 \\ D_{12} \sin \varphi = D_8 \sin \varphi - P_9 \\ D_{15} \sin \varphi = D_{12} \sin \varphi - P_{13} \\ D_{11} \sin \varphi = D_{15} \sin \varphi + P_{12} \\ D_7 \sin \varphi = D_{11} \sin \varphi + P_8 \\ D_3 \sin \varphi = D_7 \sin \varphi + P_4 \\ D_6 \sin \varphi = D_1 \sin \varphi - P_3 \\ D_{10} \sin \varphi = D_6 \sin \varphi - P_7 \\ D_{14} \sin \varphi = D_{10} \sin \varphi - P_{11} \\ D_{13} \sin \varphi = D_{14} \sin \varphi + P_{14} \\ D_9 \sin \varphi = D_{13} \sin \varphi + P_{10} \\ D_5 \sin \varphi = D_9 \sin \varphi + P_6 \\ D_2 \sin \varphi = D_5 \sin \varphi + P_2. \end{array} \right.$$

Ist der Knotenpunkt (1) unbelastet, so ist  $D_4 \sin \varphi = D_1 \sin \varphi$ . Die Ordinaten für diese beiden Werte unterscheiden sich also nur an der Stelle (1) voneinander und zwar um die Lasteinheit  $P$ . Man kann also in der durch die vorstehenden Gleichungen bestimmten Reihenfolge aus der  $D_1 \sin \varphi$ -Linie schrittweise die Einflußlinien für  $D_4 \sin \varphi$ ,  $D_8 \sin \varphi, \dots$  folgern. Dabei empfiehlt es sich, um Bruchziffern zu vermeiden, die Rechnung für  $P = 29$  (weil  $l = 29 \frac{\lambda}{2}$  ist) durchzuführen. Die Ergebnisse sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt worden. Die Ordinate, in welcher eine Linie von der vorhergehenden Linie abweicht, wurde durch Unterstreichung hervorgehoben; man beachte, daß  $D_6 \sin \varphi$  wieder aus  $D_1 \sin \varphi$  gefolgt wird.

Knotenpunkt														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$D_1 \sin \varphi$	+ 14	- 1	+ 13	- 2	+ 12	- 3	+ 11	- 4	+ 10	- 5	+ 9	- 6	+ 8	- 7
$D_4 \sin \varphi$	- 15	- 1	+ 13	- 2	+ 12	- 3	+ 11	- 4	+ 10	- 5	+ 9	- 6	+ 8	- 7
$D_8 \sin \varphi$	- 15	- 1	+ 13	- 2	- 17	- 3	+ 11	- 4	+ 10	- 5	+ 9	- 6	+ 8	- 7
$D_{12} \sin \varphi$	- 15	- 1	+ 13	- 2	- 17	- 3	+ 11	- 4	- 19	- 5	+ 9	- 6	+ 8	- 7
$D_{16} \sin \varphi$	- 15	- 1	+ 13	- 2	- 17	- 3	+ 11	- 4	- 19	- 5	+ 9	- 6	- 21	- 7
$D_{11} \sin \varphi$	- 15	- 1	+ 13	- 2	- 17	- 3	+ 11	- 4	- 19	- 5	+ 9	+ 23	- 21	- 7
$D_7 \sin \varphi$	- 15	- 1	+ 13	- 2	- 17	- 3	+ 11	+ 25	- 19	- 5	+ 9	+ 23	- 21	- 7
$D_3 \sin \varphi$	- 15	- 1	+ 13	+ 27	- 17	- 3	+ 11	+ 25	- 19	- 5	+ 9	+ 23	- 21	- 7
$D_6 \sin \varphi$	+ 14	- 1	- 16	- 2	+ 12	- 3	+ 11	- 4	+ 10	- 5	+ 9	- 6	+ 8	- 7
$D_{10} \sin \varphi$	+ 14	- 1	- 16	- 2	+ 12	- 3	- 18	- 4	+ 10	- 5	+ 9	- 6	+ 8	- 7
$D_{14} \sin \varphi$	+ 14	- 1	- 16	- 2	+ 12	- 3	- 18	- 4	+ 10	- 5	- 20	- 6	+ 8	- 7
$D_{13} \sin \varphi$	+ 14	- 1	- 16	- 2	+ 12	- 3	- 18	- 4	+ 10	- 5	- 20	- 6	+ 8	+ 22
$D_9 \sin \varphi$	+ 14	- 1	- 16	- 2	+ 12	- 3	- 18	- 4	+ 10	+ 24	- 20	- 6	+ 8	+ 22
$D_5 \sin \varphi$	+ 14	- 1	- 16	- 2	+ 12	+ 26	- 18	- 4	+ 10	+ 24	- 20	- 6	+ 8	+ 22
$D_2 \sin \varphi$	+ 14	+ 28	- 16	- 2	+ 12	+ 26	- 18	- 4	+ 10	+ 24	- 20	- 6	+ 8	+ 22

Fig. 512c enthält sämtliche  $D \sin \varphi$ -Linien; sie ist bestimmt durch 4 parallele Geraden; die Einflußfläche für die am stärksten beanspruchte Diagonale, d. i.  $D_2$ , ist durch Schraffierung hervorgehoben worden.

Aus den  $D$ -Linien findet man die  $U$ -Linien mit Hilfe der Gleichungen

$$(II) \quad \begin{cases} U_1 = D_3 \cos \varphi \\ U_2 = U_1 + D_1 \cos \varphi + D_4 \cos \varphi \\ U_3 = U_2 + D_2 \cos \varphi + D_5 \cos \varphi \text{ u. s. w.} \end{cases}$$

Im vorliegenden Falle ist  $\varphi = 45^\circ$ , also  $\cos \varphi = \sin \varphi$ . Sonst würde man an Stelle der  $U$ -Linien die  $U \operatorname{tg} \varphi$ -Linien bestimmen, damit man die Ordinaten der  $D \sin \varphi$ -Linien ohne weiteres benutzen kann. Führt man dann die ganze Rechnung für  $P = 29$  aus, so hat man es mit einfachen Zahlenwerten zu tun. Ganz ebenso werden die  $O \operatorname{tg} \varphi$ -Linien ermittelt.

Handelt es sich um eine Eisenbahnbrücke, so wird man bei der Berechnung der größten Spannkraft  $D$  die Radstände und gegenseitigen Abstände der Lokomotiven und Tender mit den Feldweiten tunlichst so in Einklang bringen, daß möglichst hohe  $D$ -Werte erzielt werden. Im vorliegenden Falle empfiehlt sich z. B. für die Berechnung von  ${}_{max}D_{2p}$  die in Fig. 512 dargestellte Zusanordnung; sie liefert

$${}_{max}D_{2p} \sin \varphi = 101'.$$

Die ständige Belastung sei  $g = 1,6 \frac{t}{m}$  Gleis, also  $g\lambda = 3,2'$  für einen Knotenpunkt. Die Summe der Ordinaten der Einflußlinie ist, für  $P = 29$ ,

$$14 + 28 + 12 + 26 + 10 + 24 + 8 + \frac{3}{4} 22^*) \\ - (16 + 2 + 18 + 4 + 20 + 6) = 72,5;$$

folglich ergibt sich

$$D_{2p} \sin \varphi = 72,5 \frac{3,2}{29} = 8,0'^{**})$$

Im ganzen entsteht also

$${}_{max}D_2 \sin \varphi = 109' \text{ und } {}_{max}D_2 = 154'.$$

Mit diesem Werte wollen wir die Spannkraft  ${}_{max}D$  im  $4^m$  langen Endfelde eines einteiligen Parallelträgers von  $29^m$  Spannweite vergleichen. Es ergibt sich (Fig. 513) für einen Zug mit den früher festgesetzten Radständen

$$D_p \sin \varphi = A_p - \frac{16 \cdot 1,2}{4} = 102,2 - 4,8 = 97' \\ D_g \sin \varphi = gx'' = 16 \cdot 12,5 = 20' \\ {}_{max}D \sin \varphi = 117' \text{ und } D = 165'.$$

\*) Knotenpunkt 14 ist nur mit  $\frac{3}{4} g\lambda$  belastet.

\*\*\*) Werden sämtliche  $D_g$  gesucht, so berechne man einen Wert  $D_g \sin \varphi$  mit Hilfe der Ordinaten der Einflußlinie, die übrigen aber mittels der Gleichungen I.

Die Diagonale  $D_2$  des vierteiligen Fachwerks erfährt also im vorliegenden Falle nahezu dieselbe Beanspruchung wie die eines einseitigen Systems, ein Ergebnis, welches hinreicht, um den Träger in Fig. 512 als unvorteilhaft zu kennzeichnen. Ein weiterer, für die Ausführung sehr ins Gewicht fallender Nachteil dieses Fachwerks ist seine unsymmetrische Anordnung. Würde man nur in den Knotenpunkten (1), (3), (5) . . . Querträger anordnen, so würde  $D_2$  wesentlich kleiner werden, weil dann die großen Ordinaten der  $D$ -Linie fortfallen.

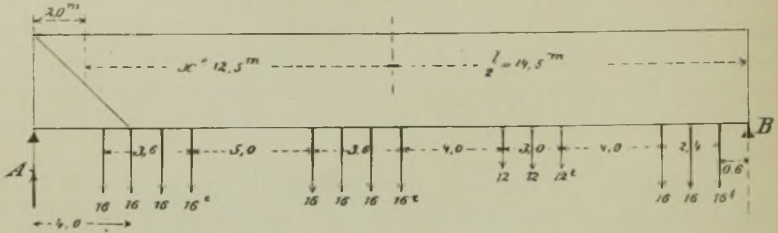


Fig. 513.

228. Symmetrisches vierteiliges Netzwerk mit einem halben Ständer in der Mitte. Fig. 514.\*) Der Träger besitzt 14 ganze und 2 halbe Felder; seine Stützweite ist 30m, seine Höhe 4m. Die Fahrbahn liege an der unteren Gurtung. Wir beginnen mit der Darstellung der Einflußlinie für  $D_2 \sin \varphi$ , nehmen die schraffierte Scheibe ruhend an, weisen dem Knotenpunkte 1 den Punkt 1' zu und bestimmen der Reihe nach zu den Punkten 2, 3, 4, 5, . . . . . 33 die Punkte 2', 3', 4', 5', . . . 33'.

Die Lote von den Punkten 27' und 32' auf die in den Knoten 27 und 32 angreifenden Kräfte  $D_2$  sind  $2\lambda \sin \varphi$  und  $\lambda \sin \varphi$ . Punkt 33 besitzt die Geschwindigkeit  $1,5\lambda$ , Punkt 12 die Geschwindigkeit  $2\lambda$ , Knoten 23 die Geschwindigkeit  $c = 1,5\lambda$ . Man erhält also für eine in 23 angreifende Last:

$D_2 (2\lambda \sin \varphi - \lambda \sin \varphi) + A 1,5\lambda - B 2,0\lambda - P 1,5\lambda = 0$   
und hieraus

$$D_2 \sin \varphi = -1,5 A + 2,0 B + 1,5 P.$$

Die Gerade  $A''B''$  ist Einflußlinie für den Ausdruck  $(-1,5 A + 2,0 B)$ ; trägt man von dieser Geraden aus auf den Senkrechten durch die Knotenpunkte der unteren Gurtung die entsprechenden  $\frac{c}{\lambda}$

\*) Man vergleiche die Untersuchung des in Fig. 429 dargestellten Trägers auf Seite 446 u. f. und bilde zur Übung die Determinante  $D$ . Auch empfiehlt sich Untersuchung des Falles eines von Gurtung zu Gurtung reichenden Mittelständers, der mit den ihn kreuzenden Diagonalen nicht verbunden ist.



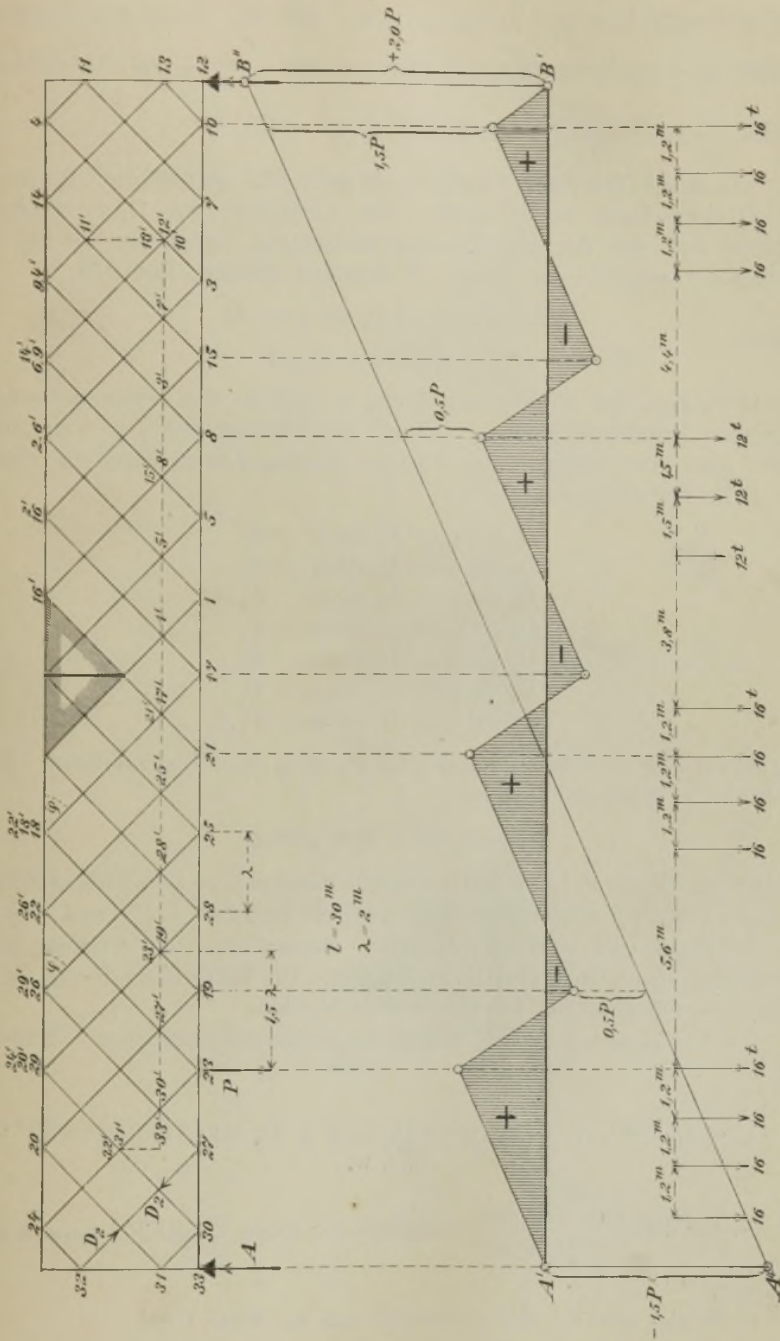


Fig. 514.

auf, so erhält man die  $D_2 \sin \varphi$ -Linie. Für die ersten drei Knotenpunkte ist  $\frac{c}{\lambda} = +1,5$ , für die nächsten drei  $\frac{c}{\lambda} = +0,5$ , für die folgenden  $\frac{c}{\lambda} = -0,5$ , für die letzten  $\frac{c}{\lambda} = -1,5$ .

Die dritte Zeile der Tabelle I auf Seite 524 enthält die Ordinaten der  $D_2 \sin \varphi$ -Linie für  $P=30$ . Die Ordinaten der  $D_1 \sin \varphi$ -Linie ergeben sich aus der Gleichgewichtsbedingung, denen die am linken Endständer angreifenden Kräfte  $D$  genügen müssen, Fig. 515,

$$\begin{aligned} \text{woraus} \quad & 2 D_1 \sin \varphi + 2 D_2 \sin \varphi = A, \\ & (D_1 + D_2) \sin \varphi = \frac{1}{2} A. \end{aligned}$$

Die Ordinaten der Einflußlinie für  $\frac{1}{2} A$  sind in der ersten Zeile der folgenden Tabelle angegeben. Nach Berechnung der  $D_1 \sin \varphi$ -Linie findet man die Ordinaten der übrigen  $D \sin \varphi$ -Linien der Reihe nach mit Hilfe der Gleichungen:\*)

$$\begin{aligned} D_3 \sin \varphi &= D_1 \sin \varphi - P_1 \\ D_4 \sin \varphi &= D_2 \sin \varphi - P_2 \\ D_5 \sin \varphi &= D_2 \sin \varphi - P_3 \\ D_6 \sin \varphi &= D_1 \sin \varphi - P_4 \\ D_7 \sin \varphi &= D_3 \sin \varphi - P_5 \\ D_8 \sin \varphi &= D_4 \sin \varphi - P_6 \\ D_9 \sin \varphi &= D_5 \sin \varphi - P_7. \end{aligned}$$

Die Einflußlinien für  $D'_8 \sin \varphi$  und  $D_8 \sin \varphi$  sind Spiegelbilder. Die  $V$ -Linie ist bestimmt durch

$$V = D_8 \sin \varphi + D'_8 \sin \varphi;$$

sie besitzt, wie die  $V$ -Linie des in Fig. 505 dargestellten zweiteiligen Fachwerks, in den Knotenpunkten abwechselnd Ordinaten  $+\frac{1}{2} P$  und  $-\frac{1}{2} P$ .

In Fig. 515 sind alle  $D$ -Linien zusammengestellt worden; ihre Eckpunkte liegen in 6 parallelen Geraden. Die Einflußlinie für  $D_7 \sin \varphi$  ist durch Schraffierung hervorgehoben worden.

Tabelle II auf Seite 524 enthält die Ordinaten sämtlicher  $U$ -Linien. Es ist

$$\begin{aligned} U_1 &= 0 \\ U_2 &= D_1 \cos \varphi + D_3 \cos \varphi = D_1 \sin \varphi + D_3 \sin \varphi \quad \text{weil } \varphi = 45^\circ \text{**) } \\ &\quad \text{u. s. w.} \end{aligned}$$

\*) Für die  $\frac{\text{linkssteigenden}}{\text{rechtssteigenden}}$  Diagonalen der linken Trägerhälfte bedeutet ein positives  $D$  einen Zug.  
negatives

\*\*) Ist dies nicht der Fall, so berechne man die Werte  $U \operatorname{tg} \varphi$ .

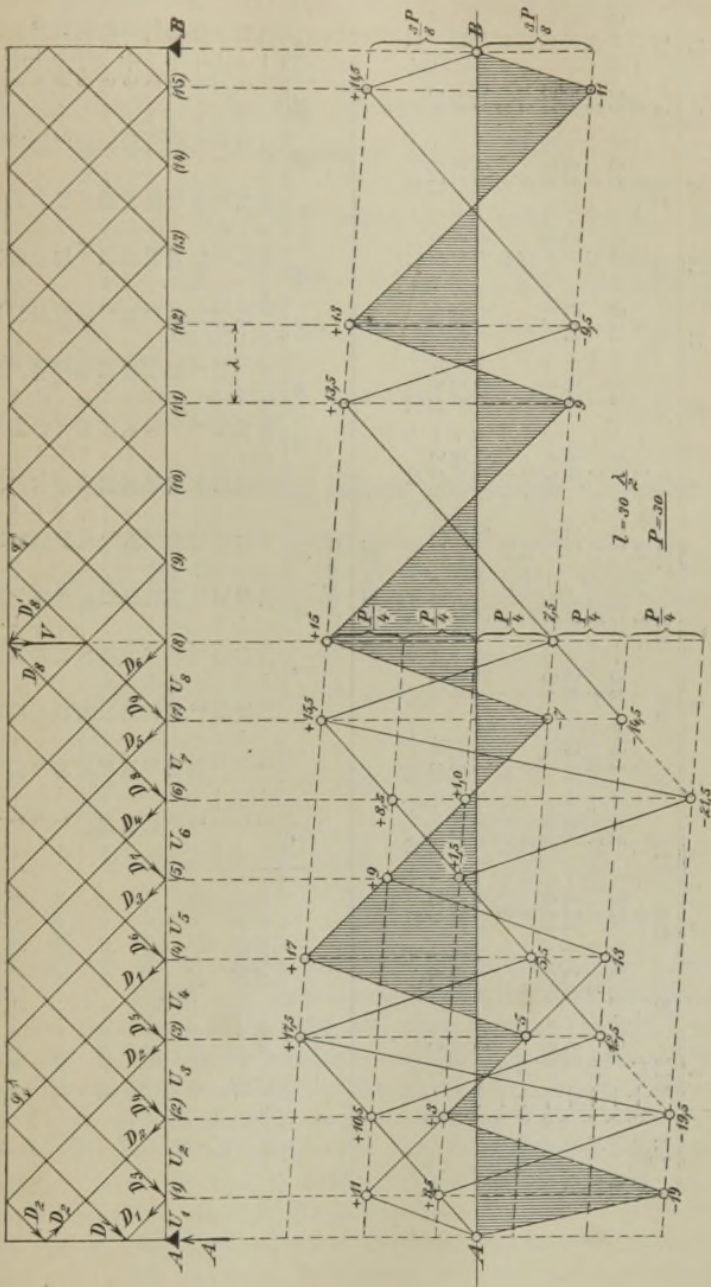


Fig. 515.



Tabelle I.

	Knotenpunkt														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\frac{1}{4}A$	14,5	13,5	12,5	11,5	10,5	9,5	8,5	7,5	6,5	5,5	4,5	3,5	2,5	1,5	0,5
$D_1 \sin \varphi$	11	3	5	17	9	1	7	15	7	1	9	13	5	3	11
$D_2 \sin \varphi$	3,5	10,5	17,5	5,5	1,5	8,5	15,5	7,5	0,5	6,5	13,5	9,5	2,5	4,5	11,5
$D_3 \sin \varphi$	19	3	5	17	9	1	7	15	7	1	9	13	5	3	11
$D_4 \sin \varphi$	3,5	19,5	17,5	5,5	1,5	8,5	15,5	7,5	0,5	6,5	13,5	9,5	2,5	4,5	11,5
$D_5 \sin \varphi$	3,5	10,5	12,5	5,5	1,5	8,5	15,5	7,5	0,5	6,5	13,5	9,5	2,5	4,5	11,5
$D_6 \sin \varphi$	11	3	5	13	9	1	7	15	7	1	9	13	5	3	11
$D_7 \sin \varphi$	19	3	5	17	21	1	7	15	7	1	9	13	5	3	11
$D_8 \sin \varphi$	3,5	19,5	17,5	5,5	1,5	21,5	15,5	7,5	0,5	6,5	13,5	9,5	2,5	4,5	11,5
$D_0 \sin \varphi$	3,5	10,5	12,5	5,5	1,5	8,5	14,5	7,5	0,5	6,5	13,5	9,5	2,5	4,5	11,5
$D_8 \sin \varphi$	11,5	4,5	2,5	9,5	13,5	6,5	0,5	7,5	15,5	21,5	1,5	5,5	17,5	19,5	3,5
$V$	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15

Tabelle II.

	Knotenpunkt														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$U_2 = D_3 \sin \alpha + D_3 \sin \alpha =$	8	6	10	34	18	2	14	30	14	2	18	26	10	6	22
$D_2 \sin \alpha + D_4 \sin \alpha =$	7	9	85	11	3	17	31	15	1	13	27	19	5	9	23
$U_3 =$	1	3	25	23	21	19	17	15	13	11	9	7	5	3	1
$D_3 \sin \alpha + D_6 \sin \alpha =$	7	21	5	11	3	17	31	15	1	13	27	19	5	9	23
$U_4 =$	6	18	30	12	24	36	48	0	12	24	36	12	0	12	24
$D_1 \sin \alpha + D_8 \sin \alpha =$	22	6	10	4	18	2	14	30	14	2	18	26	10	6	22
$U_5 =$	28	24	20	16	42	38	34	30	26	22	18	14	10	6	2
$D_4 \sin \alpha + D_7 \sin \alpha =$	38	6	10	34	12	2	14	30	14	2	18	26	10	6	22
$U_6 =$	10	30	10	50	30	40	20	60	40	20	0	40	20	0	20
$D_4 \sin \alpha + D_8 \sin \alpha =$	7	39	35	11	3	18	31	15	1,0	13	27	19	5	9	23
$U_7 =$	3	9	45	39	33	27	51	45	39	33	27	21	15	9	3
$D_6 \sin \alpha + D_0 \sin \alpha =$	7	21	25	11	3	17	31	15	1	13	27	19	5	9	23
$U_8 =$	4	12	20	28	36	44	52	30	38	46	54	2	10	18	26

Den größten Wert  $D$  erhielten wir für die Diagonale  $D_2$ . Die in Figur 514 angegebene Zugstellung erzeugt

$${}_{max}D_{2g} = + 64,7'.$$

Infolge der ständigen Belastung, welche für die Knoten (1) und (15) je  $\frac{3g\lambda}{4}$  und für die übrigen  $g\lambda$  beträgt, entsteht

$$\begin{aligned} D_{2g} \sin \varphi &= \frac{g\lambda}{30} \left[ \frac{3}{4} \cdot 3,5 + 10,5 + 17,5 + 1,5 + 8,5 + 15,5 + 6,5 \right. \\ &\quad \left. + 13,5 + 4,5 + \frac{3}{4} 11,5 - 5,5 - 7,5 - 0,5 - 9,5 - 2,5 \right] \\ &= g\lambda \cdot 2,125 = 1,6 \cdot 2,0 \cdot 2,125 = 6,8', \end{aligned}$$

mithin im ganzen

$${}_{max}D_2 \sin \varphi = 64,7 + 6,8 = 71,5' \text{ und } D_2 = 101'.$$

**c. Angenäherte Berechnung statisch unbestimmter Fachwerke.**

229. Allgemeines. Die Berechnung statisch unbestimmter Fachwerke erfolgt in der Regel in der Weise, daß das  $t$ -teilige Fachwerk in  $t$  einteilige statisch bestimmte Fachwerke zerlegt und jedes Teil-

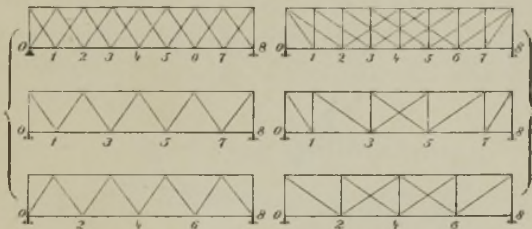


Fig. 516.

Fig. 517.

system nur für die in seinen Knotenpunkten angreifenden Lasten berechnet wird. Gehört ein Knotenpunkt mehreren Teilsystemen an, so wird seine Belastung gleichmäßig auf diese Systeme verteilt. Sodann werden die Teilfachwerke wieder vereinigt und die Spannkkräfte zusammenfallender Stäbe und Stababschnitte addiert. In den Figuren 516 und 517 sind die Zerlegungen eines zweiteiligen Strebenfachwerks und eines zweiteiligen Ständerfachwerks mit Gegendiagonalen dargestellt worden; es wird in beiden Fällen angenommen, daß auf das obere Teilsystem nur die in den Knotenpunkten 1, 3, 5, 7 angreifenden Lasten von Einfluß sind, während die Belastungen der Punkte 2, 4, 6 lediglich von dem unteren Teilsystem auf die Auflager übertragen werden.

Auch die bislang ausgeführten mehrteiligen Netzwerke mit Diagonalzügen, die von beliebigen Punkten der Endstände ausgehen, also nicht von Gurtung zu Gurtung führen, Fig. 518, sind nach dem Verfahren der Teilsysteme berechnet worden. Sie sind statisch unbestimmt, weil sie biegungsfeste Endstände, welche die Rolle starrer Scheiben spielen, besitzen. In Figur 518 ist die Zerlegung eines derartigen vierteiligen Systems angegeben worden; alle vier Teilsysteme

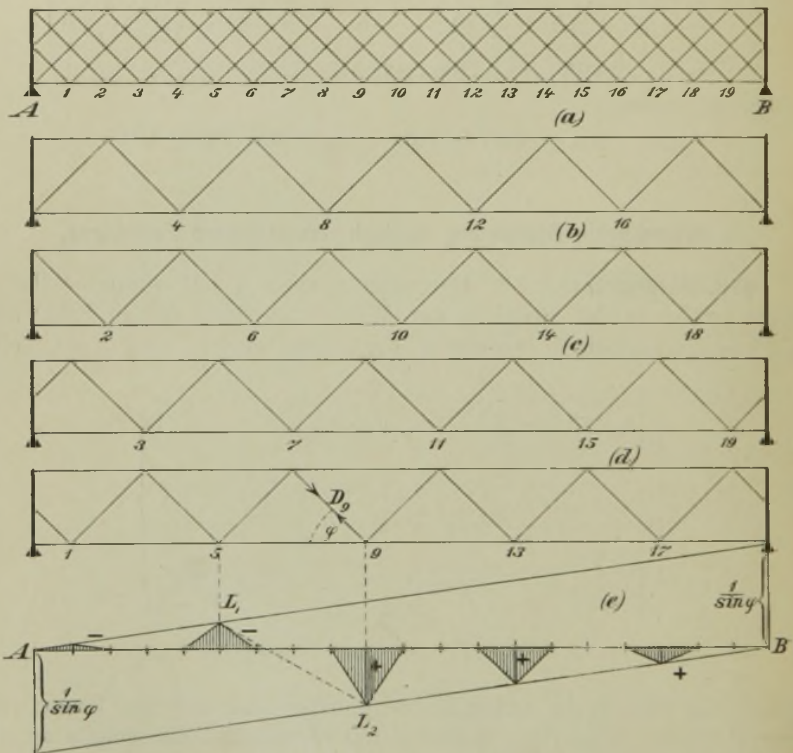


Fig. 518.

sind statisch bestimmt. Hat man die Spannkraften der an den Endständen angreifenden Stäbe berechnet, so kann man für jeden Querschnitt des Endständers die Längskraft  $N$ , die Querkraft  $Q$  und das Angriffsmoment  $\mathcal{M}$  angeben und die im Querschnitte auftretenden Spannungen  $\sigma$  und  $\tau$  (s. Abschnitt II) ermitteln. Statt biegungsfester Endstände kann man auch gegliederte Scheiben (Fig. 520 und 522) anordnen.



Fig. 518e zeigt die Einflußfläche für die Spannkraft  $D_9$  in einer Diagonale für den Fall untenliegender Fahrbahn. Sie wird aus der Einflußfläche  $AL_1L_2B$  für die Diagonale eines einteiligen Parallelträgers mittels der (zuerst von *Fränkel* gemachten) Annahme gefolgert, daß nur die in den Knotenpunkten 1, 5, 9, 13, 17 angreifenden Lasten einen Einfluß auf  $D$  ausüben, während die übrigen Knotenlasten von den drei anderen Teilfachwerken aufgenommen werden.

