

ALGORYTMY

ZESZYT SPECJALNY • 1 • 1963



P. 2223 | 63

INSTYTUT MASZYN MATEMATYCZNYCH PAN

A L G O R Y T M Y

Zeszyt Specjalny N° 1 1963



P.2223 | 63

P i e r w s z e
K r a j o w e S y m p o z j u m
M E T O D Y R O Z W I Ą Z Y W A N I A R Ó W N A Ń R Ó Ż N I C Z K O W Y C H
Z W Y C Z A J N Y C H N A M A S Z Y N A C H C Y P R O W Y C H
W a r s z a w a 16-17 m a j a 1963 r.

P R A C E

Instytutu Maszyn Matematycznych

P o l s k i e j A k a d e m i i N a u k

Copyright © 1963 - by Instytut Maszyn Matematycznych, Warszawa

Poland

Wszelkie prawa zastrzeżone

P. 194/64

K o m i t e t R e d a k c y j n y

Leon ŁUKASZEWICZ /redaktor/, Antoni MAZURKIEWICZ
Tomasz PIETRZYKOWSKI /z-oa redaktora/, Dorota PRAWDZIC,
Zdzisław WRZESZCZ

Redaktor działowy: Krzysztof MOSZYŃSKI.
Sekretarz redakcji: Maria LESZEŃANKA.

Adres redakcji: Warszawa, ul. Koszykowa 79, tel. 8-37-29

T R E Ś Ć

Wstęp

Program Symposium

R. POGORZELSKI

O stabilności pewnych metod różnicowych 9

W. TURSKI

O możliwości zrealizowania automatu określającego obszar praktycznej stabilności 21

J. SZMELTER, K. DELOFF

Linia ugięcia ściskanego pręta po utracie stateczności 29

Ś. ZĄBEK

Kilka oszacowań błędu dla rozwiązań przybliżonych równań różniczkowych liniowych rzędu parzystego 37

R. MARCZYŃSKI, W. PULCZYN

Modelowanie cyfrowego analizatora równań różniczkowych na maszynie cyfrowej 45

W. OSTALSKI

Tablicowanie funkcji przez rozwiązywanie równań różniczkowych 55

K. FELDMAN, K. MOSZYŃSKI

Uwagi o realizacji algorytmu znajdowania rozwiązania zagadnienia brzegowego dla układu równań różniczkowych zwyczajnych, liniowych 61

M. DĄBROWSKI, Z. SZODA

O przydatności metod Rungego-Kutty i Adamsa w praktyce obliczeniowej 71

A. RADZIUN

Ocena porównawcza metod numerycznych całkowania równań różniczkowych zwyczajnych na maszynie ZAM-2 87

K. ZIOŁKOWSKI

Kilka uwag o użyteczności maszyn matematycznych do rozwiązywania równań różniczkowych ruchu, stosowanych w astronomii 95

K. BOCHFNEK

O profilach fal uderzeniowych i określających je równaniach 103

R. POGORZELSKI

O numerycznym całkowaniu równań różniczkowych zwyczajnych metodą rzędu wyższego niż rząd regularności rozwiązania 109

W s t ę p

W dniach 16 i 17 maja 1963 roku odbyło się w Warszawie, w sali gościnnie wypożyczonej przez Komisję Planowania przy Radzie Ministrów, I Krajowe Sympozjum na temat: METODY ROZWIĄZYWANIA RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH ZWYCZAJNYCH NA MASZYNACH CYFROWYCH.

Sympozjum zostało zorganizowane przez Instytut Maszyn Matematycznych PAN, staraniem Biura Programów i Zastosowań Maszyn Matematycznych tegoż Instytutu.

W obradach wzięło udział kilkadziesiąt osób - przedstawiciele ośrodków obliczeniowych, wyższych uczelni, instytutów naukowych oraz przemysłu.

Sympozjum otworzył krótkim przemówieniem Dyrektor Instytutu Maszyn Matematycznych PAN, prof. dr L. Łukasiewicz.

Podkreślił między innymi duże znaczenie zapoczątkowania wymiany zdań na temat metod obliczeniowych związanych z maszynami cyfrowymi, szczególnie w tak ważnej dla nauki i techniki dziedzinie jak równania różniczkowe zwyczajne. Profesor Łukasiewicz zaznaczył konieczność kontynuowania tego typu spotkań, wyrażając w imieniu Instytutu Maszyn Matematycznych PAN gotowość regularnego ich organizowania.

Na Sympozjum wygłoszono w sumie 12 referatów.

Obrady podsumował doc. dr Krystyn Bochenek z Instytutu Maszyn Matematycznych PAN.

Stwierdził, że większość wypowiedzi na Sympozjum dotyczyła zagadnień początkowych. Należałoby w aktualnie prowadzonych pracach zwrócić większą uwagę na często występujące zagadnienia brzegowe i własne.

W referatach na Sympozjum nie zostały również uwzględnione metody rozwiązań asymptotycznych, przydatne niejednokrotnie w badaniu osobliwości.

Zagadnienia praktyczne prowadzą często do równań różniczkowych, w których występują zmienne losowe, warto zatem zająć się tego typu problemami. W związku z pracami doświadczalnymi mającymi na celu badanie przydatności różnych metod całkowania równań, prowadzonymi głównie przez Instytut Maszyn Matematycznych PAN oraz Centrum Obliczeniowe PAN, wydaje się celowe przeprowadzenie oceny statystycznej uzyskanych wyników.

Na zakończenie doc. dr Krystyn Bochenek stwierdził, że tego rodzaju spotkania są bardzo pożyteczne i powinny być kontynuowane.

Pełne teksty referatów wygłoszonych przez autorów oraz ich krótkie streszczenia zawiera niniejszy zeszyt ALGORYTMÓW.

P R O G R A M

Pierwszego Krajowego Sympozjum
METODY ROZWIĄZYWANIA RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH ZWYCZAJNYCH
NA MASZYNACH CYFROWYCH

16 maj 1963 /czwartek/

Godz. 10 Otwarcie Sympozjum - Prof. Dr L. ŁUKASZEWICZ

CZĘŚĆ I. Godz. 10³⁰

PRZEWODNICZĄCY: Doc. Dr K. BOCHENEK

SEKRETARZ : Mgr J. LEWKOWICZ

Mgr Ryszard Pogorzelski

O stabilności pewnych metod różnicowych.

Dr Władysław Turski

O możliwości zrealizowania automatu określającego obszar praktycznej stabilności

CZĘŚĆ II. Godz. 13⁰⁰

PRZEWODNICZĄCY: Mgr K. MOSZYŃSKI

SEKRETARZ : I. HARASINOWICZ

Prof. Jan Szmelter, mgr Krystyna Deloff

Linia ugięcia ściskanego pręta po utracie stateczności

Mgr Światomir Ząbek

Kilka oszacowań błędu dla rozwiązań przybliżonych równań różniczkowych liniowych rzędu parzystego

Doc. Romuald Marczyński, mgr Wiesława Pulczyn

Modelowanie cyfrowego analizatora równań różniczkowych na maszynie cyfrowej

Mgr Włodzimierz Ostalski

Tablicowanie funkcji przez rozwiązywanie równań różniczkowych

7 maj 1963 /piątek/

CZĘŚĆ III. Godz. 9⁰⁰

PRZEWODNICZĄCY: Mgr R. POGORZELSKI

SEKRETARZ : Mgr B. PALLASCH

Mgr Karol Feldman, mgr Krzysztof Moszyński

Uwagi o realizacji algorytmu znajdowania rozwiązania zagadnienia brzegowego dla układu równań różniczkowych zwyczajnych, liniowych

Mgr Mirosław Dąbrowski, mgr Zenon Szoda

O przydatności metod Rungego-Kutty i Adamsa w praktyce obliczeniowej

CZĘŚĆ IV. Godz. 12⁰⁰

PRZEWODNICZĄCY: Mgr W. OSTALSKI

SEKRETARZ : Mgr H. RADZIKOWSKI

Mgr Apolonia Radziun

Ocena porównawcza metod numerycznych całkowania równań różniczkowych zwyczajnych na maszynie ZAM-2

Mgr Krzysztof Ziolkowski

Kilka uwag o użyteczności maszyn matematycznych do numerycznego rozwiązywania równań różniczkowych ruchu, stosowanych w astronomii

Doc. dr Krystyn Bochenek

O profilach fal uderzeniowych i określających je równaniach

Mgr Ryszard Pogorzelski

O numerycznym całkowaniu równań różniczkowych zwyczajnych metodą rzędu wyższego, niż rząd regularności rozwiązania

Zakończenie obrad. Podsumowanie - Doc. dr K. BOCHENEK.

str 51

O STABILNOŚCI PEWNYCH METOD
RÓŻNICOWYCH

Ryszard POGORZELSKI
Instytut Maszyn Matematycznych PAN

Autor opisuje metodę otrzymywania wzorów rzędu piątego stabilnych dla dosyć dużych przedziałów $h = f'_y(x, y) \cdot h$. Podano również równania charakterystyczne błędów dla metod Milne'a i Hamminga, zarówno modyfikowanych, jak i metod korygujących tylko raz z korektora na każdym kroku całkowania.

Niech będzie dane równanie różniczkowe zwyczajne następującej postaci:

$$y' = f(x, y)$$

$$y(x_0) = y_0 .$$

/1/

Podstawową grupę metod stosowanych do numerycznego rozwiązywania tego równania stanowią metody różnicowe. Metody różnicowe są na ogół szybsze od głównego ich konkurenta metod Rungego-Kutty. Na każdym kroku całkowania metody różnicowe w zasadzie wyznaczają dwa razy wartość pochodnej, podczas gdy metoda Rungego-Kutty rzędu czwartego wartości funkcji $f(x, y)$ oblicza cztery razy w czasie jednego kroku całkowania. Fakt ten ma istotnie znaczenie, szczególnie dla skomplikowanych funkcji $f(x, y)$ oraz dla dużych układów równań typu /1/.

Weźmy pod uwagę następujący wzór:

$$\alpha_k y_{n+k} + \alpha_{k-1} y_{n+k-1} + \dots + \alpha_0 y_n = h(\beta_k y'_{n+k} + \dots + \beta_0 y'_n),$$

/2/

gdzie h oznacza krok całkowania, α_m i β_m są współczynnikami rzeczywistymi, a y'_m są wartościami danej funkcji $f(x, y)$ w punktach $x_m = x_0 + mh$, tzn.

$$y'_m = f_m = f(x_m, y_m).$$

Ze wzoru /2/ będziemy korzystać przy numerycznym rozwiązywaniu równania /1/. Liczbę k , określającą ilość punktów początkowych występujących w tym wzorze, będziemy nazywać stopniem tego wzoru.

Założmy, że współczynniki α_m i β_m spełniają następujące równania:

$$\sum_{m=0}^k \alpha_m = 0$$

$$\sum_{m=0}^k \left(\frac{\alpha_m m^s}{s!} - \frac{\beta_m m^{s-1}}{(s-1)!} \right) = 0.$$

$$S = 1, 2, \dots, p.$$

Wówczas dla dostatecznie regularnych funkcji $y(x)$ mamy:

$$\sum_{m=0}^k [\alpha_m y(x+mh) - h\beta_m y'(x+mh)] = E = O(h^{p+1}).$$

Liczbę p będziemy nazywać rzędem wzoru /2/.

Aby wzór /2/ można było stosować do numerycznego rozwiązywania równań /1/, wzór ten winien dawać rozwiązanie zbliżone do rozwiązania dokładnego $y(x)$, kiedy $h \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ przy warunku $n = \frac{x - x_0}{h}$. Warunkiem koniecznym zbieżności rozwiązania numerycznego, otrzymanego przy pomocy wzoru /2/, jest $p \geq 1$, gdzie p jest rzędem wzoru. Warunek ten nazywa się warunkiem konsystentności. Warunek konsystentności jednak nie wystarcza. Wzór /2/ musi być ponadto stabilny. Zauważmy, że wzory, dla których $p > k + 2$, są niestabilne [4].

Aby sprawę stabilności bliżej wyjaśnić, przeprowadzimy następujące rozumowanie. Niech $\bar{y}_m = y(x_m)$ oznacza dokładne rozwiązanie równania /1/, a (y_m) rozwiązanie numeryczne, otrzymane ze wzoru /2/.

Wówczas

$$\alpha_k \bar{y}_{n+k} + \alpha_{k-1} \bar{y}_{n+k-1} + \dots + \alpha_0 \bar{y}_n = h(\beta_k \bar{y}'_{n+k} + \dots + \beta_0 \bar{y}'_n) + E \quad /3/$$

gdzie E oznacza błąd obcięcia metody. Niech

$$\varepsilon_m = \bar{y}_m - y_m$$

oznacza błąd rozwiązania w punkcie χ_m . Odejmując równanie /2/ od równania /3/ otrzymamy

$$\alpha_k \varepsilon_{n+k} + \alpha_{k-1} \varepsilon_{n+k-1} + \dots + \alpha_0 \varepsilon_n = h[\beta_k (\bar{y}'_{n+k} - y'_n) + \dots + \beta_0 (\bar{y}'_n - y'_n)] + E \quad /4/$$

Korzystając z twierdzenia o wartości średniej, mamy

$$\bar{y}'_m - y'_m = f(\chi_m, \bar{y}_m) - f(\chi_m, y_m) = \varepsilon_m f_y(\chi_m, \eta_m),$$

gdzie η_m jest zawarte w przedziale o końcach \bar{y}_m i y_m . Zakładając, że $f_y(x, y)$ i E są stałe w pewnym przedziale oraz wprowadzając oznaczenia

$$f_y(x, y) = K; \quad \bar{h} = hK,$$

równanie /4/ zapiszemy w postaci

$$\alpha_k \varepsilon_{n+k} + \alpha_{k-1} \varepsilon_{n+k-1} + \dots + \alpha_0 \varepsilon_n = \bar{h}(\beta_k \varepsilon_{n+k} + \dots + \beta_0 \varepsilon_n) + E$$

lub

$$a_k \varepsilon_{n+k} + a_{k-1} \varepsilon_{n+k-1} + \dots + a_0 \varepsilon_n = E, \quad /5/$$

gdzie

$$a_m = \alpha_m - \bar{h}\beta_m \quad m = 0, 1, \dots, k.$$

Otrzymaliśmy liniowe równanie różnicowe dla błędu ε_m . Ogólne rozwiązanie równania /5/ jest następujące:

$$\varepsilon_m = C_0 + C_1 \varrho_1^m + \dots + C_k \varrho_k^m,$$

gdzie $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ oznaczają pierwiastki następującego równania charakterystycznego, odpowiadającego równaniu /5/:

$$a_k \varphi^k + a_{k-1} \varphi^{k-1} + \dots + a_0 = 0. \quad /6/$$

Jeśli równanie /6/ posiada pierwiastki o module większym od jedności, to błąd \mathcal{E}_m będzie wzrastać wraz z m . Fakt ten jest szczególnie nieprzyjemny, jeśli $f_y < 0$. Wówczas bowiem pole krzywych całkowych jest zbieżne i rozwiązanie dokładne posiada asymptotę, natomiast rozwiązanie numeryczne może oscylować; błąd w tym rozwiązaniu może rosnać w postępie geometrycznym.

Stąd wynika, że nie można stosować wzoru Milne'a

$$y'_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{3} (y'_{n+1} + 4y'_n + y'_{n-1}),$$

nawet do tak prostego równania, jak

$$y' = -y; \quad y(0) = 1.$$

Dla wzoru Milne'a jeden z pierwiastków równania charakterystycznego jest w tym przypadku ($\bar{h} < 0$) mniejszy od -1. Błąd będzie nieuchronnie wzrastać wraz z ilością kroków całkowania niezależnie od tego, jak małe jest h . Dokładne rozwiązanie $y = e^{-x}$ będzie stopniowo zanikało w numerycznych rachunkach, ponieważ:

$$y_n = \bar{y}_n - \mathcal{E}_n = e^{-nh} - c_1 \varphi_1^n - c_2 \varphi_2^n - c_0.$$

Przyjmijemy następującą definicję stabilności. Wzór /2/ będziemy nazywać stabilnym, jeśli wszystkie pierwiastki odpowiadającego mu równania charakterystycznego /6/ leżą wewnątrz koła jednostkowego.

Podamy konstrukcję wzoru stabilnego dla dosyć dużych przedziałów $\bar{h} < 0$, przeprowadzoną przez Crane i Lamberta [2]. W tym celu rozważymy następujący wzór:

$$y_{n+1} = ay_n + by_{n-1} + cy_{n-2} + h(dy'_{n+1} + ey'_n + fy'_{n-1} + gy'_{n-2}). \quad \pi/$$

Będziemy żądać, aby wzór ten, podobnie jak wzór Milne'a, był rzędu czwartego, tzn. aby błąd obcięcia tego wzoru był proporcjonalny do h^5 . Rozwijając według potęg h odpowiednie funkcje i ich pochodne, występujące we wzorze /7/, i przyrównując współczynniki przy jednakowych potęgach h do h^4 włącznie, otrzymamy pięć równań na stałe a, \dots, g . Traktując dwie z nich jako parametry, np. b i g , możemy wyznaczyć pozostałe stałe, mianowicie:

$$\begin{aligned} a &= \frac{27(1-b)-72g}{24} & e &= \frac{18+14b+24g}{24} \\ b &= \frac{-3(1-b)+72g}{24} & f &= \frac{-9+17b+96g}{24} & /8/ \\ c &= \frac{9-b}{24} \end{aligned}$$

Lokalny błąd obcięcia wzoru /7/ ma przy tym postać

$$E = \frac{h^5 y^{(5)}}{360} (-9+5b-12g).$$

Wstawiając te wartości do odpowiadającego równaniu /7/ równania charakterystycznego, mamy:

$$a_3 \rho^3 + a_2 \rho^2 + a_1 \rho + a_0 = 0, \quad /9/$$

gdzie:

$$a_3 = 24 - 9\bar{h} + \bar{h}b$$

$$a_2 = -27 + 27b + 72g - 18\bar{h} - 14\bar{h}b - 24\bar{h}g$$

$$a_1 = -24b + 9\bar{h} - 17\bar{h}b - 96\bar{h}g$$

$$a_0 = 3 - 3b - 72g - 24\bar{h}g.$$

Jeśli równanie to ma pierwiastki o module równym jedności czyli $\varrho = e^{iQ}$, to z równania /9/ otrzymujemy:

$$a_3 \cos 3Q + a_2 \cos 2Q + a_1 \cos Q + a_0 = 0$$

/10/

$$a_3 \sin 3Q + a_2 \sin 2Q + a_1 \sin Q = 0.$$

W szczególnym przypadku jeśli $\varrho = 1$, to $\sin Q = 0$. Drugie równanie /10/ jest spełnione, zaś z pierwszego wynika, że

$$a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 0$$

czyli

$$\bar{h}(3+24g+5b) = 0.$$

/11/

Podobnie, jeśli $\varrho = -1$, to również drugie równanie /10/ jest spełnione, a z pierwszego mamy

$$-a_3 + a_2 - a_1 + a_0 = 0,$$

czyli

$$(\bar{h}+24)(b-9-24g) = -192+576g.$$

/12/

Jeżeli natomiast $\sin Q \neq 0$, to rugując Q z równań /10/ otrzymamy

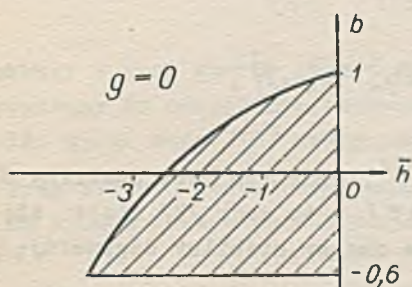
$$b^2 A(\bar{h}, g) + b B(\bar{h}, g) + C(\bar{h}, g) = 0,$$

/13/

gdzie $A(\bar{h}, g)$, $B(\bar{h}, g)$ i $C(\bar{h}, g)$ są wielomianami stopnia drugiego zmiennych \bar{h} i g .

Jeśli równanie /9/ posiada przynajmniej jeden pierwiastek o module równym jedności, wówczas spełnione jest przynajmniej jedno z równań /11/, /12/ i /13/. W dalszym badaniu wygodnie jest założyć, że liczba g jest wielkością ustaloną. Wówczas równania /11/, /12/ i /13/ określają pewne krzywe na płaszczyźnie $\bar{h}b$. Krzywe te dzielą płaszczyznę na obszary. Każdy punkt płaszczyzny $\bar{h}b$ określa pewne równanie /9/, zatem pewną grupę pierwiastków ϱ .

Założmy, że w pewnym punkcie P wewnątrz pewnego obszaru jednorodnego R , ograniczonego przez linie /11/, /12/ i /13/, wszystkie trzy pierwiastki równania /9/ leżą wewnątrz koła jednostkowego. Wówczas dla dowolnego punktu tego obszaru R wszystkie pierwiastki równania /9/ leżą wewnątrz koła jednostkowego. Zatem, dla określonego obszaru wystarczy sprawdzić tylko dla jednego punktu, czy moduły pierwiastków równania /9/ są mniejsze od 1. Wyniki przeprowadzonej w ten sposób analizy są dosyć interesujące. Okazało się, że wybór parametru g może radykalnie zmienić kształt obszaru stabilności, tzn. obszaru, w którym pierwiastki równania charakterystycznego /9/ są mniejsze co do modułu od jedności. Nie ma obszaru stabilności dla $g < -\frac{1}{3}$ oraz dla $g > \frac{1}{2}$. Obszary stabilności dla pewnych wartości parametru g przedstawione są poniżej graficznie.

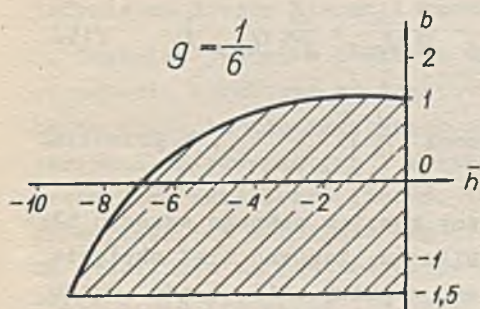


Obszar stabilności jest ograniczony krzywymi:

prostą: $\bar{h} = 0$

prostą: $b = -0,6$

hiperbolą: $(\bar{h} + 24)(b - 9) = 192$

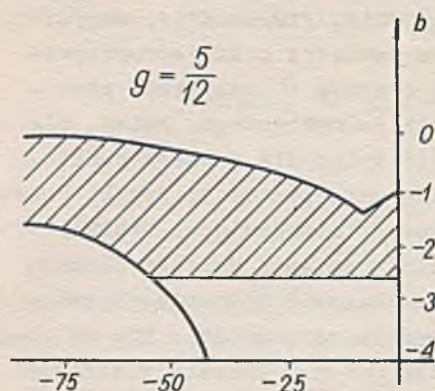


Obszar stabilności jest ograniczony krzywymi:

prostą: $\bar{h} = 0$

prostą: $b = -1,4$

hiperbolą: $(h + 24)(b - 5) = -96$



Obszar stabilności jest ograniczony krzywymi:

prostą: $\bar{h} = 0$

prostą: $b = -2,6$

krzywą: $b^2 A(\bar{h}, \frac{5}{12}) + b B(\bar{h}, \frac{5}{12}) + C(\bar{h}, \frac{5}{12}) = 0$

Dla $g = 0$ i $b = 0$ ze wzoru /7/ otrzymujemy wzór Hamminga [1]:

$$y_{n+1} = \frac{1}{8} [9y_n - y_{n-2} + 3h(y'_{n+1} + 2y'_n - y'_{n-1})], \quad /14/$$

którego błąd obcięcia wynosi $\frac{1}{40} h^5 y^{(5)}$. Wzór ten jest stabilny dla $-\frac{8}{3} < \bar{h} < 0$. Jeśli zaś $g = 0$ i $b = 1$, to wzór /7/ staje się wzorem Milne'a. Zauważmy, że wówczas obszar stabilny degeneruje się do punktu.

Crane i Lambert proponują wziąć $g = \frac{5}{12}$ i $b = -2$. Wówczas otrzymuje się wzór:

$$y_{n+1} = \frac{17}{8} y_n - 2y_{n-1} + \frac{7}{8} y_{n-2} + h \left(\frac{11}{24} y'_{n+1} - \frac{1}{8} y'_{n-1} + \frac{5}{12} y'_{n-2} \right). \quad /15/$$

Lokalny błąd obcięcia tego wzoru wynosi $-\frac{1}{15} h^5 y^{(5)}$, a przedział stabilności dla h jest następujący: $-72 < \bar{h} < 0$.

Zauważmy, że stabilność uzyskaliśmy kosztem pewnego wzrostu błędu obcięcia w porównaniu ze wzorem Milne'a. Zarówno błąd obcięcia wzoru /14/, jak i błąd wzoru /15/ jest większy niż błąd wzoru Milne'a. Efekt ten można zredukować przez niewielkie zmniejszenie kroku całkowania.

Dotąd zajmowaliśmy się stabilnością wzoru. Obecnie zastanowimy się nad stabilnością metod różnicowych. Będziemy rozpatrywać tzw. metody zamknięte, tzn. metody korzystające ze wzorów, dla których współczynnik β_k jest różny od zera. Przykładem takiej metody jest metoda Milne'a, określona przez wzory

$$p_{n+1} = y_{n-3} + \frac{4h}{3} (2y'_n - y'_{n-1} + 2y'_{n-2})$$

/16/

$$y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{3} (p'_{n+1} + 4y'_n + y'_{n-1}),$$

gdzie

$$p'_{n+1} = f(x_{n+1}, p_{n+1}).$$

Pierwszy z tych wzorów nazywa się zwykle predykatorem i jest wykorzystany do określenia pierwszego przybliżenia wartości rozwiązania. Drugi wzór /16/ zwany jest iteratorem lub korektorem.

Przy badaniu stabilności metody zamkniętej należy zwrócić uwagę na sposób korzystania z korektora. Rozróżniamy tu trzy przypadki:

1. Korektor jest stosowany iteracyjnie. Liczba obliczeń pochodnej może być w tym przypadku większa od liczby obliczeń pochodnej w metodzie Rungego-Kutty. W tym przypadku właściwości stabilne metody określone są w zupełności przez korektor, a predyktor wpływa jedynie na liczbę iteracji korektora.

2. Częściej jednak w praktyce wartości otrzymane z jednokrotnego stosowania korektora są traktowane jako końcowe. Dla oszacowania błędu obcięcia towarzyszącego danemu krokowi całkowania wielkości otrzymane z predyktora i korektora są porównywane. Jeśli błąd nie przewyższa określonej liczby, to wyniki są akceptowane, jeśli zaś przewyższa, to zmniejsza się krok całkowania. W danym przypadku na stabilność ma również wpływ predyktor. Stabilność samego korektora nie wystarcza dla stabilności metody.

