Die

Festigkeitslehre

von

Ing. P. Beckers

Moritz Schäfer
Leipzig

Die Festigkeitslehre.

Lehrbuch zum Selbstunterricht

herausgegeben von

Hofrat Professor Dipl.-Ing. **Alfred Holzt,**
Oberstudiendirektor am Technikum Mittweida

bearbeitet von

Paul Beckers,
Ingenieur und Dozent am Technikum Mittweida.

Leipzig.
Verlag von Moritz Schäfer.

S.05

539.4

11241

Karl Prochaska's Druckerei-Agentur Erich Stolpe, Leipzig.

317 /57

VORWORT.

In vorliegendem Buche ist das unbedingt Notwendige aus dem Gebiete der Festigkeitslehre niedergelegt.

Die theoretischen Erörterungen sind unter Vermeidung höherer Rechnungen in knappem Rahmen durchgeführt worden.

Um Raum für Beispiele zu gewinnen, wurde von der Aufnahme irgend welcher Tabellen abgesehen. Es gibt genügend gute Formelsammlungen, welche man als Ergänzung zu diesem Buche benutzen kann; empfohlen sei: „Georg Dreyer, Formeln, Begriffserklärungen und Lehrsätze aus der reinen und angewandten Festigkeitslehre."

Wichtig ist es, daß man bei der endgültigen Festlegung der Resultate die „Dinormen" berücksichtigt. Die Grundlagen der Dinormen kann man deshalb bei der Erledigung von Aufgaben aus der Festigkeitslehre nicht mehr entbehren. Empfohlen sei: „Din-Taschenbuch 1, Grundnormen."

Daß dem Texte des Buches eine Aufgabensammlung angehängt worden ist, wird derjenige begrüßen, der sich mit Hilfe möglichst vieler durchgerechneter Zahlenbeispiele eine gewisse Sicherheit aneignen will.

Herrn Kollegen Ingenieur Köhler danke ich für seine wertvolle Mitarbeit bei der Durchsicht der Druckbogen.

Mit dem Wunsche, daß das Werk tatsächlich seinen Zweck erfüllen und beifällig aufgenommen werden möge, übergebe ich dasselbe der Öffentlichkeit.

Mittweida, im Mai 1927.

Paul Beckers.

Vorbemerkung.

Es ist praktisch schwer möglich eine scharfe Grenze zu ziehen zwischen „schmiedbarem Eisen“ und „Stahl“. Deshalb wurde durch den deutschen *Normenausschuß* eine Bezeichnungsänderung durchgeführt; alles im flüssigen Zustand gewonnene Eisen heißt unabhängig von seinen Festigkeitseigenschaften Flußstahl und der heutige normale Baustoff im Hoch- und Brückenbau heißt St 37 (gesprochen Stahl 37) mit $37 \div 44 \frac{kg}{mm^2}$ Bruchfestigkeit und mindestens 20 Prozent Bruchdehnung. Der im teigigen Zustand gewonnene Stahl wird als Schweiß- oder Puddelstahl bezeichnet. Der letztere ist nicht genormt. Sollen genauere Werkstoffangaben gemacht werden, so ist die Angabe „Flußstahl“ durch die Markenbezeichnung nach Din 1600 zu ergänzen.

Der Großbrückenbau kommt indessen mit diesem Baustoff St 37 nicht aus, da mit wachsender Spannweite die Eigengewichte ins Unmögliche wachsen und bedarf eines Stoffes von größerer Festigkeit. Dieses ist der sogenannte hochwertige Baustahl St 48 mit $48 \div 58 \frac{kg}{mm^2}$ Bruchfestigkeit und mindestens 18 Prozent Bruchdehnung. Dieser Stahl ist zwar teuerer als St 37, bringt aber durchschnittlich 17 Prozent Gewichts- und 11 Prozent Kostenersparnis.

In neuerer Zeit ist ein Stahl entstanden, der den St 48 möglicherweise zu Fall bringt; es ist ein Siliziumstahl mit $0{,}8 \div 1{,}5$ Prozent Siliziumgehalt, $48 \div 58 \frac{kg}{mm^2}$ Bruchfestigkeit und mindestens 22 Prozent Bruchdehnung. Während die Streckgrenze des St 48 mindestens 29 ist, hat dieser Si-Stahl eine Streckgrenze von mindestens 36. Gegen St 48 hat also der Si-Stahl eine erheblich größere Streckgrenze und nach heutigen Anschauungen ist diese und nicht die Bruchfestigkeit für die Güte und die zulässige Beanspruchung maßgebend. Dieser neue Stahl verspricht eine durchschnittliche Gewichtsersparnis gegenüber St 37 von 23 Prozent und eine Kostenersparnis von 16 Prozent. Die Bearbeitungsfähigkeit des Si-Stahles soll besser sein als diejenige des St 48.

Der ausübende Ingenieur braucht die Festigkeitslehre in ihren Endergebnissen zur Vorausbestimmung oder Nachprüfung der Abmessungen seiner Maschinen und Bauwerke in bezug auf genügende Festigkeit ihrer Teile; er braucht also auch Angaben über die Leistungsfähigkeit der verwendeten oder

zu verwendenden Baustoffe. Es ist deshalb durch die ***Werkstoffnormen*** ein fester Halt geschaffen worden, welcher zur Erleichterung des Verkehrs zwischen Herstellern und Verbrauchern dienen, und sowohl letzteren wie ersteren eine knappe Zusammenstellung der zweckdienlichen und notwendigen Erfordernisse an das gesamte Material an die Hand geben soll. Es ist beabsichtigt dabei einerseits der Ausführung mangelhafter Lieferungen, anderseits aber auch einseitigen und übertriebenen Ansprüchen vorzubeugen.

I. Die Grundbegriffe.

Während man in der Mechanik die Körper als starr ansieht und nur das gegenseitige Verhalten der äußeren Kräfte untersucht, befaßt man sich in der Elastizitäts- und Festigkeitslehre mit der Formänderung und der Beanspruchung, die der Baustoff durch die Einwirkung äußerer Kräfte erfährt. Jeder Baustoff erleidet unter dem Einfluß irgend welcher äußeren Kräfte eine Formänderung, die nach dem Aufhören der Einwirkung ganz oder teilweise wieder verschwindet. Der Körper ist elastisch. Feste Körper setzen den auf sie einwirkenden äußeren Kräften einen von deren Größe abhängigen inneren Widerstand entgegen, dessen Ursache die Zusammenhangskraft der Moleküle ist; das Maß für die Größe der Molekular-Zusammenhangskraft ist die Festigkeit.

Fangen äußere Kräfte an auf einen Körper einzuwirken, so werden im Innern desselben Gegenkräfte wach, welche mit den äußeren Kräften einen Gleichgewichtszustand herbeizuführen suchen. Die hierdurch bedingte gleichzeitig auftretende Formänderung ergibt eine Verschiebung der Moleküle des Körpers, da letztere gezwungen werden eine neue Gleichgewichtslage einzunehmen. Durch diese Verschiebung der kleinsten Teilchen werden die zwischen denselben herrschenden Kohäsionskräfte in bezug auf ihre Größe geändert, weil die Abstände zwischen den Molekülen geändert werden. Diese im Innern des Körpers auftretende Kräfteveränderung, die sich der Beanspruchung durch die äußeren Kräfte anpaßt und ihr das Gleichgewicht hält, ruft im Innern des Körpers einen Spannungszustand hervor.

Erreichen diese inneren Kräfte eine solche Größe, daß die Grenze überschritten wird, über welche hinaus der Körper jene Kräfte nicht mehr hervorzubringen imstande ist, so tritt eine Zerstörung des Zusammenhanges und damit des Körpers ein.

Die Festigkeitslehre hat nun die Aufgabe zu untersuchen, welche Abhängigkeiten bestehen zwischen dem oben erwähnten charakteristischen Grenzzustand und der Beschaffenheit, den Eigenschaften und der geometrischen Gestalt des Baustoffes, ferner Hilfsmittel für die Bemessung von Körpern zu liefern, die durch bekannte Kräfte beansprucht sind und so gestaltet werden müssen, daß die Festigkeit ausreicht und die Formänderung unschädlich ist.

Längenveränderungen und Normalspannungen.

Ein Probestab von 20 mm Durchmesser und 200 mm eigentlicher Meßlänge (nähere Abmessungen s. *Abb. 1*), aus dem vollen Material heraus-

gedreht, wird in eine Prüfungsmaschine eingespannt. Setzt man diesen Stab einer von Null anwachsenden allmählich größer werdenden Belastung aus,

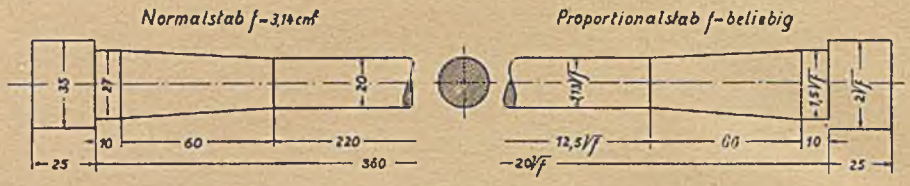


Abb. 1.

so zeigt eine sorgfältige Messung am belasteten Stab eine Vergrößerung der ursprünglichen Meßlänge l; sie sei auf l_1 mm gewachsen. Die Zunahme der Länge beträgt also $(l_1 - l)$ mm. Man ist übereingekommen, die auf die ursprüngliche Länge bezogene Verlängerung als „bezogene Längenänderung" oder Dehnung zu bezeichnen:

$$\varepsilon = \frac{l_1 - l}{l}.$$

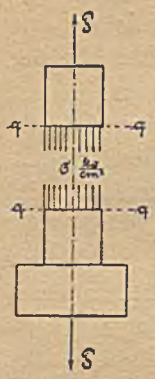


Abb. 2.

Die ***Dehnung*** ε ist also eine Verhältniszahl und hat infolgedessen keine Benennung oder Dimension. Der eingespannte Probestab wurde genau in der Richtung seiner Längsachse belastet, und wir dürfen annehmen, daß alle Fasern des Stabes gleichmäßig an der Kraftübertragung teilgenommen haben. Die äußere Kraft wirkte in unserem Falle so auf den Stab ein, daß die im Innern desselben auftretenden Spannungen senkrecht zu einer Querschnittsebene gerichtet waren; man bezeichnet derartige Spannungen als ***Normalspannungen*** *(Abb. 2)*.

Spannung und Formänderung.

Die in jeder Querschnittseinheit (1 cm²) von der Festigkeit des Baustoffes zu leistende innere Kraft nennt man Spannung. Da die Einheit der Kraft ein Kilogramm ist, so wird die Einheit der Spannung $1 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$.

Bezeichnet man mit F in cm² den Querschnitt und mit P in kg die angreifende äußere Kraft, so wird bei der Belastungsart des eingespannten, auf Zug beanspruchten Stabes dessen Spannung

$$\sigma = \frac{P}{F} \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}.$$

Trägt man die Dehnungen des Stabes als Abszissen, die Spannungen (Belastungen) als Ordinaten *(Abb. 3)* auf, so ergibt sich zunächst Proportionalität zwischen Dehnung und Spannung bis zum Punkt P (Proportionalitätsgrenze). Dann wächst die Dehnung schneller als die Spannung. Die Spannungsdehnungskurve verläuft bis zur ***Proportionalitätsgrenze*** P mit der zugehörigen Spannung σ_P geradlinig; bei wachsender Belastung geht sie in leichter Krümmung bis S. Die Spannung σ_S, bei welcher das

Strecken oder Fließen beginnt, heißt ***Streck- oder Fließgrenze.*** Das Material streckt sich jetzt stark ohne Belastungssteigerung. Bei B erreicht die Belastung den Höchstwert. Die zugehörige Spannung ist σ_B. Dividiert man die Höchstbelastung durch den ursprünglichen Querschnitt, so ergibt sich die ***Zug- oder Zerreißfestigkeit.***

Als Zugfestigkeit K_z bezeichnet man gewöhnlich die Spannung σ_B, welche dem Punkte B entspricht; das ist also der größte Wert, bis zu dem die Spannung vor Eintritt des Bruches gesteigert werden mußte.

Wenn die Länge des Stabes nach dem Bruche mit l_B bezeichnet wird, so ist $l_B - l$ die Verlängerung, die der Stab bis zum Eintreten des Bruches erfahren hatte und somit die Bruchdehnung in Hundertteilen der ursprünglichen Meßlänge

$$\delta = 100 . \frac{l_B - l}{l} \%.$$

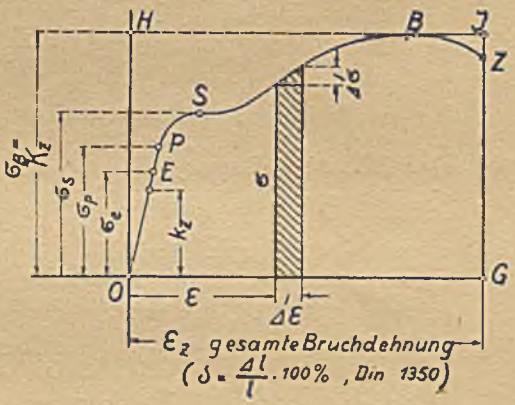


Abb. 3.

Zu erwähnen ist noch die ***Elastizitätsgrenze;*** diese ist dann erreicht, wenn die Verschiebung der Moleküle des beanspruchten Körpers nach der Entfernung der äußeren Kraft nicht mehr restlos zurückgeht. Die Elastizitätsgrenze ist also die Belastungsgrenze, bis zu welcher die Formänderung eines Körpers getrieben werden kann, ohne daß diese Formänderung in praktisch unzulässig hohem Maße dauernd wird. Man setzt als Elastizitätsgrenze diejenige Spannung fest, bei der die bleibende Dehnung 0,02% der Meßlänge erreicht.

Beziehungen zwischen Spannungen und Formänderungen.

Dividiert man die Dehnung ε durch die zugehörige Spannung σ, so erhält man die Verhältnisziffer α

$$\alpha = \frac{\varepsilon}{\sigma} \frac{cm^2}{kg}$$ Dehnungszahl, (elastische) Dehnbarkeit.

Dieses sogenannte ***Geradliniengesetz*** von Hooke

$$\varepsilon = \alpha . \sigma$$

gilt für manche Baustoffe, solange die Belastungen in mäßigen Grenzen bleiben.

Es ist ein Baustoff dem Hookeschen Gesetz unterworfen, wenn das Verhältnis zwischen Dehnung und Spannung für alle Belastungen innerhalb der Proportionalitätsgrenze unverändert bleibt. Das Hookesche Gesetz gilt nur für Schmiedeeisen und Stahl. Man nennt es das Geradliniengesetz, weil seine Schaulinie im Spannungs-Dehnungsdiagramm eine Gerade ist.

Bei den meisten Baustoffen nimmt die Dehnung im allgemeinen schneller zu als die sie erzeugende Spannung.

Das ***Bach-Schülesche Potenzgesetz*** ist der Ausdruck für dieses Verhalten; es lautet:

$$\varepsilon = \alpha \cdot \sigma^n.$$

Man erkennt, daß das Hookesche Gesetz ein Sonderfall des umfassenderen Potenzgesetzes von Bach und Schüle ist. Für $n = 1$ tritt der Fall ein, daß aus dem Potenzgesetz das Hookesche Gesetz entsteht.

Wählt man die Spannung $\sigma = 1 \frac{kg}{cm^2}$, so wird α gleichbedeutend mit der Dehnung ε. Man nennt α die ***Dehnungszahl.*** Es ist die Dehnung, die ein Stab bei der Spannung $\sigma = 1 \frac{kg}{cm^2}$ erfährt.

$$\text{Dehnungszahl} = \frac{\text{Dehnung}}{\text{Spannung}}$$

Das ***Elastizitätsmaß*** E ist der reziproke Wert der Dehnungszahl α, folglich ist auch die Benennung des Elastizitätsmaßes E derjenigen der Dehnungszahl α reziprok, nämlich $\frac{kg}{cm^2}$.

Man rechnet lieber mit E, weil naturgemäß die Dehnungszahl α immer eine sehr kleine Zahl sein wird $\left(\frac{1}{2\,000\,000} \text{ für Schweißeisen}\right)$.

Der eingespannte, auf Zug beanspruchte Probestab erfährt aber nicht nur eine Längenänderung, sondern man kann auch gleichzeitig eine Abnahme des Stabdurchmessers feststellen. Der ursprüngliche Durchmesser d geht in den verringerten Durchmesser d_1 über.

Will man die verhältnismäßige Formänderung ε_q quer zur Stabachse haben, so ist die ganze Formänderung $d - d_1$ wieder auf die ursprüngliche Dicke d zu beziehen; man erhält die ***Querzusammenziehung***

$$\varepsilon_q = \frac{d - d_1}{d}$$

Querkürzung (lineare Querzusammenziehung, bezogene Querkürzung).

Das Verhältnis zwischen Dehnung und Querzusammenziehung ist vom Baustoff abhängig und wird ausgedrückt durch die sogenannte Poissonsche Zahl:

$$\textbf{\textit{Längsdehnungsverhältnis}}\ m = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_q} = \frac{\text{bezogene Längenänderung}}{\text{Querkürzung}},$$

die Größe von m ist für Metalle $= \frac{10}{3}$.

Wenn man die Formänderung des Stabes im Querschnitt in Hundertteilen des ursprünglichen Querschnittes zum Ausdruck bringen will, so setzt man

$$\psi = 100 \frac{F - F_1}{F} \%,$$

ψ nennt man die Einschnürung. F und F_1 sind die zu den Durchmessern d und d_1 gehörigen Flächeninhalte.

In vielen Fällen ist es von Bedeutung, die Verteilung der Spannungen über den Querschnitt bildlich darstellen zu können.

Trägt man über jeden Punkt des Querschnittes die Spannung als Strecke senkrecht zum Querschnitt auf, so ist in dem uns vorliegenden Falle des auf Zug beanspruchten Stabes der Spannungskörper ein Prisma. Der Inhalt des Spannungskörpers stellt die innere Kraft dar, welche der äußeren Kraft das Gleichgewicht hält *(Abb. 4)*.

Legt man senkrecht zum Querschnitt eine Ebene durch den Spannungskörper, so entsteht als Schnittfigur ein Rechteck von der Höhe σ, das Spannungsdiagramm *(Abb. 4 a)*.

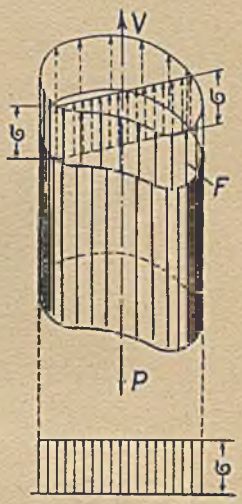


Abb. 4 u. 4 *a*.

Die Härteprüfung. Die Härte wird meist mit Hilfe der Kugeldruckprobe von Brinell bestimmt. Eine Kugel von 10 mm Durchmesser aus gehärtetem Stahl bestehend, wird mit bestimmter Belastung (2000 kg für härtere, 500 kg für weichere Stoffe) in die Oberfläche des Probestückes eingedrückt. Das Verhältnis: Belastung in kg zur eingedrückten Kalottenfläche in mm² ist die Härtezahl H.

$$\text{Brinellhärte } H = \frac{\text{Belastung}}{\text{Kalottenfläche des Eindrucks}}.$$

Man kann auch mit Hilfe des Skleroskops die Rückprallhöhe einer gehärteten Stahlkugel messen und die Härte der Probe nach der Höhe des Rücksprunges beurteilen.

Der Schlagversuch. Zur Ermittlung des Verhaltens gegen Stoß dient der Schlagversuch. Ein Pendelhammer fällt aus bestimmter Höhe auf das ganz aufliegende oder auf zwei Stützen gelagerte Probestück. Man bestimmt die zum Zerschlagen des Stückes erforderliche Schlagarbeit.

Arten der Festigkeit.

1. Die Zugfestigkeit.

Ein Körper wird auf Zugfestigkeit in Anspruch genommen, wenn er an einem Ende fest eingespannt wird und am anderen Ende eine in der Mittellinie des Körpers wirkende Zugkraft tätig ist, welche ihn zu verlängern oder zu zerreißen sucht *(Abb. 5)*. Die Wirkung auf den Körper ist dann genau dieselbe, als wenn zwei gleichgroße, entgegengesetzt gerichtete Kräfte (da wir uns seine Einspannung durch eine Gegenkraft ersetzt denken können) in der Körperachse wirken *(Abb. 6)*.

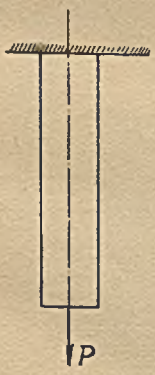


Abb. 5.

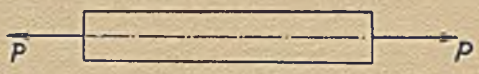


Abb. 6.

2. Die Druckfestigkeit.

Die gleichgroßen, entgegengesetzt gerichteten Kräfte wirken in der Stabachse senkrecht zu den Querschnitten und suchen den Stab zusammenzudrücken *(Abb. 7* und *8)*.

Abb. 7.

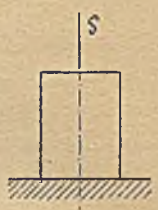


Abb. 8.

3. Die Scher- oder Schubfestigkeit.

Die zwei entgegengesetzt gerichteten gleichgroßen Kräfte (die Einspannung darf wieder durch eine Gegenkraft ersetzt werden) wirken senk-

Abb. 9.

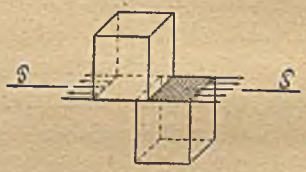


Abb. 10.

recht zur Stabachse und in der Ebene des betrachteten Querschnittes *(Abb. 9* und *10)*, und suchen den Stab in diesem Querschnitt abzuschneiden.

4. Die Biegungsfestigkeit.

Greifen die soeben erwähnten gleichgroßen aber entgegengesetzt gerichteten Kräfte nicht in der Ebene ein und desselben Querschnittes an, haben sie also nicht dieselbe Wirkungslinie, so bilden sie ein sogenanntes Kräfte-

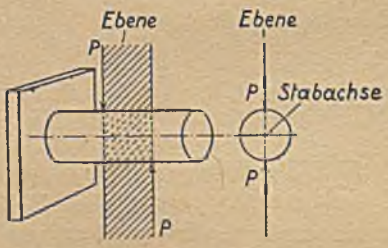


Abb. 11.

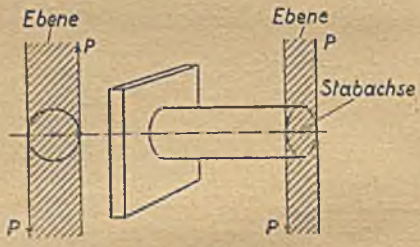


Abb. 12.

paar. Denken wir uns eine Ebene, die durch die beiden Kraftrichtungen geht, so ist der Stab auf Biegung beansprucht, wenn er eine Stabachse besitzt, die in diese Ebene fällt *(Abb. 11)*.

5. Die Drehfestigkeit.

Der Stab ist auf Verdrehen beansprucht, wenn die Stabachse senkrecht zu dieser Ebene steht *(Abb. 12)*.

6. Die Knickfestigkeit.

Wenn in der Stabachse gleichgroße, entgegengesetzt gerichtete Kräfte tätig sind, welche den Stab zusammenzudrücken suchen, wobei gleichzeitig ein seitliches Ausbiegen des Körpers stattfindet, weil er im Verhältnis zu seinen Querschnittsabmessungen sehr lang ist, so wird er bei genügend großen Kräften ausknicken *(Abb. 13)*.

Abb. 13.

7. Zusammengesetzte Festigkeit.

Wenn mehr als eine der oben erwähnten Beanspruchsarten auf den Körper einwirken, so sagt man, er ist auf zusammengesetzte Festigkeit beansprucht. Am häufigsten treten zusammen auf: Zug bezw. Druck und Biegung; Zug bezw. Druck und Verdrehung; Verdrehung und Biegung usw.

II. Formänderung und zulässige Spannung.

Jedes Material erfährt unter einer Belastung eine Formänderung. Ein gezogener Stab verlängert sich. Eine gedrückte Platte wird dünner. Diese Formänderung kann eine elastische sein — sie verschwindet, wenn man die Kraftwirkung aufhebt entweder sofort oder doch nach einiger Zeit. Sie kann eine bleibende sein — sie geht nicht zurück, wenn die Kraftwirkung aufhört. Sie kann sich drittens zusammensetzen aus einer bleibenden und einer elastischen Formänderung — sie geht nur teilweise zurück.

An fertigen Konstruktionen sollen bleibende Formänderungen nicht vorkommen. Elastische Formänderungen hingegen sind innerhalb gewisser Grenzen unschädlich. In welchem Maße man sie als zulässig erachten darf, hängt von dem Gebrauchszwecke der betreffenden Konstruktion ab. Dient z. B. eine an beiden Enden aufliegende Traverse zur Führung eines Schneidwerkzeugs, beispielsweise eines Messerschlittens, und wird verlangt, daß die Schnittlinie möglichst wenig von einer Horizontalen abweicht *(Abb. 14)*, so

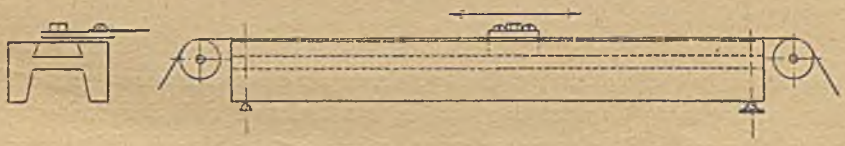


Abb. 14.

muß man bei der Querschnittsbemessung der Traverse untersuchen, ob die elastische Verbiegung nicht größer als zulässig wird. Auch kann es vorkommen, daß auf Werkzeugmaschinen zu bearbeitende Stücke infolge ihrer Ausbiegung eine Form bekommen, die erheblich von der beabsichtigten abweicht.

Alle auf Maschinen- und Baukonstruktionsteile einwirkenden Kräfte oder Belastungen dürfen diese nie so weitgehend beanspruchen, daß die hierbei auftretenden Spannungen die Elastizitätsgrenze des Baustoffes erreichen oder gar überschreiten, da alsdann eine ***bleibende Formänderung*** die un-

vermeidliche Folge ist. Das Material eines Konstruktionsteiles, welcher seine Form bleibend verändert hat, besitzt seine ursprünglichen Eigenschaften nicht mehr; es ist bereits als teilweise zerstört zu betrachten.

Die Grenze, bis zu der eine gefahrlose Belastung möglich ist, heißt *zulässige Spannung.*

Maßgebend für die Wahl der Größe der zulässigen Beanspruchung eines Materials sind folgende drei Belastungsfälle.

I. Die Belastung ist dauernd eine ruhende, unveränderliche. Hierbei kann dem Material die höchste zulässige Beanspruchung zugemutet werden.

II. Die Belastung wechselt fortgesetzt ihre Größe zwischen den Grenzen Null und einem bestimmten Höchstwert derart, daß die hierbei auftretenden Spannungen von Null bis zu einem größten Werte zunehmen, um dann wieder bis zur vollkommenen Entlastung abzunehmen.

Dieser Fall tritt ein bei Seilen, Ketten, Lasthaken, Laufkranträgern u. a. m.

Die zulässige Beanspruchung beträgt nur $^2/_3$ des Falles I.

III. Die Belastung wechselt in häufiger Folge zwischen zwei gleichgroßen Werten entgegengesetzter Richtung.

Es ist $P_{max} = + P$ bezw. $- P$.

Als Beispiel könnte man ein Zahnrad anführen, welches regelmäßig in schneller Folge seine Umlaufrichtung ändert.

Die zulässige Beanspruchung beträgt in diesem Falle nur $^1/_3$ derjenigen des Belastungsfalles I.

Die zulässige Spannung, d. i. der höchste Wert, den die Spannung σ bei dauerhaften Konstruktionen noch annehmen darf, bezeichnet man mit k. Es ist also die Bruchspannung K ein Vielfaches der zulässigen Spannung k. Den Quotienten $\frac{K}{k}$ nennen wir den *Sicherheitsgrad* gegen Bruch S.

$$S = \frac{K}{k}$$

$$k = \frac{K}{S}$$

Die Höhe des Sicherheitsgrades wählt man im Maschinenbau außerordentlich verschieden. Bei Teilen, deren Brechen schwerwiegende Folgen hat, und deren Verstärkung weder konstruktive Schwierigkeiten macht, noch übergroße Mehrkosten erfordert, wird man die Sicherheit höher wählen. Manchmal wählt man den Sicherheitsgrad außerordentlich hoch, nämlich dann, wenn in einer Rechnung zum Zwecke der Vereinfachung der aufzustellenden Gleichungen äußere Kräfte vernachlässigt wurden. Man sucht alsdann durch Einsetzen eines hohen Sicherheitsgrades die gemachten Vernachlässigungen unschädlich zu machen.

Im allgemeinen bestimmt man im Maschinenbau die in die Festigkeitsrechnungen einzusetzenden Beanspruchungen nicht aus den Fließgrenzenzahlen und dem Sicherheitsgrad. Man arbeitet vielmehr mit den zulässigen Beanspruchungen. Es ist demnach in den meisten Fällen nicht vorgeschrieben,

daß hier mit zehnfacher, dort mit sechsfacher Sicherheit zu rechnen ist; es ist vielmehr festgelegt, daß eine Beanspruchung von beispielsweise $900 \frac{kg}{cm^2}$ bis $1000 \frac{kg}{cm^2}$ zugelassen wird.

III. Zug- und Druckfestigkeit.

Ist F der erforderliche Querschnitt in cm^2, P die angreifende Kraft in kg, so ist

$$\text{für Zug } F \geqq \frac{P}{k_z}, \text{ für Druck } F \geqq \frac{P}{k};$$

hierin bedeutet k_z die zulässige Beanspruchung auf Zug, k die zulässige Beanspruchung auf Druck.

Bei der Berechnung von Konstruktionsteilen auf Zug- oder Druckfestigkeit hat man zu unterscheiden die Rechnungen, bei denen das Eigengewicht des belasteten Körpers vernachlässigt werden kann, und jene Rechnungen, bei welchen das Eigengewicht berücksichtigt werden muß.

Durch die *Normung* der Maschinenteile wird meist eine Abweichung bestehen zwischen dem auszuführenden und dem rechnerisch erforderlichen Querschnitt. Selbstverständlich muß der Ausführungsquerschnitt größer oder wenigstens niemals kleiner sein als der rechnerische.

Wenn es aus irgend einem Grunde nicht angängig ist, den auf Zug oder Druck beanspruchten Körper überall mit demselben Querschnitt auszuführen, so muß stets der kleinste vorkommende Querschnitt zur Untersuchung der Spannungen herangezogen werden; man nennt ihn den ***gefährlichen Querschnitt.***

Ist beispielsweise eine Stange durch Gewinde an einen anderen Teil angeschlossen, so ist für die Berechnung des Stangendurchmessers der notwendige Kernquerschnitt des Gewindes maßgebend.

Es sei bemerkt, daß für manche Maschinenteile nicht die Zug-, sondern die ***Schwingungsfestigkeit*** maßgebend ist. Hierunter versteht man den Widerstand des Baustoffes gegen regelmäßig auftretende wechselnde Belastungen, wie sie z. B. bei Befestigungsschrauben an regelmäßigen Stößen unterworfenen Maschinen vorkommen. In solchen Fällen ist es angebracht, einen niedrigen Wert der zulässigen Spannung zu wählen. Die Gefahr des Schwingungsbruches infolge ungleichmäßiger Spannungsverteilung kann man durch Einschalten einer federnden Unterlage mildern.

Im Materialprüfungswesen arbeitet man mit den Begriffen Traglänge und Reißlänge.

Traglänge ist diejenige Länge des gezogenen, lotrecht hängenden Stabes, bei welcher sein oberster Querschnitt schon durch das Eigengewicht allein bis zur zulässigen Spannung ausgenutzt wird.

Reißlänge ist diejenige Länge, bei welcher in dem obersten Querschnitt schon durch das Eigengewicht allein der Bruch durch Zerreißen hervorgerufen wird.

Spricht man von einem Körper gleichen Widerstandes gegen Zug oder Druck, so meint man einen solchen, dessen Spannung in allen Querschnitten gleich der zulässigen ist. Körper vollkommen gleicher Zug- oder Druckfestigkeit führt man wegen der Herstellungsschwierigkeiten im allgemeinen nicht aus, weil ihr Längenprofil von Kurven begrenzt sein müßte. Man ersetzt deshalb die theoretische Körperform durch stufenförmige geradlinige Umhüllung *(Abb. 15* und *16)*.

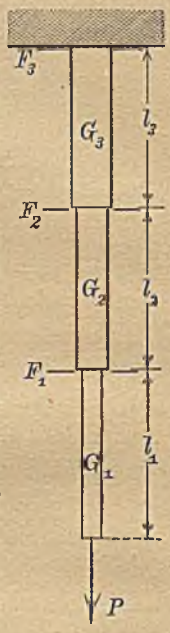


Abb. 16.

Bei Befestigungsschrauben muß man mit der Wahl der zulässigen Inanspruchnahme besonders vorsichtig sein, weil diese Schrauben stets fest angezogen werden müssen und schon hierdurch auf Zug beansprucht sind, allerdings durch eine Kraft, deren Größe sich zahlenmäßig nicht in Rechnung stellen läßt.

Abb. 15.

Handelt es sich um die Berechnung einer gußeisernen Säule mit Fußplatte *(Abb. 17)*, die auf dem Fundament steht, so ist zu beachten, daß sich die Rechnung nicht nur auf die Bemessung des Säulenquerschnittes erstrecken muß, sondern auch auf die Bemessung der Fußplatte unter Zugrundelegung der zulässigen Druckbeanspruchung für das Mauerwerk.

1. ***Beispiel:*** Der Preßkopf einer hydraulischen Presse von $d = 30$ cm Plungerdurchmesser und $p_0 = 50$ atm. Wasserdruck, soll durch $n = 4$ Bes-

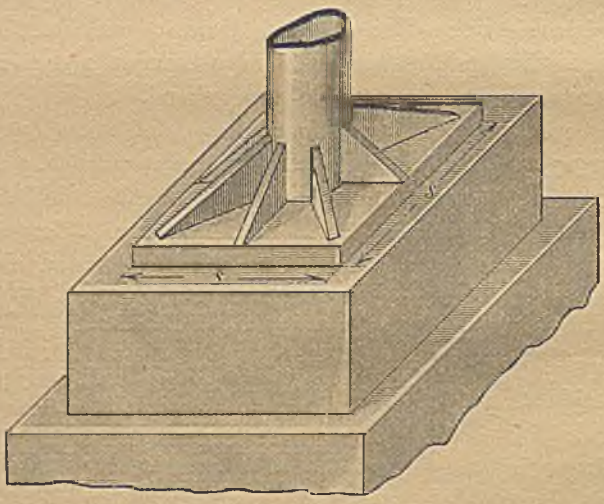


Abb. 17.

semerstahl-Säulen getragen werden. Welchen Durchmesser δ erhalten die Stangen bei einer zulässigen Beanspruchung von $k_z = 800 \frac{kg}{cm^2}$ *(Abb. 18)*.

Lösung: Es ist der Druck auf den Plunger und gleichzeitig die gesamte Zugkraft für alle vier Säulen:

$$P = \frac{d^2 \pi}{4} \cdot p_a = \frac{30^2 \pi}{4} \cdot 50 = 35\,350 \text{ kg},$$

mithin die Zugkraft in einer Säule:

$$P_1 = \frac{P}{n} = \frac{35\,350}{4} = 8838 \text{ kg}.$$

Es muß die Gleichung der Zugfestigkeit bestehen:

$$\frac{\delta^2 \pi}{4} \cdot k_z = P_1$$

$$\frac{\delta^2 \pi}{4} \cdot 800 = 8838$$

$$\frac{\delta^2 \pi}{4} = 11{,}05 \text{ cm}^2$$

$$\delta = 3{,}76 \text{ cm}.$$

Wir wählen einen Säulendurchmesser von 40 mm.

Es wird alsdann die wirkliche Zugspannung:

$$\sigma_z = \frac{P_1}{\frac{\delta^2 \pi}{4}} = \frac{8838}{\frac{4^2 \cdot \pi}{4}} =$$

$$= 703 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} < 800 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}.$$

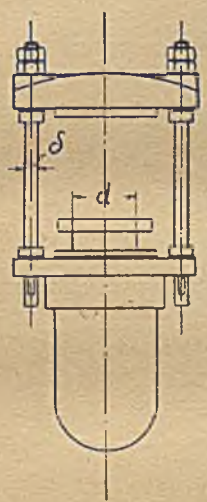


Abb. 18.

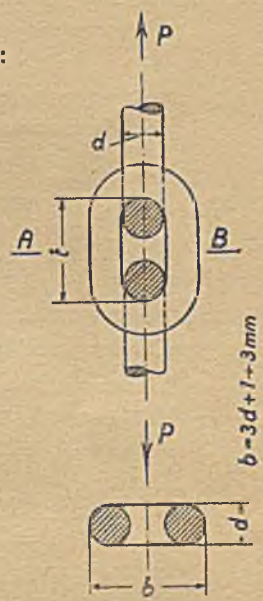


Abb. 19.

2. *Beispiel:* Bei welcher Belastung P_B würde eine schmiedeeiserne Stange von 3,1416 cm² Querschnitt reißen, wenn die Bruchspannung K_z des Materials $= 3600 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ beträgt.

Lösung: $P_B = f \cdot K_z = 3{,}1416 \cdot 3600 = 11\,310$ kg.

3. *Beispiel:* Welche Eisenstärke d muß eine Gliederkette erhalten, wenn sie durch eine Maximallast von 1000 kg beansprucht wird *(Abb. 19)*.

Lösung: $P = 2 \cdot \frac{d^2 \pi}{4} \cdot k_z$. Baustoff zähes, weiches Schweißeisen, Bruchspannung $K_z = 3600 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$, Belastungsfall II, Sicherheitsgrad $S = 4$.

$$k_z = \frac{2}{3} \frac{K_z}{S} = \frac{2}{3} \frac{3600}{4} = 600 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}; \quad \frac{d^2 \pi}{4} = \frac{P}{2\, k_z} = \frac{1000}{2 \cdot 600} = 0{,}833 \text{ cm}^2;$$

$d = 1{,}03$ cm.

Nach Din 671 wählen wir eine Kettenstärke $d = 11$ mm.

Bezeichnung: Kette 11 Din 671.

4. *Beispiel:* Ein Dampfkessel von $G = 12\,500$ kg Eigengewicht und $W = 9300$ Liter Wasserinhalt soll auf $n = 3$ gußeisernen Füßen einge-

mauert werden. Wir nehmen an, daß die Füße, die auf Ziegelmauerwerk in Zementmörtel zu stehen kommen, das gesamte Gewicht zu tragen haben. Der Entwurf der Füße liegt vor *(Abb. 20* und *21)*. Es soll untersucht werden, wie groß die Materialbeanspruchung des Fußes

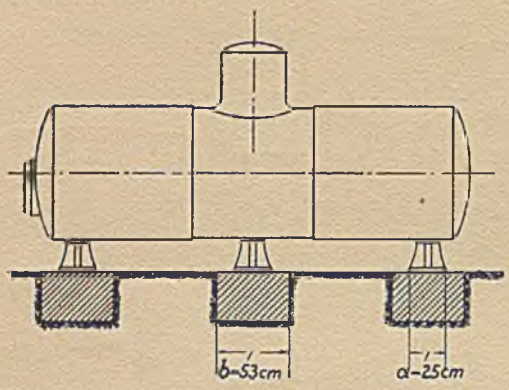


Abb. 20.

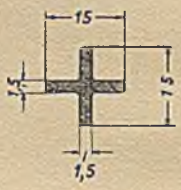


Abb. 21.

auf Druck wird und welche Druckbeanspruchung das Mauerwerk im Zementmörtel auszuhalten hat.

Lösung: Das Gesamtgewicht $Q = G + W = 12\,500 + 9300 = 21\,800$ kg.

Auf jeden Fuß kommen $\frac{Q}{n} = \frac{21\,800}{3} = 7270$ kg $= P$.

Die Fläche des kreuzförmigen Fußquerschnittes:

$$f = 15 \,.\, 1{,}5 + (15 - 1{,}5) \,.\, 1{,}5 = 42{,}75 \text{ cm}^2.$$

Die Materialspannung auf Druck im Fuße selbst:

$$k = \frac{P}{f} = \frac{7270}{42{,}75} = 170 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} < 500 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}.$$

Die zulässige Druckspannung für Gußeisen bei derartigen Bauteilen $= 500 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$.

Die Druckbeanspruchung des Mauerwerkes:

$$k' = \frac{P}{a^2} = \frac{7270}{25^2} = \sim 11{,}7 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} < 14 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}.$$

Die zulässige Druckspannung für Mauerwerk in Zementmörtel $= 14 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$.

Die Druckbeanspruchung des Erdreiches:

$$k'' = \frac{P}{b^2} = \frac{7270}{53^2} = 2{,}6 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} < 3 \div 4 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}.$$

Die zulässige Druckbeanspruchung darf bei gutem Baugrund $3 \div 4 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ betragen.

5. ***Beispiel:*** Welche Verlängerung λ erfährt ein schweißeiserner Stab von 3,1416 cm² Querschnitt und 20 cm Länge, wenn er mit 300 kg belastet wird? Das Elastizitätsmaß E für Schweißeisen $= 2\,000\,000 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$.

Lösung: $\lambda = \frac{P \cdot l}{f \cdot E} = \frac{3000 \cdot 20}{3{,}1416 \cdot 2\,000\,000} = 0{,}0955 \text{ cm} = 0{,}955 \text{ mm}.$

6. *Beispiel:* Die Reißlänge L_r eines Rohseidenfadens beträgt 33 km, sein Einheitsgewicht $\gamma = 1{,}36 \frac{kg}{dm^3}$. Wie groß ist die Zugfestigkeit K_z des Fadens?

Lösung: Die Belastung des Einspannungsquerschnittes wird durch das Eigengewicht des Seidenfadens hervorgerufen.

Das Eigengewicht des Fadens ist:

$$G = \left(\frac{F}{100}\right) dm^2 \cdot \left(\frac{l}{10}\right) dm \cdot \gamma \frac{kg}{dm^3},$$

hierin bedeutet F den Querschnitt des Fadens in cm^2 und l die Länge des Fadens in cm.

$$G = \frac{F \cdot l \cdot \sigma}{1000} kg.$$

Wollen wir dieses Eigengewicht G in Beziehung bringen zur Zugfestigkeit K_z, einer Größe, die sich auf 1 cm^2 Querschnitt bezieht, so können wir in unserem Falle sagen

$$\frac{L_r \gamma}{1000} = K_z \cdot \frac{kg}{cm^2}$$

$$K_z = \frac{33\,000 \cdot 100 \cdot 1{,}36}{1000} = 4488 \frac{kg}{cm^2}.$$

7. *Beispiel:* Wie groß ist die Reißlänge eines Schweißeisenstabes, wenn $K_z = 3400 \frac{kg}{cm^2}$ und $\gamma = 7{,}795 \frac{kg}{dm^3}$ gegeben sind.

Lösung:

$$K_z = \frac{L_r \gamma}{1000} \frac{kg}{cm^2}$$

$$L_r = 1000 \frac{K_z}{\gamma} cm$$

$$L_r = 1000 \cdot \frac{3400}{7{,}795} = 436\,177 \text{ cm}$$

$$L_r = 4361{,}8 \text{ m}.$$

8. *Beispiel:* Wie groß ist die Traglänge L des in dem vorigen Beispiel erwähnten Stabes?

Lösung: Man bekommt die Formeln für die Traglänge, wenn man in die Formel für die Reißlänge statt der Zugfestigkeit K_z die zulässige Beanspruchung auf Zug k_z setzt, oder wenn man die Reißlänge durch den Sicherheitsgrad S dividiert.

$$L = 1000 \frac{k_z}{\gamma} cm$$

$$L = 1000 \frac{K_z}{\gamma \cdot S} cm.$$

Hängt der Stab ruhig herunter, so dürfen wir die zulässige Zugbeanspruchung mit $900 \frac{kg}{cm^2}$ annehmen; es wird dann die Traglänge

$$L = 1000 \frac{900}{7,795} = 115\,459 \text{ cm},$$

$$L = 1154,6 \text{ m},$$

Der Sicherheitsgrad $S = \frac{L_r}{L} = \frac{4361,8}{1154,6} = 3,78,$

$$\text{oder } S = \frac{K_z}{k_z} = \frac{3400}{900} = 3,78.$$

Ist ein Stab nicht nur durch die angehängte Last beansprucht, sondern ist sein Eigengewicht so groß, daß wir es nicht vernachlässigen dürfen, so geht die allgemeine Zuggleichung in die Form über:

$$P + G = F . k_z,$$

hierin bedeutet P die angehängte Last in kg, G das Eigengewicht des Stabes in kg, F sein Querschnitt in cm^2 und k_z die zulässige Beanspruchung auf Zug in $\frac{kg}{cm^2}$. Zerlegen wir die gesamte zulässige Spannung k_z in zwei Teile, von denen der eine k_z' von der angehängten Last P, und der andere k_z'' vom Eigengewicht G herrührt, so ergibt sich

$$k_z = k_z' + k_z'' = \frac{P}{F} + \frac{G}{F},$$

die dem Eigengewicht entsprechende Spannungsverminderung

$$k_z'' = \frac{G}{F} = \frac{F\,cm^2 . l\,cm . \gamma \frac{kg}{dm^3}}{1000 . F\,cm^2} = \frac{l . \gamma}{1000} \frac{kg}{cm^2},$$

und die verminderte zulässige Spannung $k_z' = k_z - \frac{l\,\gamma}{1000}$.

9. ***Beispiel:*** Eine Zugstange aus Flußeisen, St 27.12; die zulässige Spannung $k_z = 1000 \frac{kg}{cm^2}$, das Einheitsgewicht für Flußeisen $\gamma = 7,85 \frac{kg}{dm^3}$, ist so lang, daß durch ihr Eigengewicht eine Verminderung der Tragfähigkeit um 2% eintritt. Welche Länge hat sie?

Lösung: $k_z'' = \frac{l . \gamma}{1000} = \frac{2}{100} . k_z = \frac{2}{100} . 1000 = 20 \frac{kg}{cm^2},$

$$l = \frac{20\,000}{\gamma} = \frac{20\,000}{7,85} = 2547 \text{ cm},$$

$$l = 25,47 \text{ m}.$$

10. ***Beispiel:*** Ein Drahtseil von 8000 m Länge einer Lotmaschine trägt am Ende einen Wasserschöpfer, der eine Wasserprobe aus der Meerestiefe bringt. Er wiegt 40 kg bei einer Wasserverdrängung von 8 dm^3. Das spezifische Gewicht oder Einheitsgewicht des Meerwassers wird angenommen

mit 1,02 $\frac{kg}{dm^3}$. Verwendet wird Stahldraht mit 130 ÷ 180 $\frac{kg}{mm^2}$ Festigkeit. Was für ein Seil ist zu wählen?

Lösung: Wir müssen annehmen, daß das Meerwasser infolge des hohen Druckes in größeren Tiefen alle Räume des Seiles ausfüllt, sodaß der Seilquerschnitt ausgedrückt werden muß durch

$$\frac{F}{100} = i \cdot \frac{\delta^2 \pi}{4} \cdot \frac{1}{100} dm^2,$$

worin F den Seilquerschnitt in cm^2, i die Anzahl der Drähte und δ den Drahtdurchmesser in cm bedeutet.

Wir nehmen nun die Drahtseiltabelle einer Firma und wählen probeweise einen Drahtdurchmesser von 0,05 cm. Es ist alsdann der Seilquerschnitt $\frac{i}{100} \cdot \frac{0{,}05^2 \cdot \pi}{4} dm^2 = 0{,}0000\,1934 \cdot dm^2$. Da das Seil über Rollen geführt werden muß, so ist es nicht nur auf Zug, sondern auch auf Biegung beansprucht. Man kann in der Weise verfahren, daß man die Biegungsbeanspruchung durch entsprechend vorsichtige Wahl der zulässigen Zugbeanspruchung k_z berücksichtigt. Wir wählen $k_z = 6800 \frac{kg}{cm^2}$. Das entspricht einer 2,6 fachen Sicherheit, weil die Zugfestigkeit K_z mit 17 680 $\frac{kg}{cm^2}$ ermittelt wurde; allerdings erniedrigt sich der Sicherheitsgrad etwas wegen der Zusatzspannung durch die Biegungsbeanspruchung bei der Führung des Seiles über Rolle und Trommel. Das Einheitsgewicht des Drahtmaterials kann aus der Seiltabelle ungefähr ermittelt werden. Es wiegen 100 m Drahtseil bei 72 Drähten von je 0,05 cm ⌀ 13 kg.

$$\frac{0{,}005^2 \pi}{4} \cdot 72 \cdot 1000 \cdot \gamma = 13$$

$$\gamma = \frac{13 \cdot 4}{0{,}005^2 \cdot \pi \cdot 72 \cdot 1000} = 9{,}195 \frac{kg^*}{dm^3}.$$

Infolgedessen ist das Gewicht des gesamten Drahtseiles:

$$\frac{F}{100} dm^2 \cdot \frac{1}{10} dm \cdot \gamma \frac{kg}{dm^3},$$

$$0{,}0000\,1934 \cdot i \cdot 80\,000 \cdot 9{,}195 = 14{,}227 \cdot i \text{ kg}.$$

Hierzu kommt noch das Gewicht des Wasserschöpfers von 40 kg, also insgesamt 14,227 . i + 40 kg. Da jeder Körper im Wasser soviel an seinem Gewicht verliert, als das Gewicht der von ihm verdrängten Wassermenge beträgt, so müssen wir von dem obigen Werte das Wassergewicht subtrahieren, welches beträgt:

$$0{,}0000\,1934 \cdot i \cdot 80\,000 \cdot 1{,}02 + 8 \cdot 1{,}02 = 1{,}578 \cdot i + 8{,}16 \text{ kg}.$$

Die tatsächlich vorhandene Höchstbelastung des Drahtseiles ist mithin:

$$14{,}227 \cdot i + 40 - 1{,}578 \cdot i - 8{,}16 \text{ kg} = 12{,}649 \cdot i + 31{,}84 \text{ kg}.$$

* Im Interesse der Sicherheit wurde das Gewicht der Hanfseele hier mit eingerechnet, während bei der Wasserverdrängungsrechnung die Seele unberücksichtigt blieb.

POLITECHNIKA BIBLIOTEKA

Aus der Festigkeitsgleichung

$$F \geqq \frac{P}{k_z}$$

ergibt sich im Grenzfall

$$F = \frac{P}{k_z}$$

$$0{,}001\,934 \,.\, i = \frac{12{,}649 \,.\, i + 31{,}84}{6800}$$

$$13{,}1512 \,.\, i = 12{,}649 \,.\, i + 31{,}84$$

$$0{,}5 \,.\, i = 31{,}84$$

$$i = 64 \text{ Drähte.}$$

Aus der Tabelle für Stahldrahtseile ersehen wir, daß ein Seil geliefert werden kann von 72 Drähten zu je 0,05 cm Φ bei einem Seilgewicht von 13 kg je 100 m.

Es wiegen 8000 m Seil = 1040 kg, Seil und Wasserschöpfer zusammen 1080 kg. Das abzuziehende Wassergewicht:

$$72 \,.\, \frac{0{,}005^2 \,.\, \pi}{4} \,.\, 80\,000 \,.\, 1{,}02 + 8{,}16 = 123{,}52 \text{ kg,}$$

Höchstbelastung $P = 1080 - 123{,}52 = 956{,}48$ kg.

Die wirklich vorhandene Zugspannung im ungünstigsten Fall im gefährlichen Querschnitt:

$$\sigma_z = \frac{P}{F}$$

$$\sigma_z = \frac{956{,}48}{\frac{0{,}05^2 \,.\, \pi \,.}{4} 72} = 6780 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} < 6800 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} = k_z.$$

Wollte man ein Drahtseil nach Din 655 wählen, so käme in Frage: Drahtseil A 6,5 Din 655, 6 Litzen, 19 Drähte für 1 Litze, Gesamtdrahtzahl 114, Seilnenndurchmesser 6,5 mm, Einzeldrahtdurchmesser 0,4 mm, Querschnitt sämtlicher Drähte im Seile 14,3 mm², rechnerisches Gewicht für 1 m 0,135 kg, Festigkeit $180 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$, rechnerische Bruchfestigkeit 2570 kg.

Seilgewicht = 8000 . 0,135 = 1080 kg, Seilgewicht + Wasserschöpfer = 1120 kg, Gewicht der verdrängten Wassermenge:

$$\frac{14{,}3}{10\,000} \,.\, 80\,000 \,.\, 1{,}02 + 8{,}16 = 124{,}85 \text{ kg,}$$

Höchstbelastungsgewicht $1120 - 124{,}85 = 995{,}15$ kg,

$$\sigma_z = \frac{P}{F} = \frac{995{,}15}{0{,}143} = 6960 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}.$$

Dies entspricht einem Sicherheitsgrad S von $\frac{180 \,.\, 100}{6960} = 2{,}59$ ohne Berücksichtigung der Beanspruchung auf Biegung.

11. ***Beispiel:*** Eine unkalibrierte Kette (Din 672), Werkstoff: Flußstahl, soll bei 130 m herunterhängender Länge eine Nutzlast von 10 ton tragen. Die zulässige Zugbeanspruchung wird mit 585 $\frac{kg}{cm^2}$ angenommen.

Welche Kette hat man zu wählen?

Lösung: Man kann diese Aufgabe nur durch Probieren lösen. Aus dem Din-Blatt wählen wir vorläufig eine Kette von 36 mm Glieddurchmesser und einem Gewicht von 30 kg je 1 m, dann ist

$$\sigma_z = \sigma_z' + \sigma_z'' = \frac{P}{F} + \frac{G}{F},$$

$$\sigma_z = \sigma_z' + \sigma_z'' = \frac{10\,000}{2 \cdot \frac{3{,}6^2\,\pi}{4}} + \frac{30 \cdot 130}{2 \cdot \frac{3{,}6^2 \cdot \pi}{4}}$$

$$\sigma_z = 491 + 192 = 683\,\frac{kg}{cm^2}, \text{ zu hoch.}$$

Wählen wir einen Glied-Φ von 44 mm, so ergibt sich:

$$\sigma_z = \sigma_z' + \sigma_z'' = \frac{10\,000}{2 \cdot \frac{4{,}4^2\,\pi}{4}} + \frac{45 \cdot 130}{2 \cdot \frac{4{,}4^2\,\pi}{4}},$$

$$\sigma_z = \sigma_z' + \sigma_z'' = 329 + 192{,}5 = 521{,}5\,\frac{kg}{cm^2},$$

für einen Ketteneisen-Φ = 40 mm:

$$\sigma_z = \sigma_z' + \sigma_z'' = \frac{10\,000}{2 \cdot \frac{4^2\,\pi}{4}} + \frac{36 \cdot 130}{2 \cdot \frac{4^2\,\pi}{4}},$$

$$\sigma_z = \sigma_z' + \sigma_z'' = 398 + 186{,}5 = 584{,}5\,\frac{kg}{cm^2}.$$

Wir haben also zu wählen Kette 40 Din 672.

Es zeigt sich aber auch, daß eine Kette von solcher Länge für den beabsichtigten Zweck ungeeignet ist, denn die Spannungsverminderung* beträgt 32%.

Bedeutend vorteilhafter wäre die Verwendung eines Drahtseiles Din 655, z. B. Drahtseil C 39 Din 655 mit einem Eigengewicht von 130 . 5,35 = 696 kg und einer rechnerischen Bruchfestigkeit von 73240 kg; hier ergibt sich:

$$\sigma_z = \sigma_z' + \sigma_z'' = \frac{10\,000}{5{,}634} + \frac{696}{5{,}634},$$

$$\sigma_z = \sigma_z' + \sigma_z'' = 1775 + 124 = 1899\,\frac{kg}{cm^2},$$

$$\sigma_z = 2000\,\frac{kg}{cm^2} \text{ ist zulässig,}$$

die Spannungsverminderung* beträgt nur 6,5%.

* Siehe Seite 16.

IV. Die Scherfestigkeit.

Die äußeren Kräfte in *Abb. 22* haben das Bestreben, die beiden Stabhälften L und R gegeneinander zu verschieben, wobei man annehmen kann, daß in dem Querschnitt I Spannungen entstehen, die sich gleichmäßig über die ganze Querschnittsfläche verteilen. Man nennt diese Spannungen ***Tangentialspannungen****, weil ihre Richtung mit der Ebene des Querschnittes zusammenfällt. Ist P die Belastung und F der Querschnitt, so erhält man die Scherspannung

$$\tau_s = \frac{P}{F} \frac{kg}{cm^2}.$$

12. ***Beispiel:*** Eine Scheibenkupplung *(Abb. 23)* A 100 Din 116 überträgt 60 PS bei 150 Umdrehungen in der Minute. Es sind sechs Schrauben 1″ am Umfang angeordnet. Wie groß wird die bei stoßfreiem Betrieb in den Schrauben auftretende Scherspannung,

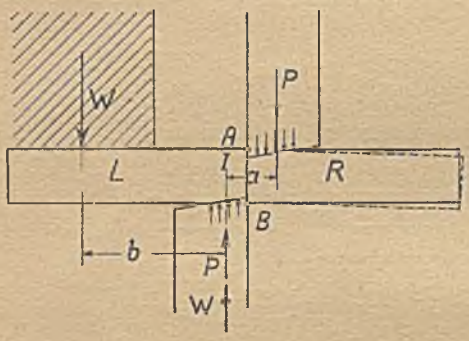


Abb. 22.

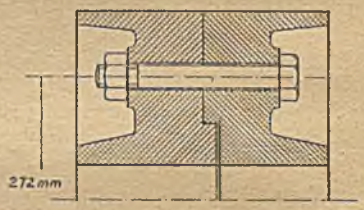


Abb. 23.

wenn man annimmt, daß immer nur $^1/_3$ aller Schrauben an der Aufnahme der Umfangskraft beteiligt sind. Daß die Reibung zwischen den Scheiben bewegungsübertragend wirkt, wird vernachlässigt.

Lösung: Ein Punkt des Schraubenkreises legt in der Minute einen Weg zurück von $0{,}272 \cdot \pi \cdot 150 = 128{,}18$ m, folglich ist seine Geschwindigkeit $\frac{128{,}18}{60} = 2{,}136 \frac{m}{sec}$. Nach der Formel $P = \frac{75\,N}{v}$, worin P die Umfangskraft, N die zu übertragenden Pferdestärken und v die Umfangsgeschwindigkeit in $\frac{m}{sec}$ bedeuten, wird

$$P = \frac{75 \cdot 60}{2{,}136} = 2110 \text{ kg, und}$$

$$\tau_s = \frac{P}{F} = \frac{2110}{2 \cdot 3{,}575} = 295 \frac{kg}{cm^2}.$$

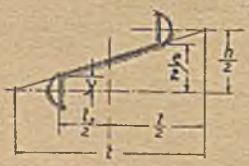


Abb. 24.

13. ***Beispiel:*** Welches Verhältnis zwischen der Zug- und der Schubbeanspruchung besteht bei einer Schraube 4″ Whitworth-Gewinde mit Spitzenspiel Din 12, wenn die Höhe H der Schraubenmutter gleich dem Gewindeaußendurchmesser ist *(Abb. 24)*.

* Die Abb. 22 läßt erkennen, daß auch Biegungsspannungen auftreten, die hier unberücksichtigt bleiben sollen.

Lösung: $$\frac{d_1{}^2\pi}{4} \cdot \sigma_z = \frac{H}{h} \cdot d_1 \cdot \pi \cdot e \cdot \tau_s,$$

$$64{,}697 \cdot \sigma_z = \frac{10{,}0351}{0{,}8467} \cdot 9{,}076 \cdot \pi \cdot e \cdot \tau_s.$$

Der Wert e läßt sich aus den Angaben des Din-Blattes 12 berechnen:

$$0{,}96049\,h : \frac{h}{2} = \left(\frac{0{,}96049}{2}\,h - \frac{0{,}49233}{2}\,h\right) : y,$$

$$y = \frac{0{,}092065}{0{,}96049}\,h,$$

$$y = 0{,}09585 \cdot h,$$

$$e = h - 2\,y,$$

$$e = (1 - 2 \cdot 0{,}09585) \cdot h,$$

$$e = 0{,}8083 \cdot h = 0{,}8083 \cdot 0{,}8467 = 0{,}68439 \text{ cm},$$

$$64{,}697 \cdot \sigma_z = \frac{10{,}0351}{0{,}8467} \cdot 9{,}076 \cdot \pi \cdot 0{,}68439 \cdot \tau_s,$$

$$\sigma_z = \frac{9{,}076 \cdot \pi \cdot 0{,}68439 \cdot 10{,}0351}{64{,}697 \cdot 0{,}8467} \cdot \tau_s,$$

$$\sigma_z = 3{,}56 \cdot \tau_s.$$

14. ***Beispiel:*** Mit welcher Kraft P muß ein Schnittmesser von $\alpha = 10^0$ Neigung niedergehen, damit ein Eisenblech von einer Wandstärke $s = 1{,}2$ cm durchschnitten wird *(Abb. 25)*. Die Schubfestigkeit des Materials ist $K_s = 3400 \frac{kg}{cm^2}$.

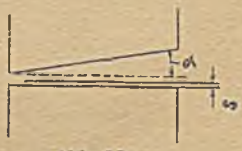


Abb. 25.

Lösung: Wenn das Messer ein Blechstück von der Länge b cm durchschneiden soll, so muß das Messer einen Weg zurücklegen von $(b \operatorname{tg} \alpha + s)$ cm. Es ist alsdann die vom Messer geleistete Arbeit $= P.(b \cdot \operatorname{tg} \alpha + s)$ cmkg. Diese Arbeitsleistung muß gerade so groß sein wie jene, die notwendig wäre, wenn man mit einem Messer mit horizontaler Schneide arbeiten wollte. Dieses letztere Messer müßte einen Weg gleich der Blechdicke s zurücklegen und längs dieser Strecke einen Druck ausüben, der zuerst $s \cdot b \cdot K_s$ kg beträgt und allmählich auf Null heruntergeht. Teilen wir die Blechdicke s in zehn gleiche Teile ein, so ist die gesamte zu leistende Arbeit:

$$s \cdot b \cdot K_s \cdot \frac{s}{10} + \frac{9}{10} \cdot s \cdot b \cdot K_s \cdot \frac{s}{10} + \frac{8}{10}\, s \cdot b \cdot K_s \cdot \frac{s}{10} \ldots$$

$$\text{bis } \frac{1}{10}\, s \cdot b \cdot K_s \cdot \frac{s}{10} = \frac{s^2 \cdot b \cdot K_s}{100}\,(10 + 9 + 8 + \ldots 1) =$$

$$= 0{,}55 \cdot s^2 \cdot b \cdot K_s.$$

Nunmehr ist die Arbeitsgleichung verständlich

$$P \cdot (b \cdot \operatorname{tg} \alpha + s) = 0{,}55 \cdot s^2 \cdot b \cdot K_s,$$

$$P = \frac{0{,}55 \cdot s^2 \cdot b \cdot K_s}{b \cdot \operatorname{tg} \alpha + s},$$

$$P = 0{,}55 \cdot \frac{s^2 \cdot K_s}{\operatorname{tg} \alpha + \frac{s}{b}}.$$

Meist wird man das Glied $\frac{s}{b}$ vernachlässigen können, sodaß die einfachere Beziehung entsteht:

$$P = 0{,}55 \cdot \frac{s^2 \cdot K_s}{\operatorname{tg} \alpha},$$

$$P = 0{,}55 \cdot \frac{1{,}5^2 \cdot 3400}{0{,}17633} = 23\,900 \text{ kg}.$$

15. ***Beispiel:*** Es soll ein Beschlag gemäß *Abb. 26* aus 8 mm starkem Flußeisenblech St 37 . 21 durch Stanzen hergestellt werden. Welche Kraft muß der Stempel ausüben, wenn die Schubfestigkeit des Bleches $K_s = 3200 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ ist.

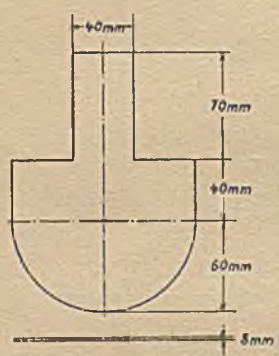


Abb. 26.

Lösung: Es soll eine Zerstörung des Bleches herbeigeführt werden, folglich gilt die Beziehung:

$$F \cdot K_s = P,$$

$$U \cdot s \cdot K_s = P;$$

hierin bedeutet P die notwendige Stempelkraft, U den Umfang des Beschlages, s die Blechstärke.

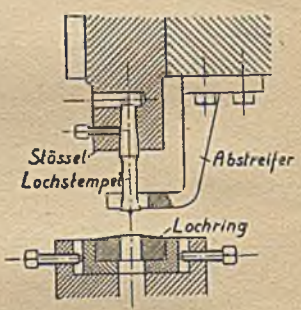


Abb. 27.

$$U = 4 + 2 \cdot 7 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 + 6 \cdot \pi = 52{,}8496 \text{ cm},$$

$$52{,}8496 \cdot 0{,}8 \cdot 3200 = 135\,295 \text{ kg}.$$

16. ***Beispiel:*** Eine Exzenterpresse vermag einen größten Druck von 42 ton auszuüben. Der Lochstempel *(Abb. 27)* wird zum Stanzen von Flußeisenblechen St 37 . 21 benutzt, deren Schubfestigkeit bis zu $3650 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ beträgt. Der Lochstempel besteht aus Werkzeugstahl mit einer Druckfestigkeit von $K = 8800 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$. Im ungünstigsten Falle soll der Stempel noch eine 1,8fache Sicherheit gegenüber der Bruchgrenze aufweisen. An der Maschine ist eine Tabelle anzubringen, aus welcher der bedienende Arbeiter die äußerst zulässigen Lochdurchmesser für die verschiedenen Blechstärken entnehmen kann, damit eine Überlastung der Exzenterpresse vermieden wird. Diese Tabelle ist zu entwerfen.

Lösung: Die zulässige Beanspruchung des Stempels $k = \frac{K}{S} = \frac{8800}{1{,}8} = 4880 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$. Der größtzulässige Stempeldruck $= \frac{d^2 \pi}{4} \cdot k =$

$= \frac{d^2 \pi}{4} \cdot 4880$ kg, und der größtzulässige Lochdurchmesser ergibt sich aus der Beziehung

$$F_{max} = \frac{P_{max}}{K_s} = \frac{42\,000}{3650} = 11{,}5 \text{ cm}^2,$$

$$d_{max} \cdot \pi \cdot s = 11{,}5; \quad d_{max} = \frac{11{,}5}{\pi \cdot s} = \frac{3{,}66}{s} \text{ cm}.$$

Für eine Blechstärke s von 0,6 cm wird

$$d_{max} = \frac{3{,}66}{0{,}6} = 6{,}1 \text{ cm} \quad \text{und } d_{min} \text{ ergibt sich aus:}$$

$$\frac{d_{min}{}^2 \pi}{4} \cdot 4880 = d_{min} \cdot \pi \cdot 0{,}6 \cdot 3650,$$

$$d_{min} = \frac{0{,}6 \cdot 3650}{1220} = 1{,}8 \text{ cm},$$

allgemein: $d_{min} = 3 \cdot s$.

Wird $d_{min} > d_{max}$, so bedeutet dies, daß das betreffende Blech auf der Presse nicht mehr gestanzt werden darf, weil in jedem Falle eine Überlastung des Stempels eintritt.

Blechstärke in mm	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Die zulässigen Lochdurchmesser in mm	3 ÷ 366	6 ÷ 183	9 ÷ 122	12 ÷ 91,5	15 ÷ 73,2	18 ÷ 61	21 ÷ 52,3	24 ÷ 45,8	27 ÷ 40,7	30 ÷ 36,6	33 ÷ 33,3	÷

V. Die Biegungsfestigkeit.

Allgemeines: Ist ein Stab gemäß *Abb. 28a* belastet, so wird er auf Biegung beansprucht. Die vor der Belastung gerade Stabachse ist eine krumme Linie, solange die Kräfte P auf den Träger wirken. Man nennt diese Linie die Biegungslinie oder die ***elastische Linie*** des Stabes. Wenn wir an der senkrechten Begrenzungsfläche des unbelasteten Stabes zwei senkrechte Striche I und II markieren, die also vor der Belastung des Stabes parallele Gerade darstellen, so sehen wir, daß die Striche I und II des belasteten Stabes *(Abb. 28b)* gerade geblieben sind, nur haben sie jetzt eine Neigung zueinander; sie stehen auf der gekrümmten Achse senkrecht. Daraus folgt, daß die Faserschicht o — o′ kürzer

Fig. 28 *a*.

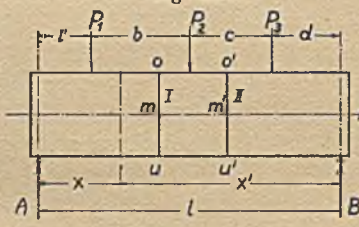
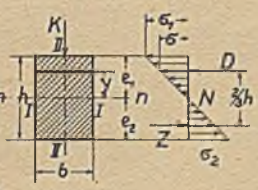


Fig. 28 *c*.



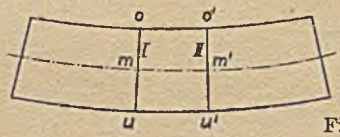


Fig. 28 *b*.

und die Faserschicht u — u' länger geworden ist. Die Faserschicht m — m' hat ihre ursprüngliche Länge beibehalten; man nennt sie die ***neutrale Faserschicht,*** welche den Querschnitt in der ***Nullinie*** n — n schneidet *(Abb. 28c).*

Nimmt man an, daß die vorkommenden Spannungen unter der Elastizitätsgrenze liegen, so wissen wir, daß die auftretenden Verlängerungen und Verkürzungen Maßstäbe für die Größe der inneren Stabkräfte sind. Es ist demnach ohne weiteres ersichtlich, daß in einem gebogenen Stabe sämtliche Fasern niemals gleichmäßig auf Widerstandsfähigkeit gegen die Einwirkung äußerer Kräfte ausgenutzt werden können, wie das z. B. bei reinen Zug- oder Druckbelastungen möglich ist, wo alle Fasern gleichmäßig beansprucht werden. Da nun mit Rücksicht auf weitgehendste Ausnutzung bezw. Ersparnis an Baustoff die Zugbeanspruchung die günstigste ist, so sucht man Biegungsspannungen möglichst zu vermeiden, wie das z. B. bei den Profilstäben in Eisenkonstruktionen der Fall ist, welche der Eigenart ihrer Anordnung entsprechend nur auf Zug bezw. Druck beansprucht werden.

Da wir gesehen haben, daß die Faserschichten, welche in der Nähe der neutralen Faserschicht lagern, fast gar keine Verlängerung oder Verkürzung erfahren, d. h. fast gar keine Spannungen besitzen, so müssen wir bei auf Biegung beanspruchten Körpern die Querschnitte so gestalten, daß in der Nähe der Nullinie möglichst wenig Baustoff angeordnet wird *(Abb. 29).*

Da es sich um Längenänderungen handelt, sind es Normalspannungen, welche in dem auf Biegung beanspruchten Körper auftreten. Oberhalb der neutralen Faserschicht *(Abb. 28b)* treten Druckspannungen, und unterhalb der neutralen Schicht treten Zugspannungen auf. Wollen wir uns darüber unterrichten, welche Kräfte auf einen auf Biegung beanspruchten Stab einwirken, so denken wir uns den Stab in dem Querschnitt, den wir untersuchen wollen, durchschnitten *(Abb. 30).* An dem links abgetrennten Stabteil wirken der Auflagerdruck A und die Kraft P_1. Gleichgewicht kann erst vorhanden sein, wenn die in den senkrechten Ebenen wirkenden äußeren Kräfte des abgeschnittenen Trägerstückes die Summe Null

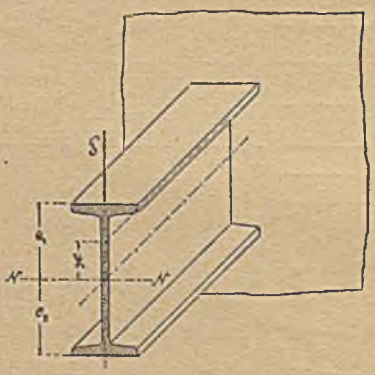


Abb. 29.

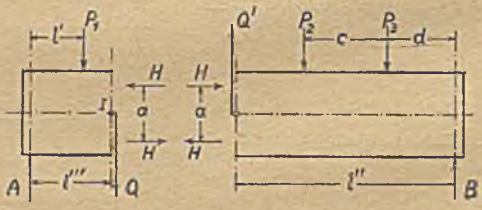


Abb. 30.

ergeben. Nehmen wir an, es wäre $A > P_1$, so müssen wir uns an der Schnittstelle eine Kraft Q nach unten angesetzt denken, damit die Gleichgewichtsbedingung erfüllt ist. Damit der abgetrennte Körper in Ruhe bleibt, muß

außerdem die Summe aller auf ihn einwirkenden Drehmomente gleich Null sein. Nehmen wir den Drehpunkt bei I an, so finden wir, daß sich die statischen Momente (Kraft mal Hebelarm) $A . l'''$ und $P_1 . (l''' - l')$ nicht aufheben, denn A war ja $> P_1$; es muß also noch ein Kräftepaar H vorhanden sein, dessen statisches Moment H . a den Gleichgewichtszustand herstellt, sodaß die Drehwirkungen insgesamt den Wert Null haben.

$$A . l''' - P_1 . (l''' - l') - H . \frac{a}{2} - H . \frac{a}{2} = 0,$$

$$A . l''' - P_1 . (l''' - l') = H . a.$$

Ist diese Gleichung richtig, so befindet sich der abgetrennte Teil vollständig in Ruhe, denn die drei Gleichgewichtsbedingungen sind erfüllt; es ist die Summe aller senkrechten Kräfte gleich Null, die Summe aller horizontalen Kräfte ebenfalls gleich Null, denn die beiden horizontal wirkenden Kräfte H gehören einem Kräftepaar an, sind also gleichgroß, entgegengesetzter Richtung und haben parallele Wirkungslinien, endlich ist die Summe aller angreifenden Momente gleich Null.

Auf der linken Seite der letzten Gleichung stehen die statischen Momente aller links vom betrachteten Querschnitt angreifenden äußeren Kräfte, d. i. das ***Biegungsmoment*** M_b für diesen Querschnitt; auf der rechten Seite der Gleichung steht das statische Moment des Kräftepaares H. Die Querkraft Q ist die algebraische Summe aller links von dem zu untersuchenden Querschnitt angreifenden äußeren Kräfte.

Da die Auflagerdrücke A und B *(Abb. 30)* gerade so groß sind wie die Summe der äußeren Kräfte P_1, P_2 und P_3, und da laut Annahme $A > P_1$, so muß $P_2 + P_3 > B$ sein. Das rechte Trägerstück wird also an der Schnittstelle eine nach oben gerichtete Querkraft Q' aufzuweisen haben müssen von der Größe $P_2 + P_3 - B$. Die Größe der Querkraft Q am linken Trägerstück war $A - P_1$. Beide Querkräfte müssen gleich groß sein, also $Q = Q'$, weil beim nicht geschnittenen Träger $A - P_1 - P_2 - P_3 + B = 0$, und daraus

$$A - P_1 = P_2 + P_3 - B,$$
$$Q = Q'.$$

Zur Herstellung des Gleichgewichtszustandes ist auch am rechten Trägerteil ein Kräftepaar H mit dem statischen Moment H . a notwendig, jedoch ist seine Wirkungsrichtung entgegengesetzt. Aus den obigen Betrachtungen geht zusammenfassend hervor:

Jeder Querschnitt eines auf Biegung beanspruchten Stabes ist durch eine Querkraft auf Schub beansprucht, und er hat ein Biegungsmoment aufzunehmen, welches bestimmt ist durch die algebraische Summe der statischen Momente der äußeren Kräfte. Die Untersuchungen können sich entweder auf die links oder rechts vom betrachteten Querschnitt angreifenden Kräfte beziehen. Die Größe der Schubspannungen in einem gebogenen Balken ist in den meisten Fällen gegenüber den Biegungsspannungen von so geringer Bedeutung, daß man die Schubspannungen vernachlässigen darf.

Merke folgende Regel:

Man bezeichnet ein Biegungsmoment als positiv (+), wenn es den Stab nach unten ausbiegt, wenn die Zugseite unten liegt, und als negativ (−), wenn der Stab nach oben gewölbt wird, wenn die Zugseite oben liegt.

Biegungsspannungen: Das statische Moment H.a des Kräftepaares ist der Gesamtausdruck für die Summe aller statischen Momente der im betrachteten Querschnitt angreifenden inneren Kräfte (Spannungen). Da bekanntlich die Dehnungen der Fasern verhältnisgleich der Entfernung von der Nullinie nach dem Rande hin zunehmen, so trifft dieselbe Erwägung auch für die Spannungen zu, da ja laut Voraussetzung das Geradliniengesetz von Hooke gilt.

Bezeichnen wir die Spannung in einem Flächenstreifen im Abstande y von der Nullinie mit $\sigma \frac{kg}{cm^2}$, so beträgt die Spannung σ_1 am Rande des rechteckigen Querschnittes *(Abb. 28c)*

$$\sigma_1 = \sigma \cdot \frac{e_1}{y} \text{ bezw. } \sigma_2 = \sigma \frac{e_2}{y}.$$

Denken wir uns einen Spannungskörper mit den Spannungen σ, wachsend von 0 bis $\sigma_1 = \sigma_2$, da $e_1 = e_2$, so können wir uns vorstellen, daß es einen Spannungskörper mit gleichgroßen Spannungen σ_m gibt, der denselben Inhalt bezitzt. Es muß dann sein $\sigma_m = \frac{\sigma_1}{2} = \frac{\sigma_2}{2}$.

Der Inhalt dieses Spannungskörpers oberhalb und unterhalb der Nullinie ist alsdann $= \frac{1}{2} \cdot h \cdot b \cdot \sigma_m$.

Beachten wir, daß die Mittelkraft σ_m der Einzelspannungen im Schwerpunkt des Spannungskörpers v′ bezw. v″ *Abb. 31* angreifend gedacht werden muß, so ergibt sich die Summe der statischen Momente der am betrachteten Querschnitt angreifenden inneren Kräfte (Spannungen σ) zu:

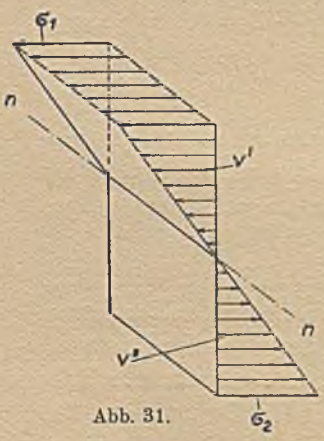


Abb. 31.

$$2 \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot h \cdot b \cdot \sigma_m \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{h}{2}\right] = \frac{b \cdot h^2}{3} \cdot \sigma_m = \frac{b \cdot h^2}{6} \sigma_1.$$

Nun ist aber das statische Moment $H \cdot a = A \cdot l''' - P_1 \cdot (l''' - l') = M_b$ des zur Hervorbringung des Gleichgewichtszustandes notwendigen Kräftepaares H gleichbedeutend mit dem statischen Moment der im gebogenen Stab auftretenden Normalspannungen, also

$$M_b = \frac{b \cdot h^2}{6} \cdot \sigma_1.$$

Führen wir in diese Gleichung statt der Randspannung σ_1 eine Spannung σ im beliebigen Abstand y von der Nullinie ein, so wird

$$M_b = \frac{b \cdot h^2}{6} \cdot \sigma \cdot \frac{e_1}{y},$$

$$e_1 = \frac{h}{2},$$

$$M_b = \frac{b \cdot h^3}{12} \cdot \frac{\sigma}{y};$$

damit wird die Spannung im beliebigen Abstand y von der Nullinie

$$\sigma = \frac{M_b}{\frac{b \cdot h^3}{12}} \cdot y, \text{ und die äußerste}$$

Randspannung: $\sigma_1 = \dfrac{M_b}{\frac{b \cdot h^2}{6}}$.

Die gefundenen Ausdrücke $\frac{b \cdot h^3}{12}$ nennt man das ***Trägheitsmoment*** J, und $\frac{b \cdot h^2}{6}$ das ***Widerstandsmoment*** W des rechteckigen Querschnittes. Die Dimension (technische Benennung) von J ist cm^4, von W ist cm^3.

Die Festigkeitsgleichung für den auf Biegung beanspruchten Stab erhält mithin die Form

$$\sigma_1 = \frac{M_b}{W} \leqq k_b;$$

hiermit bedeutet k_b die zulässige Spannung auf Biegung.

Trägheits- und Widerstandsmomente ebener Flächen.

Das vorhin entwickelte Trägheits- und Widerstandsmoment bezog sich auf den rechteckigen Querschnitt. Man muß jedoch die Möglichkeit haben, diese Momente für alle in der Praxis vorkommenden Querschnitte ermitteln zu können.

Wie bereits erwähnt, können wir für einen Flächenstreifen f von verschwindend kleiner Dicke *(Abb. 32)*, der parallel zur Bezugsachse liegt, die Spannung als gleichgroß ansehen. Da sich der Streifen im Abstand y von der Nullinie N — N befindet, und da wir seine Spannung mit $\sigma \frac{kg}{cm^2}$ annehmen, so hat er ein Moment von $f \cdot \sigma \cdot y$ cmkg. Verlangen wir Gleichgewicht zwischen den äußeren und inneren

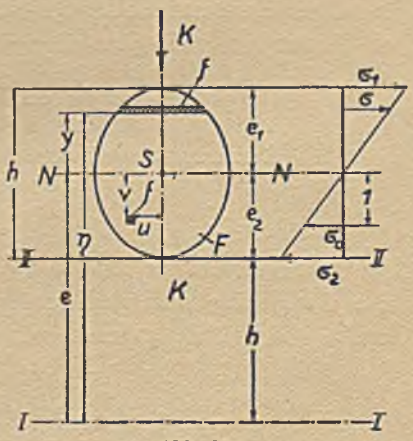


Abb. 32.

