ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1974

Seria: Automatyka, z. 25 Nr kol. 394

Zbigniew Tatarkiewicz

Studium Doktoranckie
przy Wydziale Automatyki i Informatyki

ZASADA MAKSIMUM DLA PEWNEJ KLASY DYSKRETNYCH PROCESÓW STEROWANYCH KWANTOWO

Streszczenie. W pracy rozpatrzono zagadnienie wyznaczania sterowania optymalnego, dla pewnej klasy procesów dyskretnych, przy założeniu, że zbiór sterowań dopuszczalnych U jest zbiorem o skończonej ilości elementów w r-wymiarowej przestrzeni euklidesowej E_r. Pokazano, że dla rozwiązania postawionego problemu korzystanie z dyskretnej wersji zasady maksimum jest możliwe i poprawne. Rozważania zilustrowano prostym przykładem liczbowym.

Wstęp

Stosowanie metody programowania dynamicznego do optymalizacji wieloetapowych, wielowymiarowych procesów sterowania prowadzi do znanych trudności obliczeniowych związanych z ograniczoną pamięcią maszyn cyfrowych. Trudności te dały impuls do poszukiwania nowych, matematycznych metod optymalizacji procesów dyskretnych.

W latach sześćdziesiątych powstało szereg prac, np. [2], [3], [4], rozszerzających zastosowanie zasady maksimum Pontriagina [1] na układy opisywane równaniami różnicowymi. Przeprowadzone w nich dowody dyskretnej zasady maksimum prowadzą do tzw. słabego sformułowania tej zasady, zgodnie z którym sterowanie optymalne u^o jest punktem stacjonarnym hamiltonianu, jeżeli u^o jest punktem wewnętrznym zbioru U dopuszczalnych sterowań, natomiast w punkcie u^o leżącym na granicy zbioru U hamiltonian posiada maksimum lokalne.

Dowody te tracą swą ważność, jeśli zbiór U dopuszczalnych sterowań składa się z pojedynczych separowanych od siebie punktów czyli gdy

mamy do czynienia z procesami sterowanymi kwantowo, w których poszczególne składowe u_i sterowania mogą przyjmować tylko pewne określone wartości (np. wielokrotność przyjętej wielkości Δ).

W tym przypadku korzystanie z dyskretnej wersji zasady maksimum może prowadzić do błędów.

W artykule pokazano, że dla pewnej klasy procesów dyskretnych sterowanych kwantowo korzystanie z zasady maksimum jest możliwe i poprawne.

Postawienie problemu

Rozpatrzymy wieloetapowy proces sterowania opisany następującym układem równań różnicowych

$$x(k+1) = \alpha(u(k),k)\, x(k) + \beta(u(k)), \quad k = 0,1,\ldots,N-1 \tag{1.1}$$

z warunkiem początkowym

$$x(o) = a, \tag{1.2}$$

gdzie $x(k) = \left[x_1(k),\ldots\ldots,x_n(k)\right]^T$ jest kolumnowym wektorem stanu, określonym w n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej X_n na k-tym etapie.

$u(k) = \left[u_1(k),\ldots\ldots,u_r(k)\right]^T$ jest r-wymiarowym wektorem sterowań określonym na etapie k, $\alpha(u(k),k)$ macierzą o elementach $\alpha_{ij}(u(k),k)$; $(i,j = 1,\ldots\ldots,n)$, $\beta(u(k))$ funkcją wektorową o składowych $\beta_1(u(k)),\ldots\ldots,\beta_n(u(k))$.

Zakładamy, że $u(k) \in U \subset E_r$ dla $k = 0,1,\ldots\ldots,N-1$, gdzie U jest zbiorem o skończonej ilości elementów w r-wymiarowej przestrzeni euklidesowej E_r, zwanych sterowaniami.

W charakterze wskaźnika jakości przyjęto wyrażenie

$$I = \langle c, x(N) \rangle \tag{1.3}$$

gdzie $<,>$ oznacza iloczyn skalarny wektora "wagi" $c = [c_1, \ldots, c_n]^T$ i wektora stanu końcowego układu $x(N) = [x_1(N), \ldots, x_n(N)]^T$.

Zadanie 1. Wyznaczyć taki ciąg sterujący $\{u(k)\}$ $u(k) \in U$, $k = o, \ldots, N-1$, (N-zadane), który minimalizuje wskaźnik jakości (1.3) z uwzględnieniem równań stanu (1.1) jako więzów różnicowych oraz warunku początkowego (1.2).