Bei gebrochenen Gurtungen führt die Zerlegung in Teilsysteme zu Gurtstäben, die einen oder mehrere Knicke aufweisen und durch gerade Stäbe ersetzt werden müssen. So werden z. B. in Fig. 519 bei

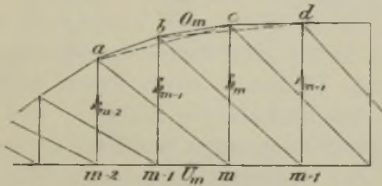


Fig. 519.

Betrachtung der beiden Teilfachwerke behufs Berechnung der Füllungsstäbe an Stelle der Gurtungen  $abc$  und  $bcd$  die Stäbe  $ac$  und  $bd$  eingeführt. Die Spannkräfte  $O$  und  $U$  drückt man hingegen zweckmäßiger wie folgt durch die für die ungeteilte Belastung berechneten größten Angriffsmomente  $\mathfrak{M}$  aus. Man setze für den Stab  $bc$  als Glied des Teilfachwerks  $bd$  ( $m + 1$ )

$$O_m = -\frac{1}{2} \frac{\mathfrak{M}_{m+1}}{h_{m+1}} \sec \beta_m$$

und für denselben Stab als Glied des Teilfachwerks  $acm$

$$O_m = -\frac{1}{2} \frac{\mathfrak{M}_m}{h_m} \sec \beta_m$$

im ganzen also

$$O_m = -\frac{1}{2} \left( \frac{\mathfrak{M}_m}{h_m} + \frac{\mathfrak{M}_{m+1}}{h_{m+1}} \right) \sec \beta_m,$$

und hierin verstehe man unter  $\beta_m$  den Neigungswinkel des Stabes  $bc$ . Ganz ebenso findet man für den wagerechten Stab  $U_m$

$$U_m = +\frac{1}{2} \left( \frac{\mathfrak{M}_{m-1}}{h_{m-1}} + \frac{\mathfrak{M}_{m-2}}{h_{m-2}} \right).$$

Eine genauere Berechnung der statisch unbestimmten Fachwerke enthält der zweite Band dieses Buches; mit ihren Ergebnissen stimmen die auf Grund der Zerlegung in einfache Fachwerke gefundenen Spannkraften in vielen Fällen ganz gut überein. Dies gilt besonders von den

für die Praxis besonders wichtigen mehrteiligen Parallelträgern. Bei gebrochenen Gurtungen weichen dagegen die genauen Werte der Spannkkräfte in den Füllungsstäben von den Ergebnissen des Verfahrens der Zerlegung oft so erheblich ab, daß dem einer schärferen Untersuchung nicht gewachsenen Ingenieur nur geraten werden kann, von derartigen Fachwerken Abstand zu nehmen.

Wir wollen nun die Darstellung der Einflußlinien nach dem Verfahren der Zerlegung in einteilige Fachwerke an einem Zahlenbeispiele erläutern.

**230. Vierteiliges Netzwerk von 30<sup>m</sup> Spannweite mit steifen Endscheiben.** Fig. 520. Fahrbahn unten.

1. *Diagonalen.* Hinsichtlich der Vorzeichen setzen wir wieder fest, daß ein positives  $D$  für eine linkssteigende Diagonale einen Zug, für eine rechtssteigende Diagonale einen Druck bedeutet.

Fig. 520a zeigt die Einflußlinie für  $D_3$ . Der Strebenzug, dem  $D_3$  angehört, ist kräftig ausgezogen worden; er enthält die Knotenpunkte 3, 7, 11, 15 der belasteten Gurtung. Die Knotenpunkte 1 und 15 gehören eigentlich jedem der vier Teilsysteme an, da diese 4 Systeme ohne die starren Endscheiben beweglich wären; wir wollen aber, der Einfachheit wegen, den Knotenpunkt 15 nur zu dem Teilsystem rechnen, welchem  $D_3$  angehört und den Knotenpunkt 1 nur zu dem Systeme, welches die Diagonale  $D_5$  enthält. Die Einflüsse der Belastungen dieser beiden Knotenpunkte sind unwesentlich. In Fig. 520a ist ferner der Lastenzug angegeben worden, welcher möglichst große Werte  $D$  erzeugt. Man erkennt, daß dreiachsige Lokomotiven im vorliegenden Falle größere Spannkkräfte erzeugen als vierachsige. Bezeichnet  $\eta$  die Höhe eines der Dreiecke, aus denen die Einflußfläche besteht, so ist der Einfluß einer Lokomotive

$$(I) \quad D = 16 \eta \left( 1 + 2 \frac{0,8}{2,0} \right) = 28,8 \eta$$

und der eines Tenders

$$(II) \quad D = 12 \eta \frac{2 \cdot 1,05 + 0,8}{2,0} = 17,4 \eta.$$

Berechnen wir den unwesentlichen Einfluß der Belastung des Knotenpunktes 15 der Kürze wegen ebenfalls mittels Formel (I), so erhalten wir für  $D_3$  den Wert

$$\begin{aligned} \text{max } D_{3p} &= \left( \frac{25}{30} \cdot \frac{1}{\sin \varphi} + \frac{17}{30} \cdot \frac{1}{\sin \varphi} + \frac{1}{30} \cdot \frac{1}{\sin \varphi} \right) 28,8 \\ &\quad + \frac{9}{30} \cdot \frac{1}{\sin \varphi} \cdot 17,4, \quad \text{d. i.} \end{aligned}$$

$$\text{max } D_{3p} = 1,36 (25 + 17 + 1) + 0,82 \cdot 9 = 65,9'.$$

In der folgenden Tabelle sind die Ordinaten aller  $D$ -Linien (und in der ersten und letzten Zeile auch die der  $A$ -Linie und  $B$ -Linie)

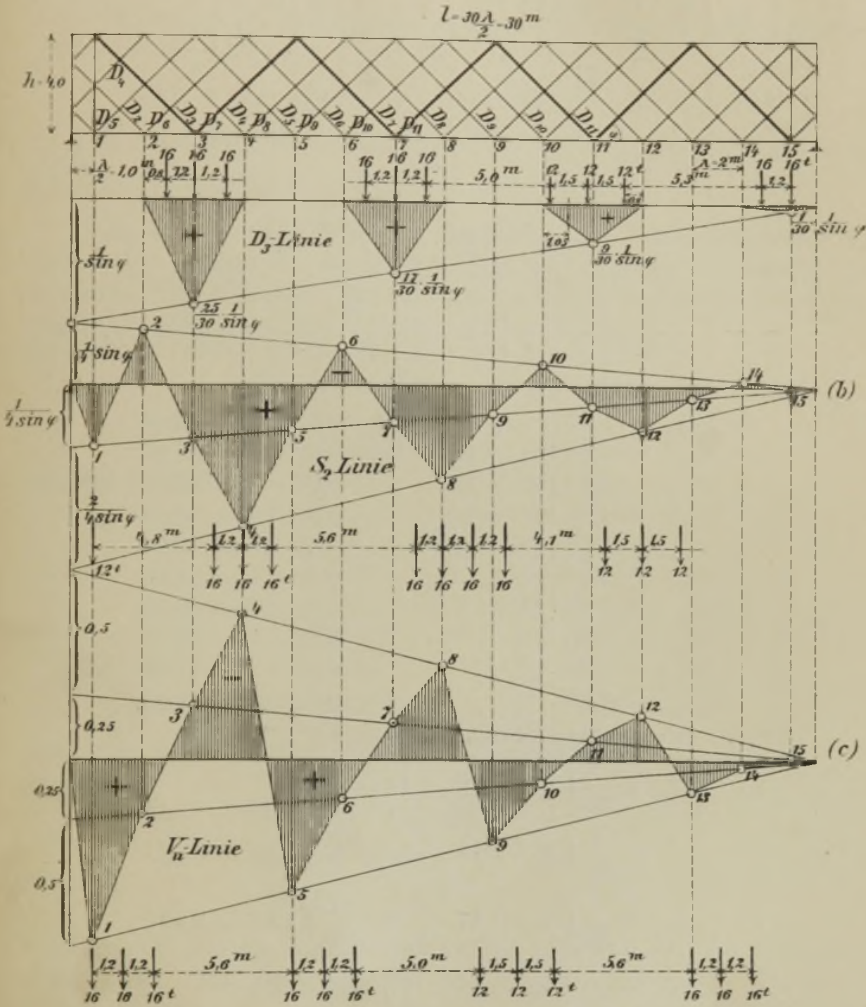


Fig. 520.

für  $P = 30$  zusammengestellt worden. Die Zahlen für die mit Lokomotiven belasteten Knotenpunkte wurden durch Unterstreichung hervorgehoben.



Knotenpunkt	Knotenpunkt														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A	29	27	25	23	21	19	17	15	13	11	9	7	5	3	1
$D_2 \sin \varphi$		27				19				11				3	
$D_3 \sin \varphi$			25				17				9				1
$D_4 \sin \varphi$				23				15				7			
$D_5 \sin \varphi$	-1				21				13				5		
$D_6 \sin \varphi$		-3				19				11				3	
$D_7 \sin \varphi$			-5				17				9				1
$D_8 \sin \varphi$				-7				15				7			
$D_9 \sin \varphi$	-1				-9				13				5		
$D_{10} \sin \varphi$		-3				-11				11				3	
$D_{11} \sin \varphi$			-5				-13				9				1
B	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29

Aus diesen Zahlen folgt:

$$\begin{aligned}
 {}_{max} D_{2p} &= 1,36 (27 + 19 + 3) + 0,82 \cdot 11 = 75,66' \\
 {}_{\quad} D_{3p} &= 1,36 (25 + 17 + 1) + 0,82 \cdot 9 = 65,86 \\
 {}_{\quad} D_{4p} &= 1,36 (23 + 15) + 0,82 \cdot 7 = 57,42 \\
 {}_{\quad} D_{5p} &= 1,36 (21 + 13) + 0,82 \cdot 5 = 50,34 \\
 {}_{\quad} D_{6p} &= 1,36 (19 + 3) + 0,82 \cdot 11 = 38,94 \\
 {}_{\quad} D_{7p} &= 1,36 (17 + 1) + 0,82 \cdot 9 = 31,86 \\
 {}_{\quad} D_{8p} &= 1,36 \cdot 15 + 0,82 \cdot 7 = 26,14 \\
 {}_{\quad} D_{9p} &= 1,36 \cdot 13 + 0,82 \cdot 5 = 21,78 \\
 {}_{\quad} D_{10p} &= 1,36 \cdot 11 + 0,82 \cdot 3 = 17,42 \\
 {}_{\quad} D_{11p} &= 1,36 \cdot 9 + 0,82 \cdot 1 = 13,06.
 \end{aligned}$$

Infolge der ständigen Belastung  $g = 1,6 \frac{t}{m}$  entsteht

$$\begin{aligned}
 D_{2g} &= \frac{1}{30} (27 + 19 + 11 + 3) \frac{g\lambda}{\sin \varphi} \\
 &= \frac{1}{30} (27 + 19 + 11 + 3) 4,52 = 9,04' \\
 D_{3g} &= \frac{1}{30} (25 + 17 + 9 + \frac{3}{4}) 4,52 = 7,80^{t*}) \\
 D_{4g} &= \frac{1}{30} (23 + 15 + 7) 4,52 = 6,78' \\
 D_{5g} &= \frac{1}{30} (21 + 13 + 5 - \frac{3}{4}) 4,52 = 5,76^{t*}) \\
 D_{6g} &= D_{2g} - \frac{g\lambda}{\sin \varphi} = D_{2g} - 4,52
 \end{aligned}$$

\*) Die Knotenpunkte 1 und 15 sind nur mit je  $\frac{3}{4} g\lambda$  belastet.

$$\begin{array}{l|l} D_{6g} = 9,04 - 4,52 = 4,52' & D_{9g} = 5,76 - 4,52 = 1,25' \\ D_{7g} = 7,80 - 4,52 = 3,28' & D_{10g} = 4,52 - 4,52 = 0 \\ D_{8g} = 6,78 - 4,52 = 2,26' & D_{11g} = 3,28 - 4,52 = -1,24' \end{array}$$

Im ganzen erhält man also infolge Verkehrslast und Eigengewicht für  $_{max}D_2$  bis  $_{max}D_{11}$  der Reihe nach die Werte:

$$_{max}D = 85', 74', 64', 56', 43', 35', 28', 23', 17', 12'.$$

Auf dieselbe Weise findet man für  $_{min}D = _{min}D_p + D_g$  die Werte  $_{min}D = 9^{**}, 8^{**}, 7^{**}, 4', 0', -4', -7', -12', -17', -23'$ .

Um nun die Spannkkräfte in den Stäben der linken Endscheibe zu berechnen, betrachten wir den in Fig. 521 dargestellten Belastungszustand dieser Scheibe. Mit den aus der Figur ersichtlichen Bezeichnungen ergeben sich die Gleichgewichtsbedingungen

$$\begin{aligned} S_1 + S_2 &= \frac{A^{**})}{2 \sin \varphi} \\ S_1 - S_2 &= D_2 - D_4. \end{aligned}$$

aus denen folgt:

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{A}{4 \sin \varphi} + \frac{D_2 - D_4}{2} \\ S_2 &= \frac{A}{4 \sin \varphi} - \frac{D_2 - D_4}{2}. \end{aligned}$$

Da nun

$$A = P_1 + (D_3 + D_4 + D_2 + D_5) \sin \varphi$$

sein muß, so erhält man schließlich die Formeln

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{P_1}{4 \sin \varphi} + \frac{1}{4} [D_3 - D_4 + 3D_2 + D_5] \\ S_2 &= \frac{P_1}{4 \sin \varphi} + \frac{1}{4} [D_3 + 3D_4 - D_2 + D_5], \end{aligned}$$

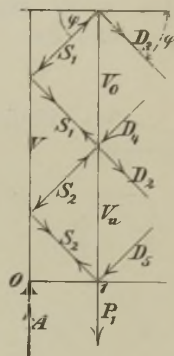


Fig. 521.

welche die Herleitung der Einflußlinien für  $S_1$  und  $S_2$  aus den  $D$ -Linien ermöglichen. Fig. 520b zeigt die  $S_2$ -Linie, deren Konstruktion einer weiteren Erläuterung wohl nicht bedarf. Man braucht nur die Strebzüge, denen die Diagonalen  $D_3, D_4, D_2$  und  $D_5$  angehören, zu verfolgen und festzustellen, welche Knotenpunkte der unteren Gurtung in ihnen liegen.

\*) Die ersten drei Werte sind nur von  $g$  abhängig.

\*\*\*)  $A$  bedeutet den um die Belastung des Knotenpunktes 0 verminderten Stützenwiderstand.

Nach Berechnung von  $S_1$  findet man

$$V = + 2 S_1 \sin \varphi \text{ (als Druck positiv),}$$

während die in der üblichen Weise als Zugkräfte positiv angenommenen Stabkräfte  $V_o$  und  $V_u$  den Gleichgewichtsbedingungen genügen müssen

$$V_o = S_1 \sin \varphi - D_3 \sin \varphi$$

$$V_u = P_1 - S_2 \sin \varphi + D_5 \sin \varphi.$$

Man findet

$$V_o = \frac{1}{4} P_1 + \frac{1}{4} [3 D_2 - 3 D_3 - D_4 + D_5] \sin \varphi$$

$$V_u = \frac{3}{4} P_1 + \frac{1}{4} [D_2 - D_3 - 3 D_4 + 3 D_5] \sin \varphi.$$

Die Einflußlinie für  $V_u$  ist in Figur 520c dargestellt worden. Man erhält für die in den Figuren 520b und 520c gezeichneten Laststellungen

$$\max S_{2g} = 59' \text{ und } \max V_{ug} = 44'.$$

Den Einfluß des Eigengewichts berechnet man mit Hilfe der Formeln

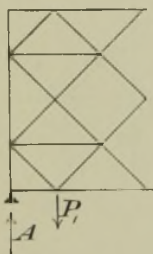


Fig. 522.

$$S_{2g} = \frac{A_g}{4 \sin \varphi} \frac{D_{3g} - D_{4g}}{2}$$

$$= \frac{1}{4 \sin \varphi} \left( \frac{gl}{2} - \frac{g\lambda}{4} \right) - \frac{1}{2} (D_{2g} - D_{4g}) = 7,07'$$

$$V_{ug} = P_{1g} - (S_{2g} - D_{5g}) \sin \varphi$$

$$= \frac{3}{4} g\lambda - (S_{2g} - D_{5g}) \sin \varphi = 1,01'.$$

Im ganzen entsteht also  $\max S_2 = 66'$  und  $\max V_u = 45'$ .

Wir empfehlen dem Leser, in gleicher Weise auch die Spannkraft der in der Fig. 522 dargestellten Anordnung der Endscheibe zu untersuchen und wenden uns jetzt zu den Gurtstäben. Wir beschränken uns darauf, die Konstruktion der Einflußlinie für  $U_8$  zu beschreiben.

Zunächst fassen wir  $U_8$  als Stab des in der Figur 523 kräftig ausgezogenen Teilsystems auf, dem die unteren Knotenpunkte 1, 5, 9 und 13 angehören. Es folgt dann aus dem Momente  $M_{(7)}$  in Bezug auf den oberen Knotenpunkt (7) für  $U_8$  der Wert

$$U = + \frac{M_{(7)}}{h};$$





Brücken veranlaßt. Es stellte sich bei dieser Untersuchung heraus, daß es vor allen Dingen darauf ankommt, geringe Spannkraften in den Diagonalen zu erhalten, damit die Durchmesser der auf Biegung beanspruchten Gelenkbolzen möglichst klein ausfallen. Ein *vierteiliges* Fachwerk, wie das in No. 227 behandelte, in welchem sich in einer Diagonale eine Spannkraft entwickeln kann, die beinahe ebenso groß ist wie bei einem *einteiligen* System, ist für zerlegbare Brücken natürlich ganz ungeeignet, taugt aber auch sonst nicht als Brückenträger. Schon der Umstand, daß dieses Fachwerk unsymmetrisch ist, spricht gegen seine Verwendung. Die vorgeführten Aufgaben beweisen, daß man mit symmetrischen Anordnungen bessere statische Ergebnisse erzielen kann und dann noch den Vorteil zweier gleichartigen Trägerhälften gewinnt. Aus gleichen Gründen verdient auch das Fachwerk in Fig. 504 den Vorzug vor dem Fachwerk in Fig. 510. Die kleinsten Strebenkräfte erhielt ich für statisch unbestimmte mehrteilige Fachwerke mit steifen Endscheiben; sie wurden sowohl nach dem genäherten als auch nach dem in Band II mitgeteilten genaueren Verfahren berechnet. Auch das Fachwerk mit steifen Endscheiben und Mittelvertikale (Vereinigung der in den Figuren 520 und 514 dargestellten Anordnungen) erwies sich als vorteilhaft und leicht zu berechnen.

Die Warnung vor dem in No. 227 untersuchten Fachwerk spreche ich hier hauptsächlich deshalb aus, weil in einem Aufsätze über „*Statisch bestimmte mehrteilige* Wandgliederung der Gitterträger“\*) von Prof. Mehrtens gerade für diese Anordnung — allerdings ohne Durchführung einer eingehenderen Untersuchung — eingetreten wird. Herr Mehrtens nennt ein Strebenfachwerk, „*das einen einzigen in sich geschlossenen Stabzug bildet, der von einem Ständer-Eckknoten ausgeht und in einem anderen Ständer-Eckknoten endigt*“, ein *endloses Netzwerk* — eine Benennung, die mir, beiläufig bemerkt, wenig passend erscheinen will, für einen Stabzug, von dem doch ausdrücklich behauptet wird, daß ein mit dem Anfangspunkte nicht zusammenfallender *Endpunkt* vorhanden ist; er weist (in der Literatur wohl zum ersten Male) darauf hin, daß diese Fachwerke statisch bestimmt sind, beschreibt auch ein einfaches rechnerisches Verfahren zur Ermittlung der Einflußlinien für die Strebenkräfte und beendet dann seine Abhandlung mit dem Satze: „Vergleicht man schließlich die gebräuchlichen mehrteiligen Netzwerke mit den erörterten endlosen statisch bestimmten Netzwerken, so finden sich die mehr als zweiteiligen unbestimmten Anordnungen insofern im Nachteil, als sie stets  $(t - 2) \frac{1}{2}$ \*\*)

Viereckzüge\*\*\*) enthalten, die beweglich sind und für die Lastübertragung nicht taugen. Dagegen verteilen die statisch bestimmten mehrteiligen Netzwerke alle Lasten gleichmäßig über das gesamte Stabwerk der Wand, der Gurte und der Ständer.“

Alle in diesem Satze aufgestellten Behauptungen sind unrichtig. Herr Mehrtens übersieht, daß die *gebräuchlichen* mehrteiligen Netzwerke steife Endständer besitzen. Zweitens haben wir in Fig. 442 (Seite 453) ein mehrteiliges Fachwerk ohne steifen Endständer kennen gelernt, welches statisch unbestimmt ist und trotzdem keinen „beweglichen Viereckzug“ besitzt. Ganz unverständlich

\*) Zeitschrift für Architektur und Ingenieurwesen, Wochen-Ausgabe, 1898, Seite 329.

\*\*)  $t$  ist die Teilungsziffer.

\*\*\*) So nennt Herr Mehrtens die geschlossenen Stabzüge, wie 0123 . . 8 in Fig. 441. Seite 453.

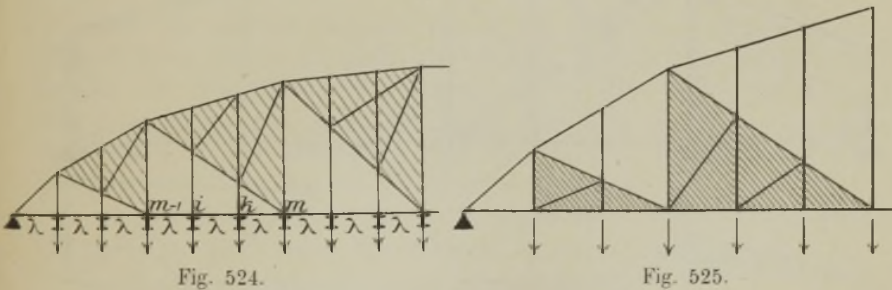
ist aber der Schluß des beanstandeten Satzes; denn wie hat man sich die *gleichmäßige* Verteilung einer Last über *sämtliche* Stäbe des Systems vorzustellen? Oder soll das etwa heißen, es sei zulässig, für einen senkrecht durch den Balken geführten Schnitt die Querkraft zu bilden und gleichmäßig über die vom Schnitte getroffenen Diagonalen zu verteilen? — ein Verfahren, das bei mehrteiligen Netzwerken mit steifen Endständern öfters benutzt wird, das aber bei einem Netzwerk der hier besprochenen Art (Endständern mit Gelenken in jedem Knotenpunkte) zu ganz unrichtigen Ergebnissen führen kann. Das beweist die in No. 227 durchgeführte Berechnung der Spannkraft  $D_2$ , welche nicht  $D_2 = \frac{Q}{4 \sin \varphi}$ , sondern beinahe  $D_2 = \frac{Q}{\sin \varphi}$  lieferte.

Im zweiten Bande ist die in Nr. 227 durchgeführte statische Untersuchung durch die Darstellung der Formänderungen des fraglichen Fachwerks ergänzt worden. Das Ergebnis ist für das *Mehrtenssche* System außerordentlich ungünstig und beweist, wie voreilig es ist, neue Trägerarten ohne eingehende wissenschaftliche Untersuchung und konstruktive Durcharbeitung zu empfehlen.

§ 54.

**Balkenbrücken von großer Spannweite.**

231. Bei weitgespannten Balkenbrücken kommt man mit den in den Abschnitten IX und X untersuchten einfachen Dreieckssystemen nicht aus. Auch mehrteilige Fachwerke sind konstruktiver Schwierigkeiten wegen nicht zu empfehlen. Zweckmäßiger sind die in den Figuren 524 und 525 dargestellten Tragwerke.



Der Träger in Fig. 524 besteht aus einem weitmaschigen Dreieckssystem, dessen Feldweiten zwischen dem einfachen und dreifachen Querträgerabstände wechselt. Die innerhalb der Felder des Dreiecknetzes liegenden Querträger  $i$ ,  $k$  hängen an den durch Schraffierung kenntlich gemachten gegliederten Scheiben, für deren Ausbildung Fig. 524 zwei verschiedene Anordnungen (denen sich leicht noch andere anreihen ließen) angibt.



Fig. 525 zeigt einen ähnlichen Träger. Die schraffierten Scheiben liegen unterhalb der Diagonalen des Hauptnetzes. Die Zwischenvertikalen reichen bis zur oberen Gurtung, sie erhöhen deren Knickfestigkeit und übertragen die in ihren oberen Endpunkten angreifenden Bestandteile der ständigen Belastung auf die Scheiben.

Die allgemeine Berechnungsweise derartiger Fachwerke ist im § 28 (No. 137) erledigt worden. Die gegliederten Scheiben übertragen die in den Zwischenknoten angreifenden Lasten  $\dots P_i, P_k \dots$  nach Fig. 527 auf die Knotenpunkte  $\dots (m-1), m \dots$  des Hauptnetzes. Man

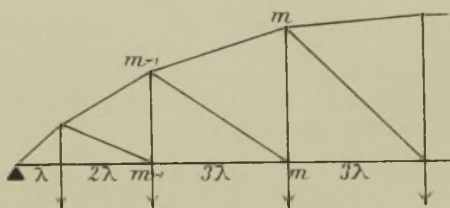


Fig. 526.

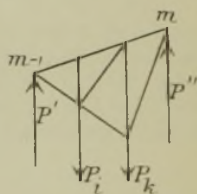


Fig. 527.

berechnet die in den Stäben der Scheiben durch die Kräfte  $P_i, P_k, P', P''$  hervorgerufenen Spannkkräfte, ermittelt sodann die Spannkkräfte in den Stäben des Hauptnetzes, und zählt schließlich für diejenigen Stäbe, welche sowohl einer Scheibe als auch dem Hauptsystem angehören, die aus beiden Untersuchungen sich ergebenden Bean-

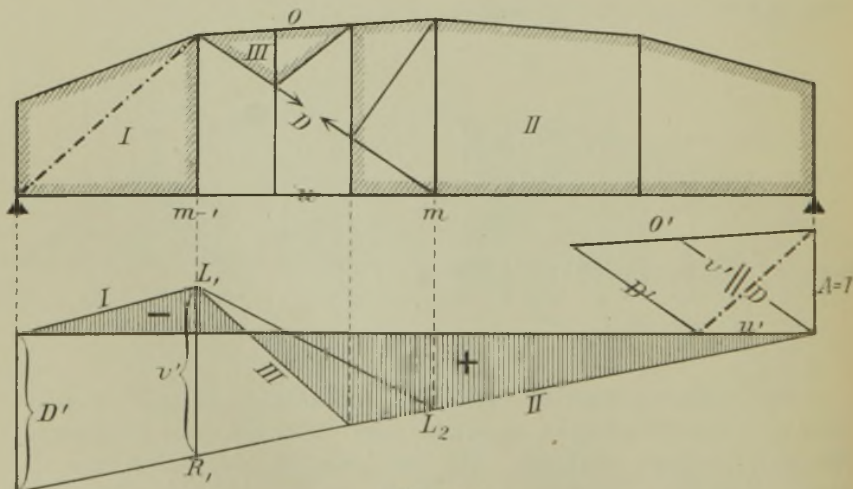


Fig. 528.

spruchungen zusammen. Diese Betrachtung führt auch ohne weiteres zu den Einflußlinien. Als Beispiel haben wir in Fig. 528 die Ein-

flußlinie für die Spannkraft  $D$  im Mittelstück der Diagonale eines dreiteiligen Feldes dargestellt. Zuerst wurde die Diagonale nur als Bestandteil des Hauptnetzes ins Auge gefaßt. Die Einflußlinie  $AL_1L_2B$  für  $D$  ist dann bestimmt durch die Spannkraft  $D'$  infolge  $A = 1$  und durch die Bedingung, daß der senkrechte Abstand  $\overline{L_1R_1}$  der Geraden  $I$  und  $II$  an der Stelle  $m-1$  gleich der durch Zerlegung von 1 nach den Richtungen von  $O$  und  $D$  gewonnenen Strecke  $v'$  ist. Nun wurde  $D$  als die Spannkraft der unteren Gurtung der in das Hauptnetz eingesetzten Scheibe betrachtet und ihre Einflußlinie in Fig. 529 mit Hilfe der Spannkraft ( $D'$ ) infolge  $A' = 1$  ermittelt, wobei sich  $(D') = v'$  ergab. Schließlich wurden die beiden Einflußflächen zu der in Fig. 528 durch Schraffierung gekennzeichneten  $D$ -Fläche vereinigt.

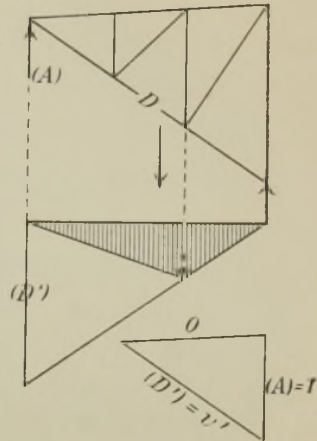


Fig. 529.

Noch schneller findet man die  $D$ -Fläche aus der Bedingung, daß den drei Scheiben  $I$ ,  $III$ ,  $II$  die drei Geraden  $I'$ ,  $III'$ ,  $II'$  entsprechen und die Linie  $II$  mit der  $D \cdot A$ -Linie übereinstimmt. Man muß dabei allerdings daran denken, daß es beim Ständerfachwerk gleichgültig ist, ob die Lasten an der unteren oder an der oberen Gurtung angreifen.

232. Als zweites Beispiel wählen wir eine etwas ausführlichere Untersuchung des in Fig. 530 dargestellten Trägers. Die Spannkraften in den drei Abschnitten der Diagonalen des  $m^{\text{ten}}$  Feldes bezeichnen wir, von unten nach oben, der Reihe nach mit  $D_m$ ,  $D_{m1}$ ,  $D_{m2}$ , die Spannkraften in den Gurtstäben mit  $O_m$ ,  $U_m$ , der Vertikalen mit  $V_m$ , der Diagonalen der Scheibe  $m$  ( $m-1$ ) mit  $Z_{m1}$ ,  $Z_{m2}$ .