Kräften, so muß die Summe (Σ) aller Momente gleich Null sein, also für N — N als Bezugsachse:

$$\Sigma f \,.\, \sigma \,.\, y = M_b.$$

Da wir stets voraussetzen, daß das Geradliniengesetz gilt, also die Beziehung

$$\sigma = y \,.\, \sigma_0 = \sigma_1 \,.\, \frac{y}{e_1} = \sigma_2 \,.\, \frac{y}{e_2},$$

so ergibt sich

$$\Sigma f \,.\, \sigma_2 \,.\, \frac{y}{e_2} \,.\, y = M_b.$$

Setzen wir hierin den Wert $\frac{\sigma_2}{e_2} = \sigma_0$, so wird

$$\Sigma f \,.\, \sigma_0 \,.\, y^2 = M_b.$$

Den unveränderlichen Wert σ_0, d. i. die Spannung im Abstande 1 cm von der Nullinie, können wir vor das Summenzeichen setzen, weil er mit jedem Gliede der Summe $f \,.\, y^2$ multipliziert werden muß, also

$$\sigma_0 \, \Sigma f \,.\, y^2 = M_b.$$

Man nennt den Summenausdruck (jeder unendlich schmale Flächenstreifen multipliziert mit dem Quadrat seines Abstandes von der Nullinie) $\Sigma f \,.\, y^2 = J$, das Trägheitsmoment des Querschnittes

$$\sigma_0 \,.\, J = M_b,$$

$$\sigma = \frac{M_b}{J} \,.\, y.$$

Für die Randspannungen gilt:

$$\sigma_1 = \frac{M_b}{\frac{J}{e_1}} \quad \text{bezw.} \quad \sigma_2 = \frac{M_b}{\frac{J}{e_2}}.$$

Der Nenner, das Trägheitsmoment durch den Abstand der äußersten Faser von der Nullinie dividiert, ist das Widerstandsmonent des Querschnittes. Im allgemeinen hat also der Querschnitt zwei Widerstandsmomente, je nachdem ob die äußerste gedrückte oder die äußerste gezogene Faserschicht gemeint ist.

$$W_1 = \frac{J}{e_1}, \qquad W_2 = \frac{J}{e_2}.$$

Die Randspannungen errechnen sich zu

$$\sigma_1 = \frac{M_b}{W_1}, \qquad \sigma_2 = \frac{M_b}{W_2}.$$

Der betrachtete Streifen f *(Abb. 32)* überträgt eine Kraft von $\sigma \,.\, f$; da nun die Gleichgewichtsbedingung besteht: Summe aller wagerechten Seitenkräfte gleich Null, so muß sein

$$\Sigma \sigma \,.\, f = 0, \; \sigma_0 \,.\, \Sigma f \,.\, y = 0, \; \Sigma f \,.\, y = 0.$$

Bekanntlich ist aber diese Gleichung nur für die Schwerpunktsachse eines Querschnittes erfüllt, denn nur für diese ist die Summe der Produkte

aus Flächenstreifen und Abstand von der Achse gleich Null. Man sieht: die Nullinie geht durch den Schwerpunkt des Querschnittes.

Häufig wird es vorkommen, daß man das Trägheitsmoment auf eine andere als die Schwerachse S' des Einzelquerschnittes beziehen muß, z. B. dann, wenn der Gesamtquerschnitt aus zwei oder mehreren Einzelprofilen besteht.

Handelt es sich beispielsweise um eine Strebe, bestehend aus zwei [-Eisen *(Abb. 33)*, so müssen wir das Trägheitsmoment des Gesamtquerschnittes auf die Achse I beziehen, die parallel zu den S'-Achsen verläuft und durch den Schwerpunkt S des Gesamtprofils geht.

Aus *Abb. 32* geht hervor:

$$J_I = \Sigma f \,.\, \eta^2 = \Sigma f \,.\, (e + y)^2 = \Sigma f \,.\, e^2 + 2\,\Sigma f \,.\, e \,.\, y + \Sigma f \,.\, y^2.$$

Wenn man wieder die unveränderlichen Werte vor das Summenzeichen setzt:

$$J_I = e^2\,\Sigma f + 2\,e\,\Sigma f \,.\, y + \Sigma f \,.\, y^2.$$

Hierin bedeutet Σf den Querschnitt F, also $e^2 \,.\, \Sigma f = F \,.\, e^2 =$ Querschnitt multipliziert mit dem Quadrat des Abstandes der parallelen Bezugsachsen (Schwerachse des Einzelprofils bezw. des Gesamtprofils).

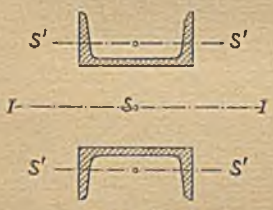


Abb. 33.

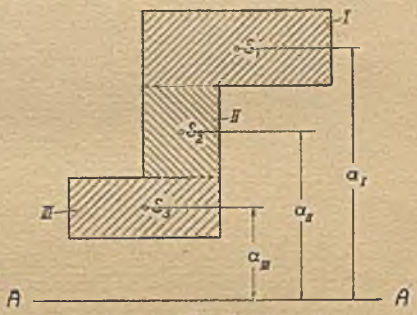


Abb. 34.

$\Sigma f \,.\, y$ ist, wie wir früher gesehen haben, gleich Null, folglich auch $2\,e \,.\, \Sigma f \,.\, y = 0$.

$\Sigma f \,.\, y^2$ ist bekanntlich das Trägheitsmoment des Querschnittes in bezug auf seine Nullinie (Schwerachse), also $= J_S$.

$$J_I = J_S + F \,.\, e^2,$$

entsprechend $$J_S = J_I - F \,.\, e^2.$$

Die mit Hilfe der beiden letzten Formeln gefundenen Trägheitsmomente nennt man ***reduzierte Trägheitsmomente.***

Soll das Trägheitsmoment einer Fläche für eine vorgeschriebene Achse ermittelt werden, so kann man im allgemeinen so vorgehen, daß man die Fläche in solche Bestandteile auflöst, deren Inhalte und Schwerpunktsabstände leicht zu bestimmen sind. Zieht man alsdann durch die Einzelschwerpunkte Parallelen zur gegebenen Achse, so ermittelt man zunächst die Trägheitsmomente der einzelnen Teilflächen für diese Schwerpunktsachsen und reduziert sie dann nachher auf die Bezugsachse für den Gesamtquerschnitt *(Abb. 34)*

$$J_A = J_I + J_{II} + J_{III} + F_I \,.\, a_I^2 + F_{II} \,.\, a_{II}^2 + F_{III} \,.\, a_{III}^2.$$

Die Trägheits- und Widerstandsmomente der am häufigsten vorkommenden Querschnittsformen sind in Tafeln zusammengestellt.

Für einen beliebig begrenzten Querschnitt kann man wie folgt verfahren *(Abb. 35)*:

Für $J_I = \Sigma f \,.\, \eta^2$ kann man setzen $J_I = \Sigma f (h + y)^2$.

Man bezieht also das Trägheitsmoment zunächst auf eine Achse I, die von der Berührenden II einen Abstand h hat, der gleich der Höhe des Querschnittes ist.

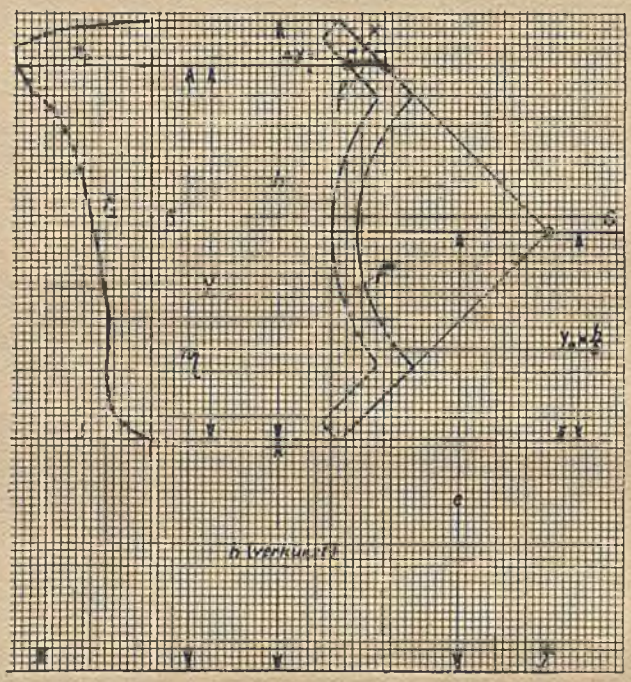


Abb. 35.

Dividiert man den Summenwert durch h^2 und hebt die Division dadurch auf, daß man den Summenausdruck mit h^2 multipliziert, so ergibt sich

$$J_I = h^2 \Sigma f \,.\, \frac{(h + y)^2}{h^2}.$$

Nun ist $f = x \,.\, \triangle y$, worin $\triangle y$ ein unendlich geringes Anwachsen von y bedeutet, also

$$J_I = h^2 \; \Sigma x \, \frac{(h + y)^2}{h^2} \triangle y,$$

$$J_I = h^2 \; \Sigma x \left(1 + \frac{y}{h}\right)^2 \triangle y.$$

Trägt man die Länge $z_2 = x \left(1 + \frac{y}{h}\right)^2$ von einer Senkrechten aus in der zugehörigen Höhe y wagerecht ab, so umschließt die Verbindungslinie der Streckenendpunkte eine Fläche vom Inhalt F_2 = dem Werte des Summenausdruckes; und es ist $J_I = h^2 . F_2$.

Das auf die Schwerachse S bezogene Trägheitsmoment ist alsdann

$$J_S = J_I - F.e^2;$$ im speziellen Falle der *Abb. 35*;

$$J_S = J_I - F.\left(\frac{3}{2}h\right)^2.$$

Die Flächeninhalte des Querschnittes F und der Fläche F_2 können bei Benutzung von Millimeterpapier leicht ausgezählt werden.

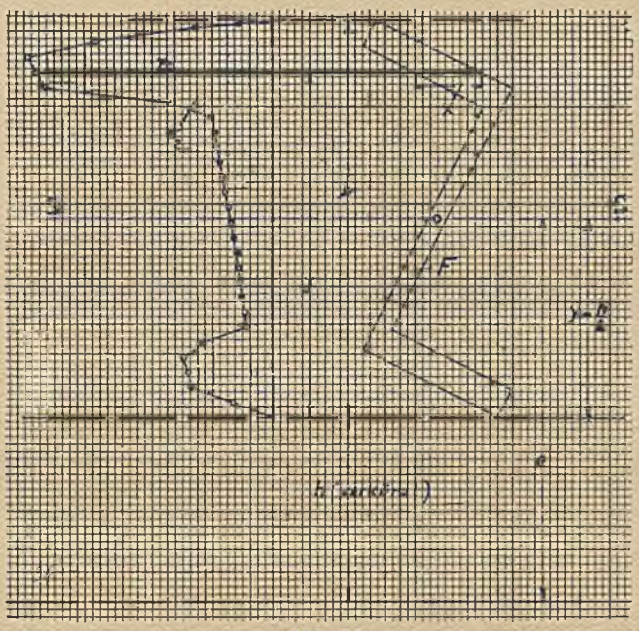


Abb. 36.

Will man beispielsweise das Trägheitsmoment des nebenstehend skizzierten Profils *(Abb. 36)* ermitteln in bezug auf die Achse S, so findet man, daß schon ein kleiner Fehler bei der Ermittlung und Auszählung der Fläche F_2 *(Abb. 36)* einen großen Einfluß auf die Richtigkeit des ermittelten Trägheitsmoments besitzt. Es kommt also bei solchen Querschnitten auf ein möglichst genaues Abstechen der Werte x an. Zählt man 529 cm² der Fläche F_2 und hat der Querschnitt F = 224 cm², so ergibt sich ein reduziertes Trägheitsmoment $J_S = 70\,225$ cm⁴.

Würde man jedoch F_2 mit 530,6 cm² ermitteln, so wäre das zugehörige Trägheitsmoment $J_S = 74\,719$ cm⁴. Ein Fehler von 0,3% in der Fläche F_2 ergibt einen Fehler von 6,4% im reduzierten Trägheitsmoment.

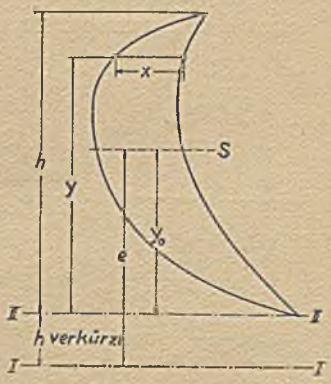


Abb. 37.

Das besprochene Verfahren hat also nur bedingten Wert und ergibt dann die genauesten Resultate, wenn es sich um Querschnitte wie in *Abb. 37**

* H. Winkel, Festigkeit und Formänderung.

(Dampfturbinenschaufel) handelt, bei denen sich die Werte x bei zunehmendem y wieder verringern. Es empfiehlt sich, kleine Querschnitte in vergrößertem Maßstab aufzuzeichnen und Millimeterpapier zu benutzen. Übrigens gibt es einfachere und genauere Verfahren zur Ermittlung des Trägheitsmoments für beliebige Achsen derartiger Querschnitte wie in *Abb. 36*, die später besprochen werden.

Hauptträgheitsmomente.

Durch den Schwerpunkt eines Querschnittes kann man unendlich viele Achsen ziehen. Es wird ein Querschnitt für jede Achse ein bestimmtes Trägheitsmoment besitzen.

In *Abb. 32* hatten wir die Lage der Nullinie als bekannt vorausgesetzt. In Wirklichkeit wissen wir bis jetzt nur, daß die N—N-Linie durch den Schwerpunkt S des Querschnittes hindurchgeht. Mit K — K in *Abb. 32* bezeichnen wir die Ebene, in welcher die äußeren Kräfte wirken; das ist die ***Kraftlinie,*** welche durch die Stabachse geht.

Das Moment der äußeren Kräfte in bezug auf diese Gerade ist also gleich Null; folglich muß auch das Moment der inneren Kräfte in bezug auf diese Gerade gleich Null sein, wenn wir den Gleichgewichtszustand voraussetzen.

Es muß sein nach *Abb. 32*: $\Sigma \sigma \,.\, f \,.\, u = 0$

$$\sigma_0 \,.\, v = \sigma, \qquad \Sigma \sigma_0 \,.\, f \,.\, v \,.\, u = 0$$

$$\sigma_0 \, \Sigma f \,.\, v \,.\, u = 0, \qquad \Sigma f \,.\, v \,.\, u = 0.$$

Wir stellen als Bedingung für die Beziehung zwischen Kraftlinie K — K und Nullinie N — N:

$$\Sigma f \,.\, v \,.\, u = 0.$$

Dieser Ausdruck kennzeichnet eine Eigenschaft des Querschnittes. Man nennt den Summenausdruck $\Sigma f \,.\, v \,.\, u$ das ***Zentrifugalmoment.***

Abb. 38.

Dimension $\overset{+}{\underset{-}{0}}$ cm⁴.

Beachten wir das Vorzeichen von v und u in den verschiedenen Quadranten *(Abb. 38)*, so finden wir, daß die Beiträge aller Flächenteilchen zum Zentrifugalmoment

aus dem	I.	Quadranten	positiv	
„ „	II.	„	negativ	
„ „	III.	„	positiv	
„ „	IV.	„	negativ	sind.

Wir können uns also ein rechtwinkliges Achsenkreuz so gedreht denken, daß die einzelnen Beiträge zum Zentrifugalmoment sich zu Null addieren.

Rechtwinklige Achsen, für die das Zentrifugalmoment den Wert Null hat, heißen ***Hauptachsen*** des Querschnittes.

Die auf sie bezogenen Trägheitsmomente heißen ***Hauptträgheitsmomente.*** Das größte und kleinste Trägheitsmoment eines Querschnittes hat stets eine Hauptachse als Bezugsachse.

Sehen wir uns die *Abb. 39* an, so finden wir, daß die eingetragenen Achsen als Hauptachsen bezeichnet werden können. Für jedes Flächenteilchen f im I. Quadranten finden wir ein symmetrisch gelagertes in jedem der drei anderen Quadranten, dessen Zentrifugalmoment gleich groß ist; es werden sich also für jedes $f \cdot v \cdot u$ im I. Quadranten und im III. Quadranten mit positivem Vorzeichen gleichgroße Anteile zum Zentrifugalmoment im II. und IV. Quadranten mit negativem Vorzeichen vorfinden, sodaß $\Sigma f \cdot v \cdot u = 0$ wird. In Worten:

Symmetrieachsen sind Hauptachsen.

Das größte Trägheitsmoment J_{max} des I-Eisens *Abb. 39* herrscht also in bezug auf die Symmetrieachse x und das kleinste, J_{min} in bezug auf die Symmetrieachse y.

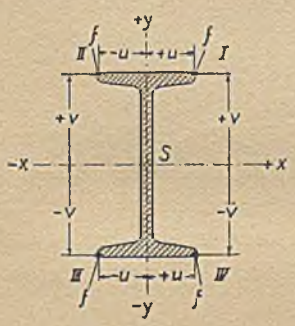


Abb. 39.

Die Lage der Hauptachsen und die Größe der Hauptträgheitsmomente für die wichtigsten Querschnitte können den üblichen Tabellen

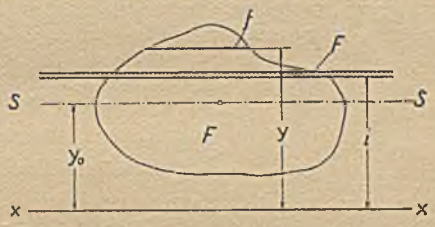


Abb. 40.

entnommen werden. Man merke sich: die Nullinie eines Querschnittes steht nur dann senkrecht auf der Kraftlinie, wenn die letztere mit einer Hauptachse des Querschnittes zusammenfällt.

Die Trägheitsellipse.

Zerlegen wir eine Fläche F || zu einer gegebenen Achse x — x *(Abb. 40)* in unendlich schmale Flächenstreifen f, so ist bekanntlich das Trägheitsmoment für die x-Achse $J_x = \Sigma y^2 \cdot f$. Denken wir uns nun alle Flächenstreifen aneinandergereiht, so erhalten wir ein unendlich langes Flächenband von dem Inhalt $F = \Sigma f$. Dieses Flächenband möge parallel zur x-Achse in einem solchen Abstand i angeordnet werden, daß sein Trägheitsmoment für die x-Achse ebensogroß ist wie das der ursprünglichen Fläche.

In diesem Falle bezeichnet man i als den ***Trägheitshalbmesser***

$$J_x = F \cdot i^2 \, cm^4; \quad i = \pm \sqrt{\frac{J_x}{F}} \, cm.$$

Zum Vergleich des Trägheitshalbmessers i mit dem Schwerpunktsabstand y_0 benutzen wir die Reduktionsformel

$$J_x = J_s + F \cdot y_0^2$$

$$J_x = F \cdot i^2 \qquad \text{daraus folgt}$$

$$i > y_0,$$

d. h. der Trägheitshalbmesser ist größer als der Schwerpunktsabstand.

Für einen beliebigen Querschnitt *(Abb. 41)* mögen die Hauptachsen durch einen beliebigen Punkt O gegeben sein. Durch denselben Punkt O ist eine Achse O U in beliebiger Richtung gezogen; wir wollen uns die letztere um O beliebig drehbar vorstellen. Sind die Trägheitsmomente für alle diese Achsen bekannt, so wissen wir, daß $J_I > J_U > J_{II}$ ist, und können für jede Achse die Trägheitshalbmesser bestimmen. Wir erhalten:

$$J_I = F \cdot a^2 \qquad a = \pm \sqrt{\frac{J_I}{F}}$$

$$J_U = F \cdot i^2 \qquad i = \pm \sqrt{\frac{J_U}{F}}$$

$$J_{II} = F \cdot b^2 \qquad b = \pm \sqrt{\frac{J_{II}}{F}}$$

Es sind a und b die Trägheitshalbmesser in bezug auf die Hauptachsen und wir erkennen, daß auch hier $a > i > b$ ist. Ziehen wir nach *Abb. 41* zu jeder Achse auf beiden Seiten die Parallelen im Abstand des Trägheitshalbmessers, so erhalten wir eine Schar von Linien, welche alle eine in sich zurücklaufende Kurve, nämlich eine Ellipse, als Tangenten einhüllen. Diese bezeichnet man als

„Culmannsche Trägheitsellipse“.

Abb. 41.

Die Form dieser Trägheitsellipse ist also vollständig gegeben, wenn ihre Halbachsen a und b bekannt sind. Man kann folglich die Trägheitsellipse dazu benutzen, um das Trägheitsmoment für eine beliebige Achse O U zu bestimmen, weil man zu diesem Zwecke nur die zur Achse parallelen Tangenten zu ziehen und deren Abstand i aus der Zeichnung abzulesen braucht. Es ist dann $J_U = F \cdot i^2$.

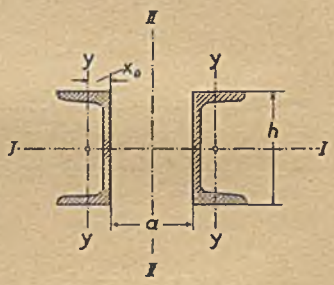


Abb. 42.

Ist zufälligerweise für einen Querschnitt $J_I = J_{II}$, so ist auch $a = b$ und in diesem Falle die Trägheitsellipse ein Kreis.

Man merke: Wenn die Trägheitsellipse ein Kreis ist, so sind die Trägheitsmomente für alle durch denselben Punkt gelegten Achsen gleich groß.

17. ***Beispiel:*** Bei einem aus zwei Einzelstäben bestehenden Stab unterscheidet man eine freie Achse II und eine ***Materialachse*** I *(Abb. 42)*. Es ist üblich, das Trägheitsmoment für die ***freie Achse*** erheblich größer

zu wählen als jenes für die Materialachse. Wir nehmen an, daß der Abstand $a = h$, gleich der Profilhöhe gewählt werde. In welchem Verhältnis stehen alsdann die Trägheitsmomente J_I und J_{II} bei einem Stab aus zwei U-Eisen *(Abb. 42)* zueinander?

Lösung: $$2 \,.\, J_x \,.\, z = 2\left[J_y + F \,.\left(\frac{h}{2} + x_0\right)^2\right],$$

hierin bedeutet $$z = \frac{J_{II}}{J_I},$$

$$z = \frac{J_y + F \,.\left(\frac{h}{2} + x_0\right)^2}{J_x}.$$

Die Beziehungen zwischen z und dem Normalprofil sind in *Abb. 43* graphisch dargestellt.

[NP	$a = h$ $z = \frac{J_{II}}{J_I}$	$z = 2{,}6$ $a_1 =$	$z = 2{,}6$ $a_2 =$
3	....7,57....	0,26 cm	5,50
4	....5,35....	1,73	7,05
5	....4,38....	3,04	8,52
$6^1/_2$	....3,67....	4,91	10,59
8	....3,27....	6,76	12,56
10	....2,95....	9,16	15,36
12	....2,82....	11,37	17,77
14	... 2,69. ..	13,71	20,71
16	....2,60....	16,00	23,36
18			
20			
22	....2,48....	22,70	31,26
24			
26			
28			
30	....2,35....	31,90	42,7

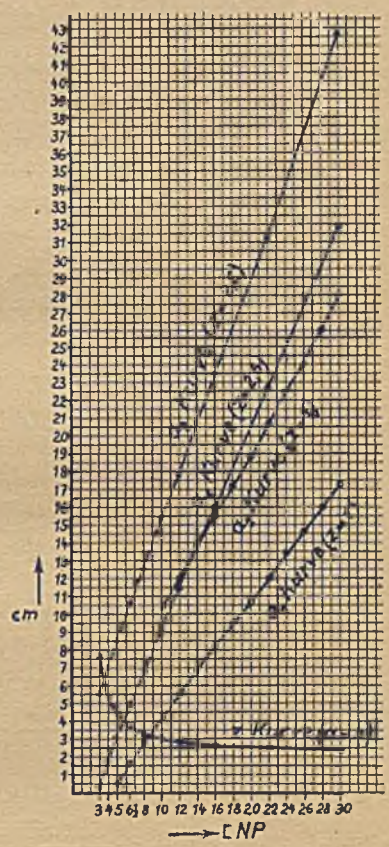


Abb. 43.

Entwickelt man die letzte Gleichung nach a, so ergibt sich:

$$a = 2 \,.\left[\pm\sqrt{\frac{J_x \,.\, z - J_y}{F}} - x_0\right].$$

Nimmt man an, daß das Verhältnis $\frac{J_{II}}{J_I} = z$ ein unveränderliches sein soll, beispielsweise $= 2{,}6$, so ergibt sich der notwendige Abstand a der [-Eisen voneinander aus der Formel

$$a = 2 \,.\left[\pm\sqrt{\frac{J_x \,.\, 2{,}6 - J_y}{F}} - x_0\right].$$

Da die Wurzel einen positiven und einen negativen Wert besitzt, so bekommen wir auch zwei Werte für a. Der positive Wert a, den wir a_1 nennen wollen, entspricht dem Abstand a in *Abb. 42*, der negative Wert a, den wir a_2 nennen wollen, entspricht dem Abstande a_2 in *Abb. 44*.

Will man die beiden U-Eisen so weit auseinanderrücken, daß die Trägheitsmomente J_I und J_{II}, bezogen auf die wagerechte und die senkrechte Hauptachse des Gesamtprofils, gleich groß sind, so muß z = 1 gesetzt werden, und es ergibt sich die Beziehung

$$a = 2 \cdot \left[\pm \sqrt{\frac{J_x - J_y}{F}} - x_0 \right].$$

Für [N P 20 erhält man beispielsweise

$$a_1 = 10{,}8 \text{ cm}, \quad a_2 = 18{,}8 \text{ cm}.$$

Wie weit die U-Eisen auseinanderzusetzen sind, damit die Trägheitsmomente gleich groß sind, ist in manchen Tabellen mit angegeben.

18. ***Beispiel:*** Es sind die Halbachsen der auf den Schwerpunkt des Querschnittes bezogenen Trägheitsellipse, die dann den besonderen Namen ***Zentralellipse*** bekommt, für ein Hohlrechteck laut *Abb. 45* zu berechnen; außerdem das Trägheitsmoment für die Diagonalachse.

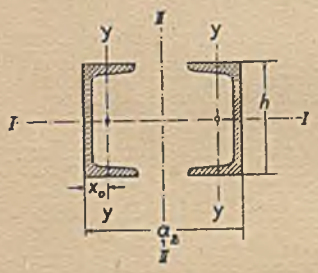


Abb. 44.

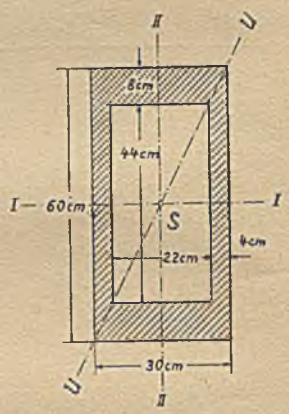


Abb. 45.

Lösung: Aus der Tabelle entnehmen wir das Trägheitsmoment eines vollen rechteckigen Querschnittes zu $\frac{b \cdot h^3}{12}$. Das Trägheitsmoment des hohlen rechteckigen Querschnittes bekommen wir in der Weise, daß wir das Trägheitsmoment des Hohlraumes des Hohlrechtecks abziehen.

$$J_I = \frac{30 \cdot 60^3}{12} - \frac{22 \cdot 44^3}{12} = 383\,829 \text{ cm}^4.$$

Entsprechend wird

$$J_{II} = \frac{60 \cdot 30^3}{12} - \frac{44 \cdot 22^3}{12} = 95\,957 \text{ cm}^4.$$

Die große Halbachse der Zentralellipse wird

$$a = \pm \sqrt{\frac{J_I}{F}} \text{ cm},$$

die kleine Halbachse $b = \pm \sqrt{\frac{J_{II}}{F}}$ cm,

$$F = 60 \cdot 30 - 44 \cdot 22 = 832 \text{ cm}^2,$$

$$a = \pm \sqrt{\frac{383\,829}{832}} = \pm\, 21{,}50 \text{ cm},$$

$$b = \pm \sqrt{\frac{95\,957}{832}} = \pm\, 10{,}74 \text{ cm}.$$

Aus der *Abb. 46* liest man ab $i = 13{,}64$ cm,

$$J_U = F \,.\, i^2,$$

$$J_U = 832 \,.\, 13{,}64^2 = 155\,000 \text{ cm}^4.$$

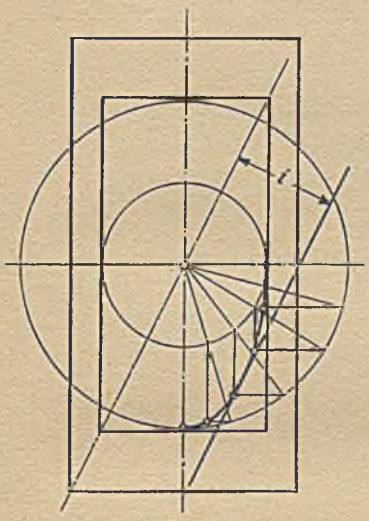


Abb. 46.

19. ***Beispiel:*** Es ist das Trägheits- und Widerstandsmoment des Blechträgers *Abb. 47* und *48* zu ermitteln.

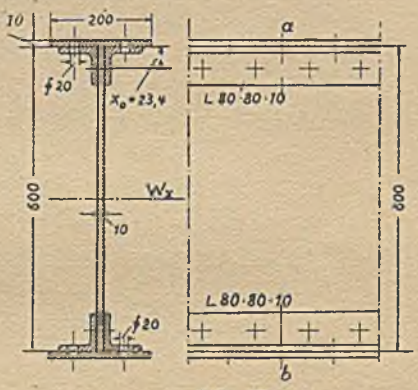


Abb. 47.

Lösung: Der Querschnitt muß unter Berücksichtigung seiner Schwächung durch die Nietlöcher bestimmt werden. Es werden immer diejenigen Nietlöcher abgezogen, die vom Schwerpunkt des Querschnittes am weitesten entfernt liegen. Hätte z. B. der Blechträger keine Gurtplatten, so kämen die Nietlöcher *Abb. 48a* in Frage, mit Gurtplatten die Nietlöcher *Abb. 48b*.

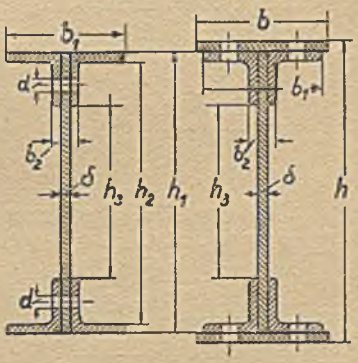


Abb. 48 *a*, *b*.

Ist das Trägheitsmoment eines beliebig angenommenen Querschnittes ohne Zuhilfenahme einer Tabelle zu berechnen, so erhält man dasselbe mittels folgender Gleichung:

$$J_x = \frac{1}{12}\Big[b\,(h^3 - h_1^{\,3}) + b_1\,(h_1^{\,3} - h_2^{\,3}) +$$

$$+\, b_2\,(h_2^{\,3} - h_3^{\,3}) + \delta \,.\, h_3^{\,3}\Big].$$

In dieser Formel sind von den Werten b, b_1 die Nietloch-⌀ abgezogen.

Der Querschnitt des Blechträgers ist als Differenz einzelner Rechtecke angesehen und danach das Trägheitsmoment bestimmt worden. Diese Berechnungsart liefert infolge Nichtberücksichtigung der Ausrundungen der Winkel-

eisen etwas andere Widerstandsmomente als die Berechnungsart bei Verwendung der für Winkeleisen vorhandenen Zahlenwerte der Profiltabellen. Deshalb ist die letzte Berechnungsart mehr zu empfehlen.

$$J_x = \frac{1}{12}\left[16\,(62^3 - 60^3) + 13\,(60^3 - 58^3) + 3\,(58^3 - 44^3) + \right.$$

$$\left. + 1\,.\,44^3\right] = 86\,980 \text{ cm}^4.$$

Das Widerstandsmoment W_x ergibt sich, wenn man durch den Abstand der äußersten Faser von der Bezugsachse dividiert,

$$W_x = \frac{J_x}{h/_2} = \frac{86\,980}{31} = 2805{,}8 \text{ cm}^3.$$

Bei Benutzung der Tabellen ergibt sich:

$$J_x = \frac{16}{12}(62^3 - 60^3) + \frac{1\,.\,60^3}{12} + 4\,.\,[87{,}5 + 15{,}1\,.\,27{,}66^2] -$$

$$- 4\,.\left[\frac{2\,.\,2^3}{12} + 2\,.\,2\,.\,30^2\right],$$

$$J_x = 87\,368{,}55 \text{ cm}^4,$$

$$W_x = \frac{87\,368{,}55}{31} = 2818{,}34 \text{ cm}^3.$$

20. ***Beispiel:*** Ein Balken mit rechteckigem Querschnitt soll aus einem Baumstamm von d cm ⌀ so ausgehauen werden, daß das Widerstandsmoment des Balkens einen Höchstwert bekommt *(Abb. 49)*. Wie groß sind die Seitenlängen a und b zu wählen?

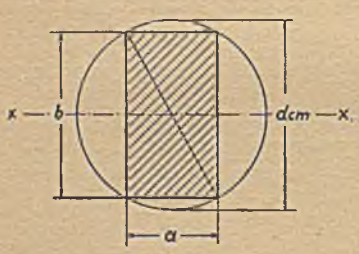


Abb. 49.

Lösung: Aus unserer Entwicklung der Biegungsgleichung entnehmen wir das Widerstandsmoment eines rechteckigen Querschnittes zu

$$W_x = \frac{a\,.\,b^2}{6} \text{ cm}^3.$$

Aus der *Abb. 49* erkennen wir die Beziehung:

$$a^2 + b^2 = d^2$$

$$b^2 = d^2 - a^2$$

$$W_x = \frac{a\,(d^2 - a^2)}{6} \text{ cm}^3$$

Dieser Ausdruck muß einen Höchstwert bekommen.

d = 1; a	W
0,1	0,0165
0,2	0,032
0,3	0,0455
0,4	0,056
0,5	0,0625
0,6	0,064
0,7	0,0595
0,55	0,0639
0,58	0,0641

Es muß sein $a = 0{,}58 \,.\, d$

$$b = \sqrt{d^2 - a^2} = d\sqrt{1 - 0{,}58^2} = 0{,}81 \,.\, d.$$

Zieht man im Baumquerschnitt einen Durchmesser, trägt auf ihn vom Umfang aus 0,21 . d cm nach innen ab und errichtet dort Senkrechte auf den Durchmesser, so kennt man das günstigste Rechteck *(Abb. 50)*.

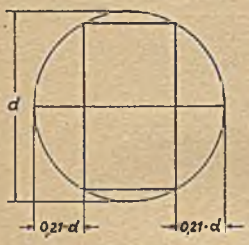


Abb. 50.

21. ***Beispiel:*** Für den in *Abb. 51* dargestellten Querschnitt sind die Widerstandsmomente W_I und W_{II} zu ermitteln.

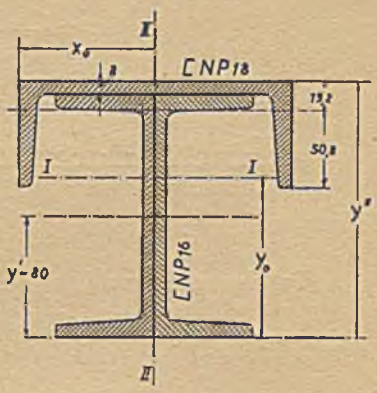


Abb. 51.

Lösung: Zuerst sucht man den Schwerpunkt des Gesamtprofils unter Benutzung des Lehrsatzes: Das statische Moment der ganzen Fläche ist gleich der Summe der statischen Momente der Flächenteile.

$$y_0 = \frac{\Sigma f \,.\, y}{F} \text{ cm},$$

$$y_0 = \frac{2 \,.\, 24 \,.\, 8 + 28\,(16 + 0{,}8 - 1{,}92)}{2 \,.\, 24 + 28} = 10{,}53 \text{ cm}.$$

Aus der Profiltabelle entnehmen wir die Trägheitsmomente:

$J_x = 925$ cm⁴ für das U-Eisen NP 16,

$J_y = 114$ „ „ „ „ „ 18, reduziert auf die Hauptachse I des Gesamtprofils:

$$J_I = 2\,(925 + 24 \,.\, 2{,}53^2) + 114 + 28\,(16 + 0{,}8 - 10{,}53 - 1{,}92)^2,$$

$$J_I = 2801 \text{ cm}^4,$$

$$W_I = \frac{J_I}{y_0} = \frac{2801}{10{,}53} = 266 \text{ cm}^3,$$

J_x für das U-Eisen NP 18 = 1354 cm⁴,

J_y „ „ „ „ 16 = 85,3 cm⁴, reduziert auf die Hauptachse II des Gesamtprofils:

$$J_{II} = 1354 + 2 \,.\, (85{,}3 + 24 \,.\, 1{,}84^2) = 1520{,}55 \text{ cm}^4,$$

$$W_{II} = \frac{J_{II}}{x_0} = \frac{1520{,}55}{9} = 168{,}95 \text{ cm}^3.$$

22. ***Beispiel:*** Wird ein Kranträger *(Abb. 52)* mit Kranschiene ausgerüstet, so muß man je nach der Art der Schienenbefestigung zwischen tragenden und nicht tragenden Schienen unterscheiden. Ist eine Abnutzung nicht zu befürchten, so kann die Schiene mit tragen, sie muß dann aber nach Vorschrift vernietet werden. Diesen letzten Fall nehmen wir an. Es soll das Träg-

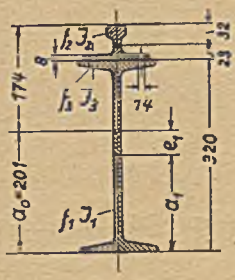


Abb. 52.

heits- und Widerstandsmoment bestimmt werden unter Berücksichtigung der Schwächung durch die Nietlöcher.

Lösung: Zunächst die Schwerpunktslage unter Anwendung des Satzes vom statischen Moment:

$$a_0 = \frac{f_1 \,.\, a_1 + f_2 \,.\, a_2 - 2\, f_3 \,.\, a_3}{F},$$

der Querschnitt der Schiene $f_2 = 28{,}7\ \text{cm}^2$ (lt. Tabelle),

$$a_0 = \frac{77{,}8 \,.\, 16 + 28{,}7 \,.\, 34{,}3 - 2 \,.\, (1{,}73 + 0{,}8)\, 1{,}4 \,.\, (32 + 0{,}8 - 1{,}265)}{77{,}8 + 28{,}7 - 7{,}08},$$

$$a_0 = 20{,}17\ \text{cm}.$$

Trägheitsmoment J_2 der Kranschiene $= 94\ \text{cm}^4$ (laut Tabelle),

$$J = J_1 + f_1 \,.\, e_1^{\,2} + J_2 + f_2 \,.\, e_2^{\,2} - 2\,(J_3 + f_3 \,.\, e_3^{\,2}),$$

$$J = 12\,510 + 77{,}8 \,.\, 4{,}17^2 + 94 + 28{,}7 \,.\, 14{,}13^2 - 2\left[\frac{1{,}4 \,.\, 2{,}53^3}{12} + \right.$$

$$\left. + (1{,}73 + 0{,}8) \,.\, 1{,}4 \,.\, 11{,}365^2\right],$$

$$J = 18\,765\ \text{cm}^4,$$

das Widerstandsmoment

$$W = \frac{J}{a_0} = \frac{18\,765}{20{,}17} = 930{,}3\ \text{cm}^3.$$

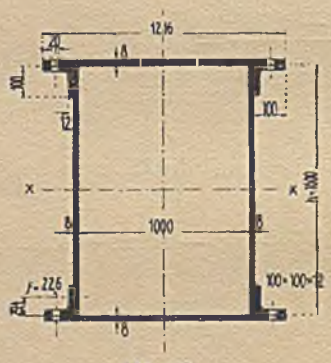


Abb. 53.

23. ***Beispiel:*** Für den Ausleger eines Kranes sei der Querschnitt *Abb. 53* gewählt. Wie groß sind Trägheits- und Widerstandsmoment bezogen auf die Neutralachse x?

Lösung:

J der beiden Seitenbleche $2 \,.\, \frac{0{,}8 \,.\, 160^3}{12}$	=	546 133 cm⁴
J „ „ Gurtbleche $\frac{121{,}6}{12} \,.\, (161{,}6^3 - 160^3)$	=	1 258 855 cm⁴
J „ vier Winkeleisen $4 \,.\, [207 + 22{,}6 \,.\, 77{,}06^2]$	=	537 645 cm⁴
		2 342 633 cm⁴
Abzug für Nietlöcher $2 \,.\, \frac{2}{12}\,(161{,}6^3 - 157{,}6^3)$	=	101 895 cm⁴
Gesamt-Trägheitsmoment J_{ges}	=	2 240 738 cm⁴

Widerstandsmoment $W = \frac{J_{ges}}{\frac{h}{2}} = \frac{2\,240\,738}{80{,}8}$,

$W = 27\,732\ cm^3$.

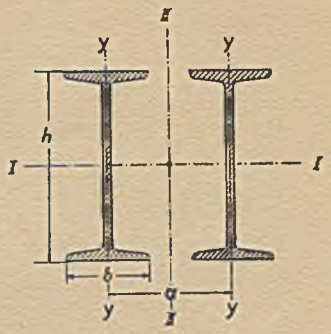


Abb. 54.

24. ***Beispiel:*** Zwei I-Eisen *Abb. 54* sollen einen solchen Abstand a voneinander bekommen, daß die Widerstandsmomente für die beiden Hauptachsen I und II gleich groß sind.

Lösung: Es muß folgende Beziehung bestehen:

$$\frac{J_I}{\frac{h}{2}} = \frac{J_{II}}{\frac{a+b}{2}},$$

I NP Nr.	a cm
8	7,55
9	
10	9,40
11	
12	
13	
14	
15	13,85
16	
17	
18	
19	
20	18,32
21	
22	
23	
24	
25	22,83
26	
27	
28	
29	
30	26,77
32	
34	
36	
38	
40	34,84
$42^1/_2$	
45	
$47^1/_2$	
50	42,57
55	
60	50,64

$$2 \cdot \frac{J_x}{\frac{h}{2}} = 2 \cdot \frac{J_y + F \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2}{\frac{a+b}{2}},$$

$$\frac{J_x}{h} = \frac{J_y + F \cdot \frac{a^2}{4}}{a+b}$$

$$J_x \cdot a + J_x \cdot b = J_y \cdot h + F \cdot \frac{a^2}{4} \cdot h,$$

$$a^2 - a \cdot \frac{4 \cdot J_x}{F \cdot h} = \frac{4}{F} \cdot \left(J_x \cdot \frac{b}{h} - J_y\right),$$

$$a = \frac{2 \cdot J_x}{F \cdot h} \pm \sqrt{\frac{4}{F} \cdot \left(J_x \cdot \frac{b}{h} - J_y\right) + \left[\frac{2\,J_x}{F \cdot h}\right]^2},$$

bezeichnen wir $\frac{2 \cdot J_x}{F \cdot h} = c$, so wird

$$a = c \pm \sqrt{c^2 + 2\,c \cdot b - \frac{4 \cdot J_y}{F}}.$$

Das negative Vorzeichen hat für uns keine Bedeutung, folglich

$$a = c + \sqrt{c^2 + 2\,c\,b - \frac{4 \cdot J_y}{F}}.$$

Man braucht nur einige Werte zu berechnen, um den Verlauf der Kurve *(Abb. 55)* einzeichnen zu können. Alle anderen gebrauchten Werte lassen sich alsdann leicht aus dem Diagramm ablesen.

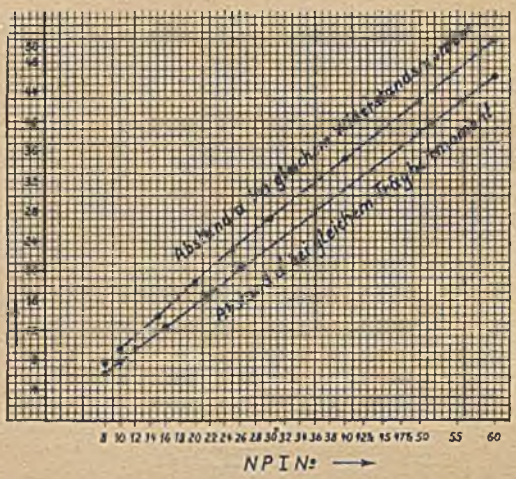


Abb. 55.

In das Diagramm ist auch noch die Kurve des Abstandes a' zweier [-Eisen mit aufgenommen worden, bei denen die Hauptträgheitsmomente des gemeinsamen Querschnittes gleich groß sind: $J_I = J_{II}$.

25. ***Beispiel:*** Um wieviel verringert sich das kleinste vorkommende Widerstandsmoment des nebenstehend abgebildeten Trägers *(Abb. 56)*, wenn man mit der z-Achse als Mittelpunkt ein Loch von 50 mm Durchmesser anbringt?

Lösung: Zunächst ermitteln wir den Schwerpunktsabstand y_0 des ungelochten Trägers.

$$25 \,.\, 5 \,.\, 37{,}5 + 35 \,.\, 2{,}5 \,.\, 17{,}5 + 5 \,.\, 7{,}5 \,.\, 2{,}5 = (25 \,.\, 5 + 35 \,.\, 2{,}5 + 5 \,.\, 7{,}5) \,.\, y_0$$

$$y_0 = 252{,}5 \text{ mm.}$$

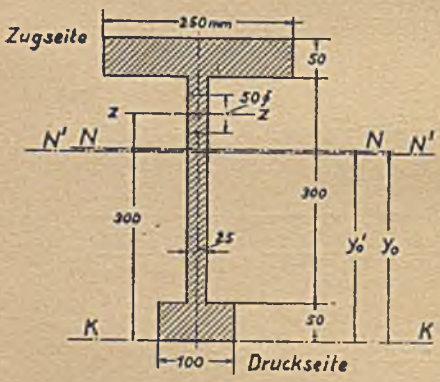


Abb. 56.

Das Trägheitsmoment des ungelochten Trägers in bezug auf die K-Achse wird:

$$\frac{25 \,.\, 40^3}{3} - \frac{22{,}5 \,.\, 35^3}{3} + \frac{7{,}5 \,.\, 5^3}{3}$$

$$= 212\,083{,}32 \text{ cm}^4.$$

Dieses Trägheitsmoment J_K wird auf die Schwerachse N — N reduziert:

$$J_N = J_K - F \,.\, y_0^2,$$

$$J_N = 212\,083{,}32 -$$

$$- (25 \,.\, 5 + 35 \,.\, 2{,}5 + 5 \,.\, 7{,}5) \,.\, 25{,}25^2,$$

$$J_N = 52\,692{,}7 \text{ cm}^4,$$

$$W_{min} = \frac{52\,692{,}7}{25{,}25} = 2086{,}8 \text{ cm}^3;$$

der gelochte Träger hat eine andere Schwerpunktslage.

$$25 \,.\, 5 \,.\, 37{,}5 + 35 \,.\, 2{,}5 \,.\, 17{,}5 + 5 \,.\, 7{,}5 \,.\, 2{,}5 - 5 \,.\, 2{,}5 \,.\, 30 =$$

$$= (25 \,.\, 5 + 35 \,.\, 2{,}5 + 5 \,.\, 7{,}5 - 5 \,.\, 2{,}5) \,.\, y_0',$$

$$y_0' = 250 \text{ mm.}$$

Das Trägheitsmoment des gelochten Trägers in bezug auf die K-Achse wird:

$$212\,083{,}32 - \left[\frac{2{,}5 \,.\, 5^3}{12} + 2{,}5 \,.\, 5 \,.\, 30^2\right] = 200\,807{,}28 \text{ cm}^4.$$

Dieses Trägheitsmoment wird auf die Schwerachse N′ — N′ reduziert,

$$J_{N'} = 200\,807{,}28 - (25 \,.\, 5 + 35 \,.\, 2{,}5 + 5 \,.\, 7{,}5 - 5 \,.\, 2{,}5) \,.\, 25^2,$$

$$J_{N'} = 52\,369{,}78 \text{ cm}^4,$$

das Widerstandsmoment W_{min}' des gelochten Trägers:

$$W_{min}' = \frac{52\,369{,}78}{25} = 2094{,}8 \text{ cm}^3.$$

Wir sehen also, daß sich nicht, wie wir erwartet hatten, das kleinste vorkommende Widerstandsmoment des Querschnittes durch Bohren des Loches an der betreffenden Stelle verringert, sondern im Gegenteil um ein geringes erhöht. Dieses Resultat erklärt sich dadurch, daß die Verringerung des

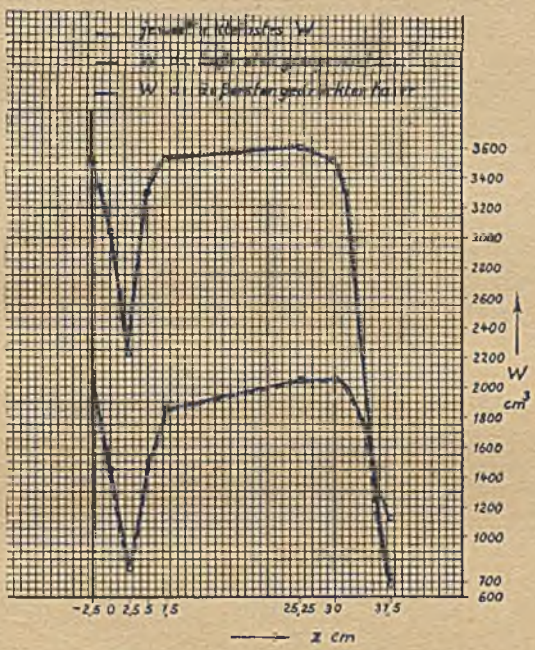


Abb. 57.

Trägheitsmomentes gleichzeitig eine Verringerung des Abstandes der äußersten Faser zur Folge hat, da ja jetzt die neue Bezugsachse N′ — N′ maßgebend ist.

Die graphische Darstellung *Abb. 57* zeigt den vermutlichen Verlauf der Änderung des jeweiligen kleinsten Widerstandsmoments des Trägerquerschnittes, wenn das erwähnte Loch von unten nach oben durch den Querschnitt wandert.

26. ***Beispiel:*** In welchem Verhältnis müssen die Innen- und Außendurchmesser hohler, kreisrunder Querschnitte zueinander stehen, wenn das Widerstandsmoment unverändert bleiben soll.

Lösung: Laut Tabelle ist das Widerstandsmoment W eines kreisrunden, hohlen Querschnittes:

$$W = 0{,}1 \,.\, D^3 \,.\, (1 - \alpha^4),$$

hierin bedeutet D den Außendurchmesser in cm, $\alpha = \frac{d}{D}$, α nennt man das Höhlungsverhältnis.

$$\alpha = \sqrt[4]{1 - \frac{10\,W}{D^3}}.$$

Nehmen wir das unveränderliche Widerstandsmoment beliebig mit $W = 300\ cm^3$ an, so wird

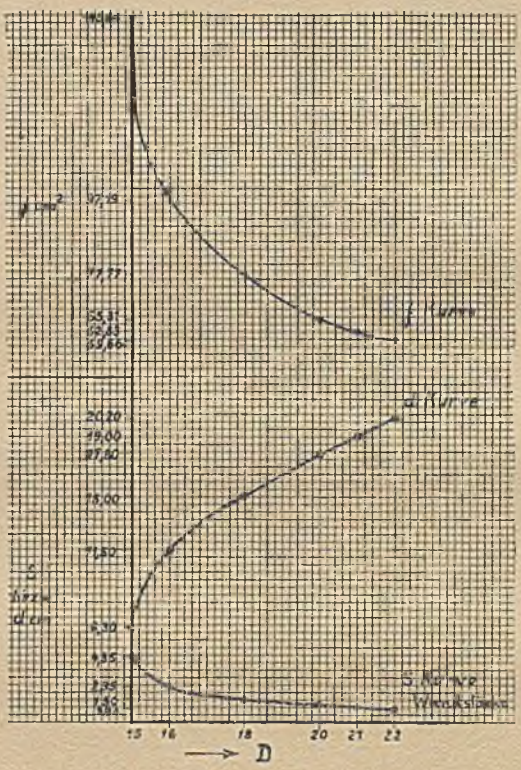


Abb. 58.

D cm	d cm	Wandstärke δ cm	Flächeninhalt f cm²
15	6,3	4,35	145,54
16	11,5	2,25	97,19
18	15,0	1,50	77,77
20	17,8	1,10	65,31
21	19,0	1,00	62,83
22	20,2	0,90	59,66

In *Abb. 58* sind diese Zusammenhänge graphisch dargestellt. Je größer der Durchmesser, um so wirtschaftlicher gestaltet sich die Ausführungsform, weil der Materialverbrauch abnimmt.

Querkraft- und Biegungsmomentenflächen.

Die Festigkeitsbedingung $\sigma_i = \frac{M_b}{W} \leqq k_b$ läßt erkennen, daß das größte auftretende Biegungsmoment der Berechnung zugrunde zu legen ist. Will man sich ein Bild von dem Anwachsen der Biegungsmomente machen, so kann man diese unter Benutzung eines Maßstabes (1 mm $\equiv$ x cmkg) senkrecht zur Stabachse an der jeweiligen Angriffsstelle auftragen, und die Endpunkte miteinander verbinden *(Abb. 59 a)*. Die so entstehende Schaulinie heißt Momentenlinie, und die von der Schaulinie und der Abszisse eingeschlossene Fläche nennt man ***Momentenfläche***. Ebenso verfährt man mit der Querkraft; man erhält sinnentsprechend die Querkraftlinie und die ***Querkraftfläche*** *(Abb. 59 b)*. Die auf Abscherung wirkende Kraft, welche in den Querschnitten wirkt und senkrecht zur Stabachse gerichtet ist, hat insofern für die Berechnung des Stabes auf Biegung Bedeutung, weil sie ein Mittel bietet, den gefährlichen Querschnitt, d. i. derjenige, in welchem das größte vorkommende Biegungsmoment wirkt, zu finden. Man merke: das größte Biegungsmoment tritt an derjenigen Stelle auf, wo die Querkraftlinie die Abszisse schneidet. Ein gefährlicher Querschnitt liegt immer an der Stelle des Trägers, wo die Querkraft ihr Vorzeichen wechselt.

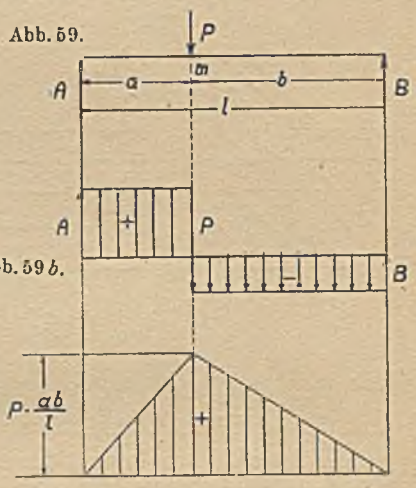


Abb. 59 a.

Will man die Momenten- bezw. die Querkraftfläche aufzeichnen, so sind folgende Regeln zu beachten:

1. Links vom Querschnitt im Uhrzeigersinne drehende Momente werden als positiv, entgegengesetzt drehende Momente als negativ bezeichnet. Diese Regel gilt nur, wenn die Biegungsmomente links vom Querschnitt abgelesen werden. Wenn man die Momente rechts vom Querschnitt ablesen will, so sind die Vorzeichenregeln umzukehren. Positive Momente werden von der Abszisse nach oben abgetragen, negative nach unten. Ist das Biegungsmoment positiv, so liegt die Zugseite unten; ist es negativ, so liegt sie oben.

2. Nach oben gerichtete Querkräfte sind positiv, nach unten gerichtete Querkräfte sind negativ, wenn sie am linken Freiträger abgelesen werden. Diese Vorzeichenregel ist umzukehren, wenn die Querkraft am rechten Freiträger abgelesen wird *(Abb. 60)*. — Positive Querkräfte werden nach oben abgetragen, negative nach unten. Die Querkraft in einem beliebigen Querschnitt ist gleich der algebraischen Summe der links oder rechts vom Schnitt angreifenden äußeren Kräfte.

Man kann sich die Berechnung von auf Biegung beanspruchten Trägern dadurch erleichtern, daß man die Größe des jeweiligen Biegungsmoments aus der Querkraftfläche abliest; es besteht nämlich die Beziehung: die Ordinate der Momentenlinie ist gleich dem Inhalt der zugehörigen Querkraftfläche.

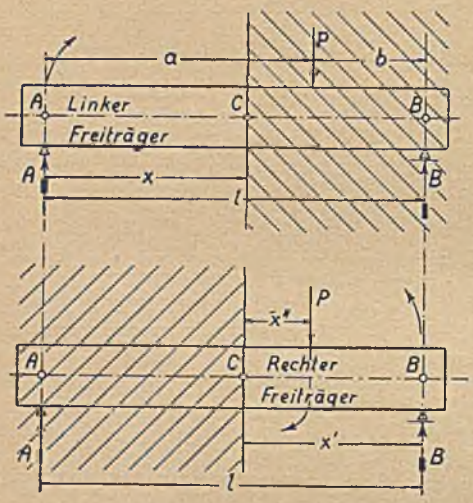


Abb. 60.

So gilt z. B. in bezug auf *Abb. 59:*

$$M_m = A \,.\, a = B \,.\, b$$

Drehpunkt bei B:

$$+A \,.\, l - P \,.\, b = o; \quad A = P \cdot \frac{b}{l},$$

Drehpunkt bei A:

$$-B \,.\, l + P \,.\, a = o; \quad B = P \cdot \frac{a}{l}.$$

$M_m = P \,.\, \frac{a \,.\, b}{l}$; der Inhalt der Querkraftfläche links vom Punkt m, für welchen das Moment M_m gilt, ist ebenfalls $A \,.\, a = P \,.\, \frac{a \,.\, b}{l}$ *(Abb. 59 a* und *59 b)*. Wenn auch unsere Ergebnisse nur aus diesem Sonderfall abgeleitet werden, so kommt ihnen doch allgemeine Gültigkeit zu.

Jeder Träger auf zwei Stützen kann durch einen beliebigen Querschnitt in zwei Freiträger zerlegt werden, einen links und einen rechts vom Schnitt *(Abb. 60)*.

Berechnung und Untersuchung verschiedener Träger auf Biegungsfestigkeit.

a) Freiträger.

27. ***Beispiel:*** Ein Freiträger *(Abb. 61 a* und *b)* besteht aus zwei normalen ungleichschenkligen Winkeleisen Nr. $\frac{10}{20} \times 14$, die so miteinander verbunden sind, daß sie als ein Körper angesehen werden können. Es ist $P_2 = 400$ kg, $P_3 = 600$ kg, $a = 600$ mm, $a_1 = 300$ mm, $l = 900$ mm. Wie groß darf P_1 sein, wenn die größte zulässige Randspannung mit $1000 \frac{kg}{cm^2}$ angenommen wird.

Lösung: Der Querschnitt ist zwar symmetrisch zur y-Achse, aber nicht zur x-Achse. Bei angenommener senkrechter Belastung würde die Kraftlinie mit der senkrechten Symmetrieachse y, die Hauptachse des Querschnittes ist, zusammenfallen, d. h. die Nullinie fällt mit der Hauptachse x zusammen. Das Spannungsschaubild zeigt geradliniges Anwachsen der Spannungen nach den Rändern.

Es wird das Widerstandsmoment für die Druckseite

$$W' = \frac{J_x}{e_1} = \frac{2 \,.\, 1653}{12{,}8} = 258 \text{ cm}^3,$$

für die Zugseite $W'' = \frac{J_x}{e_2}$,

$$W'' = \frac{2 \,.\, 1653}{7{,}2} = 458 \text{ cm}^3.$$

Da bei Walzeisen die zulässigen Beanspruchungen auf Zug und Druck gleich groß sind, so ist hier die Druckseite die am meisten gefährdete, weil ihre Randfasern den größten Abstand von der Nullinie haben; also

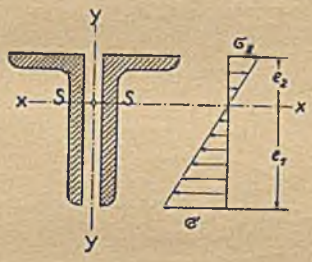


Abb. 61 *a*.

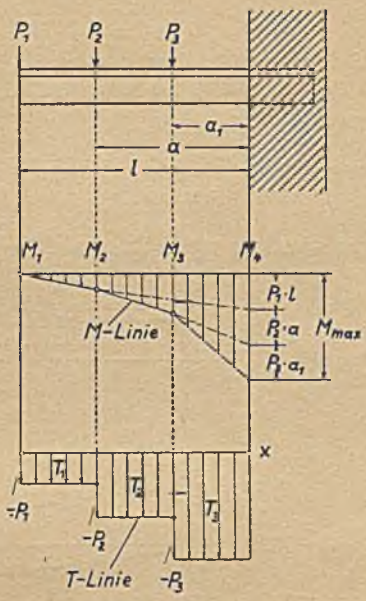


Abb. 61 *b*.

$$M_{max} = W' \,.\, k_b = 258 \,.\, 1000 = 258\,000 \text{ cmkg}.$$

Es ist $M_{max} = -P_1 \,.\, l - P_2 \,.\, a - P_3 \,.\, a_1 = -P_1 \,.\, 90 - 400 \,.\, 60 - 600 \,.\, 30$

$$M_{max} = -P_1 \,.\, 90 - 42\,000 \text{ cmkg};$$

das negative Vorzeichen von M bedeutet, daß die Zugseite oben liegt. Hat man dies erkannt, so braucht man in die Biegungsgleichung nur den absoluten Wert von M einzuführen. Die Querkraft kann für jede Teilstrecke bestimmt werden und bleibt zwischen den Einzellasten unveränderlich:

Querkraft $T_1 = -P_1$,

„ $T_2 = -P_1 - P_2$; $T_2 = T_1 - P_2$,

„ $T_3 = -P_1 - P_2 - P_3$; $T_3 = T_2 - P_3$.

Mit diesen Ordinaten erhält man das treppenartig abgestufte Querkraftdiagramm. Beim Punkte x trifft die T-Linie die Abszisse, d. h. der gefährliche Querschnitt liegt an der Einspannungsstelle, und die links von dieser gelagerte Querkraftfläche gibt die Größe des größten Biegungsmoments an.

$$M_{max} = +T_1 \,.\, (l - a) + T_2 \,.\, (a - a_1) + T_3 \,.\, a_1 =$$

$$-P_1 \,.\, 30 + (-P_1 - 400) \,.\, 30 + (-P_1 - 1000) \,.\, 30,$$

$$M_{max} = -P_1 \,.\, 90 - 42\,000 \text{ cmkg},$$

$$M_{max} = 258\,000 \text{ cmkg} = P_1 \,.\, 90 + 42\,000 \text{ cmkg},$$

$$P_1 = \frac{258\,000 - 42\,000}{90} = 2400 \text{ kg}.$$

Die Spannung in der äußersten gezogenen Faser ist

$$\sigma_z = \frac{2400 \,.\, 90 + 400 \,.\, 60 + 600 \,.\, 30}{458},$$

$$\sigma_z = 563{,}3 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} < 1000 \frac{\text{kg}}{\text{cm}_2}.$$

Der Querschnitt ist unwirtschaftlich; das Material ist nicht vollkommen ausgenutzt.

28. ***Beispiel:*** Ein Holzträger mit quadratischem Querschnitt soll nach *Abb. 62* belastet werden. Wie groß muß die Quadratseite a des Querschnittes werden, wenn $k_b = 100 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ vorgeschrieben ist?

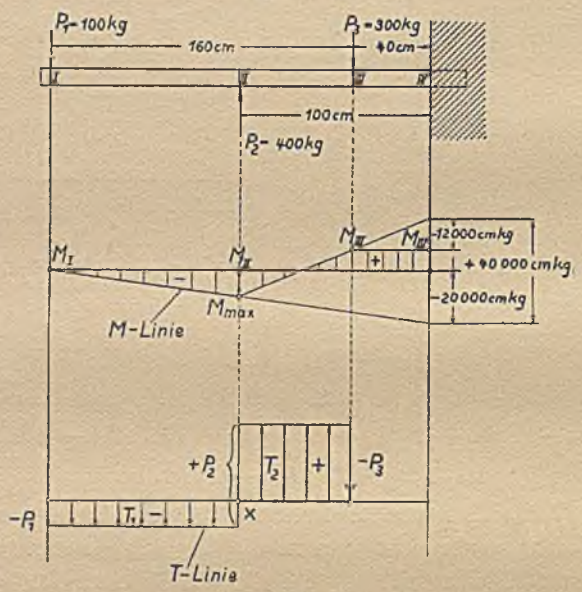


Abb. 62.

Lösung: Wir bestimmen zunächst in den Querschnitten I, II, III und IV die Biegungsmomente.

$M_I = 0$; $M_{II} = -P_1 \,.\, 100 = -100 \,.\, 100 = -10\,000$ cmkg;
$M_{III} = -P_1 \,.\, 160 + P_2 \,.\, 60 = -100 \,.\, 160 + 400 \,.\, 60$,
$M_{III} = +8000$ cmkg; $M_{IV} = -P_1 \,.\, 200 + P_2 \,.\, 100 - P_3 \,.\, 40$;
$M_{IV} = -100 \,.\, 200 + 400 \,.\, 100 - 300 \,.\, 40 = +8000$ cmkg.

Aus der Momenten- und der Querkraftfläche sehen wir, daß das größte Biegungsmoment im Querschnitt II zu suchen ist. Punkt x zeigt dies an.

$$M_{max} = 10\,000 \text{ cmkg}.$$

Für den quadratischen Querschnitt ist das Widerstandsmoment $W = \frac{a^3}{6}$

$$M_{max} = W \,.\, k_b,$$

$$10\,000 = \frac{a^3}{6} \,.\, 100,$$

$$a = \sqrt[3]{\frac{6 \,.\, 10\,000}{100}} = 8{,}43 \text{ cm},$$

ausgeführt $\qquad a = 85\ mm.$

Voraussetzung für die Richtigkeit des Resultats ist das unbedingt gewährleistete gleichzeitige Auftreten der drei Kräfte. Besteht die Möglichkeit, daß eine beliebige der drei Kräfte ausbleibt, so kommen folgende Zusammenstellungen in Frage*:

P_1 bleibt aus; $M_{III} = +400 \,.\, 60 = +24\,000$ cmkg;
$M_{IV} = +400 \,.\, 100 - 300 \,.\, 40 = +28\,000$ cmkg.
P_2 bleibt aus; $M_{III} = -100 \,.\, 160 = -16\,000$ cmkg,
$M_{IV} = -100 \,.\, 200 - 300 \,.\, 40 = -32\,000$ cmkg.
P_3 bleibt aus; $M_{II} = -100 \,.\, 100 = -10\,000$ cmkg,
$M_{IV} = -100 \,.\, 200 + 400 \,.\, 100 = +20\,000$ cmkg.

$$M_{max} = 32\,000 \text{ cmkg}; \quad M_{max} = W \,.\, k_b; \quad 32\,000 = \frac{a^3}{6} \,.\, 100;$$

$$a = \sqrt[3]{\frac{6 \,.\, 32\,000}{100}} = 12{,}43 \text{ cm} \qquad a = 125\ mm.$$

Entgegengesetzte Vorzeichen des Biegungsmomentes bedeuten immer entgegengesetzte Durchbiegungen der elastischen Linie.

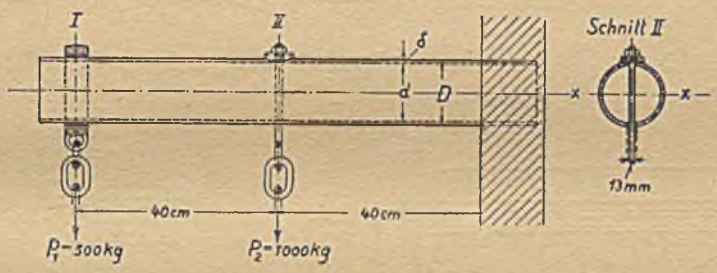


Abb. 63.

29. ***Beispiel:*** Ein Stahlrohr ist laut *Abb. 63* belastet. k_b angenommen $= 1000 \frac{kg}{cm^2}$. Welcher Rohrquerschnitt ist zu wählen?

Lösung: Aus der Tabelle entnehmen wir

$$W = 0{,}1 \,.\, D^3 (1 - \alpha^4) \text{ cm}^3.$$

Hierin bedeutet $\alpha = \frac{d}{D}$ das Höhlungsverhältnis. Wir nehmen die Tabelle der Rohrquerschnitte zur Hand und wählen vorläufig einen mittleren Wert $\alpha = \frac{7}{8}$.

* Anmerkung: Bei Einzellasten kann die Querkraftlinie nur im Angriffspunkt einer Kraft die Abszisse schneiden, d. h. der gefährliche Querschnitt kann bei Einzellasten nur im Angriffspunkt einer Last liegen.

$$M_{max} = 500 \,.\, 80 + 1000 \,.\, 40 = 80\,000 \text{ cmkg},$$

$$M_{max} = W \,.\, k_b;\; W = \frac{M_{max}}{k_b} = \frac{80\,000}{1000} = 80 \text{ cm}^3.$$

$$0{,}1 \,.\, D^3\left(1 - \left(\frac{7}{8}\right)^4\right) = 80;\quad D = \sqrt[3]{\frac{800}{1 - \left(\frac{7}{8}\right)^4}} = 12{,}45 \text{ cm}.$$

Aus der Tabelle für Stahlrohre wählen wir ein solches von 130 mm Außendurchmesser, 8 mm Wandstärke, Widerstandsmoment $W = 88{,}14$ cm³, Trägheitsmoment $J = 572{,}9$ cm⁴. Nunmehr haben wir zu kontrollieren, wie groß die Randspannung im durchbohrten Querschnitt II wird. Mit genügender Genauigkeit kann man das Trägheitsmoment $J_{x_{II}}$ berechnen zu:

$$J_{x_{II}} = J - \left[\frac{1{,}3 \,.\, D^3}{12} - \frac{1{,}3 \,.\, d^3}{12}\right] = 572{,}9 - \frac{1{,}3}{12}\left[13^3 - 11{,}4^3\right] = 495{,}4 \text{ cm}^4,$$

$$W_{II} = \sim \frac{J_{x_{II}}}{D/2} = \frac{495{,}4}{6{,}5} = 76{,}2 \text{ cm}^3.$$

$$M_{II} = W_{II} \,.\, \sigma_{b_{II}}.$$

$$500 \,.\, 40 = 76{,}2 \,.\, \sigma_{b_{II}};\; \sigma_{b_{II}} = \frac{500 \,.\, 40}{76{,}2} = 262 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} < 1000 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2},$$

σ_b im gefährlichen Querschnitt wird $\frac{80\,000}{88{,}14} = 908 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} < 1000 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$.

30. ***Beispiel:*** Welche Abhängigkeit besteht zwischen dem Abstand e (Mitte Höhlung) des quadratischen hohlen Stabquerschnittes *(Abb. 64 a* u. *b)*,

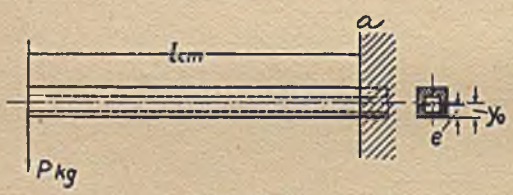


Abb. 64 *a*.

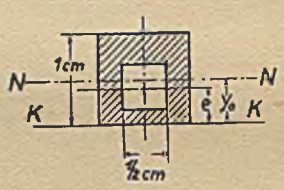


Abb. 64 *b*.

und der anzuhängenden Last bei einem Verschieben der quadratischen Höhlung vom oberen nach dem unteren Rande zu. Die gefährdete Faserschicht liegt am Rande der Zugseite.

Lösung: Wir suchen zunächst den Schwerpunktsabstand von der K-Achse.

$$1^2 \,.\, \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \,.\, e = \left[1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] \,.\, y_0;\; y_0 = \frac{2 - e}{3};$$

Das Trägheitsmoment des Querschnittes in bezug auf die K-Achse:

$$J_K = \frac{1^4}{3} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{12} - \frac{1}{4} \,.\, e^2 = \frac{63}{192} - \frac{1}{4} e^2;$$ reduziert auf die N-Achse:

$$J_N = J_K - F.y_0^2 = \frac{63}{192} - \frac{1}{4}e^2 - \left[\left(1 - \frac{1}{4}\right).\left(\frac{2-e}{3}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{63}{192} - \frac{(2-e)^2}{12} - \frac{e^2}{4}\ \text{cm}^4.$$

Das Widerstandsmoment bezogen auf die äußerste gezogene Faser:

$$W = \frac{J_N}{1 - y_0}\ \text{cm}^3 = \frac{\frac{63}{192} - \frac{(2-e)^2 + 3e^2}{12}}{1 - \frac{2-e}{3}}\ \text{cm}^3 =$$

$$\frac{63 - 16.[(2-e)^2 + 3e^2]}{64(1+e)}\ \text{cm}^3.$$

Die Festigkeitsgleichung lautet: $M = W.k_b$,*

$P.l = W.k_b$, $P = W.\frac{k_b}{l}$ kg, daraus $\frac{P}{W}$ = konstant, d. h. P ändert sich in demselben Maße wie sich W ändert. Die graphische Darstellung *Abb. 65* veranschaulicht die Beziehung W : e bezw. P : e. Die wirtschaftlich günstigste Lage der Höhlung befindet sich ungefähr im Abstand e = 0,43 cm vom unteren Rande des Querschnittes.

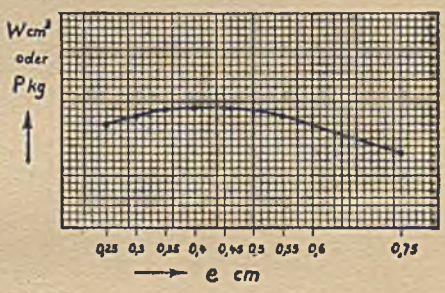


Abb. 65.

31. ***Beispiel (Abb. 66):***

Ein Balken von quadratischem Querschnitt, einer freitragenden Länge l = 100 cm, einem $k_b = 100\ \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$, und einer Last P = 250 kg, soll der Länge nach zentrisch durchbohrt werden; Lochdurchmesser d = 5 cm.

Es soll die äußerst zulässige Länge x der Bohrung allgemein und für den vorliegenden besonderen Fall ermittelt werden.

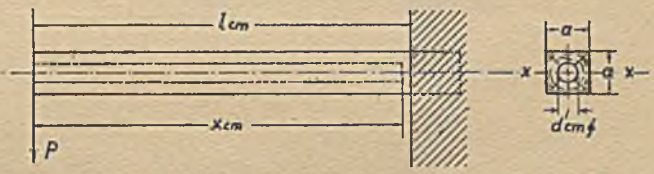


Abb. 66.

Lösung:

Das Trägheitsmoment $J_x = \frac{a^4}{12}$ für den ungebohrten Querschnitt,

" " $J_x' = \frac{a^4}{12} - \frac{\pi}{64}d^4$ für den gebohrten Querschnitt,

" Widerstandsmoment $W = \frac{a^3}{6}$ für den ungebohrten Querschnitt,

" " $W' = \frac{\frac{a^4}{12} - \frac{\pi}{64}.d^4}{\frac{a}{2}}$ für den gebohrten Querschnitt.

* Hierin bedeutet k_b die zulässige Biegungsspannung für die Zugseite.

$$M = W \,.\, k_b;\; P \,.\, l = \frac{a^3}{6} \,.\, k_b,$$

$$a = \sqrt[3]{\frac{6 \,.\, P \,.\, l}{k_b}}.$$

$$M_x = P \,.\, x = \frac{\frac{1}{12}\left(\frac{6\,P\,.\,l}{k_b}\right)^{\frac{4}{3}} - \frac{\pi}{64} \,.\, d^4}{\frac{1}{2}\left(\frac{6\,P\,.\,l}{k_b}\right)^{\frac{1}{3}}} \,.\, k_b = P \,.\, l - 0{,}1\, d^4 \,.\, \sqrt[3]{\frac{k_b{}^4}{6\,P\,l}},$$

$$x = l - 0{,}055 \,.\, d^4 \,.\, \sqrt[3]{\frac{k_b{}^4}{P^4 \,.\, l}} \text{ cm}.$$

In unserem besonderen Falle:

$$a = \sqrt[3]{\frac{6\,P\,.\,l}{k_b}} = \sqrt[3]{\frac{6 \,.\, 250 \,.\, 100}{100}}$$

$$a = 11{,}45 \text{ cm},$$

$$x = 100 - 0{,}055 \,.\, 5^4 \,.\, \sqrt[3]{\frac{100^4}{250^4 \,.\, 100}} \text{ cm},$$

$$x = 97{,}82 \text{ cm}.$$

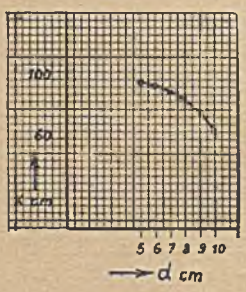


Abb. 67.

Fassen wir in der Formel für x den Wert $\sqrt[3]{\frac{k_b{}^4}{P^4 \,.\, l}}$ als Konstante C auf, so wird allgemein $x = l - 0{,}055\, d^4 \,.\, C$, und in unserem besonderen Falle $x = 100 - 0{,}0035 \,.\, d^4$.

Diese Beziehung ist in der graphischen Darstellung *Abb. 67* veranschaulicht.

d cm	x cm
5	97,82
6	95,46
7	91,60
8	85,66
9	77.04
10	65,00

Freiträger mit Streckenlast.

Hat der Freiträger eine gleichmäßig verteilte Last, so gestaltet sich die Entwicklung der Festigkeitsformel wie folgt *(Abb. 68)*: Dividieren wir die gleichmäßig verteilte Gesamtlast P durch die Verteilungslänge auf dem Träger, so bekommen wir die Belastung für die Längeneinheit:

$$p = \frac{P}{l} \frac{\text{kg}}{\text{cm}}.$$

Die Mittelkraft aller dieser kleinen, gleich großen Einzellasten greift im Schwerpunkt der Belastungsfläche, also im Abstande $\frac{l}{2}$ cm vom eingespannten Querschnitt an.

$$M_{max} = -P \cdot \frac{l}{2} = -p \cdot \frac{l^2}{2} \text{ cmkg.}$$

Entsprechend lautet das Biegungsmoment für den Querschnitt im Abstande x_{cm} vom Ende der gleichförmig verteilten Last:

$$M_x = -p \cdot \frac{x^2}{2} \text{ cmkg,}$$

$$\frac{M_x}{M_{max}} = \frac{x^2}{l^2}, \text{ d. h.:}$$

Die Momente verhalten sich wie die Quadrate der Abstände vom Ende der gleichmäßig verteilten Last; die Momentenfläche wird daher begrenzt durch eine Parabel, deren Scheitel in O liegt. Die Konstruktion der Parabel ist in *Abb. 68* angegeben.

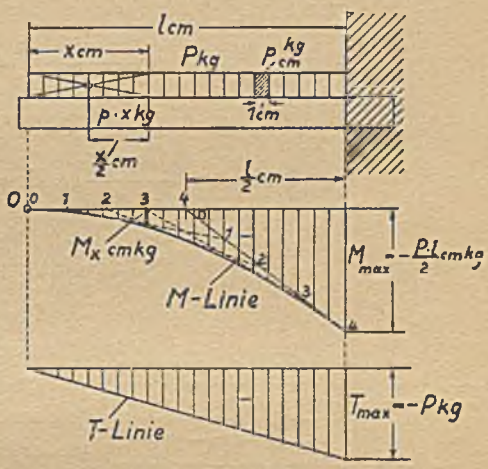


Abb. 68.

Ist die Streckenbelastung nicht gleichmäßig über die Länge 1 cm verteilt, sondern wächst die Belastung der Längeneinheit stetig und gleichförmig von 0 am Ende der Strecke bis auf $p \frac{kg}{cm}$ an der Einspannungsstelle *(Abb. 69)**, so ist die Belastungsfläche ein Dreieck. Die ganze Belastung ist $= \frac{p \cdot l}{2}$ kg; ihr Angriffspunkt (Schwerpunkt des Belastungsdreiecks) hat die Entfernung $\frac{l}{3}$ cm von der Einspannungsstelle, folglich

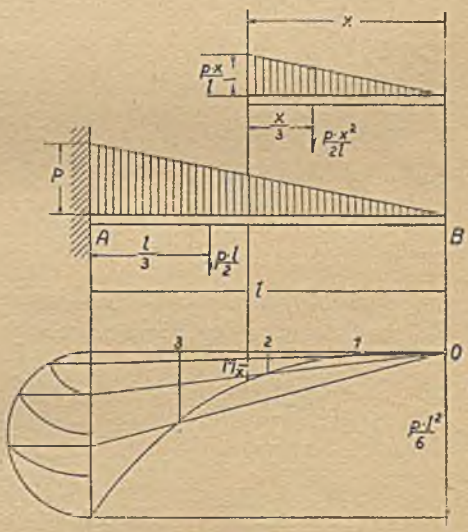


Abb. 69.

$$M_{max} = -\frac{p \cdot l}{2} \cdot \frac{l}{3} = -\frac{p \cdot l^2}{6} \text{ cmkg.}$$

Für eine Stelle in der Entfernung x vom Ende der Streckenlast ist die Belastungshöhe, d. i. das Maß für die dort geltende Belastung der Längen-

* R. Lauenstein, Die Festigkeitslehre.

einheit $= \frac{p \cdot x}{l} \frac{kg}{cm}$, und die Belastung des Balkenendstückes bis zu der Stelle dieser Belastungshöhe:

$$\frac{p \cdot x}{l} \cdot \frac{x}{2} = \frac{p \cdot x^2}{2\,l} \text{ kg.}$$

Das Moment für diese Stelle ist:

$$M_x = -\frac{p \cdot x^2}{2\,l} \cdot \frac{x}{3} = -\frac{p \cdot x^3}{6\,l} \text{ cmkg,}$$

das Moment für den Einspannungsquerschnitt

$$M_{max} = -\frac{p \cdot l^3}{6\,l} \text{ cmkg} = -\frac{p \cdot l^2}{6} \text{ cmkg,}$$

$\frac{M_x}{M_{max}} = \frac{x^3}{l^3}$, d. h. die Momente verhalten sich wie die dritten Potenzen der Abstände vom Ende der Streckenlast. Die Momentenfläche wird daher begrenzt durch eine kubische Parabel, deren Scheitel in O liegt. Die Konstruktion derselben ist aus der Abbildung zu ersehen.

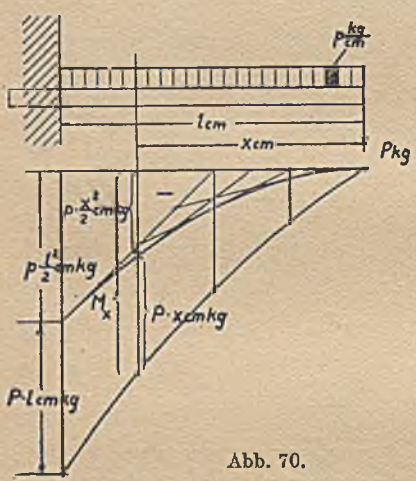


Abb. 70.

Wird ein Freiträger am Ende durch eine Last P kg belastet, und hat er außerdem eine gleichmäßig über seine Länge verteilte Belastung $p \frac{kg}{cm}$ zu tragen *(Abb. 70)*, so ist das größte Biegungsmoment

$$M_{max} = -P \cdot l - p \frac{l^2}{2} \text{ cmkg.}$$

Besteht die gleichmäßige Belastung aus dem Eigengewicht G des ganzen Trägers, bezw. g kg Eigengewicht je 1 cm Trägerlänge, so ist:

$$M_{max} = -P \cdot l - g \frac{l^2}{2} \text{ cmkg,}$$

$$M_{max} = -P \cdot l - G \cdot \frac{l}{2} \text{ cmkg.}$$

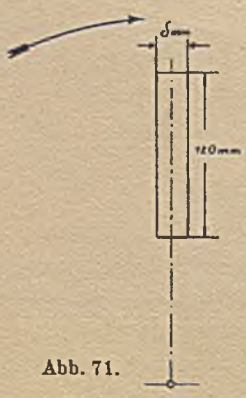


Abb. 71.