3. Metody różnicowe potrzebują pewnej ilości punktów startowych. W związku z tym zmiana kroku całkowania jest dla metod różnicowych



kłopotliwa. Często więc, aby nie zmniejszać kroku całkowania w czasie obliczeń, stosuje się modyfikację metody. I tak np. metoda modyfikowana Milne'a korzysta ze wzorów:

$$p_{n+1} = y_{n-3} + \frac{4h}{3}(2y'_n - y'_{n-1} + 2y'_{n-2})$$

$$m_{n+1} = p_{n+1} - \frac{28}{29}(p_n - c_n)$$

$$c_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{3}(m'_{n+1} + 4y'_n + y'_{n-1})$$

/17/

$$y_{n+1} = c_{n+1} + \frac{1}{29}(p_{n+1} - c_{n-1}).$$

Modyfikacja metody Hamminga prowadzi do następujących wzorów:

$$p_{n+1} = y_{n-3} + \frac{4h}{3}(2y'_n - y'_{n-1} + 2y'_{n-2})$$

$$m_{n+1} = p_{n+1} - \frac{112}{121}(p_n - c_n)$$

$$c_{n+1} = \frac{1}{8}[9y_n - y_{n-2} + 3h(m'_{n+1} + 2y'_n - y'_{n-1})]$$

/18/

$$y_{n+1} = c_{n+1} + \frac{9}{121}(p_{n+1} - c_{n+1}).$$

Przez modyfikację podwyższa się rząd metody. Przy badaniu metody modyfikowanej należy uwzględnić również wpływ modyfikacji na jej stabilność.

Zbadamy obecnie stabilność metody Milne'a /16/ korzystającej tylko raz z korektora.

Niech \bar{y}_n oznacza dokładne rozwiązanie równania /1/.

Przyjmujemy następujące oznaczenia:

$$\varepsilon_n = \bar{y}_n - c_n; \quad \nu_n = \bar{y}_n - p_n.$$

Wówczas

$$\mathcal{V}_{n+1} = \varepsilon_{n-3} + \frac{4h}{3} (2\varepsilon'_n - \varepsilon'_{n-1} + 2\varepsilon'_{n-2}) + E_1$$

/19/

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_{n-1} + \frac{h}{3} (\mathcal{V}'_{n+1} + 4\varepsilon'_n + \varepsilon'_{n-1}) + E_2.$$

Postępując podobnie jak przy badaniu stabilności wzoru, otrzymamy następujące równania:

$$\mathcal{V}_{n+1} = \varepsilon_{n-3} + \frac{4\bar{h}}{3} (2\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1} + 2\varepsilon_{n-2}) + E_1$$

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_{n-1} + \frac{\bar{h}}{3} (\mathcal{V}_{n+1} + 4\varepsilon_n + \varepsilon_{n-1}) + E_2$$

Rugując z tych równań \mathcal{V}_{n+1} , dostaniemy

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_{n-1} + \frac{\bar{h}}{3} \left[\varepsilon_{n-3} + \frac{4\bar{h}}{3} (2\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1} + 2\varepsilon_{n-2}) + 4\varepsilon_n + \varepsilon_{n-1} \right] + E. \quad /20/$$

Równanie charakterystyczne odpowiadające temu równaniu ma postać

$$\varphi^4 - \varphi^3 \left(\frac{8\bar{h}^2}{9} + \frac{4\bar{h}}{3} \right) - \varphi^2 \left(1 + \frac{\bar{h}}{3} - \frac{4\bar{h}^2}{9} \right) - \frac{8\bar{h}^2}{9} \varphi - \frac{h}{3} = 0.$$

Dla porównania przytoczymy równanie charakterystyczne korektora Milne'a:

$$(\bar{h}-3)\varphi^2 + 4\bar{h}\varphi + (\bar{h}+3) = 0.$$

Widzimy więc, że różnica między tymi równaniami jest bardzo duża. Dowodzi to, że predyktor gra znaczną rolę w procesie obliczeniowym, przy jednokrotnym korzystaniu z korektora.

Podobne rozumowanie można przeprowadzić dla modyfikowanej metody Milne'a oraz dla metod Hamminga. Badając moduły pierwiastków otrzymanych równań charakterystycznych można stwierdzić, że [3]

- 1/ zwykła metoda Milne'a jest lepsza od iteracyjnej. Iteracyjna metoda nie ma obszaru stabilności, natomiast metoda zwykła jest stabilna dla $-0,8 < \bar{h} < -0,3$,
- 2/ modyfikacja metody Milne'a zmniejsza przedział stabilności prawie dwukrotnie ($-0,4 < \bar{h} < -0,2$),
- 3/ iteracyjna metoda Hamminga jest lepsza od metody zwykłej. Dla metody iteracyjnej przedziałem stabilności jest $-\frac{8}{3} < \bar{h} < 0$, zaś dla zwykłej $-0,5 < \bar{h} < 0$
- 4/ modyfikacja w tym przypadku zwiększa przedział stabilności ($-0,9 < \bar{h} < 0$).

Literatura

1. HAMMING R.W.: Stable Predictor-Corrector Methods for Ordinary Differential Equations, Journ.ACM, 1959: 1, 6, 37-47.
2. CRANE R.L., LAMBERT J.R.: Stability of a Generalized Corrector Formula, Journ.ACM, 1962: 1, 9, 104-118.
3. CHASE P.E.: Stability Properties of Predictor-Corrector Methods for Ordinary Differential Equations, Journ.ACM, 1962: 4, 9, 457-469.
4. DALQUIST G.: Mathematica Scandinavica, 1956: 33-53.

ON THE STABILITY OF SOME DIFFERENCE METHODS.

Summary

The paper deals with a numerical solution of differential equations of the form

$$y' = f(x, y)$$

$$y(x_0) = y_0.$$

The stability of the formula

$$\alpha_k Y_{n+k} + \alpha_{k-1} + \dots + \alpha_0 Y_n = h(\beta_k Y'_{n+k} + \dots + \beta_0 Y'_n)$$

is investigated in the first part of the paper, and the formula is given that is stable for rather great stability regions $\bar{h} = f'_y \cdot h$. In the second part the stability of difference methods is considered; the predictor and modification influence upon the method stability being taken into account.

O MOŻLIWOŚCI ZREALIZOWANIA AUTOMATU
OKREŚLAJĄCEGO OBSZAR PRAKTYCZNEJ
STABILNOŚCI

Władysław TURSKI
Centrum Obliczeniowe PAN

Praca poświęcona jest opisom cyfrowego modelu automatu, określającego obszar Q_0 warunków początkowych układu równań $\dot{x} = X(x, t)$, dla którego rozwiązanie jest zawarte w zadanym obszarze Q , przy dostatecznie małych perturbacjach prawej strony układu równań.

Spśród wielu wariantów zagadnienia stabilności ruchu sformułowanego przez Liapunowa, La Salle i Lefschetz [1] wyróżnili szczególnie ważny problem praktycznej stabilności.

Problem ten można sformułować dwójako:

1. Matematyczne określenie problemu.

Rozpatrzmy równanie

$$\dot{x} = X(x, t), \quad t \geq 0 \quad /1/$$

gdzie x i \dot{x} są n -wymiarowymi wektorami, a X funkcją-wektorem; t jest niezależną zmienną skalarną, względem której liczone są pochodne \dot{x} . Założmy, że równanie /1/ posiada rozwiązanie libracyjne oraz, że rozwiązaniem takim jest początek układu współrzędnych $x(0, t) = 0$ przy $t \geq 0$.

Rozpatrzmy teraz równanie z perturbacją

$$\dot{x} = X(x, t) + p(x, t), \quad t \geq 0. \quad /2/$$

Niech $x^* = x^*(t, x^0)$ będzie rozwiązaniem równania /2/, spełniającym warunek $x^*(0, x^0) = x^0$ i niech P będzie zbiorem wszystkich funkcji $p(x, t)$, spełniających warunek $|p(x, t)| < \delta$ dla wszystkich x i $t \geq 0$. Jeżeli mamy teraz dane dwa zbiory Q i Q_0 w przestrzeni X , takie że $0 \in Q_0 < Q$, i jeżeli dla każdego $x^0 \in Q_0$ zachodzi związek

$$x^*(t, x^0) \in Q \quad Q < t < T,$$

to mówimy, że ruch opisywany przez libracyjne rozwiązanie równania /1/ jest praktycznie stabilny.

Uwaga.

Pojęcie praktycznej stabilności można rozszerzyć na przypadek $T = \infty$.

2. Fizyczne określenie problemu.

Rozpatrzmy pewien realny układ dynamiczny, którego wyidealizowane zachowanie opisuje równanie /1/, posiadające rozwiązanie libracyjne. Ponieważ realny układ odbiega nieco od idealnego /zaniedbane tarcia, sprzężenia zwrotne i różne efekty z 'małymi współczynnikami' / i ponieważ nie możemy stworzyć idealnie dokładnych warunków początkowych, zachowanie realnego układu opisze się rozwiązaniem równania /2/, przy czym ani postać funkcji perturbującej p , ani wartość wektora x^0 nie są nam zasadniczo znane. Z drugiej strony, niemal zawsze istnieje pewna tolerancja, tj. zachowanie układu uważamy za zadowalające, jeśli przedstawiająca je trajektoria nie opuszcza pewnego obszaru Q . Powstaje więc pytanie: czy przy danej ekstremalnej wartości perturbacji, δ , dany wektor x^0 należy do obszaru praktycznej stabilności Q_0 . Praktycznie zależy nam na szybkiej odpowiedzi na pytanie, czy warunki początkowe, które konkretnie zaistniały, zabezpieczają zadowalające zachowanie się układu.

Matematycznie ściśle rozwiązanie tak sformułowanego problemu podają La Salle i Lefschetz [1]. Rozwiązanie to posiada niestety dwa poważne braki z punktu widzenia praktycznego zastosowania: po pierwsze, podaje ono jedynie warunek dostateczny istnienia obszaru praktycznej stabilności, po drugie - warunek ten opiera się na znajomości funkcji Liapunowa dla równania /2/, a jak wiadomo [2], nie ma dotychczas uniwersalnych sposobów znajdowania funkcji Liapunowa.

Wydaje się więc rzeczą pożyteczną znalezienie metody pozwalającej na badanie praktycznej stabilności, bez uciekania się do pomocy klasycznego aparatu drugiej metody Liapunowa. Przedmiotem niniejszej pracy jest wykazanie możliwości zastosowania pewnego automatu, a raczej jego cyfrowego modelu do rozwiązywania wyżej sformułowanego problemu. Korzystać przy tym będziemy z podanego przez Brawermana algorytmu, modelującego uczący się automat rozpoznający figury geometryczne [3].

Program modelujący taki automat przedstawiony jest schematycznie na rys. 1, przy czym poszczególne bloki spełniają następujące funkcje:

- blok G jest generatorem liczb przypadkowych,
- blok C jest blokiem całkowania numerycznego równań różniczkowych,
- blok W służy do wprowadzenia warunków zadania: kształtu obszaru Q , stałej T , programu prawych stron równania /2/. Blok ten powoduje odpowiednią modyfikację bloku C ,
- blok $B1$ realizuje pierwszy etap algorytmu Brawermana,
- blok $B2$ realizuje drugi etap algorytmu Brawermana,
- blok R wprowadza dane robocze.

Z wymienionych bloków jedynie trzy ostatnie wymagają szczegółowego opisu. Opis ten oprzemy na przykładzie równania /2/ bez funkcji perturbującej, co odpowiada przypadkowi $\sigma = 0$, w którym

$$x = (x_1, x_2) \quad \dot{x} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2) \quad X = (X_1(x_1, x_2, t), X_2(x_1, x_2, t)) .$$

Zauważmy, że gdyby $\sigma \neq 0$, to blok całkowania C powinien na każdym kroku dodawać do funkcji X pewną losową poprawkę o wartości z zakresu $[-\sigma, +\sigma]$.

Blok $B1$ wybiera losowo punkt P_1 odpowiadający danym początkowym (x_{11}^0, x_{21}^0) , przy czym $P_1 \in Q$; następnie przy pomocy bloku C znajduje się łuk trajektorii wychodzący z P_1 , odpowiadający odcinkowi czasowemu $[0, T]$. Jeśli łuk ten należy całkowicie do Q , to $P_1 \in Q_0$; w przeciwnym wypadku $P_1 \notin Q_0$.

Przyjmijmy teraz oznaczenia:

P_i^+ oznacza, że $P_i \in Q_0$,

P_i^- oznacza, że $P_i \notin Q_0$.

Niech P_1^* . Wylosujemy punkt P_2 i określimy jego górny indeks przez numeryczne całkowanie. Niech będzie P_2^- . Wówczas prowadzimy dowolną prostą /posługując się blokiem G / rozdzielającą te dwa punkty. W modelu cyfrowym przeprowadzenie prostej odpowiada następującej operacji. Bierzymy losową parę liczb $\lambda_{11}, \lambda_{12}$. Niech

$$\lambda_{11} x_{11}^0 + \lambda_{12} x_{21}^0 = a_1$$

$$\lambda_{11} x_{12}^0 + \lambda_{12} x_{22}^0 = a_2.$$

Wybierzmy z kolei dowolną liczbę λ_{13} , tak by spełniała się nierówność

$$\min(a_1, a_2) < \lambda_{13} < \max(a_1, a_2).$$

Wówczas prosta $\Pi_1 = \lambda_{11} x_1 + \lambda_{12} x_2 - \lambda_{13} = 0$ rozdziela punkty P_1 i P_2 . W pamięci maszyny umieszczamy trójkę liczb $\lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{13}$ i wybieramy nowy punkt P_3 .

Możliwe są cztery warianty:

1. $\Pi_1(P_3) = \Pi_1(P_1) \quad \text{i} \quad P_3^+$
2. $\Pi_1(P_3) = \Pi_1(P_1) \quad \text{i} \quad P_3^-$
3. $\Pi_1(P_3) = \Pi_1(P_2) \quad \text{i} \quad P_3^+$
4. $\Pi_1(P_3) = \Pi_1(P_2) \quad \text{i} \quad P_3^-$

Nie rozpatrujemy przypadku, kiedy P_3 pada dokładnie na prostą Π_1 , gdyż takie niesłychanie mało prawdopodobne zdarzenia zawsze można wyrugować. W wariantach 1 i 4 losujemy następny punkt P_4 ; w przypadkach 2 i 3, kiedy zachodzi pewna sprzeczność, prowadzimy nową prostą Π_2 , usuwającą tę sprzeczność, i także losujemy następny punkt.

Ogólnie powiedziawszy, po wylosowaniu i -tego punktu P_i i wykonaniu odpowiedniego całkowania wyliczamy kolejno $\Pi_j(P_i)$ dla wszystkich uprzednio przeprowadzonych prostych Π_j , $j = 1, 2, \dots, k$,

$k \leq i-2$ oraz sprawdzamy czy istnieje przynajmniej jeden punkt P_n , $n \leq i-1$, dla którego zachodzi

$$\pi_j(P_n) = \pi_j(P_i) \quad j=1,2,\dots,k.$$

Jeśli takiego punktu nie ma, losujemy następny punkt $P_{i+1} \in Q$. Jeśli natomiast punkty takie istnieją, to ma miejsce alternatywa: albo górny indeks punktu P_i jest zgodny z górnymi indeksami punktów należących do tego samego wieloboku /które to indeksy na mocy konstrukcji są jednakowe/, albo zachodzi sprzeczność, którą usuwamy przeprowadzając nową prostą π_{k+1} . Proces ten powtarzamy tak długo, aż osiągniemy pewną ilość trójek liczb, określających proste. Następny etap pracy polega na 'uczeniu się' automatu i jest realizowany przez blok B2. Uczenie składa się z dwu procesów:

1. Usuwanie niepotrzebnych granic.

W trakcie tworzenia obszarów /przez prowadzenie prostych/ ilość ich rośnie znacznie szybciej niż ilość punktów. W związku z tym powstaje szereg wieloboków, które nie zawierają żadnych punktów. Zdarzają się także takie proste lub ich odcinki, które dzielą dwa lub więcej obszarów, zawierających punkty o jednakowych górnych indeksach. Usuając takie odcinki oraz wymazując granice oddzielające obszary bez punktów od przyległych obszarów zawierających punkty, zmniejszamy radykalnie ilość parametrów charakteryzujących granice w pamięci maszyny. Proces przyłączania 'niepewnych' obszarów do obszarów zidentyfikowanych przez zawarte w nich punkty należy prowadzić możliwie losowo, albowiem systematyczne usuwanie granic, a szczególnie systematyczne przyłączanie obszarów, prowadzi do silnie uprzedzonego rezultatu [3].

2. Badanie stopnia niezawodności.

Losujemy dowolny punkt $P_k \in Q$. W wyniku poprzedniego etapu należy on do obszaru, w którym znajduje się już co najmniej jeden punkt P_s . Punktowi P_k przydajemy górny indeks, taki sam jak punktowi P_s , po czym sprawdzamy przez całkowanie numeryczne słuszność naszej hipotezy. W przypadku uzyskania zgodności losujemy następny punkt kontrolny i proces ten powtarzamy żadaną ilość razy. W przypadku otrzymania sprzeczności między apriorycznym i aposteriorycznym indeksem punktu kontrolnego powtarzamy blok B₁, w którym mamy już 'wygospodarowane' miejsca na parametry nowych prostych.

Można oczywiście przyjąć jakieś inne zasady sprawdzania stopnia niezawodności.

Eksperymenty Brawermana, który stosował podobny do opisanego algorytm do nieporównanie bardziej skomplikowanego problemu rozpoznawania cyfr arabskich i tworzenia w maszynie pojęć 'ogólnych cyfr arabskich', dowodzą, że stosunkowo niewielka ilość przebiegów bloku B_1 gwarantuje wysoki stopień niezawodności rozpoznania. Mając na uwadze stosunkowo gładkie kształty obszarów praktycznej stabilności i 'praktyczny' charakter zadania wydaje się możliwe zrealizowanie dostatecznie oszczędnego modelu uczącego się automatu, umiającego przepowiadać czy dany punkt P należy do Q_0 . Nie wydaje się również rzeczą trudną taka konstrukcja automatu, czy raczej jego modelu cyfrowego, która pozwoliłaby na stałe podnoszenie stopnia niezawodności, np. przy włączeniu automatu do układu cyfrowego pracującego w czasie rzeczywistym.

Rozszerzenie opisanego programu na przypadki o większej ilości stopni swobody jest niemalże trywialne; wystarczy zamiast prostych rozpatrywać rozgraniczające hiperpłaszczyzny.

W Centrum Obliczeniowym PAN prowadzone są prace nad konkretną realizacją wyżej opisanego programu.

Literatura

1. LASALLE J., LEFSCHETZ S.: Stability by Ljapunov's Direct Method with Applications, Academic Press., 1961.
2. DUBOŠIN: Osnovy teorii ustojčivosti dviženija, Izdatelstvo MGU, 1952.
3. BRAVERMAN E.M.: Opyty po obučeniju mašiny razpoznavaniju zritelnyh obrazov, Avtomatika i Telemekhanika, 1962:23, 349-364.

ON A POSSIBLE REALIZATION OF AN AUTOMATON DETERMINING THE DOMAIN OF PRACTICAL STABILITY

Summary

The paper contains a description of an automaton that determines the shape of the domain of practical stability Q_0 . A digital model of such an automaton is proposed, based on the principle of the Braverman's preceptron.

The considered differential equation is the following:

$$/R/ \quad \dot{x} = X(x, t)$$

where x is the n -dimensional vector, \dot{x} - its derivative and X - vector function. If function X satisfies the condition $X(0, t) = 0$ for $t = 0$, the point 0 is the equiril solution of the equation $/R/$. The equilibril solution is said to be practically stable if for any solution of the equation

$$\dot{x} = X(x, t) + p(x, t)$$

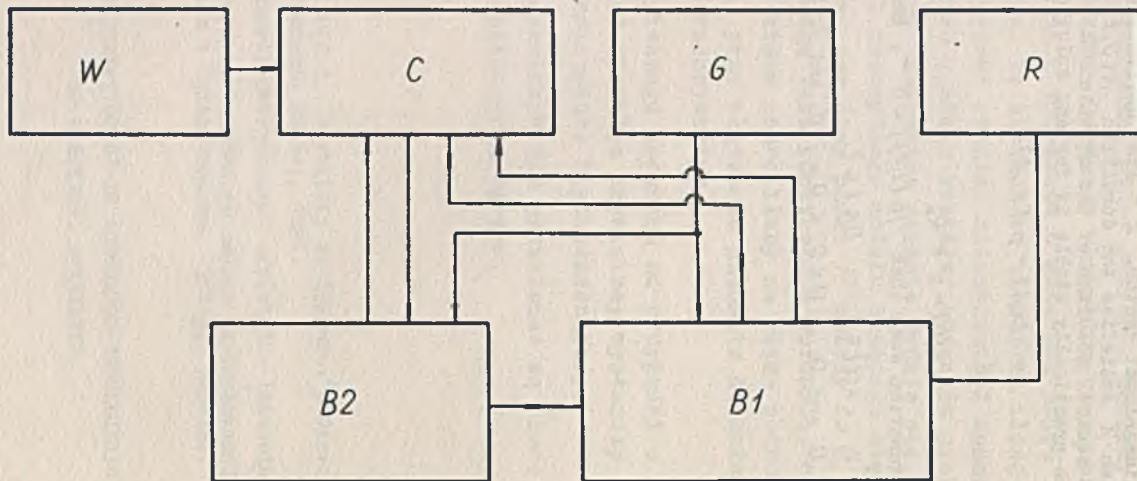
with initial conditions

$$x(0) = x^0 \in Q_0$$

p , being arbitrary function such that $|p(x, t)| < \delta$, there is

$$x(t) \in Q \quad 0 \leq t < T$$

with closed domains Q and Q_0 , $0 \in Q_0 \subset Q$. δ and T being non negative constants.



Rys. 1 Schemat programu modelującego uczący się automat.

LINIA UGIĘCIA ŚCISKANEGO PRĘTA PO UTRACIE STATECZNOŚCI

Jan SZMELTER

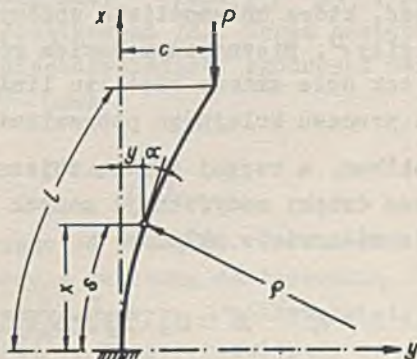
Krystyna DELOFF

Polit. Łódzka

Katedra Mechaniki Technicznej

Oblicza się linię ugięcia pręta ściskanego siłą równoległą do jego nieodkształconej osi. Pręt ma dany dowolnie zmienny przekrój i jest zamocowany jednym końcem albo podparty przesuwnie na obu końcach. Równania różniczkowe są nieliniowe, ponieważ uwzględnia się ścisły wzór na krzywiznę pręta i zmienność jego przekroju. Równania te rozwiązywano metodą Rungego-Kutty-Gilla, przy czym spełnienie warunku brzegowego osiągnięto metodą kolejnych przybliżeń. Szybka zbliżność tej metody uzyskano na drodze odpowiedniej modyfikacji samych równań różniczkowych.

Pręt o długości l zamocowano dolnym końcem w punkcie $(0,0)$ i poddano ścisaniu siłą P , równoległą do nieodkształconej osi pręta X /rys. 2/. Poszukuje się parametrycznych równań równowagi pręta, w których współrzędne x, y wyrażone są jako funkcje zmiennej niezależnej s , przedstawiającej długość łuku pręta mierzoną od punktu zamocowania. Również od tej zmiennej zależą kosinusy kierunku stycznej $u = x' = \cos \alpha$, $v = y' = \sin \alpha$ oraz krzywizna $\frac{1}{\rho} = v'u - uv'$. Od niej zależą także dana zmienna sztywność pręta EJ .



Rys. 2

Jak wiadomo [1], istnieje taka wartość siły krytycznej P_{kr} , że gdy $P < P_{kr}$, pręt przyjmuje postać prostoliniową, a po nieznacznym przekroczeniu tej siły, ulega poważnym odkształceniom. Celem zadania jest wyznaczenie siły krytycznej i wyznaczenie linii ugięcia w tym drugim stanie, to znaczy po utracie stateczności, oraz przypisanie każdej linii ugięcia odpowiadającej jej wartości siły P .

Jeżeli przez C oznaczymy wychylenie końca pręta, to moment gnący w przekroju określonym zmienną S wynosi $(C-y)P$. Z teorii zginania [1], [2] wiadomo, że odpowiada mu krzywizna $\frac{1}{\rho} = (C-y)\frac{P}{EJ}$. Jeżeli ponadto skorzystamy z wyżej podanych związków, to ostatecznie zagadnienie sprowadzi się do rozwiązania układu równań różniczkowych:

$$s' = 1, \quad x' = u, \quad y' = v, \quad u' = -(C-y)\frac{P}{EJ}, \quad v' = (C-y)\frac{P}{EJ} \quad /1/$$

z warunkami początkowymi wynikającymi ze sposobu podparcia pręta

$$s(0) = 0, \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad u(0) = 1, \quad v(0) = 0. \quad /2/$$

Oprócz tego musi być spełniony warunek brzegowy

$$y(1) = C. \quad /3/$$

Równania /1/ i /2/ można rozwiązać od razu metodą kroków, taką jak np. Rungego-Kutty-Gilla [3], [4], Adamsa itp. Jednakże do rozwiązania ich trzeba z góry znać wartość C i P . Najprostszy - jak wydawałoby się - sposób, polegający na założeniu C , przypadkowym wyborze siły P , scałkowaniu równań /1/ i /2/ i poprawianiu siły P aż do uzgodnienia warunku /3/ - zawodzi. Powodem tego jest wspomniana wyżej niestabilność, która uniemożliwia dokonywanie nawet przybliżonych oszacowań siły P . Nieznacznym bowiem różnicom wartości tej siły odpowiadają tak duże zmiany kształtu linii ugięcia, że nie ma mowy o zbieżności procesu kolejnego poprawiania siły P .