Ciąg sterowań rozwiązujący zadanie 1 będziemy nazywać ciągiem optymalnym $\{u^o(k)\}$, a odpowiadającą mu trajektorię, trajektorią optymalną. Trajektoria oczywiście nie jest krzywą ciągłą, lecz sekwencją punktów w przestrzeni euklidesowej, X_n.

Uwaga. Wyrażenie (1.3) można łatwo, korzystając z zależności (1.1) przedstawić w następującej równoważnej postaci

$$<c, x(N)> = <c, x(o)> + \sum_{k=0}^{N-1} <c, (\alpha - E)x(k) + \beta(u(k)> \tag{1.4}$$

gdzie E jest macierzą jednostkową.
Dla warunku początkowego (1.2) wyrażenie $<c, x(o)>$ jest wielkością stałą, niezależną od przyjętego sterowania. Zadanie 1 nie ulegnie więc zmianie, jeśli zamiast zależności (1.3), minimalizować będziemy wskaźnik

$$I = \sum_{k=0}^{N-1} \left[<c, (\alpha - E)\, x(k) + \beta(u(k))> \right]. \tag{1.5}$$

Analogicznie jak dla układów ciągłych [1] rozpatrzmy n + 1 wymiarową przestrzeń stanów. X_{n+1}, wprowadzając dodatkową współrzędną x_o zdefiniowaną

$$x_o(k) = \sum_{i=o}^{k-1} \left[<o, (\alpha - E)x(i) + \beta(u(i))> \right] \tag{1.6}$$

Z zależności (1.6) wynika, że

$$x_o(k+1) = x_o(k) + \langle c, (\alpha - E)\, x(k) + \beta(u(k)) \rangle$$

$$x_o(o) = 0, \quad x_o(N) = I. \tag{1.7}$$

Stan, rozszerzonego o zmienną x_o, procesu na k+1 etapie opisuje teraz układ n+1 równań różnicowych.

$$\bar{x}(k+1) = \mathcal{J}(u(k), k)\, \bar{x}(k) + \delta(u(k)), \tag{1.8}$$

gdzie

$$\bar{x}(k) = \left[x_o(k),\ x^T(k)\right]^T, \quad \bar{x}(o) = \left[o, a^T\right]^T$$

$$\bar{x}(N) = \left[I,\ x^T(N)\right]^T,$$

$$\mathcal{J}(u(k),k) = \left[\begin{array}{c|c} 1 & \left[o^T\right]_{1xn} \left[\alpha - E\right]_{nxn} \\ \hline \left[o\right]_{nx1} & \left[\alpha\right]_{nxn} \end{array}\right]_{(n+1)x(n+1)}$$

$$\delta(u(k)) = \begin{bmatrix} c^T\beta \\ \beta \end{bmatrix}_{(n+1)x1}.$$

Możemy obecnie postawić następujące zadanie równoważne zadaniu 1.

<u>Zadanie 2</u>. W przestrzeni X_{n+1} zmiennych $x_o, x_1, \ldots, x_n$ dany jest punkt początkowy $\bar{x}(o)$.

W dopuszczalnym zbiorze ciągów sterujących $\{u(k)\}$, $u(k) \in U$, $k = o, \ldots, N-1$, dla których trajektoria układu (1.8) z warunkiem początkowym $\bar{x}(o)$ osiąga na N-tym etapie stan $\bar{x}(N)$, należy wyznaczyć taki, dla którego wektor $\bar{x}(N)$ posiada najmniejszą składową $x_o(N)$.

Trajektoria układu (1.8) jest sekwencją punktów w przestrzeni X_{n+1}.

2. Sformułowanie warunku optymalności ciągu $\{u(k)\}$

Oznaczmy przez $H(\bar{z}, \bar{x}, u, k)$ następujący iloczyn skalarny

$$H(\bar{z},\bar{x},u,k) = \langle \bar{z}(k+1), \bar{x}(k+1) \rangle = \langle \bar{z}(k+1), \gamma(u(k),k)\, \bar{x}(k) + \delta(u(k)) \rangle \tag{2.1}$$

i niech wektor $\bar{z}(k+1) = \left[z_0(k+1),\ldots,z_n(k+1)\right]^T$ będzie rozwiązaniem układu równań

$$\bar{z}(k) = \gamma^T(u(k), k)\, \bar{z}(k+1). \tag{2.2}$$

Obecnie można sformułować następujące twierdzenie.