32. ***Beispiel:*** Ein Flacheisen ist an seinem Ende fest eingespannt; es ragt frei aus der Einspannstelle hervor. Die frei tragende Länge muß 1,8 m betragen. Irgend eine nennenswerte äußere Belastung ist nicht vorhanden. Die Last wird durch das Eigengewicht gebildet. Dieses Flacheisen gehört einem Maschinenteil an, der langsam ohne Stoß rotiert *(Abb. 71)*.

Welches Profil ist zu wählen?

Lösung: Die zulässige Beanspruchung auf Biegung kann mit $400 \frac{kg}{cm^2}$ angenommen werden.

Belastungsfall III: Die Belastung ändert ständig ihre Richtung, wechselt also in häufiger Folge zwischen einem größten positiven und negativen Wert. Das kleinste vorkommende Widerstandsmoment $W = \frac{12 \cdot \delta^2}{6} = 2\delta^2 \text{ cm}^3$.

Das Eigengewicht können wir im Schwerpunkt des Flacheisenkörpers angreifend denken, sodaß die Festigkeitsgleichung gilt:

$$P \cdot \frac{l}{2} = W \cdot k_b,$$

$$P = G = \frac{\delta \cdot 12 \cdot 180}{1000} \cdot \gamma \text{ kg}; \quad \text{das Einheitsgewicht } \gamma$$

des Materials ist $7{,}8 \frac{kg}{dm^3}$, $G = \frac{\delta \cdot 12 \cdot 180}{1000} \cdot 7{,}8 = 16{,}85 \cdot \delta \text{ kg}$,

$$16{,}85 \cdot \delta \cdot \frac{180}{2} = 2\delta^2 \cdot 400,$$

$$\delta = \frac{16{,}85 \cdot 90}{2 \cdot 400} = 1{,}9 \text{ cm}.$$

Flacheisen $120 \times 19 \text{ mm}^2$.

Aus der Tabelle für Flacheisen entnehmen wir als Metergewicht 17,76 kg, folglich Gesamtgewicht $17{,}76 \cdot 1{,}8 = 31{,}97$ kg, das Biegungsmoment wird $G \cdot \frac{l}{2} = 31{,}97 \cdot 90 = 2877{,}3$ cmkg, das kleinste Widerstandsmoment $= \frac{12 \cdot 1{,}9^2}{6} = 7{,}22 \text{ cm}^3$, und die tatsächlich vorhandene größte Biegungsbeanspruchung:

$$\sigma_b = \frac{2877{,}3}{7{,}22} = 398{,}5 \frac{kg}{cm^2}.$$

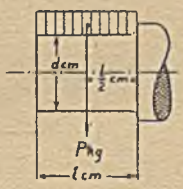


Abb. 72.

33. ***Beispiel:*** Welchen Durchmesser muß ein mit 5000 kg belasteter Zapfen von $l = 200$ mm mit Rücksicht auf Festigkeit erhalten, wenn $k_b \leqq 600 \frac{kg}{cm^2}$ sein soll? *(Abb. 72.)*

Lösung: Es liegt der Fall eines Freiträgers mit gleichförmig verteilter Last vor.

$$M = P \cdot \frac{l}{2} = W \cdot k_b = \frac{\pi}{32} d^3 \cdot 600 = 5000 \cdot \frac{20}{2},$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{5000 \cdot 20 \cdot 32}{2 \cdot \pi \cdot 600}} = 9{,}4 \text{ cm}, \quad d = 95 \text{ mm}.$$

35. ***Beispiel:*** Die elastische Kupplung *(Abb. 73)* hat auf der Scheibe U befestigte Bolzen s, die an ihren in die Scheibe O eingreifenden Enden Gummimuffen h tragen. Welchen Durchmesser muß man den Bolzen geben?

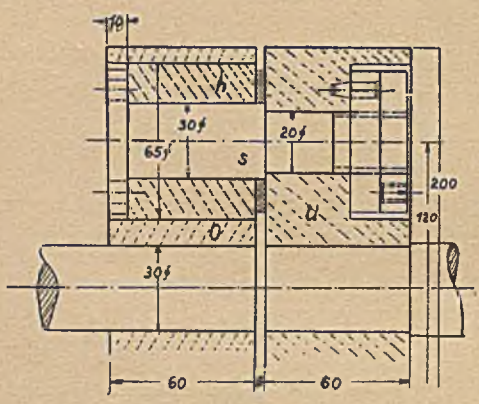


Abb. 73.

Lösung: Die Gummimuffen verbürgen eine stoßfreie Kraftübertragung. Wir müssen, da die Mög-

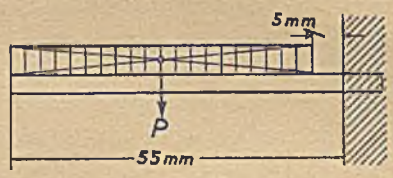


Abb. 74.

lichkeit vorhanden ist, daß die Umfangskraft stark wechselt, mit dem Belastungsfall III rechnen, jedoch können wir den höchstzulässigen Wert einsetzen $k_b = 600 \frac{kg}{cm^2}$. Die schematische Darstellung der Belastung zeigt *Abb. 74.* Aus dem Katalog der liefernden Firma sehen wir, daß das maximale Drehmoment mit 580 cmkg angegeben wird, sowie daß vier Bolzen am Umfang angeordnet sind. Wir nehmen der Sicherheit halber an, daß ein einziger Bolzen die ganze Umfangskraft aufzunehmen hat. Die Biegungsgleichung lautet alsdann:

$$P \,.\, 3 = 0{,}1 \,.\, d^3 \,.\, k_b$$

$$P = \frac{580}{6} = 96{,}7 \text{ kg}; \quad d = \sqrt[3]{\frac{96{,}7 \,.\, 3}{0{,}1 \,.\, 600}} = 1{,}7 \text{ cm},$$

ausgeführt $d = 20$ mm.

Mit Rücksicht auf die ausgiebige Dimensionierung der Gummimuffe hat man dort, wo diese sitzt, den Durchmesser auf 30 mm erhöht.

35. ***Beispiel:*** Welche freitragende Länge dürfen unbelastete Stahlrohre erhalten, wenn man die zulässige Beanspruchung auf Biegung mit $k_b = 1000 \frac{kg}{cm^2}$ annimmt?

Lösung: Bezeichnet man den Außendurchmesser des Rohres mit D cm, den Höhlungsdurchmesser mit d cm, und das Höhlungsverhältnis $\frac{d}{D}$ mit α, so ist laut Tabelle für Widerstandsmomente

$$W = \frac{\pi}{32} D^3 \,(1 - \alpha^4) \text{ cm}^3.$$

Ist die gesuchte freitragende Rohrlänge = l cm, und das Einheitsgewicht $\gamma = 7{,}85 \frac{kg}{dm^3}$, so ist das Rohrgewicht:

$$\left[\frac{D^2\pi}{4} - \frac{d^2\pi}{4}\right] \cdot \frac{l}{1000}\,\gamma\,\text{kg} = \frac{D^2\pi}{4}(1 - \alpha^2 .)\,\frac{l}{1000} \cdot \gamma\,\text{kg}.$$

$$M_b = W \,.\, k_b; \quad P \,.\, \frac{l}{2} = W \,.\, k_b,$$

$$\frac{D^2\pi}{4}(1 - \alpha^2)\,\frac{l^2}{2 \,.\, 1000} \cdot \gamma = \frac{\pi}{32} \,.\, D^3 \,.\, (1 - \alpha^4) \,.\, k_b.$$

$\alpha = 0{,}9$

D cm	l cm
4	477
5	532
6	583
7	630
8	673
9	714
10	753
12	824
14	890
16	952
18	1011
20	1064

$l = 177\sqrt{D(1 + \alpha^2)}$ cm;

für $\alpha = 0{,}9$ wird

$l = 238\sqrt{D}$ cm.

Kontrolle: Ein Stahlrohr von 20 cm Außendurchmesser und 1 cm Wandstärke wiegt laut Tabelle für Stahlrohre $46{,}8\,\frac{\text{kg}}{\text{m}}$, das sind $46{,}8 \,.\, 10{,}64 = 498$ kg.

Das Widerstandsmoment ist laut Tabelle $= 270\ \text{cm}^3$.

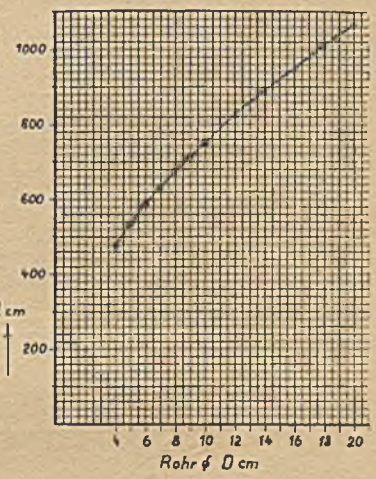


Abb. 75.

$$\sigma_b = \frac{M}{W} = \frac{498 \,.\, 532}{270} = 983\,\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}.$$

Für $D = 4$ cm, Wandstärke $= 0{,}2$ cm,

$$\sigma_b = \frac{1{,}88 \,.\, 4{,}77 \,.\, 238{,}5}{2{,}16} = 990\,\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}.$$

Die graphische Darstellung *Abb. 75* zeigt die Abhängigkeit von D und l.

36. ***Beispiel:*** Ein Freiträger ist laut untenstehender *Abb. 76 a* belastet, $k_b = 1200\,\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$. Der Querschnitt soll gemäß *Abb. 76 c* ausgeführt werden,

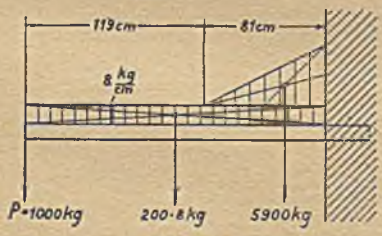


Abb. 76 *a*.

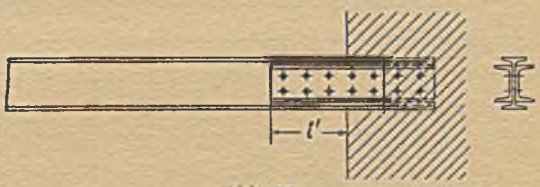


Abb. 76 *c*.

jedoch sollen die beiden [-Eisen nur so weit aus der Mauer herausragen, als es zur Erzielung des nötigen Widerstandsmoments erforderlich ist. Die Schwächung durch die Nietlöcher bleibe unberücksichtigt.

Lösung:

$M_{max} = -1000 \,.\, 200 - 200 \,.\, 8 \,.\, 100 - 5900 \,.\, 27 = -519\,300$ cmkg.

Laut I-Eisen-Tabelle ist das Widerstandsmoment für ein I-Eisen NP 21 = 244 cm³, folglich das für dieses maximale Biegungsmoment = = 244 . 1200 = 292 800 cmkg.

Aus dem Momentenflächen-Diagramm *Abb. 76 d* kann man alsdann die notwendige U-Eisenlänge ablesen. x = ∾ 40 cm.*

Das gesamte Trägheitsmoment des zusammengesetzten Querschnittes

$$= 2563 + 2 \,.\, J_{x\sqsubset}\ \text{cm}^4, \quad \text{und das Widerstandsmoment}$$

$$= \frac{2563 + 2 \,.\, J_{x\sqsubset}}{10{,}5}\ \text{cm}^3, \quad \text{folglich:}$$

$$M = W \,.\, k_b$$

$$519\,300 = \frac{2563 + 2\, J_{x\sqsubset}}{10{,}5} \,.\, 1200\ \text{cmkg},$$

$$J_{x\sqsubset} = \frac{519\,300 \,.\, 10{,}5}{2 \,.\, 1200} - \frac{2563}{2} = 994\ \text{cm}^4,$$

das entspricht einem ⊏-Eisen NP Nr. 18.

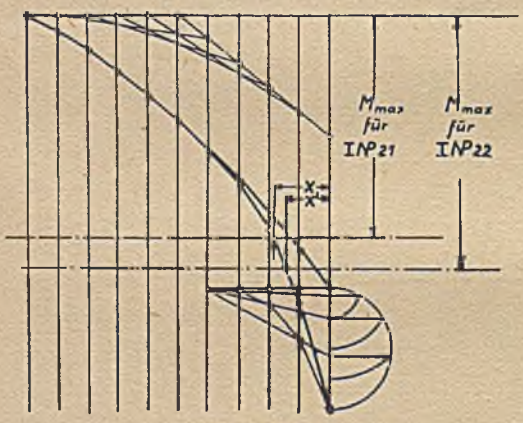


Abb. 76 *d*.

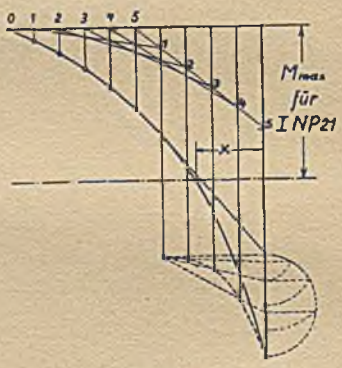


Abb. 76 *b*.

Aus Gründen einer einwandfreien Vernietung darf man höchstens ⊏-Eisen NP Nr. 16 wählen.

Wir rechnen deshalb neu, und nehmen ein I-Eisen NP Nr. 22 an, mit einem Widerstandsmoment = 278 cm³, folglich das für dieses maximale Biegungsmoment

$$278 \,.\, 1200 = 333\,600\ \text{cmkg}.$$

Aus dem Momentenflächendiagramm *Abb. 76 d* lesen wir jetzt die notwendige U-Eisenlänge x' = ∾ 30 cm ab. Das gesamte Trägheitsmoment des zusammengesetzten Querschnittes

* Wäre in der Aufgabe ein $k_b = 1000\ \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ vorgeschrieben, so würde x nach *Abb. 76 b* = 52 cm.

$= 3060 + 2\,J_{x\sqsubset}$ cm⁴, und das Widerstandsmoment

$$= \frac{3060 + 2\,J_{x\sqsubset}}{11}\ \text{cm}^3,\ \text{folglich}$$

$$M_b = W \,.\, k_b$$

$$519\,300 = \frac{3060 + 2\,J_{x\sqsubset}}{11} \,.\, 1200\ \text{cmkg},$$

$$J_{x\sqsubset} = \frac{519\,300 \,.\, 11}{2 \,.\, 1200} - \frac{3060}{2} = 850\ \text{cm}^4;$$

das entspricht einem ⊏-Eisen NP Nr. 16.

37. ***Beispiel:*** Bei welchem Verhältnis zwischen Zahnteilung t und Zahnbreite b sind Zahnecke und Zahnwurzel auf Biegung gleich gefährdet? *(Abb. 77, 78)**

Die Zähne der Stirnräder können aufgefaßt werden als Freiträger, und man nimmt an, daß die ganze Umfangskraft von einem einzigen Zahn aufzunehmen ist.

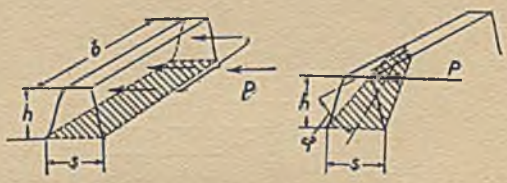


Abb. 77. Abb. 78.

Lösung: Angenommen, die Umfangskraft greift am Kopfe eines Zahnes an, so belastet sie ihn mit dem Biegungsmoment P . h. Bei einer Stärke im Fuße von s und der Breite b wird $P \,.\, h = \frac{1}{6} \,.\, b \,.\, s^2 \,.\, k_b$. Nehmen wir an $h = 0{,}7 \,.\, t$, und $s = 0{,}55 \,.\, t$, so folgt:

$$P \,.\, 0{,}7 \,.\, t = \frac{1}{6} \,.\, b \,.\, (0{,}55 \,.\, t)^2 \,.\, k_b;\ P = b \,.\, t \,.\, \frac{k_b}{14}.$$

Bei breiten Zähnen liegt die Gefahr eines Abbrechens einer Ecke eines Zahnes vor. Die unter dem Winkel φ geneigte Bruchebene trägt das Biegungsmoment $P \,.\, h \cos\varphi$. Die Breite der Bruchfläche beträgt $\frac{h}{\sin\varphi}$.

$$P \,.\, h \,.\, \cos\varphi = \sim \frac{1}{6} \cdot \frac{h}{\sin\varphi} \,.\, s^2 \,.\, k_b,$$

$$P = \frac{1}{6} \cdot \frac{s^2 \,.\, k_b}{\sin\varphi \,.\, \cos\varphi} = \frac{s^2 \,.\, k_b}{3 \sin 2\varphi}.$$

Die Höchstbeanspruchung tritt auf für den Maximalwert von $\sin 2\varphi$; $\sin 2\varphi = 1$, $2\varphi = 90^0$, $\varphi = 45^0$.

$$P = \frac{s^2}{3} \cdot k_b.$$

Unter Einsetzung des Wertes für s folgt:

$$P = \frac{(0{,}55 \,.\, t)^2}{3} \,.\, k_b = t^2 \,.\, \frac{k_b}{10}\ \text{kg}.$$

* K. Laudien, Die Maschinenelemente I.

Die Gefahr des Abbrechens einer Ecke ergibt sich, sobald $P = t^2 \frac{\sigma_b}{10}$ ein größeres σ_b zeitigt, als nach der Gleichung $b \cdot t \cdot \frac{\sigma_b}{14}$. Der Grenzfall liegt bei

$$t^2 \cdot \frac{\sigma_b}{10} = b \cdot t \frac{\sigma_b}{14},$$

$$b = 1{,}4\,t.$$

Bei Rädern mit $b > 1{,}4\,t$ sind die Ecken stärker gefährdet. Man geht darum bei Rädern, die als reine Krafträder anzusehen sind, nicht über $b = 2\,t$ hinaus.

b) Träger auf zwei Stützen.

Die *Abb. 79* und *80* zeigen Träger auf zwei Stützen mit zwei Einzellasten, die zugehörige Momenten- und Querkraftfläche. Die Momentenflächen

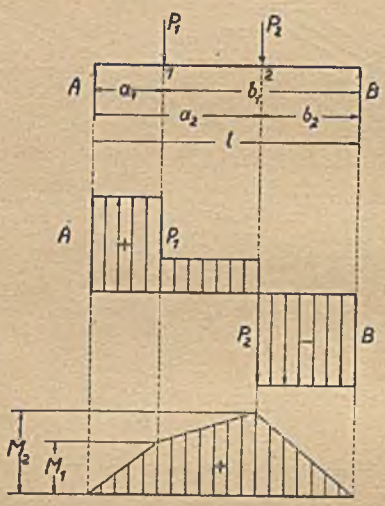


Abb. 79.

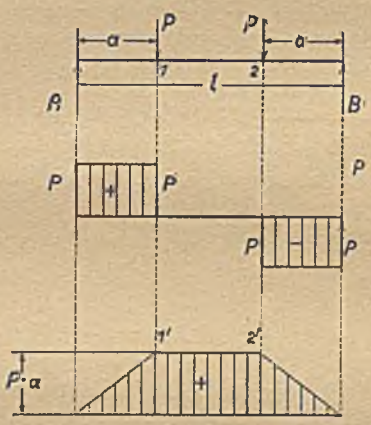


Abb. 80.

zeigen nur positive Werte. Bei dem Belastungsfall nach *Abb. 79* liegt das maximale Biegungsmoment, der gefährliche Querschnitt, bei 2, weil in diesem Punkte die Querkraftlinie von + auf — wechselt. Einen Sonderfall symmetrischer Belastung gibt *Abb. 80* wieder. Zwischen 1 und 2 ist die Querkraft stets gleich Null; sämtliche Querschnitte des Trägers zwischen 1 und 2 erfahren reine Biegung (Querkraft = 0); in allen Punkten zwischen 1 und 2 herrscht das Moment P . a cmkg.

Der Träger *Abb. 81* hat gleichförmig verteilte Last. Wegen der Symmetrie wird $A = B = \frac{p \cdot l}{2} = \frac{P}{2}$. Die Querkraft T in dem beliebigen Punkt x ist $A - p \cdot x$, da die Teillast über der Strecke x gleich $p \cdot x$ ist, wenn p in $\frac{kg}{cm}$ die Belastung der Längeneinheit bedeutet. $T = A - p \cdot x$ ist die Gleichung einer Geraden. Für $x = o$ wird $T = +A$, für $x = l$ wird

$T = +A - p\,l = +\frac{p\,.\,l}{2} - p\,l = -\frac{p\,.\,l}{2} = -B$. Tragen wir diese Werte als Ordinaten über und unter einer wagerechten Achse ab, so erhalten wir die T-Linie. Das maximale Biegungsmoment liegt in der Mitte.

Im allgemeinen genügt es, die Lage des größten Moments zu bestimmen und für diesen Punkt die Größe des Moments zu berechnen. In unserem Falle wird

$$M_m = A\,.\,\frac{l}{2} - \frac{p\,.\,l}{2}\,.\,\frac{l}{4} = \frac{p\,.\,l}{2}\left(\frac{l}{2} - \frac{l}{4}\right) = \frac{p\,.\,l^2}{8} = \frac{P\,.\,l}{8}\ \text{cmkg}.$$

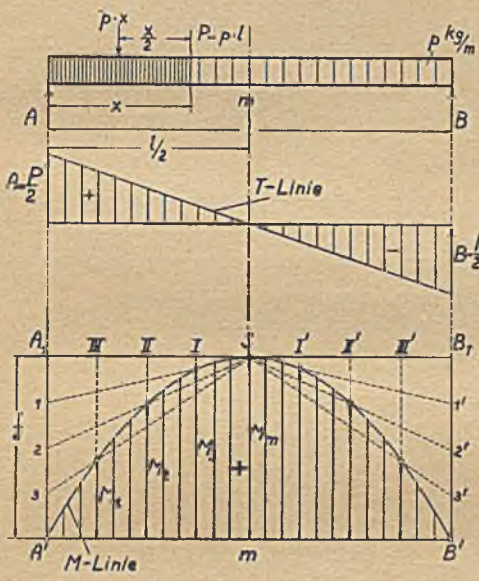


Abb. 81.

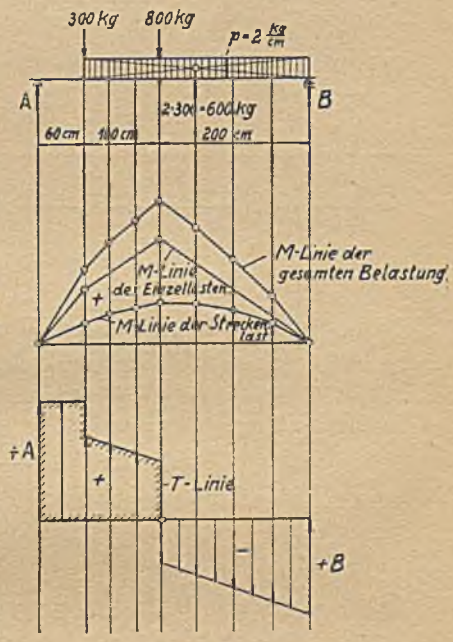


Abb. 82.

Dieses einfache Vorgehen ist stets zulässig, wenn der Träger gleichbleibenden Querschnitt erhält (Walzeisen).

Soll dagegen der Träger mit veränderlichem Querschnitt ausgeführt werden, dann muß man sich über das Verändern der jeweiligen Biegungsmomente unterrichten; man bekommt das Moment für den beliebigen Punkt x:

$$M_x = A\,.\,x - p\,.\,x\,.\,\frac{x}{2} = \frac{p\,.\,l}{2}\,.\,x - \frac{p\,.\,x^2}{2} = \frac{p\,.\,x}{2}\left(l - x\right)\ \text{cmkg}.$$

$$M_m = \frac{p\,.\,l^2}{2} = \frac{P\,.\,l}{8}\ \text{cmkg}.$$

Die stetige Verbindungslinie der Endpunkte dieser Strecken M_x ergibt die Momentenlinie, die in unserem Falle der gleichförmigen Belastung eine Parabel ist. Die Konstruktion derselben ist aus *Abb. 81* zu entnehmen.

38. ***Beispiel:*** Wie stark muß der laut *Abb. 82* belastete Träger sein, wenn der Querschnitt kreisrund ist, und wenn $k_b = 800\,\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ angenommen wird.

Lösung: $A \,.\, 360 - 300 \,.\, 300 - 800 \,.\, 200 - 600 \,.\, 150 = 0$

der Auflagerdruck links $A = 944{,}4$ kg

$$-B \,.\, 360 + 300 \,.\, 60 + 800 \,.\, 160 + 600 \,.\, 210 = 0$$

der Auflagerdruck rechts $B = 755{,}6$ kg.

Zur Probe dient die Gleichgewichtsbedingung:

Summe aller vertikalen Kräfte gleich Null

$$A + B + \Sigma P = 0$$

$$944{,}4 + 755{,}6 - 300 - 800 - 600 = 0$$

Ein vollgültiger Beweis für die Richtigkeit der Werte ist das aber nicht, man muß vielmehr streng auf folgende Regeln achten:

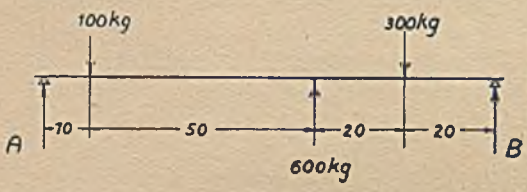


Abb. 83.

Ein Moment in der Uhrzeigerrichtung wirkend bekommt positives Vorzeichen, in entgegengesetzter Richtung negatives Vorzeichen.

Bekommt die Lagerkraft bei der Auflösung der Momentengleichung das entgegengesetzte Vorzeichen, so bedeutet dies, daß die Kraft die entgegengesetzte Wirkungsrichtung der angenommenen hat.

Setzt man beispielsweise in bezug auf nebenstehenden Träger *(Abb. 83)* die Momentengleichungen an:

$$A \,.\, 100 - 100 \,.\, 90 + 600 \,.\, 40 - 300 \,.\, 20 = 0, \quad \text{und}$$

$$-B \,.\, 100 + 300 \,.\, 80 - 600 \,.\, 60 + 100 \,.\, 10 = 0, \quad \text{so ergibt sich}$$

$$A \,.\, 100 = -9000$$

$$A = -90 \text{ kg}$$

$$-B \,.\, 100 = 11\,000$$

$$B = -110 \text{ kg}, \quad \text{d. h. wir haben die}$$

Wirkungsrichtung beider Lagerkräfte falsch angenommen, und sowohl A als auch B wirken von oben nach unten.

$$-90 - 100 + 600 - 300 - 110 = 0.$$

Ferner sei noch bemerkt, daß man bei einem Träger auf zwei Stützen das eine Lager stets fest, jedoch das andere beweglich annimmt. Würde man diese Bedingung nicht erfüllen, so wäre der Träger statisch unbestimmt. Zur Berechnung solcher Träger genügt die Hilfe der allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen nicht, vielmehr muß man die sogenannten Elastizitätsgleichungen mitbenutzen.

Nachdem wir nun die Auflagerkräfte kennen, können wir die Momentenfläche sowie die Querkraftfläche entwerfen. Am einfachsten gehen wir so vor, daß wir zuerst die Momente der Streckenlast abtragen, dann die Momente der Einzellasten und zuletzt die beiden Ordinaten addieren, sodaß wir die tatsächliche M-Linie bekommen.

Das Biegungsmoment wird bekanntlich veranschaulicht durch den Inhalt der Querkraftfläche des zugehörigen linken Freiträgers, folglich wird das

größte Biegungsmoment ausgedrückt durch den Inhalt der in der *Abb. 82* geränderten Fläche.

$$M_{max} = 944{,}4 \,.\, 60 + \frac{644{,}4 + 444{,}4}{2} \,.\, 100 = 111\,108 \text{ cmkg.}$$

Bei Anwendung des Momentensatzes bekommen wir

$$M_{max} = 944{,}4 \,.\, 160 - 300 \,.\, 100 - 200 \,.\, 50 = 111\,104 \text{ cmkg.}$$

$$M_{max} = 111\,108 \text{ cmkg}$$

$$M_b = W \,.\, k_b$$

$$111\,108 = 0{,}1 \,.\, d^3 \,.\, 800$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{111\,108}{0{,}1 \,.\, 800}} = 11{,}17 \text{ cm.}$$

Nach Din 3 wählen wir 115 mm ⌀.

39. ***Beispiel:*** Auf einem Balken auf zwei Stützen bewegen sich zwei gleich große Lasten $\frac{P}{2}$ kg mit dem unveränderlichen Abstand a; bei welcher Stellung tritt unter einer Last das größte Moment auf, und welchen Wert hat dasselbe (Kranbahnträger) *Abb. 84.*

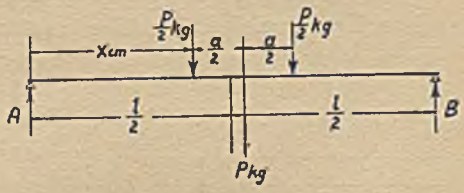


Abb. 84.

Lösung: Die Resultierende liegt in der Mitte zwischen den beiden Lasten, dann ist

$$A = \frac{P}{l}\left(l - x - \frac{a}{2}\right) \text{kg.}$$

$$\text{und} \quad M_x = A \,.\, x = \frac{P}{l}\left(l - x - \frac{a}{2}\right) \,.\, x \text{ cmkg.}$$

Wir haben nunmehr zu untersuchen, für welches x das Moment M_x ein Maximum wird. Die letzte Gleichung können wir in die Form bringen:

$$y = m \,.\, x \,.\, (c - x), \quad \text{dann ist}$$

$$M_x = y, \quad m = \frac{P}{l} \quad \text{und} \quad c = l - \frac{a}{2}.$$

In dem veränderlichen Teile x (c — x) kann c als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks angesehen werden, x und c — x als die Abschnitte, in welche c durch die Höhe h vom Scheitel des rechten Winkels geteilt wird. Dann ist nach dem Satze: die Höhe vom Scheitel des rechten Winkels eines Dreiecks ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen den Abschnitten der Hypotenuse *(Abb. 85)*

$$h^2 = x \,(c - x).$$

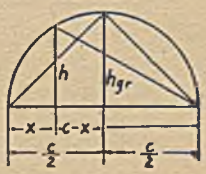


Abb. 85.

Über einer Strecke c als Hypotenuse lassen sich nun beliebig viele rechtwinklige Dreiecke errichten; die Scheitel der rechten Winkel derselben liegen auf einem Halbkreis. Die größte Höhe hat das gleichschenklige Dreieck;

in demselben ist $h = \frac{c}{2}$, und weil in einem solchen Dreieck die Grundlinie durch h halbiert wird, auch $x = \frac{c}{2}$.

Folglich in unserem vorliegenden Falle:

$$c = l - \frac{a}{2}, \quad x = \frac{c}{2}, \quad x = \frac{l}{2} - \frac{a}{4},$$

und das größte Moment tritt auf unter der einen Last, wenn diese und die Resultierende gleich weit von der Mitte entfernt sind.

$$M_{max} = \frac{P}{l}\left(l - \frac{l}{2} + \frac{a}{4} - \frac{a}{2}\right) \cdot \left(\frac{l}{2} - \frac{a}{4}\right) = \frac{P}{l} \cdot \frac{2 \cdot l - a}{4} \cdot \frac{2 \cdot l - a}{4}$$

$$M_{max} = \frac{P}{16 \cdot l} \cdot (2 \cdot l - a)^2 \text{ cmkg.}^*$$

Nehmen wir beispielsweise an, daß die beiden Hauptträger aus ⌶-Eisen eines Laufkranes eine größte Last von 6000 kg (Eigengewicht der Laufkatze, Nutzlast und Kette) zu tragen haben bei einer Spannweite von 6 m und einem Radstand von 90 cm, so wird

$$M_{max} = \frac{3000}{16 \cdot 600} \cdot (1200 - 90)^2, \quad M_{max} =$$

$$= 385030 \text{ cmkg}; \text{ angenommen } k_b = 800 \frac{kg}{cm^2},$$

dann wird $W = \frac{385\,030}{800} = 482 \text{ cm}^3$, erforderlich 2 ⌶ N P Nr. 27 mit W_x je 491 cm^3.

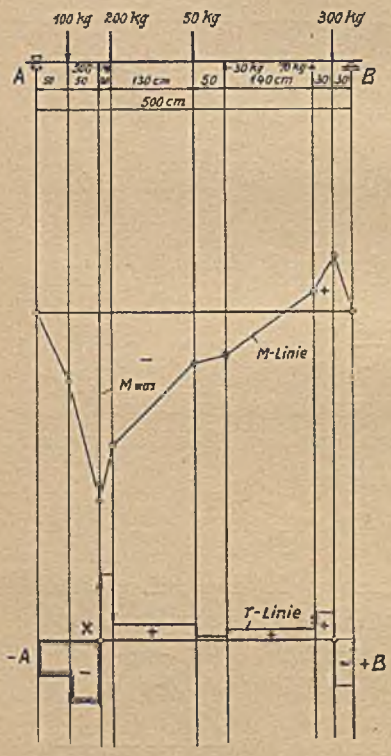


Abb. 86.

40. ***Beispiel:*** Eine Welle aus Flußeisen (St 37) ist gemäß *Abb. 86* belastet. Die zulässige Beanspruchung $k_b = 450 \frac{kg}{cm^2}$. Welchen Durchmesser muß die Welle bekommen.

Lösung: Erst werden die Reaktionen A und B bestimmt.

$$A \cdot 500 - 100 \cdot 450 + 500 \cdot 400 -$$
$$- 200 \cdot 380 - 50 \cdot 250 + 30 \cdot 200 +$$
$$+ 70 \cdot 60 - 300 \cdot 30 = 0,$$
$$A = - 135{,}4 \text{ kg}.$$

Das Minuszeichen bedeutet, daß wir die Richtung der Reaktion falsch angenommen haben; es wirkt $A = 135{,}4$ kg von oben nach unten.

$$- B \cdot 500 + 300 \cdot 470 - 70 \cdot 440 - 30 \cdot 300 + 50 \cdot 250 +$$
$$+ 200 \cdot 120 - 500 \cdot 100 + 100 \cdot 50 = 0,$$
$$B = + 185{,}4 \text{ kg}.$$

* Landmann, Zeitschrift f. gew. Unt.

Die Querkraftfläche zeigt, daß wir zwei kritische Querschnitte haben, weil die T-Linie an zwei Stellen die Abszisse kreuzt. Aus der Momentenfläche entnehmen wir, daß sich das größte Moment oberhalb des Punktes x befindet. Der Inhalt der geränderten Querkraftfläche gibt die Größe des maximalen Biegungsmoments an.

$$M_{max} = 135{,}4 \,.\, 50 + 235{,}4 \,.\, 50 = 18\,540 \text{ cmkg},$$

$$M_{max} = 0{,}1 \,.\, d^3 \,.\, k_b,$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{M_{max}}{0{,}1 \,.\, k_b}},$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{18\,540}{0{,}1 \,.\, 450}} = 7{,}44 \text{ cm}.$$

Nach Din 3 wählen wir 75 mm Wellen-Φ.

41. ***Beispiel:*** Die zu hebende Last eines Aufzuges sei Q = 1000 kg. Welchen Φ D muß die flußeiserne (St 37) Achse *(Abb. 87)* in der Mitte

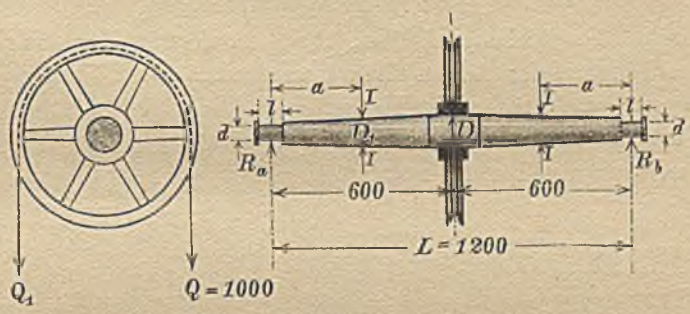


Abb. 87.

und im Abstand x von den Lagern erhalten bei einer zulässigen Beanspruchung von $k_b = 400 \frac{kg}{cm^2}$ (die Rolle ist auf der Achse befestigt, es gilt Fall III der Bachschen Zahlentafel).

Lösung: Nehmen wir den Wirkungsgrad der festen Rolle mit $\eta = 0{,}96$ an, so wird $Q_1 = \frac{Q}{\eta} = \frac{1000}{0{,}96} = 1042$ kg. Die Belastung der Achse $P = Q_1 + Q = 1042 + 1000 = 2042$ kg. Die Lagerdrücke $R_a = R_b = \frac{2042}{2} = 1021$ kg.

Das größte Biegungsmoment $M_{max} = R_a \,.\, \frac{L}{2} = R_b \,.\, \frac{L}{2} = 1021 \,.\, 60 = 61\,260$ cmkg,

das erforderliche Widerstandsmoment $W = \frac{M_{max}}{k_b} = \frac{61260}{400} = 153{,}15 \text{ cm}^3$,

$$D = \sqrt[3]{\frac{W}{0{,}1}} = \sqrt[3]{1531{,}5} = 11{,}53 \text{ cm}.$$

D = 120 mm (wegen Schwächung durch die Keilnut). Die Aufkeilung hat nur die Lagerreibungswiderstände zu überwinden. Für einen Schnitt im Abstand x von Mitte Lager gilt:

$$R_a \,.\, x = 0{,}1 \,.\, d_x^3 \,.\, k_b$$

$$d_x = \sqrt[3]{\frac{R_a \,.\, x}{0{,}1 \,.\, k_b}} = \sqrt[3]{\frac{1021 \,.\, x}{40}} = 2{,}945 \sqrt[3]{x}$$

x cm	d_x cm
10	6,34
20	7,99
a = 30	9,15 = D_1
40	10,19
50	10,83
60	11,53

Für die Zapfen gilt die Beziehung:

$$M = R_a \,.\, \frac{l}{2} = W \,.\, k_b,$$

bei $l = 1{,}5 \,.\, d$ $\left(\frac{l}{d} = 1{,}5 \text{ nennt man das Zapfenverhältnis}\right)$

wird $M_b = R_a \,.\, 0{,}75 \,.\, d = 0{,}1 \,.\, d^3 \,.\, k_b,$

$$d = \sqrt[2]{7{,}5 \frac{R_a}{k_b}} = \sqrt[2]{\frac{7{,}5}{400} \,.\, 1021} = 4{,}38 \text{ cm.}$$

Wir wählen (siehe auch Din 118) d = 45 mm, l = 65 mm. *Abb. 88* zeigt den Entwurf der Achse. Die Untersuchung auf Flächenpressung in den Lagern wurde als nicht hierher gehörend unterlassen. Neben dem Lager wird man so weit herausgehen, daß man in einem

Abb. 88.

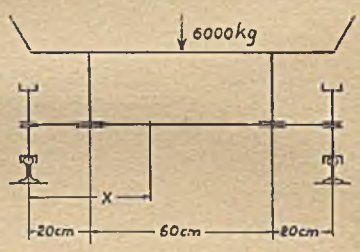


Abb. 89.

geraden Konus abdrehen kann. Man gewinnt damit Schultern zur Fixierung der Achse in achsialer Richtung.

42. ***Beispiel:*** Eine Achse ist wie nebenstehend belastet. Wo liegt der gefährliche Querschnitt, und welchen ⦶ bekommt die Achse *(Abb. 89)*. Material: Flußstahl.

Lösung: Da die Räder auf der Achse befestigt sind, so gilt Fall III der Bachschen Zahlentafel; $k_b = 500 \frac{kg}{cm^2}$, Auflagerdruck A = B = 3000 kg, $M_{max} = A \,.\, 20 = 60\,000$ cmkg. $M_x = A \,.\, x - A \,.\, (x - 20) = A \,.\, 20$, d. h. M_{max} gilt auf der ganzen Strecke von 60 cm. $0{,}1 \,.\, d^3 = \frac{60\,000}{500} = 120$;

$$d = \sqrt[3]{1200}; \quad d = 11 \text{ cm (Din 3).}$$

43. ***Beispiel:*** Eine zwei Stein (51 cm) starke Mauer von 6 m Höhe über einer Öffnung von 3,5 m Breite soll mittels zweier I-Träger getragen werden.

Welches Profil ist erforderlich bei einem $k_b = 1200 \frac{kg}{cm^2}$?

Lösung: Nimmt man an, die Träger werden an jedem Ende einen Stein (25 cm) tief in die seitlichen Mauern eingelassen, so beträgt die Spannweite 3,75 m von Mitte zu Mitte Auflager. Das Gewicht von 1 m³ Mauerwerk beträgt etwa 1600 kg, so daß die Gesamtbelastung beträgt:

$$Q = 3{,}75 \,.\, 0{,}51 \,.\, 6 \,.\, 1600 = 18\,360 \text{ kg}.$$

Die Belastung ist gleichförmig verteilt, und das größte Biegungsmoment tritt daher in der Trägermitte auf und beträgt:

$$M_b = \frac{Q \,.\, l}{8} = \frac{18\,360 \,.\, 375}{8} = 860\,625 \text{ cmkg}.$$

Mit Rücksicht auf das noch hinzukommende Eigengewicht nehmen wir zunächst $k_b = 1150 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ an, dann muß sein: $W = \frac{M_b}{k_b} = \frac{860\,625}{1150} = \sim 750 \text{ cm}^3$, für einen Träger $= 375 \text{ cm}^3$.

Wir wählen ein ⌶-Eisen N P Nr. 25 mit einem $W = 397 \text{ cm}^3$ und einem Eigengewicht $= 39{,}01 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$.

Die tatsächliche Gesamtbelastung ist mithin

$$18\,360 + 3{,}75 \,.\, 39 \,.\, 2 = \sim 18\,652 \text{ kg},$$

$$M_b = \frac{18\,652 \,.\, 375}{8} = 874\,313 \text{ cmkg}.$$

Hieraus ergibt sich die tatsächlich vorhandene größte Biegungsspannung

$$\sigma_b = \frac{874\,313}{2 \,.\, 397} = 1100 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} < 1200 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}.$$

Anmerkung: Trotz der Anordnung gemäß *Abb. 90* nimmt man bei Ziegelmauerwerk keine Einspannung des Trägers an. Hier sei bemerkt, daß eingespannte Träger zu den statisch unbestimmten gehören, bei denen zur Berechnung noch die Elastizitätsgleichungen heranzuziehen sind.

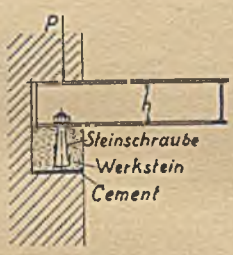


Abb. 90.

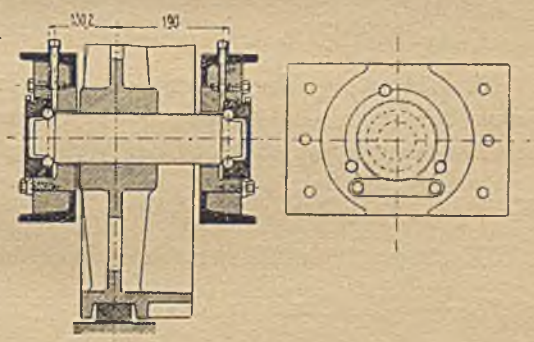


Abb. 91.

44. *Beispiel:* Welchen Durchmesser erhält die nach *Abb. 91* mit 3000 kg belastete Laufradachse des Bühnenlaufwerkes eines Gießereilaufkranes $\left(k_b = 400 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}\right.$ Belastungsfall III, Flußstahl$\left.\right)$.

Lösung: Die linke Auflagerreaktion $= \frac{3000 \,.\, 190}{320{,}2} = 1783$ kg, und das größte Biegungsmoment $M_{max} = 1783 \,.\, 13{,}02 = 23\,200$ cmkg.

$$M_{max} = W \,.\, k_b$$

$$W = \frac{23\,200}{400} = 58{,}0 \text{ cm}^3,$$

$$0{,}1 \,.\, d^3 = 58,\ d = \sqrt[3]{580} = 8{,}35 \text{ cm},$$

$$d = 85 \text{ mm}.$$

45. *Beispiel:* Welchen Durchmesser erhält die nach *Abb. 92* mit 10000 kg belastete Laufradachse eines Laufkranes, wenn $k_b = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ gesetzt werden kann. $\left(\begin{matrix}\text{Belastungsfall II}\\ \text{Flußstahl}\end{matrix}\right)$.

Lösung: Das größte Biegungsmoment tritt wegen der symmetrischen Belastung in der Mitte der Spannweite auf. Die letztere beträgt 17,8 cm; die Belastung verteilt sich gleichmäßig auf eine Länge von 13 cm. Das größte Moment beträgt demnach

$$M_b = 5000 \,.\, 8{,}9 - 5000 \,.\, 3{,}25 = 28\,250 \text{ cmkg};$$

nötiges Widerstandsmoment:

$$W = \frac{M_b}{k_b} = \frac{28\,250}{1000} = 28{,}25 = 0{,}1 \,.\, d^3,$$

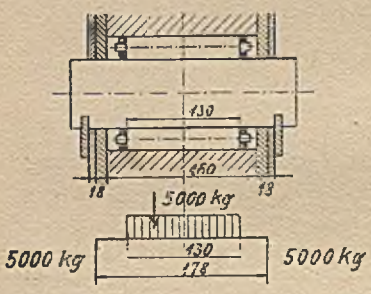


Abb. 92.

Abb. 93.

$$d = \sqrt[3]{282{,}5} = 6{,}57 \text{ cm, ausgeführt } d = 68 \text{ mm nach Din 3.}$$

46. *Beispiel:* Zur Führung des 8 m breiten Schützenrahmens eines Wehres benutzt man [-Eisen von 6 m Gesamtlänge. Die Träger sind an beiden Enden gelagert *(Abb. 93)*, der Wasserspiegel liegt 2,5 m über unterer Lagerstelle. Welches N P ist zu wählen? $k_b = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$.

Lösung: 2,5 m Wassersäule entsprechen einem Druck von $^1/_4$ atm $= 0{,}25 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$. Der Druck auf die Tafeln steigt allmählich von 0 auf $0{,}25 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$. Wir können also von einem mittleren Druck von $0{,}125 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ sprechen, und von einem Gesamtdruck von $250 \,.\, 800 \,.\, 0{,}125 = 25\,000$ kg. Auf jedes [-Eisen entfällt die Hälfte dieses Druckes, d. s. 12500 kg. Diese 12500 kg kann man sich im Abstand $\frac{250}{3}$ cm vom rechten Auflager *Abb. 94* konzentriert denken, wenn es sich um die Ermittlung der Auflagerreaktionen handelt; es wird dann

$$A = \frac{12\,500 \,.\, 250}{3 \,.\, 600} = 1736{,}1 \text{ kg},$$

$$B = 10\,763{,}9 \text{ kg}.$$

Aus dem Querkraftdiagramm entnehmen wir das größte Biegungsmoment als Inhalt der Querkraftfläche links vom Punkte x. Wir vernachlässigen die kleine Abrundung beim Scheitel der Parabel und bekommen als Flächeninhalt:

$$1736{,}1 \,.\, \left[350 + \frac{\frac{125}{4} + (440 - 350)}{2}\right],$$

$$M_{max} = \sim 712\,886 \text{ cmkg}.$$

Folglich beträgt das notwendige Widerstandsmoment

$$W = \frac{M_{max}}{k_b},$$

$$W = \frac{712\,886}{1000} = 713 \text{ cm}^3,$$

$$W = 713 \text{ cm}^3.$$

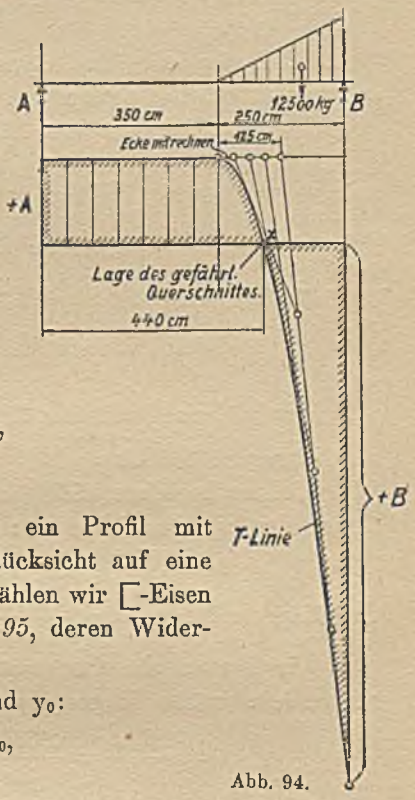


Abb. 94.

Die Tabelle für [-Eisen zeigt, daß ein Profil mit $W_x = 713$ cm³ nicht vorhanden ist. Mit Rücksicht auf eine notwendige Stärke der Bohlen* von 14 cm wählen wir [-Eisen N P Nr. 18 in der Verbindung gemäß *Abb. 95*, deren Widerstandsmoment wird alsdann:

1. Ermittlung vom Schwerpunktsabstand y_0:

$$28 \,.\, 9 - 28 \,.\, 1{,}92 = 56 \,.\, y_0,$$

$$y_0 = 3{,}54 \text{ cm}.$$

2. Ermittlung vom Trägheitsmoment J:

$$1354 + 28 \,.\, 5{,}46^2 + 114 + 28 \,.\, 1{,}92^2 = 2435 \text{ cm}^4,$$

$$W = \frac{J}{e} = \frac{2435}{14{,}46} = 168 \text{ cm}^3.$$

Abb. 95.

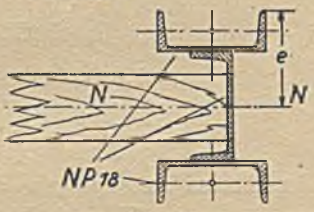


Abb. 96.

Wir sehen, daß dieses errechnete W bei weitem nicht genügt. Wir wählen jetzt die Verbindung *Abb. 96* und bekommen:

$$J = 2 \,.\, [114 + 28 \,.\, 10{,}92^2] + 1354,$$

$$J = 8262 \text{ cm}^4,$$

* Diese sind in einem in Felder eingeteilten Eisenrahmen gelagert, der in den schematischen Darstellungen *Abb. 95* und *96* nicht angegeben ist.

$$W = \frac{J}{e} = \frac{8262}{16} = 517 \text{ cm}^3 \qquad \text{noch zu klein!}$$

Endlich wählen wir eine Verbindung gemäß *Abb. 97* und bekommen:

$$J = 2\,[248 + 42{,}3 \,.\, 11{,}23^2] + 1354 = 12\,510 \text{ cm}^4,$$

$$W = \frac{12\,510}{17{,}5} = 716 \text{ cm}^3.$$

47. ***Beispiel:*** Ein Träger aus breitflanschigem I-Eisen von 4 m Länge soll mit Berücksichtigung des Eigengewichtes berechnet werden für eine Einzellast von 26 000 kg in der Mitte.

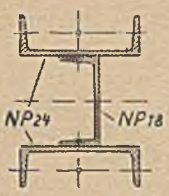


Abb. 97.

Vorgeschrieben ist $k_b = 1100 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$.

Lösung: Das maximale Biegungsmoment beträgt

$$13\,000 \,.\, 200 = 2\,600000 \text{ cmkg},$$

das Widerstandsmoment $W = \frac{2\,600\,000}{1100} = 2363{,}6 \text{ cm}^3$.

Wir wählen Profil Nr. 38 B mit einem Eigengewicht von $150{,}1 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$, also insgesamt 600,4 kg.

Alsdann berechnet sich das größte Biegungsmoment unter Berücksichtigung des Eigengewichtes zu:

$$13\,300{,}2 \,.\, 200 - 300{,}4 \,.\, 100 = 2\,630\,000 \text{ cmkg},$$

das Widerstandsmoment $= \frac{2\,630\,000}{1100} = 2390{,}9 \text{ cm}^3$.

Wir können also das gewählte Profil beibehalten und bekommen eine vorhandene größte Biegungsspannung

$$\sigma_b = \frac{M_{max}}{W} = \frac{2\,630\,000}{2605} = 1010 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} < 1100 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}.$$

48. ***Beispiel:*** Wie groß ist der Unterschied an Eigengewicht des Trägers der vorigen Aufgabe gegenüber einem gewöhnlichen I-Eisen?

Lösung: Wir wählen N P Nr. $47^1/_2$ mit einem Eigengewicht von $127{,}96 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$, also insgesamt 512 kg.

$$M_{max} = 13\,256 \,.\, 200 - 256 \,.\, 100 = 2\,625\,600 \text{ cmkg},$$

$$W = \frac{2\,625\,600}{1100} = 2387 \text{ cm}^3.$$

Wir können also das gewählte Profil nicht beibehalten, weil es nur ein Widerstandsmoment $W = 2378 \text{ cm}^3$ besitzt. Wir nehmen das nächst höhere Profil Nr. 50, Eigengewicht 566 kg.

$$M_{max} = 13283 \,.\, 200 - 283 \,.\, 100 = 2\,628\,300 \text{ cmkg},$$

$$W = \frac{2\,628\,300}{1100} = 2389{,}36 \text{ cm}^3 < 2750 \text{ cm}^3.$$

$$\sigma_b = \frac{2\,628\,300}{2750} = 956 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}.$$

Mithin die Ersparnis an Eigengewicht bei Benutzung eines normalen I-Eisens = 600,4 — 566 = 34,4 kg.

In diesem Falle erweist sich also das normale I-Eisen als vorteilhafter. Der Nutzen des breitflanschigen I-Profils zeigt sich darin, daß es gestattet, die Anwendungsgrenze des fertig hergestellten, also ungenieteten Walzträgers hinauszuschieben, und durch Vermeidung zusammengesetzter genieteter Blechträger an Bauhöhe, Arbeit und Zeit zu sparen (an Bauhöhe sparen wir im Beispiel 47 gegenüber 48 500 — 380 = 120 mm).

Außerdem bieten diese Grey-Profile gegenüber dem normalen I-Eisen den Vorteil, daß das Verhältnis $J_y : J_x$ ein günstigeres ist, sodaß sich die breitflanschigen Träger viel besser für Stützen sowie für Kranträger eignen (siehe Kapitel Knickung).

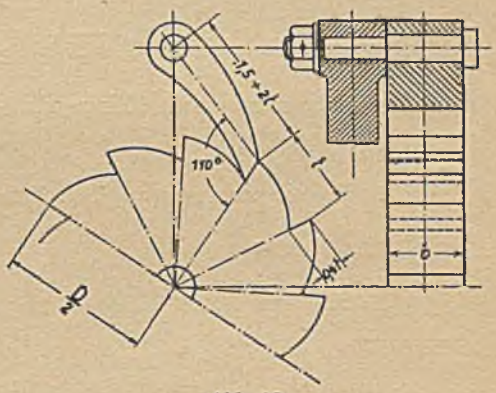


Abb. 98.

49. ***Beispiel:*** Ein an beiden Enden frei aufliegender schmiedeeiserner Träger soll eine über seine ganze Länge gleichmäßig verteilte Belastung von 16 000 kg aufnehmen. Die Entfernung der Stützpunkte betrage 2,4 m. Wieviel Eisenbahnschienen (alte preuß. Schiene Nr. 10 mit W = 138,3 cm³) können diesen Träger ersetzen? $\left(k_b = 750 \frac{kg}{cm^2}\right)$.

Lösung: $M_{max} = \frac{P.l}{8} = \frac{16000.240}{8} = 480000$ cmkg,

$$W = \frac{480000}{750} = 640 \text{ cm}^3,$$

die notwendige Schienenzahl $= \frac{640}{138,3} = 5$.

50. ***Beispiel:*** Ein gußeisernes Sperrad *(Abb. 98)* soll berechnet werden. Welche Beziehung besteht zwischen der Zahnteilung t, dem drehenden Moment M_d und der Zähnezahl z?

Angenommen $b = t$, $k_b = 100 \frac{kg}{cm^2}$.

Lösung: $M_b = \frac{M_d}{\frac{1}{2} D} . 0,4 . t = \frac{1}{6} b . t^2 . k_b$,

$$D = \frac{t}{\pi} . z; \quad b . k_b = t . 100,$$

$$\frac{M_d}{\frac{1}{2} . \frac{t}{\pi} . z} . 0,4 . t = \frac{1}{6} . 100 . t^3,$$

$$\frac{t}{\pi} = \frac{M_d \,.\, 0{,}4 \,.\, t \,.\, 6}{0{,}5 \,.\, z \,.\, 100 \,.\, t^3}; \qquad \frac{t^3}{\pi^3} = \frac{M_d \,.\, 0{,}4 \,.\, 6}{0{,}5 \,.\, z \,.\, 100 \cdot \pi^2},$$

$$t = 0{,}53 \,.\, \sqrt[3]{\frac{M_d}{z}}.$$

Welches Drehmoment kann beispielsweise ein solches Rad aufnehmen bei 16 Zähnen und einer Zahnteilung = 30 mm.

$$16 \,.\, \left(\frac{3}{0{,}53}\right)^3 = 2912 \text{ cmkg}.$$

Das entspricht einem Klinkendruck von $\dfrac{2912}{\dfrac{16 \,.\, 3}{2\,\pi}} = 383$ kg.

Das Biegungsmoment = 383 . 1,2 = 460 cmkg.

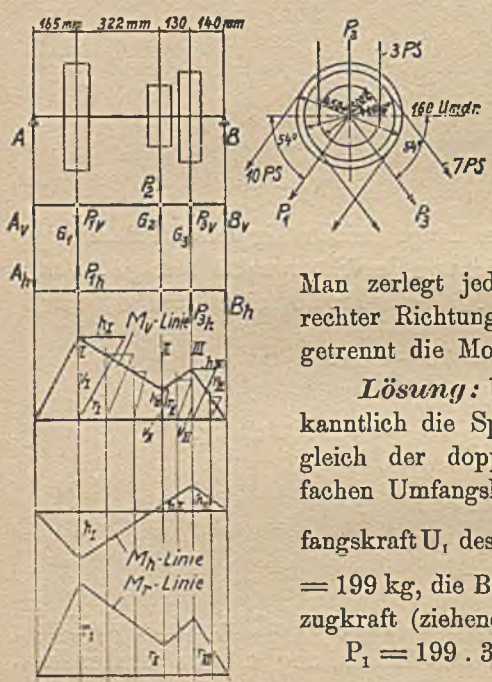


Abb. 99.

51. *Beispiel:* Eine Vorgelegewelle ist gemäß *Abb. 99* belastet. Sie soll nur auf Biegung berechnet werden ohne Rücksicht auf Verdrehung.

Häufig tritt im Maschinenbau der Fall ein, daß die Kräfte, die an dem auf Biegung beanspruchten Stab wirken, nicht in einer Ebene angreifen. Man zerlegt jede Kraft nach senkrechter und wagerechter Richtung und entwirft für jede Lastgruppe getrennt die Momentenfläche.

Lösung: Unter normalen Verhältnissen muß bekanntlich die Spannung des ziehenden Riementeiles gleich der doppelten, des schlaffen gleich der einfachen Umfangskraft angenommen werden. Die Umfangskraft U_1 des treibenden Rades $= \dfrac{10 \,.\, 60 \,.\, 75}{0{,}45 \,.\, \pi \,.\, 160} =$ = 199 kg, die Belastung der Welle durch die Riemenzugkraft (ziehendes und gezogenes Trum)

$P_1 = 199 \,.\, 3 = 597$ kg, durch die Riemenzugkraft P_2 der getriebenen Scheibe $3 \,.\, \dfrac{3 \,.\, 60 \,.\, 75}{0{,}3 \,.\, \pi \,.\, 160} =$ = 269 kg, durch die Riemenzugkraft P_3 der getriebenen Scheibe $3 \,.\, \dfrac{7 \,.\, 60 \,.\, 75}{0{,}4 \,.\, \pi \,.\, 160} = 470$ kg.

P_{1v} die vertikale Seitenkraft von $P_1 = P_1 \,.\, \sin 54^0 = 597 \,.\, 0{,}809 = 483$ kg
+ Scheibengewicht $G_1 = 37$ kg = 520 kg.

P_{2v} „ „ „ „ $P_2 = P_2 = 269$ kg
— Scheibengewicht $G_2 = 19$ kg = 250 kg.

P_{3v} „ „ „ „ $P_3 = P_3 \,.\, \sin 54^0 = 470 \,.\, 0{,}809 = 380$ kg
+ Scheibengewicht $G_3 = 30$ kg = 410 kg.

P_{1h} die horizontale Seitenkraft von $P_1 = P_1 \cdot \cos 54^0 = 597 \cdot 0{,}588 = 351$ kg,
P_{2h} „ „ „ „ $P_2 = 0$,
P_{3h} „ „ „ „ $P_3 = P_3 \cdot \cos 54^0 = 470 \cdot 0{,}588 = 277$ kg.

Jetzt folgt die Bestimmung der vertikalen Reaktionen.

$$A_v \cdot 757 - \overset{(+37)}{(483)} \cdot 592 + \overset{(+19)}{(269)} \cdot 270 - \overset{(+30)}{(380)} \cdot 140 = 0; \quad A_v = \overset{+41)}{353)} \text{ kg.}$$

$$-B_v \cdot 757 + \overset{(+30)}{(380)} \cdot 617 - \overset{(-19)}{(269)} \cdot 487 + \overset{(+37)}{(483)} \cdot 165 = 0; \quad B_v = \overset{+44)}{242)} \text{ kg.}$$

Kontrolle: $\overset{+41)}{353)} + \overset{-19)}{269)} + \overset{+44)}{242)} = \overset{+37)}{483)} + \overset{+30)}{380)}$ stimmt!

Die Bestimmung der horizontalen Reaktionen.

$$A_h \cdot 757 + 351 \cdot 592 - 277 \cdot 140 = 0; \quad A_h = -223 \text{ kg.}$$

$$-B_h \cdot 757 + 277 \cdot 617 - 351 \cdot 165 = 0; \quad B_h = +149 \text{ kg.}$$

Kontrolle: $223 + 277 = 149 + 351$ stimmt!

M_{Iv}	+ 6500 cmkg	M_{Ih}	− 3679,5 cmkg
M_{IIv}	+ 2440 „	M_{IIh}	+ 442 „
M_{IIIv}	+ 4040 „	M_{IIIh}	+ 2086 „

$$M_{max} = \sqrt{M_{I_v}^2 + M_{I_h}^2} = \sqrt{6500^2 + 3679{,}5^2} = 7440 \text{ cmkg} \equiv r_1.$$

k_b angenommen (Fall III) mit $300 \frac{kg}{cm^2}$; $7440 = 0{,}1 \cdot d^3 \cdot 300$; $d = 6{,}3$ cm.

Nach Din 114 gewählt 70 mm. Eine normale Transmissionswelle, die 10 PS bei 160 Touren überträgt, bekommt laut Tabelle 65 mm ⌀.

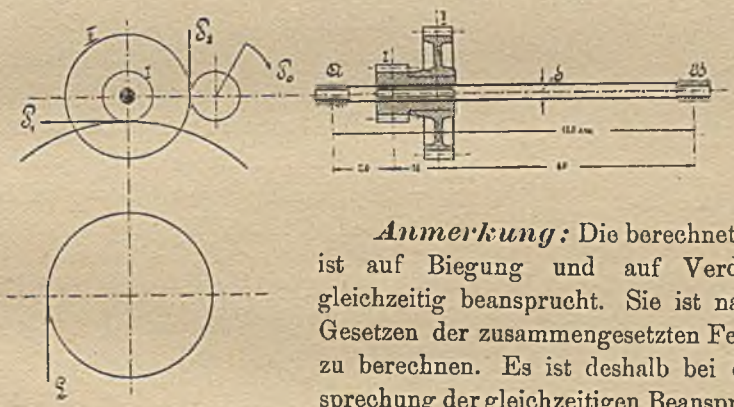


Abb. 100.

Anmerkung: Die berechnete Welle ist auf Biegung und auf Verdrehung gleichzeitig beansprucht. Sie ist nach den Gesetzen der zusammengesetzten Festigkeit zu berechnen. Es ist deshalb bei der Besprechung der gleichzeitigen Beanspruchung auf Biegung und Verdrehung dieses Beispiel nochmals herangezogen worden.

52. ***Beispiel:*** Es ist eine Windenvorgelegewelle *(Abb. 100)** zu berechnen. Es sitzen zwei Stirnräder I und II auf der Welle, die miteinander verbunden sind. Die Welle ist nur auf Biegung beansprucht. Umfangskraft $P_1 = 750$ kg, $P_2 = 300$ kg. k_b ist mit $400 \frac{kg}{cm^2}$ anzunehmen. Der Durch-

* Hugo Ahlberg, Festigkeitslehre.

messer δ der Vorgelegewelle ist zu berechnen. Das Gewicht der Räder kann vernachlässigt werden.

Lösung: $A_h . 120 - P_I . 100 = 0$; $A_h = \frac{750 . 100}{120} = 625$ kg,

$$B_h = \frac{750 . 20}{120} = 125 \text{ kg},$$

$$A_v . 120 - P_2 . 85 = 0; \quad A_v = \frac{300 . 85}{120} = 213 \text{ kg},$$

$$B_v = \frac{300 . 35}{120} = 87 \text{ kg}.$$

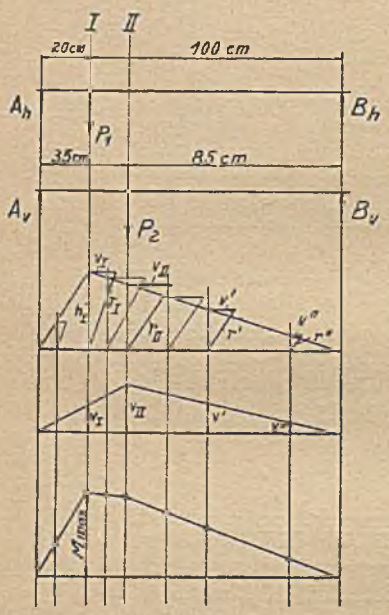


Abb. 101.

$M_{I_h} = + 625 . 20 = 12\,500$ cmkg; $M_{II_h} = 0$,
$M_{I_v} = 0$; $M_{II_v} = + 213 . 35 = 7455$ cmkg.

Laut *Abb. 101* befindet sich M_{max} in Stellung I.

$$h_I = 625 . 20 = 12\,500 \text{ cmkg},$$
$$v_I = 213 . 20 = 4\,260 \text{ cmkg},$$

$$M_{max} = \sqrt{h_I^2 + v_I^2} = \sqrt{12500^2 + 4260^2} = 13\,230 \text{ cmkg},$$

$$M_{max} = W . k_b = 0{,}1 . d^3 . 400 = 13\,230,$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{13\,230}{40}} = \backsim 7 \text{ cm}.$$

Nach Din 537, Wellen-Φ für Hebemaschinen,

$$d = 70 \text{ mm}.$$

53. *Beispiel:* Die in *Abb. 102* dargestellte Transmissionswelle, welche bei $n = 240$ Umdrehungen $N = 40$ PS übertragen soll, ist auf Biegung zu berechnen.

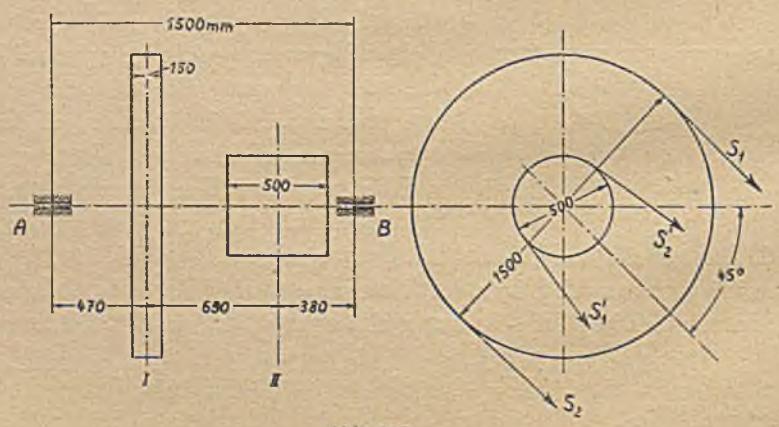


Abb. 102.

Es ist keine Rücksicht genommen auf die gleichzeitig auftretende Verdrehungsbeanspruchung.

$$k_b = 400 \frac{kg}{cm^2}.$$

Lösung: Die Umfangskraft der kleinen Scheibe

$$U' = \frac{40 \,.\, 60 \,.\, 75}{0{,}5 \,.\, \pi \,.\, 240} = 478 \text{ kg},$$

folglich die Zugkraft des Riemens der kleinen Scheibe an der Welle

$$= 478 \,.\, 3 = 1434 \text{ kg}.$$

Die Umfangskraft der großen Scheibe

$$U = \frac{40 \,.\, 60 \,.\, 75}{1{,}5 \,.\, \pi \,.\, 240} = 159 \text{ kg},$$

und der Riemenzug

$$159 \,.\, 3 = \sim 480 \text{ kg}.$$

Die Scheibengewichte sind 150 und 100 kg.

Aus den Riemenzügen ermittelt man jetzt die Lagerstützkräfte A' und B'.

$$A' \,.\, 1500 - 480 \,.\, 1030 - 1434 \,.\, 380 = 0; \quad A' = 693 \text{ kg},$$
$$-B' \,.\, 1500 + 1434 \,.\, 1120 + 480 \,.\, 470 = 0; \quad B' = 1221 \text{ kg}.$$

Aus den Scheibengewichten ermittelt man die Lagerstützkräfte A'' und B''.

$$A'' \,.\, 1500 - 150 \,.\, 1030 - 100 \,.\, 380 = 0; \quad A'' = 128 \text{ kg},$$
$$-B'' \,.\, 1500 + 100 \,.\, 1120 + 150 \,.\, 470 = 0; \quad B'' = 122 \text{ kg}.$$

Nach *Abb. 103* wird:

$$A_r^2 = A'^2 + A''^2 - 2\,A' \,.\, A'' \,.\, \cos \,.\, 135^0,$$

$$A_r = \sqrt{693^2 + 128^2 + 2 \,.\, 693 \,.\, 128 \,.\, 0{,}707} = 788 \text{ kg},$$

$$B_r^2 = B'^2 + B''^2 - 2\,B' \,.\, B'' \,.\, \cos 135^0,$$

$$B_r = \sqrt{1221^2 + 122^2 + 2 \,.\, 1221 \,.\, 122 \,.\, 0{,}707} = 1312 \text{ kg}.$$

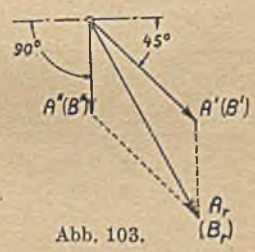


Abb. 103.

$$M_I = A_r \,.\, 47 = 788 \,.\, 47 = 37\,036 \text{ cmkg},$$

$$M_{II} = B_r \,.\, 38 = 1312 \,.\, 38 = 49\,856 \text{ cmkg}.$$

$$M_{max} = M_{II} = 49\,856 \text{ cmkg},$$

$$M_{max} = 0{,}1 \,.\, d^3 \,.\, k_b,$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{M_{max}}{0{,}1 \,.\, k_b}} = \sqrt[3]{\frac{49\,856}{0{,}1 \,.\, 400}} = 10{,}75 \text{ cm}.$$

Eine normale Transmissionswelle, die 40 PS übertragen soll bei 240 Umdrehungen in der Minute, muß laut Tabelle einen Durchmesser von 80 mm besitzen.

Wir wählen nach Din 114, Durchmesser für Transmissionswellen, d = 110 mm.

Anmerkung: Siehe Anmerkung zum Beispiel Nr. 51.

Ist ein Träger auf zwei Stützen an einem oder beiden Enden über das Auflager hinweg verlängert, und trägt er an dieser Ausladung oder Vor-

kragung noch Lasten, so spricht man von einem ***Kragträger*** *(Abb. 104)*. Man muß die Hebelarme a und b mit solchen Vorzeichen versehen, daß ihre algebraische Summe den Lagerabstand l liefert.

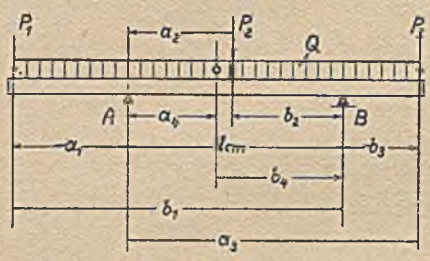


Abb. 104.

$$a_3 + (-b_3) = l, \quad b_1 + (-a_1) = l;$$

$$A = \Sigma \frac{P}{l} \cdot b \text{ kg}, \quad B = \Sigma \frac{P}{l} \cdot a \text{ kg}.$$

Je nach dem Vorzeichen der Hebelarme liefern diese Formeln eine positive oder negative Lagerkraft. Ein positives Vorzeichen bedeutet, daß die Kraft der ursprünglichen Annahme entsprechend nach oben gerichtet ist. Ein negatives Vorzeichen deutet an, daß die Kraft nach unten gerichtet sein muß, um das Gleichgewicht herzustellen.

54. ***Beispiel:*** Der Träger *(Abb. 104)* weise folgende Abmessungen und Kräfte auf: $l = 42$ cm, $a_1 = 21$ cm, $a_2 = 18$ cm,

$a_3 = 55$ cm, $P_1 = 400$ kg, $P_2 = 350$ kg, $P_3 = 200$ kg, $Q = 2000$ kg. Es sind die Auflagerreaktionen A und B zu berechnen.

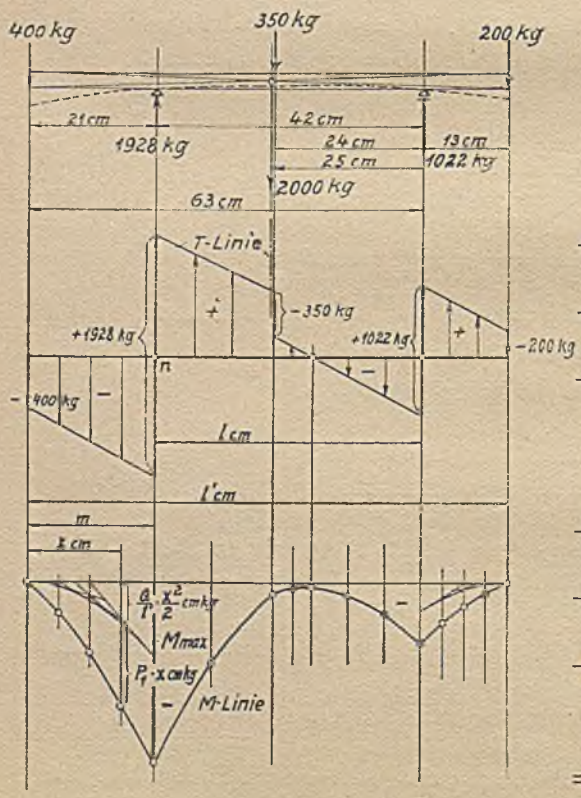


Abb. 105.

Lösung:

$$A = \Sigma \frac{P}{l} \cdot b$$

$$B = \Sigma \frac{P}{l} \cdot a$$

$$\frac{400}{42} \cdot 63 = +\ 600 \text{ kg}$$

$$+\frac{350}{42} \cdot 24 = +\ 200 \text{ kg}$$

$$+\frac{200}{42} \cdot (-13) = -\ 62 \text{ kg}$$

$$+\frac{2000}{42} \cdot 25 = +\ 1190 \text{ kg}$$

$$A = +\ 1928 \text{ kg}$$

$$\frac{400}{42} \cdot (-21) = -\ 200 \text{ kg}$$

$$+\frac{350}{42} \cdot 18 = +\ 150 \text{ kg}$$

$$+\frac{200}{42} \cdot 55 = +\ 262 \text{ kg}$$

$$+\frac{2000}{42} \cdot 17 = +\ 810 \text{ kg}$$

$$B = +\ 1022 \text{ kg}$$

Kontrolle: $A + B = \Sigma P$; $400 + 350 + 200 + 2000 = 1928 + 1022 = 2950$.

Die Aufstellung der Querkräfte und die Auftragung der Querkraftfläche geschieht wie bereits früher besprochen. Aus *Abb. 105* ersieht man, daß das größte Biegungsmoment des Trägers bei n liegt; es beträgt

$$M_{max} = \frac{Q}{l'} \cdot \frac{m^2}{2} + P_1 \,.\, m \text{ cmkg},$$

$$M_{max} = \frac{2000}{76} \cdot \frac{21^2}{2} + 400 \,.\, 21 = 14\,201{,}4 \text{ cmkg}.$$

Die zugehörige Querkraftfläche zeigt drei Nullpunkte, also gibt es drei gefährliche Querschnitte, nämlich bei A und B, sowie in der Nähe der Trägermitte.

Trägt man die zugehörigen Biegungsmomente als Ordinaten über einer neuen Achse auf, so zeigt sich, daß jedem gefährlichen Querschnitt eine solche Stelle der Momentenfläche entspricht, wo das Anwachsen des Moments in eine Abnahme desselben übergeht oder umgekehrt. Die eingezeichnete Biegungslinie, d. i. die gekrümmte Form der Stabachse, hat in dem uns vorliegenden Falle keinen Wendepunkt, weil die Momentenlinie keinen Nullpunkt besitzt, d. h. weil sämtliche Biegungsmomente dasselbe Vorzeichen haben; sie sind alle negativ.

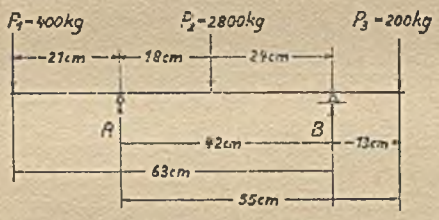


Abb. 106.

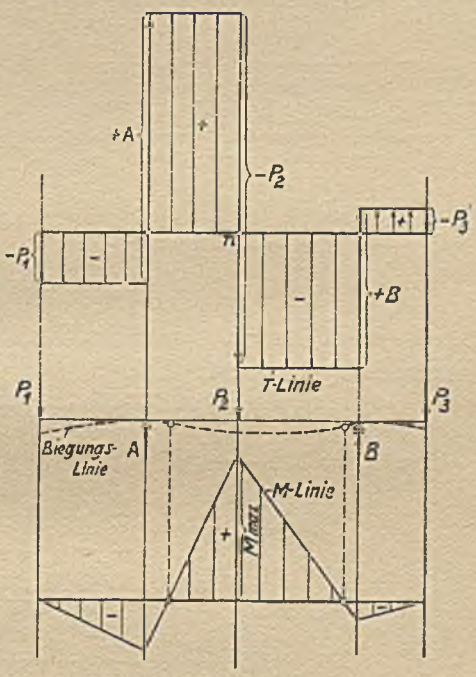


Abb. 107.

Hätten sie verschiedene Vorzeichen, so entspräche einem Nullpunkt der M-Linie ein ***Wendepunkt*** der Biegungslinie.

55. ***Beispiel:*** Ein I-Träger ist laut nebenstehender *Abb. 106* belastet. Welches Normalprofil ist zu wählen bei einem $k_b = 1000 \frac{kg}{cm^2}$?

Lösung: $B = \frac{400\,(-21)}{42} + \frac{2800 \,.\, 18}{42} + \frac{200 \,.\, 55}{42} = 1262 \text{ kg},$

$$A = \frac{400 \,.\, 63}{42} + \frac{2800 \,.\, 24}{42} + \frac{200\,(-13)}{42} = 2138 \text{ kg}.$$

Probe: $400 + 2800 + 200 = 1262 + 2138$ stimmt!

Man sieht aus *Abb. 107*, daß den Nullpunkten der M-Linie die Wendepunkte der Biegungslinie entsprechen.

Das größte Biegungsmoment M_{max} liegt bei n, es beträgt:

$$-400 \,.\, 39 + 2138 \,.\, 18 = 22\,884 \text{ cmkg.}$$

$$M_b = W \,.\, k_b,$$

$$W = \frac{M_b}{k_b} = \frac{22\,884}{1000} = 22{,}884 \text{ cm}^3.$$

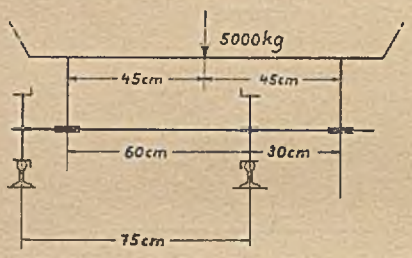
Wir wählen ein normales I-Eisen N P Nr. 9 mit einem

$$W_x = 26 \text{ cm}^3.$$

Die tatsächlich vorhandene größte Biegungsspannung wird dann

$$\sigma_b = \frac{M_b}{W} = \frac{22\,884}{26} = 881 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2},$$

wenn man das Eigengewicht des Trägers unberücksichtigt läßt.*



56. ***Beispiel:*** Es ist der Durchmesser der nebenstehend skizzierten

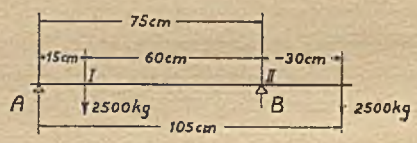


Abb. 108.

Achse *(Abb. 108)* zu berechnen. Benutzt wird ein Material mit der Markenbezeichnung St 50 . 41 (Din 1641).

Lösung: Da die Achse rotiert, so gilt der Belastungsfall III mit einem $k_b = 500 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$.

$$A = \frac{\Sigma P \,.\, b}{l} = \frac{2500 \,.\, 60}{75} + \frac{2500 \,.\, (-30)}{75} = 1000 \text{ kg},$$

$$B = \frac{\Sigma P \,.\, a}{l} = \frac{2500 \,.\, 15}{75} + \frac{2500 \,.\, 105}{75} = 4000 \text{ kg},$$

$$M_{max} = 2500 \,.\, 30 = 75\,000 \text{ cmkg},$$

$$M_{max} = W \,.\, k_b = 0{,}1 \,.\, d^3 \,.\, 500 = 75\,000 \text{ cmkg},$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{75\,000}{0{,}1 \,.\, 500}} = 11{,}45 \text{ cm}.$$

Nach Din 3 wählen wir einen Achsen-Φ = 115 mm.

Soll ein auf Biegung beanspruchter Körper konstruiert werden, so genügt es vielfach nicht, daß er die genügende Festigkeit besitzt, sondern er muß auch die wirtschaftlich günstigste Form erhalten, d. h. er muß so gestaltet sein, daß trotz geringsten Materialverbrauches die verlangte Festigkeit erreicht wird. Um dies zu erzielen, muß der Körper aus ***Querschnitten***

* Über die Untersuchung derartig kurzer Träger auf Schub siehe unter VI.

gleicher Festigkeit bestehen, und er muß als *Körper gleicher Biegungsfestigkeit* ausgebildet werden.

Querschnitte gleicher Festigkeit.

Ein Freiträger möge nach *Abb. 109* auf Biegung beansprucht sein durch das Biegungsmoment

$$M_b = -P \,.\, l \text{ cmkg}.$$

Aus dem negativen Vorzeichen erkennen wir, daß die Zugseite oben liegt. Allgemein ist nach der Biegungsgleichung die Randspannung $\sigma_b = \pm \frac{M_b}{W}$.