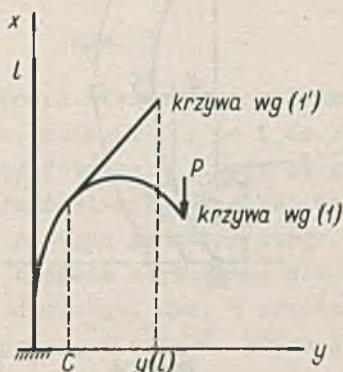
Stabilność problemu, a raczej szybką zbieżność procesu kolejnych przybliżeń uzyskano dzięki modyfikacji samych równań różniczkowych /1/. Zastąpiono je mianowicie układem

$$s' = 1, \quad x' = u, \quad y' = v$$

$$u' = \begin{cases} -(C-y) \frac{P}{EJ} & \text{dla } y < C \\ 0 & \text{dla } y > C \end{cases} \quad /1'/$$

$$v' = \begin{cases} +(C-y) \frac{P}{EJ} & \text{dla } y < C \\ 0 & \text{dla } y > C \end{cases}$$

Układ /1'/ można zaprogramować w sposób równie prosty jak /1/, wykorzystując standardowe metody całkowania równań różniczkowych. Znaczenie postawionego w ten sposób problemu jest takie, że w zakresie $y < C$ krzywe



Rys. 3

według równań /1/ i /1'/ są identyczne, a począwszy od $y > C$ krzywa wg /1'/ przedstawia prostą styczną do początkowej krzywej w punkcie $y = C$.

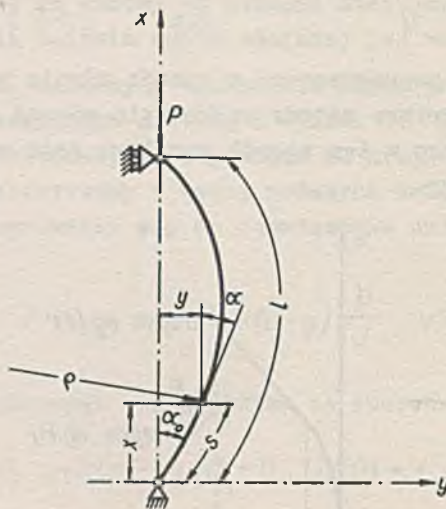
Postępowanie iteracyjne polega na założeniu C , przyjęciu dowolnej wartości początkowej siły P /np. $\frac{P}{EJ} = 1/$, scałkowaniu układu /1'/ z warunkami początkowymi /2/. Teraz następuje sprawdzenie warunku /3/. W razie niezadowalającej zgodności następuje zastąpienie starej wartości P - nową

$$P^* = \frac{PC}{y(1)} \quad /4/$$

i powtórzenie wszystkiego od początku. Proces kończy się, gdy warunek /3/ jest spełniony z założoną dokładnością. Wówczas w zakresie $0 < s < 1$ obie krzywe na rys. 3 pokrywają się, ponieważ stale zachodzi nierówność $y < C$. Zatem, rozwiązany zostaje właściwy pro-

blem wg równań /1/. Ostatnia wartość siły P jest poszukiwana, co wynika bezpośrednio z /4/ i /3/.

Drugi wariant problemu różni się od przedstawionego na rys. 2 sposobem podparcia pręta /rys. 4/.



Rys. 4

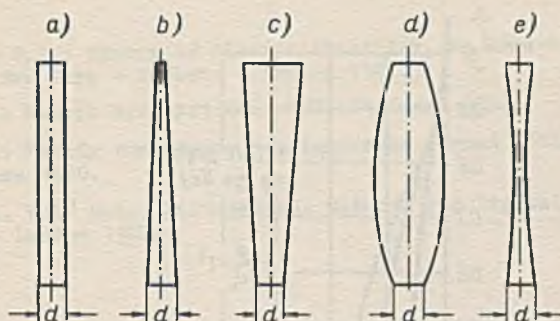
Równania /1/, /1'/, /3/ są w dalszym ciągu słuszne, jeżeli przyjmiemy w nich $C=0$. Zmieniają się teraz tylko warunki początkowe /2/, które przyjmują postać:

$$s(0)=0, \quad x(0)=0, \quad y(0)=0, \quad u(0)=\cos\alpha_0, \quad v(0)=\sin\alpha_0 \quad /2'/$$

Obecnie zamiast C zakłada się α_0 i dobiera odpowiednio P . Poprawioną wartość P^* po każdej iteracji obliczano wg zależności

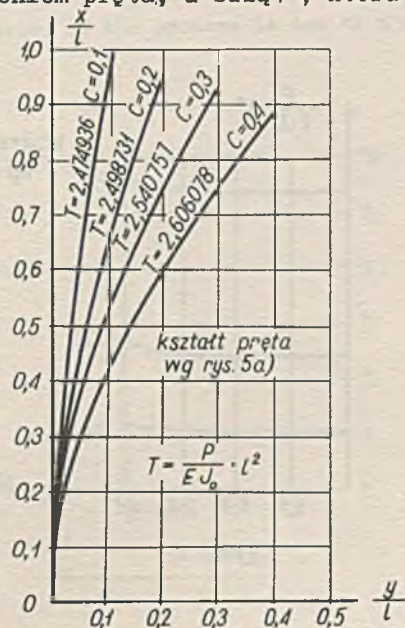
$$P^* = \frac{P\alpha_0 l}{[\alpha_0 l - y(1)]} \quad /4'/$$

Zadanie rozwiązywano dla prętów o kształtach z rys. 5, po czym stosowano metodę Rungego-Kutty-Gilla przy podziale całkowitej długości-

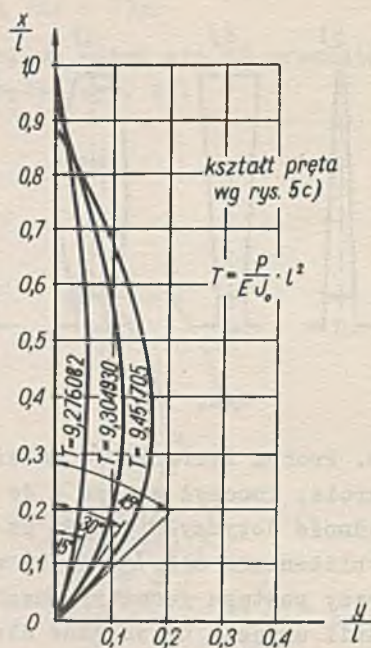


Rys. 5

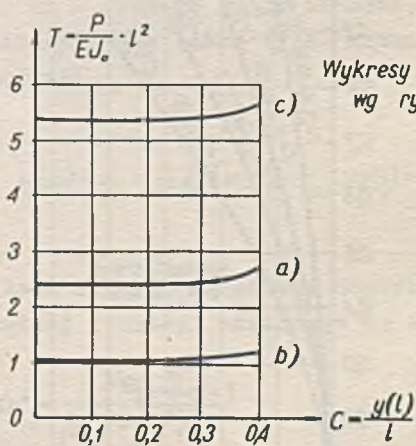
ci pręta na 16 kroków. Proces iteracji, w zależności od kształtu pręta i sposobu podparcia, kończył się po 6 do 24 iteracjach, przy czym uzyskiwana dokładność dotyczyła 6 cyfr po przecinku. Różnica między kolejnymi przybliżeniami siły P , a jej wartością końcową malała podobnie jak wyrazy postępu geometrycznego. Rys. 6 przedstawia typowe wykresy linii ugięcia uzyskiwane dla pierwszego wariantu zadania, rys. 7 - dla drugiego. Rys. 8 przedstawia typową zależność między wychyleniem pręta, a siłą P , która je wywołała.



Rys. 6



Rys. 7



Rys. 8

Literatura

1. TIMOSHENKO S.P.: Theory of Elastic Stability, Mc Graw-Hill Book Company, Inc., New York - Toronto - London 1961.
2. HUBER M.T.: Teoria sprężystości, PWN, Warszawa 1954.
3. COLLATZ L.: Metody numeryczne rozwiązywania równań różniczkowych, PWN, Warszawa 1960.
4. RALSTON A., WILF H.S.: Mathematical Methods for Digital Computers, New York - London 1960.

DEFLECTION CURVE OF A COMPRESSED BAR IN UNSTABLE STATE

Summary

The bar is compressed by a force acting parallelly to its underformed axis. The cross section of the bar is variable and is given. The bar is fixed at one of its ends or supported on two movable supports at its both ends.

Differential equations are unlinear because of the accurate expression used for the curvature.

These equations are solved by means the Runge-Kutta-Gill's method. The boundary conditions at the ends of the bar are satisfied after an iteration process.

The quick convergence of the process is due to a modification of differential equations.

KILKA OSZACOWAŃ BŁĘDU DLA ROZWIĄZAŃ
PRZYBLIŻONYCH RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH
LINIOWYCH RZĘDU PARZYSTEGO

Światomir ZĄBEK

Katedra Zespołowa Matematyki
UMC w Lublinie

Praca zawiera zestawienie /bez dowodów/ kilku wariantów otrzymanych przez autora oszacowań błędu bezwzględnego, którym obarczone są przybliżone rozwiązania samosprężonego liniowego problemu brzegowego rzędu parzystego /równanie różniczkowe zwyczajne liniowe z warunkami brzegowymi najprostszego typu/. Oszacowania te są ważne dla dowolnej funkcji dostatecznie regularnej i spełniającej warunki brzegowe, przyjętej za rozwiązanie przybliżone problemu /tj. nie odgrywa roli metoda otrzymania tego przybliżonego rozwiązania/ i wyrażają się poprzez 'defekt' tegoż rozwiązania przybliżonego oraz poprzez wyrażenie zależne od współczynników równania. Praca zawiera ponadto przykłady ilustrujące przydatność praktyczną tych oszacowań.

Rozpatrujemy problem brzegowy liniowy rzędu $2m$

$$L[y] = \sum_{i=0}^m (-1)^i (p_i(x) y^{(i)})^{(i)} = r(x), \quad /1/$$

gdzie $y^{(0)}(x) \equiv y(x)$;

$$y^{(i)}(a) = y^{(i)}(b) = 0 \quad i=0, 1, \dots, m-1, \quad /2/$$

gdzie m jest liczbą naturalną, $p_i(x)$ są funkcjami rzeczywistymi klasy C^i w przedziale $\langle a, b \rangle$, $p_i(x) \geq 0$ dla $i=0, 1, \dots, m$, $p_m(x) > p > 0$ w $\langle a, b \rangle$.

Niech $Y(x)$ będzie dokładnym rozwiązaniem problemu /1/ - /2/, zaś $\tilde{y}(x)$ pewną funkcją klasy C^{2m} spełniającą warunki brzegowe /2/. Funkcja $\tilde{y}(x)$ może być np. rozwiązaniem przybliżonym rozpatrywanego problemu, otrzymanym przy pomocy którejkolwiek ze znanych metod. Oznaczmy

$$\eta = \max_{\langle a, b \rangle} |Y(x) - y(x)|$$

$$\bar{z}(x) = \frac{|Y(x) - \tilde{y}(x)|}{\eta}.$$

G. Bertram [1] wykazał, że dla dowolnego m naturalnego

$$\eta \leq \frac{\int_a^b |L[\tilde{y}] - r(x)| dx}{\int_a^b \sum_{i=0}^m \rho_i(x) [\bar{z}^{(i)}(x)]^2 dx} \quad /3/$$

Całka $\int_a^b |L[\tilde{y}] - r(x)| dx$ czyli $\int_a^b |\text{Defekt}| dx$ może być obliczona dokładnie, bądź metodami przybliżonymi z nadmiarem bez większych trudności. Aby zatem oszacować od góry błąd bezwzględny η , należy oszacować od dołu całkę w mianowniku prawej strony nierówności /3/. Oznaczając

$$I_m = \int_a^b \sum_{i=0}^m \rho_i(x) [\bar{z}^{(i)}(x)]^2 dx$$

mamy, po dokonaniu zmiany zmiennej $t = \frac{(x-a)}{(b-a)}$,

$$I_m = \int_0^1 \sum_{i=0}^m q_i(t) [\bar{u}^{(i)}(t)]^2 dt, \quad /4/$$

gdzie

$$q_i(t) = \frac{\rho_i[(b-a)t+a]}{(b-a)^{2i-1}} \quad \text{dla } i = 0, 1, \dots, m \quad /5/$$

są funkcjami klasy C^i w $\langle 0, 1 \rangle$, nieujemnymi, a $q_m(t) \geq q = \frac{\rho}{(b-a)^{2m-1}} > 0$

$$\tilde{u}(t) = \tilde{z}[(b-a)t+a]$$

/6/

$$\tilde{u}_i(t) = [\tilde{z}^{(i)}(x)|_{x=(b-a)t+a}] \cdot (b-a)^i.$$

Oczywiście $\tilde{u}^{(i)}(0) = \tilde{u}^{(i)}(1) = 0$ dla $i = 0, 1, \dots, m-1$, zaś $\max_{\langle 0,1 \rangle} |\tilde{u}(t)| = 1$.

Oznaczmy teraz

$$\phi_m[u, \alpha, \beta] = \int_{\alpha}^{\beta} \sum_{i=0}^m q_i(t) [u^{(i)}]^2 dt \quad /7/$$

oraz, dla każdego $\tau \in (0,1)$ /otwartego/

L_{τ}^m = klasa funkcji $v(t)$ określonych w $\langle 0, \tau \rangle$, mających tamże absolutnie ciągłą pochodną rzędu $(m-1)$ oraz spełniających warunki: $|v(t)| < 1$ w $\langle 0, \tau \rangle$, $v^{(i)}(0) = 0$ dla $i = 0, 1, \dots, m-1$, $v(\tau) = 1$;

P_{τ}^m = klasa funkcji $w(t)$ określonych w $\langle \tau, 1 \rangle$, mających tamże absolutnie ciągłą pochodną rzędu $(m-1)$ oraz spełniających warunki: $|w(t)| < 1$ w $\langle \tau, 1 \rangle$, $w^{(i)}(1) = 0$ dla $i = 0, 1, \dots, m-1$, $w(\tau) = 1$;

U_{τ}^m = klasa funkcji $u(t)$ określonych w $\langle 0, 1 \rangle$ i takich, że dla każdej funkcji $u(t)$ z tej klasy istnieją takie funkcje $v(t)$ z klasy L_{τ}^m i $w(t)$ z klasy P_{τ}^m , że

$$u(t) = \begin{cases} v(t) & \text{dla } t \in \langle 0, \tau \rangle; \\ w(t) & \text{dla } t \in \langle \tau, 1 \rangle; \end{cases}$$

$$U^m = \bigcup_{\tau \in (0,1)} U_{\tau}^m.$$

Nietrudno zauważyć, że bądź $\tilde{u}(t) \in U^m$, bądź $(-\tilde{u}(t)) \in U^m$.

Zatem

$$\begin{aligned} I_m = \phi_m[\tilde{u}, 0, 1] &\geq \inf_{U^m} \phi_m[u, 0, 1] = \inf_{\tau \in (0,1)} \inf_{U_{\tau}^m} \phi_m[u, 0, 1] = \\ &= \inf_{\tau \in (0,1)} (\inf_{L_{\tau}^m} \phi_m[u, 0, \tau] + \inf_{P_{\tau}^m} \phi_m[u, \tau, 1]). \end{aligned}$$

Obliczanie lub szacowanie infimów funkcjonału ϕ_m^τ może być wykonane metodami rachunku wariacyjnego, po czym minimum otrzymanej funkcji zmiennej τ oblicza się klasycznym sposobem. W szczególności np. opłaca się oszacować wstępnie funkcjonał $\phi_m[u, \alpha, \beta]$ od dołu przez funkcjonał $\int_a^b q_m(t) [u^{(m)}]^2 dt$, czy nawet, pamiętając, że $q_m(x) \geq q$, przez funkcjonał $q \int_a^b [U^{(m)}]^2 dt$.

Stosując to ostatnie szacowanie, K. Tatarkiewicz [2] dla przypadku $m=1$ /tzn. problemu rzędu 2/, później zaś G. Bertram [1] dla dowolnego m otrzymali oszacowanie

$$I_m \geq \frac{p(2m-1)[(m-1)! 2m]^2}{(b-a)^{2m-1}} = H_2^m. \quad /8/$$

Ponadto K. Tatarkiewicz /loc. cit./ pokazał, że

$$I_1 \geq \frac{4}{\int_a^b \frac{dx}{\rho_1(x)}} = H_1^1. \quad /9/$$

Łatwo zauważyć, że $H_1^1 \geq H_2^1$, zaś w przypadku najczęściej spotykanym, gdy $\rho_1(x) \equiv p=1$, $a=0$, $b=1$

$$I_1 \geq 4 = H_3^1$$

W tejże pracy K. Tatarkiewicz, przy dodatkowym założeniu, że również $\rho_0(x) \geq \bar{\rho}_0 > 0$, znalazł oszacowanie

$$L_1 \geq \frac{2p \sqrt{\frac{\bar{\rho}_0}{p}}}{(b-a) \operatorname{th} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\bar{\rho}_0}{p}}} = H_4^1 \quad /10/$$

Oczywiście, wobec faktu, że $0 < \operatorname{th} t < t$ dla $t > 0$,

$$H_4^1 \geq H_2^1.$$

Stosując podobne metody, przy pomocy rachunków niestety zbyt długich i żmudnych, by dały się przedstawić w krótkim komunikacie, otrzymałem oszacowania dla wyższych wartości m , analogiczne do wyżej przytoczonych. Mianowicie

$$I_m \geq H_1^m \geq H_1^{-m};$$

przy czym

$$H_1^m = \frac{\min_{x \in (a,b)} \left\{ \left[\int_a^x \left(\int_a^x \frac{dx^{2m-2}}{q_m(x)} \right) dx \right]^{-1} + \left[\int_x^b \left(\int_x^b \frac{dx^{2m-2}}{q_m(x)} \right) dx \right]^{-1} \right\}}{\binom{2m-2}{m-1}} \quad /11/$$

gdzie $q_m(x) = \frac{p_m[(b-a)x + a]}{(b-a)^{2m-1}}$, zaś

$$\int_a^x f(x) dx^1 = \int_a^x f(x) dx, \quad \int_a^x f(x) dx^k = \int_a^x \left(\int_a^x f(x) dx^{k-1} \right) dx$$

i podobne jest znaczenie symbolu $\int_a^x f(x) dx^k$.

Stała H_1^m jest jednak tylko w specjalnych przypadkach łatwa do bezpośredniego obliczenia /być może opłacałoby się jej obliczanie metodami przybliżonymi np. na maszynach/, natomiast szacowanie jej prowadzi bądź do stałej G. Bertrama H_2^m , bądź do stałej H_1^{-m} , gdzie

$$H_1^{-m} = \frac{[2^m(m-1)!]^2}{(b-a)^{2m-2} \int_a^b \frac{dx}{p_m(x)}} \quad /12/$$

Ponadto, przy dodatkowym założeniu, że $p_{m-1}(x) \geq \bar{p}_1 > 0$, otrzymałem dla $m=2,3,4$ oszacowania

$$I_2 \geq \frac{4h^3 q}{(h-2th \frac{h}{2})} = H_4^2 \quad /13/$$

$$I_3 \geq \frac{48h^5 qch \frac{h}{2}}{[(12h+h^3)ch \frac{h}{2} + 6(4-h^2)sh \frac{h}{2} - 24h]} = H_4^3 \quad /14/$$

$$I_4 \geq \frac{3840h^7 q}{[160h^3 + 3h^5 + 960h - 30(h^2+8)^2 th \frac{h}{2}]} = H_4^4 \quad /15/$$

gdzie

$$h = (b-a) \sqrt{\frac{\bar{\rho}_1}{\rho}}, \quad q = \frac{\rho}{(b-a)^{2m-1}} \quad /16/$$

Z /3/ wynika, że dla danej stałej

$$\eta < \frac{1}{H_i^m} \int_a^b |\text{Defekt}| dx.$$

Zatem, im większa jest stała H_i^m , tym lepsze otrzymamy oszacowanie błędu bezwzględnego η . Zestawienie pod tym względem stałej H_1^m ze stałą G. Bertrama H_2^m wypada na korzyść tej pierwszej; niestety, nie jest ona wygodna w praktyce. Znacznie wygodniejsza \bar{H}_1^m jest nie mniejsza od H_2^m jedynie w przypadkach, gdy $\rho_m(x)$ dostatecznie dużo 'odchyła się' od swego kresu dolnego ρ , a mianowicie wtedy, gdy $\int_a^b \frac{dx}{\rho_m(x)} < \frac{(b-a)}{(2m-1)\rho}$. Szansa takiej właśnie sytuacji maleje jednakże ze wzrostem m . Jeśli zaś $\rho_m(x) \equiv \rho$, wtedy stała ta daje $(2m-1)$ -krotnie 'gorsze' oszacowanie niż stała H_2^m .

Stałe H_4^m ($m=2,3,4$) w przypadku ogólnym nie dają się raczej porównywać z odpowiednimi stałymi H_1^m czy H_2^m . Niemniej można tu zauważyć, iż dają one tym 'lepsze' /tzn. większe/ wartości, im większe jest $\bar{\rho}_1$ i im mniejsze jest ρ .

Jako przykład rozpatrzmy problem rzędu 4:

$$\begin{cases} \left[\frac{y''}{(1+x)} \right]'' - \frac{y''}{32+y' \sin x - xy} = \cos x \\ y(0) = y'(0) = y(1) = y'(1) = 0 \end{cases}$$

Obliczanie stałej H_1^2 prowadzi do równania algebraicznego stopnia 7, pominiemy więc ją w tym przykładzie. Natomiast, jak nietrudno stwierdzić,

$$H_2^2 = 24, \quad \bar{H}_1^2 = \frac{16}{\int_0^1 (1+x) dx} = \frac{32}{3}$$

$$H_4^2 = \frac{\left(\frac{1}{32}\right)}{\left(\frac{1}{4} - 2\text{th}\frac{1}{8}\right)} > \frac{\left(\frac{1}{32}\right)}{(0,25 - 2 \cdot 0,1245)} = \frac{125}{4}$$

Zatem stała H_4^2 daje tu oszacowanie najlepsze, natomiast \bar{H}_4^2 jest 'gorsza' niż H_4^2 . Mamy więc ostatecznie $\eta < \left(\frac{4}{125}\right) \int_0^1 |\text{Defekt}| dx$.

Zaletami niewątpliwymi powyższych oszacowań jest ich względna prostota, a także ich 'uniwersalność'. Stosują się one do szacowania błędu bez względu na metodę, jaką otrzymano dane przybliżone rozwiązanie $\tilde{y}(x)$.

Literatura

1. BERTRAM G.: Eine Fehlerabschätzung für gewisse selbstadjungierte gewöhnliche Randwertaufgaben, Num. Math., 1959:1.
2. TATARKIEWICZ K.: Une méthode d'estimation de l'erreur dans le procédé de Ritz, Ann. Pol. Math., 1955:1, 2.

SOME ERROR ESTIMATIONS OF APPROXIMATE SOLUTIONS OF LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS OF EVEN ORDER

Summary

The following boundary problem is considered

$$\left. \begin{aligned} L[y] = \sum_{\mu=0}^m (-1)^\mu (\rho_\mu(x) y^{(\mu)})^{(\mu)} = r(x) \quad (y^{(a)} = y) & \quad /1/ \\ y^{(\mu)}(a) = y^{(\mu)}(b) = 0 \quad \mu = 0, 1, \dots, m-1. & \quad /2/ \end{aligned} \right\}$$

where m is a natural number and $\rho_\mu(x)$ are real functions of the class C^μ in $\langle a, b \rangle$, $\rho_\mu(x) \geq 0$ for $\mu = 0, 1, \dots, m$, $\rho_m(x) \geq p > 0$ in $\langle a, b \rangle$.

Let the function $\tilde{y}(x)$ of the class C^{2m} in $\langle a, b \rangle$ satisfy conditions /2/, and $Y(x)$ be the exact solution of the problem /1/ and /2/. Denote $\eta = \max |Y(x) - \tilde{y}(x)|$ and $Z(x) \equiv \frac{LY(x) - \tilde{y}(x)}{\eta}$. According to Bertram /1959/ for any natural m the inequality holds

$$\eta < \frac{\int_a^b |L[\tilde{y}] - r(x)| dx}{\int_a^b \sum_{\mu=0}^m \rho_\mu(x) [Z^{(\mu)}(x)]^2 dx} \quad /3/$$

In order to obtain a concrete over-estimation for η the under-estimation of the integral in the denominator of /3/ should be found.

The paper contains generalization of results obtained recently by G. Bertram /1959/ and K. Tatarkiewicz /1955/.

... ..

...

... ..



... ..

...

... ..

MODELOWANIE CYFROWEGO ANALIZATORA RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH NA MASZYNIE CYFROWEJ

Romuald MARCZYŃSKI
Wiesława PULCZYN

Centrum Obliczeniowe PAN

Opisano realizację modelu cyfrowego analizatora równań różniczkowych na maszynie cyfrowej. Realizacja modelu opiera się na realizacji poszczególnych operatorów oraz na podaniu metody jednoznacznego przejścia między schematem blokowym, który używa się przy analizie równań różniczkowych, a zapisem tego schematu dla maszyny cyfrowej. Podany autokod pozwala w sposób prosty i szybki zapisać schemat blokowy równania różniczkowego. Przy pomocy translatora przekształca się zapis schematu na model analizatora. Przykładowo podano sposób rozwiązywania równania różniczkowego zwyczajnego na maszynie URAL-2 przy użyciu powyższej metody.

Jedną z metod rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych jest stosowanie analizatorów równań różniczkowych. Użycie analizatorów umożliwi łatwe programowanie poprzez łączenie układów, realizujących odpowiednie operacje matematyczne stosownie do rozwiązywanego zadania. Analizatory elektroniczne, pracujące w oparciu o procesy ciągłe, cechuje stosunkowo mała dokładność. Urządzeniami, które zachowują łatwość programowania maszyn analogowych, a pracują z dokładnością maszyn cyfrowych, są cyfrowe analizatory równań różniczkowych.

Analizator cyfrowy równań różniczkowych realizuje równanie różniczkowe przez modelowanie cyfrowe poszczególnych operacji równania różniczkowego. W analizatorach tych, zamiast przesyłania wartości funkcji między 'operatorami', przesyłane są jej przyrosty. Realizacja modelu opiera się na realizacji poszczególnych operacji przy użyciu operatorów, np. integratora, generatora funkcji, sumatora, oraz na podaniu metody jednoznacznego przejścia między schematem blo-

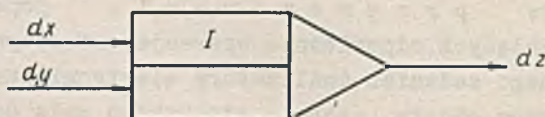
kowym, używanym przez analizator równań różniczkowych, a zapisem tego schematu dla maszyny cyfrowej.

W analizatorze analogowym przy rozwiązywaniu równania różniczkowego, np.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0 \quad //1/$$

zmiennie i przebiegi X , $\frac{dy}{dx}$, y , itd. reprezentowane są albo 'kątem obrotu', albo przesunięciem części mechanicznych w analizatorach mechanicznych, w analizatorach elektronicznych - przez zmianę napięcia. Wielkości, takie jak obrót, przesunięcie, napięcie, są proporcjonalne do wielkości przedstawionych zmiennych.

