ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1974

Seria: Automatyka, z. 25 Nr kol. 394

Andrzej Królikowski
Studium Doktoranckie
przy Wydziale Automatyki i Informatyki

DOBÓR OPTYMALNEGO CIĄGU IDENTYFIKUJĄCEGO

Streszczenie. Przedmiotem artykułu jest dobór ciągu sygnałów sterujących, identyfikującego wektor nieznanych parametrów θ w modelu obiektu opisanego liniowym równaniem różnicowym n-tego rzędu. Optymalizacja polega na doborze ciągu sterowań maksymalizującego ślad odwrotności macierzy kowariancji estymaty $\hat{\underline{\theta}}$, przy ograniczeniu amplitudy sygnałów sterujących. Podano również metodę estymacji wektora $\underline{\theta}$ oraz prosty przykład.

1. Wstęp

W artykule przedstawiono metodę doboru optymalnego ciągu identyfikującego dla modelu układu opisanego liniowym równaniem różnicowym n-tego rzędu, gdzie wyjście układu jest zakłócone niemierzalnym szumem o znanych własnościach statystycznych. Problem identyfikacji polega na estymacji nieznanych parametrów układu na podstawie odpowiednio wybranych sygnałów sterujących i mierzonych wyjść układu dla skończonej ilości kroków N.

Optymalizacja polega na takim doborze sygnałów sterujących, aby uzyskać maksimum śladu odwrotności macierzy kowariancji estymaty nieznanego wektora parametrów $\underline{\theta}$. Rozpatruje się tu przypadek nieznanych lecz stałych w procesie identyfikacji parametrów obiektu. Uzyskanie dokładnych wartości parametrów jest niemożliwe ze względu na niemierzalność zakłóceń i skończoną ilość kroków N.

Dotychczasowa literatura z tego zakresu jest bardzo skromna. W [1] rozpatrzono przypadek układu ciągłego o nieznanych wzmocnieniach przy ograniczeniu energii sygnałów sterujących. W artykule [2] rozważa się problem wyboru sygnałów sterujących minimalizujących prawdopodobieństwo błędnej decyzji dla przypadku gdzie możliwe wartości parametrów oraz sterowań są elementami zbiorów skończonych. W [3] rozpatrzono zależność śladu macierzy informacyjnej, występującej w nierówności Rao-Cramera, od sygnałów sterujących; nie podano natomiast sposobu konstrukcji estymaty wektora nieznanych parametrów, takiej, żeby jej macierz kowariancji była zbieżna asymptotycznie do odwrotności macierzy informacyjnej. Również model obiektu przedstawiony w tym artykule jest stosunkowo prosty.

W niniejszej pracy rozważa się układ ogólniejszy niż w [3] przy ograniczeniu amplitudowym na sterowania. Podano również prosty przykład ilustrujący metodę porównując szybkość zbieżności estymaty z analogicznym przykładem z pracy [6].

2. Opis układu oraz sformułowanie problemu

Rozpatrzmy model liniowego układu opisanego równaniem różnicowym n-tego rzędu

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} a_k x_{i-k} + \sum_{k=1}^{n} b_k u_{i-k} \qquad i = 1,2,\ldots,N \tag{1}$$

Wielkości u oraz x są skalarne, zaś czas jest zdyskretyzowany. Powyższy model dyskretny został przyjęty z myślą o sterowaniu impulsowym bądź cyfrowym.

Wektor parametrów układu

$$\underline{\theta}^T = (\theta^1 \ldots \theta^{2n}) = (a_1 \ldots a_n b_1 \ldots b_n) \tag{2}$$

jest stały w procesie identyfikacji lecz nieznany.