Twierdzenie

Niech $\{u^o(k)\}$ będzie optymalnym ciągiem sterującym poszukiwanym w zadaniach 1 i 2 i niech $\bar{z}^o(k+1)$ będzie rozwiązaniem układu równań (2.2), w którym $u(k) = u^o(k)$ z warunkiem końcowym $\bar{z}^o(N) = \left[-1, 0,\ldots,0\right]^T$.

Wtedy, dla każdego etapu k, sterowanie $u^o(k)$ maksymalizuje hamiltonian (2.1), czyli zachodzi

$$\max_{u \in U} H(\bar{z}^o(k+1), \bar{x}^o(k), u, k) = H(\bar{z}^o(k+1), \bar{x}^o(k), u^o(k), k) \tag{2.3}$$

dla $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

Uwaga. Jeżeli zadanie 1 polega na maksymalizacji wskaźnika jakości (1.3), to Twierdzenie pozostaje ważne, z tym, że

$$\bar{z}(N) = \left[1, 0, \ldots, 0\right]^T.$$

Dowód

Niech $\{u(k)\}$, $k = 0,1,\ldots,N-1$ będzie dowolnym dopuszczalnym ciągiem sterującym a $\{\bar{x}(k)\}$ odpowiadającą mu trajektorią układu (1.8) z warunkiem początkowym $\bar{x}(o) = [o,a^T]^T$. Oznaczmy przez $\bar{y}(k)$ trajektorię odpowiadającą temu samemu sterowaniu $u(k)$ i wychodzącą z punktu $\bar{x}(o) + \Delta\bar{x}(o)$. Trajektoria $\{\bar{y}(k)\}$ posiada postać

$$\bar{y}(k) = \bar{x}(k) + \Delta\bar{x}(k) \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{2.4}$$

gdzie

$$\Delta\bar{x}(k) = \gamma'(u(k-1), k-1)\Delta\bar{x}(k-1) = \prod_{i=k-1}^{j} \gamma'(u(i),i)\Delta\bar{x}(j) \tag{2.5}$$ [1]

dla $k \geqslant j$.

Niech sterowaniu optymalnemu $\{u^o(k)\}$, poszukiwanemu w zadaniu 2, odpowiada, przy warunku początkowym $\bar{x}(o) = [o,a^T]^T$, optymalna trajektoria $\{\bar{x}^o(k)\}$. Wybierzmy dowolną całkowitą liczbę z przedziału $[0, N-1]$ np. $k-1$ i utwórzmy specjalną wariację sterowania optymalnego.

$$\{u(k)\}_z = \{u^o(o), \ldots, u^o(k-2), u(k-1), u^o(k), \ldots, u^o(N-1)\},$$

gdzie $u(k-1)$ jest dowolnym elementem zbioru U.
Wariacja trajektorii optymalnej na k-tym etapie

$$\Delta\bar{x}^o(k) = [\gamma'(u(k-1),k-1) - \gamma'(u^o(k-1), k-1)]\bar{x}^o(k-1) + \delta(u(k-1)) - \delta(u^o(k-1)) \tag{2.6}$$

[1] Iloczyn macierzy w zależności (2.5) jest zapisany z zachowaniem kolejności składników.

spowodowana wariacją sterowania na etapie k-1 będzie przenosiła się wzdłuż trajektorii optymalnej zgodnie z zależnością (2.5).

Oznaczmy przez $S_{kk}(\bar{x}^o(k))$ zbiór wszystkich wektorów $\Delta\bar{x}^o(k)$ wychodzących z punktu $\bar{x}^o(k)$ i określonych przez zależność (2.6), w której $u(k-1)$ przyjmuje dowolną wartość ze zbioru U.

Lemat. Hiperpłaszczyzna $\langle \bar{z}^o(k), \Delta\bar{x}^o(k)\rangle = 0$, gdzie $\bar{z}^o(k)$ jest rozwiązaniem układu równań (2.2), w którym $u(k) = u^o(k)$, z warunkiem końcowym $\bar{z}^o(N) = p = [-1,\ldots,0]^T$, jest hiperpłaszczyzną oporową zbioru $S_{kk}(x^o(k))$ w punkcie $\bar{x}^o(k)$, tzn. dla każdego wektora $\Delta\bar{x}^o(k) \in S_{kk}(\bar{x}^o(k))$ jest spełniona relacja $\langle \bar{z}^o(k), \Delta\bar{x}^o(k)\rangle \leqslant 0$.
Dowód lematu umieszczono w Dodatku.