Całkowanie realizowane jest przez wykorzystanie zjawiska ładowania kondensatora albo przez urządzenia mechaniczne. Inne operacje realizowane są albo przez specjalne urządzenia albo przez odpowiednio połączone integratory. Połączenia między integratorami i innymi operatorami w analizatorach dokonywane są zgodnie ze schematem rozwiązującym badane równanie różniczkowe. Wynikiem rozwiązania jest albo zespół danych tabelarycznych albo wykresy krzywych. W analizatorach elektronicznych zmienna X jest na ogół funkcją czasu /powoduje to zmniejszenie klasy rozwiązywanych równań/. Podstawą analizatora jest integrator, przedstawiony schematycznie na rys. 9

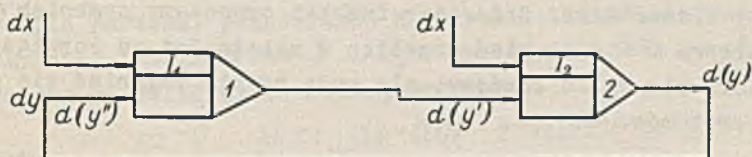


Rys. 9

W analizatorze cyfrowym przyrosty dx , dy , dz reprezentowane są przez ciągi impulsów, których ilość określa przyrosty funkcji rozwiązywanego równania. Analizator cyfrowy sterowany jest źródłem impulsów, które reprezentują zmienną niezależną. Ponieważ zmienna X nie jest istotnie zależna od czasu, umożliwia to rozwiązywanie znacznie większej klasy równań różniczkowych. Klasa ta jest identyczna jak dla analizatorów mechanicznych. W analizatorach cyfrowych odpowiednio ukształtowane ciągi impulsów reprezentują przyrosty do-

datnie, względnie ujemne lub zerowe. Wartość funkcji jest zapamiętywana w odpowiednich licznikach integratorów. Wyniki otrzymujemy przez odczytywanie, drukowanie lub wykreślanie zawartości liczników. W zależności od pojemności liczników /długości słowa w licznikach/ oraz elementarnego przyrostu otrzymywane wyniki mogą mieć większą lub mniejszą dokładność. Przy projektowaniu modelu założono, aby realizował on możliwie ściśle cyfrowy analizator równań różniczkowych, a w szczególności, aby łączenie poszczególnych operatorów /programowanie/ było możliwie jak najprostsze /zachowano przesyłanie przyrostów/. Wynikiem tego było opracowanie i wykonanie specjalnego autokodu, który tłumaczy zapis schematów rozwiązujących na odpowiednie połączenia w modelu cyfrowego analizatora równań różniczkowych. Długość słowa w maszynie URAL-2 wynosi 32 bity plus znak dla liczb zmiennoprzecinkowych, oraz 39 bitów plus znak dla liczb stałoprzecinkowych. Określa to minimalny przyrost na Δx .

W celu wyjaśnienia pracy integratora rozpatrzmy równanie /1/. Schemat rozwiązujący przedstawia rys. 10.



Rys. 10

Schemat jest zrealizowany w maszynie przy pomocy modelu. Na wejścia dx kolejno są przysyłane stałe przyrosty dx . Integratory I_1 , I_2 całkują funkcję przesłaną na wejście dy . Na wyjściu z integratora otrzymuje się przyrosty zgodnie z przebiegiem całki. Przyrosty są reprezentowane przez liczby maszyny.

Całkę określoną równaniem

$$z = a \int_{x_0}^x y dx$$

możemy aproksymować przez sumę

$$Z_n = a \sum_{i=1}^n Y_i \Delta X_i = \sum_{i=1}^n \Delta Z_i,$$

gdzie dx jest znanym przyrostem.

Powyższy proces umożliwia obliczenie całki określonej w sposób numeryczny. Przy pomocy operatora całkującego, otrzymujemy wynik całki w postaci przyrostów. Z_0 określamy jako elementarną wartość całki, której przyrost $= \Delta Z$

$$\Delta Z = \frac{Y_i \Delta X_i}{Z_0}.$$

W modelu analizatora są zrealizowane 3 operatory, integrator, sumator i generator funkcji, które będziemy oznaczali literami 'i', 's', 'f'. Realizację operatora sumowania otrzymuje się w sposób natychmiastowy przez sumę przyrostów funkcji sumowanej. Sumator oznaczamy literą Σ . Realizację dowolnie określonej funkcji tablicowej otrzymujemy w generatorze funkcji przez zmianę tej funkcji na przyrosty elementarne. Generator funkcji oznaczamy symbolem F . Zmiana niezależna dX może mieć przebieg w zależności od rozwiązywanego równania nie tylko liniowy, ale może różnie zmieniać się dla różnych operatorów.

W celu wyjaśnienia metody rozwiązywania problemu przy użyciu modelu równań różniczkowych przedstawiamy w skrócie przebieg postępowania przy rozwiązywaniu następującego zadania. Obliczamy wartości dwóch całek eliptycznych:

$$U = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} ; \quad E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi.$$

W celu sporządzenia schematu rozwiązującego wykorzystujemy podstawienie $x = 1 - k^2 \sin \varphi$; otrzymujemy

$$U = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{x}} ; \quad E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x} dx.$$

Rozwiązując równanie różniczkowe

$$u' - u^3 = 0, \quad /2/$$

otrzymujemy funkcje: $d(\sqrt{x})$ i $d\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$. Jeżeli teraz rozwiążemy jeszcze drugie równanie różniczkowe

$$y'' + y = 0, \quad /3/$$

możemy otrzymać funkcje

$$d(y') = -y dx \quad /4/$$

a następnie

$$-y dy = \frac{1}{2d} (1 - k^2 \sin^2 \varphi) - \frac{1}{2d} (k^2 \sin^2 \varphi).$$

Na podstawie równań /2/ i /3/ możemy ułożyć schemat rozwiązujący /rys. 11/. $d\sqrt{x}$ oraz $d\frac{1}{\sqrt{x}}$ przesyłamy do integratorów, które całkują te funkcje po $d\varphi$, a następnie wartości funkcji sumujemy w integratorach I8, I9. W celu napisania programu w autokodzie musimy określić wartości przedziałów całkowania, krok całkowania oraz współczynniki integratorów Z i Z₀. Następnie, dane te piszemy i perforujemy na dalekopisie według schematu:

$$xp=0 \quad xk=1 \quad dx=0,01 \quad z=0,0001 \quad zo=0,01.$$

$$i1, s2, i3, i4, i5, i6, i7.$$

$$i1:0,5/1 \quad s2, 1.$$

$$s2:1/1 \quad i3.$$

$$i3:1/1 \quad i4, i5.$$

$$i5:1/1 \quad i7x.$$

$$i7t:1/1 \quad i7,s2,2.$$

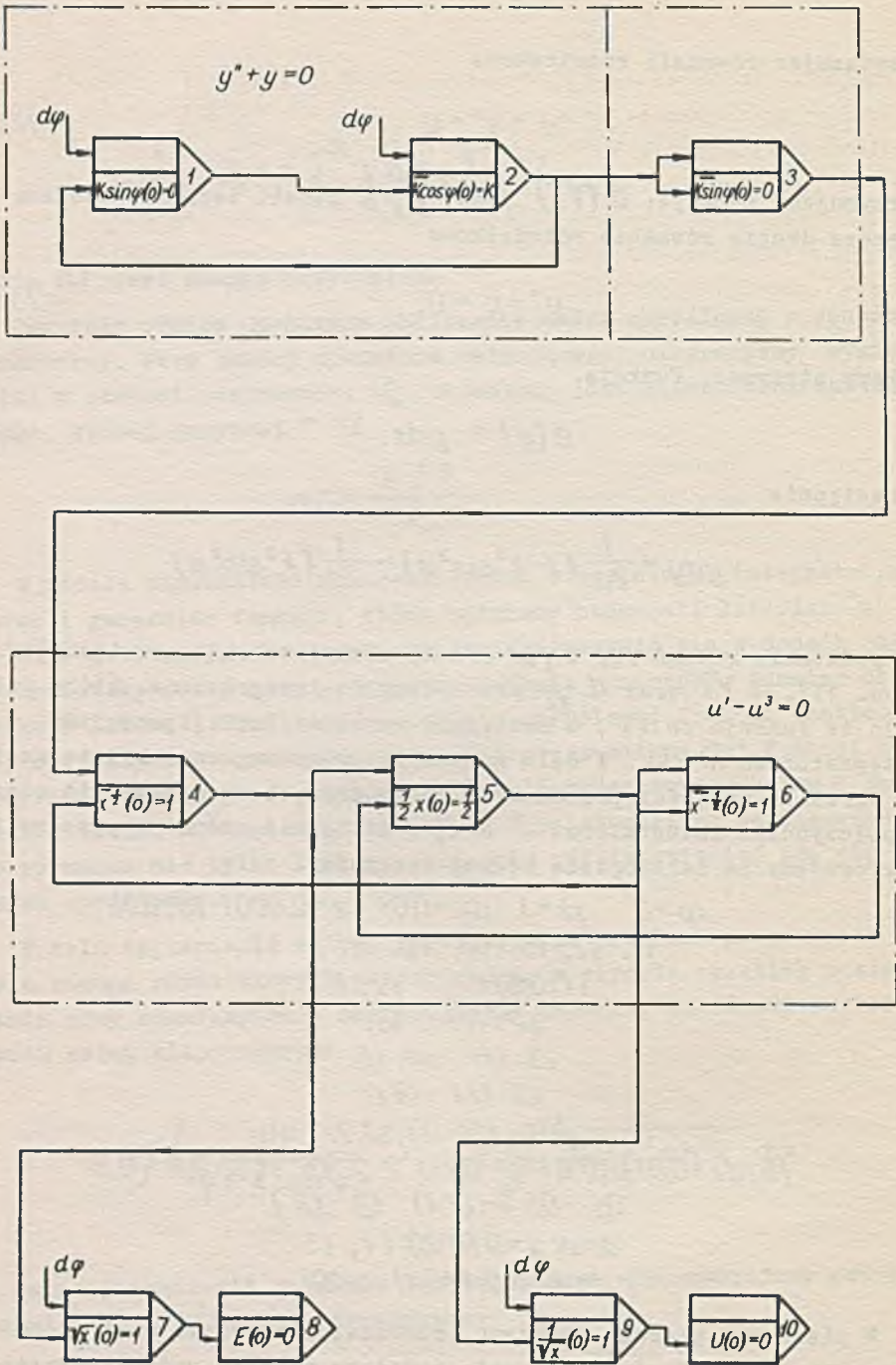
$$f8:dx=0,01(0,0 \ 0,1 \ 0,2 \ 0,3 \ 1 \ 2 \ 2 \ 1,5 \ 1,1 \ 0,9 \ 0,5$$

$$0,1 \ -0,5 \ (-0,9 \ 1) \ 1,3 \ 1,8).$$

$$\text{druk } x=0 \ (0,01): i1, i5.$$

$$\text{druk } x=0,1 \ (0,1): i4\Omega$$

W pierwszym wierszu podajemy przedział całkowania oraz współczynniki integratorów. Następnie podajemy ilość i rodzaj operatorów. Numeracja ich musi przebiegać zgodnie ze schematem rozwiązu-



Rys. 11

jącym, tzn. że określa ona jednoznacznie kolejność wykonywanych operacji przez maszynę. Dalej podana jest lista połączeń wraz z wartościami początkowymi i współczynnikami operatorów. W poszczególnych wierszach podajemy rodzaj i numer operatora, np. w wierszu, gdzie występuje i_2 , piszemy - i_2 . Oznacza to, że integrator całkuje zgodnie ze schematem rozwiązującym po zmiennej niezależnej dx . Następnie podajemy wartość początkową y_0 , współczynnik k , przez który mnożymy wartość na wejściu dy integratora, a następnie operatory i ich numerację, do których przesyłany jest wynik z integratora i_2 .

i_1 i i_2 bez znaków dodatkowych wskazują, że przesyłamy wartości na wejścia dy .

i_3 X informuje o tym, że wynik przesyłamy na wejście dx integratora i_3 . Jeżeli napiszemy $i_3 t$ jak w wierszu następnym, oznacza to, że do integratora i_3 przesyłamy nie stały przyrost dx , ale przyrost będący inną funkcją. W przypadku, gdyby okazało się, że w pewnym integratorze, np. ze względu na równanie musimy umieścić inne Z i Z_0 , wartości te wypisujemy kolejno po współczynnikach y_0 i k . W ten sposób jednocześnie zapisujemy cały schemat połączeń. Następnie piszemy 'druk', po czym podajemy wartość i-szą, od której mamy drukować, krok drukowania oraz integratory, których wartości y_i drukujemy.

W otrzymanym modelu na maszynie URAL-2 uzyskano około 300 elementarnych iteracji całkujących na sek. W zmiennym przecinku efektywna szybkość rozwiązywania równań różniczkowych dla ustalonej ilości elementarnych całkowań na sek. zależy tylko od obranego elementarnego przyrostu dx oraz ilości operatorów /integratorów/, to jest od struktury równania. W podanym przykładzie 3-cim maszyna wykonywała 30 elementarnych cykli na sek., gdzie za cykl uważa się jednokrotny przebieg całego schematu rozwiązującego. Obliczenia wartości całki przeprowadzono dla φ od 0 do $\frac{\pi}{2}$. Wyniki co 1° wyprowadzono na drukarce równoległej z dokładnością do 4 miejsc po przecinku. Obliczenia trwały około 10 minut. Przeprowadzono próby uruchomienia programu metodą modelowania bez autokodu dla równania /1/.

Czas użyty na zestawienie i uruchamianie programów wyniósł ok. 8 godz. Ten sam problem przy pomocy autokodu wykonano w ciągu 10 minut. Kodowanie przykładu 3-go trwało 18 minut. Porównując powyż-

szą metodę z cyfrowymi analizatorami równań różniczkowych oraz z metodami numerycznymi rozwiązywania równań różniczkowych na maszynach cyfrowych można zauważyć, że szybkość rozwiązywania problemu na samej maszynie cyfrowej jest mniejsza ze względu na dużą ilość operacji organizacyjnych oraz stosowanie prostych formuł całkowania, co pociąga za sobą konieczność używania mniejszego kroku. Szybkość pracy analizatorów cyfrowych jest też większa ze względu na dużą szybkość elementarnych całkowań. Jednak analizatory cyfrowe pracują przeważnie w stałym przecinku; powoduje to pewne ograniczenia i komplikacje w programowaniu, których nie ma przy zastosowaniu 'modelu' na maszynie URAŁ-2. Trzeba również podkreślić, że niezwykła łatwość programowania różnych i różnorodnych problemów, bez zagłębiania się w istotę problematyki równań różniczkowych, wydaje się wygodna szczególnie dla inżynierów, rozwiązujących równania różniczkowe występujące w ich praktyce.

Literatura

1. SPRAQUE R.E.: Fundamental Concepts of the Digital Differential Analyzer Method of Computation, Math. Tables and Other Aids Comp., 1952:6, 37, 41-49.
2. SHANNON C.E.: Mathematical Theory of the Differential Analyzer, J. Math. and Phys., 1941:20, 4.
3. SELFRIDGE R.G.: Coding a General Purpose Digital Computer to Operate as a Differential Analyzer, Proc. Western Joint Computer Conf., 1955:82-84.
4. FORBES G.F.: Digital Differential Analyzer - An Applications Manual for Digital and Busch Type Differential Analyzers, California 1956.
5. GOLDENBERG L.M.: Cifrovoj differencjalnyj analizator, Technika svjazi, Moskva 1962.

SIMULATION OF DIGITAL ANALYZER OF DIFFERENTIAL EQUATIONS ON A DIGITAL COMPUTER

Summary

The realization of a model of a digital analyzer of differential equations on a digital computer is described. The realization is based on separate unit realization such as for instance: integrator, function generator, summator, as well as on the method of an equivalent translation of the block scheme /applied in differential equation analyzer/ to the digital computer language.

The given autocode permits to record the block scheme of a differential equation in a simple and fast way. The record of the scheme is transformed into an analyzer model by means of a translator.

The conclusion gives an example of solving ordinary differential equation on the URAL-2 computer using the described method.

TABLICOWANIE FUNKCJI PRZEZ ROZWIĄZYWANIE
RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH

Włodzimierz OSTALSKI

Instytut Maszyn Matematycznych PAN

Podano dwa przykłady tablicowania funkcji przez rozwiązywanie równań różniczkowych zwyczajnych. W obu wypadkach funkcje były wyrażone całkami: uogólniona funkcja Romana /występująca w geofizyce/ oraz funkcja wykładnicza całkowa. Wyliczanie tych funkcji przez rozwiązywanie odpowiednich równań różniczkowych okazało się /dla maszyny ZAM-2/ metodą pewną i dokładną.

1. W praktyce obliczeniowej występuje często konieczność wyliczenia wartości funkcji przestępnych, dla których nie posiadamy odpowiednich aproksymacji /lub aproksymacje te nie są wygodne w użyciu/. W niektórych takich przypadkach pomocnym okazuje się aparat równań różniczkowych. Jeżeli możemy uzyskać równanie różniczkowe, którego rozwiązaniem jest poszukiwana funkcja, numeryczne rozwiązanie tego równania otrzymuje się względnie łatwo.

Jako przykład mogą służyć prace wykonane w Biurze Zastosowań i Programów IMM, gdzie między innymi użyto tego sposobu do tablicowania uogólnionej funkcji Romana /występującej w zagadnieniach geofizycznych/ oraz funkcji wykładniczej całkowej.

2. Funkcja Romana wyraża się wzorem:

$$P_n(k_1, k_2, r) = \frac{1}{r} + 2 \int_0^{\infty} \frac{-(k_1 e^{-2\lambda} + k_2 e^{-2\lambda n}) J_0(\lambda r)}{1 - k_1 e^{-2\lambda} - k_2 e^{-2\lambda n} + k_1 k_2 e^{-2\lambda(n-1)}} d\lambda \quad //1/$$

$|k_1|, |k_2| < 1; r > 0 \quad 1 < n < 32 \quad J_0$ - funkcja Bessela zerowego rzędu.

Przez przedstawienie $x = e^{-2x}$ powyższą całkę sprowadza się do postaci:

$$P_n(k_1, k_2, r) = \frac{1}{r} + \int_0^1 \frac{k_1 + k_2 x^{n-1}}{1 - k_1 x + k_1 k_2 x^{n-1} - k_2 x^n} J_0\left(-\frac{r}{2} \ln x\right) dx \quad /2/$$

k_1 i k_2 są takie, że wielomian występujący w mianowniku nie ma zer dla $x \in [0, 1]$. Ponieważ funkcja $J_0\left(-\frac{r}{2} \ln x\right)$ w sąsiedztwie $x = 0$ posiada nieskończenie wiele 'oscylacji', obliczenie tej całki przy pomocy formuł kwadratury numerycznej stanowi dużą trudność.

W związku z powyższym wprowadzono następującą funkcję:

$$u_k^r(x) = x^k J_0\left(-\frac{r}{2} \ln x\right) \quad /3/$$

$k > 1$, całkowita oraz wielomian $P_k(x)$ stopnia $k-1$ taki, że

$$W_n(x) - P_k(x) = x^k V_n(x) = x^k \frac{a_k + a_{k+1} x + \dots + a_{n+k-1} x^{n-1}}{1 - k_1 x + k_1 k_2 x^{n-1} - k_2 x^n}.$$

$W_n(x)$ jest funkcją wymierną występującą w całce /2//. Wówczas

$$\int_0^1 W_n(x) u_0^r(x) dx = \int_0^1 [W_n(x) - P_k(x)] u_0^r(x) dx + \int_0^1 P_k(x) u_0^r(x) dx$$

ze znanego wzoru dla funkcji Bessela *) mamy:

$$\int_0^1 P_k(x) u_0^r(x) dx = \sum_{l=0}^{k-1} \frac{a_l}{\sqrt{(l+1)^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2}}.$$

*) $\int_0^\infty e^{-ax} J_0(bx) dx = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Pozostaje do obliczenia całka

$$Q = \int_0^1 V_n(x) u_k^r(x) dx. \quad /4/$$

Następnie całkę /4/ rozbijamy na dwie:

$$\int_0^1 V_n(x) u_k^r(x) dx = \int_\epsilon^1 V_n(x) u_k^r(x) dx + \varphi(\epsilon)$$

$$\varphi(\epsilon) = \int_0^\epsilon V_n(x) u_k^r(x) dx \quad 0 < \epsilon < 1.$$

Łatwo wykazać [1], że przy odpowiednio dobranej liczbie k można uczynić $\varphi(\epsilon)$ dowolnie małą nawet dla dosyć dużych wartości ϵ . Wynika stąd, że za wartość Q możemy przyjąć z dużą dokładnością wartość całki

$$\int_\epsilon^1 V_n(x) u_k^r(x) dx. \quad /5/$$

W ten sposób, zwiężając przedział całkowania, odrzucamy zagęszczające się 'oscylacje' funkcji $u_k^r(x)$ w sąsiedztwie zera.

W celu uniknięcia kumulacji błędu, wynikającego z obliczania funkcji Bessela przy pomocy wzorów aproksymacyjnych /co występowałyby przy użyciu formuł kwadratur numerycznych/, sprowadzono obliczenie całki /5/ do rozwiązania układu równań różniczkowych

$$\frac{dQ}{dx} = -V_n(x) u_k^r(x)$$

$$\frac{d^2 u_k^r(x)}{dx^2} = -\frac{du_k^r(x)}{dx} \left[1 - 2k - \frac{r}{2z} \right] x^{-1} - u_k^r(x) \left[\frac{kr}{2x^2} \left(\frac{2k}{r} + \frac{1}{z} \right) + \frac{r^2}{4x^2} \right]$$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{r}{2x}$$

z warunkami początkowymi

$$Q(1) = 0$$

$$u_k^r(1) = 1$$

$$\dot{u}_k^r(1) = k$$

$$z(1) = 0.$$

Całkowanie przebiega od 1 do ε .

Dla $x = 1$ drugie równanie zostało zastąpione przez

$$\ddot{u}_k^r(1) = (k-1)k - \frac{r^2}{8}.$$

Równania te były rozwiązywane metodą Rungego-Gilla rzędu 5 przy $k=5$, z krokiem całkowania $\frac{1}{256}$ /dla wartości $r \leq 32$ /. Dla większych wartości r krok całkowania musi być mniejszy. Dla ε przyjęto wartość $\frac{1}{128}$ i otrzymano 6 miejsc dziesiętnych dokładnych.

3. Funkcję wykładniczą całkową liczone w następującej postaci:

$$-Ei(-x) = \int_x^{\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy \quad x > 0.$$

Wartości tej funkcji były potrzebne w dosyć szerokim przedziale argumentu: $0 < x < 17$; argument był otrzymywany na podstawie obliczeń, co /jak również duża ilość potrzebnych wartości/ wykluczało użycie tablic. Nie dysponowaliśmy również odpowiednią aproksymacją /aproksymacja wielomianami Czebyszewa dla $Ei(x)$ została opublikowana dopiero w bieżącym roku/.

Dla $0 < x \leq 4$ wartość funkcji była wyliczana z rozwinięcia w szereg potęgowy

$$-Ei(-x) = -C - \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n! n}$$

C - stała Eulera.

Ponieważ dla $x > 4$ ilość wyrazów tego szeregu potrzebnych do uzyskania odpowiedniej dokładności /jak również ich moduły/ bardzo rośnie, posłużono się rozwiązaniem równania różniczkowego

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} - \frac{du(x)}{dx} \left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$u(x) = -Ei(-x).$$

Przewidywany przedział zmienności x został podzielony na kilka podprzedziałów, dla których wartości początkowe brano z tablic.

Równanie to było całkowane również metodą Rungego-Gilla, z krokiem 0.1 ; otrzymane wyniki były zgodne z tablicami we wszystkich cyfrach dziesiętnych /tzn. 9/, również przy rozwiązywaniu równania dla

$$v(x) = -AEi(-x) \quad (0 < A \leq 1000).$$

Całkowanie powyższego równania metodą Eulera z krokiem 0.01 /oraz $A=1000$ /dawało rozwiązanie z dokładnością 10^{-5} .

Literatura

1. FELDMAN K., MOSZYŃSKI K.: An Effective Method of Computing Generalized Roman Function, Prace IMM, Algorytmy, 1962:1, 1, 17-29.

FUNCTION TABULATION BY MEANS OF SOLVING DIFFERENTIAL EQUATIONS

Summary

Two examples are presented of function tabulation by means of solving ordinary differential equations. In both cases functions were expressed by integrals - the generalized Roman function /appearing in geophysics/ and the exponential integral function.

Calculation of these functions by means of solving appropriate differential equations on the ZAM-2 computer appeared to be a reliable and exact method.

UWAGI O REALIZACJI ALGORYTMU ZNAJDOWANIA
ROZWIĄZANIA ZAGADNIENIA BRZEGOWEGO DLA
UKŁADU RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH ZWYCZAJNYCH,
LINIOWYCH

Karol FELDMAN,
Krzysztof KOSZYŃSKI
Instytut Maszyn Matematycznych PAN

Treść artykułu odbiega dość znacznie od treści referatu wygłoszonego przez jednego z autorów na Sympozjum w dniu 17 maja 1963 r. Wspomniany referat opracowany został na podstawie pracy K. Moszyńskiego 'A method of solving the boundary value problem for a system of linear ordinary differential equations'.^{*)} Niniejsza praca zawiera uwagi o realizacji tego algorytmu na maszynie cyfrowej.

Zajmować się tu będziemy jedynie problemem brzegowym postaci:

$$\dot{y}_i(x) = \sum_{j=1}^n m_{ij}(x) y_j(x) + g_i(x) \quad /1/$$

$$\sum_{j=1}^n b_{ij}^{(1)} y_j(a) + \sum_{j=1}^n b_{ij}^{(2)} y_j(b) = c_i \quad /2/$$

$$i = 1, 2, \dots, n \quad \text{dla} \quad x \in [a, b].$$

Punktem węzłowym metody opisanej w [1] jest numeryczne całkowanie układu równań /wzory/10/ i /4/ w [1] /:

^{*)} Prace IMB, Algorytmy N°3 /w druku/.

$$\dot{\varphi}_{ij} = \sum_{s=1}^N \varphi_{sj} \sum_{l=1}^N \left\{ \left[\sum_{\alpha=1}^{l-1} \varphi_{i\alpha} \varphi_{l\alpha} \right] a_{ls} - \left[\delta_{li} - \sum_{\alpha=1}^l \varphi_{i\alpha} \varphi_{l\alpha} \right] a_{sl} \right\} \quad /3/$$

$$i = 1, 2, \dots, N \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad N = 2n$$

$$\dot{u}_k = \sum_{j=1}^N A_{kj} u_j + F_k \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad /4/$$

gdzie

$$A_{kj}(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } j > k \\ \psi_{kk}(x) & \text{dla } j = k \\ \psi_{kj}(x) + \psi_{jk}(x) & \text{dla } j < k \end{cases} \quad /5/$$

$$\psi_{kj}(x) = \sum_{s=1}^N \varphi_{sj}(x) \sum_{i=1}^N \varphi_{ik}(x) a_{is}(x)$$

$$F_k(x) = \sum_{i=1}^N f_i(x) \varphi_{ik}(x)$$

oraz układu równań

$$\dot{\varphi}_{ij} = \sum_{s=1}^N \varphi_{sj} \sum_{l=1}^N \left\{ \left[\delta_{il} - \sum_{\alpha=j}^N \varphi_{i\alpha} \varphi_{l\alpha} \right] a_{ls} - \left[\sum_{\alpha=j+1}^N \varphi_{i\alpha} \varphi_{l\alpha} \right] a_{sl} \right\} \quad /6/$$

dla $i = 1, 2, \dots, N$ $j = n+1, n+2, \dots, N$.