In unserem Falle bekommen wir nach *Abb. 109* zwei verschieden große Widerstandsmomente,

auf der Zugseite ist $W_1 = \frac{J}{e_1}$,

auf der Druckseite ist $W_2 = \frac{J}{e_2}$, folglich erhalten wir auch verschieden große Randspannungen,

$$\sigma_{b_1} = + \frac{M_b}{W_1}, \quad \sigma_{b_2} = - \frac{M_b}{W_2}.$$

Bekanntlich besteht nun für jede der größten Spannungen die Bedingung $\sigma_{b_1} \leqq k_z$, $\sigma_{b_2} \leqq k$, oder im Grenzfalle $\sigma_{b_1} = k_z$, $\sigma_{b_2} = k$. Dieser Grenzfall würde bedeuten, daß der Baustoff auf beiden Seiten gerade bis

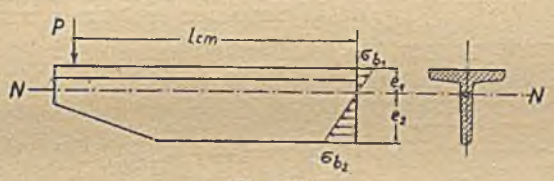


Abb. 109.

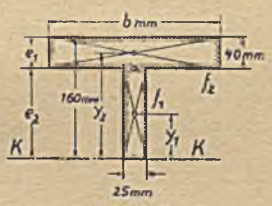


Abb. 110.

zu dem zulässigen Höchstwert beansprucht ist. Für diesen wirtschaftlich günstigsten Fall erhalten wir daher $\sigma_{b_1} : \sigma_{b_2} = k_z : k$, oder da die Spannungen sich ebenso erhalten wie die Abstände von der N-Linie, so erhalten wir als Kennzeichen für einen sogenannten „Querschnitt gleicher Festigkeit"

$$e_1 : e_2 = k_z : k.$$

57. ***Beispiel:*** Die Breite b des oberen Flansches für den in *Abb. 110* entworfenen Querschnitt soll so bestimmt werden, daß ein Querschnitt gleicher Festigkeit für Gußeisen entsteht.

Lösung: Für Gußeisen ist immer $k_z : k = 1 : 3$, also muß auch $e_1 : e_2 = 1 : 3$ sein. Die Höhenlage des Schwerpunktes ist hierdurch gegeben.

$$e_1 = \frac{1}{4} \,.\, 160 = 40 \text{ mm}, \quad e_2 = 120 \text{ mm}.$$

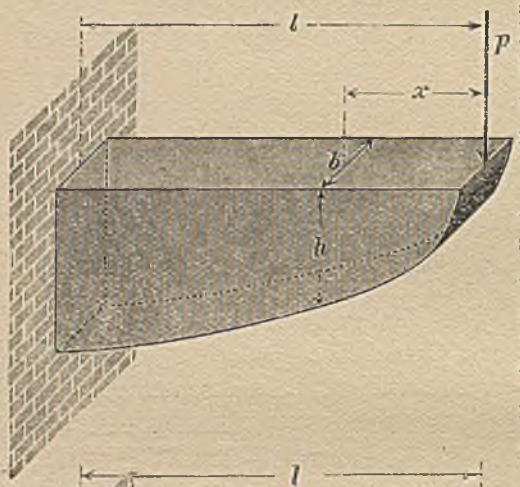
Wir stellen nun für die Achse K — K die Gleichung des statischen Moments der Flächen auf:

$$F \cdot e_2 = \Sigma (f \cdot y),$$
$$40 \cdot b \cdot 140 + 120 \cdot 25 \cdot 60 = (b \cdot 40 + 120 \cdot 25) \cdot 120,$$
$$5600 \cdot b + 180\,000 = 4800\,b + 360\,000,$$
$$800\,b = 180\,000, \quad b = 225 \text{ mm}.$$

Träger gleicher Biegungsfestigkeit.

Ist die Forderung aufgestellt, daß die Beanspruchung des Materials in jedem Querschnitt gleich sein soll, so darf die Trägerform nicht prismatisch sein, da bei dieser nur das im gefährlichen Querschnitt liegende Material voll ausgenutzt werden kann, also in dem Querschnitt, in welchem das größte Biegungsmoment auftritt.

Abb. 111.



Greift an einem Träger *(Abb. 111* u. *112)* von rechteckigem Querschnitt mit konstanter Breite b am äußersten Ende eine Einzelkraft P an, so muß bei gleicher Biegungsfestigkeit die Höhe h des Trägers verschieden sein. Für den in beliebiger Entfernung x liegenden Querschnitt erhält man aus

$$W = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{P \cdot x}{k_b},$$

$$h^2 = \frac{6\,P}{b \cdot k_b} \cdot x \quad \text{und}$$

$$h = \sqrt{\frac{6\,P}{b \cdot k_b}} \cdot \sqrt{x},$$

d. i. die Gleichung einer Parabel.

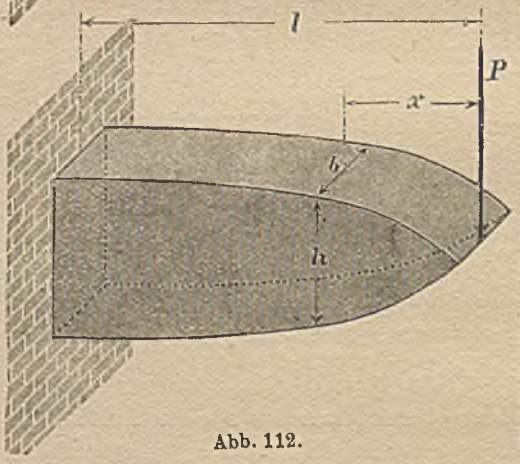


Abb. 112.

Für einen bestimmten Fall wird man die erste Größe unter dem Wurzelzeichen ausrechnen. Es wird dann für $x = 0$ auch $h = 0$, für $x = l$ wird $h =$ Höchstwert.

Greift an einem Träger von rechteckigem Querschnitt mit konstanter Höhe am äußersten Ende eine Kraft P an *(Abb. 113)*, so muß sich bei gleicher Biegungsfestigkeit die Breite b des Trägers in jedem Querschnitt ändern. Für den in beliebiger Entfernung x liegenden Querschnitt erhält man aus

$$W = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{P \cdot x}{k_b},$$

$$b = \frac{6 \cdot P}{h^2 \cdot k_b} \cdot x.$$

Das bedeutet nach analytischer Geometrie die Gleichung einer Geraden, sodaß die Form des Trägers festgelegt ist durch ein Dreieck im Grundriß.

Die Tragfähigkeit des Balkens *(Abb. 113)* wird sich nicht ändern, wenn man ihn in Streifen 1, 2, 3, 4 zerschneidet, und die einzelnen Streifen lose übereinanderlegt, wie *Abb. 114* zeigt. Nach diesem Prinzip werden die Wagenfedern konstruiert. Nach *Abb. 114* ist das Moment im Querschnitt I — I $= M_I = P \cdot y$ und wird vom Streifen 1 aufgenommen. Im Querschnitt II — II ist das Moment $M_{II} = P \cdot 2\,y$ und wird von den Streifen 1 und 2 je zur Hälfte aufgenommen.

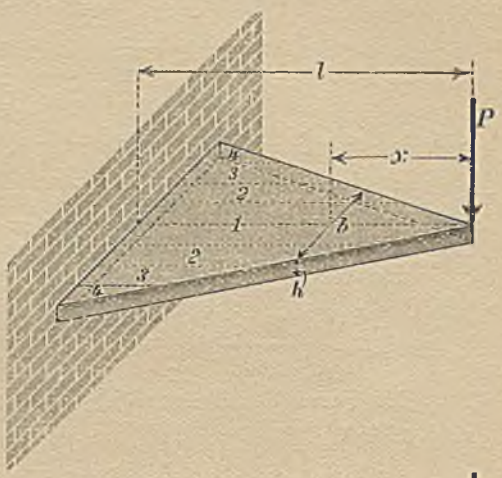
Im Querschnitt III — III ist das Moment $M_{III} = P \cdot 3\,y$ und wird zu je $\frac{1}{3}$ von den Streifen 1, 2 und 3 aufgenommen usw. Ist nun a die Breite und h die Höhe eines Streifens, sowie z die Anzahl der Streifen, so wird

$$\frac{P \cdot l}{k_b} = \frac{a \cdot h^2}{6} \cdot z.$$

58. ***Beispiel:*** Eine Trapezfeder von $l = 350$ mm Länge besteht aus 7 Stück 8 mm starken und 60 mm breiten Blättern (Streifen). Mit wieviel kg kann die Feder belastet werden?

Lösung: Für ungehärteten Federstahl setzen wir $k_b = 3600 \frac{kg}{cm^2}$.

Abb. 113.



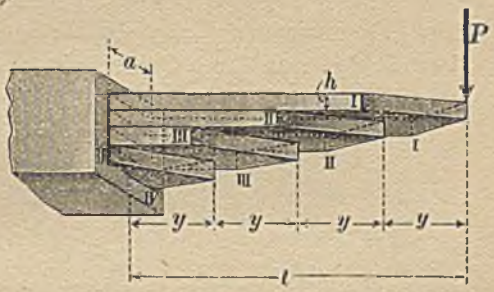


Abb. 114.

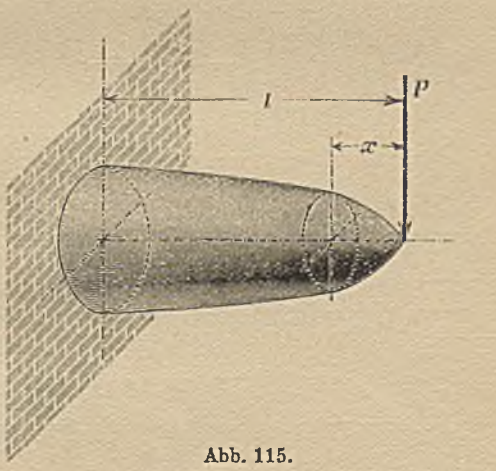


Abb. 115.

$$P = \frac{a \cdot h^2 \cdot z \cdot k_b}{6\,l} = \frac{6 \cdot 0{,}8^2 \cdot 7 \cdot 3600}{6 \cdot 35} = 461 \text{ kg}.$$

Soll der Träger überall kreisförmigen Querschnitt besitzen, so ergibt sich für den Querschnitt in der beliebigen Entfernung x *(Abb. 115)*.

$$\frac{\pi}{32} \cdot d^3 = \frac{P \cdot x}{k_b},$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{P \cdot x \cdot 32}{\pi \cdot k_b}}; \qquad d = \sqrt[3]{\frac{P}{0{,}1 \cdot k_b}} \cdot \sqrt[3]{x};$$

das ist die Gleichung der kubischen Parabel.

Ist ein Freiträger von konstanter Breite b gleichmäßig belastet, so ist, wenn P die Gesamtbelastung in kg, für den in beliebiger Entfernung x liegenden Querschnitt, da $\frac{P \cdot x}{l}$ die Belastung auf der Strecke x ist,

$$\frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{P \cdot x^2}{2 \cdot l \cdot k_b}; \qquad h = x \cdot \sqrt{\frac{3 \cdot P}{l \cdot b \cdot k_b}}.$$

Die Form des Trägers ist in der Seitenansicht demnach ein Dreieck *(Abb. 116)*.

Die genieteten Träger haben gegenüber den gewalzten Profilen den Vorteil, daß man ihren Querschnitt, also auch ihr Widerstandsmoment durch Weglassen von Teilen der Gurtplatten gegen die Auflager zu, der Momentenlinie einpassen kann; das für das größte Biegungsmoment gerechnete Widerstandsmoment ist nur an einer bestimmten Stelle des Trägers — beim freiaufliegenden Träger *(Abb. 117)* in der Mitte — notwendig, während in den Auflagerquerschnitten, wo das Biegungsmoment gleich Null ist, auch der Querschnittt durch Weglassen von Gurtplatten entsprechend geschwächt werden kann. Es besteht also die Möglichkeit, den genieteten Träger annähernd als „Körper gleicher Biegungsfestigkeit" auszuführen.

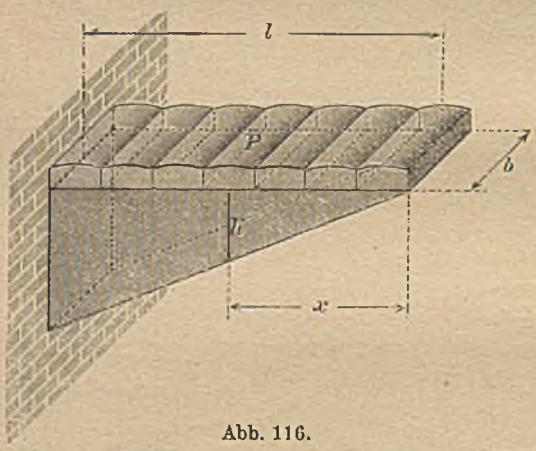


Abb. 116.

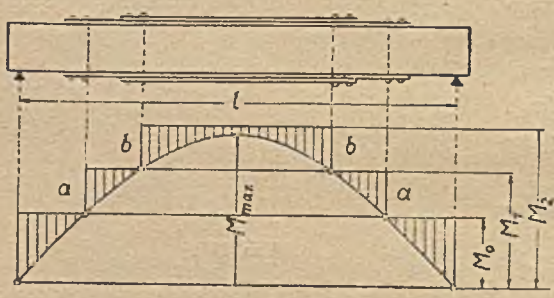


Abb. 117.

Um diejenigen Punkte des Trägers zu bestimmen, bei welchen das Weglassen der Gurtplatten beginnen kann, zeichnet man sich die Momentenkurve in einem bestimmten Maßstab auf und trägt die Momente M_0, M_1, M_2 der Blechträgerquerschnitte mit keiner, einer und zwei Gurtplatten versehen ein, nachdem man sich dieselben mit Hilfe der Gleichung

$M_b = W \cdot k_b$ bestimmt hat. Dann zieht man durch die Endpunkte der Momentenstrecken M_0, M_1 und M_2 je eine Wagerechte, welche die Kurve in a bezw. b schneidet, oder, wenn ein Überschuß an Widerstandsmoment vorhanden ist, über der Kurve liegt. Die Strecken a — a und b — b stellen die Längen dar, für welche die Querschnitte voll ausgenutzt werden. Da bei Anwendung von Gurtplatten die Widerstandsmomente nur sprungweise vergrößert werden können, die Biegungsmomente aber allmählich anwachsen, ist es nötig, die erste Gurtplatte

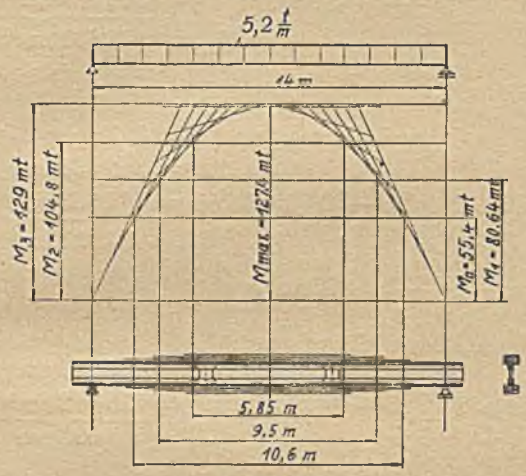


Abb. 118.

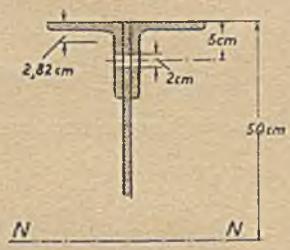


Abb. 119.

schon von a, die zweite von b ab wirken zu lassen. Letztere kommt meistens überhaupt nicht mehr voll zur Wirkung, da sich das Widerstandsmoment praktisch nicht genau dem Biegungsmoment anpassen läßt.

59. ***Beispiel:*** Ein Blechträger von 14 m Stützweite, belastet mit 5,2 t/m ist zu berechnen. $k_b = 1200 \frac{kg}{cm^2}$.

Lösung: Das größte Biegungsmoment $M_{max} = \frac{5{,}2 \cdot 14^2}{8} = 127{,}4$ mt. Die Momentenfläche ist eine Parabel mit der Pfeilhöhe 127,4 mt, die maßstäblich aufzutragen ist *(Abb. 118)*.

Gewählt werden Stehblech 1000 . 10 mm, Gurtwinkel 100 . 100 . 10 ($F = 19{,}2$ qcm, $J_s = 177$ cm^4).

Zur Verstärkung des Querschnittes sind Gurtplatten aus Flacheisen 250 . 10 mm vorgesehen.

Das Widerstandsmoment W_0 ohne Gurtplatte *(Abb. 119)*:

$$\frac{1 \cdot 100^3}{12} = 83\,333 \text{ cm}^4$$

$$+ 4 \cdot [177 + 19{,}2\,(50 - 2{,}82)^2] = 171\,800 \text{ cm}^4$$

$$J_0' = 255\,133 \text{ cm}^4$$

$$\text{Nietabzug } 2 \cdot (2 \cdot 3) \cdot 45^2 = - 24\,300 \text{ cm}^4$$

$$J_0 = 230\,833 \text{ cm}^4,$$

$$W_0 = \frac{J_0}{e},$$

$$W_0 = \frac{230\,833}{50} = 4617 \text{ cm}^3.$$

Das Widerstandsmoment W_1 mit einer Gurtplatte *(Abb. 120)*

$$J_0' = 255\,133 \text{ cm}^4$$

Nietabzug für Winkeleisen $4 \,.\, (2 \,.\, 1) \,.\, 49{,}5^2 = -\,19\,602 \text{ cm}^4$

$$J_1' = 235\,531 \text{ cm}^4$$

+ 1 Gurtplatte

$$2\,[(25 - 4) \,.\, 1 \,.\, 50{,}5^2] \quad + \quad 107\,100 \text{ cm}^4$$

$$J_1 = 342\,631 \text{ cm}^4$$

$$W_1 = \frac{J_1}{e} = \frac{342\,631}{51} = 6720 \text{ cm}^3$$

Das Widerstandsmoment W_2 mit zwei Gurtplatten *(Abb. 121)*

$$J_1 = 342\,631 \text{ cm}^4$$

+ 1 Gurtplatte $2 \,.\, [(25 - 4) \,.\, 1 \,.\, 51{,}5^2] = 111\,300 \text{ cm}^4$

$$J_2 = 453\,931 \text{ cm}^4$$

$$W_2 = \frac{J_2}{e} = \frac{453\,931}{52} = 8730 \text{ cm}^3$$

Das Widerstandsmoment W_3 mit drei Gurtplatten:

$$J_2 = 453\,931 \text{ cm}^4$$

+ 1 Gurtplatte $2 \,.\, [(25 - 4) \,.\, 1 \,.\, 52{,}5^2] = 115\,762 \text{ cm}^4$

$$J_3 = 569\,693 \text{ cm}^4$$

$$W_3 = \frac{J_3}{e} = \frac{569\,693}{53} = 10\,749 \text{ cm}^3.$$

Berechnung der Gurtplattenlängen. Durch die Widerstandsmomente können folgende Biegungsmomente aufgenommen werden:

$$M_0 = W_0 \,.\, k_b = 4617 \,.\, 1200 = 5\,540\,400 \text{ cmkg} = 55{,}4 \text{ mt}$$
$$M_1 = W_1 \,.\, k_b = 6720 \,.\, 1200 = 8\,064\,000 \text{ cmkg} = 80{,}64 \text{ mt}$$
$$M_2 = W_2 \,.\, k_b = 8730 \,.\, 1200 = 10\,476\,000 \text{ cmkg} = 104{,}8 \text{ mt}$$
$$M_3 = W_3 \,.\, k_b = 10749 \,.\, 1200 = 12\,898\,800 \text{ cmkg} = 129{,}0 \text{ mt}.$$

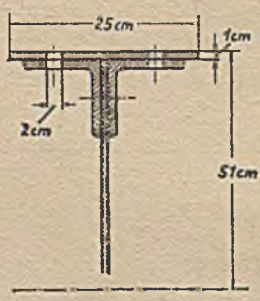


Abb. 120.

Die theoretischen Plattenlängen werden gefunden mit 10,6 m, 9,5 m und 5,85 m. Die Platten sind noch um soviel zu verlängern, daß die Vernietung untergebracht werden kann.

Man sieht, daß die richtige und sparsame Bemessung eines Blechträgers mit einer etwas umständlichen Rechnung verbunden ist. Der Querschnitt muß unter Berücksichtigung seiner Schwächung durch die Nietlöcher bestimmt werden. Es werden immer diejenigen Nietlöcher abgezogen, die vom Schwerpunkt des Querschnittes am weitesten entfernt liegen, bei Trägern mit Gurtplatten also die senkrechten, bei Trägern ohne Gurtplatten die wagrechten Nietlöcher. Bei verhältnismäßig hohen Trägerquerschnitten kann man sich die Rechnung dadurch wesentlich erleichtern, daß man die Trägheitsmomente

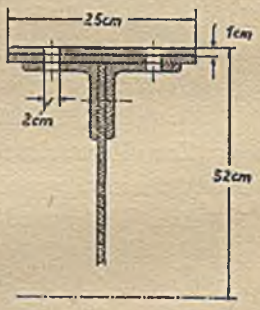


Abb. 121.

der Nietlöcher und der Gurtplatten in bezug auf ihre eigene Schwerachse vernachlässigt, und nur den Wert $F.a^2$ in die Rechnung einführt.

60. ***Beispiel:*** Eine Traverse aus Stahlguß erfährt in der Mitte zwischen den beiden Auflagern eine stoßend auftretende Belastung von 1150 kg.

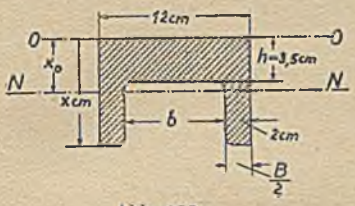


Abb. 122.

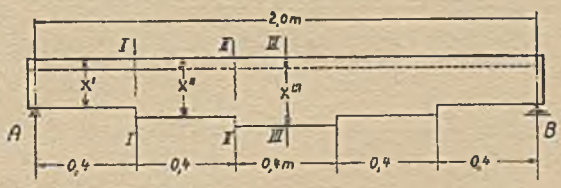


Abb. 123.

Sie soll als Körper gleicher Biegungsfestigkeit gemäß *Abb. 122, 123* ausgeführt werden. Wie groß sind die Abmessungen x', x'', x''' zu wählen bei einem $k_b = 400 \frac{kg}{cm^2}$. Das Eigengewicht ist zu berücksichtigen.

Lösung: Da der Träger in der Mitte belastet ist, so wird
$A = B = 575$ kg; $A \,.\, 40 = M_I = W' k_b = W' \,.\, 400 = 575 \,.\, 40 = 23000$ cmkg.

$$W_{erf}' \cong \frac{23000}{400} = 57{,}5 \text{ cm}^3,$$

$$J_0 = \frac{B \,.\, x^3}{3} + \frac{b \,.\, h^3}{3}; \; N_N = J_0 - F \,.\, x_0^2,$$

$$x_0 = \frac{B \,.\, x^2 + b \,.\, h^2}{2 \,.\, F}; \quad F = x \,.\, B + h \,.\, b; \quad W = \frac{J_N}{x - x_0}.$$

Wir gehen am einfachsten in der Weise vor, daß wir x beliebig wählen; wir nehmen an $x' = 10$ cm.

$$J'_0 = \frac{4 \,.\, 10^3}{3} + \frac{8 \,.\, 3{,}5^3}{3} = 1447{,}7 \text{ cm}^4, \; F' = 10 \,.\, 4 + 3{,}5 \,.\, 8 = 68 \text{ cm}^2,$$

$$x'_0 = \frac{4 \,.\, 10^2 + 8 \,.\, 3{,}5^2}{2 \,.\, 68} = 3{,}66 \text{ cm}, \; J_N' = 1447{,}7 - 68 \,.\, 3{,}66^2 = 536{,}2 \text{ cm}^4,$$

$$W_{vorh}' = \frac{536{,}2}{10 - 3{,}66} = 84{,}6 \text{ cm}^3.$$

$x' = 10$ cm ist also zu groß gewählt. Wir nehmen an $x' = 9$ cm und berücksichtigen das Eigengewicht $\left(\gamma = 7{,}8 \frac{kg}{dm^3}\right)$.

$$J_0' = \frac{4 \,.\, 9^3}{3} + \frac{8 \,.\, 3{,}5^3}{3} = 1086{,}3 \text{ cm}^4; \quad F' = 9 \,.\, 4 + 3{,}5 \,.\, 8 = 64 \text{ cm}^2,$$

$$x_0' = \frac{4 \,.\, 9^2 + 8 \,.\, 3{,}5^2}{2 \,.\, 64} = 3{,}3 \text{ cm}, \; J_N' = 1086{,}3 - 64 \,.\, 3{,}3^2 = 389{,}4 \text{ cm}^4$$

$$W_{vorh}' = \frac{389{,}4}{9 - 3{,}3} = 68{,}3 \text{ cm}^3, \; G' = 0{,}64 \,.\, 4 \,.\, 7{,}8 = 20 \text{ kg},$$

dann können wir das Gesamtgewicht mit 140 kg schätzen.

$$A = 645\,\text{kg},\quad M_I = 645 \,.\, 40 - 20 \,.\, 20 = 25\,400\ \text{cmkg}$$

$$W_{erf}' = \frac{25\,400}{400} = 63{,}5\ \text{cm}^3.$$

Wir können also $x' = 9$ cm beibehalten.

x'' wählen wir 11 cm. Dann wird

$$J_0'' = \frac{4 \,.\, 11^3}{3} + \frac{8 \,.\, 3{,}5^3}{3} = 1889\ \text{cm}^4,\quad F'' = 11 \,.\, 4 + 3{,}5 \,.\, 8 = 72\ \text{cm}^2,$$

$$x_0'' = \frac{4 \,.\, 11^2 + 8 \,.\, 3{,}5^2}{2 \,.\, 72} = 4{,}04\ \text{cm},\quad J_N'' = 1889 - 72 \,.\, 4{,}04^2 = 713{,}2\ \text{cm}^4$$

$$G' + G'' = 2 \,.\, 20 + 2 \,.\, 0{,}2^2 \,.\, 4 \,.\, 7{,}8 = 42{,}5\ \text{kg};$$

$$W_{vorh}'' = \frac{713{,}2}{11 - 4{,}04} = 102{,}5\ \text{cm}^3;$$

$$M_{II} = 645 \,.\, 80 - 20 \,.\, 60 - 22{,}5 \,.\, 20 = 49\,550\ \text{cmkg},$$

$$W_{erf}'' = \frac{49\,550}{400} = 123{,}9\ \text{cm}^3.$$

Das gewählte x'' ist also zu klein; wir nehmen an $x'' = 11{,}4$ cm, dann wird

$$J_0'' = \frac{4 \,.\, 11{,}4^3}{3} + \frac{8 \,.\, 3{,}5^3}{3} = 2090\ \text{cm}^4,\quad F'' = 11{,}4 \,.\, 4 + 3{,}5 \,.\, 8 = 73{,}6\ \text{cm}^2,$$

$$x_0'' = \frac{4 \,.\, 11{,}4^2 + 8 \,.\, 3{,}5^2}{2 \,.\, 73{,}6} = 4{,}2\ \text{cm},\quad J_N'' = 2090 - 73{,}6 \,.\, 4{,}2^2 = 794{,}6\ \text{cm}^4,$$

$$W_{vorh}'' = \frac{794{,}6}{11{,}4 - 4{,}2} = 110{,}4\ \text{cm}^3.$$

x'' ist noch zu klein; gewählt $x'' = 11{,}7$ cm. Dann wird:

$$J_0'' = \frac{4 \,.\, 11{,}7^3}{3} + \frac{8 \,.\, 3{,}5^3}{3} = 2250\ \text{cm}^4,\quad F'' = 11{,}7 \,.\, 4 + 3{,}5 \,.\, 8 = 74{,}8\ \text{cm}^2,$$

$$x_0'' = \frac{4 \,.\, 11{,}7^2 + 8 \,.\, 3{,}5^2}{2 \,.\, 74{,}8} = 4{,}3\ \text{cm},\quad J_N'' = 2250 - 74{,}4 \,.\, 4{,}3^2 = 875\ \text{cm}^4,$$

$$W_{vorh}'' = \frac{875}{11{,}7 - 4{,}3} = 118\ \text{cm}^3 < 123{,}9\ \text{cm}^3.$$

Wir wählen endgültig $x'' = 11{,}8$ cm.

x''' angenommen $= 13$ cm.

$$J_0''' = \frac{4 \,.\, 13^3}{3} + \frac{8 \,.\, 3{,}5^3}{3} = 3043{,}6\ \text{cm}^4,\quad F''' = 13 \,.\, 4 + 3{,}5 \,.\, 8 = 80\ \text{cm}^2,$$

$$x_0''' = \frac{4 \,.\, 13^2 + 8 \,.\, 3{,}5^2}{2 \,.\, 80} = 4{,}84\ \text{cm},\quad J_N''' = 3043{,}6 - 80 \,.\, 4{,}84^2 = 1169{,}6\ \text{cm}^4,$$

$$W_{vorh}''' = \frac{1169{,}6}{13 - 4{,}84} = 143{,}4\ \text{cm}^3.$$

$$G' = 20\ \text{kg},\quad G'' = 20 + 2 \,.\, 0{,}28 \,.\, 0{,}2 \,.\, 4 \,.\, 7{,}8 = 23{,}5\ \text{kg},$$

$$G''' = 20 + 2 \,.\, 0{,}2 \,.\, 0{,}4 \,.\, 4 \,.\, 7{,}8 = 25\ \text{kg},$$

$$G = 2 \,.\, G' + 2\,G'' + G''' = 112\ \text{kg} < 140\ \text{kg},$$

$$M_{III} = (575 + 56) \,.\, 100 - 20 \,.\, 80 - 23{,}5 \,.\, 40 - 12{,}5 \,.\, 10 = 60\,435 \text{ cmkg},$$

$$W_{erf}''' = \frac{60\,435}{400} = 151{,}1 \text{ cm}^3 > 143{,}4 \text{ cm}^3$$

gewählt $x''' = 13{,}5$ cm.

Verhalten des Gußeisens gegen Biegung.

Das Verhalten des Gußeisens gegenüber Biegung ist stark abhängig von der Querschnittsform und davon, ob Gußhaut vorhanden ist oder nicht. Nach C. v. Bach ist die zulässige Biegungsbeanspruchung eines auf Biegung beanspruchten gußeisernen Körpers *(Abb. 124)* zu ermitteln aus der Formel

$$k_b = k_z \,.\, \mu \,.\, \sqrt{\frac{e}{z_0}};$$

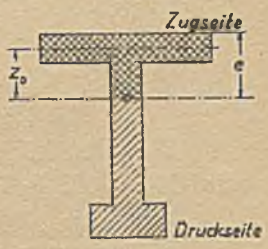


Abb. 124.

hierin bedeutet k_z die zulässige Beanspruchung des Gußeisens auf Zug, e den Abstand der äußersten gezogenen Faser von der Nullinie, z_0 den Schwerpunktsabstand des auf Zug beanspruchten Querschnittsteiles von der Nullinie, μ eine Zahl, die nicht nur von der Form des Querschnittes abhängig ist, sondern auch davon, ob es sich um Rohguß oder um bearbeiteten Guß handelt, um normales oder um vorzügliches Gußeisen.

Für Querschnitte, oben und unten durch horizontale Gerade begrenzt, bei fehlender Gußhaut $\mu = 1{,}2$,

Für Querschnitte, oben und unten durch horizontale Gerade begrenzt, bei vorhandener Gußhaut $\mu = 1{,}0$,

Für Querschnitte in Kreisform oder über Eck liegendes Quadrat bei fehlender Gußhaut $\mu = 1{,}33$,

Für Querschnitte in Kreisform oder über Eck liegendes Quadrat bei vorhandener Gußhaut $\mu = 1{,}1$.

Für vorzügliches Gußeisen können die Werte für μ mit $\frac{5}{4}$ bis $\frac{3}{2}$ multipliziert werden.

Das veränderte Verhalten des Gußeisens gegen Biegung ist dadurch zu erklären, daß Gußeisen dem Hookeschen Gesetz nicht folgt; die Zugspannung der äußersten Faser erreicht bei weitem nicht den Wert, mit dem die übliche Biegungsgleichung rechnet. Gußeisen verhält sich bei der Beanspruchung auf Biegung viel günstiger, als es nach der gewöhnlichen Biegungsgleichung zu erwarten wäre.

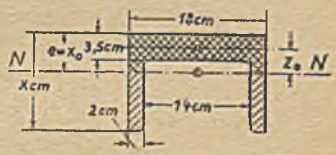


Abb. 125.

61. ***Beispiel:*** Der im 60. Beispiel berechnete Stahlgußträger soll jetzt aus Gußeisen hergestellt werden. $\left(\gamma = 7{,}25 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}\right)$ unbearbeiteter Guß *(Abb. 125)*.

Lösung: Mit Rücksicht auf die Erschütterungen wählen wir $k_z = 100 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$. $W_{erf}' = \frac{M_I}{k_b}$ cm³; k_b wählen wir nach Erfahrung versuchsweise

$$\left(\sqrt{\frac{e}{z_0}} \begin{array}{l}\text{vorläufig} = 1{,}2\\ \mu = 1\end{array}\right) = 1{,}2\ k_z = 120\ \frac{kg}{cm^2};\ W_{erf}' \simeq \frac{23\,000}{120} = 191{,}7\ cm^3.$$

Das Maß b nehmen wir jetzt mit 14 cm an, also die Breite der Traverse mit 18 cm. G′ schätzen wir mit 40 kg und x′ *(Abb. 123)* mit 14 cm, dann wird

$$e' = \frac{4\,.\,14\,.\,7 + 14\,.\,3{,}5\,.\,1{,}75}{4\,.\,14 + 14\,.\,3{,}5} = 4{,}55\ cm,$$

$$e' - z_0' = \frac{4{,}55\,.\,2\,.\,2\,.\,2{,}275 + 14\,.\,3{,}5\,.\,1{,}75}{18\,.\,4{,}55 - 14\,.\,1{,}05} = 1{,}9\ cm,$$

$$z_0' = 2{,}65\ cm;\ k_b' = 100\,.\,1\,.\sqrt{\frac{4{,}55}{2{,}65}} = 131\ \frac{kg}{cm^2}.$$

Wir schätzen jetzt das Eigengewicht der Traverse mit 220 kg, dann wird $M_I = (575 + 110)\,.\,40 - 40\,.\,20 = 26\,600$ cmkg,

$$W_{erf}' = \frac{26\,600}{131} = 203\ cm^3.\quad J_0' = \frac{4\,.\,14^3}{3} + \frac{14\,.\,3{,}5^3}{3} = 3858{,}4\ cm^4.$$

$$F' = 4\,.\,14 + 14\,.\,3{,}5 = 105\ cm^2,\quad x_0' = e' = 4{,}55\ cm,$$

$$J_N' = 3858{,}4 - 105\,.\,4{,}55^2 = 1684{,}9\ cm^4,\ W_{vorh}' = \frac{1684{,}9}{4{,}55} = 370\ cm^3.$$

Es ist also x′ viel zu groß. Wir wählen $x' = 11$ cm, dann wird:

$$e' = \frac{4\,.\,11\,.\,5{,}5 + 14\,.\,3{,}5\,.\,1{,}75}{4\,.\,11 + 14\,.\,3{,}5} = 3{,}52\ cm;$$

$$e' - z_0' = \frac{3{,}52\,.\,2\,.\,2\,.\,1{,}76 + 14\,.\,3{,}5\,.\,1{,}75}{18\,.\,3{,}52 - 14\,.\,0{,}02} = 1{,}714\ cm,$$

$$z_0' = 1{,}806\ cm,\quad k_b' = 100\,.\sqrt{\frac{3{,}52}{1{,}806}} = 140\ \frac{kg}{cm^2}.$$

Wir schätzen jetzt das Eigengewicht der Traverse mit 160 kg, G′ mit 25 kg, dann wird

$$M_I = (575 + 80)\,.\,40 - 25\,.\,20 = 25\,700\ cmkg,$$

$$W_{erf}' = \frac{25\,700}{140} = 183{,}5\ cm^3,\quad J_0' = \frac{4\,.\,11^3}{3} + \frac{14\,.\,3{,}5^3}{3} = 1975\ cm^4,$$

$$F' = 4\,.\,11 + 14\,.\,3{,}5 = 93\ cm^2;\quad x_0' = e' = 3{,}52\ cm,$$

$$J_N' = 1975 - 93\,.\,3{,}52^2 = 735\ cm^4,$$

$$W_{vorh}' = \frac{735}{3{,}52} = 209\ cm^3 > 183{,}5\ cm^3.$$

Wir wählen endgültig $x' = 10{,}5$ cm. Die gefährdete Faserschicht ist die äußerste Schicht der Zugseite; die äußerste Schicht der Druckseite ist nicht voll beansprucht, weil $e' > \frac{x'}{4}$. Die Traverse wird also nicht als „Querschnitt gleicher Festigkeit“ ausgeführt, weil dies voraussetzen würde, daß

man außer der Höhe auch die Breite der Traverse veränderlich ausführt, oder deren Wand- und Rippenstärken. Die Ersparnis an Gußmaterial ist auch zu unbedeutend, als daß es sich lohnen würde, durch umständliches Probieren jene Querschnitte zu ermitteln, die sowohl „Querschnitte gleicher Festigkeit“ sind, als auch einem „Körper gleicher Biegungsfestigkeit“ angehören.

$$G' = (1{,}05 \,.\, 0{,}4 + 1{,}4 \,.\, 0{,}35) \,.\, 7{,}25 \,.\, 4 = 26{,}4 \text{ kg},$$

$$x'' \text{ vorläufig angenommen} = 13 \text{ cm},$$

$$G'' = 26{,}4 + 0{,}25 \,.\, 0{,}4 \,.\, 4 \,.\, 7{,}35 = 29{,}4 \text{ kg};$$

$$J_0'' = \frac{4 \,.\, 13^3}{3} + \frac{14 \,.\, 3{,}5^3}{3} = 3130 \text{ cm}^4,$$

$$F'' = 4 \,.\, 13 + 14 \,.\, 3{,}5 = 101 \text{ cm}^2;$$

$$e'' = \frac{4 \,.\, 13 \,.\, 6{,}5 + 14 \,.\, 3{,}5 \,.\, 1{,}75}{4 \,.\, 13 + 14 \,.\, 3{,}5} = 4{,}19 \text{ cm};$$

$$e'' - z_0'' = \frac{4{,}19 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2{,}095 + 14 \,.\, 3{,}5 \,.\, 1{,}75}{18 \,.\, 4{,}19 - 14 \,.\, 0{,}69} = 1{,}835 \text{ cm}; \quad z_0'' = 2{,}355 \text{ cm};$$

$$k_b'' = 100 \,.\, 1 \,.\, \sqrt{\frac{4{,}19}{2{,}355}} = 133{,}6 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2};$$

$$W_{vorh}'' = \frac{3130 - 101 \,.\, 4{,}19^2}{4{,}19} = 324 \text{ cm}^3,$$

$$M_{II} = (575 + 80) \,.\, 80 - 26{,}4 \,.\, 60 - 29{,}4 \,.\, 20 = 50\,228 \text{ cmkg};$$

$$W_{erf}'' = \frac{50\,228}{133{,}6} = 376 \text{ cm}^3 > 324 \text{ cm}^3.$$

x'' ist etwas zu klein gewählt. Wir nehmen an $x'' = 14$ cm. Wir hatten schon vorher ausgerechnet, daß wir dann auf ein $W_{vorh}'' = \sim 370$ cm³ kommen.

$$x''' \text{ wählen wir vorläufig} = 15 \text{ cm};$$

$$G'' = 26{,}4 + 0{,}35 \,.\, 0{,}4 \,.\, 4 \,.\, 7{,}35 = 30{,}5 \text{ kg};$$

$$G''' = 30{,}5 + 0{,}1 \,.\, 0{,}4 \,.\, 4 \,.\, 7{,}35 = 31{,}7 \text{ kg};$$

$$G = 2\,G' + 2\,G'' + G''' = 145{,}5 \text{ kg},$$

$$J_0''' = \frac{4 \,.\, 15^3}{3} + \frac{14 \,.\, 3{,}5^3}{3} = 4700 \text{ cm}^4; \quad F''' = 4 \,.\, 15 + 14 \,.\, 3{,}5 = 109 \text{ cm}^2,$$

$$e''' = \frac{4 \,.\, 15 \,.\, 7{,}5 + 14 \,.\, 3{,}5 \,.\, 1{,}75}{4 \,.\, 15 + 14 \,.\, 3{,}5} = 4{,}92 \text{ cm};$$

$$e''' - z_0''' = \frac{4{,}92 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2{,}46 + 14 \,.\, 3{,}5 \,.\, 1{,}75}{18 \,.\, 4{,}92 - 14.1{,}42} = 1{,}955 \text{ cm}, \; z_0'' = 2{,}965 \text{ cm}.$$

$$k_b''' = 100 \,.\, 1 \,.\, \sqrt{\frac{4{,}92}{2{,}965}} = 129 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}.$$

$$W_{vorh}''' = \frac{4700 - 109 \,.\, 4{,}92^2}{4{,}92} = 418 \text{ cm}^3.$$

$$M_{III} = (575 + 72{,}8) \,.\, 100 - 26{,}4 \,.\, 80 - 30{,}5 \,.\, 40 - 15{,}9 \,.\, 20 = 61\,130 \text{ cmkg},$$

$$W_{erf}''' = \frac{61\,130}{129} = 473 \text{ cm}^3 > 418 \text{ cm}^3,$$

x''' endgültig gewählt $= 16$ cm.

$$G = 145{,}5 + 0{,}1 \,.\, 0{,}2 \,.\, 2 \,.\, 4 \,.\, 7{,}35 = 147 \text{ kg}.$$

$$J_0''' = \frac{4 \,.\, 16^3}{3} + \frac{14 \,.\, 3{,}5^3}{3} = 5670 \text{ cm}^4;$$

$$F''' = 4 \,.\, 16 + 14 \,.\, 3{,}5 = 113 \text{ cm}^2;$$

$$e''' = \frac{4 \,.\, 16 \,.\, 8 + 14 \,.\, 3{,}5 \,.\, 1{,}75}{4 \,.\, 16 + 14 \,.\, 3{,}5} = 5{,}29 \text{ cm};$$

$$e''' - z_0''' = \frac{5{,}29 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2{,}645 + 14 \,.\, 3{,}5 \,.\, 1{,}75}{18 \,.\, 5{,}29 - 14 \,.\, 1{,}79} = 2{,}03 \text{ cm};$$

$$z_0''' = 3{,}26 \text{ cm},$$

$$k_b''' = 100 \,.\, 1 \,.\, \sqrt{\frac{5{,}29}{3{,}26}} = 127{,}6 \,\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2};$$

$$W_{vorh}''' = \frac{5670 - 113 \,.\, 5{,}29^2}{5{,}29} = 474 \text{ cm}^3,$$

$$W_{erf}''' = \frac{61\,130}{127{,}6} = 479 \text{ cm}^3 \sim 474 \text{ cm}^3.$$

Trotzdem wir es mit keinem Träger zu tun haben, der Querschnitte gleicher Festigkeit besitzt, ist die errechnete Form als gut zu bezeichnen, weil wir eine sehr große Dicke des Flansches vermieden haben, die nach dem Gießen verschieden schnelle Abkühlung und Erstarrung des Eisens ergeben haben würde und als Folge davon gefährliche Gußspannungen, die bei der stoßenden Beanspruchung hätten besonders gefährlich werden können.

Abb. 126.

Krümmung und Durchbiegung der belasteten Balken.

Ist O der Mittelpunkt des Kreisbogens für das sehr kleine Bogenstück M N *(Abb. 126)**, welches mit dem augenblicklichen Verlauf der elastischen Linie (Biegungslinie) zusammenfällt, und bezeichnet man den ***Krümmungshalbmesser*** N O mit ρ, so sind die Dreiecke d′d N und M N O ähnlich, und es ist $\frac{d'd}{MN} = \frac{e}{\rho}$. Es ist d′d die Verlängerung, welche eine Randfaser

* R. Lauenstein, Festigkeitslehre.

von der ursprünglichen Länge M N bekommt. Bei einer Randspannung von $1 \frac{kg}{cm^2}$ und einer Faserlänge von 1 cm würde die Verlängerung (Dehnung) $\alpha \frac{cm^2}{kg}$ betragen, also bei M N cm ursprünglicher Länge (b d′ cm) und bei einer Randspannung von $\sigma_z \frac{kg}{cm^2}$ beträgt alsdann die Verlängerung:

$$\alpha \,.\, \sigma_z \,.\, M\,N \text{ cm},$$

$$\alpha \,.\, \sigma_z \,.\, M\,N = d'\,d,$$

$$\frac{d'\,d}{M\,N} = \alpha \,.\, \sigma_z = \frac{\sigma_z}{E},$$

$$\frac{e}{\rho} = \frac{\sigma_z}{E}; \qquad \rho = \frac{E \,.\, e}{\sigma_z} \text{ cm}.$$

Unsere bekannte Biegungsgleichung $M_b = W \,.\, \sigma_b$ ergibt $\sigma_z = \sigma_b = \frac{M_b \,.\, e}{J}$; eingesetzt ergibt sich:

$$\rho = \frac{E \,.\, J}{M_b} \text{ cm}.$$

Setzt man beispielsweise in die Gleichung $\rho = \frac{E \,.\, e}{\sigma_b}$ die Werte für Flußeisen ein,

$$\sigma_b = 1000 \frac{kg}{cm^2}, \quad E = 2150000 \frac{kg}{cm^2},$$

so bekommt man $\rho = \frac{2150000}{1000} \,.\, e = 2150 \,.\, e$, also z. B. für ein [-Eisen N P Nr. 16, $\rho = 2150 \,.\, 8 = 17200$ cm $= 172$ m, d. h. bei den gebräuchlichen Spannungen fallen die Krümmungshalbmesser verhältnismäßig groß aus. Die Gleichung $\rho = \frac{E \,.\, J}{M_b}$ läßt erkennen, daß bei einem Träger, bei dem J stets denselben Wert behält, der Krümmungshalbmesser um so kleiner wird, je größer das Biegungsmoment M_b ist. Die Stelle des größten Biegungsmomentes ist die Stelle des kleinsten Krümmungshalbmessers, d. h. der schärfsten Krümmung des Balkens.

62. ***Beispiel:*** Ein Träger aus I-Eisen N P Nr. 18 ist so belastet, daß im gefährlichen Querschnitt eine größte Biegungsspannung von $1100 \frac{kg}{cm^2}$ entsteht. Wie groß ist der Krümmungshalbmesser der Biegungslinie an der Stelle des gefährlichen Querschnittes?

Lösung: Der Abstand der äußersten Faser von der Nullinie

$$e = \frac{18}{2} = 9 \text{ cm}, \quad \text{die Biegungsspannung}$$

$\sigma_b = 1100 \frac{kg}{cm^2}$, der Elastizitätsmodul für Flußeisen $E = 2150000 \frac{kg}{cm^2}$;

$$\rho = \frac{E \,.\, e}{\sigma_b} = \frac{2150000 \,.\, 9}{1100} = 17600 \text{ cm} = 176 \text{ m}.$$

63. ***Beispiel:*** Ein Träger von 5 m Länge, der in der Mitte eine Einzellast von 4000 kg aufnehmen soll, ist aus zwei [-Eisen herzustellen *(Abb. 127)* für $k_b = 1100 \frac{kg}{cm^2}$. Welches Profil ist zu wählen, und wie groß ist der Krümmungshalbmesser an der Stelle des gefährlichen Querschnittes und an den Stabenden?

Lösung:

$$M_{max} = \frac{P \cdot l}{4} = \frac{4000 \cdot 500}{4} = 500\,000 \text{ cmkg},$$

$$W_{erf} = \frac{M_{max}}{k_b} = \frac{500\,000}{1100} = 454{,}5 \text{ cm}^3, \text{ also für ein [-Eisen:}$$

$$W_{erf} = W_{x_{erf}} = 228 \text{ cm}^3; \quad 2 \text{] NP Nr. 22 mit}$$

$$W_{vorh} = 2 \cdot 245 = 490 \text{ cm}^3; \; J_{vorh} = 2\, J_x = 2 \cdot 2690 = 5380 \text{ cm}^4.$$

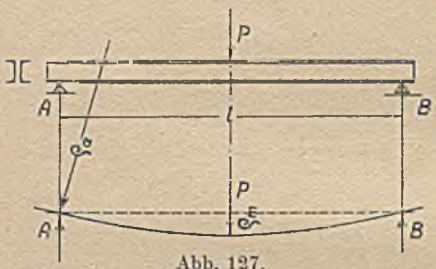


Abb. 127.

Für Flußeisen $E = 2\,150\,000 \frac{kg}{cm^2}$, und der Krümmungshalbmesser in der Mitte des Trägers

$$\rho_m = \frac{E \cdot J}{M_b} = \frac{2150\,000 \cdot 5380}{500\,000} =$$

$$= 23\,134 \text{ cm},$$

$$\rho_m = 231{,}34 \text{ m}.$$

An den Auflagerstellen A und B ist $M_b = 0$, folglich

$$\rho_a = \frac{E \cdot J}{0} = \infty,$$

d. h. die Biegungslinie hat ihre stärkste Krümmung in der Mitte und sie wird nach den Enden zu immer flacher.

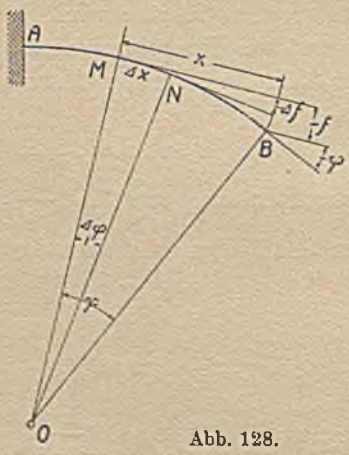


Abb. 128.

Zur Berechnung der ***Durchbiegung*** f am Punkte B *(Abb. 128)* gegen den Punkt M gelten folgende Überlegungen:

Im Dreieck M N O mit der sehr kleinen Seite $MN = \Delta x$ und dem sehr kleinen Krümmungswinkel $MON = \Delta \varphi$ ist:

$$\Delta x = \rho \cdot \Delta \varphi, \qquad \Delta \varphi = \frac{\Delta x}{\rho},$$

$$\Delta \varphi = \frac{M_b \cdot \Delta x}{E \cdot J}.$$

Denkt man sich die Länge $MB = x$ in sehr viel kleine Abschnitte $MN = \Delta x$ und dementsprechend den ganzen Krümmungswinkel $MOB = \varphi$ in sehr viel kleine Winkel $\Delta \varphi$ zerlegt, so erhält man für das Trägerstück M B des prismatisch vorausgesetzten Balkens (J = konstant):

$$\varphi = \Sigma(\Delta\varphi) = \frac{1}{E \cdot J} \cdot \Sigma(M_b \cdot \Delta x).$$

Trägt man in *Abb. 129* die Momente M_b bei den zugehörigen x (Abszisse) als Strecken (Ordinaten) auf, so erhält man als Darstellung von $\Sigma(M_b \cdot \Delta x)$ eine Fläche, die sog. Momentenfläche F_m. Setzt man diese Bezeichnung in die vorige Gleichung ein, so ergibt sich

$$\varphi = \frac{1}{E \cdot J} F_m.$$

Wegen der Kleinheit des Winkels φ kann man auch setzen:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{E \cdot J} \cdot F_m.$$

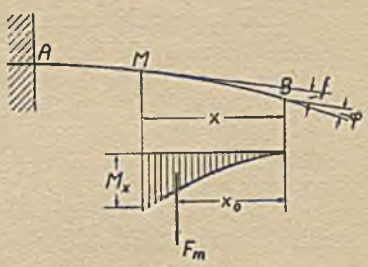


Abb. 129.

Unter dem Krümmungswinkel φ verstehen wir hier den sogenannten Biegungswinkel der elastischen Linie im Punkte B, bezogen auf die Tangente im Punkte M.

Zieht man in *Abb. 128* auch in N eine Tangente, so ist der sehr kleine Wert

$$\Delta f = x \cdot \Delta\varphi,$$

$$\Delta f = x \cdot \frac{M_b \cdot \Delta x}{E \cdot J}.$$

Die Durchbiegung f am Punkte B gegen Punkt M ist gleich der Summe sämtlicher Werte Δf;

$$f = \Sigma\Delta f = \frac{1}{E \cdot J} \cdot \Sigma \cdot (M_b \Delta x) \cdot x.$$

Der Ausdruck $\Sigma(M_b \cdot \Delta x) \cdot x$ bedeutet die Summe der statischen Momente sämtlicher Flächenstreifen der Momentenfläche in bezug auf Punkt B.

Nun gilt aber bekanntlich der Satz: Summe aller Flächenstreifen multipliziert mit dem jeweiligen Schwerpunktsabstand ist gleich der gesamten Fläche multipliziert mit ihrem Schwerpunktsabstand.

$$\Sigma(M_b \cdot \Delta x) \cdot x = F_m \cdot x_0,$$

$$f = \frac{1}{E \cdot J} \cdot F_m \cdot x_0,$$

$\frac{F_m}{E \cdot J}$ nennt man die ***reduzierte Momentenfläche.***

$$\frac{F_m}{E \cdot J} = F_m'; \qquad \operatorname{tg}\varphi = F_m';$$

$$f = F_m' \cdot x_0.$$

Man merke: Der Biegungswinkel ist gleich dem Inhalt der reduzierten Momentenfläche. Die Verschiebung des Endpunktes ist gleich dem statischen Moment der reduzierten Momentenfläche bezogen auf die Verschiebungsachse.

Damit ist die Berechnung der Durchbiegung eines Trägers zurückgeführt auf die Berechnung der statischen Momente von Flächen.

64. ***Beispiel:*** Ein Freiträger *(Abb. 130)*, 3 m lang, I-Eisen, ist am Ende mit $P = 500$ kg belastet, $k_b = 1000 \frac{kg}{cm^2}$. Welches Normalprofil muß gewählt werden, und welche Verschiebung des freien Endes tritt ein?

Lösung: Die Momentenfläche ist ein Dreieck mit der Höhe $M_{max} = P \cdot l$, dessen Moment in bezug auf den Punkt m

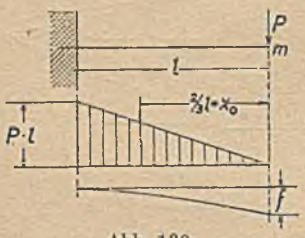


Abb. 130.

$F_m \cdot x_0 = \frac{1}{2} \cdot P \cdot l \cdot \frac{2}{3} l = \frac{1}{3} P \cdot l^3$ ist. Man erhält

$$f = \frac{F_m \cdot x_0}{E \cdot J} = \frac{P \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot J} \text{ cm},$$

$$f = \frac{500 \cdot 300^3}{3 \cdot 2\,150\,000 \cdot J} \text{ cm} = \frac{2093}{J} \text{ cm},$$

$$M_{b_{max}} = W \cdot k_b;$$

$$500 \cdot 300 = W \cdot 1000; \quad W = 150 \text{ cm}^3$$

gewählt N P Nr. 18; $W_x = 161$ cm³; $J_x = 1446$ cm⁴,

$$f = \frac{2093}{1446} = 1{,}45 \text{ cm}; \quad \sigma_b = \frac{150\,000}{161} = 932 \frac{kg}{cm^2}.$$

Es ist auch $f = \frac{P \cdot l^3 \cdot \sigma_b}{3\,E \cdot P \cdot l \cdot e}$; $f = \frac{l^2 \cdot \sigma_b}{3E \cdot e}$, worin e den Abstand der äußersten Faser von der Nullinie bedeutet;

$$f = \frac{300^2 \cdot 932}{3 \cdot 2\,150\,000 \cdot 9} = 1{,}45 \text{ cm}.$$

65. ***Beispiel:*** Ein Freiträger ist gemäß *Abb. 131* belastet.

$P = 1200$ kg, $b = 120$ cm, $a = 80$ cm, $k_b = 1000 \frac{kg}{cm^2}$, $E = 2\,150\,000 \frac{kg}{cm^2}$, Profil: zwei miteinander vernietete]-Eisen. Welche Verschiebung erfährt er am Ende?

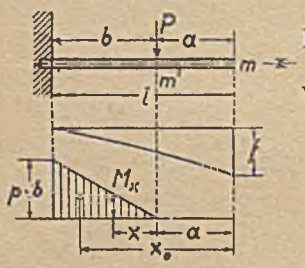


Abb. 131.

Lösung: Die Momentenfläche ist wieder ein Dreieck mit der Höhe P . b, der Schwerpunktsabstand vom Endpunkte $m = a + \frac{2}{3} b = x_0$.

$$f = F_m' \cdot x_0 = \frac{P \cdot b \cdot \frac{b}{2} \cdot \left(a + \frac{2}{3} b\right)}{E \cdot J}.$$

$$M_{b_{max}} = W \cdot k_b; \; W = \frac{M_{b_{max}}}{k_b} = \frac{1200 \cdot 120}{1000} = 144 \text{ cm}^3.$$

$W_{x_{erf}}$ eines einzelnen [-Eisens 72 cm³. Gewählt 2 [-Eisen N P Nr. 14 mit einem $W_x = 2 \cdot 86{,}4$ cm³ und einem $J_x = 2 \cdot 605$ cm⁴.

$$f = \frac{1200 \cdot 120^2 \cdot \left(80 + \frac{2}{3} \cdot 120\right)}{2 \cdot 2\,150\,000 \cdot 1210} = 0{,}55 \text{ cm}.$$

Wie groß würde die Verschiebung sein, wenn die [-Eisen nicht miteinander verbunden (vernietet) wären und jedes [-Eisen mit $\frac{P}{2}$ kg belastet wäre?

$$M_{b_{max}} = W \,.\, k_b,\ W = \frac{600 \,.\, 120}{1\,000} = 72 \text{ cm}^3,$$

$$\text{NP Nr. 14,}\quad J_x = 605 \text{ cm}^4,$$

$$f = \frac{600 \,.\, 120^2 \,.\left(80 + \frac{2}{3} \,.\, 120\right)}{2 \,.\, 2\,150\,000 \,.\, 605} = 0{,}55 \text{ cm, d. h. gerade so groß wie vorhin.}$$

Die Biegungslinie für den unbelasteten Teil a des Trägers ist gerade, da über dem Teil a die Momentenfläche Null ist.

66. ***Beispiel:***

Ein Balken von quadratischem Querschnitt, $k_b = 100 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$, $E = 90000 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ ist gemäß *Abb. 132* auf Biegung beansprucht. Welche Quadratseitenlänge a bekommt er und wie groß ist die Verschiebung f am freien Ende?

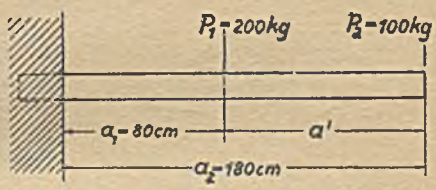


Abb. 132.

Lösung: $M_{b_{max}} = 200 \,.\, 80 + 100 \,.\, 180 = 34\,000$ cmkg.

$$W_{erf} = \frac{34\,000}{100} = 340 \text{ cm}^3,$$

$$\frac{a^3}{6} = 340;\quad a = \sqrt{340 \,.\, 6} = 12{,}7 \text{ cm} = 127 \text{ mm.}$$

$$f = f' + f'' = \frac{P_1 \,.\, a_1^{\,2}\left(a' + \frac{2}{3} \,.\, a_1\right)}{2 \,.\, E \,.\, J} + \frac{P_2 \,.\, a_2^{\,3}}{3 \,.\, E \,.\, J},$$

$$f = \frac{200 \,.\, 80^2\left(100 + \frac{2}{3} \,.\, 80\right) \,.\, 2}{2 \,.\, 90\,000 \,.\, 340 \,.\, 12{,}7} + \frac{100 \,.\, 180^3 \,.\, 2}{3 \,.\, 90\,000 \,.\, 340 \,.\, 12{,}7} = 0{,}6 \text{ cm.}$$

Bei einem Träger auf zwei Stützen, Einzellast in der Mitte (*Abb. 133*), ist die Momentenfläche ein Dreieck mit der Höhe $\frac{P \,.\, l}{4}$, und der Inhalt der ganzen Momentenfläche

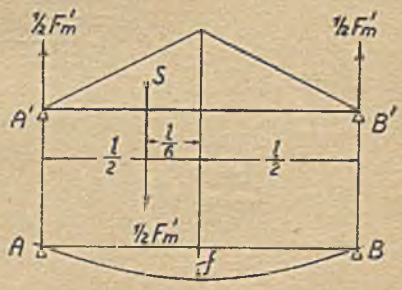


Abb. 133.

$$F_m = \frac{P \,.\, l}{4} \,.\, l \,.\, \frac{1}{2} = \frac{P \,.\, l^2}{8}.$$

Die reduzierte Momentenfläche $F_m' = \frac{P \,.\, l^2}{8 \,.\, E \,.\, J}$;

dieser Wert stellt eine gedachte Belastung dar. Man merke: Die Ordinaten der Biegungslinie sind gleich dem sogenannten zweiten Biegungsmoment, welches entsteht, wenn man die Flächeninhalte der reduzierten Momentenfläche (der ersten Momentenfläche) als Belastungen auffaßt.

Es liegt also f_{max} in der Mitte zwischen den beiden Auflagern;

$$A' = B' = \frac{1}{2} F_m' = \frac{P \,.\, l^2}{16 \,.\, E \,.\, J}.$$

$$f_{max} = A' \cdot \frac{l}{2} - \frac{F_m'}{2} \cdot \frac{l}{6} = \frac{P \,.\, l^2}{16\, E \,.\, J} \cdot \frac{l}{2} - \frac{P \,.\, l^2}{16\, E \,.\, J} \cdot \frac{l}{6},$$

$$f_{max} = \frac{P \,.\, l^3}{48 \,.\, E \,.\, J} \text{ cm}.$$

67. ***Beispiel:*** Zur Ermittlung schwerer Fahrlasten könnte man beispielsweise die Schienendurchbiegung benutzen.

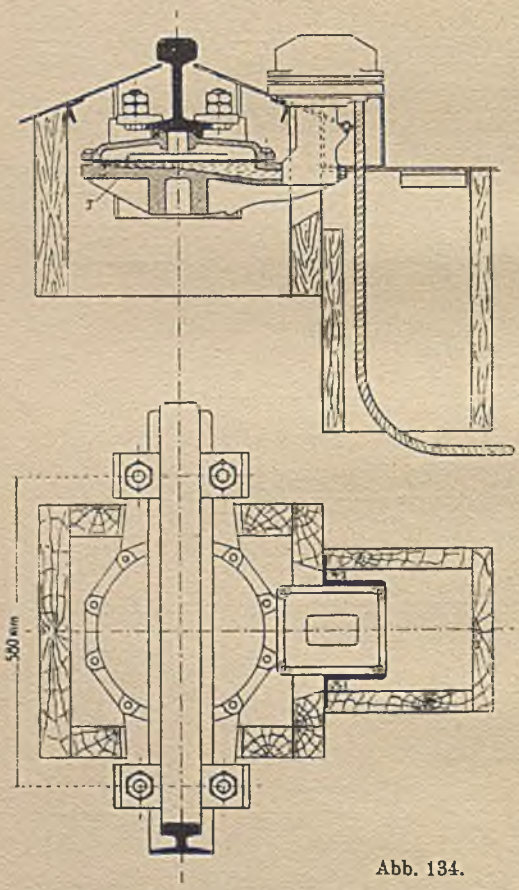


Abb. 134.

Abb. 134 zeigt eine derartige Einrichtung. Die sich unter der Last durchbiegende Schiene verdrängt Quecksilber, welches in einer Röhre mehr oder weniger hoch steigt und fällt. Wird dieses Rohr mit einem Maximalanzeiger versehen, der den höchsten erreichten Stand der Quecksilbersäule festhält, so könnte man mit einer solchen Vorrichtung leicht feststellen, ob irgend eine Achse eines darüber hinwegfahrenden Lastzuges überlastet gewesen ist.

Wenn der Druck des Rades auf die Schiene 7000 kg nicht übersteigen soll, und wenn man das Trägheitsmoment des Schienenquerschnittes $J = 1351{,}6 \text{ cm}^4$ annimmt, den Elastizitätsmodul $E = 2\,200\,000 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ (Flußstahl), welches ist alsdann die größte Durchbiegung, und um wieviel mm steigt das Quecksilber im Rohr, wenn sich die Fläche des Tellers T zum Querschnitt des Rohres verhält wie 600 : 1?

$$f_{max} = \frac{P \,.\, l^3}{48 \,.\, E \,.\, J} = \frac{7000 \,.\, 58^3}{48 \,.\, 2\,200\,000 \,.\, 1351{,}6} = 0{,}00955 \text{ cm},$$

$f_{max} = \sim 0{,}1$ mm; $0{,}1 \,.\, 600 = 60$ mm maximale Steigung der Quecksilbersäule.

Bei dem Träger auf zwei Stützen, dessen Einzellast an beliebiger Stelle zwischen den beiden Auflagern sitzt *(Abb. 135)*, ist $A = P \cdot \frac{b}{l}$ und $B = P \cdot \frac{a}{l}$;

$$F_x = \frac{P \cdot \frac{b}{l} \cdot a \cdot a}{2} = \frac{P \cdot a^2 \cdot b}{2\,l}, \quad F_x' = \frac{P \cdot a^2 \cdot b}{2\,l \cdot E \cdot J}, \quad F_y' = \frac{P \cdot b^2 \cdot a}{2\,l \cdot E \cdot J}.$$

Die Auflagerreaktion A′ eines gedachten Hilfsträgers, den wir uns durch die reduzierte Momentenfläche belastet denken:

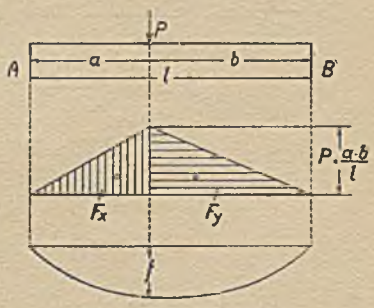


Abb. 135.

$$A' \cdot l - F_x' \cdot \left(\frac{a}{3} + b\right) - F_y' \cdot \frac{2}{3}\,b = 0,$$

$$A' = \frac{P \cdot a^2 \cdot b}{2\,l^2\,E \cdot J} \cdot \left(\frac{a}{3} + b\right) + \frac{P \cdot b^2 \cdot a}{2\,l^2 \cdot E \cdot J} \cdot \frac{2}{3}\,b =$$

$$= \frac{P \cdot a \cdot b}{2\,l^2 \cdot E \cdot J} \cdot \left[\frac{a^2}{3} + a\,b + \frac{2}{3}\,b^2\right].$$

Bezeichnen wir die Durchbiegung im Angriffspunkt der Einzellast mit $f = A' \cdot a - F_x' \cdot \frac{a}{3}$, so wird:

$$f = \frac{P \cdot a^2 \cdot b}{2\,l^2 \cdot E \cdot J} \cdot \left[\frac{a^2}{3} + a \cdot b + \frac{2}{3}\,b^2\right] - \frac{P \cdot a^2 \cdot b}{2\,l \cdot E \cdot J} \cdot \frac{a}{3};$$

$$f = \frac{P \cdot a^2 \cdot b}{2\,l^2 \cdot E \cdot J} \cdot \left[\frac{a^2}{3} + a \cdot b + \frac{2}{3}\,b^2 - \frac{a \cdot l}{3}\right].$$

Multiplizieren wir den Faktor vor der eckigen Klammer mit $\frac{2 \cdot b \cdot l}{3}$ und den Klammerausdruck mit $\frac{3}{2\,b \cdot l}$, so ergibt sich

$$f = \frac{P \cdot a^2 \cdot b^2}{3\,E \cdot J \cdot l} \cdot \left[\frac{a^2}{2\,b \cdot l} + \frac{3 \cdot a}{2\,l} + \frac{b}{l} - \frac{a}{2\,b}\right];$$

nun ist aber der Klammerausdruck $= \frac{a^2 + 3\,a\,b + 2\,b^2 - a\,l}{2 \cdot b \cdot l} =$

$$= \frac{a^2 + 3\,a\,b + 2\,b^2 - a^2 - a\,b}{2\,b \cdot l} = \frac{2\,b\,(a + b)}{2\,b\,(a + b)} = 1, \text{ folglich:}$$

$$f = \frac{P \cdot a^2 \cdot b^2}{3\,E \cdot J \cdot l} \text{ cm.}$$

Diese errechnete Durchbiegung f des Angriffspunktes der Einzellast ist allerdings nur in dem besonderen Falle die größte vorkommende Durchbiegung, wenn die Last in der Mitte zwischen den beiden Auflagern angreift, andernfalls befindet sich die größte Durchbiegung nicht im Angriffspunkt der Einzellast, sondern für $a < b$ rechts vom Angriffspunkt in einem Abstand von $B = b \cdot \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2\,a}{3\,b}}$, für $a > b$ links vom Angriffspunkt in einem Abstand von $A = a \cdot \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2\,b}{3\,a}}$.

68. *Beispiel:* Ein Balken aus Eichenholz auf zwei Stützen von 430 cm Länge ist 160 cm vom linken Auflager mit $P = 900$ kg belastet. Welchen Querschnitt muß er erhalten, wenn die Breite b′ zur Höhe h sich wie 5 : 7 verhalten soll, und wie groß ist die Durchbiegung im Angriffspunkt der Last?

Lösung: Die zulässige Biegungsbeanspruchung nehmen wir mit $90 \frac{kg}{cm^2}$ an, Elastizitätsmaß $E = 120000 \frac{kg}{cm^2}$.

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{900 \,.\, 270}{430} = \sim 565 \text{ kg} \\ B &= \frac{900 \,.\, 160}{430} = \sim 335 \text{ kg} \end{aligned}\right\} 565 + 335 = 900 \text{ kg}.$$

$$M_{max} = \frac{P \,.\, a \,.\, b}{l} = \frac{900 \,.\, 160 \,.\, 270}{430} = 90500 \text{ cmkg}.$$

Das erforderliche Widerstandsmoment

$$W = \frac{90500}{90} = \sim 1006 \text{ cm}^3.$$

Da für $b' = \frac{5}{7} h$,

$$W = \frac{b' \,.\, h^2}{6} = \frac{5 \,.\, h^3}{7 \,.\, 6} = \frac{5}{42} h^3 \quad \text{ist,}$$

so erhält man $$h = \sqrt[3]{\frac{1006 \,.\, 42}{5}} = 20{,}4 \text{ cm},$$

$$h = 21 \text{ cm}, \; b' = 15 \text{ cm}; \; J = \frac{b' \,.\, h^3}{12} = \frac{15 \,.\, 21^3}{12} = 11580 \text{ cm}^4.$$

Die Durchbiegung im Angriffspunkt der Einzellast:

$$f = \frac{900 \,.\, 160^2 \,.\, 270^2}{3 \,.\, 120000 \,.\, 11580 \,.\, 430} = 0{,}935 \text{ cm},$$

$$f = 9{,}4 \text{ mm}.$$

Die größte Durchbiegung tritt auf in einem Abstande

$$b \,.\, \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2\,a}{3\,b}} \quad \text{vom rechten Auflager B,}$$

nämlich $$27 \,.\, \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2 \,.\, 16}{3 \,.\, 27}} = 23 \text{ cm},$$ sie wird nicht wesentlich abweichen von der errechneten Durchbiegung.

Bei einem Freiträger mit gleichförmig verteilter Last *(Abb. 136)* ergibt die Formel $f = F_m' \,.\, x_0$ *(siehe Abb. 137)*

$$f = \frac{\frac{1}{3} l P \frac{l}{2}}{E \,.\, J} \,.\, \frac{3}{4} l, \qquad f = \frac{P \,.\, l^3}{8\,E \,.\, J}.$$

69. ***Beispiel:*** Ein Freiträger, I-Eisen, N P Nr. 18 ist unbelastet, und bekommt nur durch sein Eigengewicht an der Einspannstelle die zulässige

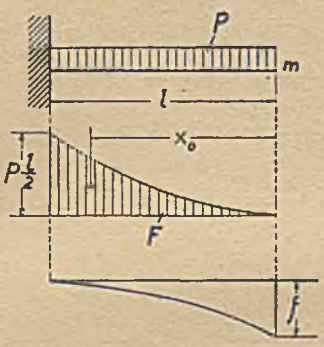


Abb. 136.

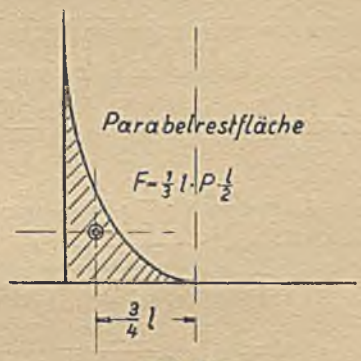


Abb. 137.

Beanspruchung von $k_b = 1000 \frac{kg}{cm^2}$. Welche Verschiebung f tritt am freien Ende auf?

Lösung: $M_b = p\frac{l^2}{2} = 0{,}2190 \,.\, \frac{l^2}{2} = W \,.\, k_b = 161 \,.\, 1000,$

$$l = \sqrt[2]{\frac{161\,000 \,.\, 2}{0{,}2190}} = 1214 \text{ cm} = 12{,}14 \text{ m},$$

$$f = \frac{0{,}2190 \,.\, 1214 \,.\, 1214^3}{8 \,.\, 2\,150\,000 \,.\, 1446} = 19{,}2 \text{ cm}.$$

Bei einem Träger auf zwei Stützen mit gleichförmig verteilter Last, ergibt sich entsprechend *(Abb. 138)*:

$$A = B = \frac{P}{2} \text{ kg}; \quad M_{b_{max}} = \frac{P}{2} \cdot \frac{l}{2} - \frac{P}{2} \cdot \frac{l}{4} = \frac{P \,.\, l}{8} \text{ cmkg} = \frac{p \,.\, l^2}{8} \text{ cmkg}.$$

Die Momentenfläche ist von einer Parabel mit der Pfeilhöhe $M_{b_{max}} = \frac{p \,.\, l^2}{8}$ begrenzt. Der Inhalt dieser Fläche

$$F_m = \frac{2}{3} \frac{P \,.\, l}{8} \,.\, l = \frac{P \,.\, l^2}{12} \text{ kgcm}^2.$$

Die Auflagerreaktionen A′ und B′ des durch die reduzierte Momentenfläche belasteten, gedachten Hilfsträgers $= \frac{P \,.\, l^2}{24\, E \,.\, J}$.

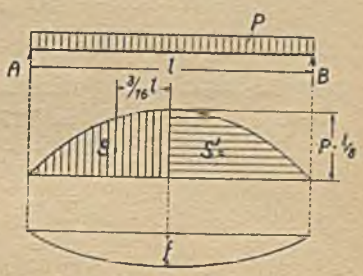


Abb. 138.

Das maximale Biegungsmoment dieses Hilfsträgers ist gleichbedeutend mit der größten Durchbiegung:

$$f = M_{max}'' = \frac{P \,.\, l^2}{24\, E \,.\, J} \cdot \frac{l}{2} - \frac{P \,.\, l^2}{24\, E \,.\, J} \cdot \frac{3}{16} l = \frac{5}{384} \cdot \frac{P \,.\, l^3}{E \,.\, J} \text{ cm}.$$

70. ***Beispiel:*** Ein Träger auf zwei Stützen, I-Eisen, NP Nr. 18 ist unbelastet und bekommt nur durch sein Eigengewicht im gefährlichen Querschnitt die zulässige Beanspruchung von $k_b = 1000 \frac{kg}{cm^2}$. Welche Durchbiegung f tritt in der Mitte zwischen den Auflagern auf?

Lösung: $A = B = \frac{p \cdot l}{2} = 0{,}2190 \cdot \frac{l}{2} kg,$

$$M_{b_{max}} = 0{,}2190 \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2} - 0{,}2190 \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4} = W \cdot k_b = 161\,000 \text{ cmkg};$$

$$l = \sqrt{\frac{161\,000 \cdot 8}{0{,}219}} = 2425 \text{ cm},$$

$$f = \frac{5}{384} \cdot \frac{P \cdot l^3}{E \cdot J} = \frac{5}{384} \frac{0{,}2190 \cdot 2425^4}{2\,150\,000 \cdot 1446} = 31{,}7 \text{ cm}.$$

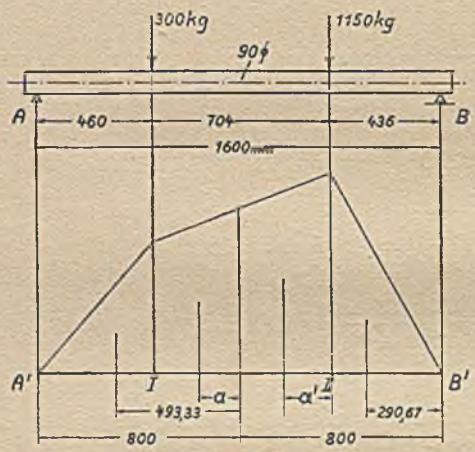


Abb. 139.

71. ***Beispiel:*** Ein Rundstab aus Flußeisen St 37 . 12 ist nach *Abb. 139* auf Biegung beansprucht. Welche Durchbiegung in der Mitte erfährt derselbe?

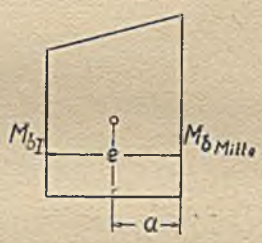


Abb. 139 *a*.

Lösung: Zunächst berechnen wir wieder die Auflagerreaktionen.

$$A \cdot 160 - 300 \cdot 114 - 1150 \cdot 43{,}6 = 0; \quad A = 527 \text{ kg}.$$

$$-B \cdot 160 + 1150 \cdot 116{,}4 + 300 \cdot 46 = 0; \quad B = 923 \text{ kg}.$$

Alsdann stellen wir die Biegungsmomente für die Punkte I, Mitte und II fest.

$$M_{b_I} = 527 \cdot 46 = 24\,242 \text{ cmkg},$$

$$M_{b_{Mitte}} = 527 \cdot 80 - 300 \cdot 34 = 31\,960 \text{ cmkg},$$

$$M_{b_{II}} = 923 \cdot 43{,}6 = 40\,243 \text{ cmkg}.$$

$$a = \frac{e}{3} \cdot \frac{M_{b_{Mitte}} + 2 \cdot M_{b_I}}{M_{b_{Mitte}} + M_{b_I}},$$

$$a = \frac{34}{3} \cdot \frac{31\,960 + 2 \cdot 24\,242}{31\,960 + 24\,242} = 16{,}22 \text{ cm};$$

entsprechend ergibt sich

$$a' = \frac{36{,}4}{3} \cdot \frac{40\,243 + 2 \cdot 31\,960}{40\,243 + 31\,960} = 17{,}5 \text{ cm}.$$

Nunmehr rechnen wir die Auflagerreaktion A′ des mit dem reduzierten Moment belasteten, gedachten Hilfsträgers aus:

$$A' \,.\, 160 = \frac{32}{2150000 \,.\, \pi \,.\, 9^4} \cdot \left[\begin{array}{l} 46 \,.\, 24242 \,.\, 129{,}33 + 56202 \,.\, 34 \,.\, 96{,}22 + \\ + 72203 \,.\, 36{,}4 \,.\, 61{,}1 + 43{,}6 \,.\, 40243 \,.\, 29{,}07 \end{array}\right],$$

$$A' = 0{,}00246.$$

Dann ist die Durchbiegung in der Mitte gleich dem Biegungsmoment für die Trägermitte des mit dem reduzierten Moment belasteten, gedachten Hilfsträgers

$$f = M'' = 0{,}00246.80 - \frac{32}{2\,150\,000 \,.\, \pi \,.\, 9^4} \cdot \left[\begin{array}{l} 46 \,.\, 24242 \,.\, 49{,}33 + \\ + (24242 + 31960) \,.\, 34 \,.\, 16{,}22 \end{array}\right],$$

$$f = 0{,}135 \text{ cm} = 1{,}35 \text{ mm}.$$

Freiträger mit veränderlichem Querschnitt.

Laut früherem *(Abb. 129)* ist die Durchbiegung f am Punkte B gegen den Punkt $M = \frac{1}{E \,.\, J} \,.\, \Sigma (M \,.\, \Delta x) \,.\, x$. Handelt es sich um einen Freiträger mit veränderlichem Querschnitt *(Abb. 140)**, so gehört das veränderliche Trägheitsmoment unter das Summenzeichen, und es ist $f = \frac{1}{E} \,.\, \Sigma \left(\frac{M}{J} \,.\, \Delta x\right) \,.\, x$. Man erhält $\frac{M}{J}$, wenn man die Ordinate M der Momentenlinie durch das Trägheitsmoment des zugehörigen Querschnittes dividiert. Die so erhaltene Fläche heißt $\frac{M}{J}$ - Fläche.

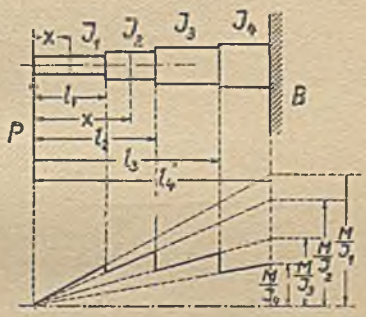


Abb. 140.

Bei dem Freiträger mit der nach oben gerichteten Einzellast am Ende ist die Momentenfläche ein Dreieck mit einem $M_{b_{max}} = P \,.\, l_4$ an der Einspannstelle B.

Dividiert man $P \,.\, l_4$ der Reihe nach durch die vier vorhandenen Trägheitsmomente J_1, J_2, J_3, J_4 und trägt diese Worte unter der Einspannstelle auf, so begrenzen die Verbindungsgeraden mit dem Endpunkte des Freiträgers vier $\frac{M}{J}$ - Flächen, von denen jede so weit zu benutzen ist, wie der Querschnitt mit dem zugehörigen J reicht. Auf diese Weise entsteht die sägenförmige $\frac{M}{J}$ - Fläche der *Abb 140.* Unter dem Einfluß der Kraft P weicht das freie Ende des Trägers um den Betrag f nach oben aus, der gleich dem $\frac{1}{E}$-fachen statischen Moment der $\frac{M}{J}$ - Fläche ist.

$$f = \frac{1}{E}\left[\frac{l_1}{2} \cdot \left(\frac{M}{J_1} - \frac{M}{J_2}\right) \cdot \frac{l_1}{l_4} \cdot \frac{2}{3} l_1 + \frac{l_2}{2} \cdot \left(\frac{M}{J_2} - \frac{M}{J_3}\right) \cdot \frac{l_2}{l_4} \cdot \frac{2}{3} \cdot l_2 + \right.$$
$$\left. + \frac{l_3}{2} \cdot \left(\frac{M}{J_3} - \frac{M}{J_4}\right) \cdot \frac{l_3}{l_4} \cdot \frac{2}{3} l_3 + \frac{l_4}{2} \cdot \frac{M}{J_4} \cdot \frac{2}{3} l_4\right];$$

* H. Winkel, Festigkeit und Formänderung.

setzt man in diese Gleichung $M = P \cdot l_4$, und bringt man das größte Trägheitsmoment J_4 und die Gesamtlänge $l_4 = l$ vor die Klammer, so ergibt sich:

$$f = \frac{P \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot J_4} \cdot \left[\frac{J_4}{J_1} \cdot \frac{l_1^3}{l^3} + \frac{J_4}{J_2} \cdot \frac{l_2^3 - l_1^3}{l^3} + \frac{J_4}{J_3} \cdot \frac{l_3^3 - l_2^3}{l^3} + \frac{J_4}{J_4} \frac{l^3 - l_3^3}{l^3}\right].$$

72. ***Beispiel:*** Ein abgesetzter Wellenstumpf *(Abb. 141)* ist am freien Ende mit 13 000 kg belastet, $E = 2150\,000 \frac{kg}{cm^2}$, $l = 100$ cm, $l_2 = 95$ cm, $l_1 = 30$ cm, $d_1 = 36$ cm, $d_2 = 40$ cm, $d_3 = 45$ cm. Wie groß ist die Durchbiegung am freien Ende beim Angriffspunkt der Last gegenüber dem Querschnitt I?