Sygnał wyjściowy jest mierzony łącznie z addytywnym szumem

$$y_i = x_i + \xi_i. \tag{3}$$

Ciąg zakłóceń $\left\{\xi_i\right\}$ jest ciągiem zakłóceń wzajemnie niezależnych, jednakowo rozłożonych o znanych własnościach statystycznych

$$E(\xi_i) = 0 \qquad E(\xi_i \xi_j) = \sigma^2 \delta_{ij}. \tag{4}$$

Równanie (1) można zapisać w postaci wektorowo-macierzowej

$$\begin{aligned} \underline{z}_{i+1} &= A\,\underline{z}_i + \underline{d}\,u_i \\ x_i &= \underline{h}^T \underline{z}_i \end{aligned} \qquad i = 1,2,\ldots N, \tag{1a}$$

gdzie $\underline{z}_i$ jest n-wymiarowym wektorem stanu, takim, że $z_i^1 = x_i$ oraz gdzie A, $\underline{d}$, $\underline{h}$ mają postać [7]:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & & 1 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & & a_1 \end{bmatrix} \quad \underline{d} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -a_1 & 1 & & & \\ -a_2 & -a_1 & 1 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix} \quad \underline{h} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Zatem macierz A ma postać macierzy stowarzyszonej. Dla skończonej ilości kroków N równanie (1) da się również przedstawić w następującej formie, przy założeniu zerowych warunków początkowych stanu $(x_0, x_{-1}, \ldots, x_{1-N} = 0)$ oraz sterowań $(u_{-1}, u_{-2}, \ldots, u_{-N} = 0)$

$$\underline{\underline{A}}_N \underline{x}_N = \underline{\underline{B}}_N \underline{u}_N, \tag{1b}$$

gdzie

$$\underline{x}_N^T = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \qquad \underline{u}_N^T = (u_0, u_1, \ldots, u_{N-1}) \tag{6}$$

oraz

$$A_N = I_N - \sum_{i=1}^{n} a_i S^i \qquad B_N = \sum_{i=1}^{n} b_{i+1} + b_1 I_N, \tag{7}$$

gdzie macierz S jest macierzą przesunięcia (NxN), której element (k,l) równy jest $\delta_{k,l+1}$, zaś macierz I_N jest jednostkowa (NxN). Inną postacią zapisu dynamiki układu (1) jest postać uwidaczniająca bezpośrednio wektor nieznanych parametrów $\underline{\theta}$.

$$\underline{x}_N = H_N \underline{\theta} \tag{1c}$$

oraz zapis wyjść układu

$$\underline{y}_N = \underline{x}_N + \underline{\xi}_N, \tag{8}$$

gdzie

$$H_N = (S\underline{x}_N, S^2\underline{x}_N, \ldots, S^n\underline{x}_N, I_N\underline{u}_N, S\underline{u}_N, \ldots, S^{n-1}\underline{u}_N) \tag{9}$$

oraz

$$\underline{y}_N^T = (y_1, y_2, \ldots, y_N) \quad \underline{\xi}_N^T = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N). \tag{10}$$

Można pokazać [4], mając na uwadze (1b, 1c), że wektor $\underline{\theta}$ jest jednoznacznie określony z danych $\underline{u}_N$ i $\underline{x}_N$ wtedy i tylko wtedy, jeśli są spełnione warunki:

(a) $N \geqslant 2n$

(b) nie wszystkie b_i, $i = 1,2,\ldots,n$, są równe zero

(c) sterowania u_i, $i = 0,1,\ldots,N-2n$, nie są wszystkie równe zero

(d) wielomiany A(z) i B(z) nie posiadają wspólnego dzielnika, gdzie $A(z) = 1 - \sum_{i=1}^{n} a_i z^{-i}$, $B(z) = \sum_{i=1}^{n} b_i z^{-i}$, tzn. układ posiada minimalną realizację (rząd n).