Dowód twierdzenia

Załóżmy, że relacja (23) nie jest spełniona. Istnieje wówczas takie sterowanie $u(k-1)$ i odpowiadający mu wektor stanu $\bar{x}(k)$, że $\langle \bar{z}^o(k), \bar{x}(k)\rangle \gg \langle \bar{z}^o(k), \bar{x}^o(k)\rangle$ lub inaczej $\langle \bar{z}^o(k), \bar{x}(k) - \bar{x}^o(k)\rangle \gg 0$, ale na podstawie Lematu mamy $\langle \bar{z}^o(k), \bar{x}(k) - \bar{x}^o(k)\rangle \leqslant 0$. A więc doprowadziliśmy do sprzeczności, co dowodzi twierdzenia.

3. Przykład

W reaktorze chemicznym rozpatrzmy proces $A \xrightarrow{k_1} B$; $A \xrightarrow{k_2} C$; $A \xrightarrow{k_3} D$ przebiegający wg równań

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -(k_1(u) + k_2(u) + k_3(u))\, x_1 \\ \dot{x}_2 &= k_1(u)x_1 \\ \dot{x}_3 &= k_2(u)x_1 \\ \dot{x}_4 &= k_3(u)x_1, \end{aligned} \tag{3.1}$$

gdzie x_1 oznacza stężenie substratu A, a, x_2, x_3, x_4 - odpowiednio stężenia produktów B, C, D. Stałe szybkości reakcji $k_i(u)$, $(i = 1, 2, 3)$ określa równanie Arrheniusa.

$$k_i(u) = \alpha_i \exp\left\{- E_i\left[R\ (273 + u)\right]^{-1}\right\} \tag{3.2}$$

gdzie

α - jest współczynnikiem częstości w $\left[\text{godz}^{-1}\right]$

E - energią aktywacji w $\left[\text{J mol}^{-1}\right]$

R - uniwersalną stałą gazową w $\left[\text{J mol}^{-1}\ {}^{o}\text{K}^{-1}\right]$

u - temperaturą w $\left[{}^{o}\text{C}\right]$.

Warunki początkowe dla równań (3.1) wynoszą: $x_1(o) = 10$, $x_2(o) = x_3(o) = x_4(o) = 0$, a stałe szybkości reakcji

$$k_1(u) = 1{,}1\ 10^5 \exp\left[-4\ 10^3\ (273 + u)^{-1}\right],$$

$$k_2(u) = 0{,}4\ 10^{10} \exp\left[-8\ .\ 10^3\ (273 + u)^{-1}\right],$$

$$k_3(u) = 1{,}2\ 10^{11} \exp\left[-9\ .\ 10^3\ (273 + u)^{-1}\right].$$

Zakładając, że temperaturę, w której przebiega proces można zmieniać na poszczególnych etapach sterowania $k = 0, 1, \ldots, N-1$ $N=3$ i że $u(k)$ należy do zbioru sterowań dopuszczalnych $U = \left\{40, 50, 60, 70\right\}$, mamy wyznaczyć taki ciąg sterujący $\left\{u(k)\right\}$, który maksymalizuje stężenie produktu B w chwili $t_f = NT = 3$.

Przekształcając układ równań (1.1) do postaci różnicowej i wprowadzając oznaczenia

$$\vartheta(k) = u(k-1);\quad k(\vartheta) = \sum_{i=1}^{3} k_i(\vartheta);\quad w(\vartheta) = \exp\left[- k(\vartheta)\right]$$

otrzymujemy

$$x_1(k) = w(\vartheta)\, x_1(k-1)$$

$$x_i(k) = x_i(k-1) + \frac{k_{i-1}(\vartheta)}{k(\vartheta)} \left[1 - w(\vartheta)\right] x_1(k-1), \qquad (3.3)$$

$$i = 1, 3, 4.$$

Warunkiem koniecznym optymalności ciągu sterowań $\{u(k)\}$ jest osiąganie przez funkcję

$$H(z(k)), x(k-1), u(k-1)) = \sum_{i=1}^{4} z_i(k)\, x_i(k) \qquad (3.4)$$

wartości maksymalnej na sterowaniu optymalnym. Zmienne sprzężone $z_i(k)$ określa się z równań rekurencyjnych

$$z_1(k-1) = z_1(k)\, w(\vartheta) + \frac{k_1(\vartheta)}{k(\vartheta)} \left[1 - w(\vartheta)\right] \qquad (3.5)$$

$$z_i(k-1) = z_i(k), \quad i = 2, 3, 4$$

z warunkami końcowymi

$$z_1(N) = z_3(N) = z_4(N) = 0, \quad z_2(N) = 1.$$

Wyznaczony optymalny ciąg sterowań $\{u^o(k)\} = \{40, 50, 70\}$. Odpowiadające mu stężenie produktu B $x_2(3) = 6{,}53$.