Lösung:

$$J_1 = \frac{\pi}{64} \cdot 36^4 = 82\,500 \text{ cm}^4, \quad J_2 = \frac{\pi}{64} \cdot 40^4 = 125\,500 \text{ cm}^4,$$

$$J_3 = \frac{\pi}{64} \cdot 45^4 = 201\,100 \text{ cm}^4.$$

$$f = \frac{13\,000 \cdot 100^3}{3 \cdot 2150\,000 \cdot 201\,100} \cdot \left[\frac{201\,100}{82\,500} \cdot \frac{30^3}{100^3} + \frac{201\,100}{125\,500} \cdot \frac{95^3 - 30^3}{100^3} + \right.$$

$$\left. + \frac{100^3 - 95^3}{100^3}\right] = 0{,}015 \text{ cm}.$$

$$f = 0{,}15 \text{ mm}.$$

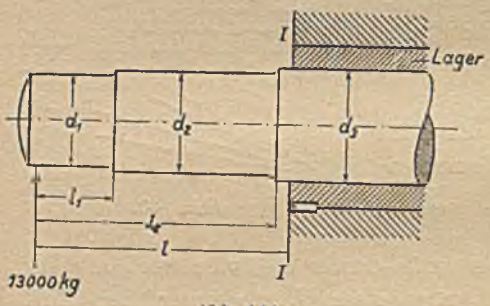


Abb. 141.

73. ***Beispiel:*** Für die abgesetzte Welle *(Abb. 142)* ist die Senkung des Lastangriffspunktes zu berechnen.

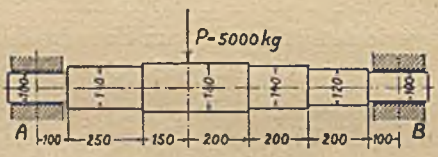


Abb. 142.

Lösung: $A \cdot 120 - 5000 \cdot 70 = 0$; $A = 2917$ kg, $B = 2083$ kg.

$$J_1 = \frac{\pi}{64} \cdot 10^4 = 491 \text{ cm}^4, \quad J_2 = \frac{\pi}{64} \cdot 14^4 = 1883 \text{ cm}^4,$$

$$J_3 = \frac{\pi}{64} \cdot 16^4 = 3213, \quad J_4 = \frac{\pi}{64} \cdot 12^4 = 1018 \text{ cm}^4.$$

$$M_{1l} = 2917 \cdot 10 = 29\,170 \text{ cmkg},$$

$$M_{2l} = 2917 \cdot 35 = 102\,095 \text{ cmkg},$$

$$M_{max} = 2917 \cdot 50 = 145\,850 \text{ cmkg},$$

$$M_{1r} = 2083 \cdot 10 = 20\,830 \text{ cmkg},$$

$$M_{2r} = 2083 \cdot 30 = 62\,490 \text{ cmkg},$$

$$M_{3r} = 2083 \cdot 50 = 104\,150 \text{ cmkg},$$

die Durchbiegung beim Angriffspunkt der Auflagerreaktion A:

$$f_l = \frac{2917 \,.\, 50^3}{3 \,.\, 2\,150\,000 \,.\, 3213} \cdot \left[\frac{3213}{491} \cdot \frac{10^3}{50^3} + \frac{3213}{1883} \cdot \frac{35^3 - 10^3}{50^3} + \right.$$

$$\left. + \frac{3213}{3213} \cdot \frac{50^3 - 35^3}{50^3} \right] = 0{,}0224 \text{ cm},$$

die Durchbiegung beim Angriffspunkt der Auflagerreaktion B:

$$f_r = \frac{2083 \,.\, 70^3}{3 \,.\, 2\,150\,000 \,.\, 3213} \cdot \left[\frac{3213}{491} \cdot \frac{10^3}{70^3} + \frac{3213}{1018} \cdot \frac{30^3 - 10^3}{70^3} + \right.$$

$$\left. + \frac{3213}{1883} \cdot \frac{50^3 - 30^3}{70^3} + \frac{3213}{3213} \cdot \frac{70^3 - 50^3}{70^3} \right],$$

$f_r = 0{,}0481$ cm; siehe *Abb. 142 a.*

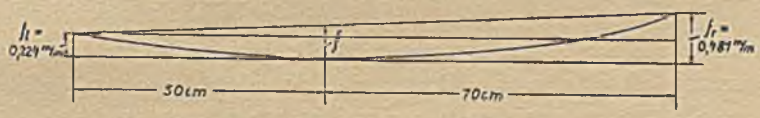


Abb. 142 *a.*

die Durchbiegung f an der Lastangriffsstelle berechnet sich dann zu:

$$f = f_l + (f_r - f_l) \cdot \frac{50}{120},$$

$$f = 0{,}224 + 0{,}257 \,.\, \frac{5}{12} = 0{,}33 \text{ mm}.$$

VI. Der Abscherwiderstand in der Längsrichtung von Trägern.

Ist ein Träger auf Biegung beansprucht, so haben wir schon früher festgestellt, daß die Querschnitte außer den Biegungsspannungen σ_b auch noch Schubspannungen τ_s erleiden infolge der Querkräfte. Bei der Berechnung auf Biegung haben wir gewohnheitsmäßig diese Schubspannungen τ_s den Biegungsspannungen σ_b gegenüber vernachlässigt.

Aber auch von dem Auftreten von Längs-Schubspannungen kann man sich leicht überzeugen *(Abb. 143).* Legt man mehrere Reißschienen lose aufeinander, und belastet sie wie einen Träger auf zwei Stützen, so verschieben sich die einzelnen Schienen bei der Durchbiegung gegeneinander; die Endquerschnitte sind treppenartig abgesetzt. Würde man die Reißschienen vor der Belastung verleimen, so träte eine solche Verschiebung der Endquerschnitte nicht ein, weil die Haftfestigkeit der Leimschichten diesem Verschieben in der Längsrichtung entgegenwirkt. Wir wissen jetzt, daß in einem auf Biegung beanspruchten Körper Schubspannungen in der Richtung der Längs- und Querschnitte auftreten.

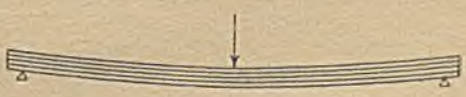


Abb. 143.

In einem beliebigen Querschnitt möge τ_s die Schubspannung sein. Denken wir uns ein sehr kleines Körperelement von prismatischer Form mit den

Kantenlängen a, b und c *(Abb. 144* und *145)** in dem Stabe an dem betreffenden Querschnitt, so wirken in dessen Stirnflächen, welche benachbarten Querschnitten angehören, die entgegengesetzt gerichteten gleich großen Schubkräfte $b \cdot c \cdot \tau_s$, welche mit dem Abstand a ein rechtsdrehendes Kräftepaar bilden.

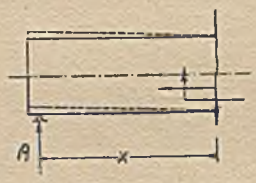


Abb. 144.

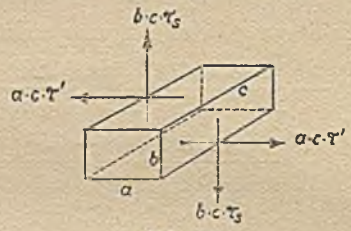


Abb. 145.

Hierdurch würde das kleine Prisma in Drehung versetzt werden. Da wir aber wissen, daß eine solche Drehung nicht eintritt, so muß ein linksdrehendes Kräftepaar da sein, welches den Gleichgewichtszustand herstellt. Das ist nur möglich, wenn wir annehmen, daß auch in der oberen und unteren Fläche, welche benachbarten Längsschnitten angehören, wagerechte Schubspannungen τ' auftreten, sodaß wir zwei wagerechte Kräfte haben $a \cdot c \cdot \tau'$, die mit dem Abstande b das linksdrehende Kräftepaar bilden. Zwischen beiden Kräftepaaren besteht dann die Momentengleichung:

$$(b \cdot c \cdot \tau_s) \cdot a = (a \cdot c \cdot \tau') \cdot b$$
$$\tau' = \tau_s.$$

Man merke: Schubspannungen treten immer paarweise auf, und zwar mit gleicher Größe in der Ebene des Querschnittes, wie in der Ebene des Längsschnittes.

Legen wir nach *Abb. 146** durch einen auf Biegung beanspruchten Träger zwei Querschnitte Q_1 und Q_2 in den Abständen l_1 und l_2 vom Auf-

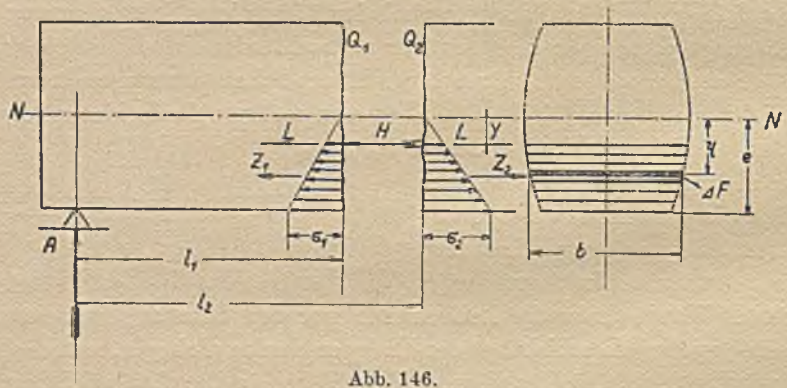


Abb. 146.

lager, und einen Längsschnitt L — L im Abstande y von der neutralen Faserschicht N — N, und betrachten das hierdurch herausgetrennte Körperstück, so können wir feststellen, daß in seinen Stirnflächen Zugkräfte Z_1 und Z_2

* G. Dreyer, Festigkeitslehre und Elastizitätslehre.

wirken, und zwar ist $Z_1 < Z_2$; infolgedessen muß zur Befriedigung der Gleichgewichtsbedingung: „Summe aller horizontalen Kräfte gleich Null", noch die ***Schubkraft*** H der Längsschnittfläche hinzugefügt werden.

$$+ Z_2 - Z_1 - H = 0.$$

Bezeichnen wir die Schubspannung im Längsschnitt mit τ', so ist die Schubkraft $H = b \,.\, (l_2 - l_1) \,.\, \tau'$.

Bezeichnen wir die Biegungsspannung in einem beliebigen Flächenelement ΔF mit σ_b, so ist allgemein die Zugkraft

$$Z = \sum_{\eta = y}^{\eta = e} \sigma_b \,.\, \Delta F.$$

Es folgt aus der Biegungstheorie:

$$\frac{\sigma_b}{\sigma_{max}} = \frac{\eta}{e}; \quad \text{also } \sigma_b = \frac{\sigma_{max}}{e} \,.\, \eta,$$

folglich

$$Z = \frac{\sigma_{max}}{e} \,.\, \sum_{y}^{e} \eta \,.\, \Delta F.$$

Hierin bedeutet der Summenwert das statische Moment der Stirnfläche des herausgetrennten Stückes in bezug auf die N — N-Linie. Setzen wir hierfür die abgekürzte Bezeichnung

$$S_y = \sum_{y}^{e} \eta \,.\, \Delta F,$$

so lautet der allgemeine Ausdruck für die Zugkraft:

$$Z = \frac{\sigma_{max}}{e} \,.\, S_y.$$

Für die linke Stirnseite ist $\sigma_{max} = \sigma_1$, für die rechte $\sigma_{max} = \sigma_2$, folglich werden die einzelnen Zugkräfte

$$Z_1 = \frac{\sigma_1}{e} \,.\, S_y, \quad Z_2 = \frac{\sigma_2}{e} \,.\, S_y.$$

Nach der Biegungsgleichung ist

$$\sigma_1 = \frac{M_1}{J} \,.\, e = \frac{A \,.\, l_1 \,.\, e}{J}; \quad \sigma_2 = \frac{M_2}{J} \,.\, e = \frac{A \,.\, l_2 \,.\, e}{J};$$

hiermit wird

$$Z_1 = \frac{A \,.\, l_1}{J} \,.\, S_y$$

$$Z_2 = \frac{A \,.\, l_2}{J} \,.\, S_y.$$

Setzen wir diese Ausdrücke in die Gleichung der Gleichgewichtsbedingung ein, so wird

$$\frac{A \,.\, l_2}{J} \,.\, S_y - \frac{A \,.\, l_1}{J} \,.\, S_y - b \,(l_2 - l_1) \,.\, \tau' = 0,$$

oder

$$\frac{A \,.\, S_y}{J} \,(l_2 - l_1) = b \,(l_2 - l_1) \,.\, \tau',$$

und der Ausdruck für die Schubspannung des Längsschnittes wird

$$\tau' = \frac{A \cdot S_y}{J \cdot b} \frac{kg}{cm^2}.$$

Allgemein wird man in diese Gleichung statt der Lagerkraft A die zu dem betreffenden Querschnitt gehörende Querkraft T einführen:

$$\tau' = \frac{T \cdot S_y}{J \cdot b} \frac{kg}{cm^2}.$$

74. ***Beispiel:*** Ein Freiträger I-Eisen ist laut *Abb. 147* belastet; $k_b = 1000 \frac{kg}{cm^2}$. Wie groß ist die größte Schubspannung in der neutralen Faser?

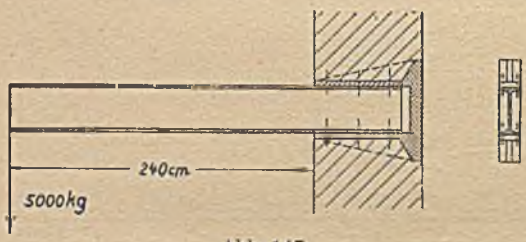


Abb. 147.

Lösung:

$$M_b = W \cdot k_b;$$

$$5000 \cdot 240 = W \cdot 1000,$$

$$W = 1200 \text{ cm}^3$$

gewählt I-Eisen NP Nr. 38 mit einem $W_x = 1264$ cm³ und einem

$$J_x = 24\,012 \text{ cm}^4.$$

$$\tau' = \frac{T \cdot S_y}{J \cdot b} \frac{kg}{cm^2};$$

Hierin ist in unserem vorliegenden Falle $T = P = 5000$ kg, $S_y =$ statisches Moment des halben Querschnittes, bezogen auf die neutrale Achse, $b =$ Breite des Querschnittes in der neutralen Achse *(Abb. 147 a)*.

$$S_y = 14{,}9 \cdot 2{,}05 \cdot 17{,}975 + 16{,}95 \cdot 1{,}37 \cdot 8{,}475 = 746 \text{ cm}^3,$$

$$\tau' = \frac{5000 \cdot 746}{24\,012 \cdot 1{,}37} = 113{,}3 \frac{kg}{cm^2}.$$

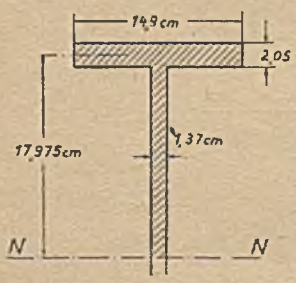


Abb. 147 *a*.

75. ***Beispiel:*** Ein gleichmäßig belasteter I-Träger auf zwei Stützen NP Nr. 32 von nur 1 m Länge soll in bezug auf seine Tragfähigkeit und Schubspannung untersucht werden *(Abb. 147 b)*;

$$k_b = 1000 \frac{kg}{cm^2}.$$

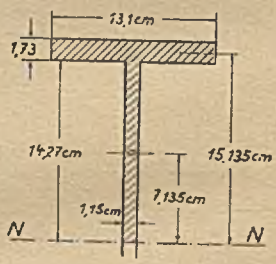


Abb. 147 *b*.

Lösung:

$$\frac{p \cdot l^2}{8} = W \cdot k_b;$$

die Belastung $p \cdot l = \frac{8\,W \cdot k_b}{l} = \frac{8 \cdot 782 \cdot 1000}{100} = 62\,560$ kg, folglich der Auflagerdruck $= \frac{1}{2}\,62\,560$ kg $= 31\,280$ kg.

$$S_y = 13{,}1 \,.\, 1{,}73 \,.\, 15{,}135 + 14{,}27 \,.\, 1{,}15 \,.\, 7{,}135 = 460 \text{ cm}^3,$$

$$\tau' = \frac{31\,280 \,.\, 460}{12\,510 \,.\, 1{,}15} = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}.$$

Die größte Schubspannung im Steg beträgt also $1000 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$, was als unzulässig hoch bezeichnet werden muß.

Man merke: Bei kurzen Trägern kommt für die Tragfähigkeit nicht die Biegungsspannung in Frage, sondern die horizontale Schubspannung im Steg.

Wir dürfen in unserem vorliegenden Falle höchstens ein $k_s = 800 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ gestatten.

$$\tau' = \frac{A \,.\, 460}{12\,510 \,.\, 1{,}15} = 800 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2},$$

$$A = \frac{800 \,.\, 12\,510 \,.\, 1{,}15}{460} = 25\,000 \text{ kg},$$ d. h. eine zulässige Belastung von 50 000 kg.

Die auftretende maximale Biegungsspannung wird alsdann

$$\sigma_b = \frac{P \,.\, l}{8 \,.\, W} = \frac{50\,000 \,.\, 100}{8 \,.\, 782} = 800 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}.$$

Wenn auch die errechneten Resultate anfechtbar sind, wie neuere Untersuchungen bewiesen haben, so haben doch die Rechnungen gezeigt, daß jeder Träger bei dem Unterschreiten einer gewissen Länge nicht mehr auf Biegungsbeanspruchung, sondern auf zulässige Schubspannung zu berechnen ist.

Die Nietteilung bei Blechträgern.

Besteht ein Blechträger nach *Abb. 148** aus einem Stehblech und oben und unten je zwei Winkeleisen, so müssen die Schubspannungen des Längsschnittes zwischen dem Stehblech und den Winkeleisen von der Festigkeit der Niete übertragen werden.

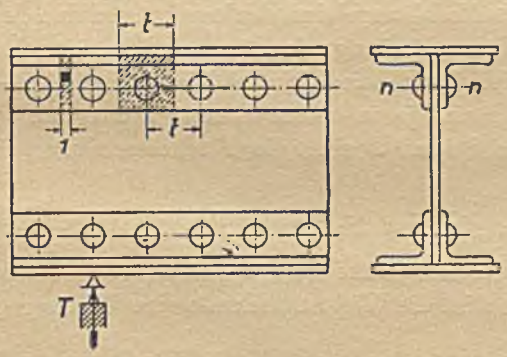


Abb. 148.

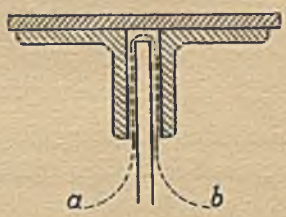


Abb. 148 *a*.

Nun ist die Schubspannung des Längsschnittes:

$$\tau' = \frac{T \,.\, S_y}{J \,.\, b} \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}.$$

* G. Dreyer, Festigkeitslehre und Elastizitätslehre.

Multiplizieren wir beide Seiten mit b, so entsteht die Schubkraft für die Längeneinheit

$$\tau' \,.\, b = \frac{T \,.\, S_y}{J} \; \frac{kg}{cm}.$$

Multiplizieren wir beide Seiten mit der Teilung t, so erhalten wir die Schubkraft für ein Niet

$$\tau' \,.\, b \,.\, t = \frac{T \,.\, S_y \,.\, t}{J} \, kg;$$

dies ist die Belastung eines einzelnen Nietes. Bezeichnen wir nun mit N_{min} die zulässige Tragkraft eines Nietes, so erhalten wir die Bedingung

$$\frac{T \,.\, S_y \,.\, t}{J} \leqq N_{min},$$

und hieraus folgt die theoretische Teilung:

$$t \leqq \frac{N_{min} \,.\, J}{T \,.\, S_y}.$$

Da man meist die Forderung stellt, daß die Teilung in beiden Schenkeln des Winkeleisens gleich groß sei, so müssen wir untersuchen, welche von den beiden Nietteilungen n — n oder s — s die kleinere, also die maßgebende sein wird *(Abb. 149)*. Für s — s kommen zwei Niete in Frage, welche die Längsschubkraft aufzunehmen haben. N bleibt mithin unverändert, denn ein zweischnittiges Niet n — n ist gleichbedeutend mit zwei einschnittigen Nieten s — s in bezug auf Widerstandsfähigkeit gegen Schub,* dagegen ist das statische Moment des Plattenquerschnittes kleiner als das statische Moment von Platten- + Winkeleisenquerschnitt, das sind die statischen Momente jener Querschnitte (in den Abbildungen schraffiert), deren zugehörige Körper wir uns beim hölzernen Modell angeleimt denken müssen und deren Leimschicht a b bei zu großer Längsschubbeanspruchung zerstört würde. Damit ist bewiesen, daß die kleinere Nietteilung in n — n liegt, denn die Größen T und J sind ja in beiden Fällen gleich groß.

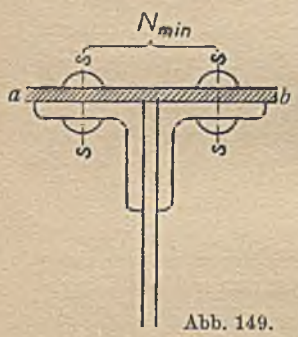


Abb. 149.

Man merke ferner: Für S_y und J sind die Flächenmomente ohne Nietabzug einzuführen.

Für die Scherbeanspruchung kommt die Querschnittsfläche $2 \,.\, \frac{d^2 \pi}{4}$, da zweischnittige Nietung, in Frage. Bezeichnet man die zulässige Scherspannung des Nietschaftes mit k_s, so ist die Widerstandskraft eines Nietes gegen Abscheren:

$$N_{s_2} = 2 \,.\, \frac{d^2 \pi}{4} \,.\, k_s.$$

Der ***Lochwanddruck*** (Druck zwischen Nietschaft und Lochwandung), auch Lochleibungsdruck genannt, wird gleichmäßig verteilt über die Pro-

* In bezug auf Widerstandsfähigkeit gegen Lochleibung ist die Nietung s — s *Abb. 149* im Vorteil.

jektionsfläche der Lochwandung angenommen, also auf ein Rechteck von der Größe $d \cdot \delta$, wenn δ die in der einen der beiden Kraftrichtungen beanspruchte geringste Gesamtplattendicke bedeutet. Bezeichnet man den zulässigen Lochwanddruck mit $k_l \frac{kg}{cm^2}$, so ist die Widerstandskraft gegen ein Zerdrücken der Lochwand

$$N_l = d \cdot \delta \cdot k_l.$$

Nimmt man an $k_l = 2\,k_s$*, so wird $N_l = 2\,d \cdot \delta \cdot k_s$. In die Formel für die Nietteilung ist natürlich das kleinere N einzusetzen (N_{min}). In der Regel wird hier der Lochleibungsdruck in Frage kommen.

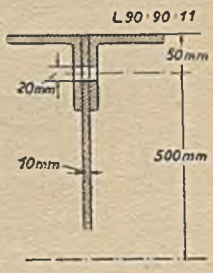


Abb. 150.

76. *Beispiel:* Die Hauptträger einer Eisenbahnbrücke haben einen Querschnitt gemäß *Abb. 150.* An den Auflagern ist keine Gurtplatte vorhanden. Die größte Querkraft ist gleich dem Auflagerdruck $A = 33{,}8$ ton. Vorgeschrieben ist $k_b = 800 \frac{kg}{cm^2}$. Welche Teilung hat der Gurtwinkel?

Lösung: $A = 33\,800$ kg, zulässige Scherspannung der Niete

$k_s = 0{,}8\,k_z = 0{,}8\,k_b = 0{,}8 \cdot 800 = 640 \frac{kg}{cm^2}$, zulässiger Lochleibungsdruck $k_l = 2\,k_s = 2 \cdot 640 = 1280 \frac{kg}{cm^2}$.

Die Fläche der beiden Winkeleisen $= 2 \cdot 18{,}7 = 37{,}4\ cm^2$, folglich das statische Moment ihrer Fläche in bezug auf die N — N-Linie

$$= S_y = 37{,}4 \cdot (55 - 2{,}62) = 1959\ cm^3.$$

Für $d = 2$ cm Nietdurchmesser wird die Tragkraft eines

Nietes auf Abscheren $2 \cdot \frac{2^2 \pi}{4} \cdot 640 = 4021$ kg,

auf Lochleibung $2 \cdot 1 \cdot 1280 = 2560$ kg,

folglich $N_{min} = 2560$ kg.

Das Trägheitsmoment des vollen Querschnittes:

Stehblech	$\frac{1 \cdot 110^3}{12} =$	$110\,916{,}7\ cm^4$
Winkeleisen	$4 \cdot 138 =$	$552{,}0\ cm^4$
$+4 \cdot 18{,}7 \cdot (55 - 2{,}62)^2$		$205\,228{,}7\ cm^4$
	$J =$	$316\,697{,}4\ cm^4$;

nunmehr läßt sich die theoretische Teilung berechnen nach der Formel:

$$t = \frac{N_{min} \cdot J}{T \cdot S_y} \qquad t = \frac{2560 \cdot 316\,697{,}4}{33\,800 \cdot 1959} = 12{,}25\ cm.$$

Nach einer praktischen Regel geht man oft mit der Nietteilung bis auf $t = 3\,d = 3 \cdot 2 = 6$ cm herunter. In unserer Ausführung wird man also die Teilung zwischen $t = 6$ cm und 12 cm wählen können.

* Dörnen: „Die bisherigen Anschlüsse steifer Fachwerkstäbe und ihre Verbesserung" gestattet eine Lochleibung bis zur Höhe der dreifachen Zugbeanspruchung.

VII. Der Widerstand gegen Verdrehung.

Drehungsbeanspruchung am kreisförmigen Querschnitt.

Besonders wichtig sind die Schubspannungen bei der Drehungsbeanspruchung. Wenn wir einen Stab mit gerader Achse oben durch ein Kräftepaar beanspruchen, so entsteht unten an der Einspannungsstelle ein Kräftepaar von gleicher Größe, aber entgegengesetzt wirkend. Die Ebene des Kräftepaares steht rechtwinklig zur Stabachse, d. h. es entsteht ein Drehmoment $M_d = P \cdot l$ *(Abb. 151)*.

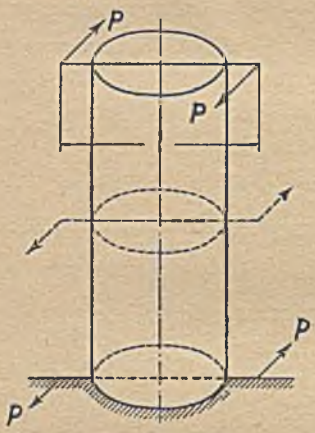


Abb. 151.

Teilt man z. B. den Mantel eines Bleizylinders in lauter gleiche Quadrate, indem man ihn in gleichen Abständen horizontal und vertikal ritzt, beansprucht ihn auf Verdrehung und beobachtet die Linienänderung

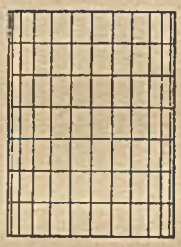


Abb. 152.

Abb. 153.

(Abb. 152 und *153)*, so findet man, daß sich an den parallelen Kreisen nichts geändert hat, daß jedoch die senkrechten Mantellinien zu Schraubenlinien wurden, die Quadrate zu Rhomben. Es tritt demnach eine Verdrehung um einen gewissen Winkel ein.

Zeichnen wir uns eine solche Scheibe heraus und denken uns am Umfang ein Quadrat, wie im vorstehenden beschrieben, abgegrenzt, so verschiebt sich der obere Querschnitt gegen den unteren, es entstehen also im Querschnitt Schubspannungen *(Abb. 154)*.

Wirkt auf einen eingespannt gedachten, kurzen Körper *(Abb. 155)* die Kraft P_1 nicht unmittelbar im abzuscherenden Querschnitt A D, sondern im Abstand l, so wird eine Formänderung des Körpers in der angegebenen Weise eintreten.

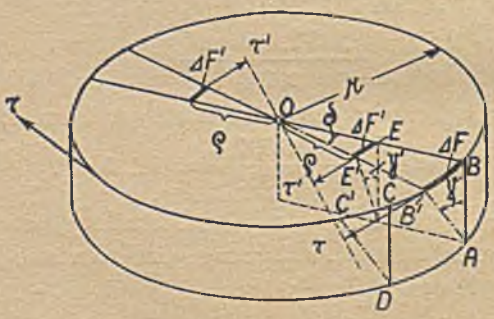


Abb. 154.

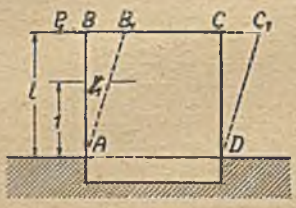


Abb. 155.

Es findet eine parallele Verschiebung (Schiebung) oder Gleitung der einzelnen Querschnitte gegeneinander um einen gewissen Winkel statt, wobei Schubspannungen τ_1 auftreten. $B B_1$ ist die Schiebung oder Gleitung im Abstand l, γ_1 die Gleitung im Abstand 1. Da es sich innerhalb der Elastizitätsgrenze nur um geringe Formänderungen handelt, so kann γ_1 auch als Winkel (gemessen als Bogen) aufgefaßt werden, also die Schiebung im Abstand $l = B B_1 = l \cdot \gamma_1$. Die Schiebung γ_1 wird hervorgebracht durch die Spannung τ_1 und man nennt das Verhältnis

$$\frac{\text{Schiebung}}{\text{Spannung}} = \frac{\gamma_1}{\tau_1} = \beta, \quad \textit{die Schubzahl,}$$

(elastische) Schiebbarkeit. Der umgekehrte Wert $\frac{1}{\beta} = G$ ist der ***Schubmodul*** (Gleitmaß).

Der Schubmodul ist von der Art des Materials abhängig und steht in gewisser Beziehung zum Elastizitätsmodul E für Zug und Druck es kann angenommen werden

$$G = 0{,}375\,E \text{ bis } 0{,}4\,E.$$

Wir kommen nun auf unsere *Abb. 154* zurück. Der ursprünglich rechte Winkel ändert sich jetzt um γ; es ist mithin

$$\gamma = \frac{B B'}{A B}, \text{ und } \gamma = \beta \cdot \tau, \quad \tau = \frac{\gamma}{\beta}.$$

τ wirkt gleichmäßig am ganzen Umfange.

Für unser Flächenelement ΔF gilt somit die Schubspannung τ. Ebenso erleidet aber auch das Flächenelement $\Delta F'$ in der Entfernung ρ vom Mittelpunkte eine Schiebung $\gamma' = \frac{E E'}{A B}$, und da die Querschnitte eben bleiben und die Stabachse ebenfalls an der alten Stelle bleibt, so muß $E E' = \delta \cdot \rho$ und $B B' = \delta \cdot r$ sein, oder $\frac{E E'}{B B'} = \frac{\rho}{r}$.

Setzen wir nun $A B = 1$, so ist $E E' = \gamma'$ und $B B' = \gamma$, folglich muß $\frac{\gamma'}{\gamma} = \frac{\rho}{r}$ sein, oder $\gamma' = \frac{\rho}{r} \cdot \gamma$, die Schubspannung $\tau' = \frac{\gamma'}{\beta} = \frac{\rho}{r} \cdot \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\rho}{r} \cdot \tau$, d. h. die Schubspannungen sind in der Mitte gleich Null; sie wachsen proportional der Entfernung von der Mitte und die größte Schubspannung τ herrscht am Rande.

In jedem Flächenelement $\Delta F'$ ist die Schubspannung τ' vorhanden, also wirkt an $\Delta F'$ die Kraft $\tau' \cdot \Delta F'$. Verlängern wir den Winkel über den Mittelpunkt hinaus, so wirkt auf der anderen Seite τ' entgegengesetzt. Die Summe aller Horizontalkräfte ist daher gleich Null. Die Momentengleichung in bezug auf den gesamten Querschnitt lautet

$$M_d = \Sigma \tau' \cdot \Delta F' \cdot \rho = \Sigma \tau \cdot \frac{\rho}{r} \cdot \Delta F' \cdot \rho,$$

und da τ die Schubspannung der äußersten Faser und r konstante Werte sind, so ist

$$M_d = \frac{\tau}{r} \Sigma \Delta F' . \rho^2.$$

$\Sigma \Delta F' . \rho^2$ ist das ***polare*** (zentrale) ***Trägheitsmoment*** des Querschnittes; es bezieht sich auf die durch den Mittelpunkt O gelegte, senkrecht zur Bildfläche stehende Achse und beträgt, wie man aus Tabellen entnehmen kann, für den Kreisquerschnitt

$$J_p = \frac{\pi}{32} . d^4.$$

Dividiert man das polare Trägheitsmoment des Kreisquerschnittes durch den Abstand der äußersten Faser von der Bezugsachse, so bekommt man das Widerstandsmoment gegen Drehung:

$$W_d = \frac{J_p}{r} = \frac{\pi}{16} d^3 \text{ cm}^3,$$

$$M_d = \tau . W_d.$$

Da τ die größte Schubspannung bedeutet, so darf sie den zulässigen Wert k_d nicht überschreiten, sodaß unsere Drehungsgleichung in die Form übergeht:

$$M_d = W_d . k_d \text{ cmkg}.$$

In *Abb. 153* war dargestellt, daß eine Faser bei der Drehung in die gewundene Form übergeht.

Denken wir uns die Faser körperlich als Prisma mit quadratischem Querschnitt, so ist ein Faserelement darzustellen als ein Würfel mit den Kantenlängen 1. Ein solcher Würfel ist in *Abb. 156* stark vergrößert dargestellt. In den Endflächen dieses Würfels wirken die durch das Drehmoment hervorgerufenen Kräfte $\tau . 1 . 1 = \tau$ kg, und zwar rechts nach oben, links nach unten gerichtet. Diese Kräfte bilden mit dem Hebelarm 1 ein linksdrehendes Kräftepaar. Da nun das Körperelement trotzdem bei der Formänderung keine Drehung, sondern nur eine Verschiebung erleidet, indem die quadratische Ansicht A B C D in den Rhombus A B′ C′ D übergeht, so müssen irgend welche innere Kräfte diese Drehung verhindert haben. Wir müssen also annehmen, daß auch in den durch C D und A B gekennzeichneten Flächen des Würfels Schubspannungen τ'' auftreten, welche ein rechtsdrehendes Kräftepaar bilden und auch den Hebelarm 1 haben. Es folgt daher $\tau = \tau''$, d. h. die Schubspannungen des Längsschnittes sind ebenso groß wie die Schubspannungen des Querschnittes. Setzen wir also in den Punkten A und C jedesmal die Kräfte τ und τ'' zu einer Mittelkraft R zusammen, so erkennen wir, daß diese Kräfte R in der Diagonalen des Würfels wirken und diese auf Zug beanspruchen. Vergrößert man das

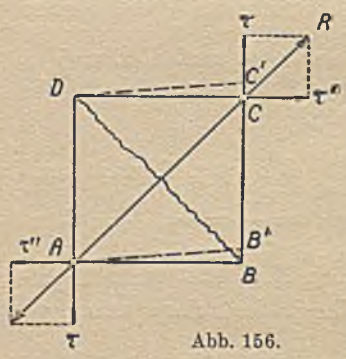


Abb. 156.

Drehmoment M_d bis zum Bruche des Stabes, so muß die Zerstörung dadurch eintreten, daß der schräge Schnitt in der Richtung der Diagonalen D B als Bruchfläche auftritt, in der das Zerreißen stattfindet. Die geschilderten Verhältnisse sind nur zutreffend für einen isotropen Stoff, d. h. einen Baustoff, bei welchem die Festigkeit für alle Schnittrichtungen gleich groß ist, z. B. Gußeisen, Kreide, Mörtel, Beton. Wenn dagegen der Baustoff faserig ist, wie z. B. Holz und lockeres Schweißeisen, so wird keine glatte Bruchfläche auftreten, weil die Scherfestigkeit parallel zur Faser geringer ist als senkrecht zur Faser. Die zulässige Drehspannung kann also bei einem isotropen Baustoff $k_d = k_s$ gesetzt werden, wenn k_s die zulässige Schubspannung des Querschnittes ist. Bei faserigem Baustoff ist dagegen $k_d < k_s$ zu wählen, weil die Schubfestigkeit im Längsschnitt parallel zur Faserrichtung maßgebend ist und oft bedeutend kleiner ist als die des Querschnittes. Wenn also in der Bachschen Spannungstabelle k_s als Schubspannung des Querschnittes abgelesen werden kann, so entsprechen die für k_d angegebenen Werte jedesmal der Schubspannung des Längsschnittes. Hiernach ergibt sich folgende Zusammenstellung der zulässigen Spannungen

für den Belastungsfall II	Schweißeisen	Flußeisen	Flußstahl
k_z	600	$600 \div 1000$	$800 \div 1200$
Schubspannung des Querschnittes k_s	480	$480 \div 800$	$640 \div 960$
Drehspannung $= k_d =$ Schubspannung des Längsschnittes	$240 = \frac{1}{2} k_s$	$400 \div 800$ $\frac{5}{6} k_s \div 1 k_s$	$600 \div 960$ $\frac{15}{16} k_s \div 1 k_s$

Die vorangegangenen Betrachtungen bezogen sich auf einen auf Verdrehen beanspruchten Körper mit kreisförmigem Querschnitt.

Bei einer Welle ergibt sich:

$$M_d = \frac{\pi}{16} d^3 \,.\, k_d; \quad d = \sqrt[3]{\frac{16 M_d}{\pi \,.\, k_d}} = \sim \sqrt[3]{\frac{M_d}{0{,}2\, k_d}} \text{ cm.}$$

Gewöhnlich ist aber nicht das Drehmoment M_d gegeben, sondern die Leistung N und die Umlaufszahl n. Zwischen diesen drei Größen besteht nun die Beziehung:

$$M_d = \frac{30 \,.\, 75 \,.\, 100}{\pi} \,.\, \frac{N}{n} = 71\,620 \frac{N}{n} \text{ cmkg,}$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{71\,620 \,.\, N}{0{,}2 \,.\, n \,.\, k_d}} \text{ cm,}$$

$$d = 71 \,.\, \sqrt[3]{\frac{N}{n \,.\, k_d}} \text{ cm.}$$

In Wirklichkeit ist nun eine Welle auch noch ganz erheblich stark auf Biegung beansprucht durch Riemenzug, Umfangskräfte von Rädern und

unter Umständen auch durch Eigengewichte. Allerdings kann man die Größe der Biegungsmomente meist nicht zahlenmäßig angeben. Deswegen begnügt man sich damit, solche Wellen einfach auf Drehung zu berechnen, aber die gleichzeitig auftretende Biegungsbeanspruchung dadurch zu berücksichtigen, daß man die zulässige Drehspannung k_d herabsetzt. Für normale Triebwerkswellen setzt man $k_d = 120 \frac{kg}{cm^2}$, und erhält den Festigkeitsdurchmesser normaler Triebwerkswellen:

$$d = 71 \sqrt[3]{\frac{N}{n \,.\, 120}} \text{ cm},$$

$$d = 14{,}42 \sqrt[3]{\frac{N}{n}} \text{ cm}.$$

Wir kommen nun wieder auf unsere *Abb. 154* zurück. Haben beide Querschnitte den Abstand A B = 1 cm, so ist der Winkel δ der Verdrehungswinkel für die Längeneinheit.

$$B B' = \gamma = \beta \,.\, \tau,$$

$$\delta \,.\, r = \gamma,$$

$$\delta = \frac{\gamma}{r}.$$

Nun ist $\gamma = \beta \,.\, \tau = \beta \,.\, \frac{r \,.\, M_d}{J_p}$, folglich wird

$$\delta = \frac{\beta \,.\, M_d}{J_p}; \qquad \delta = \frac{M_d}{G \,.\, J_p} \text{ cm}^{-1}$$

d. i. der Verdrehungswinkel für die Längeneinheit in Bogenmaß. Multipliziert man den obigen Wert für δ mit $\frac{180}{\pi}$, so ergibt sich der Verdrehungswinkel für die Längeneinheit in Graden

$$\delta^0 = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{M_d}{G \,.\, J_p} \frac{^0}{cm}.$$

Bei normalen Transmissionswellen soll die Verdrehung $\frac{1}{400}^0$ je 1 cm Wellenlänge nicht überschreiten.

Für $G = 800\,000 \frac{kg}{cm^2}$ bekommt man alsdann:

$$\frac{180}{\pi} \cdot \frac{71\,620 \,.\, N \,.\, 32}{n \,.\, 800\,000 \,.\, \pi \,.\, d^4} = \frac{1}{400}$$

$$d = \sqrt[4]{\frac{400 \,.\, 180 \,.\, 71620 \,.\, 32 \,.\, N}{\pi^2 \,.\, 800000 \,.\, n}}$$

$$d = 12 \sqrt[4]{\frac{N}{n}} \text{ cm},$$ d. i. die Formänderungsformel für normale Transmissionswellen.

Man muß also bei der Berechnung einer normalen Transmissionswelle sowohl die Festigkeits- als auch die Formänderungsformel anwenden und den größten errechneten Wert unter Benützung von Din 114 als maßgebenden betrachten.

77. ***Beispiel:*** Bei welchem Verhältnis $\frac{N}{n}$ geben Festigkeits- und Formänderungsformel denselben Wellen-Φ?

Lösung:

$$14{,}42\sqrt[3]{\frac{N}{n}} = 12\sqrt[4]{\frac{N}{n}}$$

$$14{,}42\left(\frac{N}{n}\right)^{\frac{1}{3}} = 12\left(\frac{N}{n}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$\frac{12}{14{,}42} = \left(\frac{N}{n}\right)^{\frac{1}{12}}; \quad \frac{N}{n} = \backsim 0{,}11.$$

Ist $\frac{N}{n} > 0{,}11$, so gibt die Festigkeitsformel größere Werte.

78. ***Beispiel:*** Welchen Din-Φ bekommen die Transmissionswellen *(Abb. 157).*

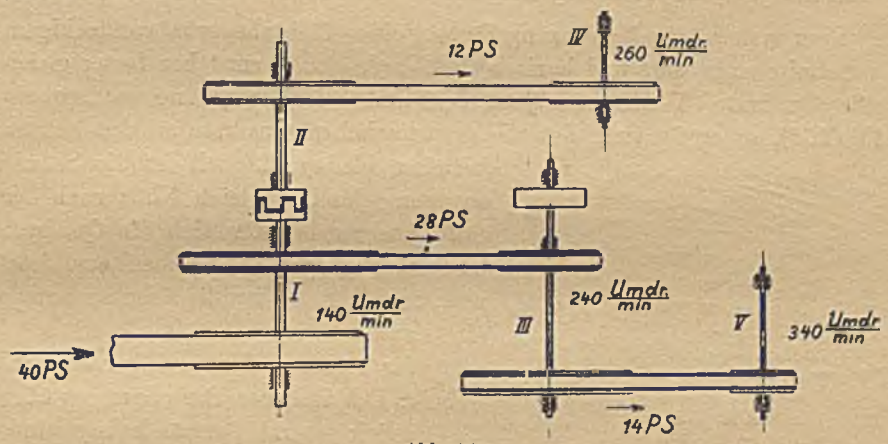


Abb. 157.

Lösung:

Bei I ist $\frac{N}{n} = \frac{40}{140} = 0{,}286$,

$14{,}42\sqrt[3]{0{,}286} = 9{,}5$ cm, nach Din 114 = 100 mm Φ.

Bei II ist $\frac{N}{n} = \frac{12}{140} = 0{,}0857$,

$12\sqrt[4]{0{,}0857} = 6{,}5$ cm, nach Din 114 = 70 mm Φ.

Bei III ist $\frac{N}{n} = \frac{28}{240} = 0{,}117$,

$14{,}42\sqrt[3]{0{,}117} = 7{,}05$ cm, nach Din 114 = 70 mm Φ.

Bei IV ist $\frac{N}{n} = \frac{12}{260} = 0{,}0462$,

$$12\sqrt[4]{0{,}0462} = 5{,}57 \text{ cm, nach Din } 114 = 60 \text{ mm } \Phi.$$

$$\text{Bei V ist } \frac{N}{n} = \frac{14}{340} = 0{,}0412,$$

$$12\sqrt[4]{0{,}0412} = 5{,}41 \text{ cm, nach Din } 114 = 55 \text{ mm } \Phi.$$

78 b. *Beispiel:* Eine vorhandene Transmissionswelle hat 100 mm Φ. Sie soll 50 PS übertragen. Welches ist die Mindesttourenzahl, mit welcher sie laufen muß?

$$\textit{Lösung:}\ 14{,}42 \cdot \sqrt[3]{\frac{50}{n_1}} = 10; \quad n_1 = \frac{14{,}42^3}{1000} \cdot 50 = 150;$$

$$12 \cdot \sqrt[4]{\frac{50}{n^2}} = 10; \quad n_2 = \frac{12^4}{10\,000} \cdot 50 = 104;$$

Hier ist die Festigkeitsformel maßgebend, welche eine Tourenzahl kleiner 150 verbietet.

Normale Lastdrehzahl nach Din 112 ist $n = 160 \frac{\text{Umdr.}}{\text{min.}}$

Drehungsbeanspruchung an nicht kreisförmigen Querschnitten.

Ritzt man in die Begrenzungsflächen eines Bleistabes von rechteckigem Querschnitt senkrechte und horizontale Gerade ein, so entstehen lauter gleich große Quadrate. Wenn man jetzt den Stab auf Verdrehung beansprucht *(Abb. 158)*, so ergibt sich, daß die ursprünglichen Quadrate an den Kanten bestehen bleiben, folglich ist die Schubspannung daselbst gleich Null; nach der Stabmitte zu bildeten sich die Quadrate zu immer spitzeren Rhomben aus, d. h. nach der Mitte zu wird die Schubspannung ein Maximum.

Abb. 158.

Wir kommen also zu folgendem Ergebnis: Die früheren Berechnungen über die Festigkeit und Formänderung eines auf Drehung beanspruchten Stabes gelten nur für den kreisförmigen Querschnitt; sie dürfen nicht ohne weiteres auf andere Querschnittsformen verallgemeinert werden. Es gilt nach wie vor die Festigkeitsformel $M_d = W_d \cdot k_d$ cmkg, und die Formänderungsformel

$$\delta^0 = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{M_d}{G \cdot J_d} \quad \frac{^0}{\text{cm}}.$$

Die Werte W_d und J_d sind abhängig von der Form des Querschnittes. Handelt es sich um beliebige Querschnitte, so ist J_d nicht mehr das polare Trägheitsmoment, sondern eine andere Funktion des Querschnittes, die man mit dem Ausdruck *Drillungswiderstand* belegt hat; auch W_d, das Widerstandsmoment gegen Drehung, steht nicht mehr in einem so einfachen Verhältnis zum Drillungswiderstand, wie wir es von der Biegungslehre her gewöhnt sind.

Dreyer, Festigkeitslehre und Elastizitätslehre*, bringt eine nach den Forschungen von C. Weber ausgearbeitete Zusammenstellung der Abhängigkeiten zwischen W_d, J_d und dem Querschnitt, die bei der Errechnung der folgenden Beispiele benutzt wurde.

79. ***Beispiel:*** Zum Aus- und Einrücken von Zahnrädern D und O an einer Arbeitsmaschine, wird die Einrichtung *Abb. 159* benutzt. Es sitzen diese Räder auf der Büchse H, die lose auf der Welle W läuft. Die Welle W ist beiderseitig exzentrisch in den Zapfenstücken E gelagert. Durch Drehen von E links mittels des Handhebels U wird die Mitte der Welle um 2 e verlegt, sodaß die Zähne außer Eingriff kommen. Angenommen Welle W = 30 mm Φ,

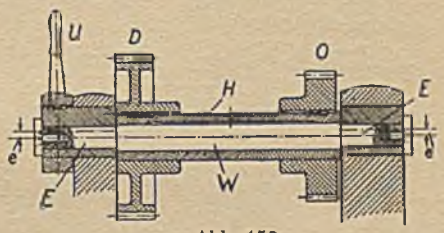


Abb. 159.

Tourenzahl der Büchse $H = 160 \frac{\text{Umdr.}}{\text{min}}$, Außendurchmesser der Büchse = 52 mm, zu übertragende Leistung 6 PS. Wie groß ist der Durchschnittswert der Drehungsspannung in der Büchse?

Lösung: Das Höhlungsverhältnis $\alpha = \frac{d_i}{d_a} = \frac{3}{5{,}2} = 0{,}577$,

$$W_d = \frac{\pi}{16} \cdot d_a^3 \cdot (1 - \alpha^4) = \frac{\pi}{16} \cdot 5{,}2^3 \cdot (1 - 0{,}577^4) = 24{,}54 \text{ cm}^3,$$

$$M_d = W_d \cdot \tau_d; \quad 71\,620 \cdot \frac{N}{n} = 24{,}54 \cdot \tau_d,$$

$$\tau_d = \frac{71\,620 \cdot 6}{160 \cdot 24{,}54} = 109{,}7 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}.$$

Bei der Keilnut tritt eine erhebliche Erhöhung dieser errechneten Durchschnittsspannung ein.

Der Verdrehungswinkel $\delta^0 = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{M_d}{G \cdot J_d} \frac{^0}{\text{cm}}$,

$$J_d = \frac{\pi}{32} \cdot d_a^4 \cdot (1 - \alpha^4) = \frac{\pi}{32} \cdot 5{,}2^4 \cdot (1 - 0{,}577^4) = 63{,}8 \text{ cm}^4,$$

$$M_d = 71\,620 \cdot \frac{6}{160} = 2690 \text{ cmkg}, \text{ Gleitmaß } G = 830\,000 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2},$$

$$\delta^0 = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{2690}{830\,000 \cdot 63{,}8} = \frac{1}{343} \frac{^0}{\text{cm}} > \frac{1}{400} \frac{^0}{\text{cm}},$$

ist jedoch noch zulässig.

80. ***Beispiel:*** *Abb. 160* zeigt eine Spannrollenkonstruktion. Die Anpressung der Spannrolle O erfolgt durch das Gewicht U; S ist die Riemenscheibe. Die Spannrolle O wird immer auf das lose Trum wirkend in unmittelbarer Nähe der kleinen Scheibe S angebracht. Es soll die maximale Drehungsspannung in dem Spannrollenarm von elliptischem Querschnitt

* Siehe auch Hütte I, 25. Auflage, Seite 634.

ermittelt werden. Zu übertragen sind 4 PS bei 950 Touren der Scheibe S von 160 mm ⌀.

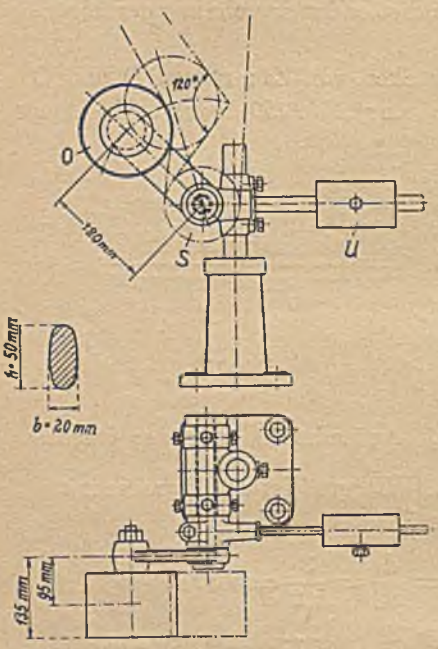


Abb. 160.

Lösung: Bekanntlich kann man unter normalen Verhältnissen annehmen, daß die Riemenspannung im betriebslosen Zustand das 1,5 fache der zu übertragenden Umfangskraft beträgt. Beim Spannrollentrieb kann man ebenfalls annehmen, daß das Gewicht U entsprechend groß gewählt ist.

Die ungünstigste Stellung ist die strichlierte, mit einer verdrehenden Kraft gleich der 1,5 fachen Umfangskraft.

$$P \cdot \frac{0{,}16\,\pi \,.\, 950}{60 \,.\, 75} = 4;$$

$$P = \frac{4 \,.\, 60 \,.\, 75}{0{,}16 \,.\, \pi \,.\, 950} = 37{,}7 \text{ kg}.$$

Im ungünstigsten Falle

$$M_d = 37{,}7 \,.\, 1{,}5 \,.\, 13{,}5 = 759 \text{ cmkg}.$$

Für elliptischen Querschnitt ist

$$W_d = \frac{\pi}{16} \,.\, n \,.\, b^3,$$

$$\frac{h}{b} = n; \quad \frac{h}{b} = \frac{5}{2} = 2{,}5; \quad W_d = \frac{\pi}{16} \,.\, 2{,}5 \,.\, 2^3 = 3{,}927 \text{ cm}^3.$$

Die maximale Drehungsspannung tritt in den Endpunkten der kleinen Achse der Ellipse auf und beträgt

$$\tau_{d_{max}} = \frac{M_d}{W_d} = \frac{759}{3{,}927} = 193{,}3 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}.$$

Ob diese Spannung zulässig ist, kann hier nicht entschieden werden (siehe zusammengesetzte Festigkeit: Biegung und Drehung).

VIII. Der Widerstand gegen Knicken.

Wenn ein prismatischer Stab vom Querschnitt F am unteren Ende fest eingespannt ist, während das obere Ende vollständig frei ist, also seitlich ausweichen kann, und wenn am freien Endpunkt in der Achsenrichtung des Stabes eine Kraft P′ wirkt, so erzeugt diese zunächst eine Druckspannung

$$\sigma = \frac{P'}{F} \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}.$$

Ist der Stab im Verhältnis zu seinem Querschnitt sehr lang, so wird er unter der Einwirkung der Kraft P′ seine ursprüngliche gerade Lage nicht beibehalten; es wird vielmehr eine seitliche Ausbiegung eintreten. Die Folge davon ist, daß in dem Stabe zur Druckspannung σ noch eine

Biegungsspannung hinzukommt, welche durch das Moment der Kraft P′ erzeugt wird. Läßt man die Kraft P′ allmählich zunehmen, so wird endlich durch die gleichzeitige Wirkung der Druckspannung und der Biegungsspannung eine Zerstörung eintreten; der Stab wird zerknickt.

Der im Gleichgewicht sich befindende Stab *Abb. 161* hat durch die Kraft P′ eine Durchbiegung f (bezogen auf die Einspannstelle) bekommen und eine Durchbiegung x bezogen auf die Stelle C. Es ist nachgewiesen worden, daß die entstehende Biegungskurve eine Sinuslinie ist. Ersetzen wir die Sinuslinie durch eine Parabel, und bedenken wir, daß die jeweilige Durchbiegung der Stabachse zugleich der Hebelarm der Kraft P′ ist, so haben wir den Fall eines Freiträgers vor uns, dessen Momentenfläche von einer Parabel begrenzt wird mit der Scheitelordinate P′ . f.

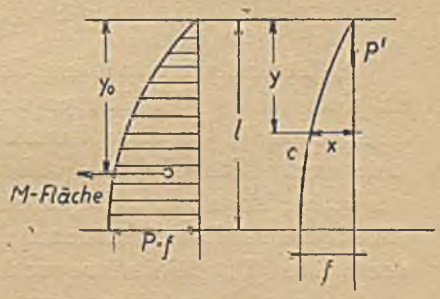


Abb. 161.

Nun ist die Verschiebung des freien Endes eines Freiträgers gleich dem statischen Moment der reduzierten Momentenfläche (siehe: Durchbiegung von Trägern), also in unserem Falle

$$f = \frac{\frac{2}{3} l \,.\, P' \,.\, f \,.\, \frac{5}{8} l}{E \,.\, J} = \frac{5}{12} \cdot \frac{P' \,.\, f \,.\, l^2}{E \,.\, J}$$

oder

$$P' = \frac{12}{5} \cdot \frac{E \,.\, J}{l^2} \text{ kg.}$$

Für einen an beiden Enden gelenkartig (ohne Einspannung) befestigten Stab von der Länge l lautet der entsprechende Ausdruck *(Abb. 162)*:

$$f = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} \cdot P' \,.\, f \,.\, \frac{5}{8} \cdot \frac{l}{2}}{E \,.\, J} = \frac{5}{48} \cdot \frac{P' \,.\, f \,.\, l^2}{E \,.\, J},$$

$$P' = \frac{48}{5} \cdot \frac{E \,.\, J}{l^2} \text{ kg.}$$

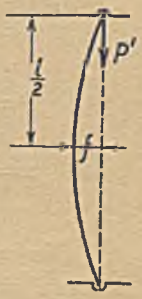


Abb. 162.

Wird dagegen die tatsächlich vorhandene Sinuslinie als Biegungskurve der Rechnung zu Grunde gelegt, so entstehen die bekannten ***Eulerschen Gleichungen;*** der Unterschied in den Zahlenwerten ist nur gering.

Da in den aufgestellten Gleichungen die Durchbiegung f nicht mehr vorkommt, so folgt daraus, daß sie für jede beliebige Durchbiegung gelten müssen, also auch für jene, bei welcher der Stab zerknickt wird. Die Kraft P′ ist also die Bruchbelastung. Die zulässige Belastung P ist dann gleich $\frac{P'}{S}$, worin S den Sicherheitsgrad bedeutet.

In praktischen Aufgaben setzt man fast immer den Fall der beidseitigen Spitzenlagerung voraus, auch dann, wenn der Stab in Wirklichkeit an den

Enden fest eingespannt ist, weil die feste Einspannung in der Praxis meist die ungünstige Nebenwirkung hat, daß hierdurch Biegungsmomente außer der Druckbelastung in den Stab hineinkommen.

Es lautet also die in Frage kommende Formel für die Bruchlast $P' = \frac{48}{5} \cdot \frac{E \cdot J}{l^2}$ kg, und jene für die zulässige Belastung rund:

$$P = 10 \cdot \frac{E \cdot J}{S \cdot l^2} \text{ kg.}$$

Selbstverständlich ist in diese Formel das kleinste vorkommende äquatoreale Trägheitsmoment des Körperquerschnittes einzusetzen. Wir wollen nun untersuchen, ob die obige Formel unter allen Umständen für auf Knickung beanspruchte Stäbe benutzt werden kann. Zu diesem Zwecke müssen wir uns vorher einen neuen Begriff aneignen, nämlich den der ***Schlankheit.*** Man bekommt die Schlankheit x einer Säule, wenn man deren Knicklänge l durch ihren Trägheitshalbmesser i dividiert.

$$x = \frac{l}{i}.$$

81. ***Beispiel:*** Wie groß ist die Schlankheit eines Würfels von der Seitenlänge a?

Lösung: $J = \frac{a^4}{12}$, $F = a^2$, $i = \sqrt{\frac{J}{F}} = \sqrt{\frac{a^4}{12 \cdot a^2}} = \frac{a}{\sqrt{12}}$,

$$x = \frac{l}{i} = \frac{a}{\frac{a}{\sqrt{12}}} = \sqrt{12} = 3{,}464.$$

82. ***Beispiel:*** Eine gußeiserne Säule von 200 mm Außen-⌀ und 160 mm Innen-⌀ hat eine Knicklänge von 6 m. Welches ist ihre Schlankheit?

Lösung:

$$J = \frac{\pi}{64} \cdot D^4 \cdot (1 - \alpha^4) = \frac{\pi}{64} \cdot 20^4 \cdot (1 - 0{,}8^4) = 4635 \text{ cm}^4,$$

$$F = \frac{\pi}{4} \cdot (20^2 - 16^2) = 113 \text{ cm}^2, \quad i = \sqrt{\frac{4635}{113}} = 6{,}4 \text{ cm},$$

$$x = \frac{600}{6{,}4} = 93{,}8.$$

Die beiden Beispiele haben uns gezeigt, in welchen Grenzen sich die Schlankheitszahlen ungefähr bewegen.

Wir gehen von der Formel für die Bruchbelastung aus:

$P' = 10 \cdot \frac{E \cdot J}{l^2}$ kg; dividieren wir beide Seiten dieser Gleichung durch den Querschnitt F, so erhalten wir die sogenannte mittlere Knickspannung:

$$\sigma_k = \frac{P'}{F} = \frac{10 \cdot E \cdot J}{l^2 \cdot F}.$$

Nun ist $\quad i = \sqrt{\frac{J}{F}}$; $J = F \cdot i^2$,

$$\sigma_k = \frac{P'}{F} = \frac{10 \,.\, E \,.\, F}{F} \,.\, \frac{i^2}{l^2} = 10 \,.\, E \,.\, \frac{1}{x^2}.$$

Diese Formel für die mittlere Knickspannung enthält das Elastizitätsmaß E des Baustoffes, d. h. die Formel hat nur so lange einen Sinn, als die Spannung den Wert der Proportionalitätsgrenze σ_p nicht überschreitet. Wir erhalten also als Bedingung für die Anwendbarkeit der Eulerschen Formel

$$\sigma_k = 10 \,.\, E \,.\, \frac{1}{x^2} < \sigma_p, \quad \text{folglich}$$

$$x^2 > 10 \,.\, E \,.\, \frac{1}{\sigma_p},$$ oder die Schlankheitsgrenze für die Anwendbarkeit der Eulerschen Formel

$$x_0 \geqq \sqrt{\frac{10\,E}{\sigma_p}}.$$

Für Flußeisen St 37 z. B. ist $E = 2\,100\,000 \frac{kg}{cm^2}$, und $\sigma_p = 1900 \frac{kg}{cm^2}$; in diesem Falle wird die Schlankheitsgrenze

$$x_0 = \sqrt{\frac{2\,100\,000}{1900}} = \sim 105.$$

Aus diesen Betrachtungen geht hervor, daß die Eulersche Formel nur für große Schlankheiten, d. h. für sehr elastische Stäbe brauchbar ist.

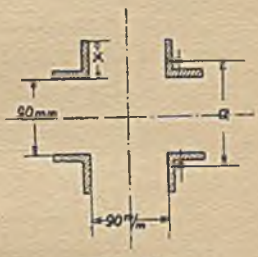


Abb. 163.

83. ***Beispiel:*** Eine Stütze von 5 m Länge sei mit 30 000 kg belastet. Der Querschnitt besteht aus vier Winkeleisen *(Abb. 163)*.

Welche Profile sind zu verwenden, wenn man die zulässige Druckspannung $k = 1000 \frac{kg}{cm^2}$ nicht überschreiten soll. Der Sicherheitsgrad S ist $= 5$ vorgeschrieben. $E = 2\,100\,000 \frac{kg}{cm^2}$.

Lösung: Das erforderliche Trägheitsmoment

$$J = \frac{P \,.\, S \,.\, l^2}{10 \,.\, E} = \frac{30\,000 \,.\, 5 \,.\, 500^2}{10 \,.\, 2\,100\,000} = 1786 \text{ cm}^4.$$

Wählen wir eine Stärke des Winkeleisens von 9 mm, so berechnet sich das Maß x zu:

$$2 \,.\, \frac{0{,}9 \,.\, (9 + 2\,x)^3}{12} - 2 \,.\, \frac{0{,}9 \,.\, 9^3}{12} + 2\,\frac{(x - 0{,}9) \,.\, (9 + 2 \,.\, 0{,}9)^3}{12} -$$

$$- 2\,\frac{(x - 0{,}9) \,.\, 9^3}{12} = 1786,$$

$$(9 + 2\,x)^3 + 590\,x = 13\,180,$$

für $x = 6{,}5$ cm ergibt sich eine Zahl 14 474;

für ⌊-Eisen $6\frac{1}{2}$ wird $a = 9 + 2 \,.\, 1{,}93 = 12{,}86$ cm.

Das vorhandene Trägheitsmoment

$$= 4 \,.\, [41{,}3 + 10{,}98 \,.\, 6{,}43^2] = 1981{,}2 \text{ cm}^4.$$

Die vorhandene Druckspannung

$$= \frac{30\,000}{4 \,.\, 10{,}98} = 683 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} < 1000 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}.$$

Der Trägheitshalbmesser des Querschnittes:

$$i = \sqrt{\frac{J}{F}} = \sqrt{\frac{1981{,}2}{4 \,.\, 10{,}98}} = 6{,}72 \text{ cm},$$

die Schlankheit $x = \frac{l}{i} = \frac{500}{6{,}72} = 74{,}4 < 105.$

Wir haben es also hier mit einem Bauteile zu tun, der nicht schlank genug ist, um nach Euler berechnet zu werden, dessen Form aber nicht gedrungen genug ist, um sie auf reinen Druck berechnen zu dürfen, denn würden wir auf reinen Druck berechnen, so ergäbe sich $F = \frac{30\,000}{1000} = 30 \text{ cm}^2$, pro Winkeleisen $7{,}5 \text{ cm}^2$, also z. B. ein N P Nr. $5\frac{1}{2}$ mit 8 mm Stärke. Dann wird $J = 4 \,.\, (22{,}1 + 8{,}23 \,.\, 6{,}14^2) = 1328{,}4 \text{ cm}^4$, die Eulersche Formel wäre selbst hier noch nicht zuständig, denn

$$i = \sqrt{\frac{1328{,}4}{4 \,.\, 8{,}23}} = 6{,}35 \text{ cm}, \quad x = \frac{500}{6{,}35} = 78{,}7 < 105.$$

Um die Eulersche Formel für diesen auf Druck berechneten Querschnitt benützen zu dürfen, müßte

$$i = \frac{500}{105} = 4{,}77 \text{ cm sein, und es wäre } J = 4{,}77^2 \,.\, 4 \,.\, 8{,}23 = 750 \text{ cm}^4.$$

$$4 \,.\, \left(22{,}1 + 8{,}23 \,.\, \left(\frac{a}{2}\right)^2\right) = 750,$$

$$a = \sqrt{\frac{\frac{750}{4} - 22{,}1}{8{,}23}} \,.\, 4 = 8{,}95 \text{ cm},$$

und der Abstand der ⌊-Eisen voneinander statt 9 cm nur 5,67 cm. Der vorhandene Sicherheitsgrad ist dann $S = \frac{10 \,.\, 2\,100\,000 \,.\, 750}{30\,000 \,.\, 500^2} = 2{,}1$, also ungenügend.

Wir sehen aus diesem Beispiel, daß die bisher kennengelernten Berechnungsmethoden nicht ausreichen, die Stütze erfolgreich berechnen zu können. Für das unelastische Gebiet, in welchem die Eulerschen Formeln keine Gültigkeit haben, gibt es eine ganze Reihe von verschiedenen Berechnungsmethoden. Wir wollen die ***verbesserte Druckformel*** von ***Tetmajer*** benutzen:

$$P_T = \frac{F \,.\, K_T}{S_0}.$$

Hierin ist K_T die Knickfestigkeit des Baustoffes, welche Tetmajer mit Berücksichtigung der Schlankheit gefunden hat:

$$K_T = K' \,.\, (1 - a \,.\, x) \frac{kg}{cm^2},$$

K' und a sind Versuchswerte, welche vom Baustoff abhängig sind und der folgenden Tabelle entnommen werden können.

Baustoff	K'	a	Schlankheitsgrenze
Schweißeisen	3030	0,00426	112
Flußeisen	3100	0,00368	105
Flußstahl	3350	0,00185	90
Holz	293	0,00662	100
Gußeisen .	8000	0,0066	$x < 30$
	10300	0,0139	$x = 30 \div 51$

$$J_{erf} = \frac{1{,}27 \,.\, P \,.\, S_0 \,.\, l^2}{10^7} \text{ für } x > 51.$$

Wir rechnen also nach wie vor nach Euler, und kontrollieren den Sicherheitsgrad S_T nach Tetmajer unter Benutzung der Formel

$$S_T = \frac{F \,.\, K'}{P} \,.\, (1 - a \,.\, x),$$

wenn die Aufgabe im unelastischen Bereich liegt. Man soll in die Eulerschen Formeln einen Sicherheitsgrad $S_0 = 5$ bei Stützen, und $S_0 = 4$ bei Streben in Fachwerken einsetzen; für E ist der Wert $2\,100\,000 \frac{kg}{cm^2}$ zu benutzen. Für schlanke Säulen aus Gußeisen setze man $S_0 = 6 \div 8$ ein, und aus Holz $= 7 \div 10$. Der verlangte Sicherheitsgrad S_T bei der Kontrolle nach Tetmajer im unelastischen Bereich ist beispielsweise für Stäbe aus Flußeisen zu ermitteln aus folgenden Formeln:

$$\text{für Säulen} = 2 + \frac{3 \,.\, (x - 20)}{85}, \quad \text{für Fachwerke} = 2 + \frac{2 \,.\, (x - 20)}{85}.$$

84. ***Beispiel:*** Wir wollen jetzt das 83. Beispiel fertig rechnen. Die Schlankheit x war ermittelt mit 74,4. Dann wird der vorhandene Sicherheitsgrad nach Euler

$$S_E = \frac{10 \,.\, E \,.\, J}{P \,.\, l^2} = \frac{10 \,.\, 2\,100\,000 \,.\, 1981{,}2}{30\,000 \,.\, 500^2} = 5{,}54,$$

der errechnete Sicherheitsgrad nach Tetmajer

$$S_T = \frac{F \,.\, K'}{P} \,.\, (1 - a \,.\, x) = \frac{10{,}98 \,.\, 4 \,.\, 3100}{30\,000} \,.\, (1 - 0{,}00368 \,.\, 74{,}4) = 3{,}3,$$

der verlangte Sicherheitsgrad nach Tetmajer

$$S_{T_{erf}} = 2 + \frac{3 \,.\, (74{,}4 - 20)}{85} = 3{,}92.$$

Wir müssen also ein größeres Profil wählen.

⌊ NP Nr. 7 mit 9 mm Stärke.

$$J = 4 \,.\, [52{,}6 + 11{,}9 \,.\, 6{,}55^2] = 2254{,}4 \text{ cm}^4,$$

$$S_E = \frac{10 \,.\, 2\,100\,000 \,.\, 2254{,}4}{30\,000 \,.\, 500^2} = 6{,}31,$$

$$i = \sqrt{\frac{J}{F}} = \sqrt{\frac{2254{,}4}{4 \,.\, 11{,}9}} = 6{,}89 \text{ cm},$$

$$x = \frac{l}{i} = \frac{500}{6{,}89} = 72{,}6,$$

$$S_T = \frac{F \,.\, K'}{P} \,.\, [1 - a \,.\, x] = \frac{11{,}9 \,.\, 4 \,.\, 3100}{30\,000} (1 - 0{,}00\,368 \,.\, 72{,}6) = 3{,}62,$$

$$S_{T_{erf}} = 2 + \frac{3 \,.\, (72{,}6 - 20)}{85} = 3{,}85 > 3{,}62.$$

Der geforderte Sicherheitsgrad nach Tetmajer ist also noch nicht erreicht, wir wählen deshalb ⌊ NP Nr. 7½ Stärke 8 mm.

$$J = 4 \,.\, [58{,}9 + 11{,}5 \,.\, 6{,}63^2] = 2259{,}6 \text{ cm}^4,$$

$$S_E = \frac{10 \,.\, 2\,100\,000 \,.\, 2259{,}6}{30\,000 \,.\, 500^2} = 6{,}31,$$

$$i = \sqrt{\frac{J}{F}} = \sqrt{\frac{2259{,}6}{4 \,.\, 11{,}5}} = 7 \text{ cm},$$

$$x = \frac{l}{i} = \frac{500}{7} = 71{,}4,$$

$$S_T = \frac{F \,.\, K'}{P} \,.\, (1 - a \,.\, x) = \frac{11{,}5 \,.\, 4 \,.\, 3100}{30\,000} (1 - 0{,}00\,368 \,.\, 71{,}4) = 3{,}5,$$

$$S_{T_{erf}} = 2 + \frac{3 \,.\, (71{,}4 - 20)}{85} = 3{,}82 > 3{,}5, \text{ da}$$

$S_{T_{erf}}$ noch nicht ereicht, so wählen wir ⌊ NP 7, Stärke 11 mm.

$$J = 4 \,.\, [61{,}8 + 14{,}3 \,.\, 6{,}63^2] = 2761{,}2 \text{ cm}^4,$$

$$S_E = \frac{10 \,.\, 2\,100\,000 \,.\, 2761{,}2}{30\,000 \,.\, 500^2} = 7{,}73,$$

$$i = \sqrt{\frac{J}{F}} = \sqrt{\frac{2761{,}2}{4 \,.\, 14{,}3}} = 6{,}95 \text{ cm},$$

$$x = \frac{l}{i} = \frac{500}{6{,}95} = 71{,}8,$$

$$S_T = \frac{F \,.\, K'}{P} \,.\, (1 - a \,.\, x) = \frac{14{,}3 \,.\, 4 \,.\, 3100}{30\,000} (1 - 0{,}00\,368 \,.\, 71{,}8) = 4{,}35,$$

$$S_{T_{erf}} = 2 + \frac{3 \,.\, (71{,}8 - 20)}{85} = 3{,}83 < 4{,}35.$$

Die vorhandene Druckspannung

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{30\,000}{4 \,.\, 14{,}3} = 524 \ \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}.$$

4 ⌊ Eisen, NP Nr. 7, Wandstärke 11 mm,

$S_E = 7{,}73$, $S_T = 4{,}35 > S_{T_{erf}} = 3{,}83$; $\sigma = 524 \frac{kg}{cm^2}$; diese Werte scheinen sehr reichlich, deshalb soll Neurechnung erfolgen.

Bei ⌊ N P Nr. 6 ½ (11 mm) bekommen wir:

$$J = 4 \,.\, [48{,}8 + 13{,}17 \,.\, 6{,}5^2] = 2419{,}2 \text{ cm}^4,$$

$$S_E = \frac{10 \,.\, 2\,100\,000 \,.\, 2419{,}2}{30\,000 \,.\, 500^2} = 6{,}77,$$

$$i = \sqrt{\frac{2419{,}2}{4 \,.\, 13{,}17}} = 6{,}78 \text{ cm},$$

$$x = \frac{500}{6{,}78} = 73{,}8,$$

$$S_T = \frac{13{,}17 \,.\, 4 \,.\, 3100}{30\,000} (1 - 0{,}00368 \,.\, 73{,}8) = 3{,}96,$$

$$S_{T_{erf}} = 2 + \frac{3 \,.\, (73{,}8 - 20)}{85} = 3{,}9 < 3{,}96,$$

$$\sigma = \frac{30\,000}{4 \,.\, 13{,}17} = 570 \frac{kg}{cm^2}.$$

Endgültig gewählt 4 ⌊ Eisen N P Nr. 6½ (11 mm) mit $S_E = 6{,}77$,

$$S_T = 3{,}96 > S_{T_{erf}} = 3{,}9;\ \sigma = 570 \frac{kg}{cm^2}.$$

85. *Beispiel:* Ein Stahlrohr soll bei 4 m Knicklänge mit 40 tons auf Druck belastet werden. Vorgeschrieben ist nach Euler 5 fache, nach Tetmajer 3 fache Sicherheit,

$$E = 2\,200\,000 \frac{kg}{cm^2},$$

$$k = 1000 \frac{kg}{cm^2}.$$

Lösung: $J = \frac{P \,.\, S \,.\, l^2}{10\,E} = \frac{40\,000 . 5 . 400^2}{10 \,.\, 2\,200\,000} = 1454 \text{ cm}^4.$

Laut Tabelle wählen wir ein Rohr 170 mm ⌀, Wandstärke 9 mm, $J = 1480 \text{ cm}^4$, $F = 45{,}52 \text{ cm}^2$, $i = 5{,}7$ cm,

$$\sigma = \frac{40\,000}{45{,}52} = 878 \frac{kg}{cm^2} < 1000 \frac{kg}{cm^2},$$

$$S_E = \frac{10 \,.\, 2200\,000 \,.\, 1480}{40\,000 \,.\, 400^2} = 5{,}08 > 5,$$

$$x = \frac{400}{5{,}7} = 70{,}2 < 90, \text{ folglich Kontrolle nach Tetmajer.}$$

$$S_T = \frac{45{,}52 \,.\, 3350}{40\,000} (1 - 0{,}0\,0185 \,.\, 70{,}2) = 3{,}32 > 3.$$

Der angenommene Rohrquerschnitt kann beibehalten werden.

86. *Beispiel:* Eine gußeiserne Säule von ringförmigem Querschnitt und $l = 4{,}5$ m sei mit 30 000 kg belastet. Der Querschnitt soll für 8fache Sicherheit bestimmt werden. Die zulässige Druckspannung für Gußeisen

$$k = 500 \frac{kg}{cm^2}.$$

Lösung: Da wir nicht wissen, wie groß die Schlankheit der Säule ist, so benutzen wir vorläufig die Formel

$$J_{erf} = \frac{1{,}27 \,.\, P \,.\, S_b \,.\, l^2}{10^7} = \frac{1{,}27 \,.\, 30\,000 \,.\, 8 \,.\, 450^2}{10\,000\,000} = 6170 \text{ cm}^4$$

Laut Tabelle für gußeiserne Säulen wählen wir einen Querschnitt mit einem Außen-Φ 220 mm und einer Wandstärke = 20 mm; dann ist $J_{vorh} = 6346$ cm⁴ und $F_{vorh} = 126$ cm², $i = 7{,}1$ cm,

$$x = \frac{l}{i} = \frac{450}{7{,}1} = 63{,}3 > 51;$$

die angewendete Formel war also richtig.

$$S_{vorh} = \frac{6346 \,.\, 10\,000\,000}{1{,}27 \,.\, 30\,000 \,.\, 450^2} = 8{,}21 > 8$$

$$\sigma = \frac{30\,000}{126} = 238 \frac{kg}{cm^2}.$$

Anmerkung: In neuerer Zeit hat man die Berechnung von auf Knickung beanspruchten Stäben insofern vervollkommnet, als man die Tetmajersche Formel so abgeändert hat, daß man sie auch nach dem erforderlichen Querschnitt auflösen kann (Johnson und Ostenfeld).*

IX. Die zusammengesetzte Festigkeit.

Die einfachen Festigkeitsarten mit den zugehörigen Spannungsbedingungen sind:

1. Zug	$\sigma_z \leqq k_z$
2. Druck	$\sigma \leqq k$
3. Biegung	$\sigma_b \leqq k_b$
4. Schub	$\tau_s \leqq k_s$
5. Drehung	$\tau_d \leqq k_d$

Aus den Spannungsbezeichnungen geht schon hervor, daß es trotz der fünf verschiedenen Festigkeitsarten nur zwei verschiedene Arten von Spannungen gibt, nämlich Normalspannungen (σ_z, σ, σ_b), welche normal oder senkrecht zum Querschnitt stehen, und Tangentialspannungen (τ_s, τ_d), welche in der Querschnittsebene wirken. Wir können daher alle Aufgaben der zusammengesetzten Festigkeit in folgende Gruppen einteilen:

* *Das Omega-Verfahren* in „Ergänzungen zur Festigkeitslehre und Elastizitätslehre" von Ing. Georg Dreyer, Gewerbestudienrat, Verlag: Max Jänecke, Leipzig.

1. In allen Punkten des Querschnittes treten nur Normalspannungen auf, welche durch ihre algebraische Summe zusammengefaßt werden können.

2. In allen Punkten des Querschnittes treten nur Tangentialspannungen auf, welche durch ihre algebraische oder geometrische Summe zusammengefaßt werden können.

3. In allen oder einigen Punkten des Querschnittes treten gleichzeitig Normal- und Tangentialspannungen auf; diese müssen in einer noch näher zu erklärenden Weise zusammengesetzt werden.

a) Normalspannungen.

Exzentrischer Zug, exzentrischer Druck.

Ist ein Stab gemäß *Abb. 164* durch eine Kraft P beansprucht, welche im Abstande p von der Stabachse aber parallel zu dieser wirkt, so bezeichnet man diesen Belastungsfall als exzentrischen Zug.

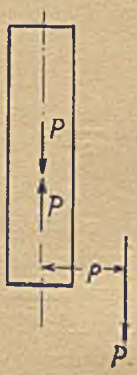


Abb. 164.

Wir fügen in der Stabachse zwei gleichgroße, entgegengesetzt gerichtete Kräfte P hinzu und erhalten eine Einzelkraft P in Richtung der Stabachse, die den Stab auf Zug beansprucht, und ein Kräftepaar mit dem unveränderlichen Moment $M_b = P \cdot p$, das den Stab auf Biegung beansprucht. Die entstehende Zugspannung ist $\sigma_z = +\frac{P}{F}\frac{kg}{cm^2}$, und die Randspannungen der Biegung $\sigma_b = \pm \frac{M}{W}\frac{kg}{cm^2}$. Diese beiden Spannungen ergeben zusammen die resultierende Randspannung

Abb. 165.

$$\sigma_{max} = +\sigma_z + \sigma_b = \frac{P}{F} + \frac{M}{W}\frac{kg}{cm^2} \text{ und}$$

$$\sigma_{min} = +\sigma_z - \sigma_b = \frac{P}{F} - \frac{M}{W}\frac{kg}{cm^2}.$$

Bei exzentrischem Druck bekommt man entsprechend:

$$\sigma_{max} = -\sigma - \sigma_b = -\frac{P}{F} - \frac{M}{W}\frac{kg}{cm^2}$$

$$\sigma_{min} = -\sigma + \sigma_b = -\frac{P}{F} + \frac{M}{W}\frac{kg}{cm^2}.$$

Für die Zulässigkeit der Ausführung besteht die Bedingung

$$\sigma_{max} \leqq k_z, \text{ bezw. } \sigma_{max} \leqq k.$$

87. ***Beispiel:*** Ein Stahlrohr *(Abb. 165)* soll an seinem Umfang mit einer Last $P = 3000$ kg belastet werden.

$k_z = k = k_b = 800 \frac{kg}{cm^2}$. Welches Profil ist zu wählen?