Przy powyższych założeniach oraz przy zadanej metodzie estymacji wektora $\underline{\theta}$ praktycznym zadaniem ciągu identyfikującego byłoby spełnienie warunku

$$\min_{\underline{u}_N} E\|\underline{\theta} - \hat{\underline{\theta}}\|^2 = \min_{\underline{u}_N} \operatorname{tr} \Psi \tag{11}$$

przy ograniczeniu na sterowania

$$|u_i| \leqslant c, \tag{12}$$

gdzie Ψ jest macierzą kowariancji estymaty $\hat{\underline{\theta}}$ wektora nieznanych parametrów $\underline{\theta}$, zaś E jest operatorem uśredniania statystycznego. Znalezienie ciągu $\underline{u}_N$ spełniającego warunek (11) jest trudne i dlatego ciąg sterowań $\underline{u}_N$ będziemy wybierać w ten sposób, aby zachodziło

$$\min_{\underline{u}_N} \frac{1}{\operatorname{tr}\Psi^{-1}} = \max_{\underline{u}_N} \operatorname{tr}\Psi^{-1} \tag{13}$$

Ciąg sterowań $\underline{u}_N$ spełniający ten warunek nazwiemy optymalnym ciągiem identyfikującym $\underline{u}_N^o$.

Można pokazać, że wskaźniki $\operatorname{tr}\Psi$ oraz $\frac{1}{\operatorname{tr}\Psi^{-1}}$ są w pewnym sensie równoważne.

Jeśli bowiem macierz Ψ jest dodatnio określona, to jej ślad

$$\operatorname{tr}\Psi = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{2n} \tag{14}$$

spełnia warunek

$$\lambda_1 \leqslant \frac{\mathrm{tr}\Psi}{2n} \leqslant \lambda_{2n}, \tag{15}$$

gdzie $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2n}$ są wartościami własnymi macierzy Ψ takimi, że λ_1 jest najmniejszą a λ_{2n} największą wartością własną.
Zatem ślad $\mathrm{tr}\Psi^{-1}$ spełnia nierówność

$$\lambda_1 \leqslant \frac{2n}{\mathrm{tr}\Psi^{-1}} \leqslant \lambda_{2n}. \tag{16}$$

Wniosek 1. Nierówności (15) i (16) wskazują, że $\mathrm{tr}\Psi$ oraz $\frac{1}{\mathrm{tr}\Psi^{-1}}$ dążą do zera, jeśli λ_{2n} dąży do zera.

W pracy [4] pokazano, że jeśli spełniony jest warunek

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} H_N^T H_N > 0, \tag{17}$$

wtedy

$$\mathrm{tr} \lim_{N\to\infty} \Psi = 0, \tag{18}$$

tak więc wszystkie wartości własne macierzy Ψ dążą do zera, zatem w tym sensie wskaźniki $\mathrm{tr}\,\Psi$ oraz $\frac{1}{\mathrm{tr}\Psi^{-1}}$ są równoważne.
Założenia (a), (b), (c), (d), dla $N \to \infty$ są równoważne warunkowi (17) co pokazano w pracy [4].

Wniosek 2. Z zależności (15) wynika, że minimalizacja największej wartości własnej λ_{2n} ogranicza od góry $\mathrm{tr}\Psi$.

Uwaga. Minimalizacja λ_{2n} jest możliwa, lecz prowadzi do kłopotliwego numerycznie zagadnienia programowania nieliniowego.

Stosowanymi metodami estymacji mogą być: metoda największej wiarygodności lub jej algorytmy przybliżone (np. algorytmy Levina) lub metoda najmniejszych kwadratów.

3. Wyznaczanie ciągu optymalnego u_N^o

Zgodnie z liniową teorią estymacji oraz mając na uwadze wyrażenia (1c) i (8) można napisać [8]

$$\Psi = \sigma^2 (H_N^T H_N)^{-1}. \tag{19}$$

Zgodnie z (1b), zauważając, że det $A_N \neq 0$ mamy

$$\underline{x}_N = A_N^{-1} B_N \underline{u}_N. \tag{20}$$

Wstawiając (20) do (9) mamy

$$H_N = (SA_N^{-1} B_N \underline{u}_N, S^2 A_N^{-1} B_N \underline{u}_N, \ldots, S\underline{u}_N, \ldots, S^{n-1}\underline{u}_N). \tag{21}$$