Nach Führung des Schnittes  $I$  ergibt sich aus der Momentengleichung für den oberen Knotenpunkt  $m-1$  als Drehpunkt:

$$(1) \quad U_m = + \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}}$$

und aus der Momentengleichung für den unteren Knotenpunkt  $m$ :

$$(2) \quad O_m \cos \beta_m = - \frac{M_{m2}}{h_m},$$

wo  $M_{m2}$  das Moment der links vom Schnitte  $I$  angreifenden äußeren Kräfte in Bezug auf  $m$  bedeutet. Dieses Moment darf nicht mit  $M_m$

verwechselt werden. Für den in Fig. 530 angenommenen Belastungsfall ist

$$M_m = Ax_m - P_1 5\lambda - P_2 4\lambda - P_3 3\lambda - P_i 2\lambda - P_k \lambda$$

und

$$M_{m_2} = Ax_m - P_1 5\lambda - P_2 4\lambda - P_3 3\lambda = M_m + P_i 2\lambda + P_k \lambda.$$

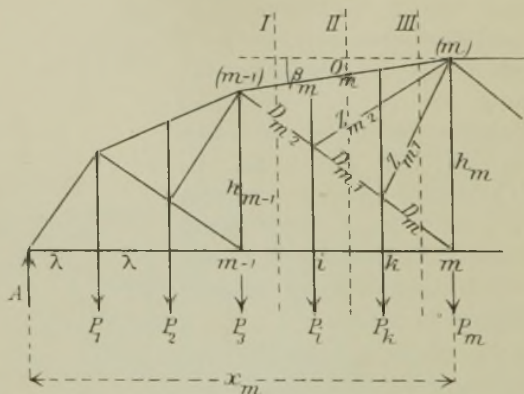


Fig. 530.

Die Lasten  $P_i$  und  $P_k$  liegen zwar links von  $m$ , aber nicht links vom Schnitt  $I$ . Fig. 531 enthält eine Gegenüberstellung der  $M_m$ -Fläche und  $M_{m_2}$ -Fläche. Der Einfluß der in  $i$  und  $k$  angreifenden Lasten auf  $M_{m_2}$  ist gleich  $Ax_m$ ; es ist also die mit  $x_m$  multiplizierte  $A$ -Linie von  $B$  bis  $i$  zu benutzen.

Für die Spannkraft  $D_{m_2}$  ergibt sich aus der Gleichgewichtsbedingung

$$D_{m_2} \cos \varphi_m + O_m \cos \beta_m + U_m = 0$$

der Wert

$$(3) \quad D_{m_2} \cos \varphi_m = \frac{M_{m_2}}{h_m} - \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}}.$$

Nun wird Schnitt  $II$  geführt und die Momentengleichung für den oberen Knotenpunkt  $m$  aufgestellt; sie lautet

$$(D_{m_1} \cos \varphi_m + U_m) h_m = M_{m_1},$$

wo  $M_{m_1}$  das auf  $m$  bezogene Moment der links von  $II$  angreifenden äußeren Kräfte (d. i. hier der Kräfte  $A$ ,  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ ,  $P_i$ ) bedeutet.

Man findet

$$(4) \quad D_{m_1} \cos \varphi_m = \frac{M_{m_1}}{h_m} - \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}}.$$



Führt man schließlich den Schnitt III, so erhält man aus der Momentengleichung für den oberen Knotenpunkt  $m$  für  $D_m$  die Formel

$$(5) \quad D_m \cos \varphi_m = \frac{M_m}{h_m} - \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}}.$$

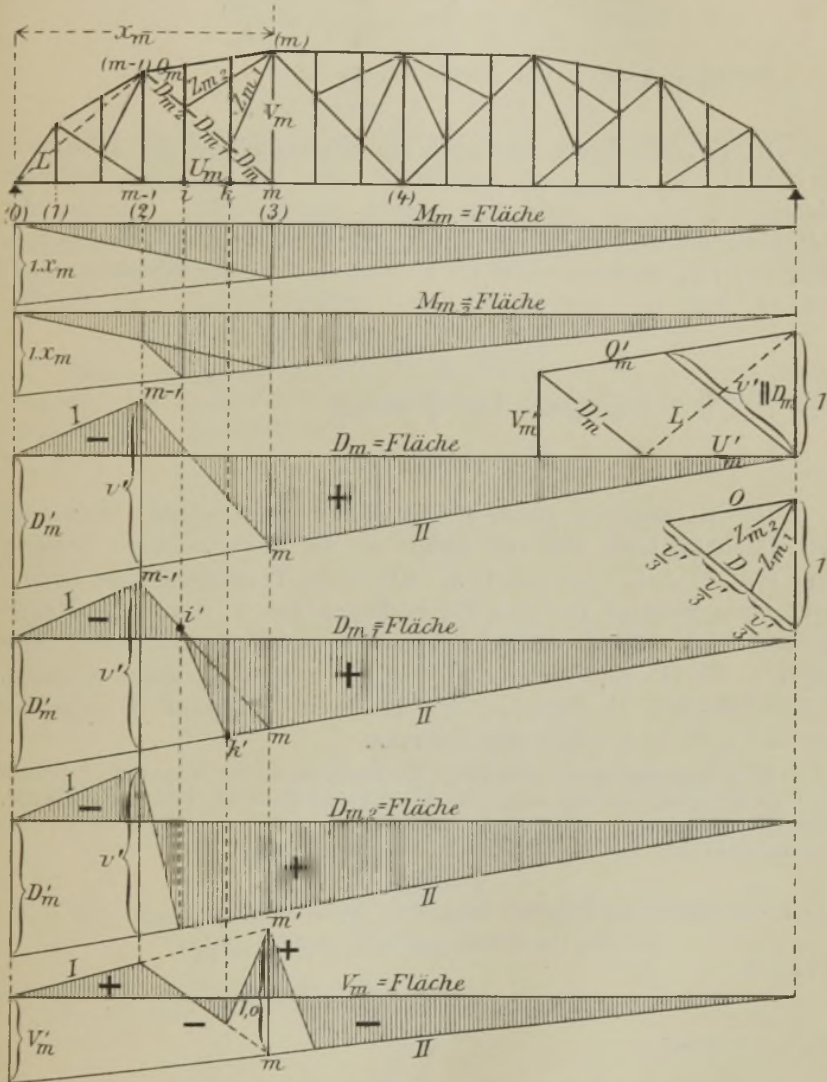


Fig. 531.

Für die Berechnung von  $D_m$  genügt also die Untersuchung des Hauptsystems.

Die Spannkkräfte  $Z_{m_2}$  und  $Z_{m_1}$  der Zwischendiagonalen gewinnt man durch Zerlegung der Knotenlasten  $P_i$  und  $P_k$  nach den Richtungen von  $D$  und  $Z$ . Bezeichnet man die Längen dieser Diagonalen mit  $x_{m_2}$  und  $x_{m_1}$ , so erhält man

$$(6) \quad x_{m_2} = P_i \frac{Z_{m_2}}{h_m}, \quad x_{m_1} = P_k \frac{Z_{m_1}}{h_m}.$$

Die Spannkraft in der  $m^{\text{ten}}$  Vertikale ist

$$(7) \quad V_m = -D_m \sin \varphi_m + P_m.$$

In Fig. 531 haben wir noch die *Einflußflächen* für die Spannkkräfte  $D_m$ ,  $D_{m_1}$ ,  $D_{m_2}$ ,  $V_m$  dargestellt. Die  $D_m$ -Linie ist bestimmt durch  $D'_m$  und  $v'$  (vergl. den Schluß von No. 231). Um aus der  $D_m$ -Linie die  $D_{m_1}$ -Linie und die  $D_{m_2}$ -Linie abzuleiten, betrachte man  $D_{m_1}$  und  $D_{m_2}$  als Spannkkräfte der unteren Gurtung der Scheibe  $(m-1)(m)m$ . Eine in  $i$  angreifende Last 1 erzeugt

$$D_{m_2} = \frac{2}{3} v', \quad D_{m_1} = 0,$$

und eine in  $k$  angreifende Last 1 erzeugt

$$D_{m-2} = D_{m_1} = \frac{1}{3} v'.$$

Die  $V_m$ -Linie ist durch die Gleichung (7) bestimmt. Man trägt die  $D_m \sin \varphi_m$ -Linie auf und ändert an der Stelle  $m$  deren Ordinate um  $mm' = +1$ . Der Punkt  $m'$  fällt in die Verlängerung der Linie  $I$ , was ohne weiteres aus den Eigenschaften der  $V_m$ -Linie des Hauptnetzes folgt. Man vergleiche Fig. 226 auf Seite 240; dort wird  $L_2 R_2 = v = 1$ , sobald der Stab  $CF_2$  eine lotrechte Lage annimmt. Die schraffierte  $V_m$ -Linie ist also durch die Spannkraft  $V'_m$  und die Strecke  $mm' = 1$  vollständig bestimmt.

**233. Zahlenbeispiel.** Eingleisige Eisenbahnbrücke mit Schwedler-Trägern von 150,3<sup>m</sup> Spannweite (Fig. 531). Anzahl der Felder gleich 18, Feldweite  $\lambda = 8,35^m$ . Das Hauptnetz besitzt zwei einfache, zwei doppelte und vier dreifache Felder. Das Eigengewicht darf man für die statische Berechnung setzen

$$g = 30 l + F,$$

wo  $F$  das Gewicht der Fahrbahn bedeutet.\*) Mit  $F = 1250 \text{ kg/m}$  ergibt sich

$$g = 30 \cdot 150 + 1250 = 5750 \text{ kg/m} = 5,75 \text{ t/m} \text{ Gleis,}$$

es ist also

$$g\lambda = 5,75 \cdot 8,35 = 48,0 \text{ t} \text{ und } \frac{g\lambda^2}{2} = 200 \text{ tm}.$$

Nach der Formel

$$M_{m,g} = \frac{g x_m (l - x_m)}{2}$$

erhält man für die Momente infolge des Eigengewichts die Werte

\*) Siehe die im Anhang gemachten Angaben über die Gewichte eiserner Brücken.





$r =$	4	5	6	7	8
$x_2 =$	25,05	25,05	25,05	25,05	25,05
$c_1 =$	7,50	9,00	10,50	12,00	13,50
$x_2 + c_1 =$	32,55	34,05	35,55	37,05	38,55
$c_1 =$	31,50	33,00	33,00	36,00	36,00
$a_n = x_2 + c_1 - c_1 =$	1,05	1,05	2,55	1,05	2,55
$n =$	15	16	16	17	17
$\mathfrak{P}_n =$	235	248	248	261	261
$\mathfrak{P}_n a_n =$	246,7	260,4	632,4	274,0	665,5
$\mathfrak{E}_n =$	3739,5	4092,0	4092,0	4836,0	4836,0
$\Sigma Pa =$	3986,2	4352,4	4724,4	5110,0	5501,5
$B_p \lambda = \frac{1}{18} \Sigma Pa =$	221	242	262	284	306
$15 B_p \lambda =$	3315	3630	3930	4260	4590
$\mathfrak{E}_r =$	234	318	427	562	723
$M_{2p} = 15 B_p \lambda - \mathfrak{E}_r =$	3081	3312	3502	3698	3867
$M_{2g} =$	7500	7500	7500	7500	7500
$M_2 =$	10581	10812	11002	11198	11367
$M_{3p} = 12 B_p \lambda =$	2652	2904	3144	3408	3672
$M_{3g} =$	12000	12000	12000	12000	12000
$M_3 =$	14652	14904	15144	15408	15672
$\frac{h_2}{h_3} = \frac{M_2}{M_3} =$	0,722	0,725	0,726	0,727	0,725

Es muß also mindestens sein  $h_2 : h_3 = 0,73$ . Auf dieselbe Weise findet man  $h_1 : h_2 = 0,44$ . Führt die erste Lokomotive vorwärts, so ergeben sich kleinere Werte  $h_{m-1} : h_m$ . Wir wählen:

$$\begin{aligned} h_3 &= h_4 = 24^m \\ h_2 &= 0,8 h_3 = 19,2^m \\ h_1 &= 0,5 h_2 = 9,6^m. *) \end{aligned}$$

**Berechnung von  $\max D_{3p}$ .** Der Eisenbahnzug fährt von  $B$  bis in das Feld 2 — 3 des Hauptnetzes vor. Die Achse  $P$ , liegt bei 3, Fig. 533a. Man erhält

$$h_m D_m \cos \varphi_m = M_m - M_{m-1} \frac{h_m}{h_{m-1}},$$

wo

$$\begin{aligned} M_m &= \frac{\Sigma P b}{l} x_m - \Sigma P' b', \\ M_{m-1} &= \frac{\Sigma P b}{l} x_{m-1}. \end{aligned}$$

\*) Der Verfasser hat gelegentlich der Bearbeitung eines größeren, für das Ausland bestimmten Brückenentwurfes vor kurzem den oben behandelten Träger und einen ähnlichen von 192,5<sup>m</sup> Spannweite vollständig durchkonstruiert und gefunden, daß für große Spannweiten Schwedlerträger (deren Diagonalen aber zweckmäßig steif ausgebildet werden) sehr vorteilhaft sind. Infolge der geringen Beanspruchungen der Füllungsstäbe ergeben sich auch einfache Knotenpunktverbindungen.

$\Sigma P'b' = \varepsilon_r$  bedeutet das statische Moment der im Felde  $(m-1) - m$  (das ist 2-3) liegenden Lasten bezogen auf den Knotenpunkt  $m=3$ . Rechnet man mit Achslasten und beachtet, daß die Brücke eingleisig ist, daß sich also die Belastung des Gleises auf zwei Hauptträger verteilt, so erhält man für die Diagonale eines Hauptträgers

$$2 h_m D_m \cos \varphi_m = \varepsilon_d \Sigma P b - \Sigma P' b',$$

wo

$$\varepsilon_d = \frac{x_m}{l} - \frac{x_{m-1}}{l} \cdot \frac{h_m}{h_{m-1}}.$$

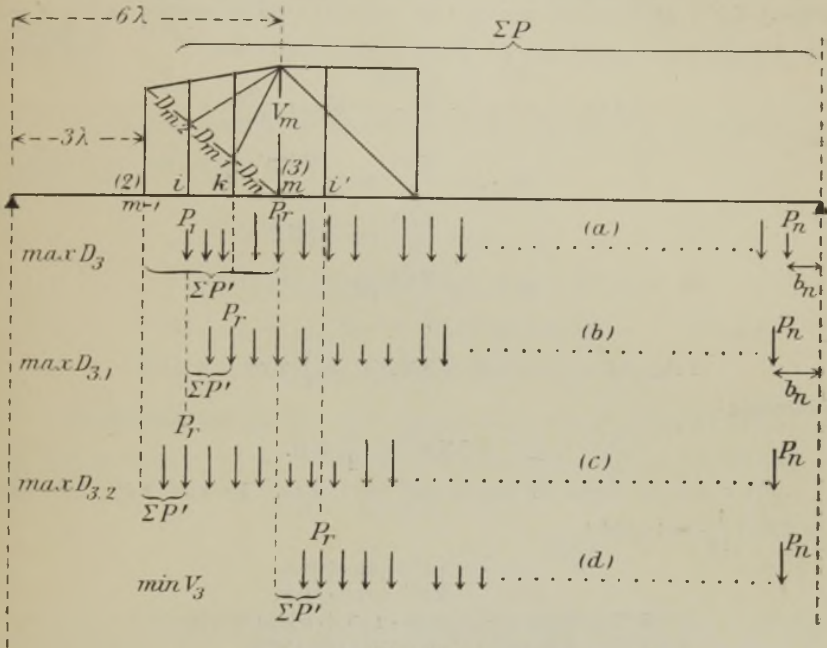


Fig. 533.

Soll die Zugstellung die Spannkraft  $max D$  hervorbringen, so muß sein

$$\longrightarrow \Sigma P' \leq \varepsilon_d \Sigma P.$$

Das heißt: Verschiebt man den Zug nach rechts, so daß  $P_r$  nicht zur  $\Sigma P'$  gehört, so muß  $\Sigma P' < \varepsilon_d \Sigma P$  sein; verschiebt man ihn nach links, so daß  $P_r$  zur  $\Sigma P'$  gehört, so muß  $\Sigma P' > \varepsilon_d \Sigma P$  sein. Für das dritte Feld ist

$$\varepsilon_d = \frac{6}{18} - \frac{3}{18} \cdot \frac{1}{0,8} = \frac{1}{8}.$$

Wählt man  $r=5$ , so kommen 41 Achsen auf die Brücke. Es ergibt sich  $\Sigma P = 573^t$  (Anhang Tabelle D) und  $\varepsilon_d \Sigma P = 71,6^t$ , ferner

$$\longrightarrow \Sigma P' = 56 < 71,6$$

$$\longleftarrow \Sigma P' = 73 > 71,6.$$

Nun ist, wegen  $b_n = 1,2^m$

$$\Sigma Pb = \mathfrak{P}_n b_n + \mathfrak{S}_n = 573 \cdot 1,2 + 34392 = 35080,$$

$$\Sigma P'b' = \mathfrak{S}_5 = 318,$$

$$2 h_3 \cos \varphi_3 = 2 \cdot 24 \cdot 0,794 = 38,1,$$

mithin

$$\max D_{3p} \cdot 38,1 = \frac{1}{8} \cdot 35080 - 318,$$

$$\max D_{3p} = 107^t.$$

**Berechnung von  $\max D_{3 \cdot 1p}$ .** Ein von vorwärtsgehenden Lokomotiven geführter Zug wird in das Feld  $ik$  vorgeschoben, Fig. 533 b (Anhang Tabelle C). Die Summe  $\Sigma P'b'$  erstreckt sich nur über die zwischen  $i$  und  $k$  liegenden Lasten;  $b'$  ist der Abstand einer Last  $P'$  von  $k$ . Punkt  $i$  wird belastet mit  $\frac{\Sigma P'b'}{\lambda}$ . Man findet

$$2 D_{m \cdot 1p} \cos \varphi_m = M_{m \cdot 1} - M_{m-1} \frac{h_m}{h_{m-1}},$$

wo

$$M_{m \cdot 1} = \frac{\Sigma Pb}{l} x_m - \frac{\Sigma P'b'}{\lambda} \cdot 2 \lambda$$

$$= \frac{\Sigma Pb}{l} x_m - 2 \Sigma P'b'$$

$$M_{m-1} = \frac{\Sigma Pb}{l} x_{m-1}.$$

Das gibt

$$2 D_{m \cdot 1p} \cos \varphi_m = \varepsilon_d \Sigma Pb - 2 \Sigma P'b' = \frac{1}{8} \Sigma Pb - 2 \Sigma P'b'$$

Bedingung

$$\overleftarrow{\Sigma P'} \leq \frac{\varepsilon_d}{2} \Sigma P.$$

Ist  $r = 3$ , so liegen 42 Achsen auf der Brücke. Es wird  $\Sigma P = 586t$  und

$$\frac{\varepsilon}{2} \Sigma P = \frac{1}{16} \cdot 586 = 36,6$$

$$\overrightarrow{\Sigma P'} = 34 < 36,6$$

$$\overleftarrow{\Sigma P'} = 51 > 36,6,$$

$$\Sigma Pb = \mathfrak{P}_n b_n + \mathfrak{S}_n = 586 \cdot 2,05 + 36153 = 37354$$

$$2 \Sigma P'b' = 2 \mathfrak{S}_2 = 2 \cdot 17 (1,5 + 3,0) = 153^*)$$

$$\max D_{3 \cdot 1p} \cdot 38,1 = \frac{1}{8} \cdot 37354 - 153$$

$$\max D_{3 \cdot 1p} = 119^t.$$

**Berechnung von  $\max D_{3 \cdot 2}$ .** Der von vorwärtsfahrenden Lokomotiven geführte Zug wird in das Feld  $(m-1)k$  vorgeschoben. Die Summe  $\Sigma P'b'$  erstreckt sich über die zwischen  $(m-1)$  und  $k$  liegenden Lasten,  $b'$  ist der Abstand einer Last  $P'$  von  $i$ . Punkt  $(m-1)$  wird belastet mit  $\frac{\Sigma P'b'}{\lambda}$ . Man findet

$$2 D_{m \cdot 2p} \cos \varphi_m = M''_m - M_{m-1} \frac{h_m}{h_{m-1}},$$

\*)  $\mathfrak{S}_2$  darf nicht der Tabelle C entnommen werden, da die ersten 4 Reihen unter Annahme höherer Achslasten für den Fall berechnet sind, daß nur eine bis vier Achsen auf der Brücke stehen. Wir verweisen auf den Text unmittelbar vor der Tabelle C.



wo

$$M_{m \cdot 2} = \frac{\sum Pb}{l} x_m - \frac{\sum P'b'}{\lambda} \cdot 3 \lambda$$

$$M_{m \cdot 2} = \frac{\sum Pb}{l} x_m - 3 \sum P'b'$$

$$M_{m-1} = \frac{\sum Pb}{l} x_{m-1}.$$

Das gibt

$$2 D_{m \cdot 2p} \cos \varphi_m = \varepsilon_d \sum Pb - 3 \sum P'b' = \frac{1}{8} \sum Pb - 3 \sum P'b'$$

Bedingung

$$\longleftrightarrow \sum P' \leq \frac{\varepsilon_d}{3} \sum P.$$

Ist  $r=2$  so kommen 45 Achsen auf die Brücke. Es wird  $\sum P = 625^{**}$ ) und

$$\frac{\varepsilon}{3} \sum P = \frac{1}{24} \cdot 625 = 26'$$

$$\longleftrightarrow \sum P' = 17 < 26$$

$$\longleftrightarrow \sum P' = 34 > 26$$

$$\sum Pb = \mathfrak{S}_{45} = 41544, \quad \sum P'b' = 17 \cdot 1,5 = 25,5$$

$$\max D_{3 \cdot 2p} \cdot 38,1 = \frac{1}{8} \cdot 41544 - 3 \cdot 25,5$$

$$\max D_{3 \cdot 2p} = 134'.$$

**Berechnung von  $\min V_{3p}$ .** Der Lastzug rückt von  $B$  aus in das rechts von  $m$  gelegene Feld  $m-i'$  vor. Punkt  $m$  wird belastet mit  $\frac{\sum P'b'}{\lambda}$ . Es entsteht

$$\begin{aligned} V_m &= -D_m \sin \varphi_m + \frac{\sum P'b'}{\lambda} \\ &= -D_m \cos \varphi_m \frac{h_{m-1}}{\omega \lambda} + \frac{\sum P'b'}{\lambda}, \end{aligned}$$

wo  $\omega$  die Anzahl der in dem Felde  $(m-1) - m$  enthaltenen Strecken  $\lambda$  bedeutet; im vorliegenden Falle ist  $\omega = 3$ . Drückt man  $D_m \cos \varphi_m$  durch die Momente aus, so erhält man

$$V_m = - \left[ \frac{M_m}{h_m} \frac{h_{m-1}}{\omega \lambda} - \frac{M_{m-1}}{\omega \lambda} \right] + \frac{\sum P'b'}{\lambda},$$

wo  $M_m = A x_m$ ,  $M_{m-1} = A x_{m-1}$ . Für die Vertikale eines Hauptträgers ergibt sich schließlich

$$2 V_m \lambda = -\varepsilon_v \sum Pb + \sum P'b',$$

wo

$$\varepsilon_v = \frac{1}{\omega} \left( \frac{x_m}{l} \frac{h_{m-1}}{h_m} - \frac{x_{m-1}}{l} \right).$$

Im vorliegenden Falle ist

$$\varepsilon_v = \frac{1}{3} \left( \frac{6}{18} \cdot 0,80 - \frac{3}{18} \right) = \frac{1}{30}.$$

\*) Da  $x' + 1,5 = 116,90 + 1,5 = 118,4^m$  ist, also von  $c_1 = 118,5^m$  nur unwesentlich abweicht, so nehmen wir  $n = 45$  und  $b_n = 0$  an.

Liegt  $P_1$  bei  $i'$ , so kommen 36 Lasten auf die Brücke. Man findet

$$\Sigma P = 508, \quad \varepsilon_s \Sigma P = \frac{1}{30} \cdot 508 = 16,9^t$$

$$\leftarrow \Sigma P' = 17 > 15,9^t$$

$$\Sigma P b = \mathfrak{R}_n b_n + \mathfrak{C}_n = 508 \cdot 0,35 + 26424 = 26602$$

$$\min V_{sp} \cdot 2 \cdot 8,35 = -\frac{1}{30} \cdot 26602$$

$$\min V_{sp} = -53^t.$$

Die Spannkraft  $\max V_p$  berechnet man am zweckmäßigsten mit Hilfe einer Einflußlinie, desgleichen die Spannkraft  $O_p$  und, wenn keine Tabellen zur Ermittlung der Momente  $\mathfrak{M}_{m,p}$  zur Verfügung stehen, auch die  $U_p$ .

Die vorstehenden Untersuchungen lassen sich auch für weitgespannte Gerber-Balken verwerten.



# Anhang.

## I.

### Neue Belastungsvorschläge für Eisenbahnbrücken.

Im Jahre 1900 wurde vom *Verein Deutscher Eisenbahnerwaltungen* ein Bericht über Verhandlungen des Ausschusses für technische Angelegenheiten veröffentlicht, welcher u. a. neue Vorschläge für die beim Entwerfen von Brücken anzunehmenden Belastungen enthält. Fig. 534 gibt die Achslasten der Lokomotive und des Tenders an. Sie wird in jenem Berichte von der Vorschrift begleitet:

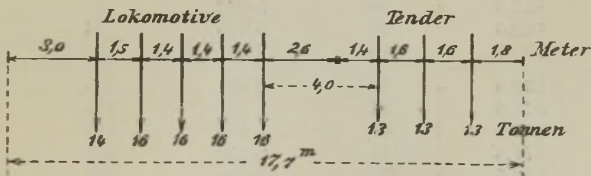


Fig. 534.

„Der Berechnung der Brücken ist ein Zug aus zwei Lokomotiven samt Tendern in ungünstigster Stellung und einseitig angereihten Wagen von 3,6 Tonnen Gewicht auf das laufende Meter Wagenlänge (einschließlich Pufferlänge) zu Grunde zu legen.“

„Insofern für kleine Stützweiten oder Belastungslängen vier je 1,4<sup>m</sup> voneinander abstehende Achsen, von denen eine an der ungünstigsten Stelle mit 18 Tonnen Belastung anzunehmen ist, größere Beanspruchungen ergeben, als die oben skizzierte Lokomotive, ist dieser Belastungsfall der Rechnung zu Grunde zu legen.“

Der Bericht ist reich mit Tabellen ausgestattet, denen wir folgende Werte entnehmen.



Größte Biegemomente für verschiedene Stützweiten  $l$ .

$l$	$M_{max}$	$l$	$M_{max}$	$l$	$M_{max}$	$l$	$M_{max}$
$m$	$tm$	$m$	$tm$	$m$	$tm$	$m$	$tm$
1,0	4,5	15	235,0	44	1607	78	4 158
1,5	6,75	16	261,0	46	1737	80	4 329
2,0	9,0	17	289,4	48	1872	82	4 504
2,5	11,5	18	318,45	50	2007	84	4 680
3,0	15,5	19	349,5	52	2147	86	4 859
3,5	21,35	20	380,9	54	2286	88	5 039
4,0	27,6	22	448,1	56	2430	90	5 223
5,0	40,1	24	525,8	58	2574	92	5 407
6,0	55,5	26	604,0	60	2723	94	5 595
7,0	71,8	28	693,2	62	2874	96	5 783
8,0	90,9	30	790,4	64	3027	98	5 976
9,0	110,4	32	891,9	66	3182	100	6 172
10,0	129,9	34	997,0	68	3339	110	7 180
11,0	149,4	36	1108	70	3499	120	8 269
12,0	168,9	38	1226	72	3660	130	9 425
13,0	188,4	40	1350	74	3824	140	10 642
14,0	210,9	42	1477	76	3990	150	11 933

Statische Momente  $\mathcal{E}_n$ .

$b_1$	$\mathcal{E}_n$	$b_1$	$\mathcal{E}_n$	$b_1$	$\mathcal{E}_n$
0,5	9,0	22*)	2 030	64	13 359
1,0	18,0	24*)	2 398	68	14 780
1,5	28,6	26*)	2 788	72	16 257
2,0	45,6	28*)	3 186	76	17 790
2,5	62,6	30*)	3 615	80	19 385
3,0	82,8	32	4 075	84	21 034
3,5	107,8	34	4 546	88	22 743
4,0	132,8	36	5 032	92	24 509
4,5	162,6	38	5 535	96	26 330
5,0	195,6	40	6 051	100	28 212
6,0	261,6	42	6 581	105	30 644
7,0*)	327,6	44	7 124	110	33 166
8,0*)	393,6	46	7 682	115	35 778
9,0*)	471,6	48	8 256	120	38 480
10,0*)	553,5	50	8 844	125	41 271
12,0	744,6	52	9 446	130	44 153
14,0	966,9	54	10 061	135	47 125
16,0	1201	56	10 691	140	50 187
18,0	1453	58	11 338	145	53 339
20,0*)	1719	60	11 998	150	56 580

\*) Ist die Stützweite  $l \leq b_1 + 4,0 m$  so sind folgende Werte zu nehmen:

$l$	$\mathcal{E}_n$	$l$	$\mathcal{E}_n$
7,0	331,8	22	2083
8,0	409,8	24	2434
9,0	487,8	26	2816
10,0	566,3	28	3209
20,0	1763	30	3617

Die zweite Tabelle dient zur Berechnung der größten Querkräfte und entspricht unserer Tabelle I auf Seite 150. Die Strecke  $b_1$  gibt (nach Fig. 537, Seite 551) die Entfernung der ersten Last von der rechten Stütze an. Die Tabellen des Berichtes, aus denen wir hier einen Auszug geben, erhalten nur die statischen Momente  $\Sigma_n$ , nicht aber die Lastensummen  $\mathbb{P}_n$ , was offenbar ein Mangel ist, da man diesen Wert zur schnellen Entscheidung der Frage nach der ungünstigsten Laststellung braucht. Man vergleiche die Zahlenbeispiele am Schluß dieses Anhanges.

II.

**Neue Belastungsvorschriften für die Preußischen Staatsbahnen.**

Die im April 1901 vom Preußischen Ministerium der öffentlichen Arbeiten erlassene neue Belastungsvorschrift führt zu noch etwas größeren Momenten und Querkräften als die Vorschläge unter I. Sie zeichnet sich durch die größte Einfachheit aus und erleichtert deshalb die Berechnung auch in solchen Fällen, in denen die für einfache Balkenbrücken ausgearbeiteten Tabellen nicht benutzt werden können. Fig. 535 zeigt die Anordnung von Lokomotive, Tender und Güterwagen. Alle Rad-

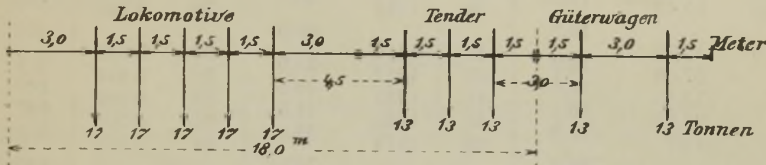


Fig. 535.

stände sind durch 1,5 teilbar. Es ist, wie nach der früheren Vorschrift, ein Zug aus zwei Lokomotiven in ungünstigster Stellung mit einer unbeschränkten Anzahl einseitig angehängter Güterwagen anzunehmen.