Lösung: $$\sigma_{max} = \frac{P}{F} + \frac{M}{W}\frac{kg}{cm^2}$$

$$\sigma_{max} = \frac{P}{\frac{\pi}{4} \cdot (D^2 - d^2)} + \frac{P \cdot D}{2 \cdot \left[\frac{(D^2 - d^2) \cdot (D^2 + d^2)}{D}\right] \cdot \frac{\pi}{32}}.$$

Aus der Tabelle für Stahlrohre schätzen wir die Wandstärke

$$\delta = \infty \frac{D}{20}, \text{ also } d = 0{,}9 \cdot D,$$

$$\sigma_{max} = \frac{P}{0{,}1492 \cdot D^2} + \frac{P \cdot D}{\frac{\pi}{16} \cdot \frac{0{,}19 \cdot D^2 \cdot 1{,}81 \cdot D^2}{D}},$$

$$\sigma_{max} = 6{,}7 \cdot \frac{P}{D^2} + 14{,}8 \cdot \frac{P}{D^2} = 21{,}5 \cdot \frac{P}{D^2},$$

$$D = \sqrt[2]{21{,}5 \cdot \frac{P}{k_z}} = \sqrt[2]{\frac{21{,}5 \cdot 3000}{800}} = 9 \text{ cm},$$

gewählt ein Stahlrohr mit $D = 90$ mm, $d = 81$ mm, $\delta = 4{,}5$ mm,

$$\sigma_{max} = \frac{3000}{12{,}09} + \frac{3000 \cdot 4{,}5}{24{,}6} = 244 + 548,$$

$$\sigma_{max} = 792 \frac{kg}{cm^2} < 800 \frac{kg}{cm^2}.$$

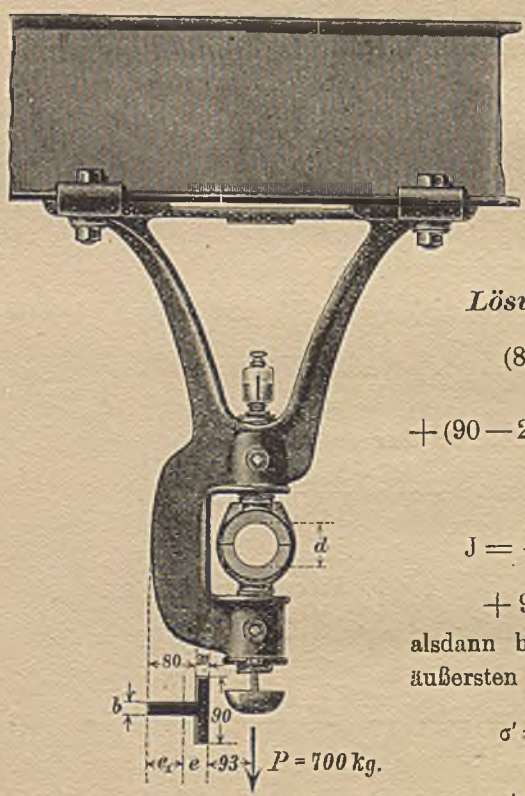


Abb. 166.

88. ***Beispiel:*** Es sind die Randspannungen des in *Abb. 166* dargestellten Querschnittes des Hängelagers zu ermitteln. Der vertikale Lagerdruck P beträgt 700 kg, $b = 20$ mm.

Lösung:

$$(80 + 20) \cdot 20 \frac{80 + 20}{2} +$$

$$+ (90 - 20) \cdot 20 \cdot \frac{20}{2} = e \cdot [80 \cdot 20 + 90 \cdot 20],$$

$$e = 33{,}5 \text{ mm},$$

$$J = \frac{2 \cdot 10^3}{3} + \frac{7 \cdot 2^3}{3} - (8 \cdot 2 +$$

$$+ 9 \cdot 2) \cdot 3{,}35^2 = 303{,}4 \text{ cm}^4;$$

alsdann berechnet sich die Spannung der äußersten gezogenen Faser zu

$$\sigma' = \frac{P}{F} + \frac{M_b}{W'} = \frac{700}{34} +$$

$$+ \frac{700 \cdot (3{,}35 + 9{,}3) \cdot 3{,}35}{303{,}4}$$

$$\sigma' = 118{,}4 \frac{kg}{cm^2}.$$

Die Spannung in der äußersten, auf Zug und Druck beanspruchten Faser:

$$\sigma'' = \frac{P}{F} - \frac{M_b}{W''} = \frac{700}{34} - \frac{700 \,.\, (3{,}35 + 9{,}3) \,.\, (10 - 3{,}35)}{303{,}4},$$

$$\sigma'' = 173{,}4 \frac{kg}{cm^2} \text{ Druckbeanspruchung.}$$

Man hat also hier keinen Querschnitt gleicher Festigkeit geschaffen mit $\sigma'' = 3\,\sigma'$. Die Ursache dieses Vorgehens ist in zwei Gründen zu suchen:

1. Man würde eine sehr große Breite oder Dicke des Flansches benötigen, wenn man einen theoretischen Querschnitt gleicher Festigkeit herstellen wollte; die Folgen wären unkontrollierbare Gußspannungen wegen der verschieden schnellen Abkühlung nach dem Gießen.

2. Man kann bei Transmissionswellen den Lagerdruck in seiner Größe und Richtung nicht als unveränderliche Größe ansehen; es ist also der Fall nicht ausgeschlossen, daß der Lagerdruck seine Richtung so ändert, daß eine wesentlich andere Spannungsverteilung eintritt.

Im Gegensatz zum exzentrischen Zuge, bei dem der Hebelarm p durch die Formänderung des Stabes verringert wird, erfolgt beim exzentrischen Druck eine Vergrößerung des Hebelarmes der Kraft. Der Hebelarm vergrößert sich um den Betrag der Durchbiegung. Nur bei sehr schlanken Stäben wird es notwendig sein, diese Tatsache zu berücksichtigen und den Unterschied aus den Gesetzen der elastischen Linie zu berechnen.

b) Normal- und Schubspannungen.

Der einachsige Spannungszustand.

Ist ein Stab *(Abb. 167)* durch Zugkräfte P belastet und hat er einen Querschnitt von F cm², so ist bekanntlich die Normalspannung in Richtung der Stabachse

$$\sigma_x = \frac{P}{F} \frac{kg}{cm^2}.$$

Die Dehnung des Stabes in Richtung $x = \varepsilon_x = \alpha \,.\, \sigma_x$,

die Querzusammenziehung in Richtung $y = \varepsilon_y = \frac{1}{m} \,.\, \varepsilon_x = \frac{1}{m} \,.\, \alpha \,.\, \sigma_x$.*

Betrachten wir einen Schnitt, der unter dem Winkel φ gegen die Längsachse des Stabes geneigt ist, so muß ein herausgeschnittenes Stabteilchen, welches mit der Hypotenusenfläche f an der schrägen Schnittfläche anliegt, unter dem Einfluß der als äußere Kräfte aufgefaßten Spannungen im Gleichgewicht sein. Die in dem Schnitt auftretenden Spannungen sind in die Normalspannung σ' und die Schubspannung τ' zerlegt gedacht. Es muß sein: Summe aller horizontalen Kräfte gleich Null.

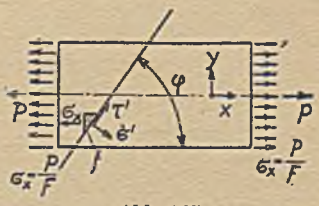


Abb. 167.

$$-\sigma_x \,.\, (f \,.\, \sin\varphi) + (\sigma' \,.\, \sin\varphi) \,.\, f + (\tau' \,.\, \cos\varphi) \,.\, f = 0.$$

* m ist das Längsdehnungsverhältnis.

Ferner muß sein: Summe aller vertikalen Kräfte gleich Null:

$$(\tau' \sin\varphi) \,.\, f - (\sigma' \,.\, \cos\varphi) \,.\, f = 0.$$

Multiplizieren wir die obere Gleichung mit $\sin\varphi$ und die zweite mit $\cos\varphi$, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \sigma_x \,.\, \sin^2\varphi &= \sigma' \,.\, \sin^2\varphi + \tau' \sin\varphi \,.\, \cos\varphi \\ 0 &= \sigma' \,.\, \cos^2\varphi - \tau' \sin\varphi \,.\, \cos\varphi \\ \hline \sigma_x \,.\, \sin^2\varphi &= \sigma' \,.\, (\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = \sigma' \end{aligned}$$

$$\sigma' = \sigma_x \,.\, \sin^2\varphi \, \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2};$$

aus der zweiten Gleichung ergibt sich

$$\sigma' \,.\, \cos\varphi = \tau' \,.\, \sin\varphi,$$

$$\sigma_x \,.\, \sin^2\varphi \,.\, \cos\varphi = \tau' \,.\, \sin\varphi,$$

$$\tau' = \sigma_x \,.\, \sin\varphi \,.\, \cos\varphi,$$

$$\tau' = \frac{\sigma_x}{2} \,.\, \sin 2\varphi \, \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}.$$

Denken wir uns den Winkel φ veränderlich, so finden wir
im Längsschnitt: $\varphi = 0^0$, $\sigma' = 0$, $\tau' = 0$;
im Querschnitt: $\varphi = 90^0$, $\sigma' = \sigma_x = \sigma_z$, $\tau' = 0$;

$$\varphi = 45^0, \; \tau' = \tau'_{max} = \frac{\sigma_z}{2}.$$

Die Tatsache, daß in einem Schnitte der unter 45^0 geneigt ist, die größte Schubspannung auftritt, erklärt die Erscheinung der Fließfiguren *(Abb. 168)*, die sich bei dem Zugversuch an einem Stabe mit polierter Oberfläche im Augenblick des Fließens beobachten lassen.

Abb. 168.

Dieselben Verhältnisse treten auch in dem Schrägschnitt von gedrückten Stäben ein, und es ist erklärlich, daß ein Probekörper aus Gußeisen, Zementmörtel und ähnlichen spröden Baustoffen bei der Druckbelastung gewöhnlich dadurch zerstört wird, daß unter 45^0 zur Stabachse eine Abscherung stattfindet.

Der dreiachsige Spannungszustand.

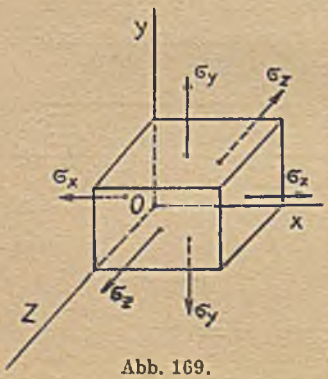


Abb. 169.

Wenn auf ein beliebiges Körperelement *(Abb. 169)* in den Richtungen aller drei Achsen Zugspannungen σ_x, σ_y und σ_z auftreten, so wollen wir die Gesamtwirkung wissen. Um diese zu finden, kümmern wir uns zunächst um die Einzelwirkungen. Jede einzelne Belastung ruft eine positive Längsdehnung hervor $\varepsilon = \alpha \,.\, \sigma$, die in der Richtung der Spannung wirkt; außerdem entstehen Querzusammenziehungen (Querkürzungen) $\varepsilon_q = -\frac{\varepsilon}{m}$ in den Richtungen, die zur Spannung

senkrecht stehen. m ist das Längsdehnungsverhältnis, ***die Poissonsche Zahl.*** Stellen wir uns z. B. vor, daß σ_x allein wirkt, dann wird die Längsdehnung in der Richtung

der x-Achse $\varepsilon_x = +\alpha \cdot \sigma_x$, und die Querkürzungen in der

y-Achse $\varepsilon_y = -\frac{\alpha \cdot \sigma_x}{m}$, und die Querkürzungen in der

z-Achse $\varepsilon_z = -\frac{\alpha \cdot \sigma_x}{m}$; wirken die Spannung σ_x, σ_y, σ_z gemeinsam, so entstehen in jeder Achsenrichtung Dehnungen e, die sich einfach aus der Summe der Einzelwirkungen der einzelnen Spannungen für die betreffende Achse ergeben.

Es bringt hervor die Zugspannung σ_x eine Längsdehnung

in Richtung der x-Achse $= +\alpha \cdot \sigma_x$,

es bringt hervor die Zugspannung σ_y eine Querkürzung

in Richtung der x-Achse $= -\frac{\alpha \cdot \sigma_y}{m}$,

es bringt hervor die Zugspannung σ_z eine Querkürzung

in Richtung der x-Achse $= -\frac{\alpha \cdot \sigma_z}{m}$,

Abb. 170 *a*.

folglich $e_x = \alpha \cdot \sigma_x - \alpha \frac{\sigma_y}{m} - \alpha \cdot \frac{\sigma_z}{m}$,

$$e_x = \alpha \cdot \left(\sigma_x - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{m}\right).$$

In derselben Weise erhält man die Dehnungen e_y und e_z. Die Spannung, welche, allein wirkend, diese Dehnungen hervorbringen würde, ergibt sich alsdann aus der Beziehung

$$e = \alpha \cdot \sigma_i,$$

$$\sigma_i = \frac{e}{\alpha};$$

wir nennen sie **ideelle Normalspannung.** Z. B. ist

$$\sigma_{x_i} = \sigma_x - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{m}.$$

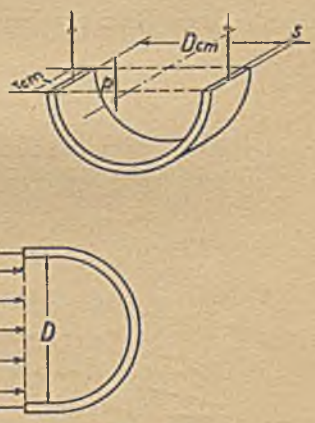


Abb. 170 *b*.

In derselben Weise erhält man die ideellen Normalspannungen σ_{y_i} und σ_{z_i}.

89. ***Beispiel:*** Ein Druckluftbehälter *(Abb. 170 a* und *b)* von $D_i = 540$ mm lichtem Φ ist für $p = 175$ atm Überdruck bestimmt; seine Wandstärke δ beträgt 37 mm. Das Material ist Siemens-Martin-Stahl. Welches ist die größte ideelle Normalspannung?

Lösung: Denken wir uns aus dem Behältermantel zwischen zwei Querschnitten und zwei Längsschnitten ein unendlich kleines Stück herausgetrennt, so ist eine mehrachsige Belastung vorhanden *(Abb. 171)* mit den Spannungen σ_x und σ_y. Es ist $\sigma_z = 0$.

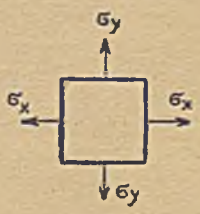


Abb. 171.

Die Spannung im Querschnitt $\sigma_x = \frac{D_i^2 \pi}{4} \cdot p \cdot \frac{1}{D_i \cdot \pi \cdot \delta} \quad \frac{kg}{cm^2} = \frac{D_i \cdot p}{4 \cdot \delta}$ $\frac{kg}{cm^2}$, $\sigma_x = \frac{54 \cdot 175}{4 \cdot 3{,}7} = 638 \frac{kg}{cm^2}$. Da die Spannung im Längsschnitt stets doppelt so groß als im Querschnitt ist, denn $p \cdot D_i \cdot 1 = \sigma_y \cdot 2 \cdot \delta \cdot 1$, so folgt $\sigma_y = 2 \cdot \sigma_x = 1276 \frac{kg}{cm^2}$.

Wir erhalten demnach in den verschiedenen Achsenrichtungen folgende ideellen Normalspannungen:

$$\sigma_{x_i} = \sigma_x - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{m} = 638 - \frac{1276 + 0}{10} \cdot 3 = \sim 255 \frac{kg}{cm^2},$$

$$\sigma_{y_i} = \sigma_y - \frac{\sigma_x + \sigma_z}{m} = 1276 - \frac{638 + 0}{10} \cdot 3 = \sim 1085 \frac{kg}{cm^2},$$

$$\sigma_{z_i} = \sigma_z - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{m} = 0 - \frac{638 + 1276}{10} \cdot 3 = - 574 \frac{kg}{cm^2}.$$

Wir erkennen daraus, daß die ungünstigste Beanspruchung auf Zug im Längsschnitt entsteht und diese ist zu vergleichen mit der zulässigen Spannung. Bei einer Spannung an der Streckgrenze $= 2000 \frac{kg}{cm^2}$ ist die errechnete ungünstigste Beanspruchung im Längsschnitt als zulässig anzusehen.

Der ebene Spannungszustand.

Aus einem beanspruchten Körper möge nach *Abb. 172 a* ein Körperelement herausgenommen werden, dessen Stirnflächen benachbarten Querschnitten und dessen wagerechte Endflächen benachbarten Längsschnitten angehören. Die Diagonalschnittfläche soll einem Schrägschnitt angehören, der zur x-Achse den $\sphericalangle \alpha$ bildet. *Abb. 172 b* zeigt die an der einen Hälfte eines sehr klein gedachten Rechteckkörpers angreifenden Spannungen, die an den Schnittflächen als äußere Kräfte wirken. Es muß das durch den schiefen Schnitt abgetrennte dreiseitige Prisma mit den Mantelflächen f_x, f_y und f im Gleichgewicht sein. Die Summe aller in Richtung der x-Achse wirkenden Kräfte muß $= 0$ sein:

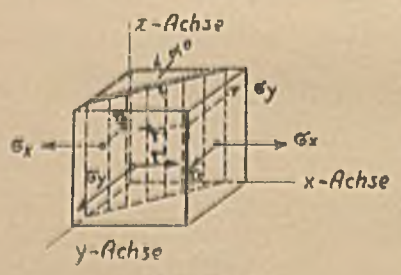


Abb. 172 a.

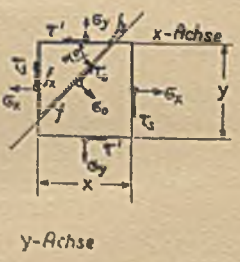


Abb. 172 b.

$$f_x \cdot \sigma_x + f_y \cdot \tau' = f \cdot \sigma_0 \cdot \sin \alpha + f \cdot \tau_0 \cdot \cos \alpha;$$

die Summe aller in Richtung der y-Achse wirkenden Kräfte muß $= 0$ sein:

$$f_y \cdot \sigma_y + f_x \cdot \tau_x = f \cdot \sigma_0 \cdot \cos \alpha - f \cdot \tau_0 \cdot \sin \alpha;$$

nun ist aber $\quad f_x = f \cdot \sin \alpha, \; f_y = f \cdot \cos \alpha, \; \tau' = \tau_0 = \tau.$

$$f \,.\, \sigma_0 \,.\, \sin\alpha + f \,.\, \tau_0 \,.\, \cos\alpha = f \,.\, \sigma_x \,.\, \sin\alpha + f \,.\, \tau \,.\, \cos\alpha,$$
$$f \,.\, \sigma_0 \,.\, \cos\alpha - f \,.\, \tau_0 \,.\, \sin\alpha = f \,.\, \sigma_y \,.\, \cos\alpha + f \,.\, \tau \,.\, \sin\alpha.$$

f hebt sich heraus:

$$\sigma_0 \,.\, \sin\alpha + \tau_0 \,.\, \cos\alpha = \sigma_x \,.\, \sin\alpha + \tau \,.\, \cos\alpha,$$
$$\sigma_0 \,.\, \cos\alpha - \tau_0 \,.\, \sin\alpha = \sigma_y \,.\, \cos\alpha + \tau \,.\, \sin\alpha,$$
$$\sigma_0 = \sigma_x \,.\, \sin^2\alpha + \sigma_y \,.\, \cos^2\alpha + 2\tau \,.\, \sin\alpha \,.\, \cos\alpha,$$
$$\tau_0 = \sigma_x \,.\, \sin\alpha \,.\, \cos\alpha - \sigma_y \,.\, \sin\alpha \,.\, \cos\alpha + \tau\,(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha).$$

Wir wollen den Fall dahin vereinfachen, daß wir die Normalspannung $\sigma_y = 0$ annehmen, dann können wir für σ_x einfach σ setzen, und es gehen die Gleichungen in die Form über:

$$\sigma_0 = \sigma \,.\, \sin^2\alpha + 2\tau \,.\, \sin\alpha\cos\alpha,$$
$$\tau_0 = \sigma \,.\, \sin\alpha \,.\, \cos\alpha + \tau \,.\, (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha).$$

Nun ist $\sin^2\alpha = \dfrac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ und $2 \,.\, \sin\alpha \,.\, \cos\alpha = \sin 2\alpha$,

$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$, also

$$\sigma_0 = \sigma \,.\, \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} + \tau \,.\, \sin 2\alpha$$

oder

$$\sigma_0 = \frac{\sigma}{2} - \frac{\sigma}{2}\cos 2\alpha + \tau \,.\, \sin 2\alpha,$$

$$\tau_0 = \frac{\sigma}{2} \,.\, \sin 2\alpha + \tau \,.\, \cos 2\alpha.$$

Wir haben nun die Frage zu beantworten, bei welchem Winkel α die Normalspannung σ_0 ihren Höchstwert bekommt.

Es wird σ_0 ein Maximum erreichen, wenn $\tau_0 = 0$ ist.

Dieses tritt ein, wenn

$$\frac{\sigma}{2} \,.\, \sin 2\alpha = -\tau \,.\, \cos 2\alpha \text{ ist,}$$

$$\frac{\sigma}{2} = -\tau \,.\, \operatorname{cotg} 2\alpha;\ \operatorname{cotg} 2\alpha = -\frac{\sigma}{2\tau};\ \operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2\tau}{\sigma},$$

daraus ergibt sich

$$2\alpha = \operatorname{arctg}\left(-\frac{2\tau}{\sigma}\right),$$

$$\alpha = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(-\frac{2\tau}{\sigma}\right).$$

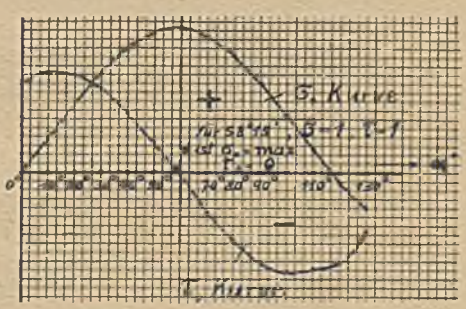


Abb. 173.

Setzt man beispielsweise $\sigma = 1$ und $\tau = 1$, so ergibt sich der in der graphischen Darstellung *Abb. 173* veranschaulichte Verlauf der Spannungen σ_0 und τ_0; man sieht, daß σ_0 ein Maximum erreicht, wenn $\tau_0 = 0$ ist. Das gilt nicht nur für diesen besonderen Fall, sondern allgemein.

Der Winkel α, der hierzu gehört, ist in unserem speziellen Falle:

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\left(-\frac{2\,.\,1}{1}\right) = 58^0\,15',\ \text{bezw.}\ 148^0\,15'.$$

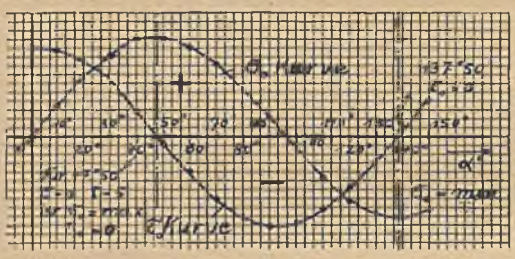


Abb. 174.

Setzt man $\sigma = 1$ und $\tau = 5$, so ergibt sich die graphische Darstellung *Abb. 174*; man sieht, daß σ_0 ein Maximum wird, wenn $\tau_0 = 0$ ist. Der zugehörige Winkel $\alpha =$

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\left(-\frac{2\,.\,5}{1}\right) = 47^0\,50'$$

bezw. $137^0\,50'$.

Es gibt demnach zwei aufeinander senkrecht stehende Schnittflächen, für welche $\tau_0 = 0$ wird. Man nennt $\sigma_{0\,max}$ die Hauptspannung. Wendet man die bekannten trigonometrischen Beziehungen an

$$\sin 2\,\alpha = \frac{\mathrm{tg}\,2\,\alpha}{\sqrt{1 + (\mathrm{tg}\,2\,\alpha)^2}}\quad \text{bezw.}$$

$$\cos 2\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + (\mathrm{tg}\,2\,\alpha)^2}},\ \text{so ergibt sich:}$$

$$\sin 2\,\alpha = \frac{-2\,\tau}{\pm\,\sigma\sqrt{1 + \frac{4\,\tau^2}{\sigma^2}}},\quad \cos 2\,\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1 + \frac{4\,\tau^2}{\sigma^2}}}$$

$$\sin 2\,\alpha = \pm\,\frac{2\,\tau}{\sqrt{\sigma^2 + 4\,\tau^2}},\ \cos 2\,\alpha = \mp\,\frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + 4\,\tau^2}}.$$

Setzen wir diese Werte in die Gleichung für σ_0 ein, so bekommen wir die größte Normalspannung:

$$\sigma_0\,\frac{\max}{\min} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\sigma^2 + 4\,\tau^2}\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{cm}^2}.$$

Nehmen wir aus dem ganzen Stab an einer beliebigen Stelle ein Körperelement heraus, dessen Kanten 1 und 2 mit jenen Schnittrichtungen zusammenfallen (*Abb. 175*), in welchen die Normalspannungen am größten resp. am kleinsten sind, so erhalten wir einen dreiachsigen Spannungszustand mit $\sigma_1 = \sigma_{0\,max}$, $\sigma_2 = \sigma_{0\,min}$, $\sigma_3 = 0$; folglich können wir sowohl in der einen wie in der anderen Richtung der Hauptspannungen eine ideelle Normalspannung aufstellen, und wir erhalten:

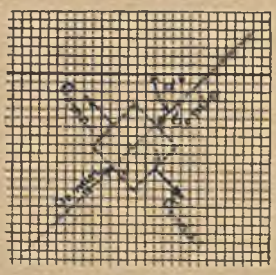


Abb. 175.

$$\sigma_{1i} = \sigma_{0\,max} - \frac{\sigma_0\,\min}{m},$$

$$\sigma_{2i} = \sigma_{0\,min} - \frac{\sigma_0\,\max}{m},$$

$$\sigma_{1_1} = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} - \frac{\frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}{m},$$

$$\sigma_{1_1} = \sigma \cdot \frac{m-1}{2m} + \frac{m+1}{2m} \cdot \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2},$$

$$\sigma_{2_1} = \sigma \cdot \frac{m-1}{2m} - \frac{m+1}{2m} \cdot \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

Beide Ausdrücke können vereinigt werden zu einem allgemeinen Ausdruck für die ***ideelle Normalspannung:***

$$\sigma_i = \frac{m-1}{2m} \cdot \sigma \pm \frac{m+1}{2m} \cdot \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \; \frac{kg}{cm^2}.$$

Diese ideelle Normalspannung haben wir aufzufassen als eine gedachte Hauptspannung (Ersatzspannung), welche in der Richtung einer der beiden Hauptspannungen allein wirkend, dieselbe Formänderung erzeugen würde wie die beiden wirklich vorhandenen gemeinsam wirkenden Hauptspannungen.

Für m (Poissonsche Zahl) $= \frac{10}{3}$ eingesetzt, ergibt:

$$\sigma_i = 0{,}35 \cdot \sigma \pm 0{,}65 \cdot \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \; \frac{kg}{cm^2}.$$

Selbstverständlich kann diese Formel nur dann in dieser ursprünglichen Gestalt zur praktischen Rechnung herangezogen werden, wenn das Verhalten des Materials äußeren Beanspruchungen gegenüber in bezug auf alle Schnittrichtungen ein gleiches ist, und wenn die Beanspruchung auf Normal- und Schubfestigkeit nach einem gleichartigen Belastungsfall erfolgt; zeigt der Baustoff hingegen ein abweichendes Verhalten, so führt man einen Faktor α_0, die sogenannte ***Anstrengungsziffer,*** in die Gleichung ein, um Theorie und Erfahrung in Einklang zu bringen.

$$\alpha_0 = \frac{k_n}{\frac{m+1}{m} \cdot k_s} = \frac{k_n}{1{,}3 \cdot k_s};$$

hierin bedeutet k_n die zulässige Normalspannung und k_s die zulässige Schubspannung des Baustoffes.

$$\sigma_i = 0{,}35\,\sigma \pm 0{,}65\sqrt{\sigma^2 + 4(\alpha_0 \cdot \tau)^2} \; \frac{kg}{cm^2}.$$

Für die Zulässigkeit einer zu untersuchenden Ausführung ist alsdann Bedingung:

$$\sigma_{i_{max}} \leqq k_n.$$

Biegung und Drehung.

Ist eine Welle gleichzeitig auf Biegung und auf Verdrehen beansprucht und sind die am Umfang des kreisrunden Querschnittes auftretenden Spannungen σ_b und τ_d bekannt, so ist die größte ideelle Normalspannung:

$$\sigma_i = 0{,}35 \,.\, \sigma_b + 0{,}65 \sqrt{\sigma_b{}^2 + 4 \,.\, \alpha_0{}^2 \,.\, \tau_d{}^2}$$

$$\text{Es ist } \sigma_b = \frac{M_b}{W} \text{ und } \tau_d = \frac{M_d}{2\,W}.$$

Die ideelle Normalspannung können wir selbstverständlich als eine Biegungsspannung auffassen, welche durch ein ideelles Biegungsmoment M_i hervorgerufen wird, also $\sigma_i = \frac{M_i}{W}$.

$$\frac{M_i}{W} = 0{,}35 \,.\, \frac{M_b}{W} + 0{,}65 \,.\, \sqrt{\left(\frac{M_b}{W}\right)^2 + 4 \,.\, \alpha_0{}^2 \,.\, \left(\frac{M_d}{2\,W}\right)^2}$$

$$M_i = 0{,}35 \,.\, M_b + 0{,}65 \,.\, \sqrt{M_b{}^2 + \alpha_0{}^2 \,.\, M_d{}^2} \text{ cmkg,}$$

die Anstrengungsziffer

$$\alpha_0 = \frac{k_b}{1{,}3 \,.\, k_d}.$$

90. ***Beispiel:*** Es soll der notwendige Wellendurchmesser des 51. Beispiels berechnet werden:

Lösung: $k_b = 300 \frac{kg}{cm^2}$, $k_d = 400 \frac{kg}{cm^2}$ (Fall II),

$$\alpha_0 = \frac{k_b}{1{,}3 \,.\, k_d} = \frac{300}{1{,}3 \,.\, 400} = 0{,}58.$$

$$M_d = 71\,620 \,.\, \frac{N}{n} = 71\,620 \,.\, \frac{10}{160} = 4480 \text{ cmkg,}$$

$$M_b = M_{max} = 7440 \text{ cmkg,}$$

$$M_i = 0{,}35 \,.\, 7440 + 0{,}65 \,.\, \sqrt{7440^2 + 0{,}58^2 \,.\, 4480^2} = 8735 \text{ cmkg,}$$

$$M_i = 0{,}1 \,.\, d^3 \,.\, k_b,$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{8735}{0{,}1 \,.\, 300}} = 6{,}63 \text{ cm;}$$

das gewählte d = 70 mm (Din 114) kann bestehen bleiben.

91. ***Beispiel:*** Es soll der notwendige Wellen-Φ des 53. Beispiels berechnet werden.

Lösung: $k_b = 400 \frac{kg}{cm^2}$, $k_d = 500 \frac{kg}{cm^2}$ (Fall II),

$$\alpha_0 = \frac{400}{1{,}3 \,.\, 500} = 0{,}615,$$

$$M_d = 71\,620 \,.\, \frac{40}{240} = 11\,937 \text{ cmkg,}$$

$$M_b = M_{max} = 49\,856 \text{ cmkg,}$$

$$M_i = 0{,}35 \,.\, 49\,856 + 0{,}65 \,.\, \sqrt{49\,856^2 + 0{,}615^2 \,.\, 11\,937^2} = 50\,300 \text{ cmkg,}$$

$$50\,300 = 0{,}1 \,.\, d^3 \,.\, 400,$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{50\,300}{0{,}1 \,.\, 400}} = 10{,}6 \text{ cm.}$$

Der gewählte Φ d = 110 mm (Din 114) kann beibehalten werden.

Berechnung einer gekröpften Welle.

Es sollen die Hauptdimensionen der gekröpften Welle *Abb. 176 a* und *b* ermittelt werden. Als Belastungen kommen in Frage das Schwungradgewicht G und die Kolbenkraft P. Für den Fall, daß die Kolbenkraft P nach unten gerichtet ist, ergeben sich die Auflagerdrücke A und B wie folgt:

$$A = \frac{G \cdot e_6 + P \cdot e_3}{l}; \qquad B = \frac{P \cdot e_2 + G \cdot (-e_1)}{l}.$$

Abb. 176 *a*.

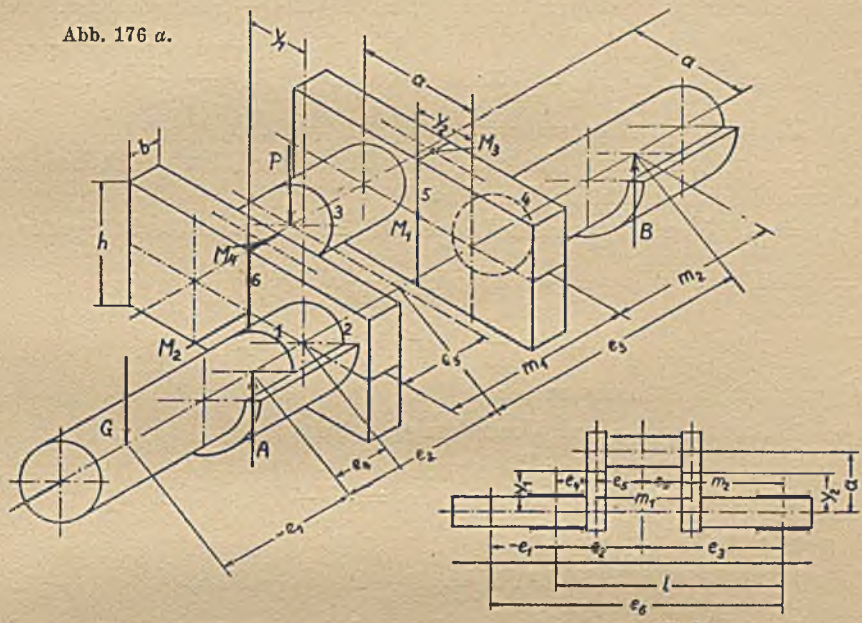


Abb. 176 *b*.

Für den Fall, daß die Kolbenkraft P nach oben gerichtet ist, ergeben sich die Auflagerdrücke A und B wie folgt:

$$A = \frac{G \cdot e_6 - P \cdot e_3}{l}; \qquad B = \frac{-P \cdot e_2 + G \cdot (-e_1)}{l}.$$

Wenn die Maschine ihre ganze Leistung durch das Schwungrad abgibt, so werden die eingezeichneten Querschnitte 1 bis 5 wie folgt beansprucht:

Querschnitt 1 auf Biegung und Verdrehung; es ist

$$M_b = G \cdot e_1, \qquad M_d = P \cdot a,$$

$$0{,}1 \cdot d_1^3 \cdot k_b = 0{,}35 \cdot G \cdot e_1 + 0{,}65 \cdot \sqrt{(G \cdot e_1)^2 + (\alpha_0 \cdot P \cdot a)^2}$$

Querschnitt 2 auf Biegung und Verdrehung; es ist

$$M_b = G \cdot (e_1 + e_4) - A \cdot e_4, \qquad M_d = P \cdot a.$$

Querschnitt 3 auf Biegung und Verdrehung; es ist

$$M_b = B \cdot e_3, \quad M_d = B \cdot a,$$

Querschnitt 4 ist auf Biegung beansprucht:

$$M_b = B \cdot \left(m_2 - \frac{b}{2}\right).$$

Querschnitt 5 ist beansprucht:

1. Auf Biegung und Verdrehung in bezug auf den Punkt M_3 in der Mitte der kurzen Rechteckseite. Da in einem rechteckigen Querschnitt in der Mitte der kurzen Seite eine Drehungsbeanspruchung auftreten muß, die kleiner ist als die zulässige Beanspruchung des betreffenden Materials auf Verdrehung, wenn in der Mitte der langen Rechteckseite die auftretende Verdrehungsbeanspruchung den zulässigen Wert nicht überschreiten soll, so müssen wir in der Formel für M_i diese Tatsache berücksichtigen. Wir wollen dies dadurch tun, daß wir den Wert $\alpha_0 . M_d$ mit $\frac{3}{2}$ multiplizieren.

$$M_i = \frac{1}{6} . b . h^2 . k_b = 0{,}35\, M_b + 0{,}65 . \sqrt{(M_b)^2 + \left(\frac{3}{2} . \alpha_0 . M_d\right)^2},$$

$M_b = B . y_2$, Höchstwert $= B . a$, $M_d = B . m_2$.

2. Auf Verdrehung für den Punkt M_1 in der Mitte der hohen Rechteckseite. Nehmen wir ein Verhältnis
$h : b = \sim 1{,}5$ an, so ist nach Dreyer $W_d = \xi . b^3$ und die Hilfsgröße $\xi = 0{,}346$, also $W_d = 0{,}346 . b^3$ oder $\sim \frac{2}{9} h . b^2$,

$$M_d = \frac{2}{9} h . b^2 . k_d = B . m_2.$$

Querschnitt 6 ist beansprucht:

1. Auf Biegung und Verdrehung im Punkte M_4,
$M_b = B . y_1 + P . (a - y_1)$, Höchstwert $P . a$,
$M_d = B . (e_5 + e_3) - P . e_5 = (B - P) . e_5 + B . e_3$.
2. Auf Verdrehung für den Punkt M_2,
$$\frac{2}{9} . h . b^2 . k_d = (B - P) . e_5 + B . e_3.$$

Für welche Kurbelstellungen die Höchstbelastungen der einzelnen Querschnitte auftreten, ermittelt man am einfachsten an Hand einer graphischen Darstellung.

92. ***Beispiel:*** Es ist eine durch ein Schwungrad und Riemenzüge mit $G = 1950$ kg (der Einfachheit wegen vertikal nach unten angenommen) belastete gekröpfte Welle von 190 mm Kurbelhalbmesser für einen Kurbeldruck $P = \pm 4800$ kg zu berechnen. Die Lagerung soll nach *Abb. 177*

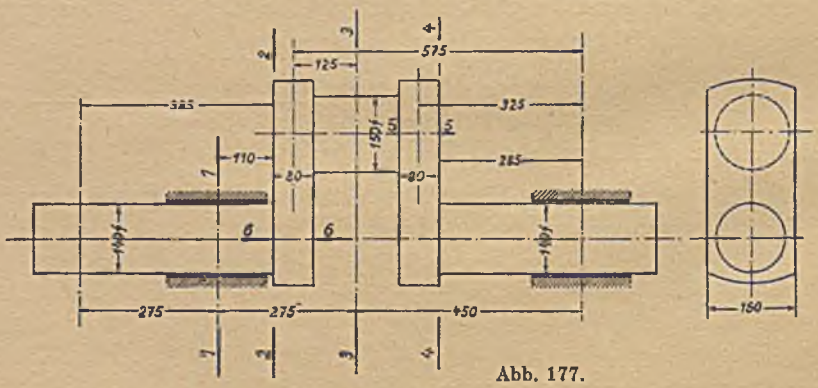


Abb. 177.

erfolgen. Zwischen dem rechten Lager und dem Kurbelarm bleibt ein Raum für die Exzenter frei. $k_{b_i} = 500 \frac{kg}{cm^2}$, n = 125 Umdrehungen in der Minute.

Lösung: Der Kolbendruck ist nach unten gerichtet:

$$A = \frac{1950 \,.\, 100 + 4800 \,.\, 45}{72{,}5} = 5670 \text{ kg},$$

$$B = \frac{4800 \,.\, 27{,}5 + 1950 \,.\, (-27{,}5)}{72{,}5} = 1080 \text{ kg},$$

$$5670 + 1080 = 1950 + 4800.$$

Der Kolbendruck ist nach oben gerichtet:

$$A' = \frac{1950 \,.\, 100 - 4800 \,.\, 45}{72{,}5} = -290 \text{ kg (nach unten gerichtet)},$$

$$B' = \frac{-4800 \,.\, 27.5 + 1950\,(-27{,}5)}{72{,}5} = -2560 \text{ kg (nach unten gerichtet)},$$

$$-290 - 2560 = 1950 - 4800.$$

Querschnitt 1: $M_b = G \,.\, e_1 = 1950 \,.\, 27{,}5 = 53\,650$ cmkg,

$M_d = P \,.\, a = 4800 \,.\, 19 = 91\,250$ cmkg, α_0 angenommen $= 1$; $k_d = 385 \frac{kg}{cm^2}$,

$$W_{erf} \,.\, k_{b_i} = 0{,}35 \,.\, 53\,650 + 0{,}65 \,.\, \sqrt{53\,650^2 + 91\,250^2} = 87\,750 \text{ cmkg},$$

$$W_{erf} = \frac{87\,750}{500} = 177{,}5 \text{ cm}^3.$$

Querschnitt 2: $M_b = G \,.\, (e_1 + e_4) - A' \,.\, e_4 = 1950 \,.\, 38{,}5 +$

$+ 290 \,.\, 11 = 78\,270$ cmkg, $M_d = 91\,250$ cmkg,

$$W_{erf} \,.\, k_{b_i} = 0{,}35 \,.\, 78\,270 + 0{,}65 \,.\, \sqrt{78\,270^2 + 91\,250^2} = 105\,700 \text{ cmkg},$$

$$W_{erf} = \frac{105\,700}{500} = 211{,}4 \text{ cm}^3.$$

Querschnitt 3:

$M_b = B' \,.\, e_3 = 2560 \,.\, 45 = 115\,200$ cmkg,

$M_d = B' \,.\, a = 2560 \,.\, 19 = 48\,700$ cmkg,

$$W_{erf} \,.\, k_{b_i} = 0{,}35 \,.\, 115\,200 + 0{,}65 \,.\, \sqrt{115\,200^2 + 48\,700^2} = 121\,650 \text{ cmkg},$$

$$W_{erf} = \frac{121\,650}{500} = 243{,}3 \text{ cm}^3.$$

Querschnitt 4:

$$M_b = B' \,.\, \left(m_2 - \frac{b}{2}\right),$$

$$M_b = 2560 \,.\, 28{,}5 = 72\,900 \text{ cmkg},$$

$$W_{erf} = \frac{72\,900}{500} = 145{,}8 \text{ cm}^3.$$

Querschnitt 5: 1. Punkt M_3.

$M_b \max = B' \,.\, a = 2560 \cdot 19 = 48\,700$ cmkg,

$M_d = B' \,.\, m_2 = 2560 \,.\, 32{,}5 = 83\,200$ cmkg,

$$W_{erf} \cdot k_{b_1} = 0{,}35 \cdot 48\,700 + 0{,}65 \cdot \sqrt{48\,700^2 + \left(\frac{3}{2} \cdot 83\,200\right)^2} =$$
$$= 101\,320 \text{ cmkg},$$
$$W_{erf} = \frac{101\,320}{500} = 202{,}64 \text{ cm}^3.$$

2. Punkt M_1.

$$M_d = B' \cdot m_2 = 83\,200 \text{ cmkg}, \; k_d = 385 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2},$$
$$W_{d_{erf}} = \frac{M_d}{k_d} = \frac{83\,200}{385} = 216 \text{ cm}^3.$$

Querschnitt 6: 1. Punkt M_4.

$$M_b = P \cdot a = 4800 \cdot 19 = 91\,250 \text{ cmkg},$$
$$M_d = (B - P) \cdot e_5 + B \cdot e_3 = (2560 - 4800) \cdot 12{,}5 + 2560 \cdot 45 =$$
$$= 87\,100 \text{ cmkg},$$
$$W_{erf} \cdot k_{b_1} = 0{,}35 \cdot 91\,250 + 0{,}65 \cdot \sqrt{91\,250^2 + \left(\frac{3}{2} \cdot 87\,100\right)^2} =$$
$$= 135\,730 \text{ cmkg},$$
$$W_{erf} = \frac{135\,730}{500} = 271{,}46 \text{ cm}^3.$$

2. Punkt M_2.

$$M_d = 87\,100 \text{ cmkg}; \; W_{d_{erf}} = \frac{87\,100}{385} = 223 \text{ cm}^3.$$
$$W_{erf_{max}} = 243{,}3 \text{ cm}^3,$$
$$0{,}1 \cdot d^3 = 243{,}3$$
$$d = \sqrt[3]{2433} = 13{,}45 \text{ cm}.$$

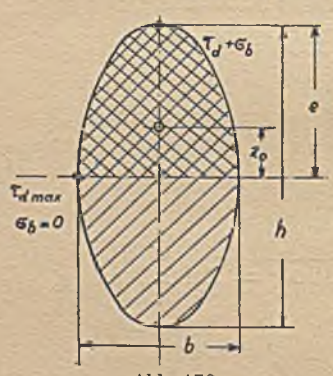


Abb. 178.

Der beabsichtigte Φ von 150 mm bezw. 140 mm kann also beibehalten werden.

$$W_{d\,erf_{max}} = 223 \text{ cm}^3,$$
$$W_{d_{vorh}} = \frac{2}{9} \cdot h \cdot b^2 = \frac{2}{9} \cdot 16 \cdot 8^2 = 227{,}5 \text{ cm}^3,$$

die gewählten Maße können beibehalten werden.

93. ***Beispiel:*** Es soll untersucht werden, ob die im 80. Beispiel errechnete Verdrehungsbeanspruchung $\tau_{d\,max} = 193{,}3 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ zulässig ist *(Abb. 160* und *178).*

Lösung: Nach den Untersuchungen von C. Weber ist

$$\tau_d = \frac{\tau_{d\,max}}{n}; \quad n = \frac{h}{b} = \frac{5}{2} = 2{,}5; \quad \tau_d = \frac{193{,}3}{2{,}5} = 77{,}32 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}.$$
$$M_b = \sim 37{,}7 \cdot 18 = 679 \text{ cmkg}.$$
$$M_b = W \cdot \sigma_b; \quad W = 0{,}1 \cdot b \cdot h^2 = 0{,}1 \cdot 2 \cdot 5^2 = 5 \text{ cm}^3.$$
$$\sigma_b = \frac{M_b}{W} = \frac{679}{5} = \sim 136 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}.$$

Wir ermitteln jetzt die zulässige Beanspruchung des elliptischen Querschnittes auf Biegung:

$$k_b = \mu \,.\, k_z \,.\, \sqrt{\frac{e}{z_0}} \; \frac{kg}{cm^2}.$$

$$z_0 = \frac{4}{3} \cdot \frac{h}{2\,\pi} = \frac{4\,.\,5}{6\,.\,\pi} = 1{,}062 \text{ cm}, \quad e = \frac{h}{2} = \frac{5}{2} = 2{,}5 \text{ cm},$$

bei vorhandener Gußhaut $\mu = 1{,}1$; wir nehmen den Belastungsfall II an,

$$k_z = 200 \, \frac{kg}{cm^2};$$

$$k_b = 1{,}1 \,.\, 200 \sqrt{\frac{2{,}5}{1{,}062}} = 338 \, \frac{kg}{cm^2} = \sim 1{,}7 \,.\, k_z.$$

Für elliptischen Querschnitt und bearbeitetes Gußeisen ist $k_d = k_z$ bis $1{,}25\, k_z$; da der Einfluß der Gußhaut hier geringer ist als bei der Biegungsspannung, so können wir hier bei reichlicher Sicherheit annehmen $k_d = k_z$, dann wird

$$\alpha_0 = \frac{k_b}{1{,}3 \,.\, k_d} = \frac{1{,}7 \,.\, k_z}{1{,}3 \,.\, k_z} = \sim 1{,}3.$$

$$\sigma_i = 0{,}35 \,.\, \sigma_b + 0{,}65 \,.\, \sqrt{\sigma_b^2 + 4 \,.\, \alpha_0^2 \,.\, \tau_d^2}$$

$$\sigma_i = 0{,}35 \,.\, 136 + 0{,}65 \,.\, \sqrt{136^2 + 4 \,.\, 1{,}3^2 \,.\, 77{,}32^2},$$

$$\sigma_i = 205{,}4 \, \frac{kg}{cm^2}.$$

Die Bedingung $\sigma_i \leqq k_b$ ist erfüllt, außerdem die Bedingung $\tau_{d_{max}} \leqq k_d$, denn

$$205{,}4 < 338 \, \frac{kg}{cm^2},$$

$$193{,}3 < 200 \, \frac{kg}{cm^2}.$$

X. Schwingungszustände (mechanische Resonanz und Interferenz) als Ursache von Betriebsmängeln.

An den laufenden Maschinen gibt es mitunter Mängel am Arbeitsgut, Maschinenschäden, Erschütterungen, Geräusche u. dgl., die von Schwingungszuständen herrühren, wobei diese Erscheinungen manchmal ohne erdenkliche Ursache plötzlich auftreten und ebenso wieder verschwinden, obgleich eine Änderung an der betreffenden Maschine nicht vorgekommen ist.

Die Schwingungen eines Körpers können durch andere, mit dem Körper in Verbindung stehende biegsame oder federnde Teile eine Verstärkung *(Resonanz)* oder eine Abschwächung erfahren, oder es können die Schwingungen zweier Teile (zweier Maschinen) durch Übertragungsmittel (Gestellwände, Träger, Stützen, Stangen, Wellen- und Riementriebe, Fußboden usw.) sich gegenseitig periodisch erhöhen oder erniedrigen *(Interferenz)*. Im

allgemeinen sind unregelmäßige Schwingungen besonders nachteilig auf die Leistung und den Gang (Abnützung) der Maschinen.

Insbesondere sind es hin- und hergehende Maschinengetriebe oder wuchtende Drehkörper, welche die Maschine in Schwingungen versetzen. Wenn die aus mehreren Schwingungskörpern resultierenden Maschinenschwingungen ungleichförmig schwanken, so können leicht Fehler im Arbeitsgut auftreten.

Die am häufigsten vorkommende gegenseitige Beeinflussung von Schwingungen zweier Körper ist in der *Abb. 178 a** ersichtlich. Wenn die zwei bei-

Abb. 178 *a*.

nahe gleichen Schwingungen a und b fast zusammenfallen, dann summieren sie sich zu einer doppelt so starken Schwingung c (am Anfang und am Ende der Abbildung). Weil aber die Schwingungen a und b ein wenig verschieden lang sind, so fallen sie immer mehr auseinander, bis sie entgegengesetzt wirken und dadurch sich gegenseitig fast aufheben (in der Mitte der Abbildung). Handelt es sich um zwei gleichartig arbeitende Maschinen, die nebeneinander stehen, und deren Schwingungen a bezw. b durch einen elastischen (unterhöhlten) Fußboden oder durch den Riemenantrieb über die Welle sich gegenseitig beeinflussen, so erhalten die Maschinen ungleichmäßige Schwingungszustände (Kurve c), zeitweise sehr stark übernormal (wenn die Schwingungen zusammentreffen), zeitweise abgeschwächt (wenn die Schwingungen auseinanderfallen), wodurch mancherlei Fehler bei der Verarbeitung empfindlichen Arbeitsgutes entstehen können.

Hauptschuldig an den unegalen Schwingungszuständen sind zu schwache oder ausgelaufene Maschinenteile, zu dünne oder zu wenig gestützte Wellen, wuchtende Scheiben und Räder, zu schwache Walzen, Zapfen, Führungsstangen, Fußböden, zu leichte Triebwerke u. dgl. m.

* E. Ullrich, Melliand Textilberichte, Januar 1927.

XI. Aufgabensammlung.

1. *Aufgabe:* Es sind die Schrauben zur Befestigung des Kurbelgegengewichtes $G = 750$ kg *(Abb. 179)* einer Verbrennungskraftmaschine mit $n = 135$ Umdrehungen in der Minute zu berechnen. Der Schwerpunkt des Gegengewichtes ist 480 mm von der Drehachse entfernt. Die zulässige Beanspruchung der beiden Schrauben auf Zug wird mit $k_z = 400 \frac{kg}{cm^2}$ angenommen.

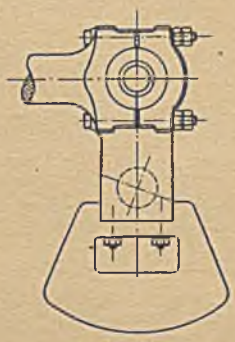


Abb. 179.

Lösung: Die maximale Beanspruchung der Schrauben tritt dann ein, wenn sich Eigengewicht G und Zentrifugalkraft C addieren, d. h. wenn der Kurbelarm senkrecht und das Gegengewicht unten steht.

$$C = 0{,}10194 \,.\, \frac{G \,.\, v^2}{R},$$

$$v = \frac{2\,R \,.\, \pi \,.\, n}{60} = \frac{2 \,.\, 0{,}48 \,.\, \pi \,.\, 135}{60} = 6{,}78 \frac{m}{sec},$$

$$C = 0{,}10194 \,.\, \frac{750 \,.\, 6{,}78^2}{0{,}48} = 7320 \text{ kg}.$$

Auf eine Schraube kommen $\frac{G + C}{2} = \frac{750 + 7320}{2} = 4035$ kg.

Der erforderliche Kernquerschnitt $\frac{4035}{400} = 10{,}1 \text{ cm}^2$.

Der nächstliegende Wert der Whitworthschen Gewindetabelle (Din 12) ist $11{,}31 \text{ cm}^2$ entsprechend $1^3/_4''$.

Die wirklich vorhandene maximale Zugspannung

$$\sigma_z = \frac{4035}{11{,}31} = 357 \frac{kg}{cm^2}.$$

2. *Aufgabe:* Ein Hebel, der ein Moment $P \,.\, a = 1680$ cmkg übertragen soll, ist auf eine Welle mit $d = 70$ mm ⌀ festzuklemmen. Die Schraube soll mit $k_z = 300 \frac{kg}{cm^2}$ beansprucht sein. Der Reibungskoeffizient zwischen Nabe und Welle wird angenommen mit $\mu = 0{,}15$. Welcher Schraubendurchmesser ist erforderlich *(Abb. 180)*?

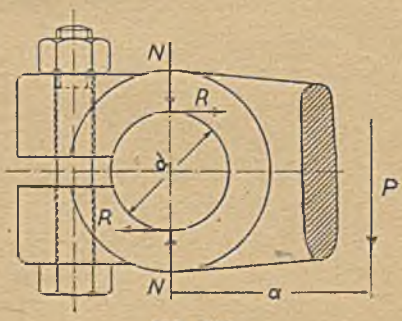


Abb. 180.

Lösung: Die Schraubenkraft P_0 ergibt zwei Anpressungskräfte N und zwei Reibungswiderstände R. Es ist

$$P \,.\, a = R \,.\, d = N \,.\, \mu \,.\, d,$$

$$N = \frac{P \,.\, a}{\mu \,.\, d} = \frac{1680}{0{,}15 \,.\, 7} = 1600 \text{ kg}.$$

Nimmt man den Abstand von Mitte Welle bis Mitte Schraube mit 55 mm an und vernachlässigt man den für das Zusammenbiegen der Hebelnabe notwendigen Kraftaufwand, so muß sein:

$$P_0 \,.\, (5{,}5 + 3{,}5) = N \,.\, 3{,}5,$$

$$P_0 = \frac{1600 \,.\, 3{,}5}{9} = 622 \text{ kg}.$$

Notwendiger Schraubenquerschnitt $f = \frac{P_0}{k_z} = \frac{622}{300} = 2{,}073 \text{ cm}^2$; nach Din 12 ist eine $^7/_8$'') Schraube zu wählen.

3. *Aufgabe:* Die Reißlänge eines Rohseidenfadens ist 33 km, die Bruchbelastung desselben ist $4500 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$. Wie groß ist das spezifische Gewicht γ der Seide?

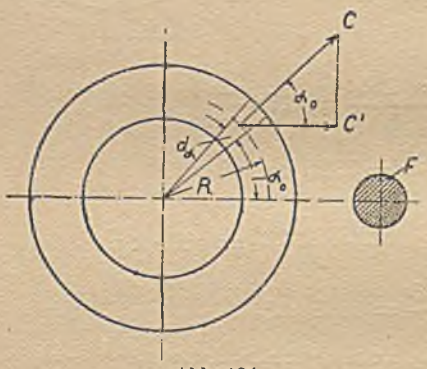


Abb. 181.

Lösung:

$$L_r = 1000 \,.\, \frac{K_z}{\gamma}, \qquad \gamma = 1000 \, \frac{K_z}{L_r},$$

$$\gamma = 1000 \,.\, \frac{4500}{3\,300\,000} = 1{,}363 \, \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}.$$

4. *Aufgabe:* Ein schmiedeeiserner Ring (St 37) von kreisrundem Querschnitt F m² *(Abb. 181)* und vom mittleren Halbmesser $\mathfrak{R}$ m, dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω. Welche Spannung σ_z wird im Ringe hervorgerufen?

Lösung: Bekanntlich ist die Zentrifugalkraft C eines unendlich schmalen Ringstückes $C = M \,.\, \omega^2 \,.\, \mathfrak{R}$; hierin ist M die Masse dieses Ringstückes,

$$\omega = \frac{2\,\pi \,.\, n}{60},$$

$$C = \frac{G}{9{,}81} \,.\, \frac{4 \,.\, \pi^2 \,.\, n^2}{3600} \,.\, \mathfrak{R} = 0{,}001118 \,.\, G \,.\, \mathfrak{R} \,.\, n^2; G = F \,.\, \mathfrak{R} \,.\, d\alpha \,.\, 1000 \,.\, \gamma$$

$$C = 1{,}118 \,.\, F \,.\, \mathfrak{R}^2 \,.\, n^2 \,.\, \gamma \,.\, d\alpha.$$

Die markierten zwei Querschnitte werden durch die horizontalen Seitenkräfte C' dieser Zentrifugalkräfte C auf Zug beansprucht.

$$C' = 1{,}118 \,.\, F \,.\, \mathfrak{R}^2 \,.\, n^2 \,.\, \gamma \,.\, \cos\alpha \, d\alpha,$$

$$2 \,.\, F \,.\, 10\,000 \,.\, \sigma_z = 2 \,.\, \int_{0^\circ}^{90^\circ} 1{,}118 \,.\, F \,.\, \mathfrak{R}^2 \,.\, n^2 \,.\, \gamma \,.\, \cos\alpha \, d\alpha,$$

$$\sigma_z = 0{,}0001118 \,.\, \mathfrak{R}^2 \,.\, n^2 \,.\, \gamma,$$

$$v = \frac{2\,\mathfrak{R} \,.\, \pi \,.\, n}{60},$$

$$n = \frac{30 \,.\, v}{\mathfrak{R} \,.\, \pi},$$

$$n^2 = \frac{900 \,.\, v^2}{\mathfrak{R}^2 \,.\, \pi^2},$$

$$\sigma_z = 0{,}0001118 \,.\, \frac{900 \,.\, v^2}{\pi^2} \,.\, \gamma,$$

$\sigma_z = 0{,}0102 \,.\, v^2 \,.\, \gamma \frac{kg}{cm^2}$; hierin bedeutet v die Geschwindigkeit der Ringschwerachse in $\frac{m}{sec}$ und γ das spezifische Gewicht in $\frac{kg}{dm^3}$.

Es ergibt sich z. B. für $v = 20 \frac{m}{sec}$ und $\gamma = 7{,}8 \frac{kg}{dm^3}$,

$$\sigma_z = 0{,}0102 \,.\, 20^2 \,.\, 7{,}8 = 31{,}82 \frac{kg}{cm^2}.$$

Die Spannung ist unabhängig von der Größe des Querschnittes.

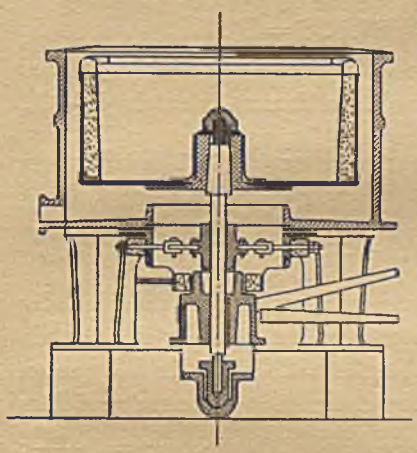


Abb. 182.

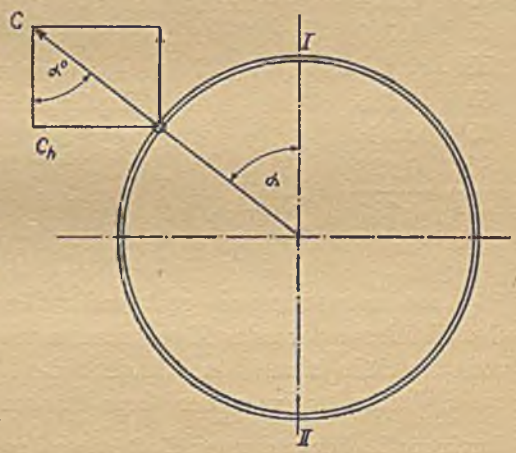


Abb. 183.

5. ***Aufgabe:*** Im folgenden soll die Berechnung des Kupfermantels einer Wäscheschleuder *(Abb. 182* und *183)* durchgeführt werden. Es gelten folgende Werte: Trommeldurchmesser = 600 mm, minutliche Umdrehungszahl der Trommel 1275, Trommelhöhe 315 mm, Schwächung des Trommelquerschnittes durch die Löcher wird geschätzt mit 13%.

Lösung: Bezeichnet C die Zentrifugalkraft, G das Gewicht der rotierenden Masse, v die Umfangsgeschwindigkeit des Schleudertrommelmantels, und $\mathfrak{R}$ den Halbmesser desselben, so ist:

$$v = \frac{2\,\mathfrak{R} \,.\, \pi \,.\, n}{60} \frac{m}{sec}, \qquad C = 0{,}10194 \,.\, \frac{G \,.\, v^2}{\mathfrak{R}} \text{ kg}.$$

Nun ist aber diese Zentrifugalkraft C immer radial gerichtet. Nur die horizontal verlaufenden Seitenkräfte C_h' derselben suchen die Querschnitte I und II zu zerreißen, so daß die Festigkeitsgleichung bestehen muß

$$\Sigma C_h \leqq F \,.\, k_z,$$

worin F die wirksamen Querschnitte I und II der Schleudertrommel bedeuten und k_z die zulässige Beanspruchung des Trommelmaterials auf Zug.

In unserem Falle ist $v = \frac{0{,}6 \,.\, \pi \,.\, 1275}{60} = 40 \frac{m}{sec}$.

Um ΣC_h zu finden, teilen wir beispielsweise den Viertelkreis in neun Teile ein zu je 10 Grad. In der folgenden Gleichung, welche als Unbekannte die Wandstärke s des Trommelmantels enthält, bezieht sich die Zentrifugalkraft C auf ein solches durch einen Winkel von 10° begrenztes Trommelstück:

α^0	$\sin \alpha$
5°	0,087
15°	0,259
25°	0,423
35°	0,574
45°	0,707
55°	0,819
65°	0,906
75°	0,966
85°	0,996
	$5{,}737 = \sum_{0^0}^{90^0} \sin \alpha$

$$2 \,.\, \sum_{0^0}^{90^0} 0{,}10194 \,.\, \frac{v^2}{\mathfrak{R}} \,.\, \frac{G}{36} \sin \alpha = 2 \,.\, F \,.\, k_z,$$

$$\frac{2 \,.\, 0{,}10194 \,.\, v^2 \,.\, G}{2 \,.\, 36 \,.\, k_z \,.\, 0{,}3} \,.\, \sum_{0^0}^{90^0} \sin \alpha = F,$$

$$\frac{2 \,.\, 0{,}10194 \,.\, 40^2 \,.\, 5{,}737}{2 \,.\, 36 \,.\, 0{,}3} \,.\, G = F \,.\, k_z.$$

$$86{,}7 \,.\, G = F \,.\, k_z.$$

Nehmen wir die Zerreißfestigkeit des Kupfermaterials des Trommelmantels (C — C_u, Din 1708 Bl. 1) mit 2100 $\frac{kg}{cm^2}$ an, und den Sicherheitsgrad mit 4,5, so wird

$$k_z = \frac{2100}{4{,}5} = 467 \frac{kg}{cm^2}.$$

Man kann nun mit genügender Genauigkeit annehmen, daß sich das Gewicht der rotierenden Masse zusammensetzt aus dem Gewicht des Mantels von der Höhe h und dem Gewicht der Wäsche = 20 kg. Wir bekommen unter Vernachlässigung der Gewichtsverminderung des Trommelgewichtes durch die Löcher und unter Einführung des spezifischen Gewichtes $\gamma = 9 \frac{kg}{dm^3}$:

$$2 \,\mathfrak{R} \,.\, \pi \,.\, s \,.\, h \,.\, \gamma + 20 = \frac{467}{86{,}7} \,.\, F,$$

und da s beiderseitig in cm vorkommen muß:

$$\frac{2 \,\mathfrak{R} \,.\, \pi \,.\, s \,.\, h \,.\, \gamma}{10} + 20 = 5{,}4 \,.\, F,$$

$$F = \left[31{,}5 - 31{,}5 \,.\, \frac{13}{100}\right] \,.\, s = 27{,}4 \,.\, s,$$

$$\frac{2 \,.\, 3 \,.\, \pi \,.\, 3{,}15 \,.\, 9}{10} \,.\, s + 20 = 5{,}4 \,.\, 27{,}4 \,.\, s,$$

$$53{,}4 \,.\, s + 20 = 148 \,.\, s,$$

$$s = 0{,}211 \text{ cm}.$$

Man wird eine Wandstärke von 3 mm wählen.

Die Umfangsgeschwindigkeit v ist gegeben durch die auf dem Fabrikschilde vermerkte minutliche Umdrehungszahl. Eine Überschreitung derselben ist besonders gefährlich, weil die Beanspruchung der Trommelwand nach dem Quadrat der Drehzahl steigt. Kommt z. B. eine für 700 Touren bestimmte Zentrifuge auf 1000 Touren, so ist die Beanspruchung schon rund doppelt so groß als zulässig.

6. *Aufgabe:* Für ein Stehlager *(Abb. 184* und *185)* sollen die Deckelschrauben berechnet werden.

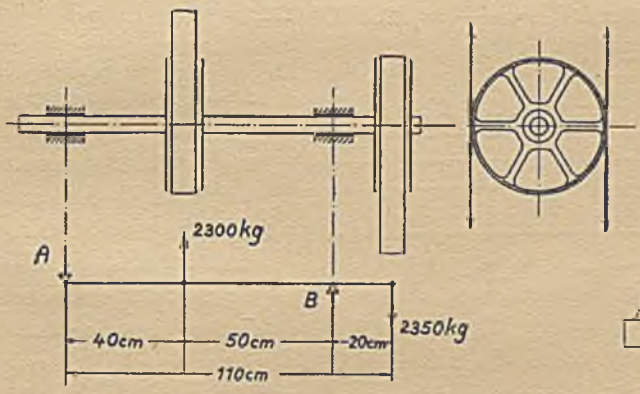


Abb. 184.

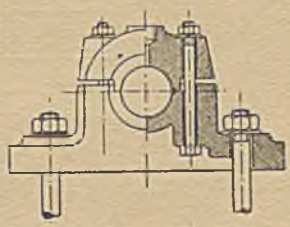


Abb. 185.

Lösung: Die durch die Riemenzüge und die Scheibengewichte hervorgerufenen Auflagerdrücke A und B müssen zunächst berechnet werden.

$$-A \,.\, 90 + 2300 \,.\, 50 - 2350 \,.\, (-20) = 0; \quad A = 1800 \text{ kg}.$$

$$-B \,.\, 90 + 2350 \,.\, 110 - 2300 \,.\, 40 = 0; \quad B = 1850 \text{ kg}.$$

Die Lagerstützkraft A muß von oben nach unten wirken, der Druck auf das Lager ist nach oben gerichtet, was für allgemein verwendbare Lager stets angenommen werden muß. Mit Rücksicht auf vorkommende Stöße nehmen wir die Kraft, welche die zwei Deckelschrauben beansprucht, mit P = 2000 kg an. Die zulässige Zugbeanspruchung der Deckelschrauben wählt man vorsichtig zu $k_z = 400 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$. Bezeichnet man den Schraubenkerndurchmesser mit d_1, so muß sein:

$$2 \,.\, \frac{d_1^2 \,.\, \pi}{4} \,.\, k_z = P; \qquad \frac{d_1^2 \pi}{4} = \frac{P}{2 \,.\, k_z}.$$

$$\frac{d_1^2 \pi}{4} = \frac{2000}{2 \,.\, 400} = 2{,}5 \text{ cm}^2, \qquad d_1 = 1{,}786 \text{ cm};$$

gewählt Whitworth-Gewinde Din 12,

2 Schrauben 7/8") mit einem

Kerndurchmesser $d_1 = 18{,}611$ mm.

7. *Aufgabe:* Ein Stab aus Flußstahl von 2 cm ⌀ und 20 cm Länge hat bei einer Belastung von 4050 kg eine Verlängerung von 0,114 mm

gezeigt. Zu berechnen ist die der Belastung entsprechende Spannung und Dehnung, sowie die Dehnungszahl und das Elastizitätsmaß dieses Baustoffes.

Lösung: Die Spannung $\sigma = \frac{P}{F} = \frac{4050}{\frac{2^2 \cdot \pi}{4}} = 1290 \frac{kg}{cm^2}$,

die Dehnung $\varepsilon = \frac{\lambda}{l} = \frac{0{,}0114}{20} = 0{,}00057$,

die Dehnungszahl $\alpha = \frac{\varepsilon}{\sigma} = \frac{0{,}00057}{1290} = \frac{1}{2260000} \frac{cm^2}{kg}$,

das Elastizitätsmaß $E = \frac{1}{\alpha} = 2260000 \frac{kg}{cm^2}$.

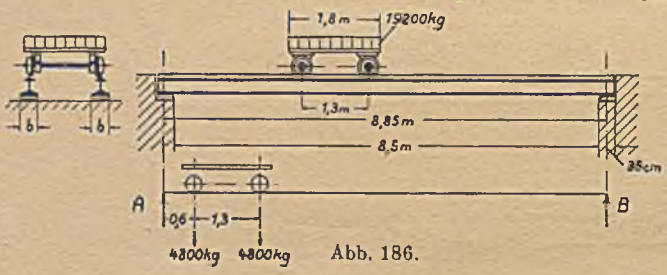


Abb. 186.

8. *Aufgabe:* Zwei Eisenträger tragen eine fahrbare Last von 19 200 kg, sodaß auf jeden Träger eine Belastung von 9600 kg entfällt. Es ist die Breite b der erforderlichen Unterlagplatte auszurechnen *(Abb. 186)*, wenn die zulässige Druckspannung für Ziegelmauerwerk mit $k = 7 \frac{kg}{cm^2}$ angenommen wird.

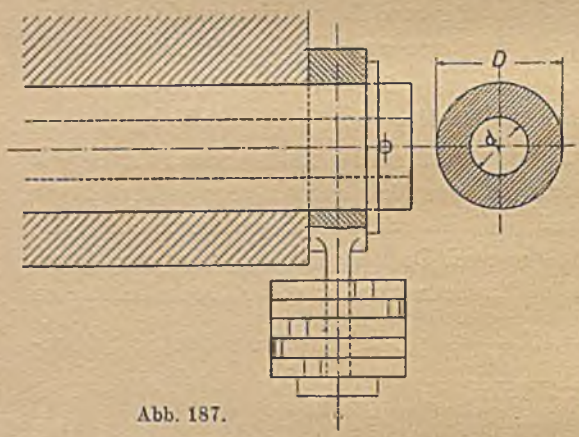


Abb. 187.

Lösung: Der größte Auflagerdruck, der möglich ist und der sowohl bei A als auch B auftreten kann, berechnet sich aus der Momentengleichung:

$$-A \cdot 885 - 4800 \cdot 825 - 4800 \cdot 695 = 0, \quad A = 8244 \text{ kg}.$$

$$F_{erford} = \frac{A}{k} = \frac{8244}{7} = 1178 \text{ cm}^2,$$

$$b = \frac{F_{erf}}{35} = \frac{1178}{35} = 33{,}7 \text{ cm}, \quad b = \sim 35 \text{ cm}.$$

Es wird alsdann die wirklich vorhandene Druckspannung im Ziegelmauerwerk $\sigma = \frac{8244}{35^2} = 6{,}73 \frac{kg}{cm^2}$, wenn man das Eigengewicht des Trägers unberücksichtigt läßt.

9. *Aufgabe:* Ein gußeisernes Rohrstück $\left(\frac{d}{D} = 0{,}46\right)$, das durch eine Last von 7000 kg auf Abscherung beansprucht wird *(Abb. 187)*, ist zu berechnen für ein $k_s = 200 \frac{kg}{cm^2}$.

Lösung:

$$F = \frac{\pi}{4} \cdot (D^2 - d^2) = \frac{\pi}{4}\left(D^2 - (0{,}46 \cdot D)^2\right) = \frac{\pi}{4} \cdot D^2 (1 - 0{,}46^2),$$

$$F = 0{,}619 \cdot D^2, \quad F \cdot k_s = P = 0{,}619 \cdot D^2 \cdot k_s,$$

$$D = \sqrt{\frac{P}{0{,}619 \cdot k_s}} = 1{,}273 \cdot \sqrt{\frac{P}{k_s}} = 1{,}273 \cdot \sqrt{\frac{7000}{200}} = 7{,}53 \text{ cm};$$

$$d = 0{,}46 \cdot 7{,}53 = 3{,}46 \text{ cm},$$

ausgeführt D = 75 mm, d = 34 mm, Wandstärke 20,5 mm.

10. *Aufgabe:* Welche günstigste Zahnform ergibt sich für die Kupplung *(Abb. 188* und *189)?*

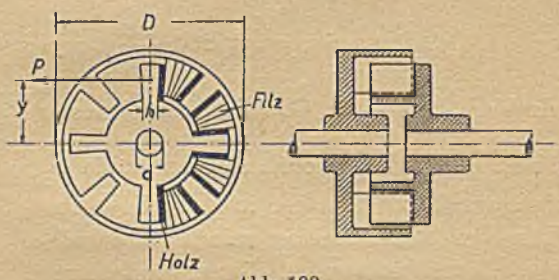


Abb. 188.

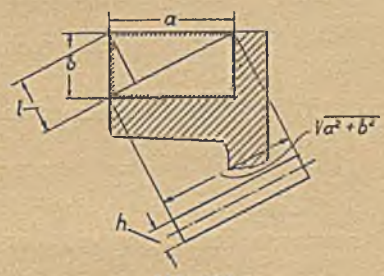


Abb. 189.

Lösung: $P = \frac{Md}{y}$. Der Druck auf einen Zahn ist $P_1 = \frac{P}{z}$, wenn z die Anzahl der Zähne bedeutet, die gleichzeitig tragen. Man nimmt an, daß der Zahn in der Diagonale bricht, und daß P_1 an der Zahnecke angreift, dann ist

$$\sigma_b = \frac{M_b}{W} = \frac{6 \cdot P_1 \cdot l}{h^2 \cdot \sqrt{a^2 + b^2}} \leqq k_b.$$

Wir drücken l durch a und b aus, und erhalten

$$\frac{l \cdot \sqrt{a^2 + b^2}}{2} = \frac{a \cdot b}{2}, \quad l = \frac{a \cdot b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Im Grenzfall muß sein $\frac{6 \cdot P_1 \cdot a \cdot b}{h^2 \cdot (a^2 + b^2)} = k_b$. Es muß a . b so groß sein, daß die Zwischenlage noch zulässig beansprucht wird:

$$\frac{P_1}{k} = a \cdot b, \quad \text{folglich}$$

$$\frac{6 \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot k}{h^2 \cdot (a^2 + b^2)} = k_b.$$ Es soll das Verhältnis des geränderten Querschnittes *(Abb. 189)* zu dem Ausdruck für die Spannung k_b ein Minimum werden.

$$\frac{a \cdot b \cdot h^2 \cdot (a^2 + b^2)}{6 \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot k} \quad \text{ein Minimum!}$$

Angenommen $h = \frac{b}{2}$, $a = n \cdot b$; dies eingesetzt

ergibt
$$\frac{n \cdot b^2 \cdot \frac{b^2}{4} \cdot (n^2 \cdot b^2 + b^2)}{6 \cdot n^2 \cdot b^2 \cdot b^2 \cdot k},$$ d. h. es muß

$$\frac{n^2+1}{n}$$ ein Minimum werden.

n	$\frac{n^2+1}{n}$
0	∞
0,2	5,2
0,4	2,9
0,6	2,3
0,8	2,1
1,0	2,0
1,2	2,03

Laut Tabelle liegt das Minimum bei

$n = 1$, das heißt $a = b$.*

11. *Aufgabe:* Ein Zahnrad *(Abb. 190)* von 1200 mm Teilkreisdurchmesser hat eine Umfangskraft von 190 kg zu übertragen. Es sind sechs gußeiserne Arme von elliptischem Querschnitt vorhanden. Die zulässige Zugbeanspruchung des Gußeisens wird mit 200 $\frac{kg}{cm^2}$ angenommen und das Verhältnis $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$, Nabendurchmesser $= 160$ mm; welche Armdimensionen sind zu wählen?

Lösung: Die Arme können annähernd als fest in der Nabe eingespannte Freiträger von der Länge x (Radhalbmesser minus Nabenhalbmesser) betrachtet werden, die am Ende durch die Umfangskraft P belastet sind. Wegen der geringen Nachgiebigkeit der gegossenen Arme sowie mit Rücksicht auf etwa vorhandene Gußspannungen, d. s. Spannungen, die beim Erkalten des gegossenen Körpers hineingekommen sind, nimmt man an, daß nur $^1/_3$ der Arme tragend sind. Aus der Tabelle ergibt sich das Widerstandsmoment des elliptischen Querschnittes in bezug auf die Hauptachse, die mit der kleinen Achse der Ellipse zusammenfällt, zu

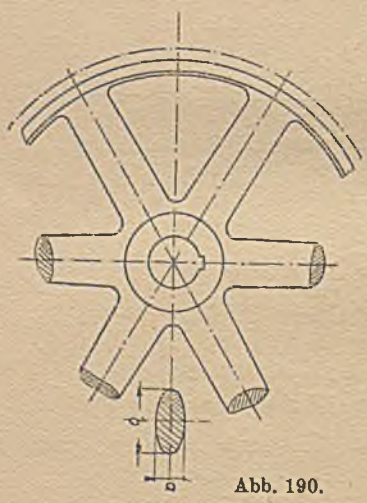


Abb. 190.

$$W = 0{,}1 \cdot a \cdot b^2; \quad \frac{6}{3} = 2 \text{ Arme tragend},$$

$$\frac{M}{2} = W \cdot k_b,$$

$$\frac{P \cdot x}{2} = 0{,}1 \cdot a \cdot b^2 \cdot k_b = 0{,}1 \cdot \frac{b^3}{2} \cdot k_b, \quad b = \sqrt[3]{\frac{10 \cdot P \cdot x}{k_b}}.$$

Für Rohguß und elliptischen Querschnitt kann man annehmen

$$k_b = 1{,}7\, k_z = 1{,}7 \cdot 200 = 340 \frac{kg}{cm^2}.$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{10 \cdot 190 \cdot 52}{340}} = 6{,}65 \text{ cm}, \quad a = 3{,}32 \text{ cm},$$

gewählt $b = 70$ mm, $a = 35$ mm.

* Siehe Polysius-Kupplung, A. Pohlhausen, Maschinenelemente, 10. Aufl., S. 53, Figur 2.

Man vertritt vielfach die Ansicht, daß die Armbeanspruchung in Abhängigkeit von der Tourenzahl des Rades gewählt werden soll, so, daß schnellaufende Räder ein niedriger beanspruchtes Armsystem besitzen. Man macht dies aus dem Grunde, weil schnellaufende Räder viel mehr zum Erzittern neigen als langsamlaufende. Schnellaufende Räder verlangen steifere Arme.

12. ***Aufgabe:*** Ein Eichenholzbalken ist gemäß *Abb. 191* belastet. Die zulässige Biegungsbeanspruchung wird angenommen mit $k_b = 90 \frac{kg}{cm^2}$.

Welches Gewicht P darf höchstens angehängt werden?

Lösung: Aus der Abbildung geht hervor, daß es zwei Lösungen gibt, je nachdem ob die Kraft P als P′ unter Vermittlung einer festen Rolle am Träger angreift, oder als P″ unmittelbar.

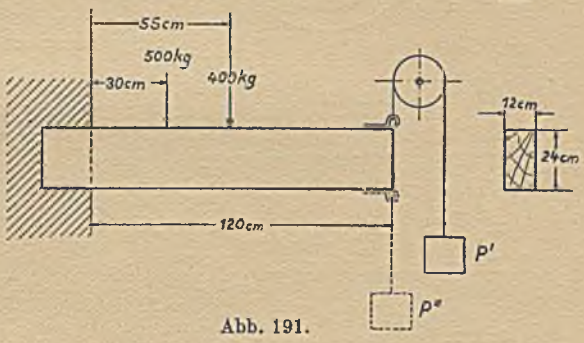


Abb. 191.

$$M_b = W \cdot k_b, \quad W = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{12 \cdot 24^2}{6} = 1152 \text{ cm}^3,$$

$$M_b = 1152 \cdot 90 = 103\,680 \text{ cmkg}.$$

Es muß die Beziehung bestehen:

$$-500 \cdot 30 - 400 \cdot 55 - P'' \; 120 = -103\,680,$$

$$P'' = 555{,}7 \text{ kg}.$$

$$-500 \cdot 30 - 400 \cdot 55 + P' \cdot 120 = +103\,680 \text{ cmkg}.$$

$$P' = 1172 \text{ kg}.$$

Diese letzte Belastung kann nur dann gestattet werden, wenn die Kräfte 500 kg und 400 kg dauernd zur Wirkung kommen; würden diese Kräfte verringert oder weggenommen, so wäre der Balken unzulässig hoch beansprucht.

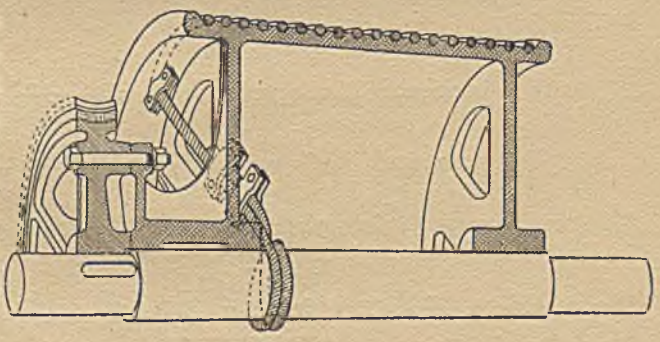


Abb. 192.

Man hat jetzt noch zu untersuchen, ob die Beanspruchung des Balkens im Angriffspunkt der Kräfte nicht etwa zu hoch wird.

$$\left.\begin{array}{ll} +1172 \cdot 90 - 400 \cdot 25 = & +95\,480 \text{ cmkg} \\ +1172 \cdot 65 \qquad\qquad = & +76\,180 \;\; ,, \end{array}\right\} < 103\,680 \text{ cmkg}.$$

13. ***Aufgabe:*** Berechnung der Trommelwelle einer Räderwinde *(Abb. 192)*. Die Welle wird durch den wandernden Seilzug nur auf Biegung

beansprucht, weil die Verdrehung von der Trommel direkt auf das Zahnrad übertragen wird. Der Zahndruck, der 600 kg betrage, wirke in der Horizontalrichtung *(Abb. 192* und *193)*. Die Tatsache, daß der Zahndruck des Schraubenrades schräg gerichtet ist, bleibe in der Rechnung unberücksichtigt.

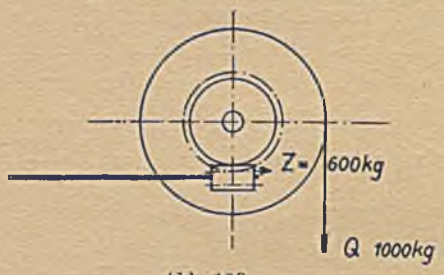


Abb. 193.

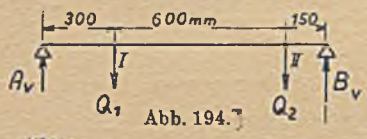


Abb. 194.