Korzystając z (21) można po wstawieniu do (19) napisać

$$\frac{1}{\sigma^2} \operatorname{tr} \Psi^{-1} = \underline{u}_N^T \, T \, \underline{u}_N, \tag{22}$$

gdzie

$$T = \left[(SA_N^{-1}B_N)^T (SA_N^{-1}B_N) + \ldots + I_N + S^T S + \ldots + (S^{n-1})^T S^{n-1}\right].$$

Macierz $T_{(N \times N)}$ jest dodatnio określona o stałych współczynnikach, tak więc dla ustalonego C w ograniczeniu (12) istnieje taki ciąg $\underline{u}_N^{oT}$ że $\operatorname{tr}\Psi^{-1}$ osiąga maksimum.

Dobór $\underline{u}_N$ zgodnie z (13) jest więc problemem programowania kwadratowego przy niestandartowych ograniczeniach.

4. Przypadek macierzy A dowolnej

Rozważmy przypadek gdy macierz A w równaniu (1a) jest dowolna. Jeśli chodzi o zbudowanie modelu, którego sygnałem wyjściowym ma pozostać x_i, zaś sygnałem sterującym u_i, to stosując transformację kanoniczną możemy napisać wyrażenie na nieosobliwą macierz przekształcenia kanonicznego M

$$M = \begin{bmatrix} \underline{h}^T \\ \underline{h}^T A \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \underline{h}^T A^{n-1} \end{bmatrix}$$

Niech

$$\underline{v}_i = M\, \underline{z}_i$$

wtedy można pokazać, że

$$\underline{v}_{i+1} = A^* \underline{v}_i + \underline{d}^* u_i$$

$$x_i = \underline{h}^{*T} \underline{v}_i, \tag{23}$$

gdzie

$$A^* = M A M^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & & 1 \\ a_n^* & a_{n-1}^* & \cdots & & a_1^* \end{bmatrix} \tag{24}$$

$$\underline{h}^{*T} = [1, 0, \ldots, 0] \tag{25}$$

$$\underline{d}^* = M\, \underline{d}. \tag{26}$$

Zatem macierz A^* ma znów postać macierzy stowarzyszonej. Mając zidentyfikowane współczynniki macierzy A^*, tj. $(a_1^* \ldots a_n^*)$ można znaleźć współczynniki macierzy A rozwiązując układ równań algebraicznych, ogólnie nieliniowych, które oczywiście mogą posiadać wiele rozwiązań.

5. Praktyczny algorytm identyfikacji

Z równania (22) wynika, że optymalny ciąg sterowań identyfikujących jest funkcją nieznanego wektora parametrów $\underline{\theta}$.
Praktyczny algorytm sterowania jest więc suboptymalny i wykorzystuje kolejne estymaty $\underline{\hat{\theta}}_i$ dla $i = 1,2,\ldots,N$ do poprawy ciągu sterowań. Suboptymalny ciąg sterowań $\underline{\hat{u}}_N$ posiada pożądaną własność asymptotyczną, gdyż zachodzi

Twierdzenie: Jeśli estymata $\underline{\hat{\theta}}_N$ jest zbieżna dla $N \to \infty$, tzn. jeśli $\lim\limits_{N\to\infty} \underline{\hat{\theta}}_N = \underline{\theta}$ to $\lim\limits_{i\to\infty} \hat{u}_i = u_i^o) = 0.$

Dowód zbieżności estymaty dla metody estymacji przedstawionej w rozdziale 6 niniejszej pracy można znaleźć w [5], natomiast wynikająca stąd implikacja jest oczywista.

Zagadnienie programowania kwadratowego powstałe jako maksymalizacja wyrażenia (22) zależy od znaków parametrów θ^i $i = 1,2,\ldots,2n$, tak więc, jeśli zachodzi dla każdego i oraz j

$$(\operatorname{sign}\hat{\theta}_j^i - \operatorname{sign}\theta^i) = 0, \tag{27}$$

gdzie

$$i = 1,2,\ldots,2n \qquad j = 1,2,\ldots,N,$$

to prawdopodobnie

$$\underline{\hat{u}}_N = \underline{u}_N^o.$$

Zakłócenia równości (27) należy się spodziewać w przypadku wystąpienia małych parametrów, tzn. gdy $|\theta^i| < \varepsilon$, gdzie ε dowolnie mała liczba dodatnia oraz dla małych j.