Dla układu równań /3/, /4/ dane są warunki początkowe w punkcie a ; całkuje się go od a do b . Natomiast dla układu /6/ dane są warunki początkowe w punkcie b i całkować go należy od b do a . Warunki początkowe w obu przypadkach są macierzami $(\varphi_{ij}(a))$ $i = 1, 2, \dots, N$; $j = 1, 2, \dots, n$ oraz $(\varphi_{ij}(b))$ $i = 1, 2, \dots, N$; $j = n+1, \dots, N$, prostokątnymi o n kolumnach i N wierszach. Zakłada się przy tym,

że kolumny tych macierzy stanowią ortogonalne, unormowane układy wektorów.

Przyjęto tu oznaczenia użyte w [1] /por. [1] wzory /24//:

$$\rho = a + b - x$$

$$a_{ij}(x) = \begin{cases} m_{ij}(x) & \text{dla } 1 \leq i, j \leq n \\ -m_{i-n, j-n}(\rho) & \text{dla } n+1 \leq i, j \leq N \\ 0 & \text{dla pozostałych wartości } i, j, 1 \leq i, j \leq N \end{cases}$$

$$f_i(x) = \begin{cases} g_i(x) & \text{dla } i = 1, 2, \dots, n \\ -g_{i-n}(\rho) & \text{dla } i = n+1, \dots, N. \end{cases} \quad /7/$$

Do całkowania numerycznego /jakąkolwiek metodą/ równań różniczkowych postaci

$$\dot{\bar{y}} = \bar{f}(x, \bar{y}),$$

gdzie $\bar{y}(x)$, $\bar{f}(x, \bar{y})$ wektorfunkcje, konieczne jest wyliczanie wartości $\bar{f}(x, \bar{y})$ /tzw. prawych stron/ dla różnych wartości zmiennej niezależnej x . Mamy wtedy zwykle do dyspozycji, poza wartością zmiennej x , także wartości składowych wektora $\bar{y}(x)$.

Nie będziemy tu zajmować się samymi metodami numerycznego całkowania równań. Celem niniejszej pracy jest jedynie podanie, dość prostej zdaniem autorów, metody wyliczania na maszynie cyfrowej prawych stron dla układów równań /3/, /4/ i /6/.

Wprowadzimy następujące oznaczenia:

$$S_{sk} = \sum_{i=1}^n \varphi_{ik}(x) a_{is}(x)$$

$$\bar{S}_{sk} = \sum_{i=1}^m \varphi_{i+nk}(x) a_{is}(\rho)$$

$$Q_{sk} = \sum_{i=1}^n \varphi_{ik}(x) a_{si}(x)$$

$$\bar{Q}_{sk} = - \sum_{i=1}^m \varphi_{i \cdot n, k}(x) a_{si}(\rho) \quad /8/$$

$$s = 1, 2, \dots, n \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Wyrażenia te będziemy traktować jako elementy macierzy prostokątnych S, \bar{S}, Q i \bar{Q} .

Określimy także ciąg macierzy $X^{(j)} = (X_{si}^{(j)})$ oraz $\bar{X}^{(j)} = (\bar{X}_{si}^{(j)})$ dla $s = 1, 2, \dots, n, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n$.

Niech:

$$X_{si}^{(0)} = \begin{cases} -a_{si}(x) & \text{dla } s = 1, 2, \dots, n \quad i = 1, 2, \dots, n \\ 0 & \text{dla } s = 1, 2, \dots, n \quad i = n+1, \dots, N \end{cases} \quad /9/$$

$$X_{si}^{(0)} = \begin{cases} 0 & \text{dla } s = 1, 2, \dots, n \quad i = 1, 2, \dots, n \\ a_{si-n}(\rho) & \text{dla } s = 1, 2, \dots, n \quad i = n+1, n+2, \dots, N. \end{cases}$$

Określamy rekurencyjnie dla $j = 1, 2, \dots, n$.

$$X_{si}^{(j)} = X_{si}^{(j-1)} + \varphi_{ij-1}(x) S_{sj-1} + \varphi_{ij}(x) Q_{sj} \quad /10/$$

$$\bar{X}_{si}^{(j)} = \bar{X}_{si}^{(j-1)} + \varphi_{ij-1}(x) \bar{S}_{sj-1} + \varphi_{ij}(x) \bar{Q}_{sj}.$$

Przyjąć tu należy $\varphi_{i0}(x) = 0$.

Równania /3/ przyjmą teraz postać:

$$\dot{\varphi}_{ij}(x) = \sum_{s=1}^n \varphi_{sj}(x) X_{si}^{(j)} + \sum_{s=1}^n \varphi_{s+n,j}(x) \bar{X}_{si}^{(j)} \quad /11/$$

$$i = 1, 2, \dots, N \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Zauważmy, że

$$\psi_{kj}(x) = \sum_{s=1}^n \varphi_{sj}(x) S_{sk} + \sum_{s=1}^n \varphi_{s+n,j}(x) \bar{S}_{sk}.$$

Zatem równania /4/ można również łatwo wyrazić przy pomocy macierzy S i \bar{S} , ponieważ

$$\dot{u}_k(x) = \sum_{j=1}^{k-1} (\psi_{kj}(x) + \psi_{jk}(x)) u_j(x) + \psi_{kk}(x) u_k(x) + F_k(x), \quad /12/$$

gdzie $F_k(x)$ wyraża się ostatnim z wzorów /5/.

W celu wyliczenia wartości prawych stron równań /6/ wprowadzimy macierze $Y^{(j)} = (Y_{si}^{(j)})$ oraz $\bar{Y}^{(j)} = (\bar{Y}_{si}^{(j)})$, gdzie $s = 1, 2, \dots, n$
 $i = 1, 2, \dots, N$ $j = N+1, N, N-1, \dots, n+1$.

Niech

$$Y_{si}^{(N+1)} = \begin{cases} a_{is}(x) & \text{dla } s = 1, 2, \dots, n \quad i = 1, 2, \dots, n \\ 0 & \text{dla } s = 1, 2, \dots, n \quad i = n+1, \dots, N \end{cases} \quad /13/$$

$$\bar{Y}_{si}^{(N+1)} = \begin{cases} 0 & \text{dla } s = 1, 2, \dots, n \quad i = 1, 2, \dots, n \\ -a_{i-n,s}(p) & \text{dla } s = 1, 2, \dots, n \quad i = n+1, \dots, N. \end{cases}$$

Określmy rekurencyjnie

$$Y_{si}^{(j-1)} = Y_{si}^{(j)} - \varphi_{i,j-1}(x) S_{sj-1} - \varphi_{ij}(x) Q_{sj} \quad /14/$$

$$\bar{Y}_{si}^{(j-1)} = \bar{Y}_{si}^{(j)} - \varphi_{i,j-1}(x) \bar{S}_{sj-1} - \varphi_{ij}(x) \bar{Q}_{sj}$$

dla $j = N+1, N, N-1, \dots, n+2$. Przyjąć należy wtedy $\varphi_{N+1}(x) \equiv 0$.

Równania /6/ przyjmują postać

$$\dot{\varphi}_{ij}(x) = \sum_{s=1}^n Y_{si}^{(j)} \varphi_{sj}(x) + \sum_{s=1}^n \bar{Y}_{si}^{(j)} \varphi_{s+n,j}(x). \quad /15/$$

Równania /11/ całkować należy od a do b dla $j = 1, 2, \dots, n$ rozpoczynając od pierwszej kolumny macierzy (φ_{ij}) .

Natomiast równania /15/ całkujemy od b do a , rozpoczynając od kolumny N -tej, dla $j = N, N-1, \dots, n+1$.

W Biurze Programów i Zastosowań Maszyn Cyfrowych IMM został opracowany program dla maszyny ZAM-2, realizujący opisany algorytm. Przeprowadzone próby wykazały dość znaczną stabilność metody. Do całkowania użyto tu metody Rungego-Gilla [2]. Na uwagę zasługuje fakt, że przy stosunkowo dużym kroku całkowania uzyskiwano dość dobrą dokładność. Wadą programu jest stosunkowo mała szybkość.

Całkowano na przykład układ równań

$$\dot{y}_1 = -2xy_1 + y_2 + 2x$$

$$\dot{y}_2 = -2y_1 + 2$$

z warunkami brzegowymi

$$y_1(0) + y_2(0) + y_1(1) - y_2(1) = 3$$

$$y_1(0) - y_2(0) + y_1(1) + y_2(1) = 1 + \frac{2}{e} \approx 1.735758882.$$

Rozwiązanie tego zagadnienia ma, jak łatwo sprawdzić, postać

$$y_1 = x e^{-x^2} + 1$$

$$y_2 = e^{-x^2}.$$

Całkując z krokiem $h = 0.125$ /podział przedziału na 8 części/, otrzymano warunki początkowe dla $y_1(x)$ i $y_2(x)$:

wartości prawidłowe

$$y_1(a) = 1.0003144043$$

$$1.0$$

$$y_2(a) = 0.9993534330$$

$$1.0$$

$$y_1(b) = 1.3675559033$$

$$1 + e^{-1} \approx 1.367879441$$

$$y_2(b) = 0.3673434397$$

$$e^{-1} \approx 0.367879441$$

Przy całkowaniu z krokiem $h = 0.0625$ /podział przedziału na 16 części/ uzyskano warunki początkowe dla $y_1(x)$ i $y_2(x)$:

$$y_1(a) = 1.0000159987$$

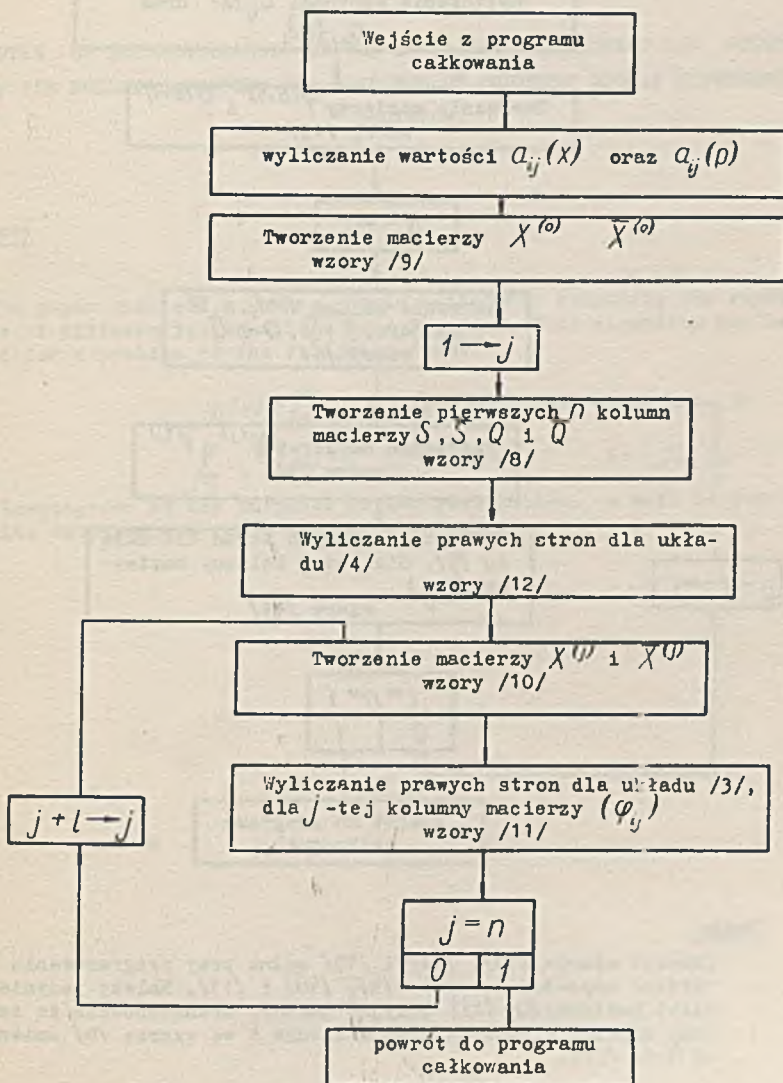
$$y_2(a) = 0.9999670624$$

$$y_1(b) = 1.3678628895$$

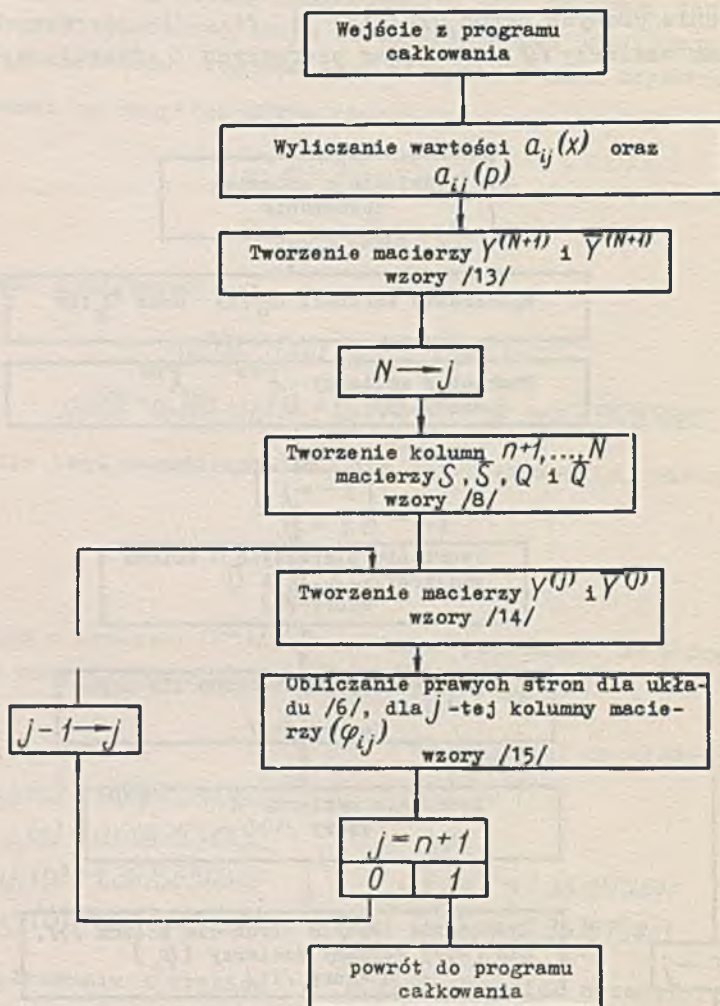
$$y_2(b) = 0.3678524932$$

DODATEK

Obliczanie prawych stron dla /3/ i /4/ dla pierwszych n kolumn macierzy (φ_{ij}) oraz pierwszych n funkcji u_i .



Obliczanie prawych stron dla /6/, dla kolumn $N, N-1, \dots, n+1$ macierzy (φ_{ij}) .



Uwaga

Zamiast wzorów /13/, /14/ i /15/ można przy programowaniu wykorzystać odpowiednio wzory /9/, /10/ i /11/. Należy jedynie zamiast macierzy $(a_{ij}(x))$ przyjąć macierz transponowaną ze zmienionymi znakami elementów oraz wskaźnik k we wzorze /8/ zmieniać od N do $n+1$.

Literatura

1. MOSZYŃSKI K.: A Method of Solving the Boundary Value Problem for a System of Linear Ordinary Differential Equations, Prace IMM, Algorytmy, 1963:2 /w druku/.
2. WILKES M.V., WHEELER D.J., GILL S.: The Preparation of Programmes for an Electronic Digital Computer, Cambridge 1957.

NOTES ON THE REALIZATION OF THE ALGORITHM OF FINDING THE SOLUTION OF THE BOUNDARY PROBLEM FOR A SYSTEM OF ORDINARY LINEAR DIFFERENTIAL EQUATION.

Summary

The paper suggests a rather simple method for computing the right hand sides of differential equations used in [1]. This algorithm has been applied for a problem of the following form:

$$y_i(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) y_j(x) + f_i(x) \quad i=1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{j=1}^n b_{ij}^{(1)} y_j(a) + \sum_{j=1}^n b_{ij}^{(2)} y_j(b) = C_i \quad i=1, 2, \dots, n$$

Flowdiagrams of the proposed method realization, as well as some notes on results obtained are enclosed.

O PRZYDATNOŚCI METOD RUNGEGO-KUTTY
I ADAMSA W PRAKTYCE OBLICZENIOWEJ

Mirosław DĄBROWSKI
Zenon SZODA

Centrum Obliczeniowe PAN

Autor przytacza opis metod: Rungego-Kutty, Rungego-Kutty-Gilla, Rungego-Kutty-Mersona, metody ekstrapolacyjnej i ekstrapolacyjno-interpolacyjnej Adama 4 rzędu. Uzasadnia ich przydatność jako procesów standartowych, wypukła cechy charakteryzujące te metody jak i odróżniające je wzajemnie, podaje wskazówki przydatne przy wyborze metod, organizację obliczeń ze stałym i zmiennym krokiem całkowania oraz ilustrację tych metod na przykładzie równania $y' = \frac{2y}{x+1}$ z warunkiem początkowym $y(0) = 1$.

Zagadnienia początkowe dla równań zwyczajnych stanowią pokaźną część problematyki obliczeniowej ośrodków. Dla przykładu - w Centrum Obliczeniowym PAN w okresie od 1.IX.1961 do 1.V.1963 ilość zleceń dotycząca rozwiązań zagadnień początkowych stanowiła 90% ogólnej liczby zleceń z zakresu równań zwyczajnych.

Niektóre zagadnienia brzegowe mogą być sprowadzone numerycznie do kilkakrotnego rozwiązywania zagadnienia początkowego.

Na przykład układ równań różniczkowych liniowych pierwszego rzędu

$$\dot{Y}(t) = A(t)Y(t) + F(t),$$

gdzie - $\dot{Y}(t)$, $Y(t)$, $F(t)$ - kolumny o n elementach,
 $A(t)$ - macierz $n \times n$

przy warunkach brzegowych

$$y_i(t_0) = y_{i,t_0} \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, \dots, r$$

$$y_{i_k}(T) = y_{i_k,T} \quad \text{dla} \quad k = 1, \dots, n-r$$

może być rozwiązany metodą 'równań sprzężonych' lub 'metodą funkcji dopełniającej'. Obie te metody podane zostały przez Goodmana i Lanca w 1956 r. [5]. Istotą tych metod jest sprowadzenie powyższego zagadnienia brzegowego do wielokrotnego rozwiązywania zagadnienia początkowego. Metoda funkcji dopełniającej może być zastosowana również do równań rzędu n .

Zagadnienie brzegowe dla równań różniczkowych liniowych drugiego rzędu może być sprowadzone do dwukrotnego rozwiązywania zagadnienia początkowego metodą 'progonki' [1]. Również zagadnienie brzegowe dla równań różniczkowych nieliniowych można rozwiązywać przez wielokrotne rozwiązywanie zagadnienia początkowego [9].

Wynika z tego, że numeryczne rozwiązanie zagadnień początkowych stanowi dość istotny element w pracy ośrodków obliczeniowych. Ten stan rzeczy narzuca matematikom programistom obowiązek przygotowania podprogramów metod numerycznych rozwiązywania zagadnień początkowych i sprawdzenia ich praktycznej przydatności, wymaga również znajomości zalet i wad poszczególnych metod, umiejętności doboru najwłaściwszej metody do konkretnego zadania obliczeniowego oraz do możliwości danej maszyny cyfrowej.

Ideałem byłoby dobranie takiej metody numerycznej, za pomocą której można by w najkrótszym czasie otrzymać rozwiązanie z żądaną dokładnością, co jest równoznaczne z najmniejszym kosztem obliczeń.

Nie potrafimy podać ogólnie obowiązujących kryteriów wyboru najlepszej metody. Zbiorcze omówienie zalet i wad najpopularniejszych metod z numerycznych zagadnień początkowych, ilustracja ich na przykładach - mogą być jednak pomocne przy praktycznym wyborze metod.

Będziemy mówili jedynie o najprzydatniejszych - naszym zdaniem - wersjach metod Rungego-Kutty i o metodzie Adamsa. Metody te pozwalają rozwiązywać zagadnienia początkowe dla układu równań różniczkowych pierwszego rzędu. Zagadnienia początkowe wyższego rzędu mogą być sprowadzone do zagadnień początkowych dla układu równań pierwszego rzędu i w tym sensie metody te można uważać za uniwersalne. Powodem powszechnego stosowania wymienionych metod jest także prostota formuł, ułatwiająca programowanie, oraz fakt, że mają one charakter stabilny. Stabilnością tych metod zajmowali się Carr, Milne i Reynolds, Hamming i inni.

W rachunku automatycznym znalazły zastosowanie przede wszystkim

metody rzędu h^4 . Są one bardziej dokładne niż metody niższych rzędów i przy stosunkowo dużym kroku mają formuły prostsze od formuł wyższych rzędów, łatwe do zaprogramowania na maszyny cyfrowe. Podstawową zaletą metod Rungego-Kutty jest możliwość obliczenia wartości rozwiązania $y(x+h)$ przy zadanych jedynie wartościach $y(x)$ i kroku h . Nie wymagają one specjalnego procesu startowego, jak to ma miejsce w metodzie Adamsa. Zaletą jest również możliwość łatwej zmiany kroku całkowania podczas obliczeń.

Wadą metody Rungego-Kutty jest brak prostych formuł określających błąd obliczeń. Wyjątek stanowi metoda Rungego-Kutty-Mersona. Bieberbach [2] w 1946 r. podał formułę określającą błąd obliczeń dla danego kroku w metodzie Kutty. Formuła ta nie jest w praktyce stosowana ze względu na konieczność posługiwania się dodatkowymi, dość uciążliwymi obliczeniami. Znane są też inne formuły, jednak ich zastosowanie praktyczne jest również uciążliwe. Tichonow i Gorbunow [12] podają sposób asymptotycznego szacowania błędu dla metod typu Rungego-Kutty. Szacowanie błędu w ten sposób wymaga rozwiązania specjalnego układu równań różniczkowych.

Omówienie metod Rungego-Kutty, jak również uwagi na temat błędów okrążeń w poszczególnych procesach, można znaleźć w artykule Martina z 1958 r. w *Computer Journal*.

Metody Rungego-Kutty 4 rzędu wymagają czterokrotnego podstawiania do równania, a w metodzie Rungego-Kutty-Mersona nawet pięciokrotnego. Dla złożonych równań pochłania to wiele czasu maszyny.

Metoda Rungego-Kutty

Metoda Rungego-Kutty ma następujące formuły:

$$y_{i,n+1} = y_{i,n} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} k_{i,1} + k_{i,2} + k_{i,3} + \frac{1}{2} k_{i,4} \right) + O(h^5) \quad //1$$

gdzie $i = 1, 2, \dots, m$

$$k_{i,1} = hf_i(x_n, y_{1,n}, \dots, y_{m,n})$$

$$k_{i,2} = hf_i\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_{i,n} + \frac{1}{2}k_{i,1}, \dots, y_{m,n} + \frac{1}{2}k_{m,1}\right)$$

$$k_{i,3} = hf_i(x_n + \frac{1}{2}h, y_{1,n} + \frac{1}{2}k_{i,2}, \dots, y_{m,n} + \frac{1}{2}k_{m,2})$$

$$k_{i,4} = hf_i(x_n + h, y_{1,n} + k_{i,3}, \dots, y_{m,n} + k_{m,3}).$$

Formuły te mają proste współczynniki: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$.

Daje to pewne korzyści przy programowaniu, zwłaszcza w stałym przecinku, gdzie mnożenie przez $\frac{1}{2}$ można zastąpić operacją przesuwania. W tym wypadku formuły /1/ wymagają tylko jednego mnożenia przez współczynnik $\frac{1}{3}$, a tym samym przechowywania w maszynie tylko tego współczynnika. Przy obliczeniu jednego kroku formułami /1/ konieczne jest czterokrotne podstawianie do równania różniczkowego.

Realizacja formuł /1/ w maszynie wymaga $4 \times m$ komórek roboczych. Określenie dokładności przy obliczeniach metodą Rungego-Kutty przeprowadza się w praktyce sposobem Rungego, t.j. według formuły

$$\left| y_{2n} - y(x_{2n}) \right| \approx \frac{|y_{2n} - y_n|}{2^k - 1},$$

gdzie: y_n - rozwiązanie otrzymane metodą Rungego-Kutty z krokiem $2h$,

y_{2n} - rozwiązanie otrzymane metodą Rungego-Kutty z krokiem h ,

k - rząd metody /w tym przypadku $k=4$ /.