So lange sich weniger als 5 Lokomotivachsen auf der Brücke befinden, sind größere Achslasten in Rechnung zu stellen, und zwar ist für jede Achse anzunehmen:

- 18<sup>t</sup> bei Belastung mit vier Achsen,
- 19<sup>t</sup> „ „ „ drei Achsen,
- 20<sup>t</sup> „ „ „ einer oder zwei Achsen.

**a. Momente.**

Die Tabelle A enthält die größten Momente für Stützweiten von 1,0 bis 150<sup>m</sup>. Für dazwischenliegende Stützweiten ist geradlinig einzuschalten, wobei die angegebenen Werte  $\Delta M_{max} : \Delta l$  benutzt werden können.

## A. Größte Biegemomente.

$l$	$M_{max}$	$\frac{\Delta M_{max}}{\Delta l}$	$l$	$M_{max}$	$\frac{\Delta M_{max}}{\Delta l}$	$l$	$M_{max}$	$\frac{\Delta M_{max}}{\Delta l}$
$m$	$tm$	$t$	$m$	$tm$	$t$	$m$	$tm$	$t$
1,0	5,00	5,00	15	243,9	26,1	60	2 900	81,5
1,2	6,00	5,00	16	270,0	27,8	62	3 063	84,5
1,4	7,00	5,00	17	297,8	29,2	64	3 232	85,0
1,6	8,00	5,00	18	327,0	32,8	66	3 402	86,5
1,8	9,00	5,00	19	359,8	34,2	68	3 575	88,0
		5,00						
2,0	10,00	5,00	20	394,0	37,5	70	3 751	88,0
2,2	11,00	5,00	22	469,0	40,8	72	3 927	91,0
2,4	12,00	5,80	24	550,5	40,8	74	4 109	93,0
2,6	13,16	9,25	26	632,0	48,1	76	4 295	94,5
2,8	15,01	9,30	28	728,2	52,1	78	4 484	95,0
		9,40						
3,0	16,88	9,40	30	832,3	53,5	80	4 674	97,0
3,2	18,76	9,50	32	939,2	55,4	82	4 868	97,5
3,5	21,61	13,8	34	1050	57,5	84	5 063	100
4,0	28,50	14,2	36	1165	60,5	86	5 263	101
4,5	35,63	14,2	38	1286	65,0	88	5 464	103
		14,3						
5,0	42,75	16,4	40	1416	68,0	90	5 669	104
6	57,00	20,1	42	1552	68,5	92	5 876	107
7	73,45	20,1	44	1689	71,5	94	6 089	107
8	93,50	21,2	46	1832	72,0	96	6 303	109
9	114,7	21,2	48	1976	73,5	98	6 520	110
		21,2						
10	135,9	21,2	50	2123	75,0	100	6 740	118
11	157,1	21,3	52	2273	75,0	110	7 918	126
12	178,4	21,3	54	2423	77,0	120	9 176	134
13	199,7	21,3	56	2577	80,0	130	10 520	144
14	221,6	22,9	58	2737	81,5	140	11 965	144
15	243,9		60	2900		150	13 510	155

Die Kurve der größten Momente  $M_x$  an den verschiedenen Stellen ( $x$ ) einer Brücke wird genau genug durch zwei Parabelstücke und eine gerade Linie, deren Länge gleich  $0,12l$  ist, dargestellt. Zur Berechnung von  $M_x$  dient die Zahlenreihe B. Für die dazwischenliegenden Werte  $x:l$  ist geradlinig einzuschalten, wobei die angegebenen Werte  $\frac{\Delta M_x}{M_{max}} : \Delta \frac{x}{l}$  benutzt werden können.

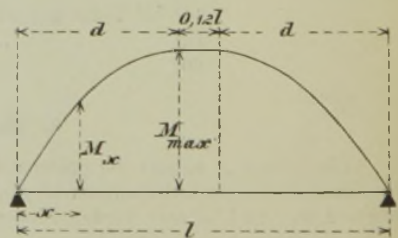


Fig. 536.



## B.

$\frac{x}{l}$	$\frac{M_x}{M_{max}}$	$\frac{\Delta M_x}{M_{max}}$	$\frac{x}{l}$	$\frac{M_x}{M_{max}}$	$\frac{\Delta M_x}{M_{max}}$	$\frac{x}{l}$	$\frac{M_x}{M_{max}}$	$\frac{\Delta M_x}{M_{max}}$
0,00	0,000		0,18	0,651		0,36	0,967	
0,02	0,089	4,45	0,20	0,703	2,60	0,38	0,981	0,70
0,04	0,174	4,25	0,22	0,750	2,35	0,40	0,992	0,55
0,06	0,254	4,00	0,24	0,793	2,15	0,42	0,998	0,30
0,08	0,331	3,85	0,26	0,833	2,00	0,44	1,000	0,10
		3,60			1,75			
0,10	0,403	3,40	0,28	0,868	1,55			
0,12	0,471	3,20	0,30	0,899	1,35			
0,14	0,535	3,00	0,32	0,926	1,35			
0,16	0,595	2,80	0,34	0,948	1,10			
0,18	0,651		0,36	0,967	0,95			

Die Werte der Tabelle B folgen dem Gesetze

$$\frac{M_x}{M_{max}} = \frac{x(2d-x)}{d^2}$$

wo  $d = 0,44 l$  ist.

## b. Querkräfte.

Der Tabelle C, welche zur Berechnung des Stützenwiderstandes dient, der am linken Auflager einer Balkenbrücke durch einen vom rechten Auflager aus vorrückenden Eisenbahnzug hervorgerufen wird, haben wir genau dieselbe Anordnung gegeben, wie der Tabelle I auf Seite 152. Wir verweisen daher auf Seite 145, No. 85. Der Auflagerdruck  $A$  wird mittels der Gleichung berechnet

$$A = \frac{1}{l} (\mathfrak{P}_n b_n + \mathfrak{S}_n).$$

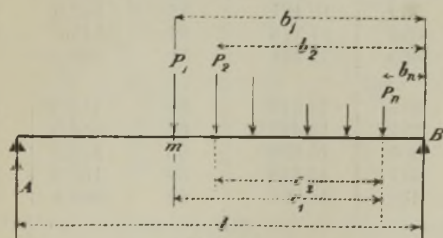


Fig. 537.

Die ersten vier Zeilen sind nicht für den über der Tabelle stehenden Lastenzug berechnet, sondern nach der für die Belastung durch eine kleinere Anzahl von Achsen geltenden Vorschrift. Es ist also gesetzt worden:

$$\mathfrak{P}_1 = 20^t, \mathfrak{P}_2 = 2 \cdot 20 = 40^t, \mathfrak{P}_3 = 3 \cdot 19 = 57^t, \mathfrak{P}_4 = 4 \cdot 18 = 72^t$$

und für diese schwereren Lasten sind auch die Momente  $\mathfrak{S}_n$  berechnet worden.

## C.

Tonnen Meter	Lokomotive					Tender			Lokomotive					Tender			Güterwagen		
	17	17	17	17	17	13	13	13	17	17	17	17	17	13	13	13	13	13	13
	1,5	1,5	1,5	1,5	4,5	1,5	1,5	4,5	1,5	1,5	1,5	1,5	4,5	1,5	1,5	3,0	3,0	3,0	3,0

n	c <sub>1</sub>	⊘ <sub>n</sub>	Σ <sub>n</sub>	n	c <sub>1</sub>	⊘ <sub>n</sub>	Σ <sub>n</sub>
1	0,	20	0	31	76,5	443	19 389
2	1,5	40	30	32	79,5	456	20 718
3	3,0	57	85,5	33	82,5	469	22 086
4	4,5	72	162	34	85,5	482	23 493
5	6,0	85	255	35	88,5	495	24 939
6	10,5	98	637,5	36	91,5	508	26 424
7	12,0	111	784,5	37	94,5	521	27 948
8	13,5	124	951	38	97,5	534	29 511
9	18,0	141	1 509	39	100,5	547	31 113
10	19,5	158	1 720,5	40	103,5	560	32 754
11	21,0	175	1 957,5	41	106,5	573	34 434
12	22,5	192	2 220	42	109,5	586	36 153
13	24,0	209	2 508	43	112,5	599	37 911
14	28,5	222	3 448,5	44	115,5	612	39 708
15	30,0	235	3 781,5	45	118,5	625	41 544
16	31,5	248	4 134	46	121,5	638	43 419
17	34,5	261	4 878	47	124,5	651	45 333
18	37,5	274	5 661	48	127,5	664	47 286
19	40,5	287	6 483	49	130,5	677	49 278
20	43,5	300	7 344	50	133,5	690	51 309
21	46,5	313	8 244	51	136,5	703	53 379
22	49,5	326	9 183	52	139,5	716	55 488
23	52,5	339	10 161	53	142,5	729	57 636
24	55,5	352	11 178	54	145,5	742	59 823
25	58,5	365	12 234	55	148,5	755	62 049
26	61,5	378	13 329	56	151,5	768	64 314
27	64,5	391	14 463	57	154,5	781	66 618
28	67,5	404	15 636	58	157,5	794	68 961
29	70,5	417	16 848	59	160,5	807	71 343
30	73,5	430	18 099	60	163,5	820	73 764

Die folgende Tabelle ist wichtig für die Berechnung der Füllungsstäbe weitmaschiger Fachwerke. Wir verweisen auf das Zahlenbeispiel im § 54.

## D.

Tonnen Meter	Tender			Lokomotive				Lokomotive				Tender			Güterwagen				
	13	13	13	17	17	17	17	17	17	17	17	17	17	13	13	13	13	13	13
	1,5	1,5	4,5	1,5	1,5	1,5	1,5	6,0	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	4,5	1,5	1,5	3,0	3,0	3,0

n	c <sub>1</sub>	P <sub>n</sub>	S <sub>n</sub>	n	c <sub>1</sub>	P <sub>n</sub>	S <sub>n</sub>
1	0	13	0	31	78	443	19 347
2	1,5	26	19,5	32	81	456	20 676
3	3,0	39	58,5	33	84	469	22 044
4	7,5	56	234	34	87	482	23 451
5	9,0	73	318	35	90	495	24 897
6	10,5	90	427,5	36	93	508	26 382
7	12,0	107	562,5	37	96	521	27 906
8	13,5	124	723	38	99	534	29 469
9	19,5	141	1 467	39	102	547	31 071
10	21,0	158	1 678,5	40	105	560	32 712
11	22,5	175	1 915,5	41	108	573	34 392
12	24,0	192	2 178	42	111	586	36 111
13	25,5	209	2 466	43	114	599	37 869
14	30,0	222	3 406,5	44	117	612	39 666
15	31,5	235	3 739,5	45	120	625	41 502
16	33	248	4 092	46	123	638	43 377
17	36	261	4 836	47	126	651	45 291
18	39	274	5 619	48	129	664	47 244
19	42	287	6 441	49	132	677	49 236
20	45	300	7 302	50	135	690	51 267
21	48	318	8 202	51	138	703	53 337
22	51	326	9 141	52	141	716	55 446
23	54	339	10 119	53	144	729	57 594
24	57	352	11 136	54	147	742	59 781
25	60	365	12 192	55	150	755	62 007
26	63	378	13 287	56	153	768	64 272
27	66	391	14 421	57	156	781	66 576
28	69	404	15 594	58	159	794	68 919
29	72	417	16 806	59	162	807	71 301
30	75	430	18 057	60	165	820	73 722

Bei gewissen Stützweiten kann es vorkommen, daß für Querschnitte in der Nähe des linken Auflagers die größte Querkraft entsteht, wenn die erste Maschine rückwärts fährt und der Tender die Brücke bereits verlassen hat, Fig. 538. Es gilt

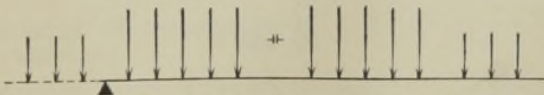


Fig. 538.



dann die Tabelle E, deren fünf erste Zeilen mit denen der Tabelle C übereinstimmen. Sobald  $b_1 > 33,23^m$  ist, liefert die Tabelle C stets den größeren Stützenwiderstand  $A$ . Die Unterschiede zwischen den für die beiden Zuganordnungen sich ergebenden Werte sind übrigens unwesentlich, wie aus den beiden folgenden Zahlenreihen hervorgeht. Die obere Reihe ist mittels Tabelle C berechnet worden, die untere mittels Tabelle D.

$l=10$	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32 Meter
$A = 59,5$	65	72	79	84	90	97	104	113	119	126	133 Tonnen
$A = 59,5$	64	70	77	85	94	100	107	114	121	127	134 „

E.

	Lokomotive				Lokomotive				Tender			Güterwagen				
Tonnen	17	17	17	17	17	17	17	17	17	13	13	13	13	13	13	13
Meter	1,5	1,5	1,5	1,5	6,0	1,5	1,5	1,5	1,5	4,5	1,5	1,5	3,0	3,0	3,0	3,0

$n$	$c_1$	$\beta_n$	$\epsilon_n$	$n$	$c_1$	$\beta_n$	$\epsilon_n$
1	0	20	0	9	16,5	153	1300,5
2	1,5	40	30	10	18,0	170	1530,5
3	3,0	57	85	11	22,5	183	2295,0
4	4,5	72	162	12	24,0	196	2569,5
5	6,0	85	255	13	25,5	209	2863,5
6	12,0	102	765	14	28,5	222	3490,5
7	13,5	119	918	15	31,5	235	4156,5
8	15,0	136	1096,5	16	34,5	248	4861,5

III.

Zahlenbeispiele für die Benutzung der Tabellen.\*)

1. Berechnung der Querkräfte und Gurtspannkkräfte für einen Parallelträger von 36<sup>m</sup> Stützweite und 3,6<sup>m</sup> Feldweite. Fig. 539.

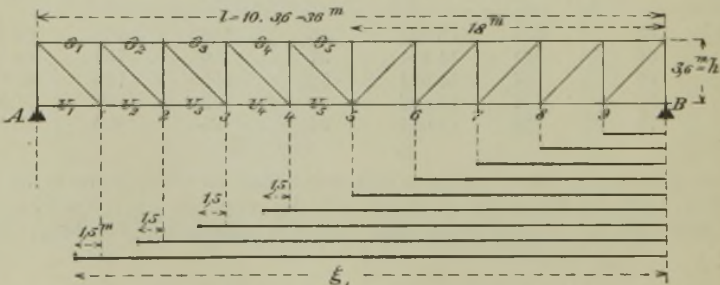


Fig. 539.

\*) In diesen Beispielen handelt es sich nur um den Einfluß der Verkehrslast. Den Zeiger  $p$  haben wir überall fortgelassen.

**a. Querkräfte.** Nach Seite 139 muß der von *B* nach *A* vorrückende Eisenbahnzug die Grundstellung überschreiten, sobald  $\mathfrak{P}_n > \mathfrak{P}_1 \frac{l}{\lambda}$  wird. Da nun  $\mathfrak{P}_1 \frac{l}{\lambda} = 17 \cdot 10 = 170^t$  ist, so lehrt ein Blick auf die Tabelle C, daß  $\mathfrak{P}_n$  erst bei einer Zuglänge von 21,0<sup>m</sup> größer als 170<sup>t</sup> wird. Für die Felder 5 bis 9 sind also die Grundstellungen maßgebend; in den anderen entsteht  $Q_{max}$ , wenn die zweite Achse an dem das Feld rechts begrenzenden Knotenpunkte liegt. Im linken Knotenpunkte des Feldes greift dann die Last  $17 \frac{1,5}{3,6} = 7^t$  an. Den Zug noch weiter vorzuziehen, ist nirgends nötig, weil  $\mathfrak{P}_n$  den Wert  $(P_1 + P_2) \frac{l}{\lambda} = 340^t$  erst bei einer Zuglänge von 52,5<sup>m</sup> überschreitet. Nach dieser Entscheidung über die Zugstellungen, die in Fig. 539 durch kräftige Linien angedeutet worden sind, wurde die Berechnung der  $Q_{max}$  in der folgenden Tabelle durchgeführt. Der Abstand der ersten Last vom rechten Auflager ist mit  $\xi$  bezeichnet worden.

Feld	$\xi$	$c_1$	$b_n = \xi - c_1$	$\mathfrak{P}_n$	$\mathfrak{E}_n$	$A = \frac{1}{36} (\mathfrak{P}_n b_n + \mathfrak{E}_n)$	$Q_{max} = A - 7,0$
	<i>m</i>	<i>m</i>	<i>m</i>	<i>t</i>	<i>tm</i>	<i>t</i>	<i>t</i>
1	33,9	31,5	2,4	248	4134	131	124
2	30,3	30,0	0,3	235	3782	107	100
3	26,7	24,0	2,7	209	2508	85	78
4	23,1	22,5	0,6	192	2220	65	58
5	18,0	18,0	0		1509	$A = 42 = Q_{max}$	
6	14,4	13,5	0,9	124	951	30	"
7	10,8	10,5	0,3	98	638	19	"
8	7,2	6,0	1,2	85	255	10	"
9	3,6	3,0	0,6	57	86	3,3	"

Die Benutzung der den früher üblichen Belastungen entsprechenden Tabelle I auf Seite 310 liefert folgende Querkräfte

$$Q_{max} = 83^t, 66^t, 52^t, 40^t, 28^t, 19^t, 12^t, 6,4^t, 2,4^t;$$

dieselben sind wesentlich (nämlich um 50 v. H.) kleiner als die oben berechneten Werte.

**b. Gurtspannkkräfte.** Das größte Moment ist, nach Tabelle A,  $Q_{max} M = 1165^{tm}$ .

Man erhält  $-O_5 = \frac{M_5}{h} = \frac{1165}{3,6} = 324^t$  und mit Hilfe der Tabelle B

$$\begin{aligned} \text{für } \frac{x}{l} = 0,1 & \quad -O_1 = +U_2 = 0,403 \cdot 324 = 131^t \\ & \quad \quad \quad -O_2 = +U_3 = 0,703 \cdot 324 = 228^t \\ & \quad \quad \quad -O_3 = +U_4 = 0,899 \cdot 324 = 291^t \\ & \quad \quad \quad -O_4 = +U_5 = 0,992 \cdot 324 = 321^t \end{aligned}$$

$U_1$  ist gleich Null.

**2. Berechnung der Spannkkräfte *D*, *V*, *U*, *O* des in Fig. 540 dargestellten Parabelträgers.**

**a. Füllungsstäbe.** Überschreitet der von *B* aus vorrückende Eisenbahnzug die Grundstellung so weit, daß die Lasten  $P_1$  bis  $P_r$  im  $m$ ten Felde liegen, Fig. 541, so wird der Knotenpunkt  $m - 1$  mit

$$P' = \frac{\sum Pe}{\lambda_m}$$

belastet. Am linken Auflager entsteht

$$A = \frac{\sum Pb}{l}$$

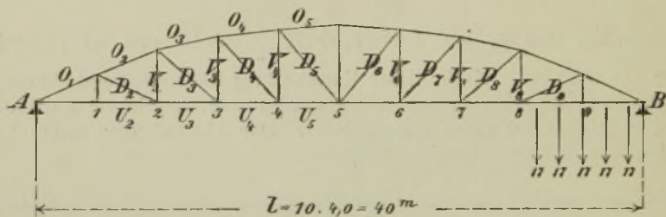


Fig. 540.

Die Spannkraft in der Diagonale nimmt die Form an

$$D = AD' + P'D''$$

und für die Vertikale erhält man

$$V = AV' + P'V''$$

Hierin sind  $D'$  und  $V'$  die Spannkräfte infolge  $A = 1$ , deren Ermittlung in No. 151, Seite 255 gezeigt worden ist.  $D''$  und  $V''$  sind die Werte, welche die in Fig. 245 auf Seite 260 dargestellten Spannkräfte  $D'''$  und  $V'''$  für  $P' = 1$  annehmen. Auf der linken Trägerseite gehören bei untenliegender Fahrbahn zum  $m$ ten Felde die Stäbe  $D_m$  und  $V_{m-1}$ , auf der rechten Trägerseite die Stäbe  $D_m$  und  $V_m$ . Wir wollen die ganze Untersuchung rechnerisch durchführen.

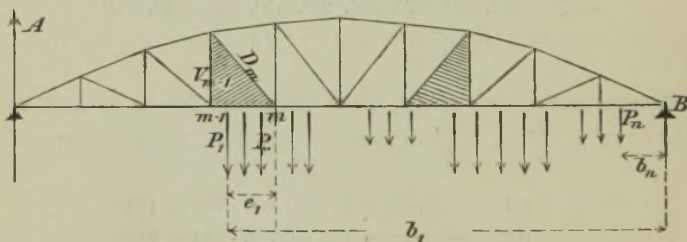


Fig. 541.

Für die linke Trägerhälfte ergibt sich für den Zustand  $A = 1$  die Gleichgewichtsbedingung (Fig. 542)

$$1 + V'_m + O'_m \sin \beta_m = 0$$

und hieraus folgt, da

$$O'_m \cos \beta_m = -\frac{M_m}{h_m} = -1 \frac{x_m}{h_m}, \text{ also } O'_m \sin \beta_m = -1 \frac{x_m}{h_m} \operatorname{tg} \beta_m$$



ist, die einfache Beziehung

$$-V'_m = \frac{x_m}{\lambda_m} \frac{h_{m-1}}{h_m} - \frac{x_{m-1}}{\lambda_m} = D'_m \sin \varphi_m^*);$$

und ebenso findet man für die rechte Trägerhälfte

$$-V'_m = \frac{x_m}{\lambda_{m+1}} \frac{h_{m+1}}{h_m} - \frac{x_{m+1}}{\lambda_{m+1}} = D'_{m+1} \sin \varphi_{m+1}.$$

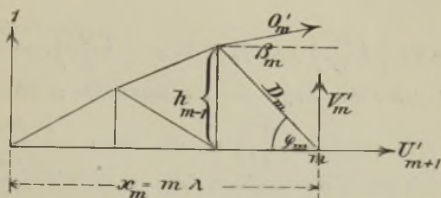


Fig. 542.

Sind alle Felder gleichlang, so ergibt sich (mit  $x_m = m \lambda$ )

$$(1) \begin{cases} \text{linke Seite } -V'_m = +D'_m \sin \varphi_m & = m \frac{h_{m-1}}{h_m} - (m-1) \\ \text{rechte Seite } -V'_m = +D'_{m+1} \sin \varphi_{m+1} & = m \frac{h_{m+1}}{h_m} - (m+1). \end{cases}$$

Da nun die Höhen  $h$  des Parabelträgers dem einfachen Gesetze folgen

$$h_m = \frac{4f x_m (l - x_m)}{l^2} = \frac{4f m (k - m)}{k^2},$$

wo  $k$  die Anzahl der Felder und  $f$  die Trägerhöhe in der Mitte bedeuten, so erhält man schließlich die einfachen Werte

$$(2) \begin{cases} \text{linke Seite } -V'_m = +D'_m \sin \varphi_m & = \frac{m-1}{k-m} \\ \text{rechte Seite } +V'_m = -D'_{m+1} \sin \varphi_{m+1} & = \frac{m+1}{k-m}. \end{cases}$$

Für die Spannkkräfte  $V''$  und  $D''$  findet man (nach Fig. 245 Seite 260)

$$(3) \begin{cases} \text{linke Seite } V''_m = +1, & D''_m = -\frac{d_m}{h_m}, & D''_m \sin \varphi_m = -\frac{h_{m-1}}{h_m} \\ \text{rechte Seite } V''_m = -\frac{h_{m-1}}{h_m}, & D''_m = +\frac{d_m}{h_m}, & D''_m \sin \varphi_m = +1. \end{cases}$$

Nach diesen Vorbereitungen gehen wir zur Untersuchung der gefährlichsten Laststellung über. Verschieben wir den Zug unendlich wenig nach links, so ändert sich, da  $de = db$  ist,  $D$  um

$$dD = \left( D' \frac{\sum P}{l} + D'' \frac{\sum P}{\lambda} \right).$$

\*) Diese Gleichung kann auch aus  $D_m \cos \varphi_m = \frac{M_m}{h_m} - \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}} = \frac{x_m}{h_m} - \frac{x_{m-1}}{h_{m-1}}$  gefolgert werden. Vergl. auch Seite 314—316 und § 54, Nr. 233.

Die Spannkraft  $D$  nimmt also zu, sobald

$$\sum_1^n P > - \sum_1^n P \frac{l}{\lambda} \frac{D''}{D'}$$

ist. Eine etwa am Knotenpunkte  $m$  gelegene Last gehört nach der Verschiebung zur  $\sum_1^n P$ . Verstehen wir also unter  $\left(\frac{D''}{D'}\right)$  das absolute Verhältnis der Zahlen  $D''$  und  $D'$ , und führen wir die Bezeichnung  $\mathfrak{P}$  für  $\sum P$  ein, so erhalten wir den Satz:

Ist  $\mathfrak{P}_n > \mathfrak{P}_r \frac{l}{\lambda} \left(\frac{D''}{D'}\right)$  und  $\mathfrak{P}_n < \mathfrak{P}_{r+1} \frac{l}{\lambda} \left(\frac{D''}{D'}\right)$ , so muß die  $(r+1)^{\text{te}}$  Achse des Zuges am Knotenpunkte  $m$  liegen.\*

Bei den Vertikalen tritt natürlich  $\left(\frac{V''}{V'}\right)$  an die Stelle von  $\left(\frac{D''}{D'}\right)$ . Den beiden zu demselben Felde gehörigen Füllungsstäben können verschiedene gefährlichste Zugstellungen entsprechen.

Für den in Fig. 542 abgebildeten Parabelträger erhält man nun mit  $k=10$  und  $f=5,0^m$

$$h_1 = 1,800^m, h_2 = 3,200^m, h_3 = 4,200^m, h_4 = 4,800^m, h_5 = 5,000^m$$

$$\frac{1}{\sin \varphi} = \frac{\sqrt{\lambda^2 + h^2}}{h} = 2,4369 \quad 1,6008, \quad 1,3810 \quad 1,3017,$$

ferner

linke Seite	$D'_2 \sin \varphi_2 = + \frac{1}{8} = - V'_2$	$D'_2 = + 0,305$		
	$D'_3 \sin \varphi_3 = + \frac{2}{7} = - V'_3$	$D'_3 = + 0,457$		
	$D'_4 \sin \varphi_4 = + \frac{3}{6} = - V'_4$	$D'_4 = + 0,690$		$V''_4 = + 1,00$
	$D'_5 \sin \varphi_5 = + \frac{4}{5}$	$D'_5 = + 1,04$		
rechte Seite	$D'_6 \sin \varphi_6 = - \frac{6}{5}$	$D'_6 = - 1,56$		
	$D'_7 \sin \varphi_7 = - \frac{7}{4} = - V'_6$	$D'_7 = - 2,42$	$D''_7 = + 1,38$	$V''_6 = - 1,04$
	$D'_8 \sin \varphi_8 = - \frac{8}{3} = - V'_7$	$D'_8 = - 4,27$	$D''_8 = + 1,60$	$V''_7 = - 1,14$
	$D'_9 \sin \varphi_9 = - \frac{9}{2} = - V'_8$	$D'_9 = - 10,97$	$D''_9 = + 2,44$	$V''_8 = - 1,31$

Es sind nur die Werte  $D''$  und  $V''$  angegeben worden, welche gebraucht werden, was durch die folgende Aufsuchung der ungünstigsten Zugstellungen entschieden wird. Die Zahlen  $\left(\frac{D''}{D'}\right)$  folgen beim Parabelträger auf der linken und rechten Seite dem einfachen Gesetze

$$\left(\frac{D''}{D'}\right) = \frac{k+1-m}{m} \text{ d. i. hier } = \frac{11-m}{m}$$

\*) Hierbei ist natürlich auch darauf zu achten, daß beim Vorziehen des Zuges um eine endliche Strecke neue Lasten auf die Brücke kommen können.

und man erhält daher, weil  $P_1 \frac{l}{\lambda} = 170'$  ist, die folgenden Zahlenreihen für die Belastungslängen  $\xi = x'_m + 1,5^m$  (zweite Achse in  $m$ ):

$$\begin{array}{cccccccc} \text{für } m = & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ \left(\frac{D''}{D'}\right) = & \frac{2}{9} & \frac{3}{8} & \frac{4}{7} & \frac{5}{6} & \frac{6}{5} & \frac{7}{4} & \frac{8}{3} & \frac{9}{2} \\ P_1 \frac{l}{\lambda} \left(\frac{D''}{D'}\right) = & 38' & 64' & 97' & 142' & 204' & 298' & 453' & 765' \\ \xi = & 5,5^m & 9,5^m & 13,5^m & 17,5^m & & & & \\ c_1 = & 4,5^m & 6,0^m & 13,5^m & 13,5^m & & & & \\ \mathfrak{P}_n = & 72' & 85' & 124' & 124' & & & & \end{array}$$

Für die ersten drei Felder ist  $\mathfrak{P}_n > P_1 \frac{l}{\lambda} \left(\frac{D''}{D'}\right)$ ; es müssen also hier (und nur hier allein) die Grundstellungen überschritten werden. Für die anderen Felder braucht man in die vorstehenden Zahlenreihen die Werte  $\mathfrak{P}_n$  erst gar nicht aufzunehmen, da die Werte  $P_1 \frac{l}{\lambda} \left(\frac{D''}{D'}\right)$  viel stärker anwachsen als die  $\mathfrak{P}_n$ . Man erkennt, daß der Parabelträger sich in dieser Beziehung ganz entgegengesetzt verhält wie der Parallelträger; bei letzterem ist  $\left(\frac{D''}{D'}\right) = 1$  und die Grundstellung muß gerade bei den Feldern in der Nähe von  $A$  überschritten werden.

Es ist nun noch nachzusehen, ob nicht noch ein weiteres Vorrücken des Zuges für irgend ein Feld geboten ist. Dies ist in der Tat erforderlich für das 9te Feld. Sobald sich nämlich der Zug um  $1,5^m$  weiter vorschiebt, wird  $\mathfrak{P}_n = 85' > (P_1 + P_2) \frac{l}{\lambda} \left(\frac{D''}{D'}\right) = 2 \cdot 38 = 76'$ . Man erhält für diese Stellung

$$A = \frac{1}{10} \cdot 85' = 8,5', \quad P' = \frac{17(1,5 + 3,0)}{4,0} = 19'$$

$$\min D_9 = -10,97 \cdot 8,5 + 2,44 \cdot 19 = -47'.*)$$

Die folgende Tabelle enthält die Berechnung der  $\min D$  und  $\max D$ .  $\xi$  bedeutet wieder die Länge der belasteten Strecke. Es ist  $P' = 17 \frac{1,5}{4,0} = 6,4'$ .