Znak parametru można uznać za wiarygodny, jeśli

$$\max\left\{P_{+}^{j}(\theta^{i}),\ P_{-}^{j}(\theta^{i})\right\} > P_0, \tag{28}$$

gdzie $0{,}5 < P_0 < 1$ pewna ustalona stała, zaś P_{+}^{j}, P_{-}^{j} -estymatory prawdopodobieństwa znaku + lub - parametru θ^{i} w j-tym kroku. W przypadku braku informacji początkowej o parametrach $\underline{\theta}$, stosując podejście minimaksowe estymatory P_{+}^{j} i P_{-}^{j} wyznaczyć można z zależności

$$P_{+}^{j} = \frac{j'}{j} \qquad P_{-}^{j} = \frac{j''}{j} \qquad j = 1,3,\dots,N, \tag{29}$$

gdzie

j' krotność wystąpienia znaku + estymaty

j'' krotność wystąpienia znaku - estymaty.

Zachodzi oczywiście $j = j' + j''$.

6. Metoda estymacji wektora $\underline{\theta}$

Przedstawiona poniżej metoda on-line estymacji wektora parametrów $\underline{\theta}$ umożliwia praktyczne stosowanie algorytmu sterowania, w którym wykorzystuje się kolejne estymaty $\hat{\underline{\theta}}_i$ do poprawy ciągu $\hat{\underline{u}}_N$. Metoda ta oparta na przekształceniach ortogonalnych ogranicza konieczną pojemność maszyny cyfrowej oraz usprawnia algorytmizację zwłaszcza dla dużych N i n.

Wstawiając (3) do (1) mamy

$$\sum_{k=1}^{n} a_k y_{i-k} + \sum_{k=1}^{n} b_k u_{i-k} - y_i = \eta_i, \tag{30}$$

gdzie

$$\eta_i = \sum_{k=1}^{n} a_k \xi_{i-k} - \xi_i \tag{31}$$

$$i = 1,2,\dots,N$$

Pisząc równanie (30) macierzowo mamy

$$H_N^* \underline{\theta} - \underline{y}_N = \underline{\eta}_N, \tag{32}$$

gdzie H_N^* powstaje z H_N zamieniając x_i na y_i.

Estymatę $\underline{\theta}$ należy wybrać tak, aby zachodziło

$$\min_{\underline{\theta}} Q = \min_{\underline{\theta}} \underline{\eta}_N^T \underline{\eta}_N \tag{33}$$

Równanie (32) można zapisać w postaci

$$\left[H_N^* \; -\underline{y}_N\right] \begin{bmatrix} \underline{\theta} \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{\eta}_N \tag{34}$$

lub w skrócie

$$D \underline{\tilde{\theta}} = \underline{\eta}_N. \tag{35}$$

Stosując transformację ortogonalną mamy

$$T D = \tilde{D}_{(Nx2n+1)} \tag{36}$$

oraz

$$T \underline{\eta}_N = \underline{\tilde{\eta}}_N. \tag{37}$$

Ponieważ

$$T^T T = I, \tag{38}$$

to

$$\underline{\tilde{\eta}}_N^T \underline{\tilde{\eta}}_N = \underline{\eta}_N^T \underline{\eta}_N. \tag{39}$$

Niech T będzie typu

$$T_{ij} = \left[\begin{array}{ccccccccc}
1 &&&&&&&& \\
& 1 &&&&&&& \\
&& \ddots &&&&&& \\
&&& r & \cdots & s &&& \\
&&& \vdots & 1 & \vdots &&& \\
&&& \vdots & \ddots & \vdots &&& \\
&&& \vdots & 1 & \vdots &&& \\
&&& -s & \cdots & r &&& \\
&&&&&& \ddots && \\
&&&&&&& 1 & \\
&&&&&&&& 1
\end{array}\right]
\begin{array}{l} \\ \\ \\ \cdots i \\ \\ \\ \\ \cdots j \\ \\ \\ \\ \end{array} \tag{40}$$

gdzie

$$r^2 + s^2 = 1 \tag{41}$$

wtedy dowolny element macierzy D można wyzerować bez zmiany sumy kwadratów Q.