Metoda Rungego-Kutty-Gilla

W 1951 r. Gill [4] wyprowadził formuły optymalne ze względu na ilość miejsc roboczych. Przytaczamy tu formuły Gilla w postaci wygodnej do programowania.

$$y_{i,1} = y_{i,0} + \frac{1}{2}(k_{i,0} - 0 \cdot q_{i,0})$$

$$y_{i,2} = y_{i,1} + (1 - \sqrt{\frac{1}{2}})(k_{i,1} - q_{i,1})$$

$$y_{i,3} = y_{i,2} + (1 + \sqrt{\frac{1}{2}})(k_{i,2} - q_{i,2})$$

/2/

$$y_{i,4} = y_{i,3} + \frac{1}{6}(k_{i,3} - 2 \cdot q_{i,3}),$$

gdzie:

$$k_{i,0} = hf_i(y_{0,0}, y_{1,0} \dots)$$

$$k_{i,1} = hf_i(y_{0,1}, y_{1,1} \dots)$$

$$k_{i,2} = hf_i(y_{0,2}, y_{1,2} \dots)$$

$$k_{i,3} = hf_i(y_{0,3}, y_{1,3} \dots)$$

$$q_{i,1} = k_{i,0}$$

$$q_{i,2} = 2(1 - \sqrt{\frac{1}{2}})(k_{i,1} - q_{i,1}) + \sqrt{\frac{1}{2}} q_{i,1}$$

$$q_{i,3} = 2(1 + \sqrt{\frac{1}{2}})(k_{i,2} - q_{i,2}) - \sqrt{\frac{1}{2}} q_{i,2}$$

Formuły Gilla wymagają, podobnie jak poprzednie, czterokrotnego podstawiania do równania, ale zajmują tylko $3 \times m$ miejsc roboczych. Wadą tej metody jest fakt, że większość współczynników zawiera $\sqrt{2}$ i z tego względu musi być przechowywana w pamięci. Formuły /2/ umożliwiają przeprowadzenie procesu obliczeniowego w jednym cyklu kosztem pamiętania dodatkowych zerowych współczynników. Proces ten jest dłuższy czasowo od procesu Rungego-Kutty z powodu dużej ilości mnożeń. Metoda Rungego-Kutty-Gilla jest bardzo wygodna dla maszyn z małą pamięcią operacyjną ze względu na ilość miejsc roboczych. Dokładność przy obliczeniach tą metodą praktycznie ocenia się sposobem Rungego.

Metoda Rungego-Kutty-Mersona

Merson w 1958 r. [8] podał wzory całkowania zawierające formułę błędu. Mają one postać:

$$y_{i,n+1} = y_{i,n} + \frac{1}{2}(k_{i,1} + 4k_{i,4} + k_{i,5}) + O(h^5),$$

gdzie:

$$k_{i,1} = \frac{1}{3} h f_i(x_n, y_{1,n}, \dots, y_{m,n})$$

$$k_{i,2} = \frac{1}{3} h f_i(x_n + \frac{1}{3} h, y_{1,n} + k_{1,1}, \dots, y_{m,n} + k_{m,1})$$

$$k_{i,3} = \frac{1}{3} h f_i(x_n + \frac{1}{3} h, y_{1,n} + \frac{1}{2} k_{1,1} + \frac{1}{2} k_{1,2}, \dots, y_{m,n} + \frac{1}{2} k_{m,1} + \frac{1}{2} k_{m,2}) \quad |3|$$

$$k_{i,4} = \frac{1}{3} h f_i(x_n + \frac{1}{2} h, y_{1,n} + \frac{3}{8} k_{1,1} + \frac{9}{8} k_{1,3}, \dots, y_{m,n} + \frac{3}{8} k_{m,1} + \frac{9}{8} k_{m,3})$$

$$k_{i,5} = \frac{1}{3} h f_i(x_n + h, y_{1,n} + \frac{3}{2} k_{1,1} - \frac{9}{2} k_{1,3} + 6k_{1,4}, \dots, y_{m,n} + \frac{3}{2} k_{m,1} - \frac{9}{2} k_{m,3} + 6k_{m,4}).$$

Błąd formuły całkowania, powstały z odrzucenia wyrazów zawierających wyższe niż czwarta potęgi h , wyraża się wzorem

$$5E = k_{i,1} - \frac{9}{2} k_{i,3} + 4k_{i,4} - \frac{1}{2} k_{i,5},$$

gdzie E charakteryzuje żadaną dokładność.

Metoda Rungego-Kutty-Mersona dla danego kroku całkowania wymaga pięciokrotnego podstawiania do równania różniczkowego i wykorzystuje $5 \times m$ komórek roboczych.

Metoda ta z wyjątkiem równań bardzo prostych jest dłuższa czasowo przy tej samej ilości kroków od metody Rungego-Kutty i Rungego-Kutty-Gilla z powodu większej ilości podstawień do równań. Zaletą tej metody jest łatwość organizacji zmiennego kroku. Po każdym kroku sprawdza się relację między wielkością $Z_i = k_{i,1} - \frac{9}{2} k_{i,3} + 4k_{i,4} - \frac{1}{2} k_{i,5}$ a wielkością $5E$. Jeżeli chociaż dla jednego i $5E < Z_i$, to krok h zmniejsza się 2 razy. Jeżeli dla wszystkich i $Z_i < \frac{5E}{32}$, to krok h zostaje podwojony. W przypadku kiedy dla wszystkich i $Z_i < 5E$, ale nie dla wszystkich i $Z_i < \frac{5E}{32}$, to krok h pozostaje bez zmiany.

Metoda Rungego-Kutty-Mersona ze względu na zajmowanie $5 \times m$ komórek roboczych jest niewygodna dla maszyn o bardzo małej pamięci operacyjnej.

Omówimy teraz metodę ekstrapolacyjną i ekstrapolacyjno-interpolacyjną Adamsa.

Metoda ekstrapolacyjna Adamsa

$$y_{i,n+1} = y_{i,n} + h \left[\frac{55}{24} f_{i,n} - \frac{59}{24} f_{i,n-1} + \frac{37}{24} f_{i,n-2} - \frac{3}{8} f_{i,n-3} \right]$$

Teoretycznie błąd metody wynosi $\frac{251}{720} h^5 y_0^{(5)}$. Praktycznie wzór ten jest mało użyteczny i stosuje się zwykle obliczenia z krokiem h , a następnie z krokiem $\frac{h}{2}$. Zgodność rozwiązań z dostateczną dokładnością w tych samych punktach uważa się za wystarczający dowód poprawności obliczeń. Ekstrapolacyjna metoda Adamsa ma tę zaletę, że wymaga przy każdym kroku tylko jednego podstawienia do równania różniczkowego. Wadą jej jest to, że zajmuje $8 \times m$ miejsc roboczych w pamięci, wymaga specjalnego procesu startowego w celu otrzymania punktów startowych /opornych/. Zmiana kroku całkowania przy tej metodzie jest uciążliwa i wymaga powtarzania procesu startowego. Metoda ta jest niewygodna dla maszyn z małą pamięcią operacyjną, natomiast może dać korzyści w przypadku maszyn wolnych.

Metoda ekstrapolacyjno-interpolacyjna Adamsa

$$y_{i,n+1} = y_{i,n} + h \left[\frac{55}{24} f_{i,n} - \frac{59}{24} f_{i,n-1} + \frac{37}{24} f_{i,n-2} - \frac{3}{8} f_{i,n-3} \right] \quad /4/$$

$$y_{i,n+1} = y_{i,n} + h \left[\frac{3}{8} f_{i,n+1} + \frac{19}{24} f_{i,n} - \frac{5}{24} f_{i,n-1} + \frac{1}{24} f_{i,n-2} \right] \quad /5/$$

Punkty startowe przy tej metodzie, jak i przy ekstrapolacyjnej, można obliczać metodą Kryłowa wykorzystując formułę interpolacyjną Adamsa. Wzór /5/ jest obciążony błędem $-\frac{19}{720} h^5 y_0^{(5)}$. Chcąc skorzystać ze wzorów /4/ i /5/ należy znać wartości $y_{i,n}, y_{i,n-1}, y_{i,n-2}$.

W programie wykonanym w Centrum Obliczeniowym PAN do obliczenia punktów startowych wykorzystano wzory podane przez Tołkmanową [11]:

$$y_{i,n-2} = y_{i,n-3} + h \left[\frac{1}{24} f_{i,n} - \frac{5}{24} f_{i,n-1} + \frac{19}{24} f_{i,n-2} + \frac{3}{8} f_{i,n-3} \right]$$

$$y_{i,n-1} = y_{i,n-3} + h \left[\frac{1}{3} f_{i,n-1} - \frac{4}{3} f_{i,n-2} - \frac{1}{3} f_{i,n-3} \right]$$

$$y_{i,n} = y_{i,n-3} + h \left[\frac{3}{8} f_{i,n} + \frac{9}{8} f_{i,n-1} + \frac{9}{8} f_{i,n-2} + \frac{3}{8} f_{i,n-3} \right].$$

Wartości $y_{i,n-2}$, $y_{i,n-1}$, $y_{i,n}$ oblicza się metodą iteracyjną, przy czym ilość iteracji ≤ 4 .

Jeżeli

$$\left| y_{i,n}^{(m)} - y_{i,n}^{(m-1)} \right| < \varepsilon,$$

gdzie: $y_{i,n}^{(m)}$ - m -te przybliżenie, $y_{i,n}^{(m-1)}$ - $m-1$ przybliżenie, ε - błąd, to m -te przybliżenie przyjmuje się za wartość funkcji y_i odpowiednio w punktach x_{n-2} , x_{n-1} , x_n . Jeżeli nierówność /6/ aż do $m=4$ nie jest spełniona, to krok całkowania zostaje zmniejszony dwa razy i obliczenie powtarza się jeszcze raz.

Wzory /4/ i /5/ są obarczone błędami różnych znaków, stąd

$$\begin{matrix} (4) & & (5) \\ y_{i,n+1} \geq y_{i,n+1} & \leq & y_{i,n+1}, \end{matrix}$$

gdzie:

(4) $y_{i,n+1}$ - wartość rozwiązania obliczona ze wzoru /4/

(5) $y_{i,n+1}$ - " " " " " /5/.

Wykorzystano powyższy fakt do zorganizowania automatycznego wyboru kroku. Mianowicie, jeżeli dla każdego i

$Z_i = \left| y_{i,n+1}^{(4)} - y_{i,n+1}^{(5)} \right|$ spełnia nierówność $Z_i < \varepsilon$, ale nie

dla wszystkich i $Z_i < \frac{\epsilon}{32}$, to otrzymanym rozwiązaniem w punkcie X_{n+1} jest $y_{i,n+1}^{(5)}$. Jeżeli chociaż dla jednego i $Z_i > \epsilon$, to krok zmniejsza się dwa razy. Natomiast jeżeli $Z_i < \epsilon \cdot 2^{-5}$ dla wszystkich i , to krok h zostaje podwojony.

Metoda ekstrapolacyjno-interpolacyjna Adamsa zajmuje $8 \times m$ komórek w pamięci, a więc najwięcej ze wszystkich wymienionych metod.

Obliczenia ze stałym i zmiennym krokiem

Istnieje pewna zależność między krokiem całkowania a dokładnością obliczeń. Jeżeli w podanym przedziale dla danego zagadnienia początkowego obierze się krok h , to błąd obliczeń na ogół będzie różny w różnych punktach przedziału. Jeżeli zaś założymy stały błąd obliczeń w przedziale, to krok całkowania będzie na ogół zmienny.

W przypadku obliczeń ze stałym krokiem osiągnięcie żądanej dokładności wymaga co najmniej dwukrotnego całkowania w całym przedziale, gdyż wymaga tego sposób oceny błędu. Może się zdarzyć, że błąd otrzymanego rozwiązania jest za duży. Żeby go zmniejszyć, trzeba zmniejszyć krok i powtórzyć całkowanie jeszcze raz, następnie dokonać oceny błędu itd., aż do osiągnięcia właściwej dokładności. Obliczenia ze stałym krokiem dają możliwość otrzymania wyników w z góry zadanych punktach przedziału. Sposób oceny dokładności Rungego daje możliwość stwierdzenia z pewnym prawdopodobieństwem, czy błąd okrążeń nie psuje rozwiązania. Wniosek taki opiera się na fakcie, że błąd okrążeń przy ilości kroków n i $2n$ dla dużych wartości n jest inny, a więc powinien być uwzględniony w błędzie rozwiązań, który ocenia się sposobem Rungego. Obliczenia ze stałym krokiem z reguły są dłuższe czasowo, gdyż muszą być prowadzone z odpowiednio małym krokiem, dobranym dla uzyskania żądanej dokładności w całym przedziale, a nie tylko lokalnie, jak ma to miejsce w przypadku zmiennego kroku. Merson podaje, a Lance [7] potwierdza, że metoda jego jest średnio około 20% szybsza od metody Rungego-Kutty-Gilla. Dla liczonych tą metodą przypadków w Centrum Obliczeniowym PAN otrzymano około 30% oszczędności czasowej, a nawet w przypadkach, w których rozwiązanie w danym przedziale miało charakter asymptotyczny, metoda Rungego-Kutty-Mersona była o 60% szybsza. Metody ze zmiennym krokiem z reguły dają zysk na czasie, zmniejszają ilość kroków całkowania, co w pewnych przypadkach, przy dużej różnicy ilości kroków, może dać mniejszy błąd okrążeń. Niedogod-

nością obliczeń ze zmiennym krokiem jest to, że nie można w prosty sposób otrzymać wyników w żądanych punktach przedziału. Otrzymanie rozwiązań w danych punktach wymaga prowadzenia obliczeń ze zwiększoną dokładnością tak, aby wartości rozwiązania w potrzebnych punktach mogły być otrzymane z żadaną dokładnością przez interpolację.

Formuły błędu przy metodzie Adamsa i Rungego-Kutty-Mersona nie uwzględniają błędów okrążeń. W związku z tym, bez powtórnego dokonania obliczeń, z wyraźnie różną ilością kroków w całym przedziale, nic nie można powiedzieć o błędzie okrążeń. W praktyce, przy obliczaniu ze zmiennym krokiem, jeżeli istnieje podejrzenie, że błąd okrążeń jest duży, należy powtórzyć obliczenia ze stałym krokiem najmniejszym z kroków, dobranych dla żądanej dokładności podczas obliczeń ze zmiennym krokiem. Oczywiście, im mniejsza jest różnica ilości kroków całkowania dla metod ze zmiennym krokiem i ilości kroków dla metod ze stałym krokiem, tym mniej mówi to o faktycznym zachowaniu błędów okrążeń. W przypadku małej różnicy ilości kroków całkowania przy obliczeniach ze stałym krokiem należy zmniejszyć odpowiednio krok. Należy przypuszczać, że błąd okrążeń przy metodach ze zmiennym krokiem w tym samym przedziale jest mniejszy niż przy metodach ze stałym krokiem z powodu mniejszej ilości kroków. W przypadku obliczeń w Centrum przypuszczenie to potwierdza się. Obliczenia ze zmiennym krokiem mają najlepsze zastosowanie w metodach Rungego-Kutty-Mersona i ekstrapolacyjno-interpolacyjnej metodzie Adamsa ze względu na proste formuły błędu.

Dla metod Rungego-Kutty i Rungego-Kutty-Gilla można zorganizować automatyczną zmianę kroku następująco: z punktu początkowego wykonuje się obliczenia z dowolnym krokiem h , zapamiętuje się otrzymane rozwiązanie $y_{i,k+1}^{(h)}$. Następnie dokonuje się obliczeń wartości rozwiązania w tym samym punkcie, ale z krokiem $\frac{h}{2}$. Dalej obliczamy $\Delta_i = |y_{i,k+1}^{(h)} - y_{i,k+1}^{(\frac{h}{2})}| < \varepsilon$, gdzie ε - zadana liczba charakteryzująca żadaną dokładność, $y_{i,k+1}^{(h)}$ - wartość rozwiązania z krokiem h , $y_{i,k+1}^{(\frac{h}{2})}$ - wartość rozwiązania z krokiem $\frac{h}{2}$. Jeżeli wszystkie $\Delta_i < \varepsilon$ i przynajmniej jedno $\Delta_i < \frac{\varepsilon}{32}$, to całkowanie w następnym punkcie odbywa się z krokiem h . Jeżeli chociaż jedno $\Delta_i > \varepsilon$, to krok zmniejsza się dwukrotnie i powtarza się obliczenia z krokiem $\frac{h}{2}$. Jeżeli i w tym przypadku warunek $\Delta_i < \varepsilon$ nie będzie spełniony, to obliczenia powtarza się z krokiem $\frac{h}{4}$ itd.

W przypadku, gdy wszystkie $\Delta_i < \varepsilon \cdot 2^{-5}$, to obliczenia powtarza się z krokiem $2h$. Metoda Rungego-Kutty i Rungego-Kutty-Gilla z tak zorganizowanym zmiennym krokiem jest znacznie trudniejsza w zaprogramowaniu i powoduje znaczne zwiększenie liczby podstawień do równania różniczkowego. W związku z tym jest mniej dogodna niż metoda Rungego-Kutty-Mersona.

Dla ilustracji omówionych metod posłużymy się przykładem zaczerpniętym z książki Milne'a [9] $y' = \frac{5y}{x+1}$. Obliczenia wykonano na maszynie URAŁ-2. Wyniki obliczeń tego równania, z warunkiem początkowym $y(0) = 1$, zamieszczone są w tabelach 1 i 2. Tabele 3 i 4 podają dla każdej metody ilości prawych stron i czasy liczenia w przedziale $\langle 0, 5 \rangle$, odpowiednio dla różnych h i ε .

W przypadku ekstrapolacyjno-interpolacyjnej metody Adamsa nie podano ilości prawych stron, gdyż zależy ona od różnej ilości iteracji podczas zmiany kroku. Duże czasy obliczeń ekstrapolacyjno-interpolacyjnej metody Adamsa, podane w tabeli 4, wynikają z częstej w tym przypadku zmiany kroku, która powoduje powtórzenie iteracyjnego procesu startowego. Czasy podane w tabelach 3 i 4 zawierają czas wyprowadzenia wyników. Z porównania odpowiednich czasów, podanych w tabeli 3, wynika, że metoda Rungego-Kutty jest o 20% szybsza od metody Gilla; ten stosunek czasów zależy od przykładu, chociaż przy obu metodach liczy się tę samą ilość prawych stron. Nie można podać ogólnej zależności czasowej metody Rungego-Kutty-Mersona i metod Rungego-Kutty, Rungego-Kutty-Gilla, gdyż różna jest ilość liczonych prawych stron. Tabele 3 i 4 charakteryzują zależności czasowe jedynie w konkretnym przypadku.

Literatura

1. BERBZIN I.S., ŽIDKOV N.P.: Metody vycislenij, 1962:2.
2. BIBBERBACH L.: Theorie der Differentialgleichungen, Berlin 1946.
3. CARR J.W.: Error Bounds for the Runge-Kutta Single-Step Integration Process, J. Assoc. Comput. Mach., 1958:2, 3, 9.
4. GILL S.A.: A Process for the Step-by-Step Integration of Differential Equations in an Automatic Digital Computing Machine, Proc. Cambridge Philos. Soc. 1951:47.96.
5. GOODMAN T.R., LANCE G.N.: The Numerical Integration of Two Point Boundary Value Problems, Math. Tables Aids Compute, 1956:10, 82.

6. HAMMING R.W.: Stable Predictor-Corrector Methods for Ordinary Differential Equations. J. Assoc. Comput. Mach., 1956:6, 1, 37.
7. LANCE G.N.: Numerical Methods for High Speed Computers, London 1960.
8. MERSON R.H.: On Some Developments in the Study of Processing for Solving Ordinary Differential Equations, 1958.
9. MILNE W.E.: Numerical Solution of Differential Equations, London 1953.
10. MILNE W.E., REYNOLDS R.R.: Stability of a Numerical Solution of Differential Equations, J. Assoc. Comput. Mach., 1956:6, 196.
11. TOLKMANOVA S.S.: Ordinatnyje formuly čislennogo integrirovanija obyknovjennyh differencjalnych urovnenij I-go poriadka, Žurn. vycisl. matem. i matem. fiziki, 1959:5.
12. TICHONOV A.N., GORBUNOV A.D.: O asymptotičeskich ocenkach pogrešnosti metoda tipa Runge-Kutta, Žurn. vycisl. matem. i matem. fiziki, 1963:2, 1.

ON THE USE OF RUNGE-KUTTA AND ADAM'S METHODS IN COMPUTER PRACTICE

Summary

In the present paper descriptions are given of Runge-Kutta, Runge-Kutta-Gill and Runge-Kutta-Merson's methods, as well as that of extrapolation and extrapolation-interpolation Adams method of the 4th order. The suitability of these methods as of standard processes is proved. The way is presented of choosing adequate methods and also a general arranging of computation with a constant and variable integration step. An example of the equation $y' = \frac{2y}{x+1}$ with initial condition $y(0) = 1$ illustrates the above methods.

Tabela 1

x	h	$y = (x + 1)^5$	Metoda Rungego-Kutty	Metoda Rungego-Kutty-Gilla	Metoda ekstrapol. Adamsa
0	-	1.0	1.0	1.0	1.0
1.0	10 ⁻¹	32.0	31.986121	31.986121	31.954911
	10 ⁻²		31.999998	31.999998	31.999997
	10 ⁻³		32.000001	32.000001	32.000001
2.0	10 ⁻¹	243.0	242.88798	242.88798	242.64477
	10 ⁻²		242.99999	242.99999	242.99997
	10 ⁻³		242.99999	242.99999	242.99999
3.0	10 ⁻¹	1024.0	1023.5229	1023.5230	1022.4041
	10 ⁻²		1023.9999	1023.9999	1023.9999
	10 ⁻³		1023.9999	1023.9999	1023.9999
4.0	10 ⁻¹	3125.0	3123.5400	3123.5401	3120.3967
	10 ⁻²		3124.9999	3124.9999	3124.9997
	10 ⁻³		3124.9994	3124.9996	3124.9994
5.0	10 ⁻¹	7776.0	7772.3632	7772.3632	7764.5389
	10 ⁻²		7775.9999	7775.9999	7775.9996
	10 ⁻³		7775.9971	7776.0081	7775.9971

Tabela 2

X	E	$y = (X+1)^5$	Metoda Rungego- Kutty-Mersona	Metoda Adamsa
0	-	1.0	1.0	1.0
1.0	10^{-3}	32.0	31.998791	31.999021
	10^{-4}		31.999936	31.999950
	10^{-5}		31.999936	31.999998
	10^{-6}		31.999996	31.999999
2.0	10^{-3}	243.0	242.98040	242.99256
	10^{-4}		242.99948	242.99961
	10^{-5}		242.99951	242.99999
	10^{-6}		242.99997	242.99999
3.0	10^{-3}	1024.0	1023.9592	1023.9686
	10^{-4}		1023.9978	1023.9984
	10^{-5}		1023.9979	1023.9999
	10^{-6}		1023.9999	1024.0000
4.0	10^{-3}	3125.0	3124.8754	3124.9042
	10^{-4}		3124.9933	3124.9950
	10^{-5}		3124.9936	3124.9998
	10^{-6}		3124.9996	3125.0001
5.0	10^{-3}	7776.0	7775.6890	7775.7618
	10^{-4}		7775.9834	7775.9876
	10^{-5}		7775.9842	7775.9996
	10^{-6}		7775.9991	7776.0001

Tabela 3

Metoda	krok h	błąd przy $x=50$	ilość prawych stron	czas liczenia w przedz. $<0,5>$
Rungego-Kutty R-K-Gilla Ekstrapolac. Adamsa	10^{-1}	-3,6368 -3,6368 -11,4611	200 200 50	7,5 sek. 9 7,5 "
Rungego-Kutty R-K-Gilla Ekstrapolac. Adamsa	10^{-2}	- 0,0001 - 0,0001 - 0,0004	2000 2000 500	75 " 90 " 73 "
Rungego-Kutty R-K-Gilla Ekstrapolac. Adamsa	10^{-3}	- 0,0029 + 0,0081 - 0,0029	20000 20000 5000	750 " 900 " 725 "

Tabela 4

Metoda	błąd zadany ϵ	błąd przy $x=5.0$	ilość prawych stron	czas liczenia w przedziale $<0.5>$
R-K-Mersona Adamsa	10^{-3}	-0,3110 -0,2382	250 -	10 sek. 60 "
R-K-Mersona Adamsa	10^{-4}	-0,0166 -0,0124	500 -	19 " 100 "
R-K-Mersona Adamsa	10^{-5}	-0,0158 -0,0004	905 -	34 " 140 "
R-K-Mersona Adamsa	10^{-6}	-0,0009 +0,0001	1610 -	60 " 246 "

OCENA PORÓWNAWCZA METOD NUMERYCZNYCH
CAŁKOWANIA RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH ZWY-
CZAJNYCH NA MASZYNIE ZAM-2

Apolonia RADZIUN
Instytut Maszyn Matematycznych PAN

Podano wyniki oraz ocenę obliczeń doświadczalnych dokonanych na maszynie ZAM-2 przy pomocy m.1. metod Rungego-Kutty-Gilla rzędu czwartego, ekstrapolacyjnej Adamsa rzędu piątego oraz Crane-Lamberta z modyfikacją Hamminga rzędu piątego przy danym równaniu różniczkowym zwyczajnym typu $y' = F(x, y)$ z warunkiem $y(x_0) = y_0$, gdzie x jest zmienną niezależną, należącą do pewnego przedziału, a y i F są wektorami.

Będziemy rozpatrywać równanie różniczkowe zwyczajne postaci:

$$y' = F(x, y)$$

$$y(x_0) = y_0,$$

/1/

gdzie y i F są N -wymiarowymi wektorami.

Przy ocenie określonej metody numerycznej stosowanej do rozwiązywania równania /1/ bierzemy pod uwagę następujące aspekty:

1. stabilność
2. dokładność
3. szybkość rozwiązania.

Zależy nam oczywiście na uzyskaniu dużej dokładności i szybkości obliczeń oraz szerokiego zakresu stabilności.

W Biurze Zastosowań i Programów IMM przeprowadzono w tym celu szereg obliczeń doświadczalnych. Wykorzystano do nich następujące metody numeryczne, zaprogramowane na maszynę ZAM-2:

- 1/ Metoda Rungego-Kutty-Gilla rzędu 4
- 2/ Ekstrapolacyjna metoda Adamsa rzędu 5

3/ Modyfikowa metoda według wzorów Crane i Lamberta 5 rzędu, którą będziemy nazywać metodą Hamminga.

Ponieważ metoda Rungego-Kutty-Gilla jest ogólnie znana, nie będziemy przytaczać jej wzorów [3]. Jest to metoda samostartująca, stabilna, lecz wolna ze względu na to, że przy całkowaniu na jednym kroku oblicza cztery razy prawe strony. Poza tym nie posiada dogodnego wzoru błędu obcięcia.

Wzór metody Adamsa jest następujący:

$$Y_{n+1} = Y_n + 4h [0.660069(4) F_n - 0.963194(4) F_{n-1} + 0.908(3) F_{n-2} + \\ - 0.44236(1) F_{n-3} + 0.087152(7) F_{n-4}].$$

Metoda Hamminga:

$$P_{n+1} = Y_{n-3} + \frac{4}{3} h (2F_n - F_{n-1} + F_{n-2}) \quad 12/$$

$$M_{n+1} = P_{n+1} - \frac{14}{17} (P_{n+1} - C_n) \quad 13/$$

$$C_{n+1} = \frac{17}{8} Y_{n-2} Y_{n-1} + \frac{7}{8} Y_{n-2} + h \left(\frac{11}{24} M_{n+1} - \frac{1}{8} F_{n-1} + \frac{5}{12} F_{n-2} \right) \quad 14/$$

$$Y_{n+1} = C_{n+1} + \frac{3}{17} (P_{n+1} - C_{n+1}), \quad 15/$$

gdzie $\dot{M}_{n+1} = F(x, M_{n+1})$, h - krok całkowania.