Feld	$\xi$ $m$	$c_1$ $m$	$b_n = \xi - c_1$ $m$	$\mathfrak{P}_n$ $t$	$\mathfrak{S}_n$ $tm$	$A = \frac{\mathfrak{P}_n b_n + \mathfrak{S}_n}{l}$ $t$	$D = AD' + P'D''$
8	9,5	6,0	3,5	85	255	13,8	$\min D_8 = -4,27 \cdot 13,8$ $+ 1,60 \cdot 6,4 = -49$
7	13,5	13,5	0		951	23,8	$\min D_7 = -2,42 \cdot 23,8$ $+ 1,38 \cdot 6,4 = -49$
6	16,0	13,5	2,5	124	951	31,5	$\min D_6 = -1,56 \cdot 31,5 = -49$
5	20,0	19,5	0,5	158	1721	45,0	$\max D_5 = +1,04 \cdot 45,0 = +47$
4	24,0	24,0	0		2508	62,7	$\max D_4 = +0,690 \cdot 62,7 = +43$
3	28,0	24,0	4,0	209	2508	83,6	$\max D_3 = +0,457 \cdot 83,6 = +38$
2	32,0	31,5	0,5	248	4134	106	$\max D_2 = +0,305 \cdot 106 = +32$

\*) Für die Grundstellung würde sich ergeben:  $c_1 = 3,0^m$ ;  $b_n = 4,0 - 3,0 = 1,0^m$ ;  $\mathfrak{P}_n = 57'$ ;  $\mathfrak{S}_n = 85,5'$ ;  $A = \frac{1}{4,0} (57 \cdot 1,0 + 85,5) = 3,56'$  und



Bezüglich der Vertikalen geben zunächst die folgenden Zahlenreihen Aufschluß über die ungünstigste Laststellung

$$\begin{array}{cccc}
 m = & 8 & 7 & 6 & 4 \\
 \left( \frac{V''}{V'} \right) = & 0,29 & 0,43 & 0,59 & 2,00 \\
 P_1 \frac{l}{\lambda} \left( \frac{V'}{V''} \right) = 170 \left( \frac{V''}{V'} \right) = & 49^t & 73^t & 100^t & 340^t \\
 \xi = & 9,5^m & 13,5^m & 17,5^m & 21,5^m \\
 c_1 = & 6,0^m & 13,5^m & 13,5^m & 21,0^m \\
 \mathfrak{P}_n = & 85^t & 124^t & 124^t & 175^t.
 \end{array}$$

Für die Vertikalen 4, 3 und 2 kommen also Grundstellungen in Betracht, und zwar entstehen  $\min V_4$ ,  $\min V_3$ ,  $\min V_2$  der Reihe nach gleichzeitig mit  $\max D_5$ ,  $\max D_4$ ,  $\max D_3$ . Man erhält mit den oben berechneten Werten  $A$ :

$$\begin{aligned}
 \min V_4 &= -\frac{3}{6} \cdot 45,0 = -22,5^t; & \min V_3 &= -\frac{2}{7} \cdot 62,7 = -18^t; \\
 \min V_2 &= -\frac{1}{8} \cdot 83,6 = -10,5.
 \end{aligned}$$

Weiter entsteht  $\max V_6$ , wenn die zweite Achse bei 6 liegt. Es ist dann  $\xi = 16,0 + 1,5 = 17,5$ ;  $c_1 = 13,5$ ;  $b_n = 4,0$ ;  $\mathfrak{P}_n = 124$ ;  $\mathfrak{S}_n = 951$ ;  $A = 36,2^t$

$$\max V_6 = +\frac{7}{4} \cdot 36,2 - 1,04 \cdot 6,4 = 57^t$$

$\max V_7$  und  $\min D_7$  entstehen bei derselben Laststellung; ebenso  $\max V_8$  und  $\min D_8$ . Man erhält daher

$$\begin{aligned}
 \max V_7 &= \frac{8}{3} \cdot 23,8 - 1,14 \cdot 6,4 = 56^t \\
 \max V_8 &= \frac{9}{2} \cdot 13,8 - 1,31 \cdot 6,4 = 54^t.
 \end{aligned}$$

Die Vertikalen 1 und 9 werden nur auf Zug beansprucht. Bei der in Fig. 550 angegebenen Laststellung entsteht  $\max V_9 = 17 + 2 \cdot 17 \frac{1,0 + 2,5}{4,0} = 47^t$ .

Für die Vertikale 5 ergibt sich für jede Laststellung

$$V_5 = -2 O_5 \sin \beta_5 = +2 \frac{M_5}{h_5} \operatorname{tg} \beta_5 = 0,10 \frac{M_5}{h_5}.$$

Dieser Wert ist stets positiv. Aus der Tabelle  $A$  auf Seite 539 entnehmen wir  $\max M_5 = 1420^t\text{m}$  und erhalten daher

$$\max V_5 = 0,10 \frac{1420}{0,5} = +28^t.$$

*b. Berechnung der Spannkkräfte in den Gurtungen.* Es ist

$$-O_m \cos \beta_m = +U_{m+1} = +\frac{M_m}{h_m},$$

$\min D_9 = -10,97 \cdot 3,56 = -39^t$ . Das bedeutet aber einen Fehler von 20 v. H. Im vorliegenden Falle ist nicht nur die Größe der Achsenbelastung, sondern auch die des Radstandes wichtig. Ermäßigt man z. B. die Achslast auf  $16^t$  und den Radstand auf  $1,3^m$ , so erhält man  $A = \frac{1}{10} \cdot 80 = 8^t$  und  $P' = \frac{16(1,3 + 2,6)}{4,0} = 15,6^t$  und findet dann  $\min D_9 = -10,97 \cdot 8,0 + 2,44 \cdot 15,6 = -50^t$ .

wo

$$M_m = M_{max} \frac{x_m (2d - x_m)}{d^2}$$

$$h_m = 4f \frac{x_m (l - x_m)}{l^2} \text{ und } d = 0,44 l,$$

mithin für  $x < 0,44 l$

$$\frac{M_m}{h_m} = 1,29 \frac{M_{max}}{f} \frac{0,88 l - x_m}{l - x_m}$$

Setzt man  $l = 10 \lambda$ ,  $x_m = m \lambda$ ,  $f = 5,0^m$ ,  $M_{max} = 1420^m$ , so erhält man für  $x < 0,44 l$  d. h. für  $m < 4,4$

$$\frac{M_m}{h_m} = 366 \frac{8,8 - m}{10 - m}$$

$$m = 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$$

$$\text{liefert } \frac{M_m}{h_m} = 317^t \quad 311^t \quad 303^t \quad 293^t.$$

In der Mitte ist  $\frac{M_m}{h_m} = \frac{1420}{5,0} = 284^t$ . Man erhält nun weiter für

$$m = 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$$

$$\sec \beta_m = 1,10 \quad 1,06 \quad 1,03 \quad 1,01 \quad 1,00$$

$$- O_m = \frac{M_m}{h_m} \sec \beta_m = 349^t \quad 330^t \quad 312^t \quad 296^t \quad 284^t.$$

Die berechneten Spannkkräfte sind in Fig. 543 zusammengestellt worden.

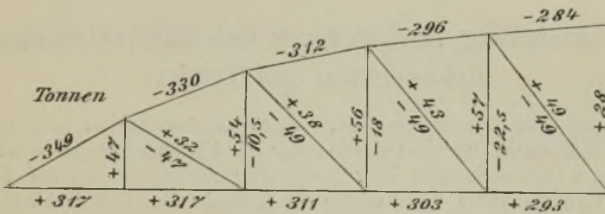


Fig. 543.

**3. Aufgabe.** Es sind die von der Verkehrslast herrührenden Stützenwiderstände  $A_{max}$  und  $A_{min}$  des in Fig. 544 dargestellten Gerber-Balkens zu berechnen. Die positive  $A$ -Fläche unterscheidet sich von der Einflußfläche für das Moment  $M_c$ .

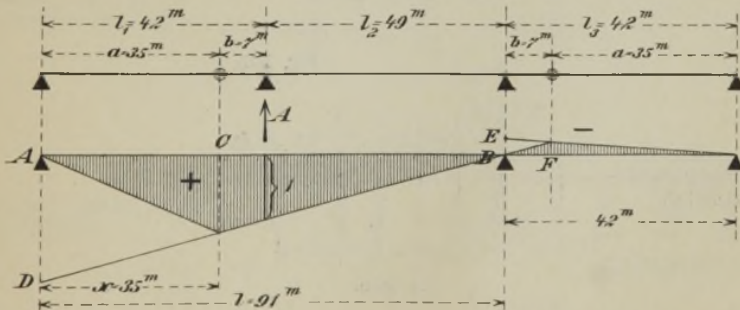


Fig. 544.

an der Stelle *C* eines gewöhnlichen Balkens *AB* nur dadurch, daß  $\frac{AD}{AC}$  nicht gleich 1, sondern gleich  $1 \cdot \frac{l}{l_2 \cdot a}$  ist.\*) Man erhält also

$${}_{max}A = \frac{l}{l_2 a} M_x = \frac{91}{49 \cdot 35} M_x = 0,0531 M_x.$$

Nach Tabelle (A) ist für  $l = 91^m$

$${}_{max}M = 5670 + 105 = 5775^{tm} = \text{rd. } 5780^{tm}$$

und nach Tabelle (B) für  $x : l = 35 : 91 = 0,385$

$$M_x = (0,981 + 0,005 \cdot 0,55) \cdot 5780 = 0,984 \cdot 5780 = 5690^{tm}$$

Man erhält also schließlich  $A_{max} = 302^t$ .

Für die negative Einflußfläche ist  $\frac{BE}{BP} = 1 \frac{a}{l_2 l_3} = \frac{35}{49 \cdot 42} = 0,0170$

$${}_{max}M = 1550^{tm} \text{ für } l = 42^m;$$

$$\frac{x}{l} = \frac{7}{42} = 0,17, \quad M_x = (0,595 + 0,01 \cdot 2,80) 1550 = 966^{tm}$$

$$A_{min} = -0,0170 \cdot 966 = -16^t.$$

#### IV.

### Zusammenstellung verschiedener Gewichtsverteilungen für Lokomotiven und Tender.

Da es immerhin vorkommen kann, daß es zweckmäßig ist, auch noch andere Belastungen in Betracht zu ziehen als die unter I und II angegebenen — wir brauchen nur auf unsere Untersuchungen über mehrteilige Fachwerke und auf die Fußnote auf Seite 560 zu verweisen — so dürfte die folgende zum Teil dem auf Seite 547 erwähnten Ausschußberichte entnommene Zusammenstellung nicht überflüssig sein.

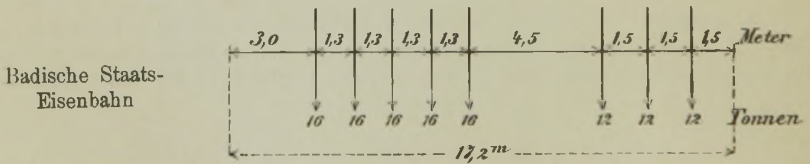


Fig. 545.

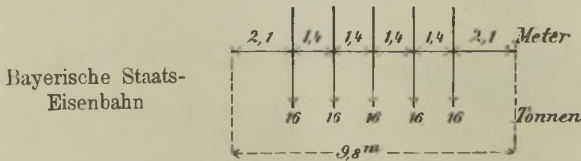


Fig. 546.

\*) Vergl. Seite 157, § 19 und Seite 168 No. 99.



Sächsische Staats-Eisenbahn

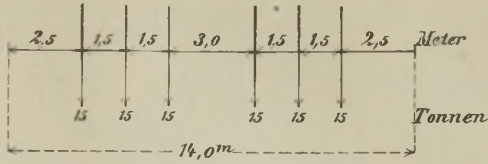


Fig. 547.

Österreich.  
Kaiser Ferdinands-Nordbahn

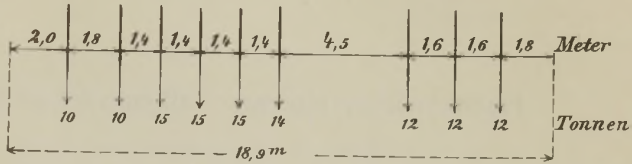


Fig. 548.

K. K. Österreichische Staats-  
bahnen

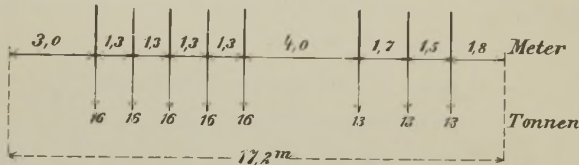


Fig. 549.

Österreich.-Ungar. St.-E.-G.

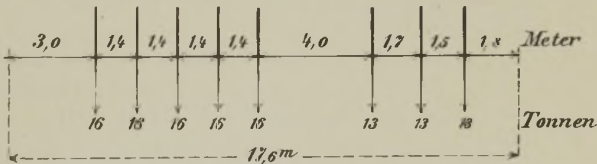


Fig. 550.

K. Ungarische Staatsbahn

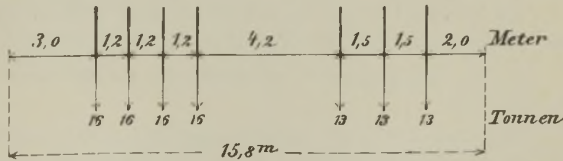


Fig. 551.

Ministerium der Verkehrswege  
in Rußland

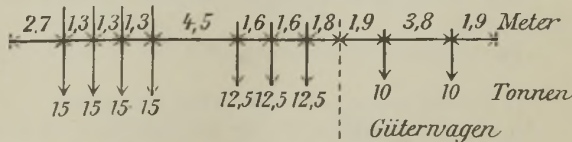


Fig. 552.\*)

\*) In Rußland müssen auf beiden Seiten der Lokomotiven Güterwagen angenommen werden.

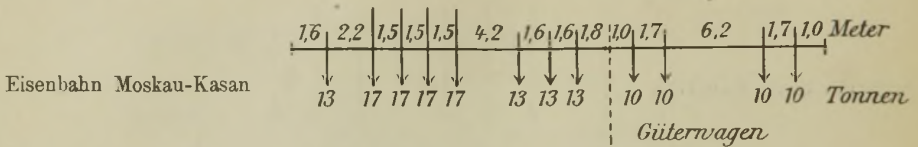


Fig. 553.\*)

## V.

**Eigengewichte eiserner Balkenbrücken für Eisenbahnen.**

1. Die in der Tabelle F zusammengestellten Formeln von *Dirksen*\*\*) gelten für eingleisige Eisenbahnbrücken, die nach den für die Preußischen Staatsbahnen erlassenen Vorschriften berechnet werden und setzen voraus: rechtwinkligen Grundriß, nicht beschränkte Bauhöhe und ein in der Geraden liegendes Gleis.

Zur Ergänzung dienen folgende Angaben:

- a) Höhe des vollwandigen Hauptträgers  $\frac{1}{14} l$  statt  $\frac{1}{10} l$ , Erhöhung des Hauptträgergewichtes um 20 v. H.
- b) Höhe des Parallelträgers  $\frac{1}{12} l$  statt  $\frac{1}{8} l$ , Erhöhung des Hauptträgergewichtes um 15 v. H.
- c) Sehr beschränkte Bauhöhe, Erhöhung des Fahrbahngewichtes bis zu 20 v. H.
- d) Schiefer Grundriß, Erhöhung des Fahrbahngewichtes bis zu 15 v. H.
- e) Krümmung des Gleises über 300<sup>m</sup> bei Stützweiten unter 40<sup>m</sup>, Erhöhung des Gesamtgewichtes bis etwa 12 v. H.

Annahmen über die bauliche Ausbildung der Brücken.

Zu 1) und 2): Stegblechdicke der Blechträger 1,2<sup>cm</sup>, Stegblechsaussteifungen in Entfernungen gleich der Stegblechhöhe; bei Stützenweiten über 15<sup>m</sup> Rollenlager.

Zu 3): Bei Überbauten mit Stützweiten über 40<sup>m</sup> wird ein oberer Windverband angeordnet, daher der Sprung in der Eisengewichtsformel.

Zu 8): Stegblechhöhe mit Rücksicht auf die meist beschränkte Bauhöhe  $\frac{1}{12}$  der Stützweite.

Bedielung 5<sup>cm</sup> stark, Schwellenentfernung 60<sup>cm</sup>, Schwellenstärke 20 · 26<sup>cm</sup>, nur bei den Blechträgerbrücken mit 2<sup>m</sup> Hauptträgerentfernung 24 · 30. Gewicht des Holzes 1<sup>t</sup>/<sub>m<sup>3</sup></sub>, der Bettung 2<sup>t</sup>/<sub>m<sup>3</sup></sub>. Bettungsstärke 36<sup>cm</sup> über Fahrbahnträgeroberkante.

Falls Leitschienen angeordnet werden, ist noch ihr Gewicht von 150<sup>kg</sup>/<sub>m</sub> zu berücksichtigen.

Für zweigleisige Eisenbahnbrücken sind die angegebenen Zahlen zu verdoppeln.

\*) Wiedergegeben nach Abrundung der Zahlen.

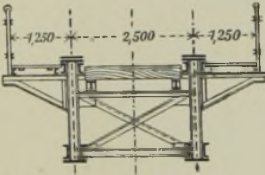
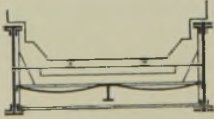
\*\*) *Dirksen, Hilfswerte für das Entwerfen der Brücken mit eisernem Unterbau.* Enthält außer Gewichtsangaben eine Reihe von wertvollen Hilfstafeln zur Berechnung der Fahrbahn eiserner Eisenbahnbrücken und zur Querschnittsbestimmung auf Druck beanspruchter Füllungsglieder eiserner Fachwerkbrücken.

F. Eigengewichte eiserner Eisenbahnbrücken nach *Dirksen*.

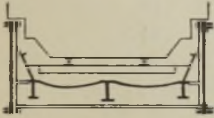

Baart der Brücke	Eisengewicht (zu Veranschlagungen)			Gesamtes Eigen- gewicht  <i>kg/m</i>	
	Hauptträger mit Querverband, Windverband und Lager  <i>kg/m</i>	Fahrbahn- träger  <i>kg/m</i>	Fahrbahn- tafel (Schienen, Schwellen, Bohlen- lag, ohne Lettschienen)  <i>kg/m</i>		
<p>1) Blechträger mit unmittelbarer Schwellenauflagerung. <math>l = 10 - 25\text{ m}</math>.</p> <p>Fig. 554.</p>	<p><math>240 + 54l</math> <math>l = \text{Stützweite}</math> <math>\text{in } m</math></p>	<p>Breite  <math>1,8^1)</math> <math>2,0^1)</math></p>	<p>640 775</p>	<p><math>880 + 54l</math> <math>1015 + 54l</math></p>	
<p>2) Blechträger mit versenkter Fahrbahn u. einem seitlichen Fußweg. <math>l = 10 - 25\text{ m}</math>.</p> <p>Fig. 555.</p>	<p><math>270 + 44l</math></p>	<p>3,0 3,8 3,7</p>	<p>380 430 520</p>	<p>595 630 660</p>	<p><math>1245 + 44l</math> <math>1330 + 44l</math> <math>1450 + 44l</math></p>
<p>3) Fachwerkträger, Fahrbahn versenkt, ohne besonderen Fußweg. <math>l = 20 - 40\text{ m}</math>.</p> <p>Fig. 556.</p>	<p><math>540 + 27l</math></p>	<p>4,8 4,9 5,0</p>	<p>600 625 670</p>	<p>680</p>	<p><math>1820 + 27l</math> <math>1845 + 27l</math> <math>1890 + 27l</math></p>

1) Hauptträgerentfernung statt Breite.



Bauart der Brücke	Eisengewicht (zu Veranschlagungen)			Gesamtes Eigen- gewicht  <i>kg/m</i>
	Hauptträger mit Querverband, Windverband und Lager  <i>kg/m</i>	Fahrbahn- träger  <i>kg/m</i>	Fahrbahn- tafel/Schienen, Schwellen, Bohlenbe- leg, ohne Leitbahnen  <i>kg/m</i>	
4) Fachwerkträger, Fahrbahn versenkt, ohne besonderen Fußweg. $l = 40 - 80^m$ .	$680 + 27l$	Breite 4,8 600 4,9 625 5,0 670	680	$1960 + 27l$ $1985 + 27l$ $2030 + 27l$
5) Fachwerkträger, Fahrbahn oben.   Fig. 557.	$540 + 27l$	2,5 <sup>1)</sup> 490 3,5 <sup>1)</sup> 580	550	$1580 + 27l$ $1670 + 27l$
6) Blechträger mit durchgehen- dem Kiesbett. $l = 10 - 25^m$ .   Fig. 559.	$270 + 49l$	3,3 670 3,7 840	2840 3260	$3780 + 49l$ $4370 + 49l$

1) Hauptträgerentfernung statt Breite.

Bauart der Brücke	Eisengewicht (zu Veranschlagungen)			Gesamtes Eigen- gewicht
	Hauptträger mit Querverband, Windverband und Lager  <i>kg/m</i>	Fahrbahn- träger  <i>kg/m</i>	Fahrbahn- tafel (Sohlenn, Schwellen, Bohlenbe- lag, ohne Leitschienen)  <i>kg/m</i>	
7) Blechträger mit durchgehen- dem Kiesbett. $l = 10 - 25^m$ .		Breite		
	$270 + 49l$	3,3 3,7	770 940	2680 2820
Fig. 560.				$3720 + 49l$ $4030 + 49l$
8) Blechträger mit durchgehen- dem Kiesbett über den Haupt- trägern. $l = 10 - 20^m$ .		Eisengewicht für 1 <sup>m</sup> Brücken- breite.		
	$160 + 24l$			1080 + 24l
Fig. 561.				920

2. Die Tabelle G enthält Angaben von *Paton* über die Eigengewichte einer größeren Anzahl russischer Brücken. Der in Rußland für die statische Untersuchung vorgeschriebene Lastzug ist leichter als der Preußische Lastzug, dafür sind aber die zugelassenen Spannungen  $\sigma$  niedriger.

## G. Eigengewichte eiserner

Nr.	Spannweite		Ständige Belastung $g = \alpha l + F$				Eisengewicht					
	$l$ m	$g$ kg	$\alpha$	$F$		der beiden Hauptträger		Querverbände		Fahrbahntafel		Anlagerteile
				Längs- u. Querträger kg	Fahrbahn!) kg	im ganzen kg	v. H. kg	im ganzen kg	v. H. kg	im ganzen kg	v. H. kg	
1	2,67	765	123,2	—	436	648	73,5	233	26,5	—	—	290
2	3,85	859	96,4	—	488	1035	72,5	405	27,5	—	—	235
3	5,00	885	85,8	—	456	1721	80	425	20	—	—	409
4	6,91	965	73,6	—	456	2860	81	653	19	—	—	565
5	9,14	1023	62,1	—	456	4180	81	1010	19	—	—	619
6	11,48	1148	60,3	—	456	6240	78,5	1720	21,5	—	—	612
7	14,85	1161	46,8	—	456	8200	79,5	2130	20,5	—	—	646
8	18,56	1221	39,0	—	498	11618	87	1830	13	—	—	1682
9	19,51	1689	56,7	46	518	19582	85	2473	11	900	4	2509
10	22,8	1661	49,6	33	497	21924	82	3849	14	755	2	2162
11	26,6	1764	46,6	35	485	29025	85	4008	11	940	4	2854
12	27,02	1720	42,6	69	500	28313	85	2899	8,5	1890	6,5	2080
13	33,14	1932	41,9	42	500	42948	90	3120	6,5	1412	2,5	3098
14	55,25	3121	39,6	420	523	109400	76	10800	8	23200	16	7865
15	65,43	4552	41,9 <sup>2)</sup>	806 <sup>2)</sup>	1005 <sup>2)</sup>	159892	69	19541	9	52743	22	11679
16	87,5	4290	36,2	648	475	242736 <sup>3)</sup>	73	34438	10	56736	17	10109

) Die Fahrbahn besteht aus den Schienen und Leitschienen, der Befestigung

2) Gewicht verhältnismäßig hoch, weil Brücke während der Zugpausen von

3) Infolge nicht ganz gelungener Querschnittsbildung der Druckstäbe ist das



Eisenbahnbrücken nach Paton.

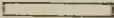
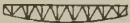



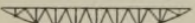
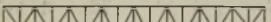
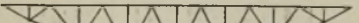
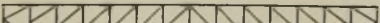
des gesamten Eisens		Zugelassene Hauptspannung $\sigma$ $\frac{kg}{cm^2}$	Angaben über den Hauptträger $h = \text{Höhe}$			Hauptträger- entfernung	Fahrbahntafel	Verbände
kg	auf 1 m kg		Form des Trägers	$\frac{l}{h}$	Feld- weite $\lambda$			
1171	439	706		7,12	—	1,83	Hölzerne Querschwellen auf den Hauptträgern liegend.	
1675	432	708		6,47	—	1,83		
2555	511	710		8,13	—	1,83		
4078	590	714		8,00	—	1,83		
5809	637	718		8,18	—	1,83		
8572	746	723		9,42	—	1,83		
10976	738	727		9,73	—	1,98		
15130	816	736		10,7	—	1,98		
25464	1300	714		7,89	1,22	1,83		
28690	1255	745		8,6	1,43	2,44		
36827	1390	753		8,87	1,50	2,28		
35182	1300	754		8	1,93	2,13		
50578	1530	766		8	1,83	2,13		
151265	2740	785		8	3,45	2,72		
243855	3725	806		7,16	4,67	4,87		
344019	3930	850		7	6,25	4,25		

Fig. 562—570.

des Belags und den Querschwellen.

Fuhrwerken befahren wird.

Gewicht zu hoch ausgefallen.

Nr.	Spannweite <i>l</i> <i>m</i>	Ständige Belastung $g = \alpha l + F$				Eisengewicht							
		<i>g</i> <i>kg</i>	$\alpha$	<i>F</i>		der beiden Hauptträger		Querverbände		Fahrbahntafel		Anlager- teile	
				Längs- u. Querträger <i>kg</i>	Fahr- bahn <sup>1)</sup> <i>kg</i>	im ganzen <i>kg</i>	v. H. <i>kg</i>	im ganzen <i>kg</i>	v. H. <i>kg</i>	im ganzen <i>kg</i>	v. H. <i>kg</i>		
17	13,58	2106	50,0	882	565	8507	40	715	3	11979	57		997
18	17,88	2104	48,8	666	565	14909	54	700	3	11908	43	1525	
19	22,36	2151	43,8	656	516	21130	58	804	2	14676	40	1826	
20	22,8	1957	37,9	591	502	18655	56	1055	3	13474	41	1517	
21	33,14	2490	38,6	695	516	40966	63	1440	3	23030	36	3751	
22	44,5	2875	41,1	541	505	75603	72	5872	6	24069	22	5100	
23	55,06	3097	36,0	613	505	99159	70	9854	7	33782	23	6241	
24	66,14	3392	34,4	623	492	134462	70	16373	8	41155	22	8780	
25	78,0	3698	33,1	653	464	180131	72	21055	8	50909	20	9189	
26	98,0	4388	31,3	818	503	270397	72	30287	8	80019	20	13145	
27	109,2	4678	31,8 <sup>2)</sup>	770	436	342762	74	36354	8	84122	18	13492	
28	126,8	4993	29,8	788	436	423816	73	52606	9	102702	18	17656	

<sup>1)</sup> Die Fahrbahn besteht aus den Schienen und Leitschienen, der Befestigung des

<sup>2)</sup> Der Träger ist verhältnismäßig schwer, weil zwei Gehwege vorhanden sind.

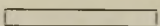
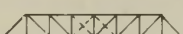
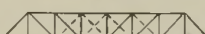
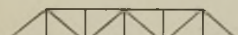

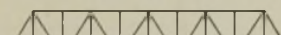
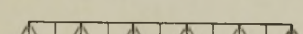
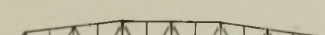
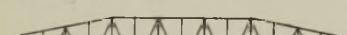
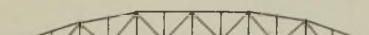
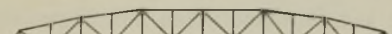

des gesamten Eisens		Zugelassene Hauptspannung $\sigma$ $\frac{kg}{cm^2}$	Angaben über den Hauptträger $h = \text{Höhe}$			Feld- weite $\lambda$	Hauptträger- entfernung	Fahrbahn- tafel	Verbände
kg	auf 1 m kg		Form des Trägers						
22198	1635	726		10	2,13	5,18	Hölzerne Querschwellen.	Offene Brücken, nur mit unterem wagerechten Verbande.	
29042	1624	772		7,9	2,24	5,23			
38437	1719	789		7,85	2,85	5,23			
34701	1522	766		6,41	3,8	5,4			
69187	2087	766		9,06	3,66	5,29			
110645	2486	789		6,44	4,47	5,43			
149036	2706	810		7,42	4,57	5,49			
200770	3034	832		6,58	4,72	5,58			
261284	3349	856		7,11	4,88	5,58			
393848	4018	896		6,53	7,00	6,00			Eiserne Quer- und Längsträger. Hölzerne Querschwellen.
476730	4365	918		6,74	7,8	6,0			
596780	4706	953		6,71	7,93	6,1			

Fig. 571 - 582.

Belags und den Querschwellen.



## VI.

**Eiserne Straßenbrücken.****1. Eigengewichte von Straßenbrücken mit Balkenträgern.\*)**

Nach der Stärke des aufzunehmenden Verkehrs kann man leichte Landstraßenbrücken und schwere Stadtstraßenbrücken unterscheiden.

**Landstraßenbrücken mit doppeltem Bohlenbelage.**

Das gesamte Eisengewicht der *Fahrbahn* einschl. der Hauptträger ist:

$$g = 105 + 2,3l + 0,02l^2 \text{ kg/qm.}$$

Gewicht des Bohlenbelages (160 mm stark) =  $110 \text{ kg/qm}$ .

Finden sich außerhalb der Hauptträger noch besondere, mit Holz bedeckte *Fußwege*, so entspricht diesen ein Eisengewicht (einschl. der erforderlichen Verstärkung der Hauptträger, aber ausschl. der Geländer) von:

$$g' = 60 + 2,3l \text{ kg/qm.}$$

**Landstraßenbrücken mit Beschotterung.**

Eisengewicht, ausschl. des Gewichtes der Belageisen:

$$g = 125 + 2,8l + 0,025l^2 \text{ kg/qm.}$$

Für Belageisen sind  $65 \text{ kg/qm}$  und für Schotter  $400 \text{ kg/qm}$  hinzuzurechnen. Eisengewicht  $g'$  außenliegender Fußwege wie vorhin:

$$g' = 60 + 2,3l \text{ kg/qm.}$$

**Stadtstraßenbrücken mit doppeltem Bohlenbelage.**

$$g = 155 + 2,7l + 0,021l^2 \text{ kg/qm; } g' = 80 + 2,7l \text{ kg/qm.}$$

Gewicht des Bohlenbelages (200 mm stark) =  $140 \text{ kg/qm}$ .