Dla $k \neq i \wedge k \neq j$ zachodzi

$$\tilde{d}_{kl} = d_{kl}, \qquad \tilde{\eta}_k = \eta_k, \tag{42}$$

gdzie $l = 1,2,\dots,2n+1$, zaś dla $k = i$

$$\tilde{d}_{il} = rd_{il} + sd_{jl}, \quad \tilde{\eta}_i = r\eta_i + s\eta_i$$

i dla $k = j$ (43)

$$\tilde{d}_{jl} = -sd_{il} + rd_{jl}, \quad \tilde{\eta}_j = -s\eta_i + r\eta_j.$$

Wybierając r lub s tak, żeby

$$\tilde{d}_{j1} = 0$$

mamy zgodnie z (41)

$$r = \frac{d_{11}}{\sqrt{d_{11}^2 + d_{j1}^2}} \qquad s = \frac{d_{j1}}{\sqrt{d_{11}^2 + d_{j1}^2}} \tag{43}$$

Stosując odpowiednio te przekształcenia można równanie (35) sprowadzić do postaci

$$\left[\begin{array}{cccc|c} d_{11}^* & d_{12}^* & \cdots & d_{1,2n}^* & d_{1,2n+1}^* \\ & d_{22}^* & \cdots & d_{2,2n}^* & d_{2,2n+1}^* \\ & & & \vdots & \vdots \\ & 0 & & d_{2n,2n}^* & d_{2n,2n+1}^* \\ & & & & d_{2n+1,2n+1}^* \\ & & & & 0 \end{array}\right]_{[N\times(2n+1)]} \left[\begin{array}{c} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \\ 1 \end{array}\right]_{[(2n+1)\times 1]} = \left[\begin{array}{c} \eta_1^* \\ \eta_2^* \\ \vdots \\ \eta_{2n}^* \\ \eta_{2n+1}^* \\ 0 \end{array}\right]_{[N\times 1]} \tag{44}$$

Estymatę $\hat{\underline{\theta}}$ znajduje się rozwiązując równanie liniowe

$$D^*_{[2n\times 2n]}\,\hat{\underline{\theta}} + \underline{d}^*_{[2n\times 1]} = 0, \tag{45}$$

gdzie

$$D^* = \begin{bmatrix} d_{11}^* & \cdots & d_{1,2n}^* \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & d_{2n,2n}^* \end{bmatrix} \tag{46}$$

$$\underline{d}^{*T} = \left[d^*_{1,2n+1} \dots d^*_{2n,2n+1}\right] \tag{47}$$

Natomiast

$$Q_{min} = d^{*2}_{2n+1,2n+1} \tag{48}$$

Macierz D^* jest trójkątna, zatem rozwiązanie równania (45) jest bardzo proste i ma postać

$$\begin{aligned} \hat{\theta}^{2n} &= \hat{b}_n = -\frac{d^*_{2n,2n+1}}{d^*_{2n,2n}} \\ \hat{\theta}^{2n-1} &= \hat{b}_{n-1} = -\frac{1}{d^*_{2n-1,2n-1}}\left(d^*_{2n-1,2n+1} + \hat{b}_n d^*_{2n-1,2n}\right) \\ \hat{\theta}^{2n-k} &= -\frac{1}{d^*_{2n-k,2n-k}}\left(d^*_{2n-k,2n+1} - \sum_{i=0}^{k-1} \hat{\theta}^{2n-i} d^*_{2n-k,2n-i}\right). \end{aligned} \tag{49}$$

Z chwilą nadejścia nowego pomiaru macierz w równaniu (44) ma wymiar $(N+1)x(2n+1)$, ale stosując opisaną transformację można wyzerować wszystkie elementy tego nowego wiersza, co zmienia górną macierz trójkątną, gromadzącą całą informację o procesie.