4. Uwagi

Należy podkreślić, że podany w Twierdzeniu warunek konieczny optymalności ciągu sterującego $\{u(k)\}$ stwierdza osiąganie przez hamiltonian, jako funkcję u, na każdym etapie procesu k, maksimum globalnego wśród wszystkich sterowań dopuszczalnych. Jest to więc sformułowa-

nie podobne jak dla wersji ciągłej [1] zasady maksimum. Zbiór sterowań dopuszczalnych U występujący w zadaniach 1 i 2 może być dowolnym zadanym zbiorem. Przyjęcie i przeprowadzenie rozważań przy tym założeniu sprawia, że zyskują one dodatkowe znaczenie praktyczne. Tę stronę zagadnienia ilustruje dobrze Przykład.

Jak wiadomo, w przypadku dyskretnym obowiązuje słabe sformułowanie [3], [4], [5] zasady maksimum. Jeżeli sterowanie $u(k)$ należy do wnętrza obszaru U, to warunkiem koniecznym optymalności jest osiąganie przez hamiltonian dla $u^o(k)$ dowolnego punktu stacjonarnego np. punktu przegięcia lokalnego minimum. Jeżeli natomiast sterowanie $u^o(k)$ należy do brzegu obszaru U, to warunkiem koniecznym optymalności dla tego sterowania jest osiąganie przez hamiltonian wartości lokalnie maksymalnej na granicy zbioru U.

Jeśli dla danego k funkcja H zmiennej u posiada kilka punktów stacjonarnych lub maksimów lokalnych, to utrudnia to znacznie wybór właściwego $u^o(k)$. Oczywiście dla procesów sterowanych kwantowo nie można mówić o zachowaniu się lokalnym hamiltonianu w punkcie u^o, gdyż otoczenie punktu u^o nie należy do dopuszczalnego zbioru sterowań i takie sformułowanie zasady maksimum traci swój sens.

Nie wydaje się prawdopodobne, by przy sterowaniu kwantowym i nieliniowym procesie można było podać warunki optymalności w postaci analogicznej jak w Twierdzeniu podanym w niniejszej pracy.

5. Dodatek. Dowód lematu

Pokażemy teraz, że jeżeli $\bar{z}(k)$ jest rozwiązaniem układu równań (2.2), a $\bar{x}(k)$ rozwiązaniem równań (2.5), to jest spełniona zależność

$$\langle \bar{z}(k), \Delta \bar{x}(k) \rangle = \text{const} \tag{5.1}$$

rzeczywiście

$$\langle \bar{z}(k), \Delta \bar{x}(k) \rangle = \langle \mathcal{J}^T(u(k), k)\, \bar{z}(k+1), \Delta \bar{x}(k) \rangle =$$

$$\langle \bar{z}(k+1), \Delta \bar{x}(k+1) \rangle .$$

Oznaczmy przez X^N_{n+1} przestrzeń wektorową, otrzymaną z wektorowej przestrzeni stanów X_{n+1} przez przeniesienie początku układu współrzędnych do punktu $\bar{x}(N)$. Niech L będzie pewną hiperpłaszczyzną przestrzeni X^N_{n+1} określoną następująco:

$$<\bar{p}, \Delta\bar{x}(N)> = \text{const}, \tag{5.2}$$

gdzie $\bar{p} = \left[p_o, \ldots, p_n\right]^T$ jest dowolnym wektorem.
Na podstawie zależności (5.1)

$$<\bar{z}(k), \Delta\bar{x}(k)> = <\bar{p}, \Delta\bar{x}(N)> = \text{const}. \tag{5.3}$$

Wektor $\bar{z}(k)$ jest rozwiązaniem równań (2.2) z warunkiem końcowym $\bar{z}(N) = \bar{p}$.

Oznaczmy przez $S_{jk}(\bar{x}^o(j))$ zbiór wektorów $\Delta\bar{x}^o(j)$ wychodzących z punktu $\bar{x}^o(j)$, przy przeprowadzeniu wariacji sterowania w punkcie k-1 $j \geqslant k$

$$S_{jk} = \left\{\Delta\bar{x}^o(j) : \Delta x^{-o}(j) = \prod_{i=j-1}^{k} \gamma'(u^o(i), i)\Delta\bar{x}^o(k)\right\}, \; 1 \leqslant k \leqslant N,$$

gdzie wektor $\Delta\bar{x}^o(k)$ jest określony przez zależność (2.6), w której $u(k-1)$ jest dowolnym elementem zbioru U.