Metody Adamsa i Hamminga nie są metodami samostartującymi. Linie startowe dla tych metod były obliczane przy pomocy metody Rungego-Kutty-Gilla. Są to metody szybsze od metody Rungego-Kutty-Gilla.

Omówimy szczegółowo metodę Hamminga.

Wzór 12/ zwany predykatorem określa pierwsze przybliżenie wartości Y_{n+1} , która następnie jest modyfikowana według wzoru 13/. Otrzymaną w ten sposób wartość podstawiamy do korektora 14/. Wartość ostateczną Y_{n+1} otrzymujemy ze wzoru 15/. Modyfikację 13/ i 15/ wprowadzono w celu zmniejszenia błędów obcięcia wzorów 12/ i 14/. Dzięki temu z korektora korzystano tylko jeden raz na każdym kroku całkowania. Tym samym tylko dwa razy obliczano wartość funkcji F , co skracało czas obliczeń.

Korektor /4/ jest stabilny dla $-72 < \bar{H} < 0$, gdzie $\bar{H} = h \cdot F_y$. Ponieważ przy jednokrotnym korzystaniu z korektora na stabilność metody ma wpływ predyktor i modyfikacja, więc metoda Hamminga może być niestabilna w tym przedziale.

Kontynuowane są doświadczenia nad wyznaczeniem przedziału stabilności metody Hamminga. Między innymi rozwiązano następujące równania, których rozwiązanie numeryczne otrzymano na maszynie ZAM-2:

$$\dot{Y} = -100Y + 100$$

o warunkach początkowych $Y(0) = 0$ w przedziale $(0 - 0.3)$. Dokładne rozwiązanie tego równania jest $Y = 1 - e^{-100T}$.

Równanie to rozwiązano aby przekonać się, jak zachowują się poszczególne metody przy całkowaniu równań o ujemnych i względnie dużych wartościach bezwzględnych pochodnych prawej strony względem Y .

W naszym przykładzie $F_y = -100 < 0$. Obliczenia wykonano dla różnych wartości kroku, a mianowicie $h = 0.01, 0.001$ i 0.0005 .

Na rys. 12, 13, 14 pokazane są wykresy numerycznych rozwiązań w zależności od wielkości kroku h .

Rysunek 12 przedstawia numeryczne rozwiązania uzyskane przy pomocy trzech powyższych metod. Obliczenia wykonano z krokiem $h = 0.01$. Wyniki obliczeń otrzymane metodą Rungego-Kutty-Gilla pokrywają się z dokładnym rozwiązaniem z dokładnością 7 cyfr dziesiętnych po przecinku /linia, kropka - kreska/. Widzimy duże błędy rozwiązania metodą Adamsa /linia przerywana/, trochę mniejsze - metodą Hamminga /linia ciągła/.

Ze zmniejszeniem kroku h do 0.001 , odchylenia między dokładnym rozwiązaniem a numerycznym, metodami Adamsa i Hamminga, prawie zanikają.

Na Rys. 13 widoczne są małe amplitudy oscylacji wyników metody Hamminga. Rys. 14 przedstawia rozwiązanie numeryczne równania 1 z krokiem $h = 0.0005$. W tym wypadku numeryczne rozwiązanie metody Adamsa i Rungego-Kutty-Gilla pokrywają się z dokładnym rozwiązaniem z dokładnością 8 cyfr dziesiętnych po przecinku. Metoda Hamminga na końcu przedziału daje małe odchylenia, które można wytłumaczyć błędem zaokrąglenia przy dużej ilości wykonanych kroków lub też wpływem modyfikacji na obszar stabilności.

Najlepsza metoda dla tego równania jest Rungego-Kutty-Gilla przy różnych wartościach kroku h . Metoda Adamsa jest dobra dla $h=0.001$. Najgorszą okazała się metoda Hamminga. Na tym przykładzie widzimy, jak duży wpływ na dokładność ma wielkość kroku oraz odpowiedni jego dobór dla każdej metody.

2. $\dot{Y} = 10Y$

z warunkiem początkowym $Y(0) = 1$ w przedziale $(0 - 0.5)$. Dokładne rozwiązanie tego równania $Y = e^{10T}$. Zauważmy, że dla tego równania $F_y = 10 > 0$. Obliczenia przeprowadzono w skali binarnej 11.

W poniższej tabelce podany jest czas obliczeń oraz maksymalny błąd rozwiązania.

Metoda	Czas obliczeń	Max błąd
R-K-G	40 min	$2.3 \cdot 10^{-3}$
Adams	25 min	$5.2 \cdot 10^{-3}$
Hamming	32 min	$6.1 \cdot 10^{-3}$

Widzimy, że rząd dokładności jest dla tych metod jednakowy, lecz czas obliczeń - różny.

3. $\dot{Y} = A(Y-1)\cos T$

z warunkiem początkowym $Y(0) = 2$, w przedziale $(0 - \pi)$. Dokładne rozwiązanie $Y = 1 + e^{A \sin T}$.

Równanie to rozwiązano, aby zbadać zachowanie metod numerycznych przy całkowaniu równań /1/, gdy pochodna zmienia znak.

Poniżej pokazany jest w tabelce czas obliczeń oraz maksymalny błąd rozwiązania.

Metoda	Czas obliczeń	Max błąd
R-K-G	80 min	$7 \cdot 10^{-7}$
Adamsa	50 min	$1 \cdot 10^{-6}$

Warto podkreślić, że błąd blisko środka przedziału jest największy, natomiast na początku i bliżej końca jest bardzo mały. Takie zachowanie błędu można wytłumaczyć zmianą znaku pochodnej F_y oraz związanym z tym zachowaniem pola krzywych całkowych.

Wnioski

Przy rozwiązywaniu równań różniczkowych /1/, gdy $F_y < 0$ lub gdy wykonujemy dużą ilość kroków, lepszą wydaje się metoda Rungego-Kutty-Gilla niż metody różnicowe.

Literatura

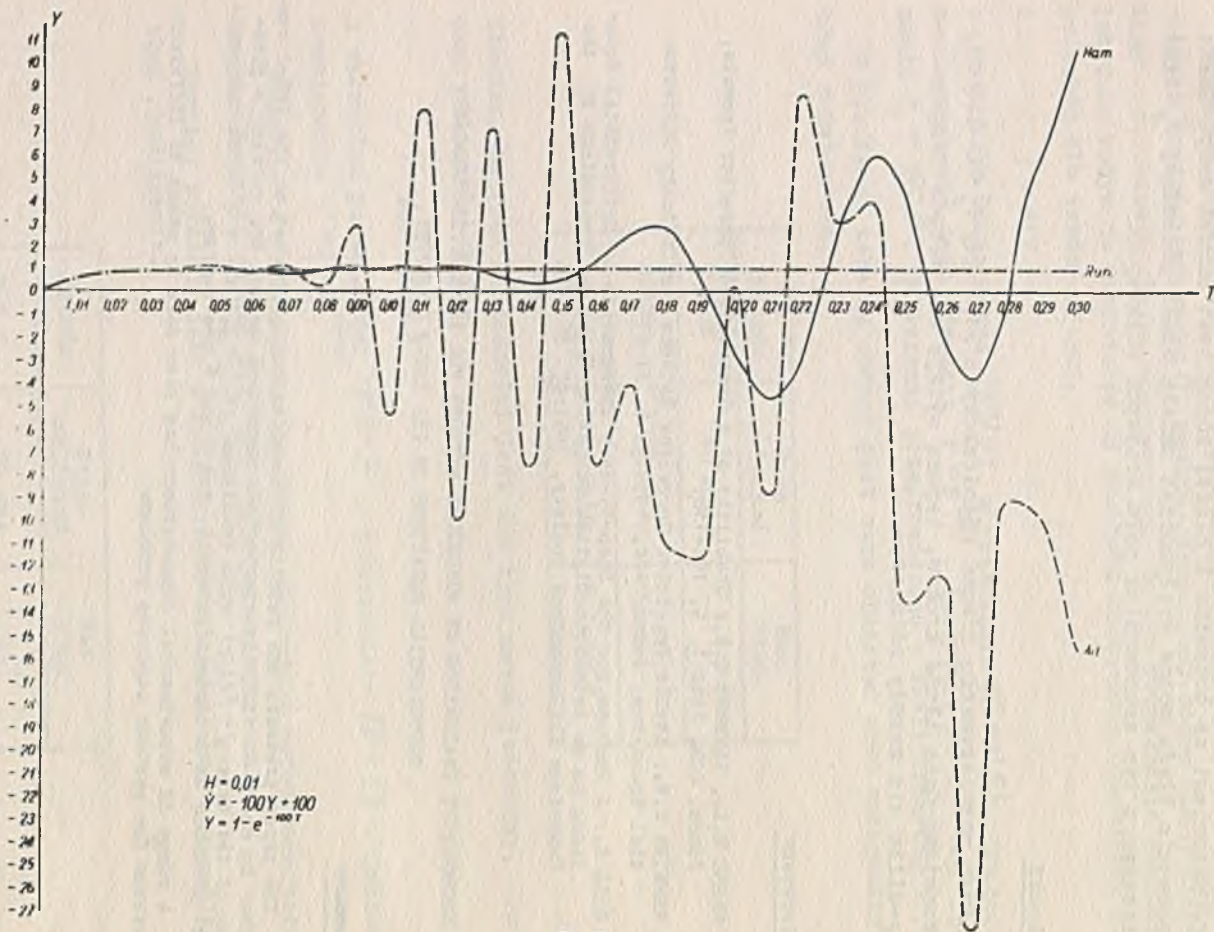
1. CRANE R.L., LAMBERT J.R.: Stability of a Generalized Corrector Formula, Journ. ACM, 1962:1, 9, 104-118.
2. HAMMING R.W.: Stable Predictor-Corrector Methods for Ordinary Differential Equations, Journ. ACM, 1959:1, 6, 37-47.
3. GILL S.: A Process for the Step-by-Step Integration of Differential Equations in an Automatic Digital Computing Machine, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 1951:47, 96-109.

COMPARATIVE EVALUATION OF NUMERICAL METHODS FOR INTEGRATING ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS ON THE ZAM-2 COMPUTER

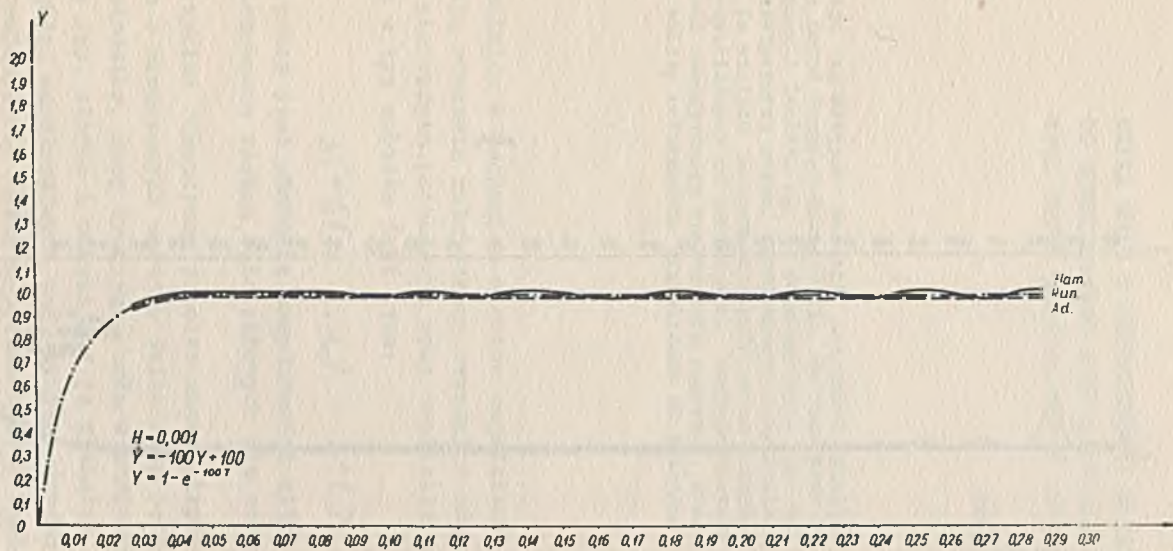
Summary

The paper presents the results of computations performed on the ZAM-2 computer in order to find the appropriate numerical method for solving a problem of the type $y = F(x, y)$ with condition $y(x_0) = y_0$ where x is an independent variable in a certain interval, and y and F are vectors.

A range of experimental computations has been made by means of different methods for certain concrete problems.



Rys. 12



Rys 13

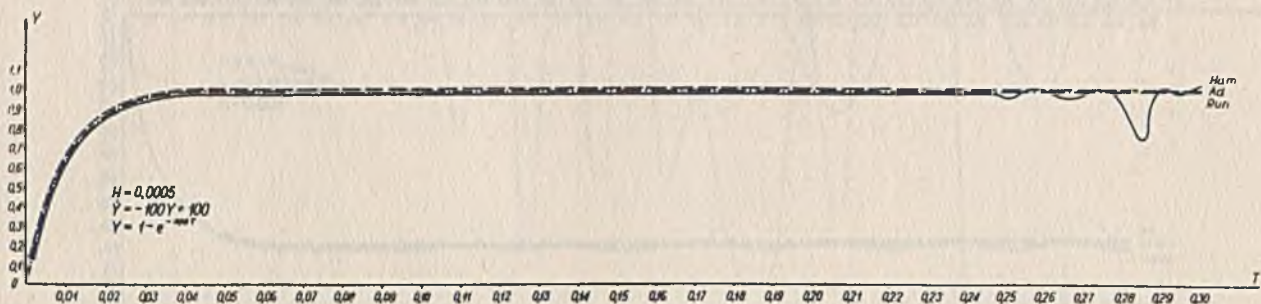


Fig. 14

KILKA UWAG O UŻYTECZNOŚCI MASZYN MATEMATYCZNYCH
DO NUMERYCZNEGO ROZWIĄZYWANIA RÓWNAŃ RÓŻNICZKO-
WYCH RUCHU STOSOWANYCH W ASTRONOMII

Krzysztof ZIOŁKOWSKI
Centrum Obliczeniowe PAN

W pracy podane są wstępne wnioski dotyczące analizy przydatności metod Rungego-Kutty-Gilla, de Vogelaere'a, Adamsa-Störmera i Gautchi'ego do rozwiązywania na maszynach matematycznych równań różniczkowych zagadnienia dwóch ciał. Ze względu na periodyczność zmian odchyłek rozwiązań przybliżonych od dokładnych, zasygnalizowana jest możliwość empirycznego znalezienia poprawki, która maksymalnie zbliży rozwiązanie przybliżone do dokładnego.

Fundamentalne w mechanice niebios zagadnienie ruchu ciał niebieskich opisują równania różniczkowe zwyczajne drugiego rzędu nie zawierające pierwszych pochodnych oraz explicite zmiennej niezależnej, którą w tym wypadku jest czas:

$$y_i'' = f_i(y_1, \dots, y_n) \quad i=1, 2, \dots, n \quad /1/$$

Celem tej pracy jest zbadanie przydatności kilku metod numerycznych rozwiązywania równań różniczkowych dla równań typu /1/.

I. Jako przykład rozpatrzmy problem ruchu eliptycznego dwóch ciał punktowych o skończonych masach. Jeśli masę jednego ciała przyjmiemy jako jednostkę, masę drugiego, małą w porównaniu z poprzednim, zaniedbamy /np. słońce i okrążająca je planeta/, to dobierając prostokątny układ współrzędnych tak, by jego środek leżał w punkcie, w którym znajduje się ciało o przeważającej masie, ruch ciała znikomego opisuje układ równań:

$$\ddot{x}_i = -k^2 \frac{x_i}{r^3} \quad i=1, 2, 3 \quad , \quad /2/$$

gdzie $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, a k jest współczynnikiem, zwanym stałą grawitacji Gaussa.

Układ ten ma dokładne rozwiązanie podane jeszcze przez Keplera [1]:

$$x_i = a[P_i(\cos E - e) + Q_i \sqrt{1-e^2} \sin E] \quad i = 1, 2, 3,$$

gdzie E czyli tzw. anomalia ekscentryczna jest funkcją czasu t daną równaniem Keplera:

$$E - e \sin E = \mu t \quad \mu = ka^{-\frac{3}{2}},$$

a przez a i e oznaczyliśmy odpowiednio wielką półoś i mimośród elipsy czyli dwa z sześciu tzw. elementów orbity, charakteryzujące jej kształt. Stałe P_i i Q_i są funkcjami innych trzech elementów Ω , i , które określają położenie orbity w przestrzeni.

II. Przybliżone rozwiązania układu /2/ znajdowane były metodami Rungego-Kutty-Gilla, de Vogelaere'a, Adamsa-Störmera, Gautschi'ego.

1. Aby do równań /2/ zastosować metodę Rungego-Kutty-Gilla, należy zamienić je na równoważny układ siedmiu równań pierwszego rzędu

$$\dot{y}_i = f_i(y_1, \dots, y_7) \quad i = 1, 2, \dots, 7.$$

Stosując metodę czwartego rzędu wprowadzamy oznaczenia:

$$\begin{aligned} \dot{y}_{i,j} = k_{ij} = f_i(y_{1,j-1}, y_{2,j-1}, \dots, y_{7,j-1}) = f_{i,j-1} \\ i = 1, 2, \dots, 7 \quad j = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Ogólny wzór na wartość szukanej funkcji na n -tym kroku, gdy znany jest $(n-1)$ -szy krok, ma postać [3]

$$\begin{aligned} y_{ij} = y_{i,j-1} + h[a_j(k_{ij} - b_j q_{i,j-1})] \\ i = 1, 2, \dots, 7 \quad j = 1, 2, 3, 4, \end{aligned}$$

gdzie

$$q_{ij} = q_{i,j-1} + 3[a_j(k_{ij} - b_j q_{i,j-1})] - c_j k_{ij}$$

oraz

$$\begin{array}{lll}
 a_1 = \frac{1}{2} & b_1 = 2 & c_1 = \frac{1}{2} \\
 a_2 = 1 - \sqrt{\frac{1}{2}} & b_2 = 1 & c_2 = 1 - \sqrt{\frac{1}{2}} \\
 a_3 = 1 + \sqrt{\frac{1}{2}} & b_3 = 1 & c_3 = 1 + \sqrt{\frac{1}{2}} \\
 a_4 = \frac{1}{6} & b_4 = 2 & c_4 = \frac{1}{2}
 \end{array}$$

przy czym kładziemy

$$\begin{aligned}
 q_{i1}(t_1) &= 0 \\
 q_{i1}(t_n) &= q_{i1}(t_{n-1}) \quad n=1, 2, \dots,
 \end{aligned}$$

 h oznacza krok całkowania.

2. Metodę de Vogelaere'a [6] stosuje się tylko do równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu, nie zawierających pierwszych pochodnych. Wymaga ona, podobnie jak metoda Rungego-Kutty, jednego punktu startowego. Przy stosowaniu metody czwartego rzędu, na pierwszym kroku oblicza się następujące wielkości pomocnicze:

$$\begin{aligned}
 x_{i1} &= \frac{1}{2} h \dot{x}_{i1} \\
 x_{i, \frac{1}{2}} &= x_{i1} - \frac{1}{2} h \dot{x}_{i1} + \frac{1}{8} h^2 f_{i1}
 \end{aligned} \quad i=1, 2, 3$$

Wartość szukanej funkcji na każdym następnym n -tym kroku całkowania, gdy znamy $(n-1)$ -szy krok, znajduje się z formuły

$$\begin{aligned}
 x_{i,n} &= x_{i,n-1} + 2x_{i,n-1} + 2F_{i,n-1} + F_{i, \frac{n-1}{2}} \\
 i &= 1, 2, 3 \quad n=1, 2, \dots,
 \end{aligned} \quad 13/$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 F_{i,n} &= \frac{1}{12} h^2 f_{i,n} & F_{i, \frac{n-1}{2}} &= \frac{1}{3} h^2 f_{i, \frac{n-1}{2}} \\
 x_{i, \frac{n-1}{2}} &= x_{i,n-1} + x_{i,n-1} - \frac{1}{8} F_{i, \frac{n-1}{2}} + 2F_{i,n-1}
 \end{aligned} \quad 14/$$

$$X_{i,n} = X_{i,n-1} + F_{i,n-1} + F_{i,n-2} + F_{i,n} \quad /5/$$

$$i = 1, 2, 3 \quad n = 1, 2, \dots$$

Kolejność korzystania z tych wzorów na jednym kroku całkowania jest następująca: najpierw liczymy /4/, później /3/ i wreszcie /5/ dla każdego i .

3. Wzory metody różnicowej Adamsa-Störmera dla równań typu /1/ podała Kamke [4]. Przy zaniechaniu różnic rzędu szóstego i wyższych mają one postać

$$X_{i,n+1} = X_{i,n} + X_{i,n-4} + X_{i,n-5} +$$

$$+ \frac{h^2}{48} (67f_{i,n} - 8f_{i,n-1} + 122f_{i,n-2} - 8f_{i,n-3} + 67f_{i,n-4})$$

$$X_{i,n+1} = X_{i,n} + X_{i,n-2} + X_{i,n-3} +$$

$$+ \frac{h^2}{240} (17f_{i,n+1} + 232f_{i,n} + 222f_{i,n-1} + 232f_{i,n-2} + 17f_{i,n-3})$$

$$i = 1, 2, 3 \quad n = 1, 2, \dots$$

Metoda ta wymaga znajomości sześciu punktów startowych.

4. Dla równań mających rozwiązania periodyczne Gautschi [2] opracował specjalną metodę, korzystającą ze wzorów kwadraturowych opartych na trygonometrycznych wielomianach interpolacyjnych. Przy równaniach typu /1/ wartości szukanych funkcji na każdym kroku znajduje się ze wzorów

$$X_{i,n+1} + \alpha_{p1}(v) X_{i,n} + \alpha_{p2}(v) X_{i,n-1} = h^2 \sum_{\lambda=1}^{2p-1} \beta_{p\lambda}(v) f_{i,n+1-\lambda},$$

$$i = 1, 2, 3 \quad n = 1, 2, \dots$$

gdzie: p jest rzędem metody. Parametr

$$v = h \frac{2\pi}{T},$$

gdzie T jest okresem rozwiązania. Dla $p=3$ czyli metody rzędu trzeciego stałe α i β mają postać:

$$\alpha_{31} = -2 \left(1 - \frac{27}{20} v^6 + \dots \right)$$

$$\alpha_{32} = -\alpha_{31} - 1$$

$$\beta_{31} = \frac{299}{240} \left(1 - \frac{4315}{5382} v^2 + \frac{7357}{49680} v^4 + \dots \right)$$

$$\beta_{32} = -\frac{176}{240} \left(1 - \frac{3181}{792} v^2 + \frac{264593}{47520} v^4 + \dots \right)$$

$$\beta_{33} = \frac{194}{240} \left(1 - \frac{2047}{582} v^2 + \frac{38129}{7760} v^4 + \dots \right)$$

$$\beta_{34} = -\frac{96}{240} \left(1 - \frac{913}{432} v^2 + \frac{6923}{25920} v^4 + \dots \right)$$

$$\beta_{35} = \frac{19}{240} \left(1 + \frac{221}{342} v^2 + \frac{17521}{41040} v^4 + \dots \right)$$

Użycie tej metody wymaga znajomości pięciu punktów startowych.

III. Przy rozwiązywaniu układu równań /2/ omówionymi metodami /rachunki wykonano na maszynie URAŁ-2/ przyjęto następujące wartości elementów orbity:

przy ustalonych

$$\Omega = 80.7, \quad i = 10.6, \quad \mu = 0.21415111$$

zmieniano

$$\omega = 69.9, \quad 10.0$$

oraz

$$e = 0.1, 0.3, 0.6, 0.9.$$

Obliczenia metodami przybliżonego całkowania wykonano dla następujących wartości kroku h :

$$h = \frac{T}{50}; \frac{T}{100}; \frac{T}{200}; \frac{T}{400}; \frac{T}{800}$$

IV. Analizę przydatności rozpatrywanych w punkcie II metod do rozwiązywania równań typu /1/ przeprowadzono badając zależności różnic - rozwiązanie dokładne Keplera minus rozwiązanie przybliżone - od ilości wykonanych kroków i wielkości kroku całkowania oraz od elementów orbity. Wyniki wstępnych opracowań otrzymanych rezultatów można streścić w poniższych punktach:

1. Odchyłki rozwiązań uzyskanych metodami przybliżonymi od rozwiązań dokładnych zmieniają się z czasem periodycznie. Okres tych zmian jest równy okresowi rozwiązania T . Odchyłka zmienia znak w tym samym momencie, w którym pierwsza pochodna współrzędnej po czasie równa się zero, czyli w momencie znikania odpowiedniej składowej prędkości ciała na orbicie. Błędy są największe wtedy, gdy odpowiednie składowe prędkości przyjmują wartości ekstremalne.
2. Ze wzrostem czasu wzrasta amplituda odchyłek. Przypuszcza się, iż dla metody Rungego-Kutty-Gilla obwiednią krzywej, obrazującej przebieg błędu, jest parabola.
3. Przy jednakowej wielkości kroku całkowania obserwuje się różne zależności amplitudy odchyłek i kształtu krzywej błędu od elementów orbity dla różnych metod. Przy małych mimośrodkach /0.1/, czyli dla orbit prawie kołowych, lepsze, w sensie wielkości amplitudy odchyłek, są metody różnicowe. Dla większych mimośrodków /0.3/ bardziej dokładne rozwiązania dają metody Rungego-Kutty-Gilla i de Vogelaere'a. Przy dużych mimośrodkach /0.6/ wszystkie metody zawodzą, gdyż błędy są o kilka rzędów wielkości większe niż w wymienionych wyżej przypadkach.
4. Dla dużych mimośrodków zmniejszenie kroku całkowania znacznie zmniejsza amplitudy błędów metod typu Rungego-Kutty. Równoczesne zmniejszenie kroku w metodach różnicowych powoduje bardzo silny wzrost akumulacji błędu, co w tym wypadku zupełnie je dyskwalifikuje.
5. Względne oszacowanie czasu potrzebnego na wykonanie jednego kroku całkowania:

Metoda	Keplera	R - K - G	de Vogelaere'a	Adam.-Stör.	Gautschi'ego
czas	1	1.66	0.89	1	0.85

V. Rezultaty wymienione w IV. sugerują następujące wnioski:

1. Najdokładniejszą, aczkolwiek najdłuższą czasowo, wydaje się metoda Rungego-Kutty-Gilla. Przy dostatecznie małym kroku oraz niewielkich mimośrodkach orbity tą samą dokładność uzyskać można szybszą metodą de Vogelaere'a.
2. Dla orbit o małych mimośrodkach, czyli zbliżonych do koła, najdokładniejsze rozwiązania i w najkrótszym czasie uzyskuje się metodą różnicową Adamsa-Störmera.