7. Przykład

Rozpatrzmy przykład liniowego obiektu pierwszego rzędu

$$x_k = -0{,}5\, x_{k-1} + u_k,$$

zatem wektor nieznanych parametrów jest

$$\underline{\theta} = \begin{bmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Łatwo pokazać, że optymalny ciąg sterowań, zgodnie z warunkiem maksymalizacji wyrażenia (22), ma postać

$$u_k^o = C \operatorname{sign} \theta^1 \theta^2 x_k.$$

Równanie wyjścia zgodnie z (3) jest

$$y_k = x_k + \xi_k,$$

gdzie

$$E(\xi_k) = 0 \qquad E(\xi_k^2) = 0{,}1$$

Dla próbki o rozmiarze $k = 1,2,\dots,5$ uzyskano estymatę

$$\hat{\underline{\theta}}_5 = \begin{bmatrix} -0{,}864 \\ \\ 0{,}929 \end{bmatrix}$$

natomiast dla próbki o rozmiarze $k = 1,2,\dots,10$ estymatę

$$\hat{\underline{\theta}}_{10} = \begin{bmatrix} -0{,}555 \\ \\ 1{,}001 \end{bmatrix}$$

W pracy [6] tego rzędu dokładność (odległość od prawdziwej wartości parametrów), przy identycznych założeniach co do szumu, uzyskano dla próbki o rozmiarze $k = 1,2,\dots,50$.

8. Wnioski

Przedstawiona powyżej metoda doboru ciągu sterowań identyfikujących nieznane parametry obiektu wydaje się być szczególnie przydatna tam, gdzie czas identyfikacji jest ograniczony (nieduże N) oraz gdy mamy pomiary zakłócone szumem o dużej dyspersji.

9. Zakończenie

Dziękuję Panu doc. drowi hab. R. Gessingowi za pomoc naukową i krytyczne uwagi, dzięki którym uniknąłem wielu błędów w trakcie pisania tej pracy.

LITERATURA

1. LEVADI V.S.: Design of input signals... IEEE Trans. on Automatic Control No 2 1966.
2. GAGLIARDI R.M.: Input selection for ... IEEE Trans. on Automatic Control No 5 1967.
3. AOKI M., STALEY R.M.: On input signal ... IFAC, Warszawa 1969 Techn. Session 26.
4. AOKI M., YUE P.C.: On certain convergence ... SIAM J. Control vol. 8 no 2 1970.
5. PETERKA V.: New Approach to ... Kybernetika 4 1968 No 6.
6. OZA K.G., JURY E.I.: Adaptive algorithms for ... IFAC Warszawa 1969 Techn. Session 26.
7. LEE R.C.K.: Optimal estimation, identification and control, MIT Press, Cambridge, Massachusetts. 1969.
8. DEUTSCH R.: Teoria estymacji, PWN, Warszawa 1969.

ВЫБОР ОПТИМАЛЬНОЙ ИДЕНТИФИЦИРУЕМОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Р е з ю м е

В работе рассматрен вопрос выбора последовательности управлений, максимизирующей след обратной для ковариационной матрицы оценки вектора неизвестных параметров Θ объекта, описываемого скалярным дискретным уравнением н-ного порядка при измерении выходных сигналов с помехами.

Представлен алгоритм субоптимальной идентификации и приведен простой пример.

OPTIMUM INPUT SELECTION FOR PARAMETER IDENTIFICATION

S u m m a r y

This paper examines the problem of selection a sequence of input signals for parameter identification of a system described by n-th order scalar difference equation with Gaussian additive noise on the observations of the output. The optimization problem is that of choosing an identyfying sequence to maximize the trace of the inverse of covariance matrix of the estimate of the vector of unknown parameters $\underline{\theta}$, subject to an amplitude constraint on the input signals. The on-line suboptimal algorithm is proposed and a simple example is given.