**Stadtstraßenbrücken mit Beschotterung.**

$$g = 170 + 3,2l + 0,028l^2 \text{ kg/qm; } g' = 80 + 2,7l \text{ kg/qm.}$$

Gewicht des Schotters =  $480 \text{ kg/qm}$ ; Gewicht der Belageisen =  $80 \text{ kg/qm}$ .

**Stadtstraßenbrücken mit Pflasterung.**

$$g = 180 + 3,7l + 0,029l^2 \text{ kg/qm; } g' = 80 + 2,7l \text{ kg/qm.}$$

Gewicht der Pflasterung =  $700 \text{ kg/qm}$ ; Gewicht der Belageisen =  $80 \text{ kg/qm}$ ; Gewicht der Buckelplatten (8 mm stark) =  $65 \text{ kg/qm}$ .

**2. Eigengewichte von Straßenbrücken mit Bogenträgern.\*\*)**

Das Gewicht der *Hauptträger* (einschl. der Wind- und Querkreuze) ist für 1 lfd.  $m$  Stützweite (für Bögen mit zwei Gelenken):

$$g = \gamma b + 35z \text{ in kg,}$$

worin:  $b$  die Breite der Brücke in  $m$ ,

$z$  die Anzahl der Hauptträger und

$\gamma$  der folgenden Zusammenstellung zu entnehmen ist.

\*) Nach Engesser, Zeitschr. f. Baukunde 1881, S. 66.

\*\*\*) Nach Engesser, Theorie und Berechnung der Bogenfachwerkträger ohne Scheitgelenk, Berlin 1880.

Stützweite $l$ in $m =$	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Fahrbahn mit Beschotterung; $\gamma =$	32	62	94	129	168	209	255	300	350	410
Fahrbahn mit doppeltem Bohlenbelage; $\gamma =$	28	53	80	110	144	180	220	260	305	355

Für Bogenträger mit drei Gelenken darf man die vorstehenden Zahlenwerte um 15% vermindern.

### 3. Verkehrslasten der Straßenbrücken.

Die Verkehrslast besteht aus der Belastung durch Menschen und Fuhrwerke. Für die Hauptträger bei Brücken bis etwa 30m Spannweite wirken die größten Radlasten in der Regel ungünstiger als Menschengedränge (s. unten). Es genügt dann, für *Landstraßenbrücken* Wagen mit 3,0 bis 3,5 m Radstand und (je nach der Be-

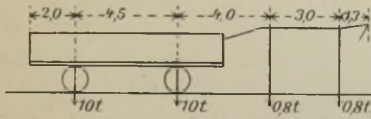


Fig. 583.

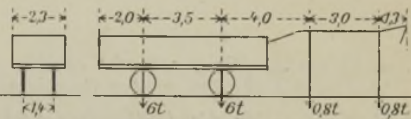


Fig. 584.

deutung der Straße) 3 bis 6t Achsbelastung anzunehmen, ferner, vergleichsweise, eine 6t schwere Chausseewalze.

*Stadtstraßenbrücken* berechnet man unter der Annahme der Belastung durch einen zweiachsigen Wagen mit je 10t (bis 12t) Achsdruck und mit 4,5m Radstand (vergl. Fig. 583). In besonderen Fällen ist die Last der Dampfwalze, 10t für das Vorderrad, 13t für die Hinterräder zusammen, einzuführen (Fig. 585). Der übrige Teil der Fahrbahntafel wird mit leichteren, zweiachsigen Wagen von je 6t Achsdruck und 3,5m Radstand (vergl. Fig. 584) und mit Menschengedränge belastet gedacht.

Die Hauptträger von Straßenbrücken größerer Spannweite werden gewöhnlich für Belastung durch Menschengedränge berechnet.

Dampfwalze.

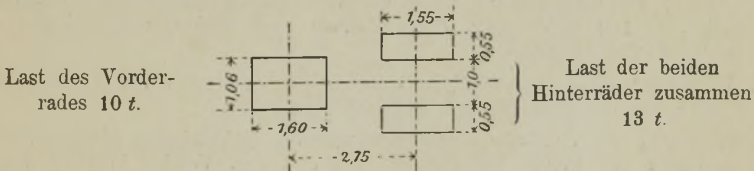


Fig. 585.

Für die Berechnung der Fahrbahn sind in jedem Falle die ungünstiger wirkenden Einzellasten einzuführen.

Für *Menschengedränge* rechnet man durchschnittlich (fünf bis sechs Menschen auf 1 qm)  $p_m = 400 \text{ kg/qm}$ . Bei Lage der Brücken in einem Dorfe  $p_m$  vielleicht nur 300, in Städten besser  $500 \text{ kg/qm}$ .

## Literatur zu den Abschnitten I, II und III.

1. **C. Culmann**, *Die graphische Statik*. Die erste Auflage dieses grundlegenden Werkes des Begründers der Graphischen Statik erschien 1864, die zweite 1875.
2. **O. Mohr**, *Über die Bestimmung und die graphische Darstellung von Trägheitsmomenten ebener Flächen*, *Zivilingenieur* 1887, S. 43. Diese Abhandlung enthält u. a. die in No. 34 des vorliegenden Buches mitgeteilte graphische Darstellung der Trägheitsmomente mit Hilfe eines Kreises vom Durchmesser  $J_{max} + J_{min}$ . In der zweiten Auflage benutzte ich einen Kreis vom Durchmesser  $J_{max} - J_{min}$ , der aber bei geringem Unterschiede der beiden Grenzwerte weniger bequem ist wie der von Mohr eingeführte Kreis. Dagegen habe ich an dem in meiner früheren Darstellung befolgten Verfahren, den Kreis durch zwei Trägheitsmomente und ein Zentrifugalmoment zu bestimmen, festgehalten.
3. **R. Land**, *Über die Berechnung und die bildliche Darstellung von Trägheitsmomenten und Zentrifugalmomenten ebener Massenfiguren*, *Zivilingenieur* 1888, S. 123 u. *Zeitschr. f. Bauwesen*, 1892, S. 550. Es wird der von Mohr eingeführte Kreis benutzt und als drittes Bestimmungsstück (in Übereinstimmung mit der zweiten Auflage meiner Graphischen Statik) ein Zentrifugalmoment gewählt. Ich hebe dies nur deshalb hervor, weil im Taschenbuch der *Hütte* 1899, Teil I, S. 180 steht: *Der Trägheitskreis nach Mohr-Land*, während es nur heißen darf *nach Mohr*.
4. **W. Ritter**, *Eine neue Festigkeitsformel*, *Zivilingenieur* 1876, S. 309. Zeigt die Berechnung der Spannungen  $\sigma$  mit Hilfe des Kerns.
5. **W. Keck**, *Exzentrische Druckbelastung eines zylindrischen Mauerwerkkörpers außerhalb des Kerns*, *Zeitschr. des Arch. u. Ing. Vereins in Hannover* 1882, S. 301 und *Exzentrische Druckbelastung außerhalb des Kerns bei Mauerwerkkörpern von ringförmigem Querschnitte*, dieselbe Zeitschrift, 1882, S. 627. Enthält u. a. wertvolle Formeln und Tabellen zur Berechnung von Schornsteinen auf Winddruck.
6. **O. Mohr**, *Über die Verteilung der exzentrischen Druckbelastung eines Mauerwerkkörpers*, *Zeitschr. d. Arch. u. Ing. Vereins in Hannover*, 1883, S. 163. Gibt die auf Seite 87, Fig. 82 mitgeteilte Konstruktion der Nulllinie an.
7. **Hüppner**, *Zur Ermittlung der Druckverteilung in Mauerwerksquerschnitten*, *Zivilingenieur*, 1885, S. 39. Behandelt zum ersten Male den Fall eines nicht in einer Symmetrieachse liegenden Angriffspunktes.



8. F. Heinemann, *Exzentrische Druckbelastung außerhalb des Kerns bei Mauerwerkskörpern ringförmigen Querschnitts*, Zeitschr. d. Arch. u. Ing. Vereins in Hannover, 1891. Erweiterung der Keckschen Tabellen.
9. A. Meyerhof, *Die Biegungsspannungen der Z-Eisen zu Schiffbauzwecken*, Zeitschr. d. Vereins deutscher Ing., 1899, S. 607.
10. W. Ritter, *Anwendungen der Graphischen Statik*, Teil I, 1888, Teil II, 1890.

### Literatur zu den Abschnitten IV bis XIII.

1. Aug. Ritter, *Elementare Theorie und Berechnung eiserner Dach- und Brückenkonstruktionen*, Hannover 1863. 6. Auflage, Leipzig 1904. Untersuchung des einfachen Dreiecksystems mit Hilfe von Momentengleichungen.
2. C. Culmann, *Die graphische Statik*, 1864, 1875. Behandlung des einfachen Dreiecksystems mittels der Zerlegung einer Kraft nach drei Richtungen.
3. J. Clark Maxwell, *On the application of the theory of reciprocal polar figures to the construction of diagrams of forces*. Engineer, Vol. 24, S. 402. Hier wird zum ersten Male die Konstruktion reziproker Kräftepläne für Fachwerke mit konstanter Belastung gezeigt. Allgemeinere Untersuchungen hat Maxwell niedergelegt in der Abhandlung: *On reciprocal figures and diagrams of forces*. Philosophical Magazine, April 1864, S. 250.
4. L. Cremona, *Le figure reciproche nella Statica Grafica*. Milano, J. Giugno, 1872. Die Untersuchungen von Cremona sind viel allgemeiner gehalten als die von Maxwell.
5. E. Winkler, *Vortrag über die Berechnung von Bogenbrücken*. Mitteil. d. Archit. u. Ing. Vereins für Böhmen, 1868. In dieser Arbeit wurden zum ersten Male Einflußlinien benutzt. Die allgemeine Bedeutung dieses Verfahrens hatte Winkler aber damals noch nicht erkannt, was daraus hervorgeht, daß er in der ersten Auflage des unter 6 angeführten Werkes die statisch bestimmten Träger ohne Einflußlinien behandelte.
6. E. Winkler, *Theorie der Brücken*, Heft I: *Äußere Kräfte der Balkenträger*, Heft II: *Innere Kräfte der Balkenträger*, Wien, 1873—1886.
7. O. Mohr, *Beitrag zur Theorie der Bogenfachwerkträger*, Zeitschrift des Architekt. u. Ing. Vereins in Hannover, 1874, S. 223. Enthält in Form einer Anmerkung ein beachtenswertes Verfahren zur graphischen Berechnung des Fachwerkbalkens.
8. Fränkel, *Über die ungünstigste Einstellung eines Systems von Einzellasten auf Fachwerkträgern mit Hilfe von Influenzkurven*. Civilingenieur, 1876.
9. H. Müller-Breslau, *Abschnitt über die Berechnung des Fachwerks im Taschenbuch der Hütte*. 11. Auflage, 1877. Enthält die erste Arbeit des Verfassers über Einflußlinien. Der fragliche Abschnitt befand sich bereits 1875 in den Händen der Taschenbuchkommission.
10. H. Zimmermann, *Das Momentenschema*, Zeitschr. d. Architekt. u. Ing. Vereins in Hannover 1877, S. 61. Aufstellung von Tabellen zur Erleichterung der Berechnung der Eisenbahnbrücken für Einzellasten.

11. **H. Müller-Breslau**, *Theorie und Berechnung der eisernen Bogenbrücken*. Berlin 1880. Die dort gegebene Darstellung der Einflußlinien stammt ebenfalls aus dem Jahre 1875 und wurde vor der Veröffentlichung vom Verfasser in seinen damals gehaltenen Privatvorlesungen benutzt\*).
12. **A. Foepl**, *Theorie des Fachwerks*, Leipzig 1880. Enthält eine Reihe grundlegender Untersuchungen.
13. **L. Henneberg**, *Statik der starren Systeme*, Darmstadt 1886.
14. **Grübler**, *Beitrag zur Theorie des ebenen einfachen Fachwerks*, Rigasche Industrie-Zeitung 1887. Behandelt die Frage der Starrheit eines Fachwerks mit Hilfe der Polbestimmungen für kinematische Ketten.
15. **H. Müller-Breslau**, *Beitrag zur Theorie des ebenen Fachwerks*, Schweiz. Bauzeitung 1887, Mai S. 121, und Nov. S. 129. Entwicklung der kinematischen Theorie des Fachwerks sowohl mit Hilfe der Figur  $F'$  als auch mittels der augenblicklichen Drehpunkte der Glieder kinematischer Ketten. Hinweis auf die *Williotsche* Darstellungsweise der Verrückungen der Knotenpunkte eines elastischen Fachwerks\*\*).
16. **O. Mohr**, *Über Geschwindigkeitspläne und Beschleunigungspläne kinematischer Ketten*, Zivilingenieur 1887. Anwendung des *Williotschen* Verfahrens auf die Darstellung der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen kinematischer Ketten.
17. **R. Land**, *Kinematische Theorie der statisch bestimmten Träger*, Zeitschr. d. österr. Ing. u. Arch. Vereins 1888, S. 11 u. 162. Stützt sich hauptsächlich auf die Anwendung der *Williotschen* Darstellungsweise, benutzt aber auch Polbestimmungen.
18. **F. Schur**, *Über ebene einfache Fachwerke*, Mathematische Annalen 1897, S. 142. Knüpft an meine unter 11 aufgeführte kinematische Theorie des Fachwerks an. Wenn Schur die Einführung eines einzigen Momentenpunktes als ein neues Verfahren hinstellt, so beruht dies wohl auf Übersehen meiner späteren Arbeiten (vergl. u. a. Zentralblatt d. Bauverwaltung 1892, S. 246).
19. **G. Mehrrens**, *Statisch bestimmte mehrteilige Wandgliederung der Gitterträger*, Zeitschr. f. Architektur u. Ingenieurwesen, Wochenausgabe, 1898, S. 329. Vergl. die Anmerkung auf Seite 533 des vorliegenden Buches.
20. **Landsberg**, *Statik der Hochbaukonstr.* Handbuch der Architektur, I. Teil. 2. Aufl. 1899.
21. **W. Dietz**, *Beitrag zum statisch bestimmten gegliederten Balkenträger mit zweifachem Ausfüllsystem*, Zeitschr. d. Vereins Deutscher Ingenieure 1899, S. 230. Enthält eine beachtenswerte vergleichende Untersuchung verschiedener Doppelfachwerke.
22. **Schlink**, *Stabilitäts- und Spannungsuntersuchungen von Fachwerksträgern*. Zeitschr. für Architekt. u. Ingenieurwesen, 1903, S. 397.

\*) Die in diesem Buche und in meiner Graphischen Statik mitgetheilten Verfahren zur Darstellung der Einflußlinien statisch bestimmter Träger hat Herr *Mehrrens* in seinen kürzlich erschienenen Vorlesungen über Statik der Baukonstruktionen ohne Angabe der Quelle benutzt, desgleichen meine kinematischen Beiträge zur Berechnung statisch bestimmter Systeme und noch manches andere. Der große Umfang dieser Entlehnungen zwingt mich zu dieser Feststellung.

\*\*\*) Vergl. Abschnitt I, § 1 der ersten Abteilung des II. Bandes.





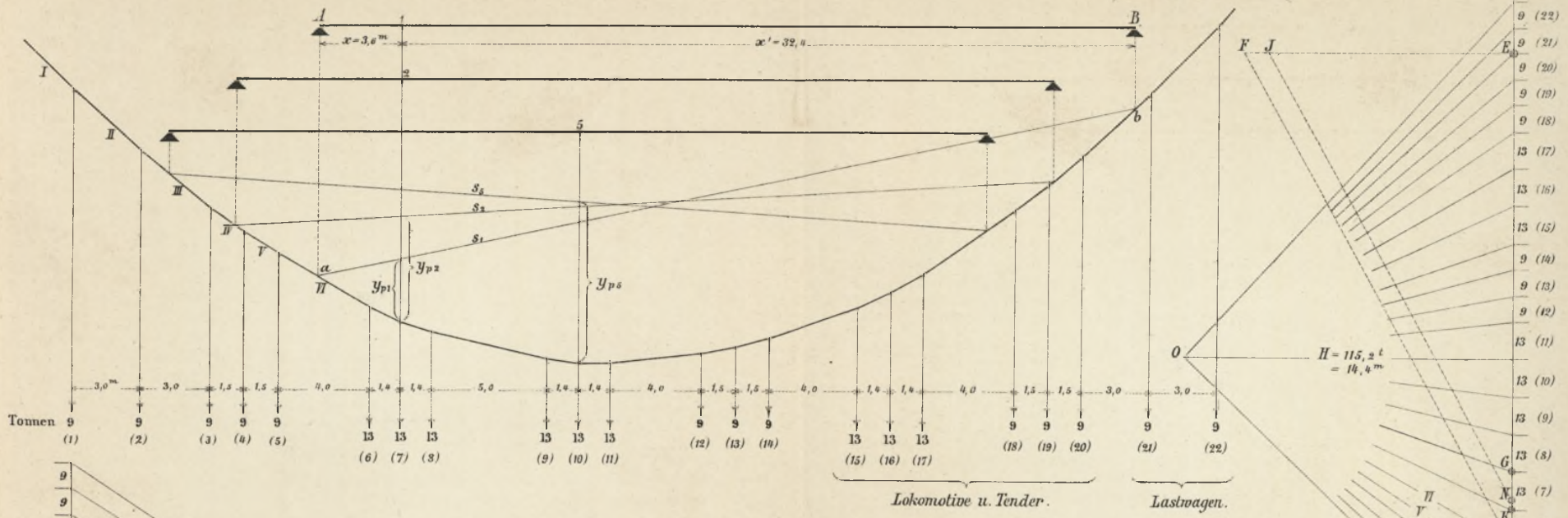


Fig. 126. (Seite 137).

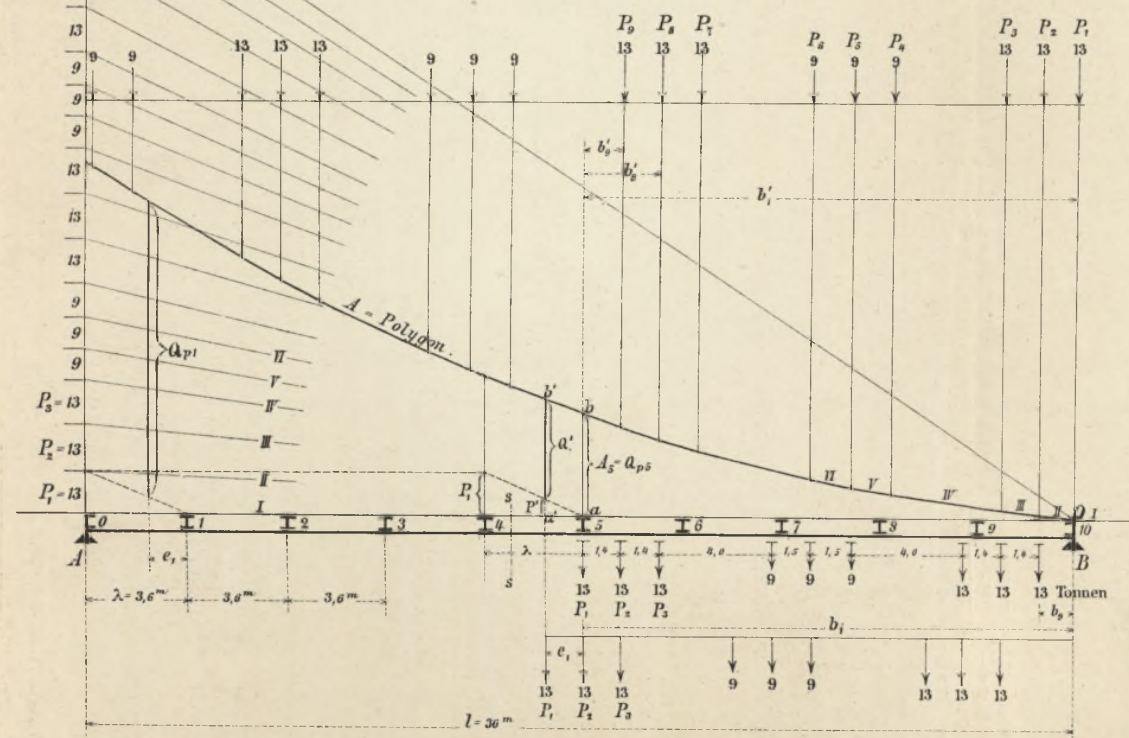


Fig. 129. (Seite 141).

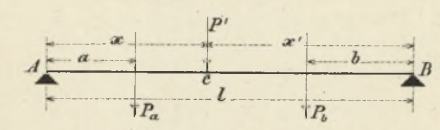


Fig. 130. (Seite 142).

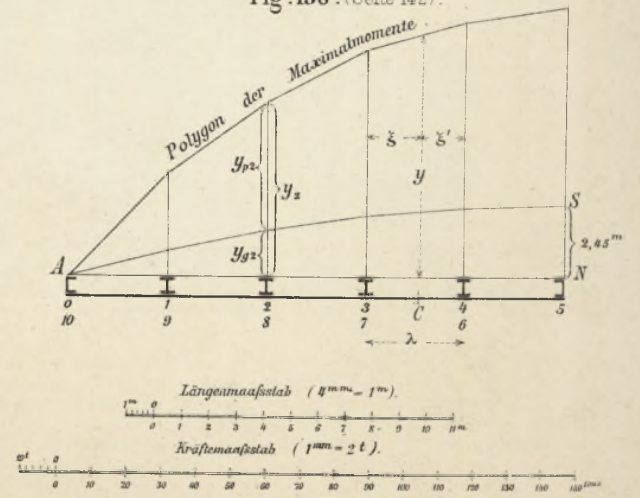




Fig. 196<sup>a</sup> (Seite 218).

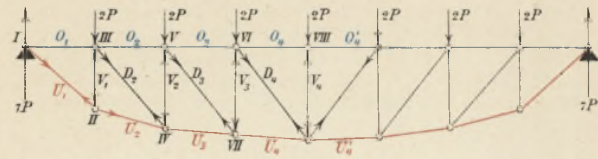


Fig. 196<sup>b</sup>

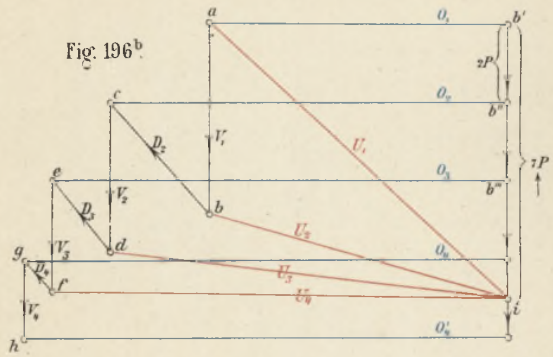


Fig. 197<sup>a</sup> (Seite 219).

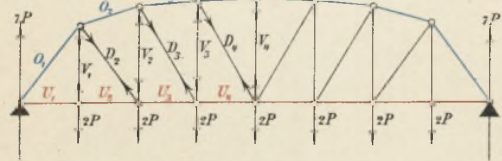


Fig. 197<sup>b</sup>

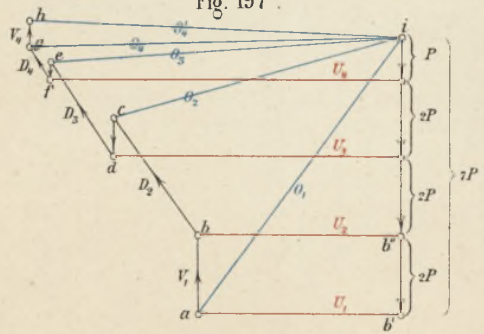
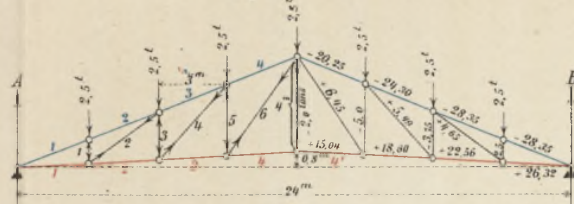


Fig. 198<sup>a</sup> (Seite 219).



Englischer Dachstuhl.  
Längenmaßstab: 1 cm = 3 m.  
Kraftmaßstab: 1 cm = 4 t.

Fig. 198<sup>b</sup>

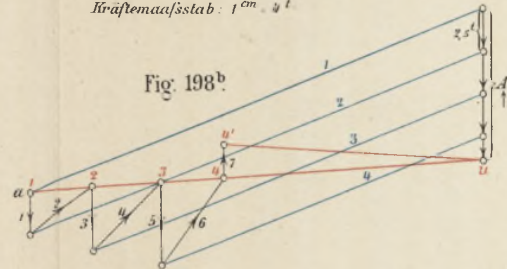


Fig. 201<sup>a</sup> (Seite 221).  
Belgischer Dachstuhl.

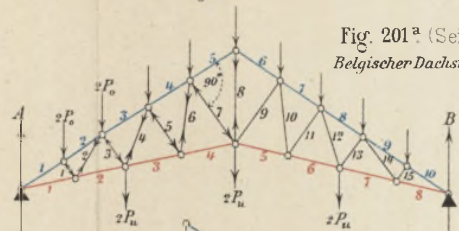


Fig. 201<sup>b</sup>

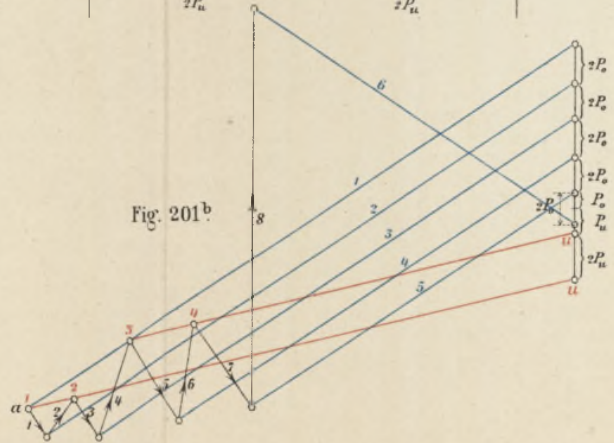


Fig. 199<sup>a</sup> (Seite 220).

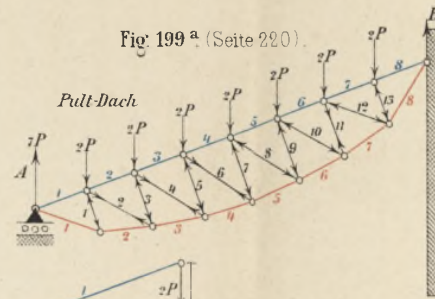


Fig. 199<sup>b</sup>

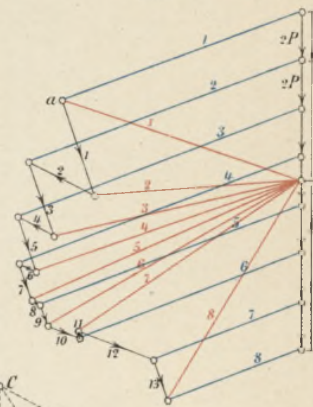


Fig. 200<sup>a</sup> (Seite 220).

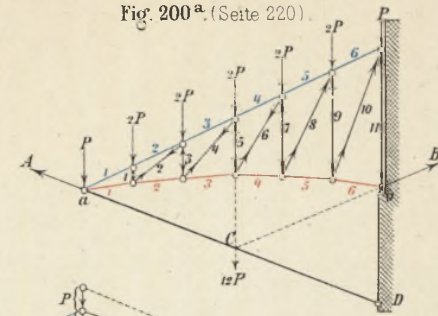


Fig. 200<sup>b</sup>

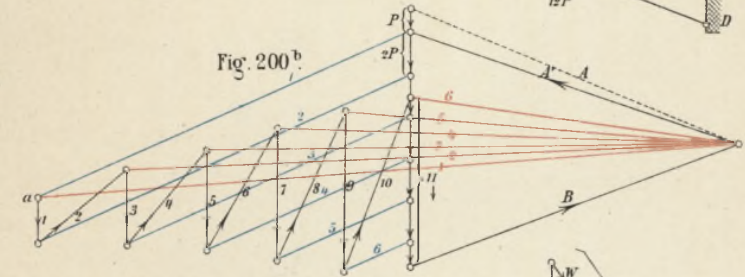


Fig. 202<sup>a</sup> (Seite 222).

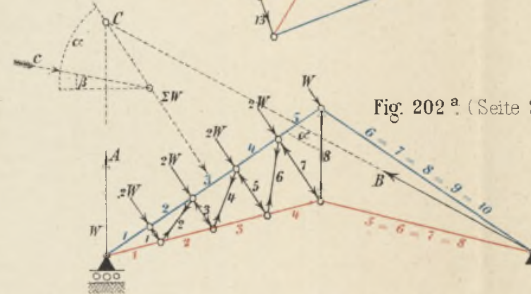


Fig. 202<sup>b</sup>

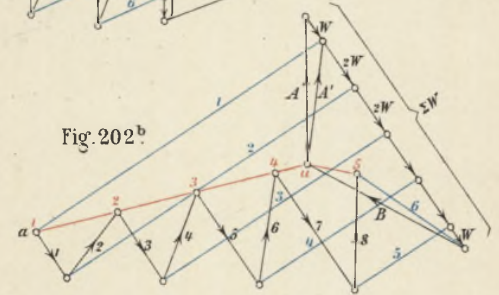


Fig. 203<sup>a</sup> (Seite 222).