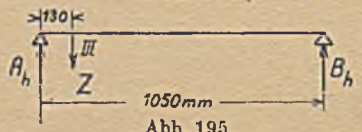


Abb. 195.

Lösung: Der Einfachheit halber wird angenommen, daß sich in den Endstellungen die volle Last Q_1 und Q_2 auf die Trommelnaben absetzt *(Abb. 194* und *195)*.

a) Seil in linker Endstellung.

Es ist $Q_1 = 1000$ kg, $Q_2 = 0$.

Vertikaler Auflagerdruck

$$A_v = \frac{1000 \,.\, 750}{1050} = 714 \text{ kg},$$

Vertikaler Auflagerdruck $B_v = \frac{1000 \,.\, 300}{1050} = 286$ kg.

b) Seil in rechter Endstellung.

$Q_1 = 0$, $Q_2 = 1000$ kg.

Vertikaler Auflagerdruck $A_v = \frac{1000 \,.\, 150}{1050} = 143$ kg,

Vertikaler Auflagerdruck $B_v = \frac{1000 \,.\, 900}{1050} = 857$ kg.

Es beträgt

der horizontale Auflagerdruck $A_h = \frac{600 \,.\, 920}{1050} = 526$ kg,

der horizontale Auflagerdruck $B_h = \frac{600 \,.\, 130}{1050} = 74$ kg.

Der resultierende Auflagerdruck in B bei Laststellung links:

$$\sqrt{286^2 + 74^2} = 296 \text{ kg}.$$

Der resultierende Auflagerdruck in B bei Laststellung rechts:

$$\sqrt{857^2 + 74^2} = 860 \text{ kg}.$$

Der resultierende Auflagerdruck in A bei Laststellung links:

$$\sqrt{714^2 + 526^2} = 887 \text{ kg}.$$

Der resultierende Auflagerdruck in A bei Laststellung rechts:

$$\sqrt{143^2 + 526^2} = 545 \text{ kg}.$$

Das größte Biegungsmoment, welches in II auftreten kann, wird:

$$860 \,.\, 15 = 12\,900 \text{ cmkg}.$$

Das größte Biegungsmoment, welches in III auftreten kann, wird:

$$887 \,.\, 13 = 11\,531 \text{ cmkg.}$$

Auf den Schnitt I wirken ein das vertikale Biegungsmoment

$$714 \,.\, 30 = 21\,420 \text{ cmkg}$$

und das horizontale Biegungsmoment

$$526 \,.\, 30 - 600 \,.\, 17 = 5580 \text{ cmkg,}$$

folglich ist das resultierende Biegungsmoment:

$$\sqrt{21420^2 + 5580^2} = 22\,150 \text{ cmkg;}$$

dieses ist das größte vorkommende resultierende Moment.

Mit $k_b = 600 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ wird $d = \sqrt[3]{\frac{22150 \,.\, 10}{600}} = 7{,}17$ cm.

Gewählt nach Din 537 d = 80 mm.

14. ***Aufgabe:*** Welches Normalprofil muß ein I-Träger bekommen, der gemäß *Abb. 196* belastet werden soll. Die zulässige Biegungsbeanspruchung wird angenommen mit $750 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$.

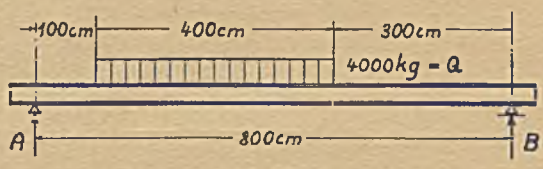


Abb. 196.

Lösung: Zuerst muß die Größe der Auflagerreaktionen A und B ermittelt werden.

$$A \,.\, 800 - 4000 \,.\, 500 = 0; \quad A = \frac{4000 \,.\, 500}{800} = 2500 \text{ kg,}$$

$$4000 \,.\, 300 - B \,.\, 800 = 0; \quad B = \frac{4000 \,.\, 300}{800} = 1500 \text{ kg.}$$

Nunmehr wird das Querkraftdiagramm *(Abb. 197)* aufgezeichnet. Das Maß x ergibt sich aus der Ähnlichkeit der Dreiecke.

$$Q : 400 = A : x,$$

$$x = 400 \frac{A}{Q},$$

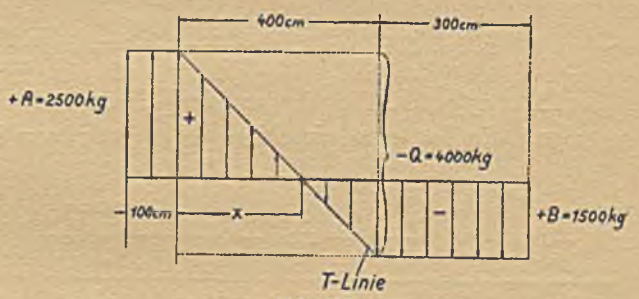


Abb. 197.

$$x = 400 \frac{2500}{4000} = 250 \text{ cm.}$$

$$M_{max} = 2500 \,.\, 100 + \frac{2500 \,.\, 250}{2} = 562\,500 \text{ cmkg,}$$

oder $$M_{max} = 1500 \,.\, 300 + \frac{1500 \,.\, 150}{2} = 562\,500 \text{ cmkg.}$$

$$M_b = W \,.\, k_b, \quad W = \frac{M_b}{k_b} = \frac{562\,500}{750} = 750 \text{ cm}^3.$$

Gewählt wird ein I-Träger NP Nr. 32 mit einem Eigengewicht von $61{,}07\ \frac{kg}{m}$, einem $W_x = 782\ cm^3$.

Wie groß ist die tatsächlich vorhandene maximale Biegungsspannung? *(Abb. 198.)*

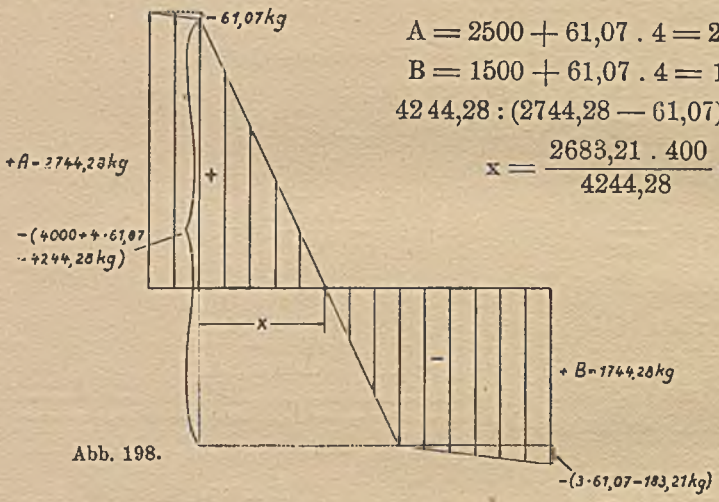


Abb. 198.

$$A = 2500 + 61{,}07 \,.\, 4 = 2744{,}28\ kg,$$
$$B = 1500 + 61{,}07 \,.\, 4 = 1744{,}28\ kg.$$
$$4244{,}28 : (2744{,}28 - 61{,}07) = 400 : x,$$
$$x = \frac{2683{,}21 \,.\, 400}{4244{,}28} = 252{,}9\ cm,$$

$$M_{max} = \frac{2744{,}28 + 2683{,}21}{2} \,.\, 100 + 2683{,}21 \,.\, \frac{252{,}9}{2} = 610\,666{,}4\ cmkg,$$

$$M_{max} = \frac{1744{,}28 + 1561{,}07}{2} \,.\, 300 + 1561{,}07 \,.\, \frac{147{,}1}{2} = 610\,619{,}2\ cmkg.$$

$$M_b = W \,.\, k_b,$$

$$W_x = \frac{610\,666{,}4}{750} = 814{,}2\ cm^3;$$

$$\sigma_b \text{ bei NP Nr. } 32 = \frac{610\,666{,}4}{782} = 781\ \frac{kg}{cm^2} > 750\ \frac{kg}{cm^2}.*$$

15. ***Aufgabe.*** Ein Träger aus I-Eisen soll gemäß *Abb. 199* belastet werden. Er hat eine einseitige Vorkragung von 80 cm. Welches Profil ist auszuführen, wenn $k_b = 900\ \frac{kg}{cm^2}$ vorgeschrieben ist.

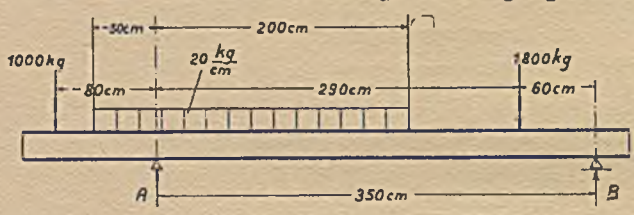


Abb. 199.

Lösung: Zuerst bestimmen wir die Lagerdrücke

$$1800 \,.\, 290 + 20 \,.\, 200 \,.\, 100 + 1000 \,.\, (-80) + 20 \,.\, 50 \,.\, (-25) - B \,.\, 350 = 0,$$
$$B = 2334{,}3\ kg.$$
$$A \,.\, 350 - 1000 \,.\, 430 - 20 \,.\, 250 \,.\, 275 - 1800 \,.\, 60 = 0,$$
$$A = 5465{,}7\ kg.$$

* Eventuell muß das nächst höhere Profil gewählt werden.

Aus der zugehörigen Querkraftfläche *Abb. 200* folgt, daß ein gefährlicher Querschnitt bei I liegt und ein zweiter bei II.

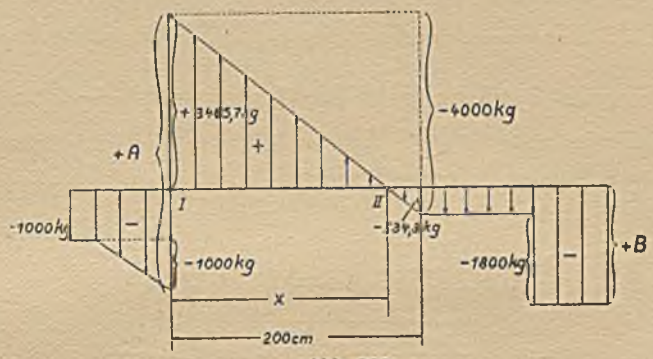


Abb. 200.

Der Abstand x berechnet sich aus der Proportion

$$(200 - x) : x = 534{,}3 : 3465{,}7$$

$$x = 173{,}3 \text{ cm.}$$

Der Inhalt der Querkraftfläche links von I, d. i. das in I auftretende Biegungsmoment

$$M_I = -1000 \,.\, 30 - \frac{1000 + 2000}{2} \,.\, 50 = -105\,000 \text{ cmkg,}$$

der Inhalt der Summe der Querkraftflächen links vom Punkte II

$$-105\,000 + 3465{,}7 \,.\, \frac{173{,}3}{2} = +195\,303 \text{ cmkg, oder}$$

$$M_{max} = +2334{,}3 \,.\, 176{,}7 - 1800 \,.\, 116{,}7 - 20 \,.\, 26{,}7 \,.\, 13{,}35 =$$
$$= +195\,281{,}9 \text{ cmkg.}$$

Das erforderliche Widerstandsmoment

$$W_x = \frac{M_{max}}{k_b} = \frac{195\,281{,}9}{900} = 216{,}98 \text{ cm}^3,$$

gewählt I N P Nr. 21 mit einem $W_x = 244 \text{ cm}^3$.

16. ***Aufgabe:*** Eine Scheibe *(Abb. 201)* besitzt am Umfange Spindeln *(Abb. 202)*, auf welche nasse Garnspulen aufgesteckt werden. Durch schnelle Drehung der Scheibenachse soll das Wasser aus den Spulen entfernt werden. Eine solche nasse Spule wiegt 80 Gramm. Die zulässige Beanspruchung des Spindelstahles auf Biegung wird angenommen mit $800 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$. Bei welcher minutlichen Umdrehungszahl bekommt die Spindel die zulässige Beanspruchung?

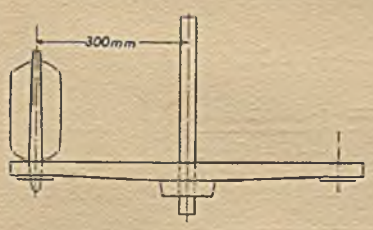


Abb. 201.

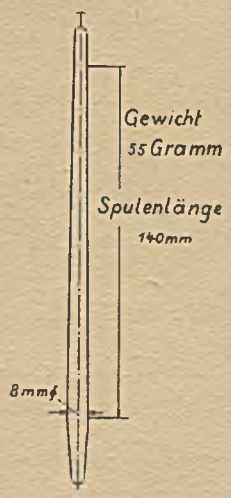


Abb. 202.

Lösung: Als Belastungsfall kommt in Frage der Freiträger mit gleichförmig verteilter Last. Als biegende Kraft tritt die Zentrifugalkraft C auf.

$C = 0{,}10194 \cdot \frac{G \cdot v^2}{R}$; hierin bedeutet G das Gewicht der bewegten Masse in kg, v die Geschwindigkeit der Bewegung in $\frac{m}{sec}$, und R den Bahnhalbmesser in m.

$$C = 0{,}10194 \cdot \frac{(0{,}080 + 0{,}055) \cdot v^2}{0{,}3} = 0{,}04587 \cdot v^2 \text{ kg},$$

$$M_b = W \cdot k_b,$$

$$\frac{1}{2} \cdot 0{,}04587 \cdot v^2 \cdot 14 = 0{,}1 \cdot 0{,}8^3 \cdot 800,$$

$$v = \sqrt{\frac{0{,}1 \cdot 0{,}8^3 \cdot 800 \cdot 2}{0{,}04587 \cdot 14}} = 11{,}3 \frac{m}{sec},$$

$$v = \frac{2 R \cdot \pi \cdot n}{60},$$

$$n = \frac{60 \cdot v}{2 R \pi} = \frac{60 \cdot 11{,}3}{2 \cdot 0{,}3 \cdot \pi} = 360,$$

$n \cong 360$ minutliche Umdrehungen.

17. *Aufgabe:* Der in *Abb. 203* und *204* dargestellte Träger auf zwei Stützen hat eine Streckenlast zu tragen.

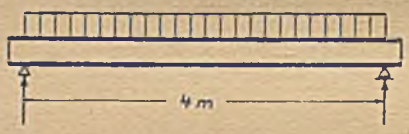


Abb. 203.

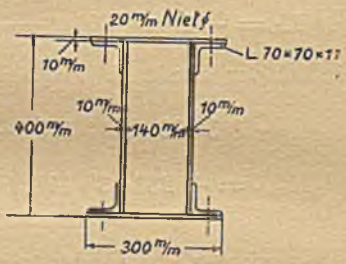


Abb. 204.

Die zulässige Biegungsbeanspruchung ist $k_b = 1000 \frac{kg}{cm^2}$. Welche Last je 1 cm Trägerlänge kann aufgenommen werden?

Lösung: Ermittlung des Trägheitsmoments:

der Gurtplatten $\frac{30 \cdot 40^3}{12} - \frac{30 \cdot 38^3}{12}$ $= + 22\,820 \text{ cm}^4$

der Stehbleche $\frac{2 \cdot 38^3}{12}$ $= + 9\,145$ „

der Winkeleisen $4\,[61{,}8 + 14{,}3 \cdot 16{,}87^2]$ $= + 16\,526$ „

$+ 48\,491 \text{ cm}^4$

der Nietlöcher $4 \left[\frac{2 \cdot 2{,}1^3}{12} + 2 \cdot 2{,}1 \cdot 18{,}95^2\right] = - 6\,039$ „

$J = + 42\,452 \text{ cm}^4$.

Das Widerstandsmoment:

$$W = \frac{J}{e} = \frac{42\,452}{20} = 2122{,}6 \text{ cm}^3,$$

$$M_b = W \,.\, k_b = 2122{,}6 \,.\, 1000 = 2\,122\,600 \text{ cmkg},$$

$M_b = \frac{P \,.\, l}{8}$; das P setzt sich zusammen aus der Streckenlast P′ und dem Eigengewicht P″.

Eigengewicht P″ = L-Eisen	4 . 4 . 11,23	= 179,7 kg
Gurtbleche	2 . 7,85 . 3 . 40 . 0,1	= 188,4 „
Stehbleche	2 . 7,85 . 3,8 . 40 . 0,1	= 238,7 „
		P″ = 606,8 kg

$$2\,122\,600 = \frac{(P' + 606{,}8) \,.\, 400}{8}$$

$$P' = \frac{2\,122\,600 \,.\, 8}{400} - 606{,}8 = \backsim 41\,845 \text{ kg},$$

die zulässige Last je 1 cm Trägerlänge $= \frac{41\,845}{400} = 104{,}6 \frac{\text{kg}}{\text{cm}}$.

18. ***Aufgabe:*** Ein I-Eisen ist gemäß *Abb. 205* gelagert und befindet sich im Gleichgewichtszustand (das Eigengewicht bleibe unberücksichtigt). Welches Normalprofil muß es besitzen, wenn man $k_b = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ annimmt?

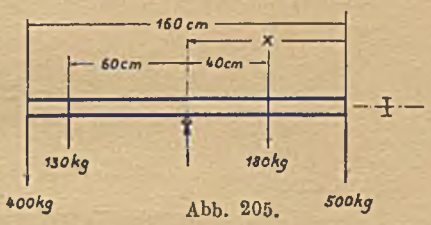


Abb. 205.

Lösung: $400 \,.\, (160 - x) + 130 \,.\, 60 = 500 \,.\, x + 180 \,.\, 40,$

$$x = 71{,}78 \text{ cm}.$$

$$M_b = W \,.\, k_b, \qquad W = \frac{400 \,.\, 88{,}22 + 130 \,.\, 60}{1000} = 43{,}1 \text{ cm}^3,$$

I N P Nr. 11 mit $W = 43{,}5 \text{ cm}^3$.

19. ***Aufgabe:*** Zwei Balken von quadratischem Querschnitt sind gemäß *Abb. 206* auf Biegung beansprucht. Die zulässige Biegungsbeanspruchung

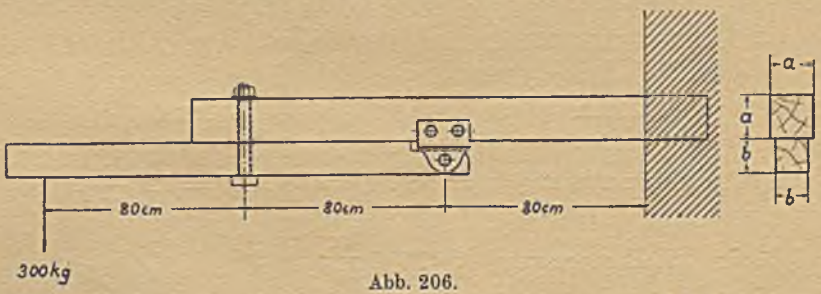


Abb. 206.

des Tannenholzes (Kraftrichtung parallel zur Faser) ist $80 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$. Wie groß werden die Seiten a und b?

Lösung: Man kann die beiden Balken als einen einzigen Freiträger auffassen *(Abb. 207)*.

$$M_b = W \,.\, k_b; \quad 300 \,.\, 240 = \frac{a^3}{6} \,.\, 80, \quad a = \sqrt[3]{\frac{300 \,.\, 240 \,.\, 6}{80}} = 17{,}55 \text{ cm},$$

$$a = 176 \text{ mm}.$$

Die Belastung des unteren Balkens entspricht dem Schema *Abb. 208*.

Die Schraube muß bei einem $k_z = 500 \frac{kg}{cm^2}$ einen Kerndurchmesser bekommen

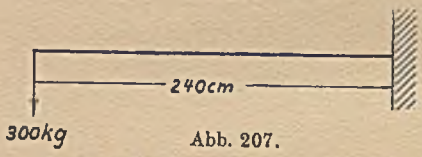


Abb. 207.

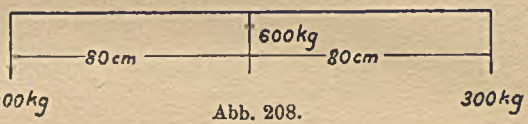


Abb. 208.

von $\frac{d_1^2 \pi}{4} \,.\, 500 = 600$, $\frac{d_1^2 \pi}{4} = 1{,}2 \text{ cm}^2$, $d_1 = 1{,}24$ cm, 5/8'') Schraube, $d = 1{,}59$ cm, $d + 0{,}5 = 2{,}09$ cm *(Abb. 209)*.

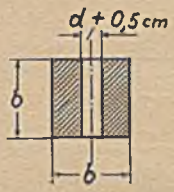


Abb. 209.

$$M_b = W \,.\, k_b,$$

$$300 \,.\, 80 = \frac{(b - 2{,}09) \,.\, b^2}{6} \,.\, 80,$$

$$b^3 - 2{,}09 \,.\, b^2 = 1800, \quad b = 12{,}9 \text{ cm},$$

$$b = 129 \text{ mm}.$$

Der Bolzen berechnet sich wie folgt *(Abb. 210* und *211)*:

$$M_{max} = 150 \,.\, 8{,}25 - 150 \,.\, 3{,}5 = 712{,}5 \text{ cmkg},$$

$$k_b = 900 \frac{kg}{cm^2}; \quad 0{,}1 \,.\, d^3 \,.\, 900 = 712{,}5,$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{712{,}5}{0{,}1 \,.\, 900}} = \sim 2 \text{ cm};$$

gewählt $d = 25$ mm (Din 3).

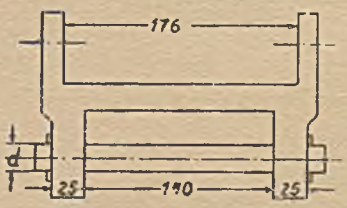


Abb. 210.

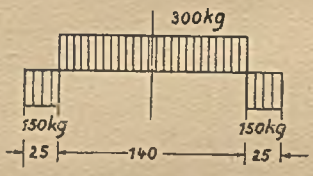


Abb. 211.

Zulässige Scherspannung $k_s = 0{,}8 \,.\, k_z = 0{,}8 \,.\, 900 = 720 \frac{kg}{cm^2}$.

Zulässige Flächenpressung $k \leqq 180 \frac{kg}{cm^2}$.

Die vorhandene Biegungsspannung

$$\sigma_b = \frac{M_b}{W} = \frac{712{,}5}{0{,}1 \,.\, 2{,}5^3} = 457 \frac{kg}{cm^2} \quad < 900 \frac{kg}{cm^2}.$$

Die mittlere Scherspannung ist $\tau_s = \frac{P}{2 \cdot F} = \frac{300}{2 \cdot \frac{2{,}5^2 \cdot \pi}{4}} = 30{,}6 \frac{kg}{cm^2}$.

Die Flächenpressung in den Lagerstellen:

$$\sigma = \frac{150}{2{,}5 \cdot 2{,}5} = 24 \frac{kg}{cm^2}.$$

20. ***Aufgabe:*** Ein Freiträger I NP Nr. 16 ist laut nebenstehender *Abb. 212* belastet. Nachträglich muß in den Träger ein Loch gebohrt werden, damit eine Transmissionswelle durchgeführt werden kann. Wie groß darf der Durchmesser d des Loches höchstens gemacht werden, wenn $k_b = 1000 \frac{kg}{cm^2}$ nicht überschritten werden darf.

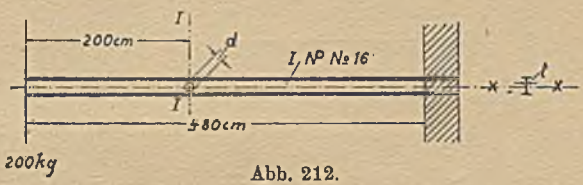


Abb. 212.

Lösung: $J_x = 935\ cm^4$, $W_x = 117\ cm^3$, Stegstärke $t = 0{,}63$ cm Eigengewicht $g = 17{,}9 \frac{kg}{m}$. $M_b = W \cdot k_b$,

$$M_b = 200 \cdot 200 + 17{,}9 \cdot 2 \cdot 100 = 43\,580 \text{ cmkg},$$

$$J_I = J_x - \frac{t \cdot d^3}{12} = 935 - \frac{0{,}63 \cdot d^3}{12} = 935 - 0{,}0525 \cdot d^3,$$

$$43\,580 = (935 - 0{,}0525 \cdot d^3) \cdot \frac{1}{8} \cdot 1000,$$

$$d = \sqrt{\frac{935 - 348{,}64}{0{,}0525}} = 22{,}3 \text{ cm}.$$

Da die Rechnung einwandfrei, jedoch das Ergebnis unmöglich ist, so kann nur für das Loch ein falsches Trägheitsmoment eingesetzt worden sein. Aus diesem Resultat *(Abb. 213)* entnehmen wir also, daß das Loch noch in die Flanschen hineinragen dürfte.

$$M_b = W \cdot k_b, \quad W = \frac{43\,580}{1000} = 43{,}58\ cm^3,$$

$$W = \left(\frac{b \cdot h^3}{12} - \frac{b \cdot d^3}{12}\right) \cdot \frac{2}{h} = \frac{b}{6 \cdot h} \cdot (h^3 - d^3),$$

$$\frac{7{,}4}{6 \cdot 16} \cdot (16^3 - d^3) = 43{,}58, \quad d = \sqrt[3]{16^3 - \frac{43{,}58 \cdot 6 \cdot 16}{7{,}4}}$$

$$d = 15{,}2 \text{ cm}.$$

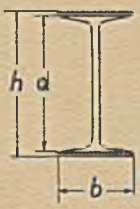


Abb. 213.

Dieser maximal zulässige Lochdurchmesser ließe noch einen Querschnitt übrig von $(16 - 15{,}2) \cdot 7{,}4 = 5{,}92\ cm^2$. Die entstehende Schubspannung ist alsdann

$$\tau_s = \frac{P}{F} = \frac{200 + 17{,}9 \cdot 2}{5{,}92} = \sim 40 \frac{kg}{qcm}.$$

21. ***Aufgabe:*** Ein gußeisernes Rohr von 200 mm lichtem Rohrdurchmesser und 11 mm Wandstärke ist laut *Abb. 214* gelagert.

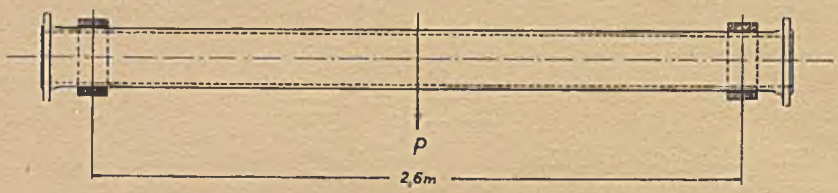


Abb. 214.

Welche Einzellast in der Mitte könnte man anhängen, wenn man die zulässige Beanspruchung auf Zug $k_z = 300 \frac{kg}{cm^2}$ annimmt.

Lösung: Die zulässige Biegungsspannung

$$k_b = \mu \,.\, k_z \,.\, \sqrt{\frac{e}{z_0}} \frac{kg}{cm^2}. \quad (Abb.\ 215.)$$

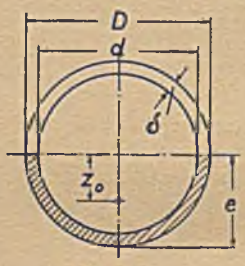


Abb. 215.

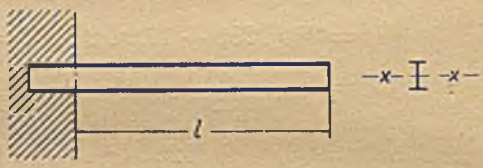


Abb. 216.

$$z_0 = \frac{2}{3\pi} \cdot \frac{D^3 - d^3}{D^2 - d^2} = \frac{2}{3\pi} \cdot \frac{22{,}2^3 - 20^3}{22{,}2^2 - 20^2} = 6{,}725 \text{ cm},$$

$\mu = 1{,}1$ (Rohguß),

$$k_b = 1{,}1 \,.\, 300 \,.\, \sqrt{\frac{11{,}1}{6{,}725}} = 427 \frac{kg}{cm^2},$$

$$M_b = W \,.\, k_b, \quad W = 0{,}1 \,.\, \frac{D^4 - d^4}{D} = 0{,}1 \frac{22{,}2^4 - 20^4}{22{,}2} = 374 \text{ cm}^3,$$

$$M_b = \frac{P \,.\, l}{4} = P \,.\, \frac{260}{4} = 65 \,.\, P, \quad 65 \,.\, P = 374 \,.\, 427,$$

$P = 2455$ kg.

22. ***Aufgabe:*** Unbelastete Freiträger aus I-Eisen sollen durch ihr Eigengewicht die zulässige Biegungsbeanspruchung von $1000 \frac{kg}{cm^2}$ im gefährlichen Querschnitt erhalten *(Abb. 216)*. Der Zusammenhang zwischen Normalprofil und Trägerlänge l soll graphisch dargestellt werden.

Lösung: $M_b = g \cdot \frac{l}{100} \cdot \frac{l}{2} = W \cdot k = W \cdot 1000,$

$$l = \sqrt{\frac{W \cdot 1000 \cdot 2 \cdot 100}{g}} = 447{,}2 \cdot \sqrt{\frac{W}{g}} \quad (Abb. 217).$$

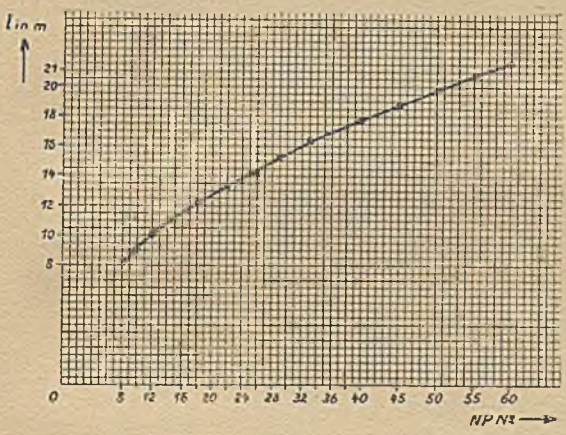


Abb. 217.

23. *Aufgabe:* Ein I-Träger hat eine freie Länge von 700 cm. Über denselben fährt eine Laufkatze mit einem Räderabstand $a = 120$ cm. Auf jedes Rad entfällt ein Druck $\frac{P}{2} = 3000$ kg *(Abb. 218).*

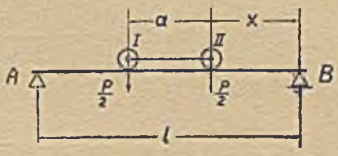


Abb. 218.

Welches Normalprofil ist erforderlich, wenn man die zulässige Beanspruchung auf Biegung $k_b = 600 \frac{kg}{cm^2}$ wählt (siehe auch 39. Beispiel).

Lösung: $A \cdot l - \frac{P}{2} \cdot (a + x) - \frac{P}{2} \cdot x = 0,$

$$A = P \cdot \frac{a + 2x}{2l} \text{ kg}.$$

$$\frac{P}{2} \cdot (l - a - x) + \frac{P}{2} \cdot (l - x) - B \cdot l = 0,$$

$$B = P \cdot \frac{2(l - x) - a}{2l} \text{ kg}.$$

Das maximale Biegungsmoment kann bekanntlich nur dort liegen, wo eine Kraft angreift, also in I oder in II.

Es ist $M_{II} = B \cdot x,$

$$M_I = B \cdot (a + x) - \frac{P}{2} \cdot a.$$

Wenn $M_{II} > M_I$, dann muß sein $B \cdot a < \frac{P}{2} \cdot a,$

$$B < \frac{P}{2}, \quad \frac{2(l - x) - a}{l} < 1, \quad x > \frac{l - a}{2}.$$

Wenn wir also im folgenden annehmen, daß sich das maximale Biegungsmoment in II befindet, so setzen wir voraus, daß der Abstand des rechten Rades der Laufkatze vom rechten Auflager größer ist als $\frac{l - a}{2}$.

Der Ausdruck $M_{II} = B \,.\, x = P \,.\, \frac{2\,.\,(l - x) - a}{2\,l} \,.\, x = f(x)$ muß ein Maximum werden.

M_{II} erreicht das Maximum, wenn $\frac{d\,M_{II}}{d\,x} = 0$,

$$\frac{d\,M_{II}}{d\,x} = \frac{P}{2\,l} \,.\, (2\,l - 4\,x - a) = 0,$$

$$2\,l - 4\,x - a = 0, \quad x = \frac{l}{2} - \frac{a}{4}.$$

Nun ist $x = \frac{l}{2} - \frac{a}{4} = \frac{l - 0{,}5\,.\,a}{2} > \frac{l - a}{2}$, d. h:

M_{II} für $x = \frac{}{2} - \frac{a}{4}$ ist tatsächlich das größte Biegungsmoment *(Abb. 219)*.

$$M_{II_{max}} = P \,.\, \frac{2\,.\left(l - \frac{l}{2} + \frac{a}{4}\right) - a}{2\,l} \,.\, \left(\frac{l}{2} - \frac{a}{4}\right) = P \,.\, \frac{\left(l - \frac{a}{2}\right)^2}{4\,l} \text{ cmkg},$$

$$M_{II_{max}} = 6000 \,.\, \frac{640^2}{4\,.\,700} = 877\,714 \text{ cmkg}.$$

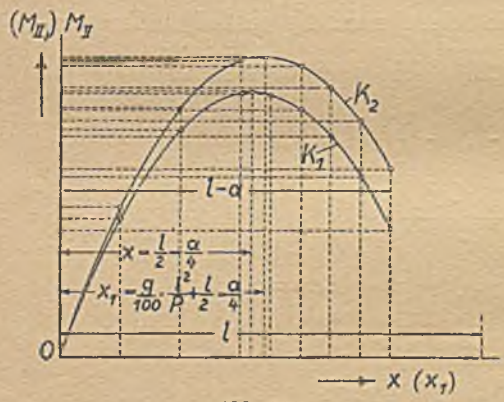


Abb. 219.

Das Widerstandsmoment $W = \frac{M_{II_{max}}}{k_b} = \frac{877\,714}{600} = 1462{,}86 \text{ cm}^3$. Wir wählen ein I-Eisen NP Nr. $42\frac{1}{2}$ mit einem $W_x = 1740 \text{ cm}^3$. Nunmehr müssen wir eine Neurechnung unter Berücksichtigung des Trägergewichtes vornehmen.

$$\frac{P}{2} \,.\, (l - a - x_1) + \frac{P}{2} \,.\, (l - x_1) + $$
$$+ 7 \,.\, 103{,}62 \,.\, \frac{l}{2} - B_1 \,.\, l = 0,$$

$$B_1 = P \,.\, \frac{2\,(l - x_1) - a}{2\,l} + 362{,}67 \text{ kg},$$

$M_{II_1} = B_1 \,.\, x_1 = \left[P \,.\, \frac{2\,(l - x_1) - a}{2\,l} + 362{,}67\right] \,.\, x_1 = f(x_1)$; das Maximum wird erreicht bei

$$\frac{d\,M_{II_1}}{d\,x_1} = \frac{P}{2\,l} \,.\, (2\,l - 4\,x_1 - a) + 362{,}67 = 0,$$

$$2\,l - 4\,x_1 - a + 362{,}67 \,.\, \frac{2\,l}{P} = 0,$$

$$x_1 = \frac{725{,}34 \,.\, \frac{l}{P} + 2\,l - a}{4},$$

$$x_1 = \frac{725{,}34 \,.\, \frac{700}{6000} + 1400 - 120}{4} = 341{,}15 \text{ cm.}$$

$$M_{II_{1\,max}} = B_1 \,.\, x_1,$$

$$B_1 = 6000 \,.\, \frac{2 \,.\, (700 - 341{,}15) - 120}{2 \,.\, 700} + 362{,}67 = 2924{,}24 \text{ kg},$$

$$M_{II_{1\,max}} = 2924{,}24 \,.\, 341{,}15 = 997\,604{,}5 \text{ cmkg};$$

das Widerstandsmoment des I N P Nr. $41\frac{1}{2} = 1740$ cm³,

folglich $$\sigma_b = \frac{M_{II_{1\,max}}}{W_x} = \frac{997\,604{,}5}{1740} = 573{,}3 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}.$$

Da die Beanspruchung der Kranträger nicht nur durch die der Rechnung zu Grunde gelegten Vertikalkräfte (Last und Eigengewicht) erfolgt, sondern auch durch Horizontalkräfte (schräger Lastzug, horizontale Trägheitswiderstände beim Anfahren und Bremsen), so ist es angebracht, das k_b entsprechend niedrig zu wählen. Wir hatten deshalb k_b mit $600 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ angenommen. Die errechnete Biegungsspannung $\sigma_b = 573{,}3 \frac{\text{kg}}{\text{cm}_2}$ ist also den obwaltenden Verhältnissen angemessen.

In der *Abb. 219* ist K_1 die Kurve des Biegungsmoments ohne Berücksichtigung, K_2 die Kurve des Biegungsmoments mit Berücksichtigung des Trägereigengewichtes.

24. ***Aufgabe:*** Ein Blechträger *(Abb. 220)* von 12 m Stützweite ist zu berechnen; er ist belastet mit einer Streckenlast von $p = 5{,}6 \frac{\text{t}}{\text{m}}$. Zur Verstärkung des Querschnittes sind Gurtplatten aus Flacheisen 250 × 10 mm vorgesehen. Welche Materialersparnis erzielt man gegenüber einem Differdinger Greyträger?

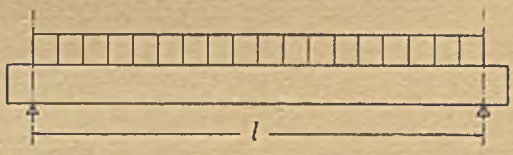


Abb. 220.

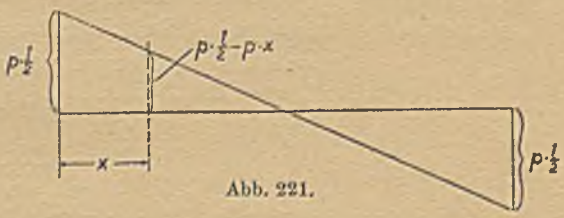


Abb. 221.

Lösung: Aus dem Querkraftdiagramm ergibt sich das größte Biegungsmoment *(Abb. 221)* zu:

$$M_{max} = \frac{p \,.\, l^2}{8} = \frac{5{,}6 \,.\, 12^2}{8} = 100{,}8 \text{ mt},$$

$$M_x = \frac{p \,.\, l - p \,.\, x}{2} \,.\, x = \frac{p}{2} \,.\, (l - x) \,.\, x.$$

Die Größe der einzelnen Momente von Meter zu Meter sind in nebenstehender Tabelle zusammengestellt.

x	M_x in mt
1	30,8
2	56,0
3	75,6
4	89,6
5	98,1
6	100,8
7	98,1
8	89,6
9	75,6
10	56,0
11	30,8
12	0

Die Momentenfläche ist eine Parabel mit der Pfeilhöhe 100,8 mt. Die Scheitelgleichung der Parabel *(Abb. 222)* lautet bekanntlich $y^2 = 2\,p_1 \,.\, x$, worin $2\,p_1$ der Parameter. $y_{max}{}^2 = 2\,p_1 \,.\, M_{max}$.

Wählen wir als Maßstab 1 m = 10 mm, 1 mt = $\frac{1}{2}$ mm, so wird $60^2 = 2 \,.\, p_1 \,.\, 50{,}4$, $p_1 = 35{,}72$ mm.

Alsdann benutzt man die bekannte Konstruktion der Parabel. Man schlägt um den Brennpunkt F einen beliebigen Kreis und zieht zur Leitlinie A eine Parallele im Abstand des Kreishalbmessers. Der Schnittpunkt von Kreis und Senkrechte ergibt einen Punkt der Parabel. Eine einfachere Konstruktion zeigt *Abb. 223.*

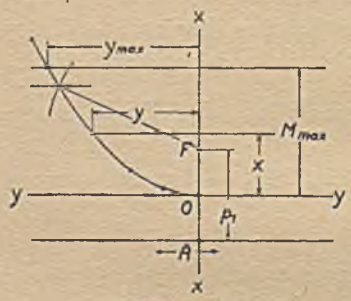


Abb. 222.

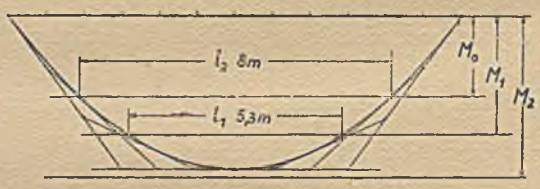


Abb. 223.

Wir wählen ein Stehblech 1000 . 10 mm, einen Gurtwinkel 100 × 100 × 10 mit einem Querschnitt F = 19,2 cm² *(Abb. 224)* einem $J_\xi = 177$ cm⁴ und einem Schwerpunktsabstand $x_0 = 2{,}82$ cm.

Abb. 224.

Zur Verstärkung des Querschnittes sind Gurtplatten aus Flacheisen 250 × 10 mm vorgesehen.

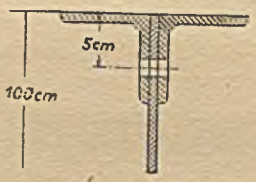


Abb. 225.

Berechnung des Widerstandsmoments ohne Gurtplatten *(Abb. 225)*:

$$J = \frac{b \,.\, h^3}{12} = \frac{1 \,.\, 100^3}{12} = \quad 83\,333 \text{ cm}^4$$

$$+\, 4 \,.\, (J_s + F \,.\, a^2) = 4\,(177 + 19{,}2 \,.\, 47{,}18^2) = \quad \underline{171\,800 \text{ cm}^4}$$

$$255\,133 \text{ cm}^4$$

Niete 20 mm ⌀, Wurzelmaß 50 mm

Schwächung durch Nietlöcher: $2\,F \,.\, a^2 = 2 \,.\, (3 \,.\, 2) \,.\, 45^2 = \underline{-\,24\,300 \text{ cm}^4}$

$$J_0 = \quad 230\,833 \text{ cm}^4$$

$$W_0 = \frac{J_0}{e} = \frac{230\,833}{50} = 4617 \text{ cm}^3.$$

Berechnung des Widerstandsmoments für eine Gurtplatte *(Abb. 226)*:

Trägheitsmoment J_0 ohne Nietabzug	255 133 cm⁴
Nietabzug für die Winkeleisen $4\,F\,.\,a^2 = 4\,.\,(2\,.\,1)\,.\,49{,}5^2$	— 19 602 cm⁴
	235 531 cm⁴

Trägheitsmoment der Gurtplatte:

$$\left(\frac{h\,.\,b^3}{12} + F\,.\,a^2\right).2 = \left(25\,.\,\frac{1^3}{12} + 25\,.\,1\,.\,50{,}5^2\right).\,2 \qquad 127\,464\ \text{cm}^4$$

	362 995 cm⁴
abziehen Nietschwächung: $4\,F\,.\,a^2 = 4\,.\,(2\,.\,1)\,.\,50{,}5^2$	— 20 400 cm⁴
$J_1 =$	342 595 cm⁴

$$W_1 = \frac{J_1}{e_1} = \frac{342\,595}{51} = 6720\ \text{cm}^3.$$

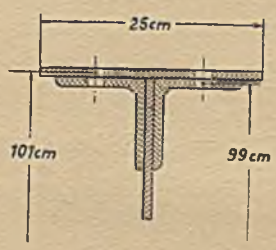


Abb. 226.

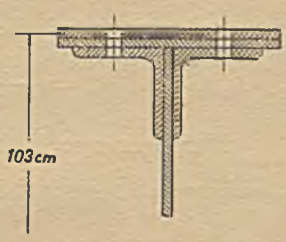


Abb. 227.

Berechnung des Widerstandsmoments für zwei Gurtplatten *(Abb. 227)*:

J_1	342 595 cm⁴
Trägheitsmoment der zweiten Gurtplatte: $2\,.\,25\,.\,1\,.\,51{,}5^2$	132 605 cm⁴
	475 200 cm⁴
Nietabzug $4\,.\,(2\,.\,1)\,.\,5{,}15^2$	— 21 200 cm⁴
$J_2 =$	454 000 cm⁴

$$W_2 = \frac{J_2}{e_2} = \frac{454\,000}{52} = 8730\ \text{cm}^3.$$

In den obigen Berechnungen wurden die reduzierten Trägheitsmomente mit $F\,.\,a^2$ in Rechnung gestellt, wenn es sich um Flächen handelte (Nietlöcher, Gurtplatten), deren Trägheitsmoment für die eigene Schwerachse vernachlässigt werden kann. Durch die oben errechneten Widerstandsmomente können folgende Biegungsmomente aufgenommen werden:

$$M_0 = W_0\,.\,k_b = 4617\,.\,1200 = 5\,540\,400\ \text{cmkg} = 55{,}4\ \text{mt}$$
$$M_1 = W_1\,.\,k_b = 6720\,.\,1200 = 8\,064\,000\ \text{cmkg} = 80{,}64\ \text{mt}$$
$$M_2 = W_2\,.\,k_b = 8730\,.\,1200 = 10\,476\,000\ \text{cmkg} = 104{,}8\ \text{mt}.$$

Tragen wir diese Momente in *Abb. 223* ein, so bedeuten die Schnittpunkte der Momentenlinie M_0, M_1 mit der Parabel diejenigen Stellen des Trägers, wo das vorhandene Widerstandsmoment nicht mehr zur Aufnahme des Biegungsmoments ausreicht, wo also eine weitere Gurtplatte sich notwendig macht. Wir finden die notwendige Länge der unteren Gurtplatte mit 8 m, der oberen mit 5,3 m.

Die Materialmenge des Blechträgers

Stehblech	100 . 1 . 1200	120 000 cm³
Innere Gurtplatten	25 . 1 . 800 . 2	40 000 cm³
äußere „	25 . 1 . 530 . 2	26 500 cm³
Winkeleisen	19,2 . 1200 . 4	92 160 cm³
		278 660 cm³

Bei einem breitflanschigen I-Eisen (Differdinger Greyträger) muß die Biegungsgleichung bestehen:

$$\frac{p \cdot l^2}{8} = W \cdot k_b, \qquad W_{erf} = \frac{p \cdot l^2}{8 \cdot k_b} = \frac{56 \cdot 1200^2}{8 \cdot 1200} = 8400 \text{ cm}^3,$$

P Nr. 80 B mit $W_x = 9012$ cm³.

Eigengewicht = 278,6 . 12 = 3343,2 kg.

Widerstandsmoment mit Berücksichtigung des Eigengewichtes

$$W_1 = \frac{58{,}79 \cdot 1200^2}{8 \cdot 1200} = 8820 \text{ cm}^3,$$

Materialmenge F . l = 354,9 . 1200 = 425 880 cm³,

die Materialersparnis gegenüber diesem Differdinger Greyträger beträgt also:

$$\begin{array}{r} 425\,880 \\ -\ 278\,660 \\ \hline 147\,220 \text{ cm}^3, \end{array} \quad \text{das sind}$$

$$\frac{147\,220 \cdot 100}{425\,880} = 34{,}6\%.$$

Womit ist diese große Materialersparnis zu erklären?

Der genietete Blechträger ist zwar wegen der aus praktischen Gründen beschränkten Zahl der Gurtplatten auch noch ein mit Materialverschwendung behafteter Träger, er paßt sich aber bedeutend besser in seinem Materialaufwand dem theoretisch notwendigen an, als der Differdinger Träger. Die schraffierten Flächen der *Abb. 228* bedeuten die überschüssige Momentenaufnahmefähigkeit der einzelnen Querschnitte des genieteten Trägers, die geränderten Flächen bedeuten die überschüssige Momentenaufnahmefähigkeit der Querschnitte des Greyträgers.

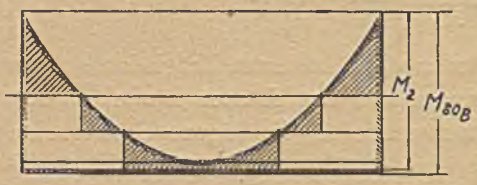


Abb. 228.

25. ***Aufgabe:*** Wieviel PS kann eine normale Transmissionswelle von 80 mm ⌀ bei 200 Umdrehungen in der Minute übertragen?

Lösung: $d = 14{,}42 \sqrt[3]{\frac{N'}{n}}$ $\qquad d = 12 \sqrt[4]{\frac{N''}{n}}$

$$N' = n \cdot \frac{d^3}{14{,}42^3} \qquad N'' = n \cdot \frac{d^4}{12^4}$$

$$N' = 200 \cdot \frac{8^3}{14{,}42^3} = 34{,}1 \text{ PS mit Rücksicht auf Festigkeit,}$$

$$N'' = 200 \cdot \frac{8^4}{12^4} = 39{,}5 \text{ PS mit Rücksicht auf Formänderung.}$$

34 PS darf also diese Welle bei 200 minutlichen Umdrehungen übertragen.

26. ***Aufgabe:*** Ein Stahlrohr muß ein Drehmoment von 5000 cmkg aufnehmen und soll einen Verdrehungswinkel besitzen, der kleiner ist als $\frac{1}{400} \frac{\circ}{\text{cm}}$. Welchen Rohrquerschnitt wird man wählen? Die zulässige Beanspruchung auf Drehung $k_d = 780 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ (II) *(Abb. 229)*.

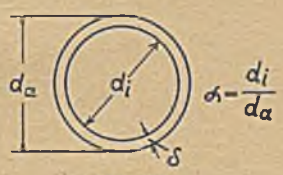


Abb. 229.

Lösung: $M_d = W_d \cdot k_d$,

$$W_d = \frac{\pi}{16} \cdot d_a^3 \cdot (1 - \alpha^4), \qquad \alpha = \frac{d_i}{d_a} = \text{Höhlungsverhältnis.}$$

Wir wählen versuchsweise $\alpha = 0{,}9$.

$$W_d = \frac{\pi}{16} \cdot d_a^3 (1 - 0{,}9^4) = 0{,}0675 \cdot d_a^3,$$

$$5000 = 0{,}0675 \cdot d_a^3 \cdot 780,$$

$$d_a = \sqrt[3]{\frac{5000}{0{,}0675 \cdot 780}} = 4{,}56 \text{ cm,}$$

$$d_i = 4{,}56 \cdot 0{,}9 = 4{,}10 \text{ cm,} \qquad \delta = \frac{45{,}6 - 41{,}0}{2} = 2{,}3 \text{ mm, gewählt:}$$

$$d_a = 45 \text{ mm,} \quad d_i = 40 \text{ mm,} \quad \delta = 2{,}5 \text{ mm,} \quad F = 3{,}34 \text{ cm}^2,$$

$$\alpha = \frac{d_i}{d_a} = \frac{40}{45} = 0{,}89, \quad J = 7{,}56 \text{ cm}^4, \quad J_d = 2\,J = 15{,}12 \text{ cm}^4,$$

$$W = 3{,}36 \text{ cm}^3, \quad W_d = 2\,W = 6{,}72 \text{ cm}^3.$$

Größte Drehspannung $\tau_{d_{max}} = \frac{M_d}{W_d} = \frac{5000}{6{,}72} = 744 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} < 780 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$.

Verdrehungswinkel $\delta = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{M_d}{J_d \cdot G} \frac{\circ}{\text{cm}}$, Gleitmodul G für Flußstahl =

$$= 850\,000 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}, \quad \delta = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{5000}{15{,}12 \cdot 850\,000} = \frac{1}{44{,}8} > \frac{1}{400} \frac{\circ}{\text{cm}}.$$

Der Verdrehungswinkel ist bedeutend größer als zulässig. Wir müssen also neu rechnen, indem wir den erforderlichen Drillungswiderstand ausrechnen, der zum zulässigen Verdrehungswinkel gehört.

$$J_d = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{M_d}{\delta^0 \cdot G} = \frac{180 \cdot 5000}{\pi \cdot \frac{1}{400} \cdot 850\,000} = 134{,}8 \text{ cm}^4,$$

folglich das erforderliche Trägheitsmoment

$$J = \frac{J_{d_{erf}}}{2} = \frac{134,8}{2} = 67,4 \text{ cm}^4.$$

Wir werden demgemäß wählen ein Stahlrohr mit

$d_a = 80$ mm, $d_i = 72$ mm, $\delta = 4$ mm; dann ist $W_d = 2\,W = 2 \,.\, 17,29 =$

$34,58 \text{ cm}^3$, $J_d = 2\,J = 2 \,.\, 69,15 = 138,3 \text{ cm}^4$, $\tau_{d_{max}} = \frac{M_d}{W_d} = \frac{5000}{34,6} =$

$$= 144,5 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} < 780 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}, \quad \delta^0 = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{M_d}{G \,.\, J_d} =$$

$$= \frac{180}{\pi} \cdot \frac{5000}{850\,000 \,.\, 138,3} = \frac{1}{410} < \frac{1}{400} \frac{^0}{\text{cm}}.$$

27. ***Aufgabe:*** Es soll untersucht werden, wie groß das Drehmoment sein darf, wenn das soeben berechnete Stahlrohr der Länge nach gemäß

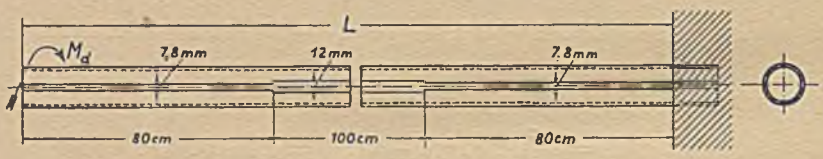


Abb. 230.

Abb. 230 geschlitzt wird, und wenn der Verdrehungswinkel δ an keiner Stelle $\frac{1}{400} \frac{^0}{\text{cm}}$ überschreiten soll. Wie groß wird der Verdrehungswinkel des gesamten Rohres, d. i. der Winkel, um den sich der Endquerschnitt gegenüber dem Einspannungsquerschnitt unter der Wirkung des Moments M_d verdreht.

Lösung: Es handelt sich um einen gebogenen Streifen von der Breite $b = 4$ mm und der mittleren Länge

$$l_1 = \frac{8 + 7,2}{2} \,.\, \pi - 1,2 = 22,676 \text{ cm bezw.}$$

$$l_2 = \frac{8 + 7,2}{2} \,.\, \pi - 0,78 = 23,096 \text{ cm.}$$

$$\frac{l_1}{b} = n_1 = \frac{22,676}{0,4} = 56,69 > 4, \quad \frac{l_2}{b} = n_2 = \frac{23,096}{0,4} = 57,74,$$

für $\frac{l}{b} > 4$ gelten die Formeln:

$$W_{d_1} = \frac{1}{3} \,.\, (n_1 - 0,63) \,.\, b^3 = \frac{1}{3} (56,69 - 0,63) \,.\, 0,4^3 = 1,196 \text{ cm}^3,$$

$$W_{d_2} = \frac{1}{3} \,.\, (n_2 - 0,63) \,.\, b^3 = \frac{1}{3} (57,74 - 0,63) \,.\, 0,4^3 = 1,216 \text{ cm}^3,$$

Drillungswiderstand $J_{d_1} = W_{d_1} \,.\, b = 1,196 \,.\, 0,4 = 0,4784 \text{ cm}^4$,

$J_{d_2} = W_{d_2} \,.\, b = 1,216 \,.\, 0,4 = 0,4864 \text{ cm}^4$,

folglich ist das Drehmoment mit Rücksicht auf Festigkeit

$$M_{d_1} = W_{d_{min}} \cdot k_d = W_{d_1} \cdot k_d = 1{,}196 \cdot 780 = 932{,}88 \text{ cmkg},$$

mit Rücksicht auf Formänderung:

$$M_{d_2} = \frac{\delta^0 \cdot \pi \cdot G \cdot J_{d_{min}}}{180} = \frac{\pi \cdot 850000 \cdot 0{,}4784}{400 \cdot 180} = 17{,}73 \text{ cmkg}.$$

Das geschlitzte Rohr darf also ein Drehmoment von 17,73 cmkg aufnehmen. Es dürfen am Umfange des Rohres höchstens

$$2\,\frac{M_{d_2}}{d_a} = 2 \cdot \frac{17{,}73}{8} = 4{,}43 \text{ kg angreifen.}$$

Die Verdrehungswinkel für 1 cm Länge des geschlitzten Rohres betragen

$$\delta_1 = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{M_d}{G \cdot J_{d_1}} = \frac{180 \cdot 17{,}73}{\pi \cdot 850000 \cdot 0{,}4784} = \frac{1}{400}\,\frac{^0}{\text{cm}},$$

$$\delta_2 = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{M_d}{G \cdot J_{d_2}} = \frac{180 \cdot 17{,}73}{\pi \cdot 850000 \cdot 0{,}4864} = \frac{1}{407}\,\frac{^0}{\text{cm}},$$

$$\delta_{ges} = \delta_1 \cdot L_1 + \delta_2 \cdot L_2 = \frac{1}{400} \cdot 100 + \frac{1}{407} \cdot 2 \cdot 80 = 0{,}643^0,$$

$$\delta_{ges} = 0^0\,38'\,35''.$$

28. *Aufgabe:* Eine gußeiserne Säule von 8 m Knicklänge, belastet mit 14000 kg, soll als Körper gleicher Festigkeit auf Druck und Knickung berechnet werden. Die zulässige Druckbeanspruchung sei $k = 600\,\frac{kg}{cm^2}$, der notwendige Sicherheitsgrad nach Euler $S = 6$, und der Elastizitätsmodul $E = 1000000\,\frac{kg}{cm^2}$. Es wird bei der Säule oben und unten Spitzenlagerung angenommen.

Lösung: $P = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J}{1{,}27 \cdot S \cdot l^2}$; $J = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$;

$$J = \frac{\pi}{64} \cdot (D^2 - d^2) \cdot (D^2 + d^2); \quad P = \left(\frac{D^2\pi}{4} - \frac{d^2\pi}{4}\right) \cdot k,$$

$$\frac{\pi}{4}\,k \cdot (D^2 - d^2) = P;$$

$$\frac{\pi}{4} \cdot k \cdot (D^2 - d^2) = \frac{\pi^2 \cdot E}{1{,}27 \cdot S \cdot l^2} \cdot \frac{\pi}{64} \cdot (D^2 - d^2) \cdot (D^2 + d^2),$$

$$D^2 + d^2 = \frac{20{,}33 \cdot k \cdot S \cdot l^2}{\pi^2 \cdot E}$$

$$D^2 - d^2 = \frac{4 \cdot P}{\pi \cdot k}$$

$$D^2 = \frac{10{,}16}{\pi^2} \cdot \frac{k \cdot S \cdot l^2}{E} + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{P}{k},$$

$$D = 0{,}798 \cdot \sqrt{1{,}62 \frac{k \cdot S \cdot l^2}{E} + \frac{P}{k}} \text{ cm},$$

$$D = 0{,}798 \cdot \sqrt{1{,}62 \cdot \frac{600 \cdot 6 \cdot 800^2}{1\,000\,000} + \frac{14\,000}{600}} = 49 \text{ cm},$$

$$49^2 - d^2 = \frac{4 \cdot 14\,000}{\pi \cdot 600}; \; d = 48{,}7 \text{ cm}.$$

Außendurchmesser = 490 mm, Innendurchmesser = 487 mm, Wandstärke = 1,5 mm. Da die Formel $J_{erf} = \frac{1{,}27 \cdot P \cdot S \cdot l^2}{\pi^2 \cdot E}$ nur für Schlankheiten größer 51 gilt, so müssen wir jetzt die vorhandene Schlankheit ausrechnen. $F_{vorh} = \sim 49 \cdot \pi \cdot 0{,}15 = 23{,}1 \text{ cm}^2$,

$$J_{vorh} = \frac{\pi}{64}(49^4 - 48{,}7^4) = \sim 6930 \text{ cm}^4, \text{ Trägheitshalbmesser}$$

$$i = \sqrt{\frac{6930}{23{,}1}} = 17{,}35 \text{ cm}, \text{ Schlankheit } x = \frac{800}{17{,}35} = 46{,}1 < 51.$$

Da die errechneten Werte ohnehin keine praktische Bedeutung haben und da 46,1 nicht weit von 51 entfernt ist, so wollen wir eine Neurechnung unterlassen. Der errechnete Säulenquerschnitt bedeutet die wirtschaftlich günstigste Form.

Wir wählen trotz dieser Feststellung eine Säule vom Außendurchmesser = 220 mm, Innendurchmesser = 172 mm, Wandstärke = 24 mm mit einem Trägheitsmoment $J = 7203 \text{ cm}^3$. Das erforderliche Trägheitsmoment $J_{erf} = \frac{1{,}27\, P \cdot S \cdot l^2}{\pi^2 \cdot E} = \frac{1{,}27 \cdot 14\,000 \cdot 6 \cdot 800^2}{\pi^2 \cdot 1\,000\,000} = 6930 \text{ cm}^4$. Der wirklich notwendige Materialverbrauch verhält sich alsdann zum theoretisch kleinstmöglichen wie 148 : 23,1, wie 6 : 1.

Aus diesem Beispiel sieht man, daß es nicht immer möglich ist einen Körper so auszuführen, wie die Rücksicht auf die Gesetze der Festigkeitslehre allein es erfordert. Wir geben in unserem Falle der Säule wohl das verlangte Trägheitsmoment, jedoch einen viel größeren Querschnitt als die Festigkeitsgesetze es fordern. Die Gründe liegen einesteils in der praktischen Unmöglichkeit, Säulen mit so geringer Wandstärke betriebssicher herstellen zu können, anderseits läßt es der Geschmack nicht zu, daß man derart starke Licht und Übersicht raubende Säulen in den Raum hineinsetzt.

28 *b. Aufgabe:* Ein Winkeleisen von 5 m Länge ist auf Knickung beansprucht mit einer Kraft von 1500 kg. Welches Profil hat man zu wählen, wenn man den Sicherheitsgrad nach Euler mit 5 annimmt, den Elastizitätsmodul $E = 2\,150\,000 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$, und die Einspannungsart: Spitzenlagerung an beiden Enden.

Lösung: $P = \frac{\pi^2}{S_0} \cdot \frac{E \cdot J}{l^2}$; $J = \frac{P \cdot S_0 \cdot l^2}{\pi^2 \cdot E}$,

$$J = \frac{1500 \cdot 5 \cdot 500^2}{\pi^2 \cdot 2\,150\,000} = 88{,}5 \text{ cm}^4.$$

Wir wählen *(Abb. 231)* ein ⌊-Eisen NP 10 (100 × 100 × 14) mit einem $J_{min} = J_y = 98{,}3\ cm^4$. Dann wird der wirklich vorhandene Sicherheitsgrad nach Euler:

$$S_E = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_y}{P \cdot l^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2150000 \cdot 98{,}3}{1500 \cdot 500^2} = 5{,}56 > 5.$$ Der Trägheitshalbmesser $i = \pm\sqrt{\frac{J}{F}}\,cm = \pm\sqrt{\frac{98{,}3}{26{,}2}} = \pm 1{,}94\ cm.$

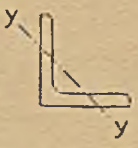


Abb. 231.

Die Schlankheit $x = \frac{l}{i} = \frac{500}{1{,}94} = 258 > 105$. Die Aufgabe liegt demnach im elastischen Bereich; eine Nachrechnung nach Tetmajer ist unnötig. Die vorhandene Druckspannung

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{1500}{26{,}2} = 57{,}2\ \frac{kg}{cm^2}.$$

29. ***Aufgabe:*** In der *Abb. 232* ist eine Schraube dargestellt, deren Hakenkopf eine rückwärtige Stützung erfährt. Es soll ausgerechnet werden, wie groß h_1 sein müßte, damit die Schraube bei voller Belastung vollkommen gegen Biegungsbeanspruchung geschützt ist.

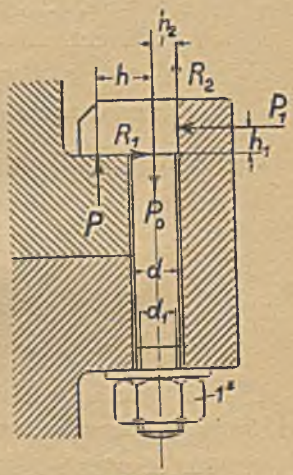


Abb. 232.

Lösung: Der Reibungskoeffizient μ wird angenommen mit 0,15, $k_z = 600\ \frac{kg}{cm^2}$. Es muß sein:

1. Die Summe aller horizontalen Kräfte gleich Null
$$R_1 - P_1 = 0,$$
2. die Summe aller senkrechten Kräfte gleich Null
$$P_0 - P - R_2 = 0,$$
3. die Summe aller Momente gleich Null
$$P \cdot h - R_2 \cdot h_2 - P_1 \cdot h_1 = 0.$$

Es ist $R_1 = P \cdot \mu$, $R_2 = P_1 \cdot \mu$; wir nehmen an $h = 2\,h_2$, dann ist

$$2 \cdot P \cdot h_2 - P_1 \cdot \mu \cdot h_2 - P_1 \cdot h_1 = 0,$$
$$P = P_0 - R_2 = P_0 - P_1 \cdot \mu,$$
$$2 \cdot (P_0 - P_1 \cdot \mu) \cdot h_2 - P_1 \cdot \mu \cdot h_2 - P_1 \cdot h_1 = 0,$$
$$2 \cdot P_0 \cdot h_2 - 3 \cdot P_1 \cdot \mu \cdot h_2 - P_1 \cdot h_1 = 0,\quad h_2 = \frac{d}{2} = 1{,}27\ cm$$

(Din 11), $$P_0 = \frac{d_1^{\,2} \cdot \pi}{4} \cdot k_z = 3{,}57 \cdot 600 = 2142\ kg,$$
$$2 \cdot 2142 \cdot 1{,}27 - 3 \cdot 0{,}15 \cdot 1{,}27 \cdot P_1 - P_1 \cdot h_1 = 0,$$
$$P_1 = R_1 = P \cdot \mu = \sim 2142 \cdot 0{,}15 = 321{,}3\ kg,$$
$$5440{,}7 - 183{,}6 - 321{,}3 \cdot h_1 = 0,\quad h_1 = 16{,}3\ cm.$$

So lange man h_1 kleiner macht als den soeben errechneten Wert von 163 mm, kann nur ein Teil der Schraubenkraft von 2142 kg nutzbar gemacht werden. Man sieht also, daß bei der üblichen Ausführung eine rückwärtige Stützung des Hakenkopfes die Schraube nicht vor biegenden Beanspruchungen vollkommen zu schützen vermag.

Würde man beispielsweise $h_1 = h_2 = 1{,}27$ cm ausführen, so würde

$$2 \,.\, P_0 \,.\, 1{,}27 - 3 \,.\, 0{,}15 \,.\, 1{,}27 \,.\, P_1 - 1{,}27 \,.\, P_1 = 0,$$

$$2 \,.\, P_0 = 1{,}45 \,.\, P_1, \quad P_1 \,.\, \mu = R_2, \quad P_1 = \frac{R_2}{\mu},$$

$$2 \,.\, 0{,}15 \,.\, P_0 = 1{,}45 \,.\, R_2, \quad R_2 = P_0 - P,$$

$$0{,}3 \,.\, P_0 = 1{,}45 \,.\, P_0 - 1{,}45 \,.\, P, \quad 1{,}45 \,.\, P = 1{,}15 \,.\, P_0,$$

$$P = \frac{1{,}15}{1{,}45} \,.\, 2142 = 1700 \text{ kg}.$$

Bei $h_1 = 16{,}3$ cm wird $P = P_0 - R_2$,

$$R_2 = P_1 \,.\, \mu = R_1 \,.\, \mu = P \,.\, \mu^2, \quad P = 2142 - P \,.\, \mu^2,$$

$$P = \frac{2142}{1 + 0{,}15^2} = 2095 \text{ kg},$$

d. h. es können $\sim 98\%$ der Schraubenkraft nutzbar gemacht werden, dagegen bei $h_1 = 1{,}27$ cm nur $\sim 79\%$.

Bei $h_1 = 0$, d. h. beim Fehlen der Rückenstütze, wird $P_1 = 0$, $h_1 = 0$, $P_0 = 0$. Die Schraube kann überhaupt nicht belastet werden, wenn man eine biegende Beanspruchung derselben vermeiden will.

Soll die Schraube ohne Rückenstütze auf exzentrischen Zug berechnet werden für die Gesamtbeanspruchung $600 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$, so muß sein

$$600 = \frac{P}{3{,}57} + \frac{P \,.\, 2 \,.\, 1{,}27}{0{,}1 \,.\, 2{,}54^3},$$

$$P = \frac{600}{\frac{1}{3{,}57} + \frac{2 \,.\, 1{,}27}{0{,}1 \,.\, 2{,}54^3}} \leqq 328 \text{ kg},$$

d. h. es werden bei zulässiger Zug- und Biegungsbeanspruchung nur $\sim 15\%$ der Schraubenkraft nutzbar gemacht.

30. ***Aufgabe:*** *Abb. 233* und *234* stellen den Ständer und die Einrichtung eines Lufthammers dar. Welche Beanspruchung erfährt der Querschnitt x — x?

Lösung: Wir nehmen an, daß in der Minute 180 Schläge ausgeführt werden, dann dauert der Hochgang des Kompressorkolbens G

$$\frac{60}{180 \,.\, 2} = 0{,}167 \text{ sec}.$$

Da wir nur einen ungefähren Begriff bekommen wollen von den Kräften, die für unsere Festigkeitsrechnung maßgebend sind, genügt es, wenn wir den Druck auf den Hammer von 1,1 atm als konstant annehmen; daß die lebendige Kraft des hinauffliegenden Bärs durch den im Raume S bei Eintritt des Zapfens Z in den Taucherkolben T entstehenden Luftpuffer aufgespeichert und zum Niederwerfen des Bärs nutzbar gemacht wird, bleibe unberücksichtigt, da dieser Druck nur verschwindend kurze Zeit wirkt. Der ringförmige Raum, in welchem der

Luftdruck herrscht, der auf den Bärkolben wirkt, hat einen Außendurchmesser = 340 mm und einen Innendurchmesser = 220 mm. Der hoch-

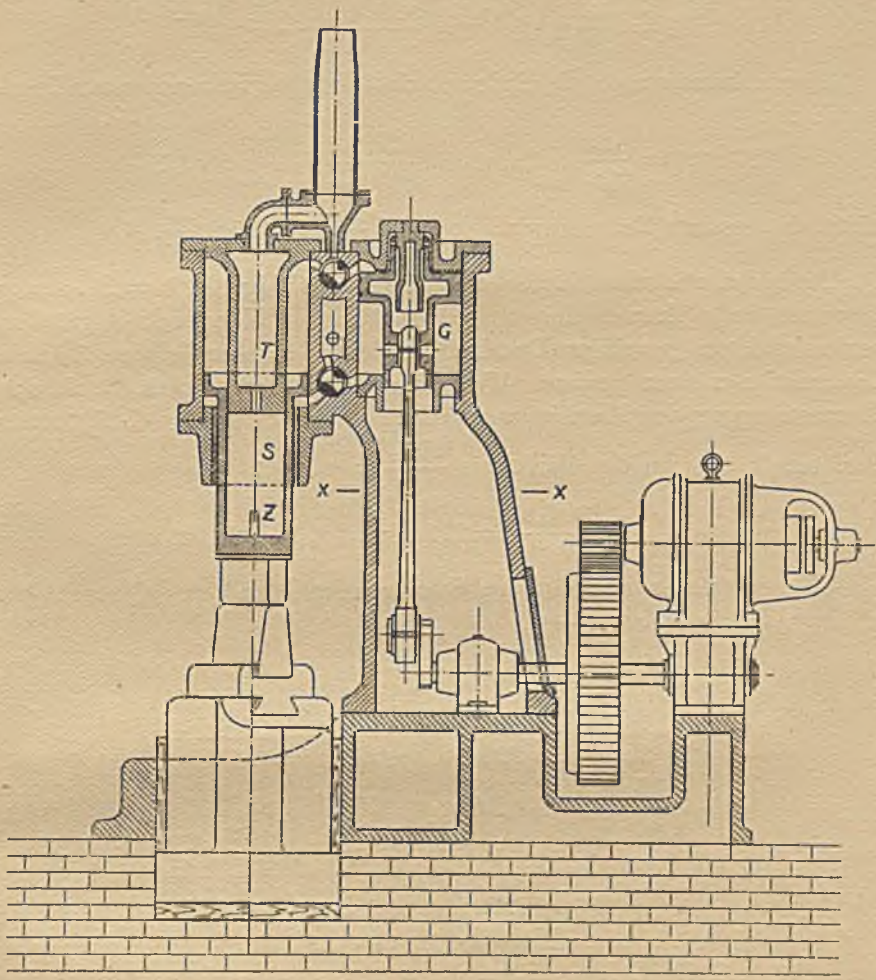


Abb. 233.

gehobene Bär wird durch Kompression im oberen und durch Vakuum im unteren Raume niedergeworfen. Es ist die Kraft, welche auf den Kolben einwirkt:

$$1{,}1 \cdot \frac{\pi}{4} (34^2 - 22^2) = 580 \text{ kg}.$$

Nach der Mechanik gilt die Beziehung:

$$P \cdot t = m \cdot (v - c);$$

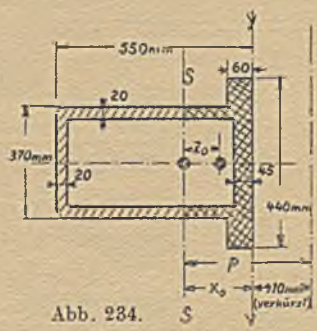


Abb. 234.

hierin bedeutet P die wirkende Kraft, t die Zeit der Wirkung, m die Masse des bewegten Körpers, v die Endgeschwindigkeit, c die Anfangsgeschwindigkeit desselben. In unserem Fall ist also

ungefähr, wenn Kolben und Bär 123 kg wiegen, und wenn wir die Dauer der Druckwirkung mit 0,1 sec.* schätzen:

$$580 \,.\, 0{,}1 = \frac{123}{9{,}81} \,.\, v, \quad v = \frac{580 \,.\, 0{,}1 \,.\, 9{,}81}{123} = 4{,}7 \,\frac{m}{sec}.$$

Hierzu kommt noch die Endgeschwindigkeit, herrührend vom Eigengewicht:

$$123 \,.\, 0{,}1 = \frac{123}{9{,}81} \,.\, v', \quad v' = \frac{123 \,.\, 0{,}1 \,.\, 9{,}81}{123} = \backsim 1 \,\frac{m}{sec},$$

mithin die gesamte Endgeschwindigkeit $4{,}7 + 1 = \backsim 5{,}8 \,\frac{m}{sec}$.

Die in dem stoßenden Körper enthaltene Arbeitsfähigkeit $A = P' \,.\, s$ mkg kann nun in so kurzer Zeit und auf so kurzer Wegstrecke s geäußert werden, daß ein gewaltiger Druck P' entsteht, der aber bei den üblichen Konstruktionen einen gewissen Wert nicht überschreiten kann, damit eine Überanstrengung der Maschine vermieden wird. Für derartige Lufthämmer kann man annehmen das Verhältnis $\frac{P_{max}'}{A} = \backsim 100$.

$$A = P' \,.\, s = \frac{123 \,.\, 5{,}8^2}{2 \,.\, 9{,}81} = 211 \text{ mkg}; \quad P'_{max} = 21\,100 \text{ kg}.$$

Wir bestimmen zunächst den Schwerpunktsabstand des Querschnittes in bezug auf die Achse y — y.

$$x_0 = \frac{\Sigma f \,.\, x}{\Sigma f}$$

	f	x	f . x
2 . 2 . 55 =	220	. 27,5 =	6050
33 . 4,5	148,5	. 2,25	334
33 . 2	66	. 54	3564
7 . 6	42	. 3	126
	476,5		10074

$$x_0 = \frac{10\,074}{476{,}5} = 21{,}1 \text{ cm}.$$

Der Schwerpunktsabstand der gezogenen (inneren) Fläche in bezug auf die Achse S — S:

$$z_0 = \frac{\Sigma f \,.\, x}{\Sigma f}$$

	f	x	f . x
2 . 2 . 21,1 =	84,4	. 10,55 =	890
33 . 4,5	148,5	. 18,85	2800
7 . 6	42	. 18,1	760
	274,9		4450

$$z_0 = \frac{4450}{274{,}9} = 16{,}2 \text{ cm}.$$

* 60% von $\frac{60}{2 \,.\, 180}$ sec.

Das Trägheitsmoment in bezug auf die Achse y — y:

$$J_y = \frac{1}{3} \Sigma b \,.\, h^3,$$

$\frac{1}{3} \,.\, [37 \,.\, 55^3 - 33 \,.\, 53^3 + 33 \,.\, 4{,}5^3 + 7 \,.\, 6^3] = 415\,817 \text{ cm}^4$, in bezug auf die Achse S — S:

$$J_s = J_y - F \,.\, x_0{}^2 = 415\,817 - 476{,}5 \,.\, 21{,}1^2 = 207\,817 \text{ cm}^4.$$

Die zulässige Zugspannung für Gußeisen ist nach Belastungsfall II zu bestimmen und möge zur Berücksichtigung der Stoßwirkung auf $\frac{3}{4}$ vermindert werden; also ist $k_z = \frac{3}{4} \,.\, 200 = 150 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$. Mit $\mu = 1$ und $e = x_0 = 21{,}1$ cm wird

$$k_b = \mu \,.\, k_z \,.\, \sqrt{\frac{e}{z_0}} = 1 \,.\, 150 \,.\, \sqrt{\frac{21{,}1}{16{,}2}} = 172 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}.$$

Der Hebelarm p der exzentrischen Belastung:

$$41 + 21{,}1 = 62{,}1 \text{ cm},$$

folglich die reine Zugspannung $\sigma_z = + \frac{P'}{F} = + \frac{21\,100}{476{,}5} = + 44{,}2 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$,

die Biegungsspannung am inneren Rande:

$$\sigma_b = + \frac{M}{J} \,.\, e = + \frac{P' \,.\, p}{J_s} \,.\, x_0 = + \frac{21\,100 \,.\, 62{,}1 \,.\, 21{,}1}{207\,817} = + 133 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}.$$

Demnach wird auf der Innenseite die resultierende Randspannung

$$\sigma_{max} = + 44{,}2 + 133 = 177{,}2 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \text{ Zug.}$$

$177{,}2 \cong 172 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$. Wir können die resultierende Zugspannung noch gerade als zulässig betrachten.

31. ***Aufgabe:*** Ein Stahlrohr *(Abb. 235)* mit $l = 100$ cm, $a = 15$ cm, wird durch eine Kraft $P = 200$ kg auf Biegung beansprucht und durch

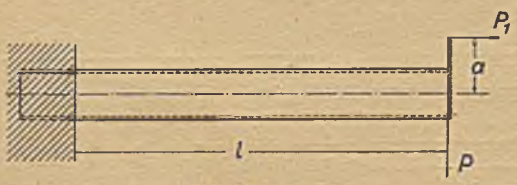


Abb. 235.

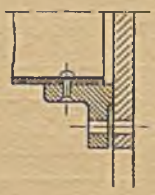


Abb. 235 *a*.

eine Kraft $P_1 = 100$ kg auf exzentrischen Zug. Welcher Rohrquerschnitt ist zu wählen? $k = k_z = k_b = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$.

Lösung: Die biegende Kraft P ergibt eine Randspannung (Zug bezw. Druck)

$$\frac{P \cdot l}{W} = \frac{200 \cdot 100}{W} = \frac{20\,000}{W} \frac{kg}{cm^2}.$$

Die ziehende Kraft P_1 ergibt eine Zugspannung:

$$\frac{P_1}{F} = \frac{100}{F} \frac{kg}{cm^2}.$$

Die biegende Kraft P_1 ergibt eine Randspannung (Zug bezw. Druck):

$$\frac{P_1 \cdot a}{W} = \frac{100 \cdot 15}{W} = \frac{1500}{W} \frac{kg}{cm^2}.$$

Alle diese Spannungen addieren sich an der oberen Begrenzungsfaser des Stahlrohres und es ergibt sich eine Gesamtzugspannung:

$$\frac{20\,000}{W} + \frac{1500}{W} + \frac{100}{F} = \frac{21\,500}{W} + \frac{100}{F} \frac{kg}{cm^2}.$$

Es muß sein $\frac{21\,500}{W} + \frac{100}{F} \leqq 1000 \frac{kg}{cm^2}.$

Für eine Entwurfsberechnung ist allerdings dieser Ausdruck wenig geeignet, weil zwei Unbekannte darin vorkommen. Am besten gehen wir so vor, daß wir aus der Tabelle für Stahlrohre einen Rohrquerschnitt schätzen und für diesen den Quotienten $\frac{W}{F}$ ermitteln; z. B.: 70 mm Außendurchmesser, 4 mm Wandstärke.

$$\frac{W}{F} = \frac{12{,}95}{8{,}29} = 1{,}562,$$

$$\frac{21\,500}{W} + \frac{100 \cdot 1{,}562}{W} = 1000, \quad W = 21{,}656\ cm^3, \quad F = \frac{21{,}656}{1{,}562} = 13{,}86\ cm^2.$$

Gewählt Stahlrohr, Außendurchmesser = 80 mm, Wandstärke 5,5 mm.

$$\frac{W_{vorh}}{F_{vorh}} = \frac{22{,}45}{12{,}87} = 1{,}74, \quad \frac{21\,500}{W_{erf}} + \frac{100 \cdot 1{,}74}{W_{erf}} = 1000, \quad W_{erf} = 21{,}674\ cm^3,$$

$$\sigma_{max} = \frac{21\,500}{22{,}45} + \frac{100}{12{,}87} = 965{,}4 \frac{kg}{cm^2} < 1000 \frac{kg}{cm^2}.$$

32. *Aufgabe:* Ein gußeiserner Stab mit T-förmigem Querschnitt von l = 100 cm Länge ist durch eine Kraft Q = 1000 kg auf Zug beansprucht.

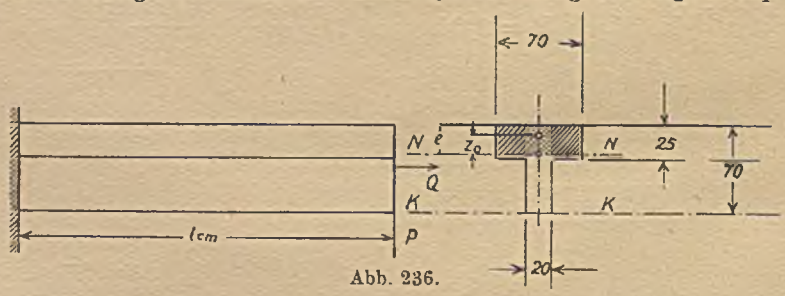


Abb. 236.