Z założenia o optymalności sterowania $u^o(k)$ i odpowiadającej mu trajektorii $\bar{x}^o(k)$, wynika że

$$<\bar{p}, \; \bar{x}(N) - \bar{x}^o(N)> \leqslant 0, \tag{5.4}$$

jeśli tylko

$$\bar{p} = \left[-1, 0, \ldots. 0\right]^T.$$

Łatwo zauważyć równoważność relacji (5.4) z nierównością $x_o(N) \geqslant x^o_o(N)$.

Dla każdego k $(k = 1,\dots,N)$ zbiór $S_{Nk}(\bar{x}^o(N))$ jest więc całkowicie położony w półprzestrzeni

$$<\bar{p}, \Delta\bar{x}^o(N)> \leqslant 0, \quad (\Delta\bar{x}^o(N) = \bar{x}(N) - \bar{x}^o(N)),$$

wyznaczonej przez hiperpłaszczyznę $<\bar{p}, \Delta\bar{x}^o(N)> = 0$, a więc dla wszystkich wektorów $\Delta\bar{x}^o(N) \in S_{NK}$ zachodzi nierówność $<\bar{p}, \Delta\bar{x}^o(N)> \leqslant 0$ lub dla każdego wektora $\Delta\bar{x}^o(k) \in S_{kk}(\bar{x}^o(k))$

$$<p, \prod_{i=N-1}^{k} \gamma(u^o(i), i)\Delta\bar{x}^o(k)> \leqslant 0.$$

Ponieważ

$$\bar{z}^o(k) = <\prod_{i=N-1}^{k} \gamma(u^o(i),i)\, \bar{z}^o(N)> = <\prod_{i=N-1}^{k} \gamma(u^o(i),i),\ \bar{p}\ ,>$$

więc dla każdego wektora $\Delta\bar{x}^o(k) \in S_{kk}$ zachodzi $<\bar{z}^o(k), \Delta\bar{x}^o(k)> \leqslant 0$, co należało udowodnić.

LITERATURA

1. PONTRAGIN L.S., BOŁTIAŃSKI W.G., GAMKRELIDZE R.W., MIESZCZENKO E.F: Matematiczeskaja tieorija optymalnych processow. Moskwa 1961 r., Fizmatgiz.

2. FAN L.T., WANG C.S.: The discrete maximum principle, New York 1962 r. J. Wiley.

3. PROPOJ A.J.: O principie maksimuma dla diskretnych sistem uprawlenija, Awtomatika i Tielemechanika, 1965 r., nr 7.

4. HALKIN H.: Optimal control for sistems described by difference equations, Adwances in Control Systems, Vol. 1, pod red. Leondes C.T., New York - London 1964 r.

5. WIERZBICKI A.: Zasada maksimum a synteza regulatorów optymalnych, Archiwum Automatyki i Telemechaniki, 1968 r., tom XIII, zeszyt 1.

6. SOLHEIM O.A., POHNER F.: Optimal control of a class of discrete systems, IFAC, Warszawa 1969.

7. WALAS S.M.: Kinetyka reakcji dla inżynierów chemików. WNT Warszawa, 1963.

ПРИНЦИП МАКСИМУМА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЁННЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ С УПРАВЛЕНИЕМ КВАНТОВАННЫМ ПО УРОВНЮ

Р е з ю м е

В статье рассмотрена вопроса определения оптимального управления, для некоторого класса дискретных процессов, при условии, что множество допустимых управлений, является конечной совокупностью точек в r-мерном евклидовом пространстве E_r. Показано, что решение поставленной проблемы, при помощи дискретного принципа максимума, является возможным и правильным. В статье это показано на численном примере.

MAXIMUM PRINCIPLE FOR SOME DISCRETE SYSTEMS WITH QUANTIZED CONTROL SIGNALS

S u m m a r y

The paper investigates the problem of choosing the sequence of optimal control signals for a certain class of discrete systems, provided that the admissible control set U has a finite number of elements in r-dimensional Euclidean space. It has been demonstrated, that for solving this problem one can use discrete maximum principle.

Considerations are illustrated by a simple numerical example.