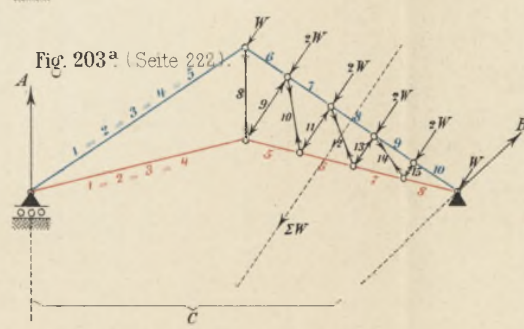
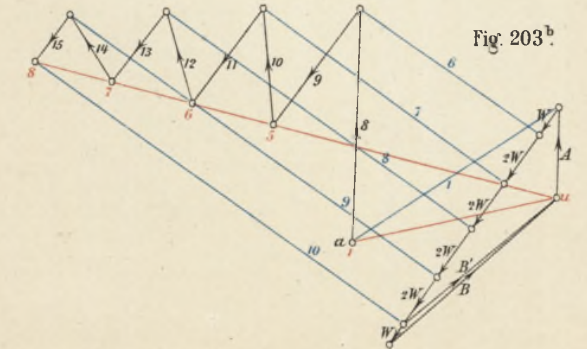
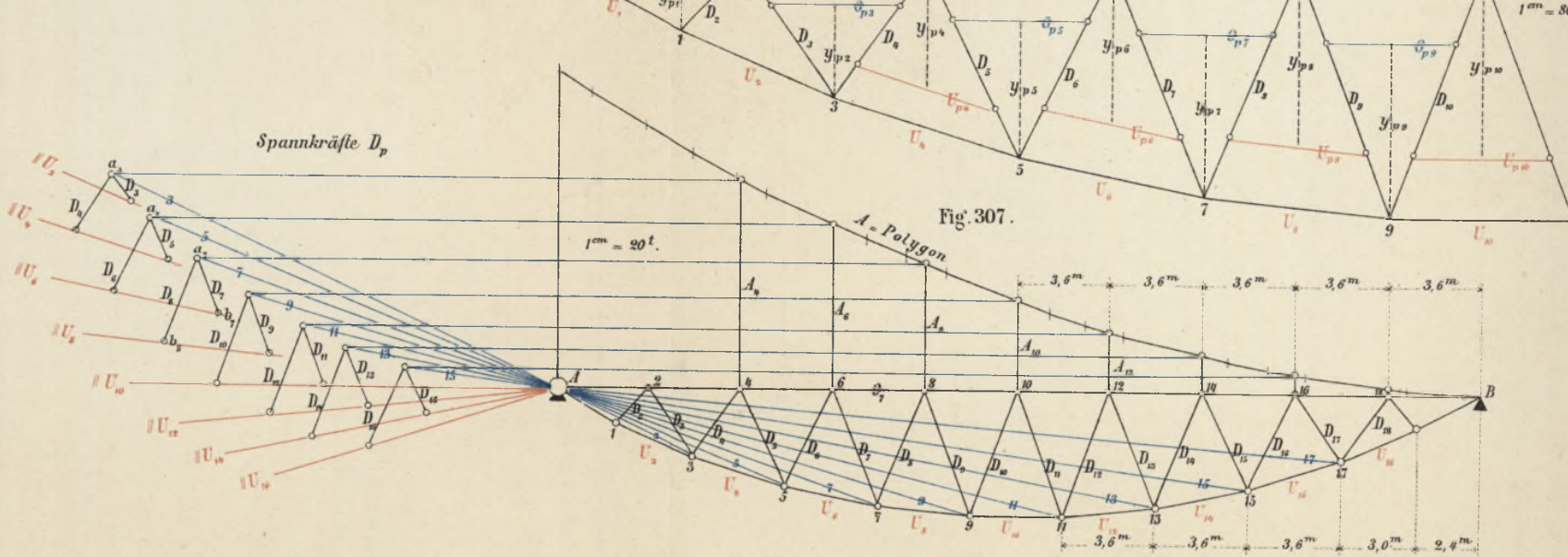
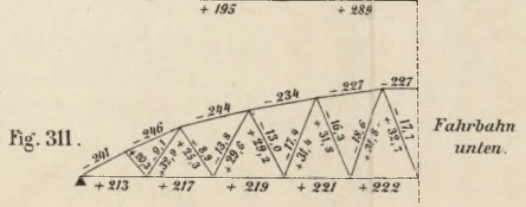
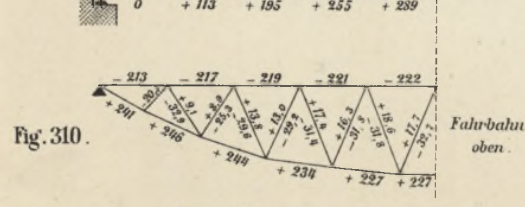
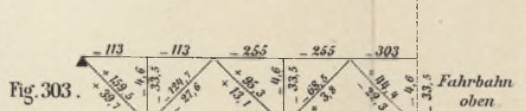
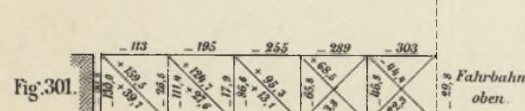
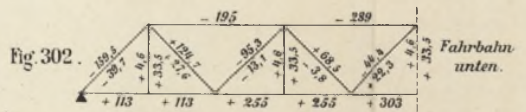
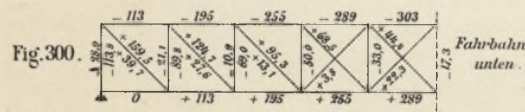
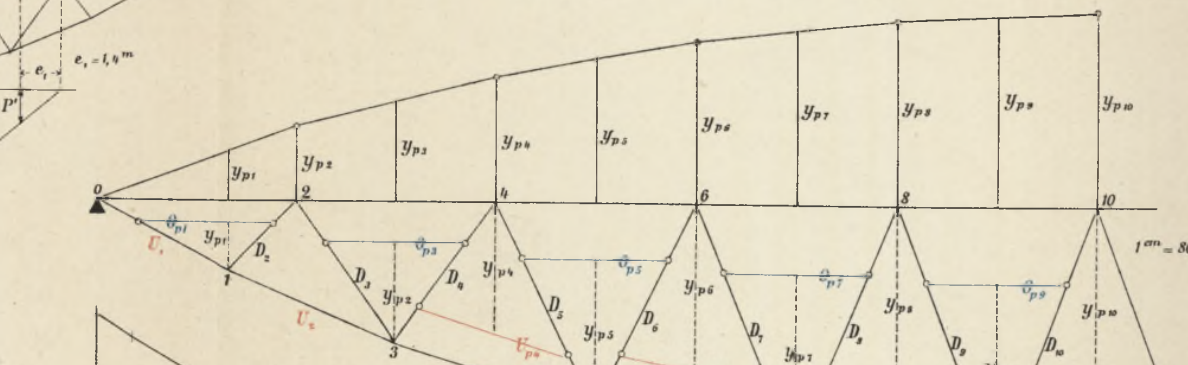
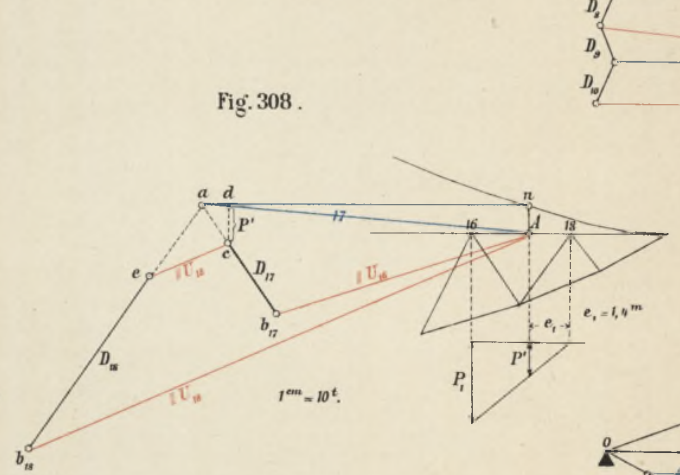
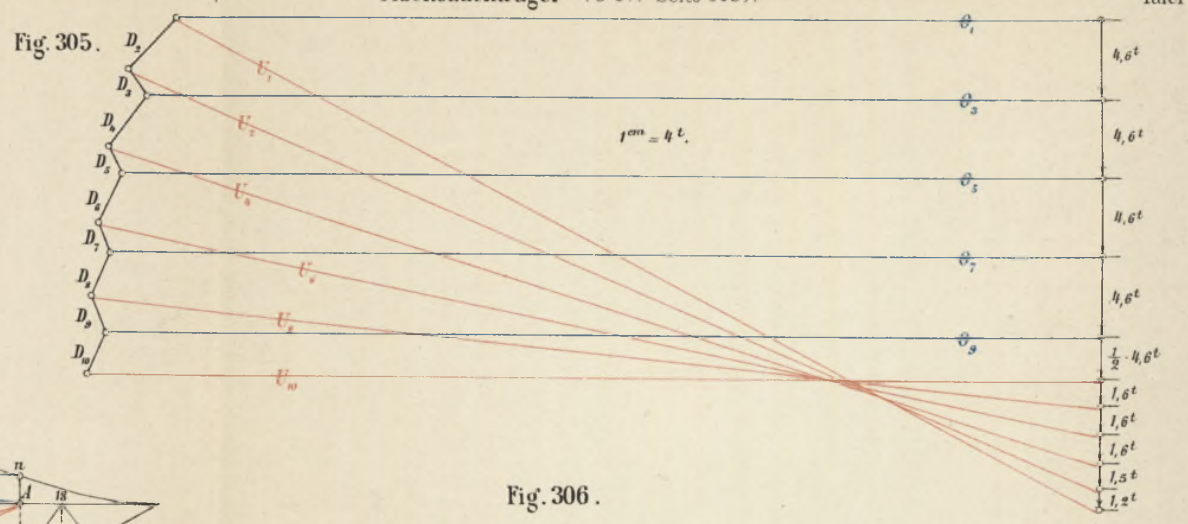
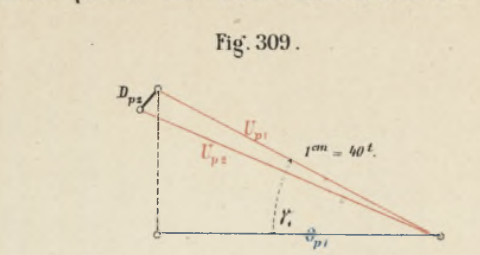
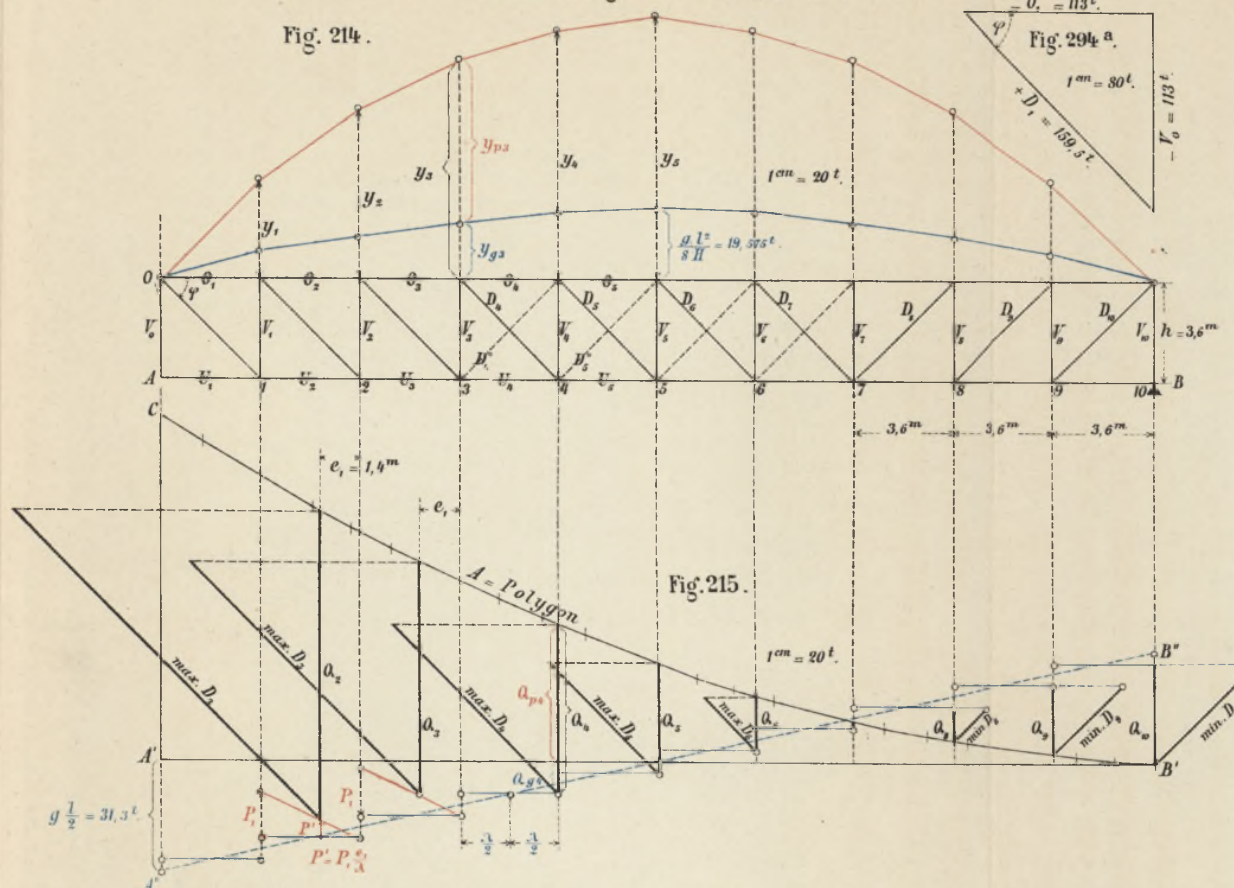


Fig. 203<sup>b</sup>





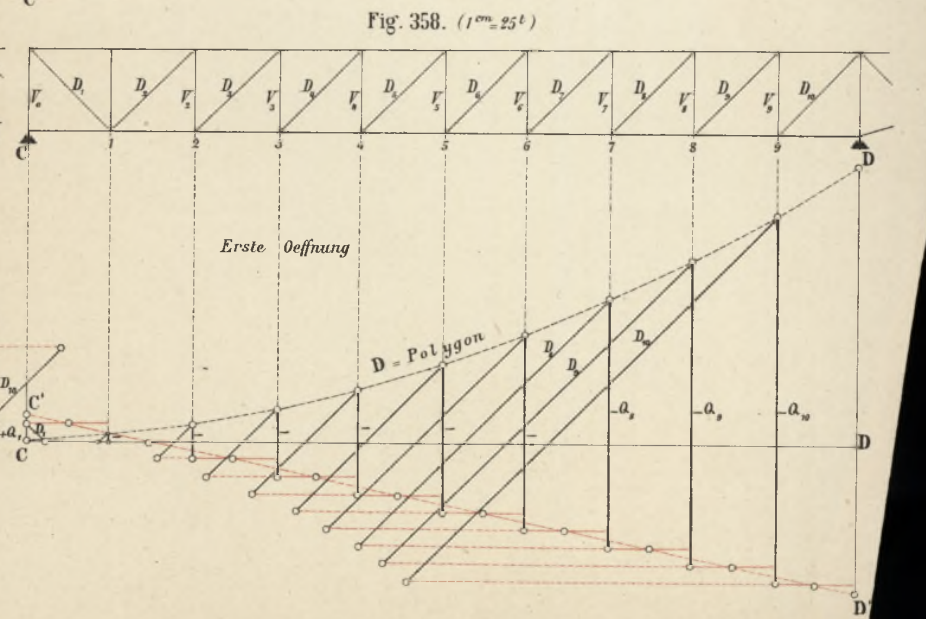
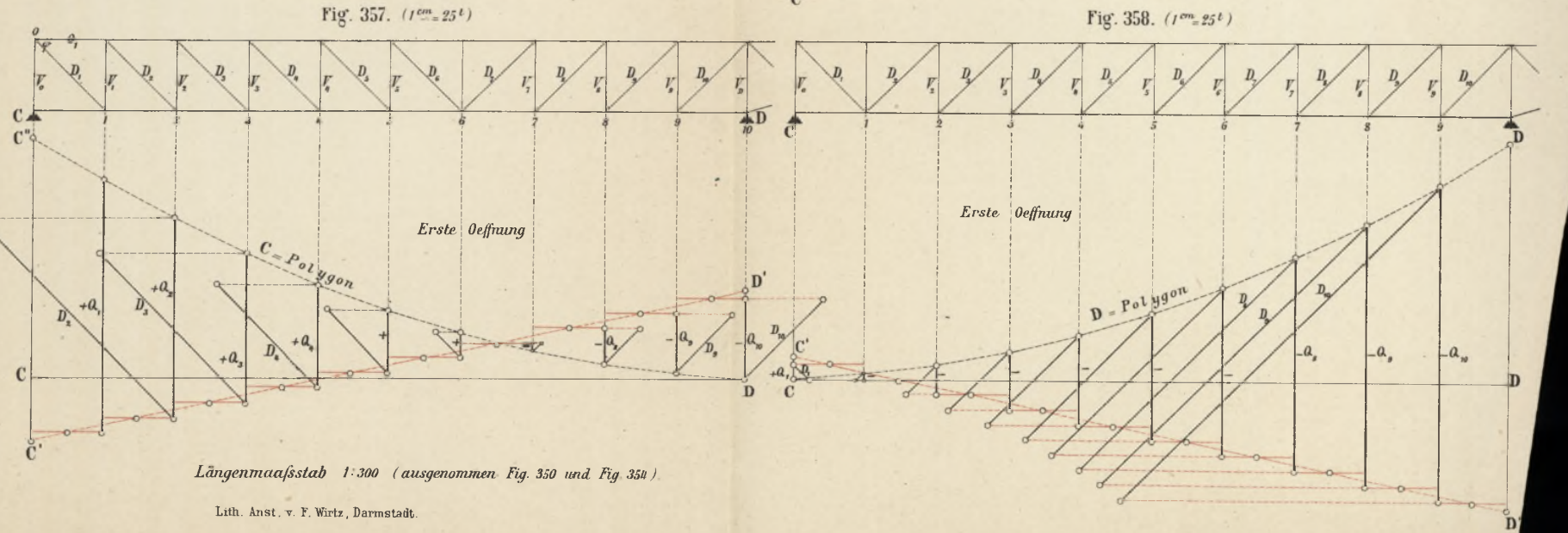
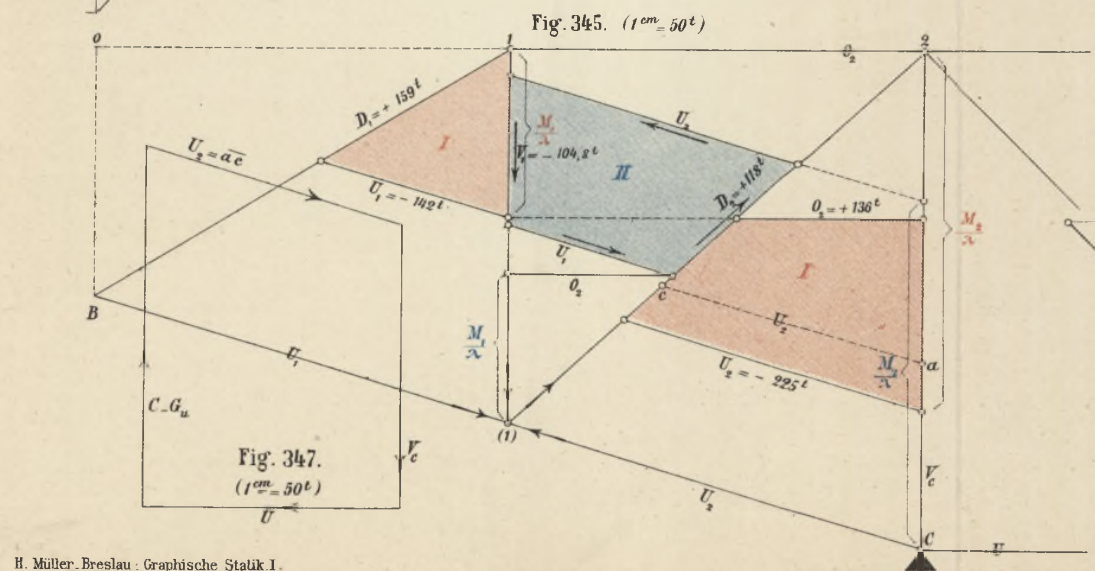
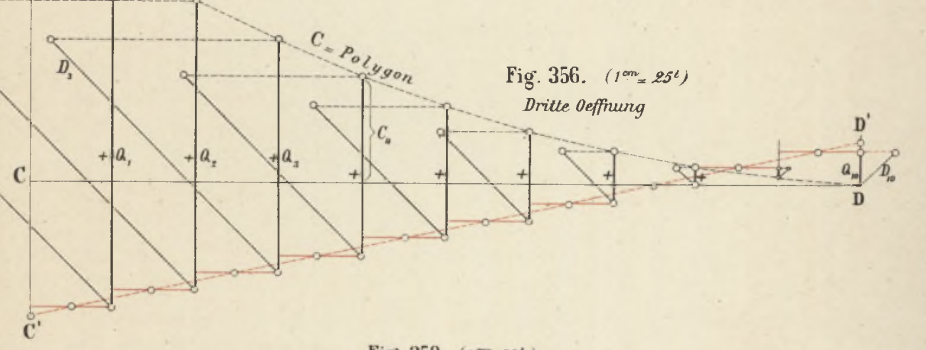
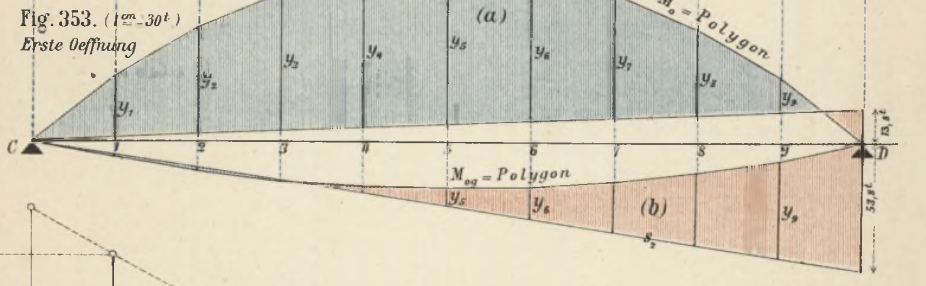
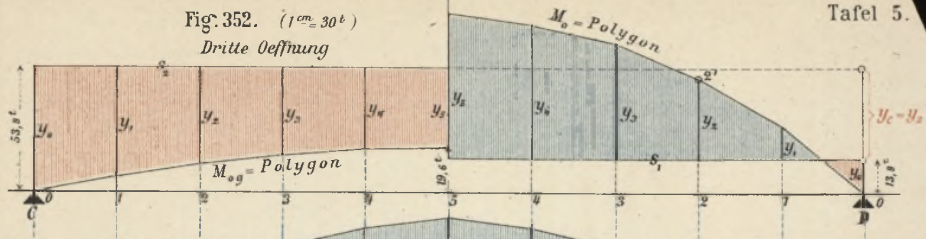
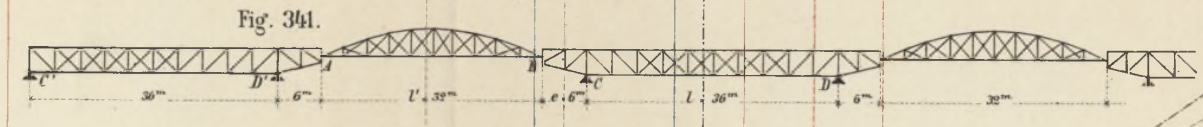
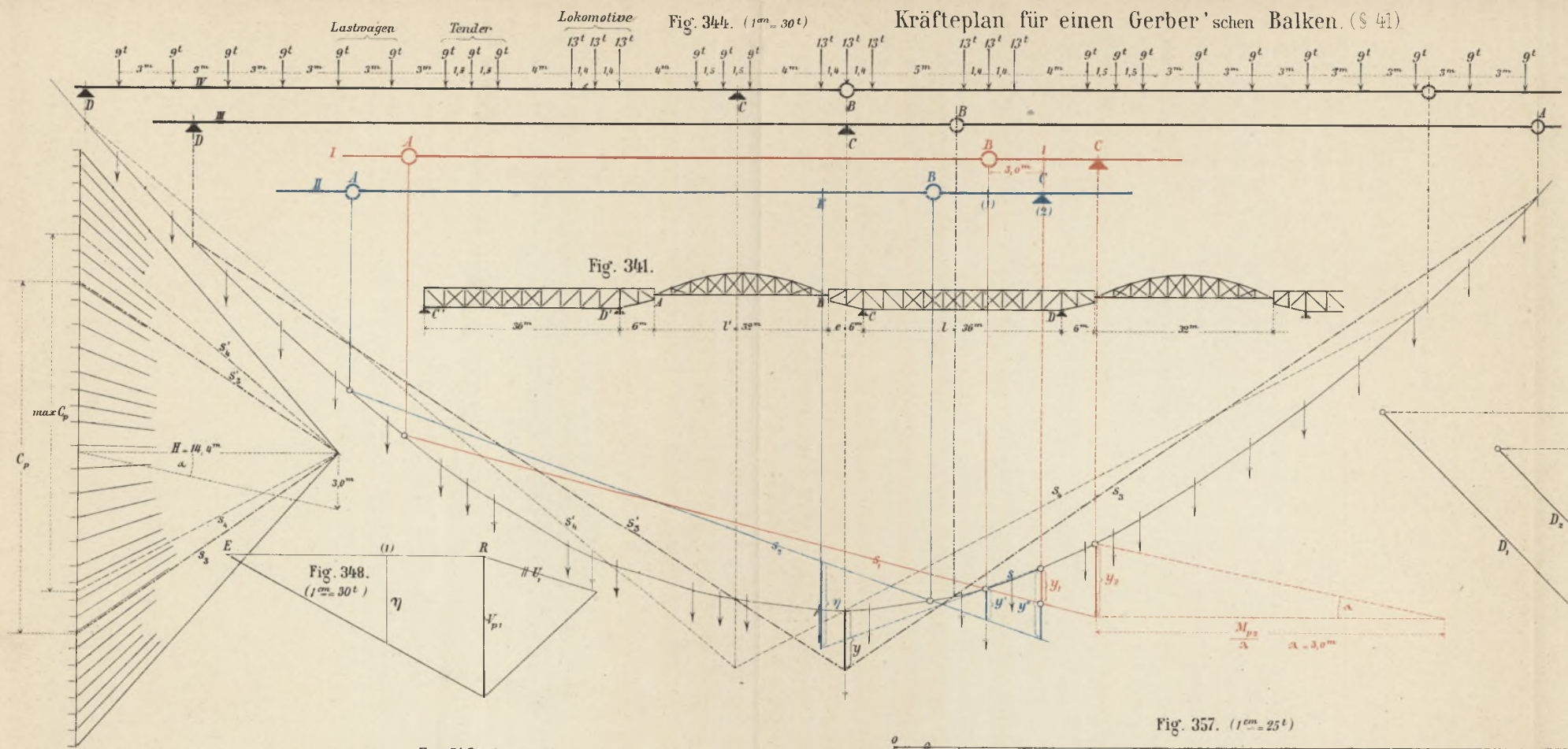








Kräfteplan für einen Gerber'schen Balken (§ 41)



Längenmaßstab 1:300 (ausgenommen Fig. 350 und Fig. 351)

Lith. Anst. v. F. Wirtz, Darmstadt.



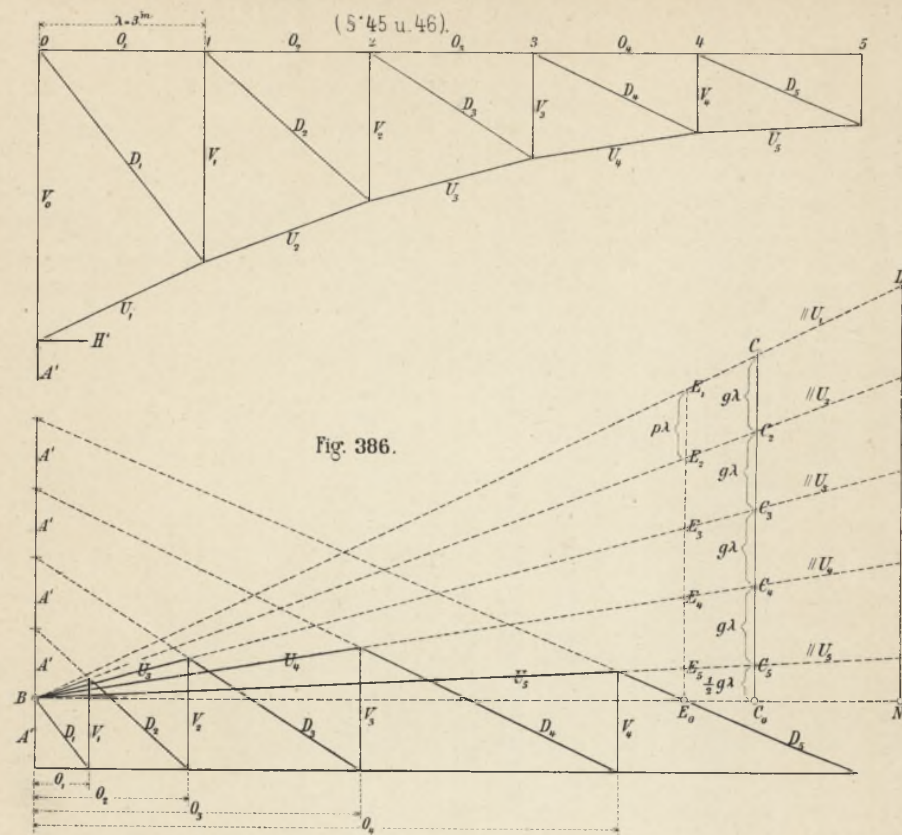


Fig. 386.

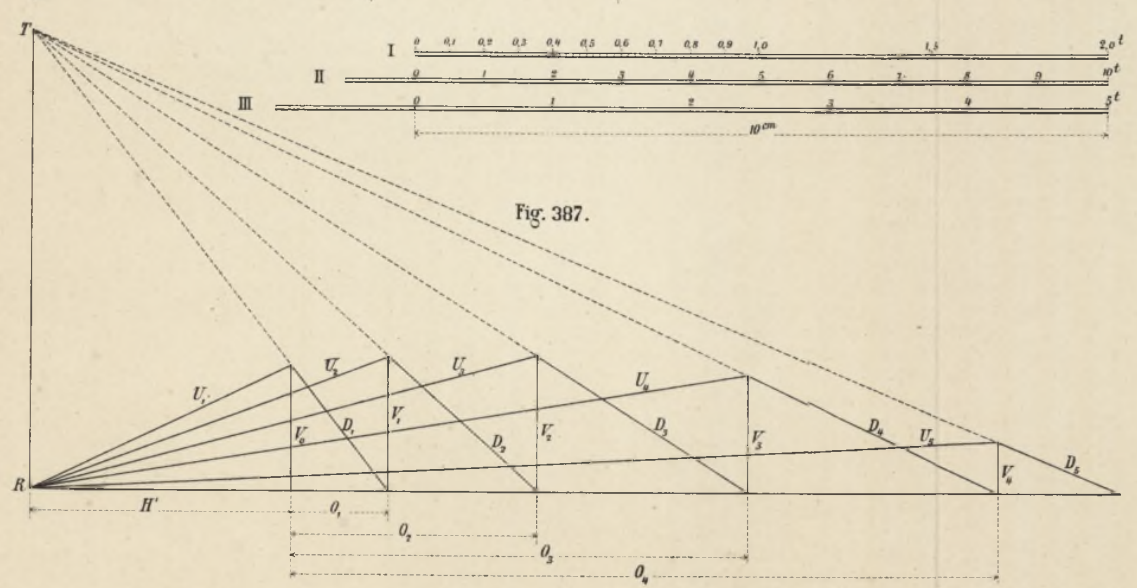


Fig. 387.