Welche Vertikalkraft P darf am Ende des Stabes angreifen, wenn die zulässige Zugbeanspruchung des Gußeisens mit $k_z = 200 \frac{kg}{cm^2}$ angenommen wird *(Abb. 236).*

Lösung: Bekanntlich berechnet sich die zulässige Biegungsspannung zu $k_b = \mu \cdot k_z \cdot \sqrt{\frac{e}{z_0}}$; hierin bedeutet k_z die zulässige Zugspannung, e den Abstand der äußersten gezogenen Faser von der Nullinie, z_0 den Schwerpunktsabstand der gezogenen Querschnittsteile von der Nullinie, μ eine von der Form des Querschnittes abhängige Zahl.

$$20 \cdot 70 \cdot 35 + 50 \cdot 25 \cdot 12{,}5 = (70 \cdot 25 + 45 \cdot 20) \cdot e,$$

$$e = 24{,}4 \text{ mm}, \quad z_0 = 12{,}2 \text{ mm}, \quad \mu = 1,$$

$$k_b = 1 \cdot 200 \cdot \sqrt{2} = 280 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}.$$

Die größte Beanspruchung des Stabes entsteht auf der Oberseite und ist eine Zugspannung. Die resultierende Randspannung auf der Oberseite des Stabes setzt sich aus zwei Zugspannungen zusammen; die eine rührt her von der ziehenden Kraft Q = 1000 kg, die andere von der unbekannten biegenden Kraft P. Die durch Q hervorgerufene Spannung σ_z dürfte $200 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ betragen, wenn sie allein wirken würde, die durch P hervorgerufene Spannung σ_b dürfte $280 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ betragen, wenn sie allein wirken würde. Die resultierende Randspannung σ_{max} wird also einen Wert erreichen dürfen, dessen Größe abhängig ist von dem Anteil der ziehenden und biegenden Kräfte, und der zwischen 200 und $280 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ liegen wird.

Wir nehmen versuchsweise $240 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ an.

$$\sigma_{max} = + \frac{Q}{F} + \frac{M_b}{W}; \quad M_b = P \cdot 100 \text{ cmkg},$$

$$F = 7 \cdot 2{,}5 + 2 \cdot 4{,}5 = 26{,}5 \text{ cm}^2, \quad J_K = 7 \cdot \frac{7^3}{3} - 5 \cdot \frac{4{,}5^3}{3} = 648{,}4 \text{ cm}^4,$$

$$J_N = J_K - F \cdot (7 - e)^2 = 648{,}4 - 26{,}5 \cdot 4{,}56^2 = 97{,}4 \text{ cm}^4,$$

$$W = \frac{J_N}{e}; \quad W = \frac{97{,}4}{2{,}44} = 39{,}9 \text{ cm}^3,$$

$$240 = \frac{1000}{26{,}5} + \frac{P \cdot 100}{39{,}9}, \quad P = 80{,}7 \text{ kg},$$

$$\sigma_z = \frac{1000}{26{,}5} = 37{,}7 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}, \quad \sigma_b = \frac{80{,}7 \cdot 100}{39{,}9} = 202{,}3 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2},$$

$$\sigma_z + \sigma_b = 37{,}7 + 202{,}3 = 240 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2},$$

das tatsächlich gestattete $\sigma_{max} = \frac{202{,}3}{240} \cdot 280 + \frac{37{,}7}{240} \cdot 200 = 270 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$

$$270 = \frac{1000}{26{,}5} + \frac{P \cdot 100}{39{,}9}. \quad P = 92{,}6 \text{ kg}.$$

$$\sigma_b = \frac{92{,}6 \,.\, 100}{39{,}9} = 232{,}3 \,\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2},$$

$$\sigma_{max} = \frac{232{,}3}{270} \,.\, 280 + \frac{37{,}7}{270} \,.\, 200 = 269 \,\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}.$$

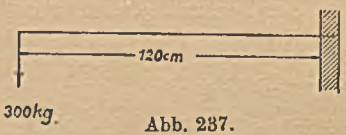


Abb. 237.

Wäre der Stab nicht auf Zug beansprucht ($Q = o$),
so könnte sein $M_b = W \,.\, k_b$,

$$P \,.\, 100 = 39{,}9 \,.\, 280,$$

$$P = \frac{39{,}9 \,.\, 280}{100} = 111{,}8 \text{ kg}.$$

33. ***Aufgabe:*** Der in *Abb. 237* angedeutete Freiträger soll aus einem Formeisen hergestellt werden, welches den sparsamsten Materialverbrauch ergibt (Din 1612).

Formeisen	J_{cm}^4	W_{cm}^3	NPN	F_{cm}^2
L	280	35,7	11	25,1
∧	194	37,6	13	30,0
⊂	250	39,3	9	21,8
[	364	43,2	12	17,0
I	171	34,2	10	10,6
⊓	222	44,4	10	14,5
Z	270	39,8	10	14,5
⌒	147	33,4	20	38,7
⊥	270	38,6	18	33,3

Abb. 238.

Lösung: $M_b' = W \,.\, k_b = 300 \,.\, 120 = 36\,000$ cmkg.

$$k_b = 1080 \,\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}; \quad W = \frac{36\,000}{1080} = 33{,}4 \text{ cm}^3.$$

Die Resultate sind in der Tabelle *Abb. 238* zusammengestellt. Der günstigste Querschnitt ist das I-Eisen.

34. ***Aufgabe:*** Eine Platte ist gemäß *Abb. 239* mit vier Schrauben befestigt. Von den beiden Gewichten kann manchmal auch das eine fehlen, sodaß nur die eine Seite belastet ist.

Was für Schraubendurchmesser sind zu wählen bei $k_z = 600 \,\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$.

Lösung: Wir nehmen an, daß die Platte so stark ist, daß sie keine nennenswerte Formänderung erleidet. Innerhalb der Proportionalitätsgrenze verlängern sich die Körper in demselben Maße wie ihre Belastung zunimmt. Fehlt das rechte Gewicht, so kann man annehmen, daß sich die Platte um o dreht, so lange bis das Moment der

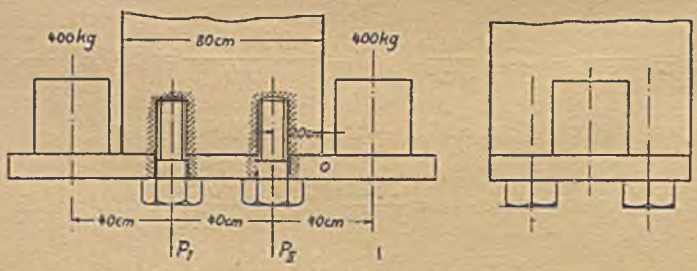


Abb. 239.

inneren Kräfte der Schrauben gleich ist dem äußeren biegenden Moment (*Abb. 239 a*).

$$400 \,.\, (40 + 40 + 20) = P_I \,.\, 60 + P_{II} \,.\, 20,$$
$$P_I : P_{II} = 60 : 20 = 3 : 1, \quad P_I = 3\, P_{II}\,.$$
$$40\,000 = P_I \,.\, 60 + \frac{P_I}{3} \,.\, 20; \quad P_I = 600 \text{ kg}, \; P_{II} = 200 \text{ kg}.$$

Die Werte P_I und P_{II} vertauschen ihre Größe, wenn das linke Gewicht fehlt.

Die errechnete Kraft von 600 kg ist für die Schrauben eine exzentrisch wirkende Kraft, die sich gleichmäßig auf zwei Schrauben verteilt, sodaß also auf jede Schraube eine exzentrisch wirkende Zugkraft von 300 kg entfällt (*Abb. 239*).

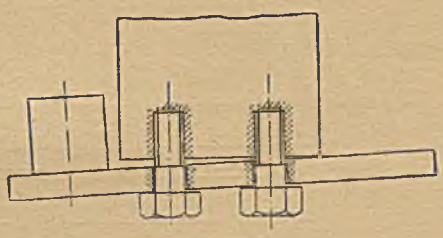


Abb. 239 *a*.

$$\sigma_{max} = + \frac{P}{F} + \frac{M_b}{W} \frac{kg}{cm^2}.$$

Nehmen wir die zulässige Randspannung mit $600 \frac{kg}{cm^2}$ an, so erhielten wir bei $1^1/_8''$ Schrauben noch eine zu große Beanspruchung, denn

$$\sigma_{max} = \frac{300 \,.\, 4}{2{,}393^2 \,.\, \pi} + \frac{300 \,.\, 2{,}655}{0{,}1 \,.\, 2{,}393^3} = \sim 648 \frac{kg}{cm^2} > 600 \frac{kg}{cm^2}.$$

Vier Schrauben $1^1/_8''$) sind also noch nicht reichlich genug. Die entworfene Anordnung *Abb. 239* ist mithin als ungeeignet zu bezeichnen. Man wird die Anordnung *Abb. 240* vorziehen. $k_s = 480 \frac{kg}{cm^2}$, $400 \,.\, 100 = S \,.\, 80$,

$$S = 500 \text{ kg}, \quad \text{je Schraube } 250 \text{ kg}.$$

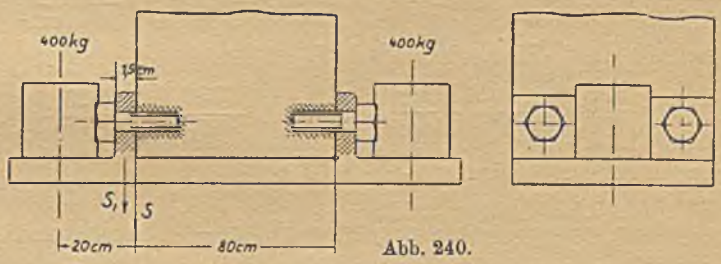


Abb. 240.

Schub: $\frac{d_1^{\,2}\,\pi}{4} \,.\, k_s = 250, \quad \frac{d_1^{\,2}\,\pi}{4} = \frac{250}{480} = 0{,}52 \text{ cm}^2, \quad {}^7/_{16}''$) Din 11.

Biegung: $k_b = 600 \frac{kg}{cm^2}$, $400 \,.\, 100 = S_1 \,.\, 80{,}75$, $S_1 = 496$ kg,

je Schraube 248 kg. $M_b = W \,.\, k_b$, $248 \,.\, 0{,}75 = 0{,}1 \,.\, d_1^3 \,.\, 600$.

$$d_1 = \sqrt[3]{\frac{248 \,.\, 0{,}75}{0{,}1 \,.\, 600}} = 1{,}328 \text{ cm}. \quad \text{Im ungünstigsten Falle:}$$

$$248 \,.\, 1{,}5 = 0{,}1 \,.\, d_1^3 \,.\, 600, \qquad d_1 = \sqrt[3]{\frac{248 \,.\, 1{,}5}{0{,}1 \cdot 600}} = 1{,}84 \text{ cm},$$

ausgeführt nach Din 11, vier Schrauben $^7/_8''$), $d_1 = 18{,}611$ mm.

35. ***Aufgabe:*** Das Gestell *Abb. 241* ist durchzurechnen.

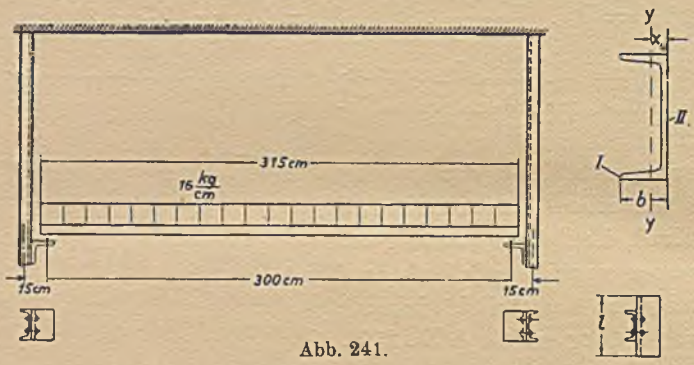


Abb. 241.

Lösung: Die gesamte Belastung beträgt $16 \,.\, 315 = 5040$ kg. Auf jedes Auflager entfallen $\frac{5040}{2} = 2520$ kg. Bei der Berechnung der]-Eisen handelt es sich um einen exzentrischen Zug.

Die Randspannung bei II ist $\sigma_{II} = + \sigma_{b_{II}} + \sigma_z$, die Randspannung bei I ist $\sigma_I = - \sigma_{b_I} + \sigma_z$. Das biegende Moment $M_b = 2520 \,.\, 15 = 37\,800$ cmkg.

Das [-Eisen hat zwei Widerstandsmomente:

$$W_I = \frac{J_y}{b - x_0} \text{ cm}^3 \text{ und } W_{II} = \frac{J_y}{x_0} \text{ cm}^3, \quad M_b = W \,.\, \sigma_b, \quad \sigma_b = \frac{M_b}{W} \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}.$$

Bei I herrscht $\sigma_{b_I} = \frac{M_b}{W_I} \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$, bei II herrscht $\sigma_{b_{II}} = \frac{M_b}{W_{II}} \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$, folglich ist $\sigma_I = - \frac{M_b}{W_I} + \sigma_z \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$, $\sigma_{II} = + \frac{M_b}{W_{II}} + \sigma_z \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$, $\sigma_z = \frac{2520}{f} \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$, wenn f der Querschnitt des [-Eisens ist.

$$\sigma_I = - \frac{37\,800}{W_I} + \frac{2520}{f} \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}, \quad \sigma_{II} = + \frac{37\,800}{W_{II}} + \frac{2520}{f} \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}.$$

Wir nehmen versuchsweise [-Eisen N P 20.

$$\sigma_I = - \frac{37\,800 \,.\, (7{,}5 - 2{,}01)}{148} + \frac{2520}{32{,}2} = - 941{,}8 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \text{ Druckspannung bei I,}$$

$$\sigma_{II} = + \frac{37\,800 \,.\, 2{,}01}{148} + \frac{2520}{32{,}2} = + 591{,}5 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \text{ Zugspannung bei II.}$$

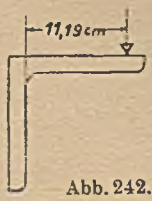


Abb. 242.

Für eine Belastung wechselnd zwischen Null und Maximum sind diese Werte annehmbar und wir können N P 20 beibehalten.

Wir nehmen an zwei Winkeleisen N P Nr. 15 (150 × 150 × 18). $l = 20$ cm.

Die Untersuchung auf Biegung ergibt *(Abb. 242)*:

$$2520 \,.\, 11{,}19 = \frac{20 \,.\, 1{,}8^2}{6} \,.\, \sigma_b, \quad \sigma_b = 2610 \,\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}.$$

Wir müssen also die ⊥-Eisen länger als 20 cm machen, und zwar bei einem $k_b = 1000 \,\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$:

$$2520 \,.\, 11{,}19 = \frac{l \,.\, 1{,}8^2}{6} \,.\, 1000, \quad l = 522 \text{ mm},$$

wobei wir annehmen, daß die Auflagerung der Last gleichmäßig auf der ganzen Länge von 522 mm erfolgt.

Wir müssen jetzt auch eine andere Befestigungsweise wählen *(Abb. 243)*. Nehmen wir den ungünstigen Fall an, daß nur zwei Nieten an der Aufnahme der abscherenden Kraft beteiligt sind, so muß sein

$$\frac{d^2 \pi}{4} = \frac{2520}{2 \,.\, k_s}, \quad k_s = 750 \,\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2},$$

wir wählen Niete von 19 mm Durchmesser (Rohnietdurchmesser). Din 124.

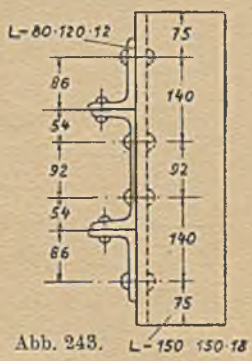


Abb. 243.

36. ***Aufgabe:*** Ein Freiträger, Eichenholz, $k_b = 100 \,\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ hat eine Traglänge von 2 m, quadratischen Querschnitt mit der Seitenlänge a cm, und am freien Ende *(Abb. 244)* eine schiefe Belastung von 120 kg, die unter einem Winkel $\alpha = 60^0$ gegen die Hauptachse I geneigt ist. Wie groß muß der quadratische Querschnitt sein?

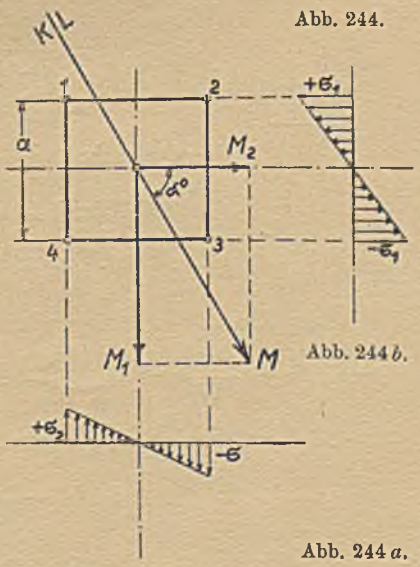


Abb. 244.
Abb. 244 b.
Abb. 244 a.

Lösung: Wir zerlegen das Moment $M = 120 \,.\, 200 = 24\,000$ cmkg in die Seitenmomente $M_1 = M \,.\, \sin\alpha = 24\,000 \,.\, 0{,}866 = 20\,784$ cmkg, und $M_2 = M \,.\, \cos\alpha = 24\,000 \,.\, 0{,}5 = 12\,000$ cmkg.

Für diese Seitenmomente ist die gewöhnliche Biegungsgleichung anwendbar, folglich erhalten wir die Einzelspannungen:

$$\sigma_1 = \pm \frac{M_1}{W} = \pm \frac{20\,784 \,.\, 6}{a^3} \quad \text{und}$$

$$\sigma_2 = \pm \frac{M_2}{W} = \pm \frac{12\,000 \,.\, 6}{a^3}.$$

Hierzu gehören die Spannungsdiagramme *(Abb. 244 a u. b)*. Da nun beide Seitenmomente gleichzeitig wirken, so erhalten wir durch die schiefe Be-

lastung die größten Spannungen in den Ecken 1 und 3 des Querschnittes, nämlich

$$\sigma \frac{\max}{\min} = \pm (\sigma_1 + \sigma_2).$$

Bedingung für die Zulässigkeit der Ausführung ist nun unabhängig vom Vorzeichen $\sigma_{max} \leqq k_b$.

Im Grenzfall: $\sigma_1 + \sigma_2 = k_b, \quad \frac{M_1}{W} + \frac{M_2}{W} = k_b,$

$$\frac{6}{a^3}(20\,784 + 12\,000) = 100;$$

$$a = \sqrt[3]{\frac{6 \,.\, 32\,784}{100}} = 12{,}5 \text{ cm}.$$

37. *Aufgabe*:* Auf den Stahl einer Stoßmaschine wirken eine Schnittkraft P senkrecht nach oben und eine Normalkraft S horizontal *(Abb. 245).* Der Stoßstahl hat im Schnitt I—I einen Querschnitt 9,5 . 2,2 cm² = 20,9 cm². Die Schneide ist 30 mm breit, der Vorschub beträgt 0,2 mm, der Schnittwiderstand 19000 $\frac{kg}{cm^2}$. l = 400 mm.

Abb. 245.

Welche maximale Spannung tritt im Stahl auf?

Lösung: $P = S = 0{,}02 \,.\, 3 \,.\, 19000 = 1140$ kg.

$$W = \frac{b \,.\, h^2}{6} = \frac{2{,}2 \,.\, 9{,}5^2}{6} = 33{,}09 \text{ cm}^3,$$

$$J = \frac{b \,.\, h^3}{12} = \frac{2{,}2 \,.\, 9{,}5^3}{12} = 157{,}18 \text{ cm}^4.$$

Die Kraft P als Druckkraft ergibt eine Druckspannung im Querschnitt I—I $= \frac{P}{F} = \frac{1140}{20{,}9} = 54{,}54 \frac{kg}{cm^2}$.

Die Kraft P als biegende Kraft ergibt Randspannungen (Zug bezw. Druck) von $\frac{P \,.\, e}{W} = \frac{1140}{33{,}09} \,.\, e = 34{,}45 \,.\, e \frac{kg}{cm^2}$.

Die Kraft S als biegende Kraft ergibt Randspannungen (Zug bezw. Druck) von $\frac{S \,.\, l}{W} = \frac{1140 \,.\, 40}{33{,}09} = 1378 \frac{kg}{cm^2}$.

Alsdann werden die Gesamtrandspannungen innen bezw. außen:

$$54{,}54 + 34{,}45 \,.\, e - 1378 \frac{kg}{cm^2}$$

$$54{,}54 - 34{,}45 \,.\, e + 1378 \frac{kg}{cm^2}.$$

* Entnommen: Winkel, Festigkeitslehre.

Schätzen wir $e = \frac{l}{13} = \frac{400}{13} = 30{,}77$ mm, so wird

$$\sigma_{max} = 54{,}54 - 34{,}45 \,.\, 3{,}08 + 1378 = 1326{,}4 \frac{kg}{cm^2}.$$

Der Stahl ist aber auch auf Knickung beansprucht. Oben eingespannt und unten in Spitze gelagert.

$$P = \frac{2\,\pi^2}{S_0} \cdot \frac{E \,.\, J}{l^2}.$$

Der Sicherheitsgrad nach Euler $S_E = \frac{2\,\pi^2}{P} \cdot \frac{E \,.\, J}{l^2}$,

$$J_{min} = \frac{h \,.\, b^3}{12} = \frac{9{,}5 \,.\, 2{,}2^3}{12} = 8{,}43 \text{ cm}^4,$$

$$S_E = \frac{2\,\pi^2}{1140} \cdot \frac{2\,200\,000 \,.\, 8{,}43}{40^2} = 203.$$

Die mittlere Beanspruchung auf Schub σ_s beträgt:

$$\frac{S}{F} = \frac{1140}{20{,}9} = 54{,}54 \frac{kg}{cm^2}.$$

Die Durchbiegung des Stahles wird:

$$f = \frac{S \,.\, l^3}{3\,E \,.\, J} = \frac{1140 \,.\, 40^3}{3 \,.\, 2\,200\,000 \,.\, 157{,}18} = 0{,}0704 \text{ cm} = 0{,}7 \text{ mm}.$$

Infolge der Durchbiegung federn lange und frei liegende Stähle.

38. *Aufgabe:* Für eine Kolbenkraft von 24 500 kg und eine Stangenlänge von 3000 mm ist der Pleuelstangendurchmesser zu berechnen. Die Sicherheit gegen Knickung soll 25 fach sein. Die minutliche Umdrehungszahl ist 100 bei einem Kurbelradius von 600 mm.

Lösung: Der Schaft der Pleuelstange ist auf Knickung zu berechnen. Man nimmt eine beidseitige Spitzenlagerung an mit der zugehörigen Gleichung:

$$P = \frac{\pi^2}{S_0} \cdot \frac{E \,.\, J}{l^2},$$

$$P = 24\,500 = \frac{\pi^2}{25} \cdot \frac{2\,150\,000 \,.\, J}{300^2};$$

$$J = 2600 \text{ cm}^4.$$

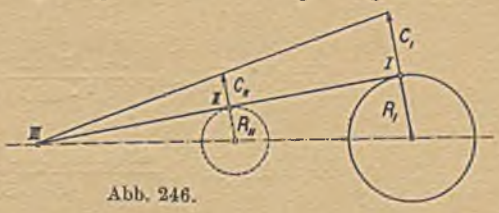


Abb. 246.

Bei kreisrundem Querschnitt $2600 = \frac{\pi}{64} \,.\, d^4$; $d = 15{,}2$ cm. Nunmehr ist die Beanspruchung auf Biegung durch die Zentrifugalkräfte bei gleichzeitiger Zugbeanspruchung nachzurechnen.

In der gezeichneten Stellung *(Abb. 246)* wirken die Zentrifugalkräfte senkrecht zur Längsachse der Pleuelstange.

Im Punkte	I	herrscht	die	Zentrifugalkraft		$C_I = m \,.\, \omega^2 \,.\, R_I$,
„	„	II	„	„	„	$C_{II} = m \,.\, \omega^2 \,.\, R_{II}$,
„	„	III	„	„	„	$C_{III} = 0$.

Da die Winkelgeschwindigkeit ω und die bewegte Masse m an jeder Stelle der Pleuelstange als gleich groß angenommen werden, so verhalten sich die Zentrifugalkräfte C wie die Halbmesser R der zugehörigen Kreisbahnen. Wir bekommen also den Belastungsfall *(Abb. 247)*, Träger auf zwei Stützen mit einer Streckenlast, die von Null bis zu einem Maximum allmählich zunimmt. Das Gewicht G der Stange berechnet sich bei einem Einheitsgewicht von $7{,}85 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$ zu:

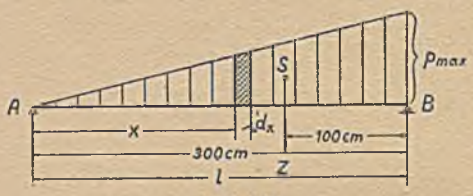


Abb. 247.

$$\frac{30 \,.\, 1{,}52^2 \,.\, \pi}{4} \,.\, 7{,}85 = 427 \text{ kg}.$$

Die gesamte an der Stange angreifende, von der Zentrifugalwirkung herrührende Kraft Z ist

$$\int_{x=0}^{x=l} m \,.\, \omega^2 \,.\, R = \int_{x=0}^{x=l} 0{,}10194 \,.\, \frac{\frac{G}{l} \,.\, dx \,.\, v^2}{R}; \text{ einzusetzen}$$

$$R \text{ in m}, \quad v \text{ in } \frac{m}{sec}, \quad G \text{ in kg}, \quad l \text{ in m}. \qquad R = \frac{R_1}{l} \,.\, x,$$

$$v = \frac{2 \,.\, \frac{R_1}{l} \,.\, x \,.\, \pi \,.\, n}{60} \frac{m}{sec},$$

$$Z = \int_{x=0}^{x=l} 0{,}10194 \,.\, \frac{\frac{G}{l} \,.\, dx \,.\, \left(\frac{2 \,.\, \frac{R_1}{l} \,.\, x \,.\, \pi \,.\, n}{60}\right)^2}{\frac{R_1}{l} \,.\, x} \text{ kg},$$

$$Z = 0{,}10194 \,.\, \frac{G \,.\, 4 \,.\, \pi^2 \,.\, n^2 \,.\, R_1}{l^2 \cdot 3600} \,.\, \int_{x=0}^{x=l} x \,.\, dx \text{ kg},$$

$$Z = 0{,}10194 \,.\, \frac{427 \,.\, 4 \,.\, 10 \,.\, 10\,000 \,.\, 0{,}6}{3^2 \,.\, 3600} \,.\, \frac{3^2}{2} = 1450 \text{ kg}.$$

Der Einfluß des Stangenkopfes ist nur gering; er ist deshalb unberücksichtigt geblieben.

$$A \,.\, 300 - 1450 \,.\, 100 = 0; \qquad A = 483{,}33 \text{ kg}.$$

$$1450 \,.\, 200 - B \,.\, 300 = 0; \qquad B = 966{,}67 \text{ kg}.$$

$$\eta \textit{ (Abb. 248)} = \frac{p_{max}}{2\,l} \,.\, x^2 \text{ kg}, \qquad p_{max} = \frac{2\,Z}{l} \frac{\text{kg}}{\text{cm}},$$

$$p_{max} = \frac{2 \,.\, 1450}{300} = 9{,}67 \frac{\text{kg}}{\text{cm}}; \quad \eta = \frac{9{,}67}{2 \,.\, 300} \,.\, x^2 = 0{,}01611 \,.\, x^2 \text{ kg}.$$

Damit läßt sich die Lage des gefährlichen Querschnittes bestimmen, $\eta = A = 483{,}33 = 0{,}01\,611 \,.\, x^2$; der gefährliche Querschnitt liegt dort, wo $x = \sqrt{\frac{483{,}33}{0{,}01611}} = 173{,}3$ cm ist.

Das größte Biegungsmoment wird bekanntlich veranschaulicht durch den Inhalt der Querkraftfläche *(Abb. 248)*. Wir nehmen hier ausnahmsweise

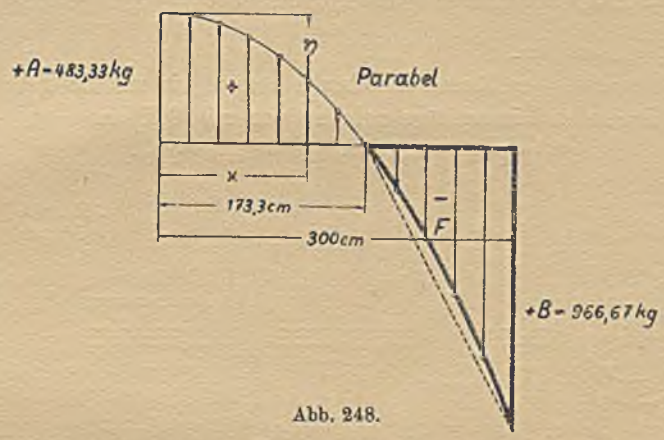


Abb. 248.

die Querkraftfläche F des rechten Trägerstückes, weil wir dort, ohne einen großen Fehler zu machen, die parabolische Begrenzung durch eine gerade Linie ersetzen können.

$$M_{max} = \frac{966{,}67 \,.\, 126{,}7}{2} = 61\,200 \text{ cmkg.}$$

(Das tatsächliche $M_{max} = 0{,}128 \,.\, P \,.\, l = 0{,}128 \,.\, 1450 \,.\, 300 = 55\,680$ cmkg.)
Das Widerstandsmoment der Stange $= 0{,}1 \,.\, d^3 \text{ cm}^3$,

$$0{,}1 \,.\, 15{,}2^3 = 351{,}18 \text{ cm}^3;$$

daraus folgt $$\sigma_b = \frac{61\,200}{351{,}18} = 174{,}4 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}.$$

Hierzu kommt noch die Zugbeanspruchung

$$\sigma_z = \frac{24\,500}{\frac{15{,}2^2\,\pi}{4}} = 135 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2};$$

die Gesamtbeanspruchung:

$$\sigma_b + \sigma_z = 174{,}4 + 135 = \sim 310 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}.$$

39. ***Aufgabe:*** Eine Vorgelegewelle leitet 5 PS weiter bei 80 minutlichen Umdrehungen *(Abb. 249)*. Welchen Durchmesser bekommt die Welle und welchen Durchmesser würde sie als normale Transmissionswelle bekommen, wenn die Scheiben unmittelbar neben den Lagern angeordnet werden könnten?

Lösung: Um auf zusammengesetzte Festigkeit (Biegung und Verdrehung) rechnen zu können, brauchen wir das Drehmoment und das

Biegungsmoment. In unserem Falle ist das Drehmoment $M_d = 71\,620 \,.\, \frac{N}{n} =$ $= 71\,620 \,.\, \frac{5}{80} = 4476$ cmkg. Die Umfangskraft P′ der kleinen Scheibe $= \frac{M_d}{12{,}5} = \frac{4476}{12{,}5} = 358$ kg, die Umfangskraft P″ der großen Scheibe $= \frac{4476}{20} = 223{,}8$ kg. Der Eigenverbrauch der Vorgelegewelle ist dabei vernachlässigt worden.

Die Gewichte der Riemenscheiben schätzen wir mit 33 kg und 48 kg. Die biegenden Riemenzüge nehmen wir mit 3 P an.

$$3\,P' = 1074 \text{ kg}; \quad 3\,P'' = 672 \text{ kg}.$$

Abb. 249.

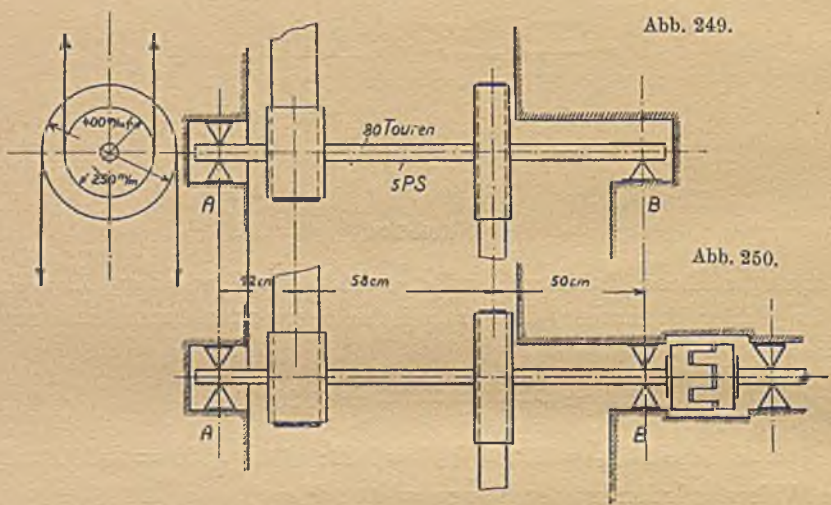


Abb. 250.

Zwecks Ermittlung der Auflagerreaktionen stellen wir die Momentengleichungen auf:

$$A \,.\, 120 + (1074 - 33) \,.\, 108 - (672 + 48) \,.\, 50 = 0; \quad A = -637 \text{ kg}.$$

Die Reaktion A = 637 kg wirkt von oben nach unten.

$$-B \,.\, 120 + 720 \,.\, 70 - 1041 \,.\, 12 = 0; \quad B = 316 \text{ kg}.$$

Kontrolle: $637 + 720 = 1041 + 316.$

Das größte Biegungsmoment $M_{b_{max}} = 316 \,.\, 50 = 15\,800$ cmkg.

Für billiges Flußeisen ist nach Bachscher Tabelle zu wählen:

$$k_b = 300 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \text{ (Fall III)}, \quad k_d = 400 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \text{ (Fall II)},$$

$$\alpha_0 = \frac{k_b}{1{,}3 \,.\, k_d} = \frac{300}{1{,}3 \,.\, 400} \cong 0{,}6, \quad M_i = 0{,}35 \,.\, M_b + 0{,}65 \,.\, \sqrt{M_b^2 + \alpha_0^2 \,.\, M_d^2};$$

$$M_i = 0{,}35 \,.\, 15\,800 + 0{,}65 \,.\, \sqrt{15\,800^2 + (0{,}6 \,.\, 4476)^2} = 15\,960 \text{ cmkg}.$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{M_i}{0{,}1 \,.\, k_b}} = \sqrt[3]{\frac{15\,960}{0{,}1 \,.\, 300}} = 8{,}1 \text{ cm}; \text{ nach Din 114} = 90 \text{ mm } \Phi.$$

Eine normale Triebwerkswelle, die 5 PS bei 80 Touren zu übertragen hat, bekommt einen Festigkeitsdurchmesser von $14{,}42 \cdot \sqrt[3]{\frac{N}{n}} = 14{,}42 \cdot \sqrt[3]{\frac{5}{80}} =$ $= 5{,}73$ cm, und einen Formänderungsdurchmesser von

$$12 \cdot \sqrt[4]{\frac{N}{n}} = 12 \cdot \sqrt[4]{\frac{5}{80}} = 6 \text{ cm.}$$

Würde außerdem noch die Möglichkeit bestehen, daß das Wellenstück die Arbeit von 5 PS gemäß *Abb. 250* weiterleiten muß, während der Riemen der kleinen Scheibe abgeworfen oder entspannt ist, so gestaltet sich die Berechnung des Wellendurchmessers wie folgt:

$$A \cdot 120 - 720 \cdot 50 = 0; \quad A = 300 \text{ kg},^*$$

$$-B \cdot 120 + 720 \cdot 70 = 0; \quad B = 420 \text{ kg}^*. \quad M_{b_{max}} = 420 \cdot 50 = 21\,000 \text{ cmkg.}$$

$$M_i = 0{,}35 \cdot 21\,000 + 0{,}65 \cdot \sqrt{21\,000^2 + (0{,}6 \cdot 4476)^2} = 21\,120 \text{ cmkg,}$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{21\,120}{0{,}1 \cdot 300}} = 8{,}9 \text{ cm.}$$

Hierbei ist vorausgesetzt, daß alle Zähne der Kupplung gleichmäßig tragen, daß also an der Kupplung keine Kräfte auftreten, die ein biegendes Moment hervorrufen.

Nehmen wir den ungünstigsten Fall an, daß nur ein Zahn faßt, so liegt der Belastungsfall *(Abb. 251)* vor.

Den Hebelarm a nehmen wir mit 25 cm an, den Wirkungshalbmesser der Umfangskraft = 10 cm.

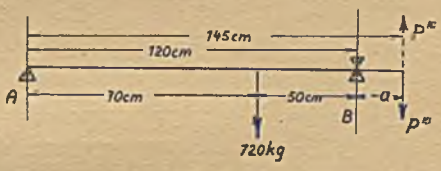


Abb. 251.

$$P''' = \frac{M_d}{10} = \frac{4476}{10} = 448 \text{ kg.}$$

Bei jeder Umdrehung der Welle wirkt P''' einmal nach oben und einmal nach unten. Wenn P''' nach unten wirkt, gilt:

$$A \cdot 120 - 720 \cdot 50 - (-25) \cdot 448 = 0;^* \quad A = 207 \text{ kg.}$$

$$-B \cdot 120 + 448 \cdot 145 + 720 \cdot 70 = 0;^* \quad B = 961 \text{ kg.}$$

$$M_{max} = 207 \cdot 70 = 14\,490 \text{ cmkg.}$$

$$M_i = 0{,}35 \cdot 14\,490 + 0{,}65 \cdot \sqrt{14\,490^2 + (0{,}6 \cdot 4476)^2} = 14\,650 \text{ cmkg,}$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{14\,650}{0{,}1 \cdot 300}} = 7{,}9 \text{ cm.}$$

Wenn P''' nach oben wirkt, gilt:

$$A \cdot 120 - 720 \cdot 50 + (-25) \cdot 448 = 0;^* \quad A = 393 \text{ kg.}$$

$$-B \cdot 120 - 448 \cdot 145 + 720 \cdot 70 = 0;^* \quad B = -121 \text{ kg}$$ (wirkt von oben nach unten).

* Das Gewicht der leerlaufenden Scheibe blieb unberücksichtigt.

Kontrolle: $393 + 448 = 720 + 121;$

$$M_{max} = 393 \,.\, 70 = 27\,510 \text{ cmkg.}$$

$$M_i = 0{,}35 \,.\, 27\,510 + 0{,}65 \,.\, \sqrt{27\,510^2 + (0{,}6 \,.\, 4476)^2} = 27\,595 \text{ cmkg.}$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{27\,595}{0{,}1 \,.\, 300}} = 9{,}72 \text{ cm,}$$

endgültig gewählt nach Din 114 $d = 100$ mm Φ.

40. ***Aufgabe:*** Eine Welle *(Abb 252)*, welche während des Betriebes kleine Verschiebungen in Richtung der eingezeichneten Pfeile erleidet, und die nicht zwangläufig angetrieben werden darf, wird aus diesem Grunde unter Vermittlung eines Rillenscheiben-Reibungstriebes und gewöhnlicher Reibungsräder von der Antriebswelle aus betätigt. Es sind 0,5 PS bei einer Tourenzahl der treibenden Welle = 60 abzugeben. Der Arbeitsverlust im Getriebe bleibe unberücksichtigt. Der Durchmesser der Vorgelegewelle (Flußeisen St 37) ist zu berechnen. Der Reibungskoeffizient für Gußeisen auf Gußeisen wird angenommen mit $\mu = 0{,}1$.

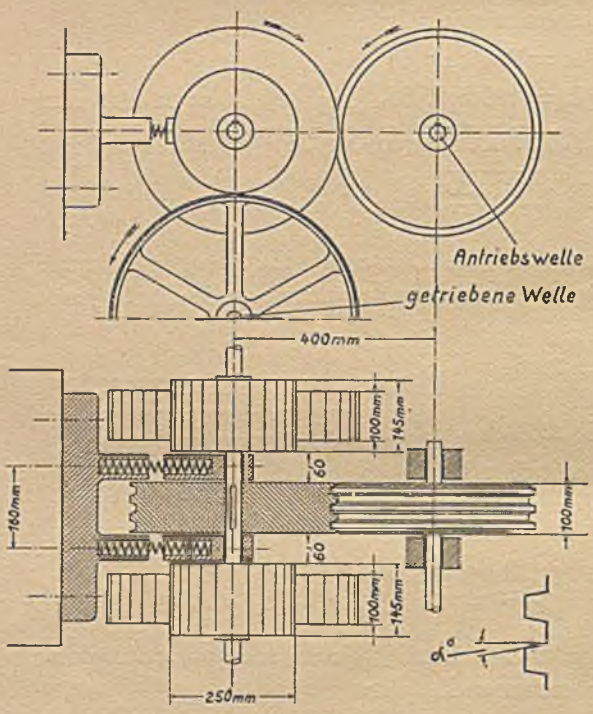


Abb. 252.

Lösung: Zunächst berechnen wir die notwendige Umfangskraft an den Rillenscheiben. Die Umfangsgeschwindigkeit v

$$= \frac{d \,.\, \pi \,.\, n}{60} = \frac{0{,}4 \,.\, \pi \,.\, 60}{60} = 1{,}257 \,\frac{m}{sec}. \quad P = \frac{75 \,.\, N}{v} = \frac{75 \,.\, 0{,}5}{1{,}257} = 30 \text{ kg.}$$

Der notwendige Anpressungsdruck $Q = P \,.\, \frac{\sin\alpha + \mu \,.\, \cos\alpha}{\mu}$.

Wir haben nunmehr zu untersuchen, wie groß der Ausdruck $\frac{\sin\alpha + \mu \,.\, \cos\alpha}{\mu}$ wird. Den Rillenwinkel α nehmen wir an mit 15^0. Es ist

$$\frac{\sin 15^0 + 0{,}1 \,.\, \cos 15^0}{0{,}1} = \sim 3{,}5; \quad Q = 3{,}5 \,.\, P = 3{,}5 \,.\, 30 = 105 \text{ kg.}$$

Wir wählen drei Rillen mit einer Rillentiefe von 12 mm. Den Federdruck wählen wir 120 kg. Die beiden glatten Reibungsräder haben als Berührungs-

flächen Gußeisen und Leder, wofür eine Reibungszahl $\mu_1 = 0{,}25$ einzusetzen ist v_1 ist hier $= \frac{0{,}25 \cdot \pi \cdot 60}{60} = 0{,}785 \frac{m}{sec}$; $P_1 = \frac{75 \cdot 0{,}5}{0{,}785} = 48$ kg. Es wird der notwendige Anpressungsdruck $Q_1 = \frac{P_1}{\mu_1} = \frac{48}{0{,}25} = 192$ kg. Damit eine Übertragung der Leistung möglich ist, muß das getriebene Rillenrad mit Scheiben und Welle mindestens 192 kg wiegen. Der Sicherheit halber wählen wir 200 kg. Führen wir die glatten Reibräder als volle Zylinder mit je 50 kg Gewicht aus, und schätzen wir das Gewicht der Vorgelegewelle und der beiden Federgehäuse mit 6 kg, so bleiben für die Rillenscheibe noch 94 kg übrig, die wir herausbekommen, wenn wir sie als vollen Zylinder herstellen. Die Belastung der Vorgelegewelle in der Horizontalebene zeigt *Abb. 253.* Die angenommenen 25 kg bedeuten den Reibungswiderstand $\frac{200}{2} \cdot 0{,}25$ an den glatten Reibungsrädern. Da das untere große glatte Reibungsrad der getriebenen Welle geringe Horizontalbewegungen ausführt, so können wir uns auch kurze Zeiträume denken, innerhalb welcher der Reibungswiderstand, der normal 25 kg beträgt, stark vermindert oder gar aufgehoben ist; dann gilt das Belastungsschema *(Abb. 254)* für die Horizontalebene.

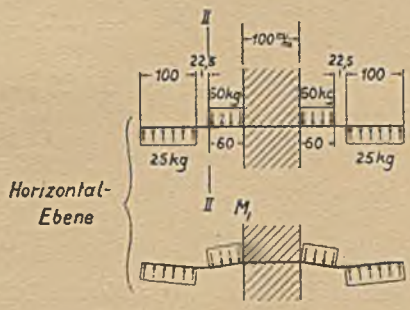


Abb. 253.

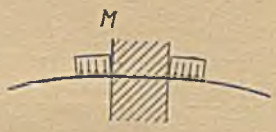


Abb. 254.

Das Biegungsmoment in der Horizontalebene.

$$M_I = +25 \cdot 13{,}25 - 60 \cdot 3 = +151{,}25 \text{ cmkg} \quad \text{bezw.}$$
$$-60 \cdot 3 = -180 \text{ cmkg};$$
$$M_{I_{max}} = 180 \text{ cmkg}; \quad M_{max_{hor}} = 25 \cdot 7{,}25 = 181{,}3 \text{ cmkg} = M_{II}.$$

Das Biegungsmoment in der Vertikalebene *(Abb. 255)*:

$$A_v = B_v = \sim 97 \text{ kg};$$
$$M_I = -50 \cdot 13{,}25 + 97 \cdot 8{,}25 = +137{,}75 \text{ cmkg},$$
$$M_{II} = -50 \cdot 7{,}25 + 97 \cdot 2{,}25 = -144{,}25 \text{ cmkg},$$
$$M_{max_{verk}} = -50 \cdot 18{,}25 + 97 \cdot 13{,}25 - 47 \cdot 2{,}5 = +255{,}25 \text{ cmkg}.$$

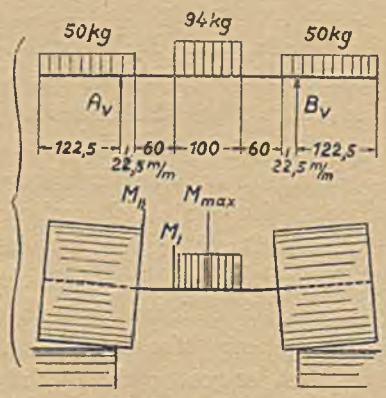


Abb. 255.

$$M_{I_{Res}} = \sqrt{M_{I_{hor}}^2 + M_{I_{vert}}^2} = \sqrt{180^2 + 137{,}75^2} = 227 \text{ cmkg},$$
$$M_{II_{Res}} = \sqrt{181{,}3^2 + 144{,}25^2} = 232 \text{ cmkg};$$

mithin das größte vorkommende Moment $M_{max} = 255{,}25$ cmkg.

Außerdem ist noch ein verdrehendes Moment vorhanden.

$$M_d = 30 \,.\, 20 = 600 \text{ cmkg.}$$

$$M_i = 0{,}35\, M_b + 0{,}65 \sqrt{M_b^2 + (\alpha_0 \,.\, M_d)^2};$$

$$k_b = 300 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \text{ (Fall III)},$$

$$k_d = 300 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \text{ (zwischen Fall II und III)},$$

$$\alpha_0 = \frac{k_b}{1{,}3 \,.\, k_d} = \frac{300}{1{,}3 \,.\, 300} = 0{,}77,$$

$$M_i = 0{,}35 \,.\, 255{,}25 + 0{,}65 \sqrt{255{,}25^2 + (0{,}77 \,.\, 600)^2},$$

$$M_i = 333 \text{ cmkg},$$

$$333 = 0{,}1 \,.\, d^3 \,.\, 300,$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{333}{0{,}1 \,.\, 300}} = 2{,}23 \text{ cm},$$

nach Din 114, $d = 25$ mm Φ.* $d = 12 \sqrt[4]{\frac{0{,}25}{60}}$; $d = 30$ mm Φ.

41. ***Aufgabe:*** Ein gußeiserner Träger auf zwei Stützen, an beiden Enden als frei aufliegend angenommen, ist unbelastet *(Abb. 256* u. *257)*. Seine schwalbenschwanzförmige Nut dient zur Führung eines Schlittens, der ein

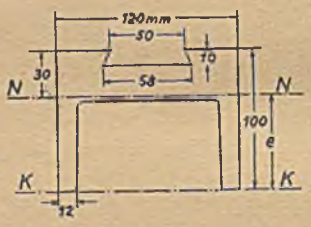


Abb. 256.

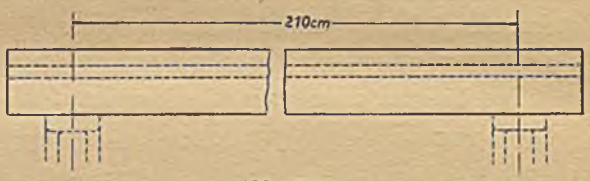


Abb. 257.

Schneidmesser trägt *(Abb. 14)*. Die Durchbiegung des Trägers muß möglichst gering sein, damit der Weg des Messers möglichst wenig von der Horizontalen abweicht. Wie groß wird das Verhältnis der Durchbiegungen in der Mitte des Trägers bei verschiedenen Querschnitten?

Lösung: Die Voraussetzung für die Richtigkeit der entwickelten Gleichungen trifft bei Gußeisen nicht zu; es unterliegt nicht dem Hookeschen Gesetz. Da wir aber annehmen, daß der Konstrukteur weniger die tatsächliche Durchbiegung, als vielmehr deren Verbesserung bei verstärktem Querschnitt zu erfahren wünscht, so läßt es sich wohl in diesem Falle rechtfertigen, die üblichen Formeln anzuwenden. Man wird also in der Praxis so vorgehen: Man wird beim ursprünglichen Träger die Durchbiegung praktisch erproben; dann wird man sie errechnen für den ursprünglichen Träger und für den beabsichtigten verstärkten Träger, dessen wirklich zu

* Der entstehende Verdrehungswinkel, ohne Rücksicht auf die Schwächung durch die Keilnut $\delta = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{M\,d}{2 \,.\, G \,.\, J_d} = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{600}{2 \,.\, 830\,000 \,.\, 0{,}1 \,.\, 2{,}5^4} = \frac{1}{188} \frac{\text{o}}{\text{cm}}$.

erwartende Durchbiegung man annähernd bekommt, wenn man die erprobte Durchbiegung mit dem Verhältnis der errechneten Durchbiegungen multipliziert.

$$f = \frac{5 \,.\, P \,.\, l^3}{384 \,.\, E \,.\, J}.$$

Zuerst müssen wir die Lage der Schwerachse N — N ermitteln.

$$120 \,.\, 100 \,.\, 50 - 90 \,.\, 70 \,.\, 35 - 3 \,.\, 70 \,.\, \frac{70}{3} - 50 \,.\, 10 \,.\, 95 - 8 \,.\, 10 \,.\, 93{,}333 =$$

$$= (120 \,.\, 100 - 90 \,.\, 70 - 3 \,.\, 70 - \frac{50 + 58}{2} \,.\, 10) \,.\, e; \quad e = 64{,}6 \text{ mm}.$$

Das Trägheitsmoment in bezug auf die K-Achse ist:

$$J_{I_K} = \frac{12 \,.\, 10^3}{3} - \frac{9 \,.\, 7^3}{3} - \frac{0{,}6 \,.\, 7^3}{12} - \frac{6 \cdot 5^2 + 6 \,.\, 5 \,.\, 0{,}8 + 0{,}8^2}{36 \,.\, 10{,}8} \,.\, 1^3$$

$$- \frac{5 + 5{,}8}{2} \,.\, 1 \,.\, (10 - \frac{1}{3} \,.\, \frac{3 \,.\, 5 + 2 \,.\, 0{,}8}{2 \,.\, 5 + 0{,}8} \,.\, 1)^2 = 2467{,}28 \text{ cm}^4.$$

Das Trägheitsmoment in bezug auf die N-Achse ist:

$$J_{I_N} = 2467{,}28 - 49{,}50 \,.\, 6{,}46^2 = 401{,}57 \text{ cm}^4,$$

der Elastizitätsmodul für Gußeisen $1\,000\,000 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$,

das spezifische Gewicht des Gußeisens $7{,}25 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$, das Eigengewicht des Trägers: $0{,}495 \,.\, 21 \,.\, 7{,}25 = 75{,}364$ kg,

$$f = \frac{5 \,.\, 75{,}364 \,.\, 210^3}{384 \,.\, 1\,000\,000 \,.\, 401{,}57} = 0{,}02263 \text{ cm} = 0{,}23 \text{ mm}.$$

Die Durchbiegungen, welche durch die Erschütterungen der Maschine beim Arbeiten hervorgerufen werden, sind der Rechnung nicht zugänglich.

Diese Durchbiegung ist für den beabsichtigten Zweck, einem hin- und hergehenden Schneidmesser als Führung zu dienen, noch zu groß. Wir

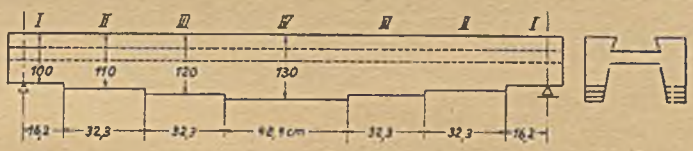


Abb. 258.

wollen deshalb den Träger mit veränderlichem Querschnitt laut *Abb. 258* ausführen.

Zum Zwecke der Ermittlung der Durchbiegung haben wir zunächst die einzelnen Trägheitsmomente auszurechnen.

$$J_I = 401{,}57 \text{ cm}^4.$$

$$e_{II} = \frac{120 \cdot 110 \cdot 55 - 90 \cdot 80 \cdot 40 - 3 \cdot 80 \cdot \frac{80}{3} - 50 \cdot 10 \cdot 105 - 8 \cdot 10 \cdot 103{,}333}{120 \cdot 110 - 90 \cdot 80 - 3 \cdot 80 - \frac{50 + 58}{2} \cdot 10} = 71{,}04 \text{ mm},$$

$$J_{II_K} = \frac{12 \,.\, 11^3}{3} - \frac{9 \,.\, 8^3}{3} - \frac{0{,}6 \,.\, 8^3}{12} - \frac{6 \,.\, 5^2 + 6 \,.\, 5 \,.\, 0{,}8 + 0{,}8^2}{36 \,.\, 10{,}8}$$

$$- \frac{5 + 5{,}8}{2} \,.\, \left(11 - \frac{1}{3} \,.\, \frac{3 \,.\, 5 + 2 \,.\, 0{,}8}{2 \,.\, 5 + 0{,}8}\right)^2 = 3167{,}95 \text{ cm}^4,$$

$$J_{II_N} = 3167{,}95 - 52{,}2 \,.\, 7{,}104^2 = 533{,}57 \text{ cm}^4,$$

$$e_{III} = \frac{120 \cdot 120 \cdot 60 - 90 \cdot 90 \cdot 45 - 3 \cdot 90 \cdot \frac{90}{3} - 50 \cdot 10 \cdot 115 - 8 \cdot 10 \cdot 113{,}333}{120 \cdot 120 - 90 \cdot 90 - 3 \cdot 90 - \frac{50+58}{2} \cdot 10} = 77{,}38 \text{ mm},$$

$$J_{III_K} = \frac{12 \,.\, 12^3}{3} - \frac{9 \,.\, 9^3}{3} - \frac{0{,}6 \,.\, 9^3}{12} - \frac{6 \,.\, 5^2 + 6 \,.\, 5 \,.\, 0{,}8 + 0{,}8^2}{36 \,.\, 10{,}8}$$

$$- \frac{5+5{,}8}{2} \cdot \left(12 - \frac{1}{3} \cdot \frac{3 \,.\, 5 + 2 \,.\, 0{,}8}{2 \,.\, 5 + 0{,}8}\right)^2 = 3975{,}47 \text{ cm}^4,$$

$$J_{III_N} = 3975{,}47 - 54{,}9 \,.\, 7{,}738^2 = 688{,}23 \text{ cm}^4.$$

$$e_{IV} = \frac{120 \cdot 130 \cdot 65 - 90 \cdot 100 \cdot 50 - 3 \cdot 100 \cdot \frac{100}{3} - 50 \cdot 10 \cdot 125 - 8 \cdot 10 \cdot 123{,}333}{120 \cdot 130 - 90 \cdot 100 - 3 \cdot 100 - \frac{50+58}{2} \cdot 10} = 83{,}62 \text{ mm}$$

$$J_{IV_K} = \frac{12 \,.\, 13^3}{3} - \frac{9 \,.\, 10^3}{3} - \frac{0{,}6 \,.\, 10^3}{12} - \frac{6 \,.\, 5^2 + 6 \,.\, 5 \,.\, 0{,}8 + 0{,}8^2}{36 \,.\, 10{,}8}$$

$$- \frac{5+5{,}8}{2} \cdot \left(13 - \frac{1}{3} \cdot \frac{3 \,.\, 5 + 2 \,.\, 0{,}8}{2 \,.\, 5 + 0{,}8}\right)^2 = 4895{,}42 \text{ cm}^4,$$

$$J_{IV_N} = 4895{,}42 - 57{,}6 \,.\, 8{,}362^2 = 867{,}86 \text{ cm}^4.$$

Wir bestimmen nun die Verhältnisse $\frac{J_{max}}{J}$ für die verschiedenen Trägerstrecken:

$$\frac{J_{IV}}{J_{III}} = \frac{867{,}86}{688{,}23} = 1{,}260,$$

$$\frac{J_{IV}}{J_{II}} = \frac{867{,}86}{533{,}57} = 1{,}625,$$

$$\frac{J_{IV}}{J_{I}} = \frac{867{,}86}{401{,}57} = 2{,}164.$$

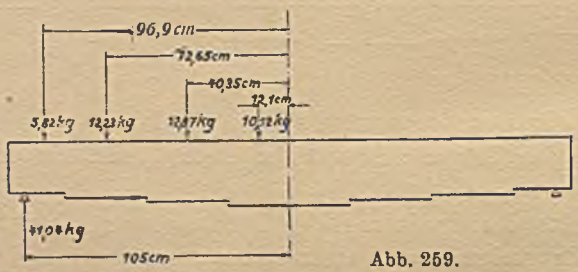


Abb. 259.

Das Eigengewicht des Trägers setzt sich zusammen aus:

$$0{,}495 \,.\, 3{,}24 \,.\, 7{,}25 = 11{,}64 \text{ kg}$$
$$0{,}522 \,.\, 6{,}46 \,.\, 7{,}25 = 24{,}46 \text{ kg}$$
$$0{,}549 \,.\, 6{,}46 \,.\, 7{,}25 = 25{,}74 \text{ kg}$$
$$0{,}576 \,.\, 4{,}84 \,.\, 7{,}25 = 20{,}24 \text{ kg}$$
$$82{,}08 \text{ kg}$$

$$M_{max} = 41{,}04 \,.\, 105 - 5{,}82 \,.\, 96{,}9 - 12{,}23 \,.\, 72{,}65 - 12{,}87 \,.\, 40{,}35 - 10{,}12 \,.\, 12{,}1 =$$
$$= 2215 \text{ cmkg} \quad \textit{(Abb. 259)}.$$

In *Abb. 260* ist das Kräftepolygon gezeichnet, und dazu bei beliebig angenommenem Polabstand h = 50 mm in *Abb. 261* die Momentenfläche hergestellt. Diese ist dann durch lotrechte Ordinaten in 16 Flächenstreifen zerlegt, die noch im umgekehrten Verhältnis der Trägheitsmomente zu vergrößern sind. Die entsprechend veränderte Momentenfläche zeigt *Abb. 262*, deren Flächeninhalte sich mit Benutzung der aus der Zeichnung abgelesenen Ordinaten wie folgt ergeben:

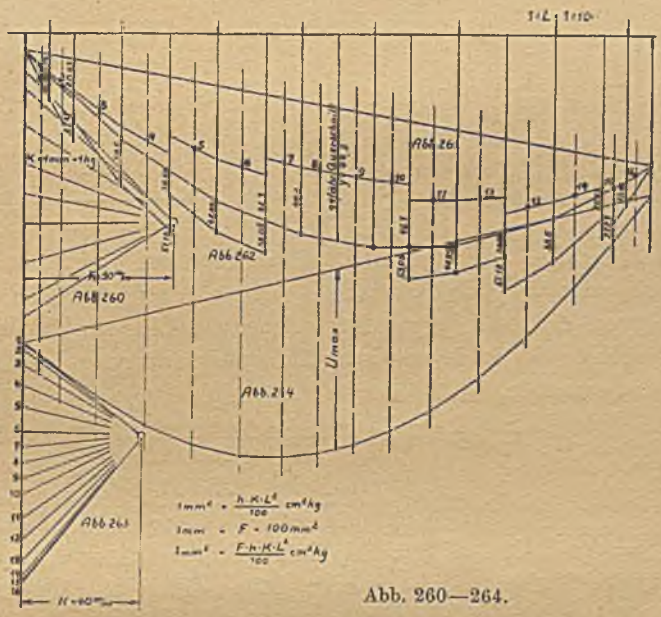


Abb. 260—264.

$$F_1 = \frac{1}{2} \cdot 15{,}15 \cdot 8{,}1 = 61{,}36 \text{ mm}^2$$

$$F_2 = \frac{1}{2} \cdot (15{,}15 + 27{,}27) \cdot 8{,}1 = 171{,}80 \text{ mm}^2$$

$$F_3 = \frac{1}{2} \cdot (20{,}47 + 38{,}50) \cdot 16{,}15 = 476{,}18 \text{ mm}^2$$

$$F_4 = \frac{1}{2} \cdot (38{,}50 + 51{,}18) \cdot 16{,}15 = 724{,}17 \text{ mm}^2$$

$$F_5 = \frac{1}{2} \cdot (39{,}69 + 48{,}89) \cdot 16{,}15 = 715{,}28 \text{ mm}^2$$

$$F_6 = \frac{1}{2} \cdot (48{,}89 + 53{,}05) \cdot 16{,}15 = 823{,}16 \text{ mm}^2$$

$$F_7 = \frac{1}{2} \cdot (42{,}1 + 44{,}3) \cdot 12{,}1 = 522{,}72 \text{ mm}^2$$

$$F_8 = 44{,}3 \cdot 12{,}1 = 536{,}03 \text{ mm}^2$$

$$F_9 = 44{,}3 \cdot 12{,}1 = 536{,}03 \text{ mm}^2$$

$$F_{10} = \frac{1}{2} \cdot (42{,}1 + 44{,}3) \cdot 12{,}1 = 522{,}72 \text{ mm}^2$$

$$5089{,}45 \text{ mm}^2$$

$$5089{,}45\ \text{mm}^2$$

$$F_{11} = \frac{1}{2} \cdot (48{,}89 + 53{,}05) \cdot 16{,}15 = 823{,}16\ \text{mm}^2$$

$$F_{12} = \frac{1}{2} \cdot (39{,}69 + 48{,}89) \cdot 16{,}15 = 715{,}28\ \text{mm}^2$$

$$F_{13} = \frac{1}{2} \cdot (38{,}50 + 51{,}18) \cdot 16{,}15 = 724{,}17\ \text{mm}^2$$

$$F_{14} = \frac{1}{2} \cdot (20{,}47 + 38{,}50) \cdot 16{,}15 = 476{,}18\ \text{mm}^2$$

$$F_{15} = \frac{1}{2} \cdot (15{,}15 + 27{,}27) \cdot 8{,}1 = 171{,}80\ \text{mm}^2$$

$$F_{16} = \frac{1}{2} \cdot 15{,}15 \cdot 8{,}1 = 61{,}36\ \text{mm}^2$$

$$\text{Insgesamt}\quad 8061{,}40\ \text{mm}^2$$

Die Flächeninhalte sind in *Abb. 263* als Strecken dargestellt. Mit beliebigem Polabstande sind die Polstrahlen gezogen, und schließlich ist hierzu das Seilpolygon *Abb. 264* hergestellt, welches die Biegungslinie darstellt.

Die maximale Durchbiegung ist unter Berücksichtigung des Verzerrungsmaßstabes zu ermitteln.

$$f_{max} = U_{max} \cdot \frac{H \cdot F \cdot h \cdot k \cdot L^3}{E \cdot J \cdot 100},$$

$$f_{max} = U_{max} \cdot \frac{40 \cdot 100 \cdot 50 \cdot 1 \cdot 10^3}{1000000 \cdot 867{,}86 \cdot 100},$$

$$f_{max} = 0{,}002305 \cdot U_{max} = 0{,}002305 \cdot 60{,}4, \quad f_{max} = 0{,}14\ \text{mm}.$$

Würde der Träger auf der ganzen Länge mit einem Querschnitt von der Höhe 130 mm ausgeführt sein, so würde:

$$P = 0{,}576 \cdot 21 \cdot 7{,}25 = 87{,}70\ \text{kg},$$

$$f = \frac{5 \cdot P \cdot l^3}{384 \cdot E \cdot J}\ \text{cm},$$

$$f = \frac{5 \cdot 87{,}7 \cdot 210^3}{384 \cdot 1000000 \cdot 867{,}86} = 0{,}0122\ \text{cm},$$

$$f = 0{,}122\ \text{mm}.$$

Eigentlich ist es, wie eingangs erwähnt, nicht statthaft, die obigen Berechnungen auf Gußeisen anzuwenden, weil Gußeisen nicht dem Hookeschen Gesetz folgt. Die errechneten Resultate sind an sich falsch, jedoch ist es sicher statthaft, die Werte zu Vergleichszwecken heranzuziehen, sodaß der Konstrukteur sagen kann: Durch die beabsichtigte Querschnittsänderung (Erhöhung der Flanschen nach dem gefährlichen Querschnitt zu) erhalte ich eine Verringerung der Durchbiegung um rund

$$\frac{0{,}23 - 0{,}14}{0{,}23} \cdot 100 = 39\%, \text{ bezw.}$$

wenn ich den Träger durchweg mit 130 mm Höhe ausführe, eine Verringerung der Durchbiegung um rund

$$\frac{0{,}23 - 0{,}122}{0{,}23} \cdot 100 = \sim 43\%.$$

SACHREGISTER.

Seite

abgesetzter Wellenstumpf 102
Abkühlung 90
» schnelle 129
Abszisse 45
Achse, diagonal 36
» freie 34
Anfahren 163
Anfangsgeschwindigkeit 173
Anpressungsdruck 188
» -kraft 144
Anstrengungsziffer 135
Arbeitsfähigkeit 174
» -gleichung 21
» -maschine 117
» -verlust im Getriebe 188
Armdimensionen 150
Auflagerdruck 24, 62
Auflagerdrücke 25
» -kräfte 62
» -reaktionen 76
Aufzug 65
Ausbiegung 118
Ausladung 75
Ausleger 40
Auszählung der Fläche 31

Bachsche Spannungstabelle 113
Bach-Schülesches Potenzgesetz . . . 6
Balken 63, 98
Bär 172
Bauhöhe 71
Baumstamm 38
Baustahl, hochwertig 1
Beanspruchung, stoßende 90
beidseitige Spitzenlagerung 183
Belastung, exzentrische 175
Belastungshöhe 53
Bereich, unelastischer 123
» elastischer 171
Beschlag 22
Beton 113
bezogene Längenänderung 4
Bezugsachse 27
Biegung, reine 60
Biegungsfestigkeit 8, 23
Biegungslinie 77, 92
» -moment 25
» » zweites 96
» -momentenflächen 45
» -theorie 105
Blätter 81
Blechträger 37, 83, 163
» genieteter 71
bleibende Formänderung 9

Seite

Bleistab 116
Bohlen 69
Bremsen 163
Brennpunkt 164
Brinellhärte 7
Bruchebene 59
Bruchfestigkeit, rechnerische 19
» -fläche 113
» -grenze 22
Büchse 117
Bühnenlaufwerk 67

Culmannsche Trägheitsellipse 34

Dampfkessel 13
» -turbinenschaufel 32
Darstellung, graphische . . 43, 51, 57, 133
Deckelschraube 147
Dehnung 4
Dehnungszahl 6
der dreiachsige Spannungszustand . . 130
der ebene Spannungszustand 132
Diagonalachse 36
Diagonale 113
Diagramm 42
» , Momentenflächen 58
die Poissonsche Zahl 131
Differdinger Greyträger 163
Dimension 27
Drahtseil 19
Drehfestigkeit 8
Drehmomente 25
Drehmoment 56, 110, 113
Drehspannung 113
Drehungsbeanspruchung 110
» -spannung, maximale 118
Drillungswiderstand 116, 167
Druck, exzentrischer 127, 129
» -festigkeit 8
» -formel, verbesserte von Tetmajer 122
» -luftbehälter 131
Durchbiegung . . . 92, 97, 129, 183, 191
Durchschnittsspannung 117

Eichenholzbalken 151
Eigengewicht 54
Eigengewichte 114
Eigenverbrauch 186
einachsiger Spannungszustand 129
einfache Festigkeitsarten 126
eingespannte Träger 67
Einheitsgewicht 184
Einschnürung 6
Einspannungsquerschnitt 54
» -stelle 47, 110

Seite

Einzellasten 60
Eisenbahnbrücke 109
» -schienen 71
Eisenblech 21
» -konstruktionen 24
elastischer Bereich 171
elastische Formänderungen 9
» Kupplung 56
» Linie 23, 49, 90, 129
Elastizitätsgleichungen 62
» -grenze 5, 24
» -maß 6, 121
» -modul 111, 191
elliptischer Querschnitt . . 117, 141, 150
Endgeschwindigkeit 173
Entwurfsberechnung 176
Erschütterungen 87
Ersatzspannung 135
Erstarrung 90
erste Momentenfläche 96
Eulersche Gleichungen 119
Exzenter 139
» -presse 22
exzentrische Belastung 175
exzentrischer Druck 127, 129
» Zug 127, 129, 172
exzentrisch wirkende Kraft 179

Fabrikschild 147
Fahrlast 96
Faser 157
-richtung 113
» -schicht 23
» » gefährdete 50
» » neutrale 24
Federdruck 188
» -gehäuse 189
» -stahl, ungehärteter 81
feste Rolle 65
Festigkeitsarten, einfache 126
» -durchmesser 114
Festigkeit, Querschnitt gleicher . . . 129
» Körper gleicher 169
» zusammengesetzte . . . 9, 126
Flacheisen 54
Flächenband 33
» -pressung 66
Fließfiguren 130
» -grenze 5
» -grenzenzahlen 10
Flußstahl 1
Formänderung 3, 111, 167, 178
» bleibende 9
» elastische 9
Formänderungsformel 114
Formeisen 178
Form, wirtschaftlich günstigste . . . 170
freie Achse 34
Freiträger 46, 54
» mit Streckenlast 52
» » veränderl. Querschnitt . 101

gebogene Streifen 168
gefährdete Faserschicht 50
gefährlicher Querschnitt . . . 11, 50, 91
Gegenkraft 8

Seite

gekröpfte Welle 137
genieteter Blechträger 71
Geradliniengesetz 5, 26
Gesamtprofil 29
» -querschnitt 29
geschlitztes Rohr 169
Gestell 180
Getriebe, Arbeitsverlust im 188
Gewinde, Whitworth 20
Gießereilaufkran 67
Gleichgewichtsbedingung 24, 62
Gleichungen, Eulersche 119
Gleitmaß 117
Gleitung 111
Gliederkette 13
graphische Darstellung . . 43, 51, 57, 133
Grenzfall 60
Grey-Profile 71
Greyträger, Differdinger 163
Gummimuffen 56
Gurtbleche 40
» -platte 109
» -platten 37, 82, 163
» -winkel 83
gußeisernes Rohr 160
gußeiserne Säule 12, 169
gußeiserner Stab 176
» Träger 190
Gußhaut 87, 141
» -spannung 129, 150
» -spannungen 90
Guß, unbearbeiteter 87

Haftfestigkeit 103
Hakenkopf 171
Halbachsen 34, 36
Handhebel 117
Hängelager 128
Härteprüfung 7
Hauptachsen 32
Hauptspannung 134
Hauptträger 64
Hauptträgheitsmomente 32
Hilfsträger 97, 99
hochwertiger Baustahl 1
Höhlungsdurchmesser 56
» -verhältnis 44, 117, 167
Holz 113
Holzträger 48
Hookesches Gesetz 5, 87, 190
Hypotenuse 63

ideelle Normalspannung 131
Interferenz 141
isotroper Stoff 113

Kette, unkalibrierte 19
Klinkendruck 72
Knickfestigkeit 9
» -länge 120
Knickung 183
Kohäsionskräfte 3
Kolbenkraft 137, 183
Kompression 173
Kompressorkolben 172
Konus 66

Seite

Körper gleicher Biegungsfestigkeit 79, 82, 89
» » Festigkeit 169
Kraft, exzentrisch wirkende 179
Kraftlinie 32
Kräftepaar 8, 25, 112
» -polygon 193
Krafträder 60
Kragträger 76
Kranbahnträger 63
» -schiene 39
» -träger 39, 71, 163
Kreide 113
Krümmungshalbmesser 90
» -winkel 92
kubische Parabel 54, 82
Kugeldruckprobe 7
Kupfermantel 145
Kupplung 149, 187
» elastische 56
Kurbelgegengewicht 143
» -radius 183

Lagerkraft 62, 76, 106
Lagerreibungswiderstände 66
Längenänderung, bezogene 4
Längsdehnung 130
» -dehnungsverhältnis 6, 131
» -schubkraft 108
Lastdrehzahl, normale 116
Lastzug 96
Laufkatze 64, 161
» -kran 64
» -radachse 67
Leimschichten 103
» -schicht 108
Leistung 113
Leitlinie 164
Linie, elastische 23, 49, 90, 129
» M- 62
Lochleibungsdruck 108
Lochstempel 22
» -wand 109
» -druck 108
lockeres Schweißeisen 113
Lotmaschine 16
Luftpuffer 172
» -druck 173
» -hammer 172

M-Linie 62
Mantellinien 110
Markenbezeichnung 78
Masse, rotierende 146
Materialachse 34
» -verbrauch 44
Maximalanzeiger 96
maximale Drehungsspannung 118
Mechanik 3
Meßlänge 3
Millimeterpapier 31
Mindesttourenzahl 116
Mittelkraft 25, 26
mittlere geometrische Proportionale . 63
Momentfläche, reduzierte 93
Momentenaufnahmefähigkeit 166
» -fläche, reduzierte . . . 97, 119

Seite

Momentenflächen 60
» -gleichung 62
» -linie 45, 61
» -satz 63
» -flächendiagramm 58
» -fläche, erste 96
Moment, statisches 25, 26
Molekular-Zusammenhangskraft . . . 3
Mörtel 113

Nachrechnung nach Tetmajer 171
neutrale Faserschicht 24
Nietlöcher 57
» -teilung 107
normale Lastdrehzahl 116
» Transmissionswellen 114
Normenausschuß 1
Normalprofil 35
» -spannungen 3, 24
» -spannung, ideelle 131
Nullinie 24
» -punkt 77
Nutzlast 64

Omegaverfahren 126

Parabel 61, 69, 80, 83, 164
» kubische 54, 82
Pendelhammer 7
Pfeilhöhe 83, 99, 164
Platte 178
Pleuelstangendurchmesser 183
Plunger 13
Poissonsche Zahl, die 131
Polabstand 193
polares Trägheitsmoment 112
Potenzgesetz, Bach-Schülesches . . . 6
Preßkopf 12
Probestab 3
Profile, Grey- 71
Profilstäbe 24
Proportionale, mittlere geometrische . 63
Proportionalitätsgrenze 4, 121
Prüfungsmaschine 4
Puddelstahl 1

Quadrate 110
Querkraft 25, 60
Querkräfte 103
Querkraftdiagramm 153, 163
» -fläche 45, 60
» -linie 45, 60
Querschnitt, elliptischer . . 117, 141, 150
» gefährlicher . . . 11, 50, 91
Querschnitte gleicher Festigkeit . . . 79
Querschnitt » » . 88, 129
Querzusammenziehung 6, 129
Querzusammenziehungen 130

Radstand 64
Räderabstand 161
Räder, schnellaufende 151
Räderwinde 151
Randspannung 26
» resultierende . . 127, 177
Reaktion 64

Seite
rechnerische Bruchfestigkeit 19
reduzierte Momentenfläche . 93, 97, 119
» Trägheitsmomente . . 29, 165
Reibungskoeffizient 143, 171, 188
» -räder 188
» -trieb, Rillenscheiben 188
Reibräder 189
reine Biegung 60
Reißlänge 11, 144
» -schiene 103
Resonanz 141
Resultierende 63
resultierende Randspannung . . 127, 177
Rhomben 110, 116
Riemenspannung 118
» -zug 75, 113, 147
» -züge 138, 186
» -zugkraft 72
Rillenscheiben-Reibungstrieb 188
Rillentiefe 188
» -winkel 188
Ringschwerachse 145
Rohnietdurchmesser 181
Rohr, geschlitztes 169
» gußeisernes 160
Rohseidenfaden 15, 144
Rolle, feste 65
rotierende Masse 146
Rückprallhöhe 7
Rundstab 100

Säule, gußeiserne 12, 169
Scheibe 155
Scheibengewicht 147
» -kupplung 20
Scheitelgleichung 164
» -ordinate 119
Scherfestigkeit 8, 20
Schienendurchbiegung 96
» -querschnitt 96
Schlagversuch 7
Schlankheit 120, 170
Schlankheitsgrenze 121
Schleudertrommelmantel 145
Schlitten 190
Schneide 182
Schneidmesser 190, 191
schnellaufende Räder 151
schnelle Abkühlung 129
Schnittmesser 21
» -widerstand 182
Schraubenkraft 144, 171
» -rad 152
Schubfestigkeit 8
» -kraft 105
» -modul 111
» -spannung 111
» -zahl 111
Schützenrahmen 68
schwalbenschwanzförmig 190
Schweißeisen, lockeres 113
» -stahl 1
Schwerpunktsachse 28
Schwingungsfestigkeit 11
» -zustände 142
Schwungradgewicht 137

Seite
sehr elastische Stäbe 121
Seilpolygon 194
» -zug, wandernder 151
Seitenmomente 181
Sicherheitsgrad 10, 121
Siemens Martinstahl 131
Siliziumstahl 1
Sinuslinie 119
Skleroskop 7
Spannrollenarm 117
» -konstruktion 117
Spannungen, Normal- 24
Spannung, zulässige 9
Spannungsdehnungskurve 4
» -diagramm 181
» -körper 7, 26
» -schaubild 46
» -tabelle, Bachsche 113
» -verteilung 129
» -zustand, einachsiger . . . 129
» -zustand, der dreiachsige . 130
» -zustand, der ebene 132
Spannweite 64, 68
Sperrad 71
Spindeln 155
Spindelstahl 155
Spitzenlagerung 119, 169
» beidseitige 183
Spule 155
Stabachse 23
Stab, gußeiserner 176
Stäbe, sehr elastische 121
Stahl 1
Stahlguß 85
Stahlgußträger 87
Stahlrohr 49, 56, 125, 167, 175
Stahl, Siemens Martin- 131
Stangenkopf 184
Stanzen 22
statisches Moment 25, 26
statisch unbestimmt 62
Steg 107
Stehblech 83, 166
Stehlager 147
Stempel 22
Stempeldruck 22
» -kraft 22
Stirnräder 59, 73
Stoff, isotroper 113
stoßende Beanspruchung 90
Stoßmaschine 182
» -stahl 182
» -wirkung 175
Strebe 29
Streckenbelastung 53
» -last 62, 156, 163, 184
Streckgrenze 5
Streifen, gebogene 168
Stützweite 163
Summenausdruck 28
Symmetrie 60
Symmetrieachsen 33

Tangentialspannungen 20, 126
Tannenholz 157
Taucherkolben 172

Seite
Teilung, theoretische 109
Tetmajer, Nachrechnung nach 171
theoretische Teilung 109
Träger auf zwei Stützen 46, 60
» eingespannte 67
Trägergewicht 162
Träger, gußeiserner 190
Tragfähigkeit 16
Trägheitsellipse 33
» Culmannsche 34
Trägheitshalbmesser 33
» -moment 27
» » polares 112
» -momente, reduzierte . . 29, 165
Traglänge 11
Transmissionswelle . 73, 74, 159, 166, 185
» -wellen, normale 114
Trapezfeder 81
Traverse 85
Triebwerkswellen 114
Trommelnaben 152
» -welle 151

Überanstrengung 174
Umfangsgeschwindigkeit 20
» -kraft 56, 59, 75, 150
» -kräfte 113
Umlaufszahl 113
unbearbeiteter Guß 87
unbestimmt, statisch 62
unelastischer Bereich 123
ungehärteter Federstahl 81
unkalibrierte Kette 19
Unterlagplatte 148

Vakuum 173
verbesserte Druckformel von Tetmajer 122
Verbrennungskraftmaschine 143
Verdrehung 72, 110
Verdrehungswinkel 114, 167
Verfahren Omega 126
Vernietung 58
Verschiebung 93, 99
Verschiebungsachse 93
Verzerrungsmaßstab 194
Vorgelegewelle 72, 185
Vorkragung 76, 154
Vorschub 182
Vorzeichenregel 45

Seite
Wagenfeder 81
Walzeisen 47, 61
» -träger 71
wandernder Seilzug 151
Wäscheschleuder 145
Wasserschöpfer 16
Wehr 68
Welle 113
» gekröpfte 137
Wellenstumpf, abgesetzter 102
Wendepunkt 77
Werkstoffnormen 2
» -zeugstahl 22
Whitworthgewinde 20
Widerstandsmoment 27
Windenvorgelegewelle 73
Winkeleisen 121
» -geschwindigkeit 184
Wirkungslinien 25
» -richtung 62
wirtschaftlich günstigste Form 170
Würfel 120
Wurzelmaß 164

Zahl, die Poissonsche 131
Zahnbreite 59
» -druck 152
» -ecke 59, 149
» -rad 150
» -räder 117
» -teilung 59, 71
Zähnezahl 71
Zahnwurzel 59
Zapfen 55
Zapfenverhältnis 66
Zementmörtel 14, 130
Zentralellipse 36
Zentrifugalkraft . . 143, 145, 156, 183, 184
» -moment 32
Zentrifuge 147
Zerreißfestigkeit 5
zweites Biegungsmoment 96
Ziegelmauerwerk 14, 67, 148
Zug, exzentrischer 127, 129, 172
Zugfestigkeit 5, 7
» -kraft 105
» -seite 26
zulässige Spannung 9
Zusammenhangskraft, Molekular- . . 3
zusammengesetzte Festigkeit . . . 9, 126

POLITECHNIKA BIBLIOTEKA GŁÓWNA Gliwice

Benutzte und zum Studium empfehlenswerte Literatur.

H. Winkel, Festigkeit und Formänderung, Verlag Julius Springer, Berlin.

G. Dreyer, Festigkeitslehre und Elastizitätslehre, Verlag Dr. Max Jänecke, Leipzig.

G. Dreyer, Erklärungen und Musterbeispiele zur Festigkeits- und Elastizitätslehre, Verlag Dr. Max Jänecke, Leipzig.

G. Dreyer, Formeln, Begriffserklärungen und Lehrsätze aus der reinen und angewandten Festigkeitslehre, Verlag von Dr. Max Jänecke, Leipzig.

R. Lauenstein, Die Festigkeitslehre, bearbeitet von C. Ahrens, Verlag Alfred Kröner, Stuttgart.

A. Weickert, Festigkeitslehre, Verlag Julius Springer, Berlin.

L. Klein, Vorträge über Hebezeuge, Verlag Helwingsche Verlagsbuchhandlung, Hannover.

K. Laudien, Die Maschinenelemente, Verlag Dr. Max Jänecke, Leipzig.

Bethmann, Die Hebezeuge, Verlag Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig.

C. Kersten, Der Eisenhochbau, Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin.

E. Graf, Technische Berechnungen für die Praxis des Maschinen- und Bautechnikers, Verlag Johann Ambrosius Barth, Leipzig.

Fr. Bülz, Hebezeuge, Verlag S. Hirzel, Leipzig.

H. Ahlberg, Festigkeitslehre, Verlag Dr. Max Jänecke, Leipzig.

H. Meyer, Leitfaden der Werkzeugmaschinenkunde, Verlag Julius Springer, Berlin.

Schlese, Lehrbuch für den Unterricht in Mechanik (Festigkeitslehre), Verlag Ad. Heine, Wilhelmshaven.

J. Furtmayr, Aufgabensammlung zur Festigkeitslehre, Verlag Walter de Gruyter & Co., Berlin.

K. Strohmeyer, Der Eisenbahnbau, Verlag Bernh. Friedr. Voigt, Leipzig.

Baltruschat, Fachkunde für Metallarbeiter, Verlag M. Du Mont-Schauberg, Köln.

BG Politechniki Śląskiej w Gliwicach
nr inw.: 11 - 11327
Dyr.1 11241