3. Metoda Gautschi'ego, chociaż najszybsza z rozpatrywanych, daje stosunkowo najmniej dokładne rozwiązania.

4. Ze względu na okresowość zmian odchyłek rozwiązań przybliżonych od dokładnych zarysowuje się możliwość znalezienia takiej poprawki C , której dodanie do rozwiązania przybliżonego zbliży je maksymalnie do dokładnego. Poprawka ta musi być funkcją okresową czasu z okresem rozwiązania T , winna zależeć od elementów orbity, w szczególności od mimośrod, i wreszcie będzie funkcją wielkości kroku całkowania i ilości wykonanych kroków:

$$X \text{ prawdziwe} = X \text{ przybliżone} + C(t, \text{elementy orbity}, n, h).$$

VI. Wyniki zebrane w IV. wydają się potwierdzać teoretyczne oszacowanie Mjaczina [5] błędu okrąglenia przy numerycznym całkowaniu równań /2/ problemu dwóch ciał. Jeśli przez Q oznaczymy maksymalny błąd okrąglenia przy obliczaniu prawych stron równań, wtedy

$$|\Delta x_i| < \frac{3Q |\sigma_{n,i}|}{1 - e \cos E_n} n^{\frac{3}{2}}, \quad /6/$$

gdzie

$$\sigma_{n,i} = P_i \sin E_n - Q_i \sqrt{1 - e^2} \cos E_n$$

$$l = 1, 2, 3 \quad n = 1, 2, \dots$$

Wyrażenie /6/ jest rzeczywiście periodyczną funkcją czasu i zależy od elementów orbity. Wydaje się, że może ono sugerować postać poprawki C .

Dokładna i pełna statystyczna analiza otrzymanych wyników została opublikowana w Biuletynie Centrum Obliczeniowego PAN.

Literatura

1. BROUWER D., CLEMENCE G.M.: *Methods of Celestial Mechanics*, New York-London 1961.
2. GAUTSCHI W.: *Numerical Integration of Ordinary Differential Equations Based on Trigonometric Polynomials*, *Numerische Mathematik*, 1961:2, 381-397.

3. GILL S.: A Process for the Step-by-Step Integration of Differential Equations in an Automatic Digital Computing Machine, Proc. Cambridge Phils. Soc., 1951:47, 96-108.
4. KAMKE E.: Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen, Leipzig 1959.
5. MJACIN V.F.: Ocenka progresnosti čislennych metodov integrirovania uravnenij niebiesnoj mechaniki, Biulletin I.T.A. VIII, 1962:8, 537-640.
6. VOGELAERE R. de: A Method for the Numerical Integration of Differential Equations of Second Order without Explicit First Derivatives, Journal of Research of the National Bureau of Standards, 1955:54, 8, 119-125.

SOME NOTES ON COMPUTER USE FOR SOLVING MOTION DIFFERENTIAL EQUATIONS
APPLIED TO ASTRONOMY

Summary

The paper contains preliminary conclusions concerning the analysis of the usefulness of the Runge-Kutta-Gill, de Vogelaere, Adams-Störmer and Gautschi methods for solving differential equations for two bodies, using computers. Because of the periodicity of changes, the deviation of an approximate solution from the exact one and the possibility of an empiric finding of correction terms giving the best approach of the approximate solution to the exact one is signalized.

O PROFILACH FAL UDERZENIOWYCH
I OKREŚLAJĄCYCH JE RÓWNANIACH

Krystyn BOCHENEK

Instytut Maszyn Matematycznych PAN

Autor opisuje badanie zachowania się rozwiązań numerycznych w otoczeniu typowych punktów osobliwych przy zastosowaniu dwóch sposobów podejścia do rozwiązywania równań, określających profile fal uderzeniowych: zmiana zmiennych i rozwinięcie w szereg w otoczeniu punktu początkowego, ewentualnie rozwiązywanie klasycznymi metodami numerycznymi.

1. Pochodzenie problemu

Nieliniowe układy hiperboliczne równań cząstkowych prowadzą w pewnych przypadkach, nawet przy bardzo regularnych danych początkowych, do rozwiązań nie dających się przedłużyć w sposób ciągły. Zarówno jednak przesłanki natury fizycznej jak i matematycznej skłaniają nas do dopuszczenia w takich przypadkach rozwiązań nieciągłych. Aby być bardziej konkretnym, rozpatrzę przypadek równań magnetogazodynamiki w następującej postaci dla dwu zmiennych niezależnych: X i t . Do sprawy adekwatności tego układu jeszcze powrócimy.

$$\underline{\dot{E}} = c^2 \underline{l}_x \times \underline{B}'_x + \alpha (B \times \underline{v} - E); \quad \underline{\dot{B}} = -\underline{l} \times E'_x; \quad \dot{\varphi} = -(\varphi v_x)'_x$$

$$\rho \dot{\underline{v}} = -\varphi v_x v'_x + \underline{l}_x p'_x + \frac{1}{\mu} (\underline{l}_x \times \underline{B}'_x) \times \underline{E} \quad //1/$$

$$\rho [\varepsilon + v_x \varepsilon'_x + p (\frac{\dot{\varphi}}{\varphi}) + p v_x (\frac{\dot{\varphi}}{\varphi})'_x] = \frac{1}{\mu} (E - B \times \underline{v}) (\underline{l}_x \times \underline{B}'_x); \quad \varepsilon = F(p, \varphi)$$

Szczególnie interesujący jest przypadek, gdy parametr α , określający dyssypację energii na skutek wydzielania ciepła Joule'a jest bardzo wielki. Układ //1/ można w zasadzie znacznie wówczas uprościć:

pierwsze równanie redukuje się do związku algebraicznego: $\underline{B} \times \underline{v} = \underline{E}$, a równanie redukuje się do warunku stałości entropii. Uproszczony w ten sposób układ równań wykazuje jednak zjawisko o charakterze asymptotycznym. Mianowicie prowadzi on do rozwiązań nieciągłych, odpowiadających przy dużym lecz skończonym α rozwiązaniom ciągłym układu /1/, bardzo szybko zmieniającym się w otoczeniu pewnej linii w płaszczyźnie X, t . Zjawisko wygładzania nieciągłości leży głęboko w naturze matematycznej problemu, wiąże się ono z całkowitą zmianą pola charakterystyk po wprowadzeniu skończonego parametru α .

Nie wchodząc w bardziej szczegółowe rozważania, przejdziemy do układu równań różniczkowych zwyczajnych, opisujących kształt rozwiązania w pobliżu krytycznej krzywej na płaszczyźnie X, t . Równania te otrzymuje się przez podstawienie do układu równań rozwiązania w postaci fali płaskiej, to znaczy funkcji zależnych tylko od jednej zmiennej $S = X - Ut$, gdzie U jest lokalną prędkością fali uderzeniowej /lokalnym nachyleniem krzywej krytycznej względem osi t /.

Otrzymane równania zwyczajne, z wyjątkiem pierwszego, można przez tworzenie odpowiednich ich kombinacji efektywnie scałkować. Decydujące znaczenie ma teraz założenie, że rozwiązania tego układu przechodzą w $S = \pm \infty$ asymptotycznie w rozwiązania stałe. W takim przypadku spełniony jest w nieskończoności warunek $\underline{B} \times \underline{v} = \underline{E}$ i od razu można pokazać, że całkowita zmiana rozwiązania spełnia warunki Hugoniot-Rankina. Jest to niewątpliwą zaletą układu /1/. Wątpliwość budzi jednak robione tu założenie o ustalaniu się rozwiązania. Jest ono naturalne z punktu widzenia fizycznego mechanizmu zjawiska, należy jednak stwierdzić, że równania /1/ obarczone są przybliżeniem, polegającym na zaniedbaniu w dwu miejscach prądu przesunięcia. Powstaje teraz zagadnienie zbadania zachowania się układu równań zwyczajnych, który powstaje z równania

$$-UE' = e^2 \underline{i}_x \times \underline{B}' + \alpha (\underline{B} \times \underline{v} - \underline{E})$$

przez wyrugowanie \underline{B} i \underline{v} z pozostałych scałkowanych równań. W zasadzie można tu ograniczyć się do dwu równań skalarnych, nie zajmując się równaniem dla \underline{E}_x , które nie sprzęga się z pozostałymi równaniami. Otrzymany problem jest typowy dla omawianych zjawisk. Na przykład C. Morawetz /1959/ otrzymuje przez założenie dyssypacji

za pośrednictwem tarcia dwu składników płynu /jonowego i elektro- nowego/ również układ dwu równań różniczkowych z osobliwymi warunkami granicznymi.

Nawiązując do geometrycznej teorii równań różniczkowych zwyczajnych, można stwierdzić, że poszukujemy rozwiązań układu dwu równań zwyczajnych wychodzących z punktu osobliwego i kończących się w punkcie osobliwym /pochodne znikają/ i że są to systemy autonomiczne, to znaczy nie zawierają zmiennej niezależnej. Rozpatrzmy za P. Laxem /1954/ analogon takiego zagadnienia w postaci jednego równania

$$l\dot{x}' = x(x-c) \quad c - \text{dodatnie}$$

Równanie to oprócz rozwiązań stałych $x=0$ i $x=c$ ma jeszcze rozwiązanie

$$x = \frac{c}{1+ae^{2s}} \quad a - \text{stała dodatnia, poza tym dowolna}$$

przechodzące od wartości C w $-\infty$ do wartości 0 w $+\infty$ /nie ma ono natomiast rozwiązania przechodzącego od wartości C do wartości zero/. Stała a odpowiada możliwości przesuwania naszego rozwiązania problemu granicznego wzdłuż osi S .

W przypadku dwu zmiennych zależnych należy oczekiwać z przesłanek natury fizycznej przejścia od punktu osobliwego niestabilnego do punktu stabilnego, przy czym punkt niestabilny, jak można przypuszczać, będzie punktem siodłowym. Dla ilustracji narysujemy kształt trajektorii w otoczeniu punktów osobliwych. Rozważamy tu układ dwu równań, który w postaci wektorowej zapiszemy, jak następuje:

$$\dot{x} = F(x), \quad /3/$$

przy czym w punkcie osobliwym $F(x) = 0$.

Przeprowadzono wstępne badania polegające na obliczaniu trajektorii między punktami osobliwymi metodą Rungego-Gilla.

Jako model przyjęto układ równań

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax & a & \text{dodatnie} \\ \dot{y} &= x(1-x^2) + bx & b & \text{ujemne} \end{aligned} \quad /4/$$

Układ ten ma w początku układu punkt siodłowy, a w punktach $(0, \pm 1)$ stabilne węzły lub ogniska, zależnie od wartości parametrów. Rzeczywiście równania charakterystyczne dla tych punktów mają postać

$$k^2 - bk - a = 0 \quad k^2 - bk + 2a = 0.$$

a zatem pierwszy z punktów jest punktem siodłowym, a pozostałe węzłowymi lub ogniskami, zależnie od znaku $b^2 - 8a$.

Badania wskazują, że:

1. Przy wyborze punktu startowego bardzo blisko punktu siodłowego proces liczenia znacznie się przedłuża.
2. Proces ten można istotnie skrócić przy zachowaniu dokładności przez wybór punktu początkowego w większej odległości, ale położonego w pierwszym przybliżeniu na asymptocie do trajektorii, określonej zależnością $x:y = A:k$.
3. Wybór kroku w granicach $0,01 - 1$ /przy wartościach parametrów $A = 1,3, B = -1, -2, -5, -6$ / nie powoduje naruszenia stabilności. Uzyskiwane dokładności w granicach odpowiednio 7 - 3 znaków dziesiętnych w całym zakresie całkowania; przy kroku 0,1 uzyskano już dokładności rzędu 10^{-6} .
4. Przez zmianę kierunku całkowania stwierdzono, że trudno jest powrócić w pobliże punktu siodłowego. Odchylenia rzędu 10^{-8} punktu początkowego powodowały odchylenia trajektorii od punktu siodłowego rzędu 10^{-3} /całkowanie z punktu na trajektorii przechodzącej przez punkt siodłowy $x = 0,019$, przy $a = 1, b = -2$ /. Poza tym całkowanie w przeciwnym kierunku okazało zadawalającą zgodność również w pobliżu ogniska.

Dla uzyskania przybliżeń rozwiązania w otoczeniu punktu osobliwego można korzystać z następującego typu rozwinięcia potęgowego. Niech dla ustalenia uwagi punkt osobliwy równania /3/ będzie określony, jak następuje:

$$x(\infty) = 0 \quad \text{i} \quad F(0) = 0$$

Wprowadzimy nową zmienną $s = \frac{1}{\lambda} \lg z$, gdzie λ jest stałą, którą należy jeszcze określić.

Załóżmy, że funkcja $F(x)$ ma rozwinięcie Taylora wokół punktu $x = 0$

$$F(x) = A^{(2)} \cdot x + A^{(3)}(xx) + \dots,$$

gdzie $A^{(n)}$ są tensorowymi współczynnikami rozwinięcia odpowiednio rzędu n , a wyrażenia typu XX przedstawiają iloczyny tensorowe; mnożenie dwu tensorów, zaznaczone kropką, jest iloczynem zwięzonym.

Rozwiązania poszukiwać będziemy w postaci szeregu potęgowego

$$X = X_1 z + X_2 z^2 + \dots$$

Podstawiając tak określone rozwinięcia do równania /3/, otrzymamy

$$X_1 + 2X_2 z + \dots = \frac{1}{2} (A^{(2)} \cdot (X_1 + X_2 z + \dots) + A^{(3)} \cdot z(X_1 + \dots) + \dots)$$

Porównanie współczynników daje

$$(I\lambda - A^{(2)}) \cdot X_1 = 0, \quad (2I\lambda - A^{(2)}) \cdot X_2 = A^{(3)} \cdot (X_1, X_1), \dots$$

Z pierwszego równania określamy parametr własny λ . Wektor X_1 jest określony z dokładnością do stałej mnożymy. Stała ta wchodzi w kolejno coraz wyższych potęgach do następnych współczynników rozwinięcia X . Jak można sprawdzić, odpowiada to przesuwaniu rozwiązania rozważanego problemu granicznego wzdłuż osi S /mnożeniu Z przez stałą C odpowiada dodawanie do S stałej $\frac{1}{\lambda} \lg C$.

Zastosowanie powyższego typu rozwinięcia do przykładu rozważanego układu równań /4/ dało zadawalające przybliżenia. W przypadku układu /4/ pozostają jedynie nieparzyste współczynniki rozwinięcia. Jako następne przybliżenie stosunku $\frac{x}{y}$ otrzymujemy

$$\frac{x}{y} \approx \frac{A}{2} (1+y^2) \frac{2A^3}{2^2(9\lambda^2 - 32B-A)}$$

Dla $a=1$, $b=-1$ otrzymujemy

$$\frac{x}{y} \approx 2,414 \cdot (1+3,9 \cdot y^2)$$

zgodnie z przebiegiem krzywej całkowitej.

Literatura

1. LAX P.: Weak Solutions of Nonlinear Hyperbolic Equations and Their Numerical Computation, Comm. Pure Appl. Math. 1954:7, 159.
2. RICHTMYER R.D.: Difference Methods for Initial Value Problems, Interscience Pub., 1957.

3. LEFSCHETZ S.: Differential Equations, Interscience Publ., 1957.
4. MORAWETZ C.: Magneto-Hydrodynamic Shock Structure Using Friction, New York Univ. Res. Rep. NYO-8677, 1959.
5. BOCHENEK K.: Discontinuous Flow of Plasma, referat na Sympozjum Teorii Elektromagnetycznej, Kopenhaga 1962.

ON SHOCK WAVE PROFILES AND EQUATIONS DESCRIBING THEM

Summary

The paper deals with equations of the form $X=f(X)$ with boundary conditions $X(-\infty)=X_1$ and $X(+\infty)=X_2$ where $f(X_{1,2})=0$; the above equations have been considered by Richtmyer, P. Lax and C. Morawetz. Boundary conditions are singular. The system of equations may be reduced by means of an effective integration to functional dependences of the character of the laws of conservation. One equation remains, in which the dissipation mechanism appears.

In principle, the problem cannot be reduced to a typical initial problem. Two ways of approach are suggested. The change of variables and the development into a series in the neighbourhood of the initial point, or the solution by using classical numerical methods. In that case, small perturbations of initial conditions might cause a transfer from the solution $X=0$ to the trajectory of the appropriate solution. Numerical solutions are examined in the neighbourhood of typical singular points.

O NUMERYCZNYM CAŁKOWANIU RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH
ZWYCZAJNYCH METODĄ RZĘDU WYŻSZEGO NIŻ RZĄD
REGULARNOŚCI ROZWIĄZANIA

Ryszard POGORZELSKI

Instytut Maszyn Matematycznych PAN

W pracy podano wzór na lokalny błąd obcięcia metody, przy numerycznym rozwiązywaniu równań różniczkowych zwyczajnych metodą rzędu wyższego niż rząd regularności rozwiązania, oraz przedstawiono pewne wyniki obliczeń, przeprowadzonych na maszynie ZAM-2.

Przy numerycznym rozwiązywaniu równań różniczkowych zwyczajnych postaci

$$\begin{aligned}y' &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0\end{aligned} \quad /1/$$

niejednokrotnie trudno jest stwierdzić a priori, czy funkcja $y=y(x, y_0)$ będąca rozwiązaniem równania /1/ jest dostatecznie regularna, aby równanie to rozwiązywać określoną metodą numeryczną. Może okazać się, że równanie /1/ rozwiązujemy metodą rzędu p , tzn., że lokalny błąd obcięcia metody jest proporcjonalny do $h^{p+1}y^{(p+1)}(\xi)$, gdzie h jest krokiem całkowania, ξ - punktem należącym do przedziału zmienności zmiennej, a funkcja $y(x, y_0)$ posiada tylko k pierwszych ciągłych pochodnych, przy czym $k \leq p$.

W związku z tym powstaje pytanie, jak w danym przypadku szacuje się błąd obcięcia określonej metody, oraz jak zachowuje się numeryczne rozwiązanie równania, otrzymane na maszynie cyfrowej.

Założmy, że równanie /1/ będziemy rozwiązywać przy pomocy następującego wzoru:

$$\alpha_r y_{n+r} + \alpha_{r-1} y_{n+r-1} + \dots + \alpha_0 y_n = h(\beta_r y'_{n+r} + \dots + \beta_0 y'_n), \quad /2/$$

gdzie α_m i β_m są współczynnikami rzeczywistymi, a y'_m są wartościami danej funkcji w punktach $X_m = X_0 + mh$, czyli

$$y'_m = f_m = f(X_m, Y_m).$$

Założmy, że wzór /2/ jest rzędu p , czy że współczynniki α_m i β_m spełniają następujące równania:

$$\sum_{m=0}^r \alpha_m = 0 \tag{3/}$$

$$\sum_{m=0}^r \left(\frac{m^{m^s}}{s!} - \frac{m^{m^{s-1}}}{(s-1)!} \right) = 0 \quad s=1, 2, \dots, p.$$

Ponadto założmy, że rozwiązanie równania /1/ posiada k pierwszych ciągłych pochodnych, gdzie $k \leq p$.

Korzystając ze wzoru Taylora możemy napisać:

$$y_{n+m} = \sum_{s=0}^{k-1} \frac{m^s}{s!} h^s y_n^{(s)} + \frac{m^k}{k!} h^k y^{(k)}(\xi_m) \tag{4/}$$

$$y'_{n+m} = \sum_{s=1}^{k-1} \frac{m^{s-1}}{(s-1)!} h^{s-1} y_n^{(s)} - \frac{m^{k-1}}{(k-1)!} h^{k-1} y^{(k)}(\eta_m),$$

gdzie punkty ξ_m i η_m leżą wewnątrz przedziału $(X_n, X_n + mh)$.

Wstawiając wyrażenia /4/ do równania /2/ oraz korzystając z równań /3/ mamy:

$$\sum_{m=0}^r \left[\alpha_m \sum_{s=0}^{k-1} \frac{m^s}{s!} h^s y_n^{(s)} + \alpha_m \frac{m^k}{k!} h^k y^{(k)}(\xi_m) + \right. \\ \left. - \beta_m \sum_{s=1}^{k-1} \frac{m^{s-1}}{(s-1)!} h^{s-1} y_n^{(s)} - \beta_m \frac{m^{k-1}}{(k-1)!} h^{k-1} y^{(k)}(\eta_m) \right] =$$

$$= y_n \sum_{m=0}^r \alpha_m + \sum_{s=1}^{k-1} \sum_{m=0}^r \left(\frac{\alpha_m m^s}{s!} - \frac{\beta_m m^{s-1}}{(s-1)!} \right) h^s y_n^{(s)} +$$

$$\begin{aligned}
& + h^k \sum_{m=0}^r \left[\frac{\alpha_m m^k}{k!} y^{(k)}(\xi_m) - \frac{\beta_m m^{k-1}}{(k-1)!} y^{(k)}(\eta_m) \right] - \\
& - h^k \sum_{m=0}^r \left[\frac{\alpha_m m^k}{k!} y^{(k)}(\xi_m) - \frac{\beta_m m^{k-1}}{(k-1)!} y^{(k)}(\eta_m) \right] - \\
& = h^k \sum_{m=0}^r \left(\frac{\alpha_m m^k}{k!} - \frac{\beta_m m^{k-1}}{(k-1)!} \right) y^{(k)}(\xi_m) + \\
& + h^k \sum_{m=0}^r \frac{\beta_m m^{k-1}}{(k-1)!} [y^{(k)}(\xi_m) - y^{(k)}(\eta_m)] = \\
& - \frac{h^k}{(k-1)!} \sum_{m=0}^r \beta_m m^{k-1} [y^{(k)}(\xi_m) - y^{(k)}(\eta_m)].
\end{aligned}$$

Zatem lokalny błąd obcięcia wzoru /2/ dla rozwiązania równania /1/ o rzędzie regularności k jest $O(h^k)$.

W konkretnym zadaniu oszacowanie to można przeprowadzić dokładniej, jeżeli wiadomo jakie właściwości posiada pochodna k -tego rzędu.

Podobne oszacowanie można przeprowadzić dla metody Rungego-Kutty.

Aby zbadać jak zachowuje się numeryczne rozwiązanie równania /1/, otrzymane metodą rzędu wyższego niż rząd regularności rozwiązania tego równania, w Biurze Programów i Zastosowań IMM przeprowadzono na maszynie ZAM-2 szereg obliczeń doświadczalnych. Między innymi rozwiązano następujące równania:

$$\dot{y}_1 = x^{\frac{1}{3}}$$

$$\dot{y}_2 = x^{\frac{2}{3}}$$

$$\dot{y}_3 = x^{\frac{2}{3}}$$

$$\dot{y}_4 = x^{\frac{10}{3}}$$

$$\dot{y}_5 = x^{\frac{13}{3}}$$

/5/

dla $-0,1 \leq x \leq 0,1$. Stałą całkowania dla wszystkich rozwiązań przyjęto równą 0.

Zauważmy, że dokładne rozwiązanie równania pierwszego posiada tylko pierwszą pochodną ciągłą, czyli dla pierwszego równania $k=1$. Dla drugiego równania $k=2$, dla trzeciego $k=3$ itd. Równania /5/ całkowano metodami następującymi:

1. metodą Rungego-Kutty-Gilla rzędu czwartego,
2. metodą ekstrapolacyjną Adamsa rzędu piątego,
3. metodą modyfikowaną Crane'a-Lamberta rzędu piątego.

Tablica 1 podaje wartość błędów rozwiązania numerycznego w otoczeniu punktu $x=0$ dla $h=0.01$ i dla $h=0.001$.

Tablica 1

k	Metoda Rungego		Metoda Adamsa		Metoda Crane'a	
	h = 0.01	h = 0.001	h = 0.001	h = 0.001	h = 0.01	h = 0.001
1	$1.2 \cdot 10^{-4}$	$5.2 \cdot 10^{-6}$	$1.1 \cdot 10^{-3}$	$5.3 \cdot 10^{-5}$	$3.5 \cdot 10^{-4}$	$1.6 \cdot 10^{-6}$
2	$1.2 \cdot 10^{-7}$	$2.4 \cdot 10^{-9}$	$2.1 \cdot 10^{-5}$	$9.5 \cdot 10^{-8}$	$3 \cdot 10^{-6}$	$1.8 \cdot 10^{-8}$
3	$6 \cdot 10^{-10}$	$3 \cdot 10^{-9}$	$1.5 \cdot 10^{-7}$	$3 \cdot 10^{-9}$	$1.8 \cdot 10^{-8}$	$1.3 \cdot 10^{-8}$
4	$4 \cdot 10^{-10}$	$3 \cdot 10^{-9}$	$8.4 \cdot 10^{-9}$	$2.9 \cdot 10^{-9}$	$1.9 \cdot 10^{-9}$	$7.3 \cdot 10^{-9}$
5	$2 \cdot 10^{-10}$	$3 \cdot 10^{-9}$	$7 \cdot 10^{-10}$	$2.4 \cdot 10^{-9}$	$1.7 \cdot 10^{-9}$	$7.8 \cdot 10^{-9}$

Z tabeli wynika, że najlepsze wyniki otrzymano metodą Rungego-Gilla, a najgorsze metodą Adamsa. Należy podkreślić, że obliczenia były wykonane w skali binarnej 2, w związku z czym liczby w ostatnim wierszu są przypadkowe, spowodowane błędami zaokrągleń.

ON NUMERICAL INTEGRATION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH NONCONTINUOUS
HIGHER DERIVATIVES OF THE SOLUTIONSummary

The paper deals with initial value problem for ordinary differential equation. The existence of first k continuous derivatives is assumed.

The truncation error is evaluated, when the difference method of order $p > k$ is applied to this problem. In addition, some results of experimental computations made on ZAM-2 computer are given.



Prace Instytutu Maszyn Matematycznych PAN - Ser. ALGORYTMY,
Zeszyt Specjalny N° 1, 1963

E R R A T A

str.	Wiersz		Jest	Powinno być
	od góry	od dołu		
30		15	$y(1) = C$	$y(1) = C$
31		5	$P^{**} = \frac{PC}{y(1)}$	$P^{**} = \frac{PC}{y(1)}$
32		3	$P^{**} = \frac{P_{\infty_0} 1}{[\infty_0 1 - y(1)]}$	$P^{**} = \frac{P_{\infty_0} 1}{[\infty_0 1 - y(1)]}$

Cena zł 45.—

BIBLIOTEKA GŁÓWNA
Politechniki Śląskiej

P 2223 | 63