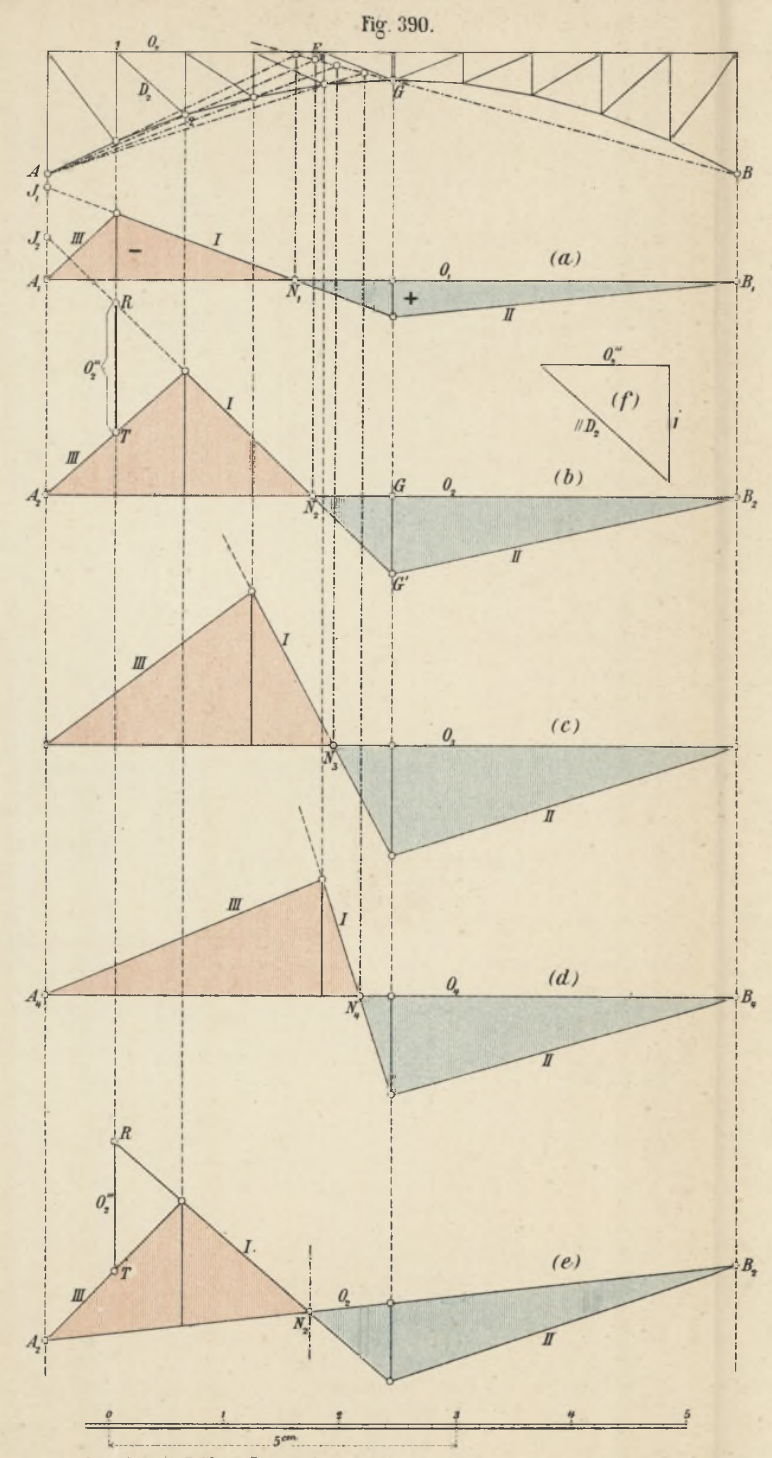


Fig. 390.

Lith. Anst. v. F. Wirtz, Darmstadt.

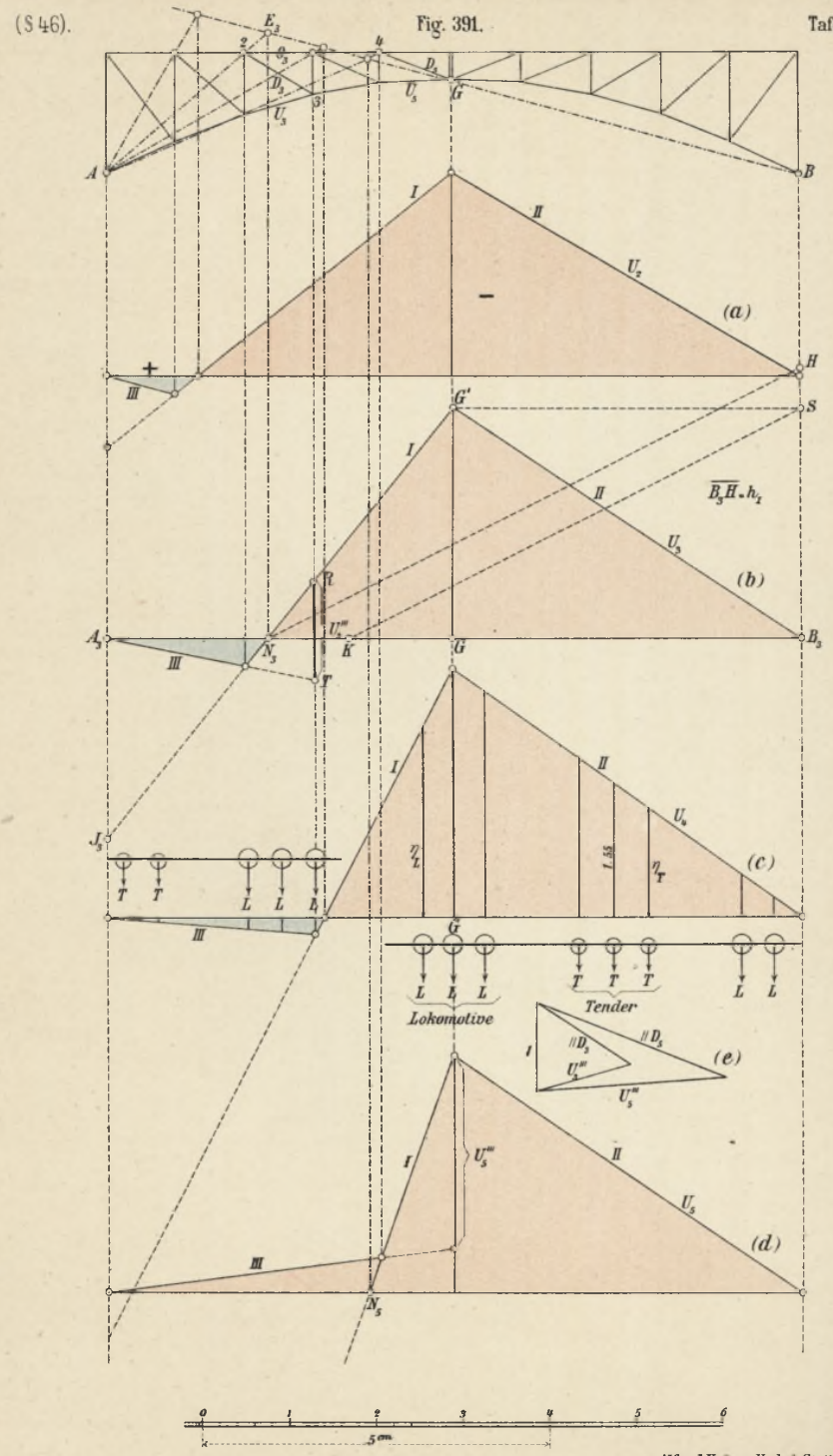


Fig. 391.

Alfred Kröner Verlag, Stuttgart.



Fig. 392. (S. 46).

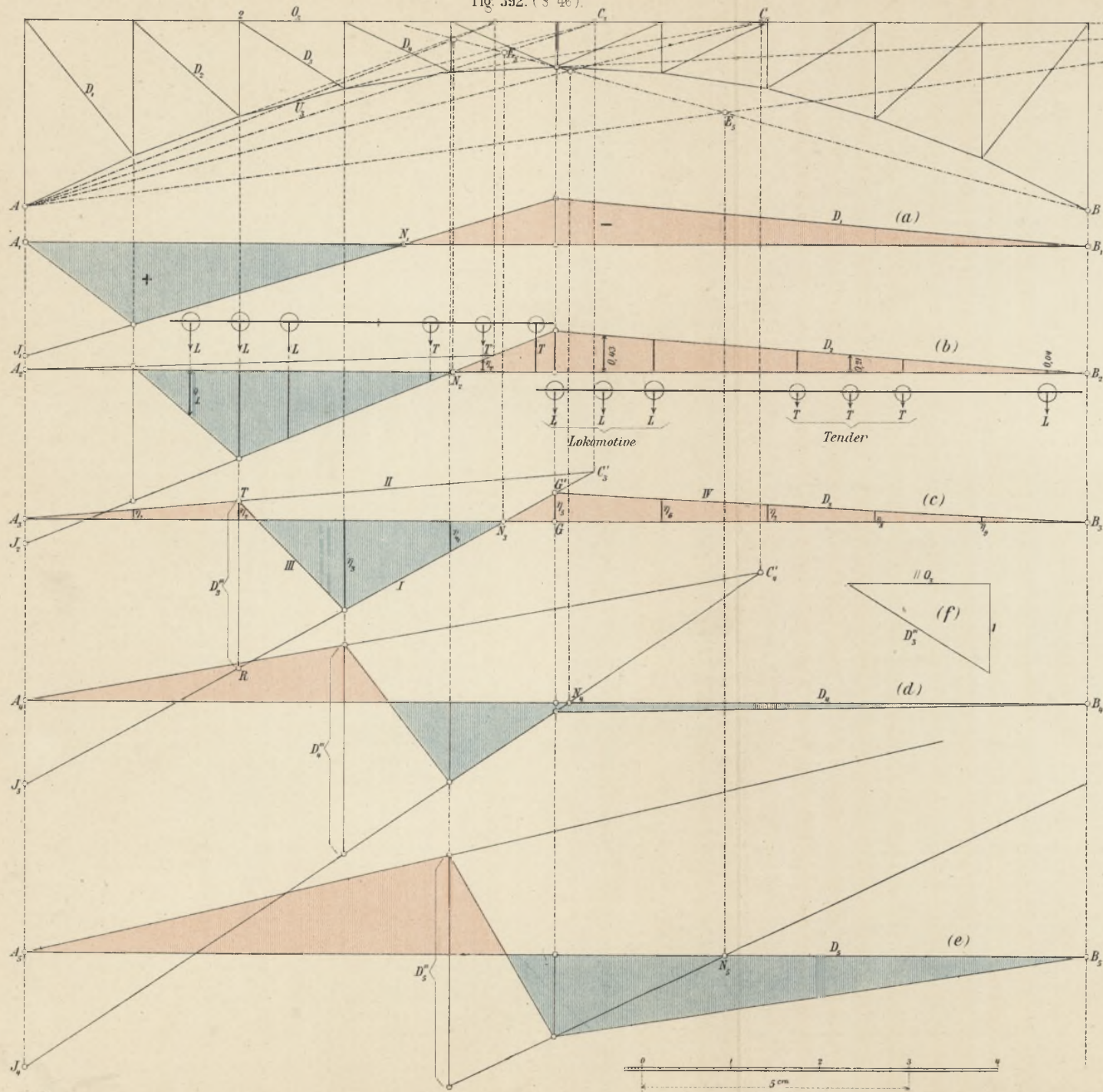
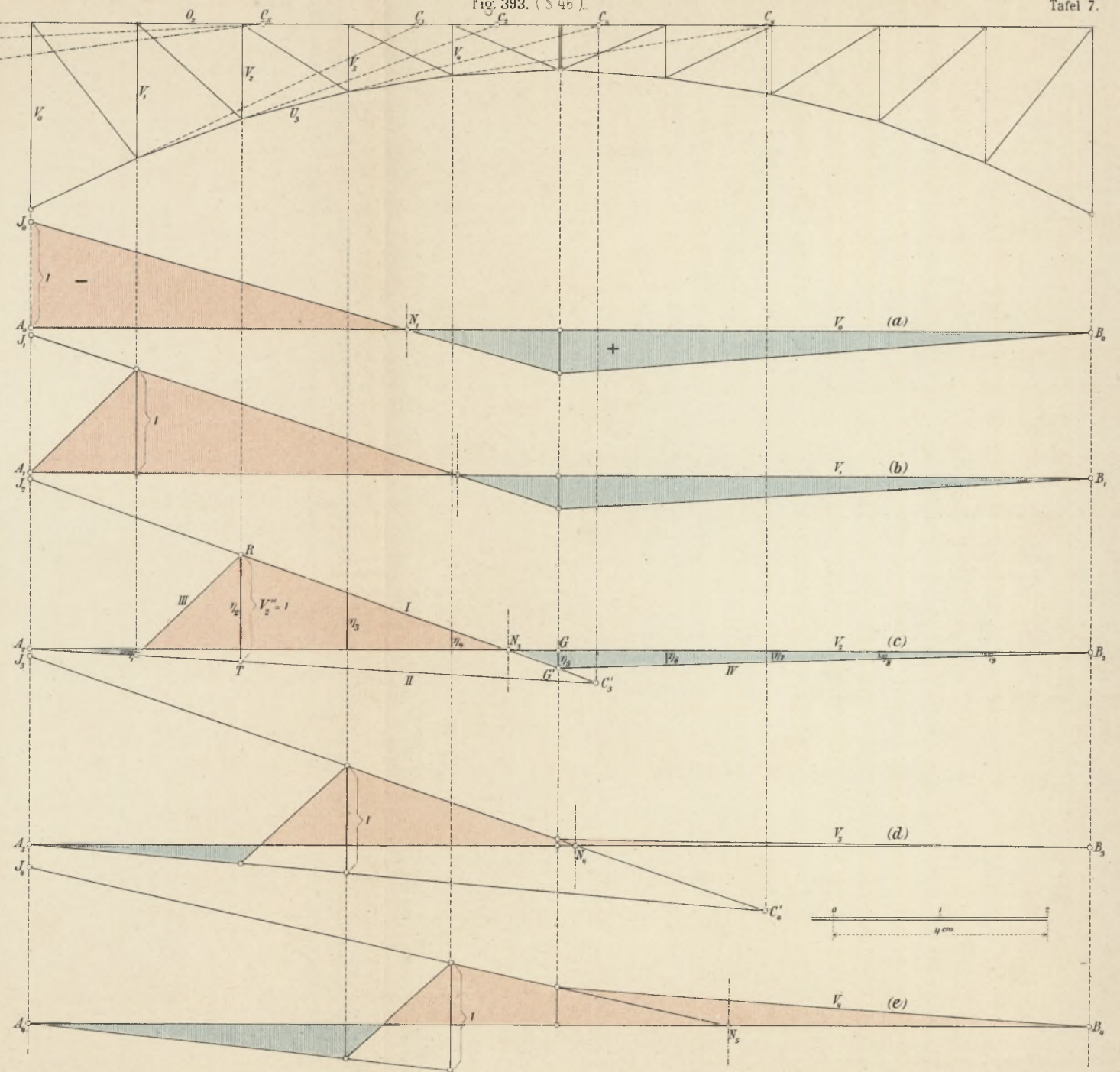
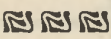
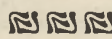


Fig. 393. (S. 46).






**Empfehlenswerte Werke**
  
 aus dem Gebiete der Technologie und Ingenieur-  
 Wissenschaften sowie verwandter Disziplinen.

Alfred Kröner Verlag in Stuttgart.

- Autenheimer, Friedrich, Aufgaben über mechanische Arbeit,** für Gewerbeschulen und angehende Techniker elementar bearbeitet. Mit 26 Abbildungen im Text. Preis geheftet 1 M. 25 Pf.
- Bach, Dr. C., Die Maschinen-Elemente.** Ihre Berechnung und Konstruktion mit Rücksicht auf die neueren Versuche. 9. vermehrte Aufl. 2 Bände. Mit in den Text gedruckten Abbildungen, 3 Lichtdrucktafeln und 59 Tafeln Zeichnungen. Preis geh. 32 M. In Halbfranz geb. 38 M.
- **Abhandlungen und Berichte.** Mit zahlreichen Abbildungen im Text und 14 Tafeln. Preis kartoniert 18 Mark.
- **Die Konstruktion der Feuerspritzen.** Mit einem Anhang: Die allgemeinen Grundlagen für die Konstruktion der Kolbenpumpen. Mit 94 Abbildungen im Text und 36 Tafeln Zeichnungen. Preis geh. 16 Mark.
- Berg, H., Handbuch des Maschinentechnikers. Bernoullis Vademecum des Mechanikers.** 23. Auflage. Nachschlagebuch für Techniker, Gewerbetreibende und technische Lehranstalten. Mit zahlreichen Abbildungen im Text. In Leinwand gebunden Preis 6 Mark.
- Bermbach, Dr. W., und C. Müller, Elektrizitätswerke, elektrische Beleuchtung und elektrische Kraftübertragung.** Gemeinverständliche Darstellung. Dritte, umgearbeitete u. stark verm. Aufl. Mit 267 Abbild. im Text. Preis geh. 7 M. In Leinwand geb. 8 M.
- Bernoullis Dampfmaschinenlehre.** Handbuch zum Gebrauche in der Praxis und zum Selbstunterricht für angehende Ingenieure, sowie für den Unterricht an technischen Lehranstalten. 8. Auflage. Neu bearbeitet und vermehrt von **Fr. Freytag.** Mit 396 Abbildungen im Text und 7 Tafeln. Preis geheftet 14 Mark. In Leinwand gebunden 15 Mark.
- Braulik, Aug., Altägyptische Gewebe.** Unter Zugrundelegung einer reichhaltigen Sammlung fachlich untersucht und besprochen. Mit 126 Originalabbildungen im Text. Preis geheftet 4 Mark.
- Brüggemann, H., Theorie u. Praxis der rationalen Spinnerei.**
- I. Die nötigen Eigenschaften der Gespinste und deren Prüfung. Mit einem Atlas von 7 Tafeln. Preis geheftet 7 Mark.
- II. Allgemeines über Fasernbearbeitung und eingehendes Studium des zur Spinnerei nötigen Streckens der Fasermassen. Mit einem Atlas von 24 Tafeln. Preis geheftet 15 Mark.
- III. Nitscheln und Draht und ihre mechan. Hilfsmittel. Erster Teil. Mit einem Atlas von 37 Tafeln. Preis geheftet 24 Mark.
- Bujard, Dr. Alfons, Leitfaden der Pyrotechnik.** Einführung in die Chemie der wichtigsten Rohmaterialien und Sprengstoffe der Kunstfeuerwerkerei nebst Besprechung der einschlägigen Polizei- und Eisenbahnverkehrsverordnungen. Mit in den Text gedruckten Abbildungen. Preis geheftet 6 Mark. In Leinwand gebunden 7 Mark.

- Cremona, L., Elemente der projektivischen Geometrie.** Unter Mitwirkung des Verfassers übertragen von **Fr. R. Trautvetter.** Mit 214 Figuren im Text. Preis geheftet 5 Mark.
- Enßlin, Dr. M., Mehrmals gelagerte Kurbelwellen** mit einfacher und doppelter Kröpfung. Ihre Formänderung und Anstrengung. Mit 74 Abbildungen im Text. Preis geheftet 6 Mark.
- Fischer, Dr. Ferd., Taschenbuch für Feuerungstechniker.** Anleitung zur Untersuchung und Beurteilung von Brennstoffen und Feuerungsanlagen. 5. Aufl. Mit zahlr. Abbild. im Text. In Leinwand geb. Preis 3 Mk.
- Gentsch, Wilhelm, Gasglühlicht.** Dessen Geschichte, Wesen und Wirkung. Für Erfinder, Fabrikanten und Konsumenten bearbeitet. Mit 68 Abbildungen im Text. Preis geheftet 2 Mark 40 Pf.
- **Sicherheits- und Rettungswesen auf See.** Mit einem Anhang: Gesetzliche Bestimmungen. Mit 253 Abbild. im Text. Preis geh. 6 Mark.
- Haußner, A., Der Holländer.** Eine kritische Betrachtung seiner Arbeitsweise mit Bezug auf die Einzelabmessungen seiner Teile und die verarbeiteten Fasern. Mit 38 Abbildungen im Text. Preis geheftet 4 Mark.
- Heinzerling, Dr. Chr., Schlagwetter und Sicherheitslampen.** Entstehung und Erkennung der schlagenden Wetter und Konstruktion der wichtigeren Typen der Sicherheitslampen. Mit 119 Abbildungen im Text. Preis geheftet 8 Mark.
- Hentschel, Fr. M., Praktisches Lehrbuch der Kammgarnspinnerei** zum Selbstunterricht für Spinnereitechniker, Werkführer und vorwärtstrebende Arbeiter. 2. Auflage. Mit 96 Abbildungen im Text und vielen Tabellen. Preis geheftet 7 Mark. In Leinwand gebunden 8 Mark.
- Hering, C. A., Die Verdichtung des Hüttenrauchs.** Eine gedrängte Übersicht über alle bekannt gewordenen Vorrichtungen und Verfahren zum Auffangen des Flugstaubes und zur Beseitigung des schädlichen Einflusses desselben, sowie der sauren Gase, welche im Hüttenrauche enthalten sind. Mit 86 Figuren auf 13 Tafeln. Preis geheftet 5 Mark.
- Klases, L., Handbuch der Fundierungsmethoden im Hochbau, Brückenbau und Wasserbau.** 2. Auflage. Mit 580 Abbildungen im Text. Preis geheftet 15 Mark. In Halbfranz gebunden 17 Mark.
- Knoll, C., Taschenbuch zum Abstecken der Kurven an Straßen und Eisenbahnen.** 2. Auflage. Neu bearbeitet von **W. Weitbrecht.** Mit 41 Figuren u. 10 Zahlentafeln. In Leinwand gebunden Preis 3 Mark.
- Lauenstein, R., Die Festigkeitslehre.** Elementares Lehrbuch für den Schul- und Selbstunterricht, sowie zum Gebrauch in der Praxis, nebst einem Anhang, enthaltend Tabellen der Potenzen, Wurzeln, Kreisumfänge und Kreisinhalte. 8. Auflage. Mit 123 Abbildungen im Text. Preis geheftet 4 Mark 40 Pf. In Leinwand gebunden 5 Mark.
- **Die graphische Statik.** Elementares Lehrbuch für technische Unterrichtsanstalten und zum Gebrauch in der Praxis. 8. Aufl. Mit 285 Abbildungen im Text. Preis geh. 5 Mark 40 Pf. In Leinwand geb. 6 M.
- **Die Mechanik.** Elementares Lehrbuch für technische Mittelschulen und zum Selbstunterricht. 6. Auflage. Mit 215 Abbildungen im Text. Preis geheftet 4 Mark 40 Pf. In Leinwand gebunden 5 Mark.



**Lauenstein, R., Die Eisenkonstruktionen des einfachen Hochbaues.** Für den Schul- u. Selbstunterricht sowie z. Gebrauch in der Praxis.

Erster Teil: **Material und Konstruktionsselemente.** 3. Aufl. Mit 201 Abbild. im Text. Preis geh. 3 Mark. In Leinwand geb. 3 M. 60 Pf.

Zweiter Teil: **Anwendung und Ausführung der Konstruktionen.**  
3. Auflage. Mit 362 Abbildungen im Text. Preis geheftet 4 M. 40 Pf.  
In Leinwand gebunden 5 Mark.

**Lew, Dr. Ignatz, Die Feuerungen mit flüssigen Brennstoffen.** Mit Abbildungen im Text u. 7 lithogr. Tafeln. Preis kart. 5 Mark.

**Mayer, Robert, Die Mechanik der Wärme** in gesammelten Schriften. Dritte ergänzte und mit historisch-literarischen Mitteilungen versehene Auflage. Herausgegeben von **Dr. Jacob J. Weyrauch.** Mit Porträt.  
Preis geheftet 10 Mark.

— **Kleinere Schriften und Briefe.** Nebst Mitteilungen aus seinem Leben. Herausgegeben von **Dr. Jacob J. Weyrauch.** Mit 2 Abbildungen und Porträt.  
Preis geheftet 10 Mark.

**Mühlhäuser, Dr. Otto, Die Technik der Rosanilinfarbstoffe,** entwicklungsgeschichtlich dargestellt und für Praxis und Wissenschaft bearbeitet. Mit 10 lithographierten Tafeln. In Leinwand geb. 6 Mark.

**Müller-Breslau, Dr. Heinrich, Die graphische Statik der Baukonstruktionen.**

**Band I:** Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte in der Ebene. Trägheitsmomente u. Zentrifugalmomente ebener Querschnitte. Spannungen in geraden Stäben. Theorie der statisch bestimmten Träger mit Ausschluß der Untersuchung der Formänderungen. 4. Auflage. Mit 585 Abbildungen im Text und 7 Tafeln. Preis geh. 18 Mark. In Halbfranz geb. 20 Mark.

**Band II, Abt. 1:** Formänderung ebener Fachwerke. Das ebene statisch bestimmte Fachwerk. 3. Auflage. Mit 436 Abbildungen im Text und 7 Tafeln. Preis geheftet 16 Mark. In Halbfranz geb. 18 Mark.

**Band II, Abt. 2, Lieferung 1:** Formveränderung des geraden Stabes. Der Balken auf mehreren Stützen. Mit 110 Abbildungen im Text und 2 Tafeln.  
Preis geheftet 3 Mark.

— **Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen.** 3. Auflage. Mit 259 Abbildungen im Text. Preis geheftet 8 Mark. In Halbfranz gebunden 10 Mark.

**Nördlinger, Dr. H., Querschnitte von hundert Holzarten.** Zur Belehrung f. Forstleute, Landwirte, Botaniker u. Holztechnologen. 11 Bände, jeder Band 100, teils europäische, teils ausländische Holzarten enthaltend. Jeder Band mit beschreibendem Text, in Karton. Preis je 14 Mark.

**Pregél, Th., „Neuere Werkzeugmaschinen für die Metallbearbeitung.“ Fräse- und Schleifmaschinen.** Ein Handbuch für Maschinenbauer, Gewerbetreibende, Techniker und Studierende. Mit 520 Abbildungen im Text.  
Preis geheftet 6 Mark.

— **Drehbänke,** sowie Maschinen zum Drehen, Bohren und Gewindeschneiden. Ein Handbuch für Maschinenbauer, Gewerbetreibende, Techniker und Studierende. Mit 820 Abbildungen im Text. Preis geh. 10 Mark.



## Alfred Kröner Verlag in Stuttgart.

**Reinert, E., Die modernen Dampfkesselanlagen.** Deren Einrichtung und Betrieb. Ein Hand- und Nachschlagebuch für Industrielle, Studierende und Ingenieure. Mit 150 Abbildungen im Text.

Preis geheftet 6 Mark. In Leinwand gebunden 8 Mark.

**Reye, Dr. Th., Die Geometrie der Lage.**

**Abteilung I.** 4. Auflage. Mit 90 Abbildungen im Text.

Preis geheftet 8 Mark. In Halbfranz gebunden 10 Mark.

**Abteilung II.** 3. Auflage. Mit 26 Abbildungen im Text.

Preis geheftet 9 Mark. In Halbfranz gebunden 11 Mark.

**Abteilung III.** 3. Aufl. Preis geh. 6 Mark. In Halbfranz geb. 8 Mark.

**Ritter, Dr. August, Elementare Theorie und Berechnung eiserner Dach- und Brücken-Konstruktionen.** 6. Auflage. Mit 495 Abbild. im Text. Preis geh. 10 Mark. In Halbfranz geb. 12 Mark.

— **Lehrbuch der Analytischen Mechanik.** 3. Aufl. Mit 224 Abbildungen im Text. Preis geh. 8 Mark. In Halbfranz geb. 10 Mark.

— **Lehrbuch der Ingenieur-Mechanik.** 3. Auflage. Mit 612 Abbildungen im Text. Preis geh. 16 Mark. In Halbfranz geb. 18 Mark.

— **Lehrbuch der Technischen Mechanik.** 8. Auflage. Mit 873 Abbildungen im Text. Preis geh. 20 Mark. In Halbfranz geb. 22 Mark.

**Roser, Dr. E., Untersuchung des Grissongetriebes.** Mit 53 Abbildungen im Text. Preis geheftet 3 Mark.

**Saliger, Dr. Rudolf, Über die Festigkeit veränderlich elastischer Konstruktionen, insbesondere von Eisenbeton-Bauten.**

Mit 63 Abbildungen im Text und 5 Tafeln. Preis geheftet 4 Mark.

**Sauerbeck, Dr. P., Lehrbuch der Stereometrie** nebst zahlreichen Übungen und einem Abschnitt über Krystallographie. Zum Gebrauch an höheren Lehranstalten sowie für den Selbstunterricht. Mit 222 Abbildungen im Text. Preis geh. 5 M. 40 Pf. In Leinwand geb. 6 Mark.

**Schinz, C., Studien über den Hohofen zur Darstellung von Roheisen.** Preis geheftet 1 Mark 80 Pf.

**Seelig, Dr. Eduard, Organische Reaktionen und Reagentien.** Preis geheftet 15 Mark.

**Soxhlet, V. H., Die Färberei der Baumwolle** mit direkt färbenden Farbstoffen. Ein praktisches Handbuch für Färber, Koloristen, Techniker und Chemiker. Mit 150 gefärbten Baumwollproben und 30 Abbildungen. Preis gebunden 15 Mark.

**Uhlands Kalender für Maschinen-Ingenieure.** Unter Mitwirkung bewährter Ingenieure herausgegeben von **Wilhelm Heinrich Umland**, Civil-Ingenieur und Patentanwalt in Leipzig. Erscheint seit 1875 alljährlich im Herbst mit gegen 1000 Abbildungen. In 2 Teilen. Preis in Leinenband 3 Mark, in Lederband 4 Mark, in Brieftaschenlederband 5 Mark.

**Weiske, Paul, Kerntheorie und Dachpfettenberechnung** nebst einigen weiteren Kapiteln aus der Festigkeitslehre und einem Anhang: Anwendung der Trägheitskreise. Mit 104 Abbildungen im Text.

Preis geheftet 3 Mark. In Leinwand gebunden 3 Mark 60 Pf.

**Zu beziehen durch die meisten Buchhandlungen.**

BG Politechniki Śląskiej  
nr inw.: 102 - 130380



**Dyr.1 130380**