

Eugeniusz Kosek

Ośrodek Elektronicznej
Techniki Obliczeniowej
Politechniki Śląskiej

ITERACYJNY SPOSÓB ESTYMACJI PARAMETRÓW
IDENTYFIKOWANEGO OBIEKTU

Streszczenie. W pracy opisano iteracyjny sposób estymacji parametrów obiektu z uwypukleniem aspektu obliczeniowego i porównaniem uzyskanych rezultatów z popularną metodą regresji liniowej.

1. Wstęp

W wielu metodach identyfikacji równanie różniczkowe, będące modelem matematycznym obiektu, zastępuje się równaniem różnicowym typu

$$\begin{aligned} y_n + a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} + \dots + a_k y_{n-k} = \\ = b_1 x_n + b_2 x_{n-1} + \dots + b_k x_{n-k+1}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

gdzie

y_i - dyskretna wartość sygnału wyjściowego $y(t_i)$; $i=n, n-1, \dots, n-k$,
 x_i - dyskretna wartość sygnału wejściowego $x(t_i)$.

Po wprowadzeniu zapisu macierzowego

$$y_n = \mathbf{X}_{n-1}^T \mathbf{F}$$

gdzie

$$F = \begin{bmatrix} -a_k \\ -a_{k-1} \\ \dots \\ -a_1 \\ \hline b_k \\ \dots \\ b_1 \end{bmatrix} \quad X_{n-1} = \begin{bmatrix} y_{n-k} \\ \dots \\ y_{n-1} \\ \hline x_{n-k+1} \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Jeśli wprowadzić oznaczenia

$$\hat{X}_{m-1} = \begin{bmatrix} X_k^T \\ X_{k+1}^T \\ \dots \\ X_{m-1}^T \end{bmatrix} \quad \hat{Y}_m = \begin{bmatrix} y_{k+1} \\ y_{k+2} \\ \dots \\ y_m \end{bmatrix} \quad \text{gdzie}$$

m - ilość pomiarów

minimalizacja sumy kwadratów błędów

$$Q = [\hat{Y}_m - \hat{X}_{m-1} F]^T [\hat{Y}_m - \hat{X}_{m-1} F] \quad (1.2)$$

względem F prowadzi do

$$F_{\text{opt}} = (\hat{X}_{m-1}^T \hat{X}_{m-1})^{-1} \hat{X}_{m-1}^T \hat{Y}_m \quad (1.3)$$

Widomo [10] iż tego typu estymator nie zawsze jest nieobciążony. Obliczeniowo, zagadnienie znalezienia parametrów optymalnych wg powyższego kryterium sprowadza się do znalezienia macierzy odwrotnej, której elementami leżącymi na przekątnej głównej są odpowiednie sumy kwadratów wartości $x(t_i)$ oraz $y(t_i)$.

Zakóźmy np. że chcemy znaleźć wartość b dla obiektu, którego wyjście y w zależności od wejścia x określone jest równaniem

$$y = bx.$$

Dysponujemy n parami pomiarowymi wartości x i y . Optymalna wartość b minimalizująca

$$Q = \sum_{i=1}^n (y_i - bx_i)^2 \quad \text{jest określona wzorem} \quad b_{\text{opt}} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

Wartości x_i oraz y_i jako wartości pomiarowe są obarczone błędami.

Przyjmijmy dla uproszczenia, że wartości y mierzone są bezbłędnie, natomiast każda wartość x_i obarczona jest błędem ε_i niezależnym od x i y o rozkładzie normalnym ze średnią zero i wariancją σ^2 . Stąd obliczane

$$b_{\text{opt}} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i + \varepsilon_i) y_i}{\sum_{i=1}^n (x_i + \varepsilon_i)^2} = \frac{\sum x_i y_i + \sum \varepsilon_i y_i}{\sum x_i^2 + 2 \sum x_i \varepsilon_i + \sum \varepsilon_i^2}$$

$$= \frac{\frac{\sum x_i y_i}{n} + \frac{\sum \varepsilon_i y_i}{n}}{\frac{\sum x_i^2}{n} + \frac{2 \sum x_i \varepsilon_i}{n} + \frac{\sum \varepsilon_i^2}{n}} \quad (1.4)$$

We wzorze 1.4 składniki $\frac{\sum \varepsilon_1 y_1}{n}$ oraz $\frac{\sum x_1 \varepsilon_1}{n}$ przy $n \rightarrow \infty$ dążą do zera, natomiast $\frac{\sum \varepsilon_1^2}{n}$ dąży do wartości stałej równej σ^2 . Ostatecznie obliczone b_{opt} będzie miało ze względu na obecność dodatniego składnika w mianowniku wartość zaniżoną bez względu na ilość pomiarów n . Wpływ składników teoretycznie zanikających na wynik obliczeń przy praktycznie ograniczonej ilości pomiarów n , będzie dyskutowany w dalszej części opracowania.

Jeśli uwzględnić błąd dla y_1 , to we wzorze 1.4 pojawią się składniki zanikające (zmienna ta nie występuje tam w kwadracie), co niestety nie ma miejsca w przypadku ogólnym (wzór 1.3), dla y_z przy $z < n$ ze wzoru 1.1.

Wzór 1.1 opisujący zachowanie się układu, jest we wzorze 1.3 wykorzystywany pośrednio dla obliczania kolejnych wartości y_n modelu z danych wartości x oraz y z poprzednich momentów czasowych (wartości z poprzednich pomiarów). Żądaną wartość y_n modelu można, dla porównania jej z wartością pomiarową, określić używając jedynie wartości wejściowych x stosując operatory liczbowe [3], czy też równoważne w sensie obliczeniowym obliczanie transformaty odwrotnej $\alpha^{-1}(Y(z))$, metodą dzielenia wielomianów. Przy takim podejściu model staje się nieliniowy względem parametrów i ich wartości mogą być określone jedynie na drodze iteracyjnej. Sposób ten, w pewnych przypadkach omówionych w dalszej części pracy, nie ma cech obciążenia szukanych estymatorów i w związku z tym może być przydatniejszy, zwłaszcza gdy parametry zakłóceń nie są znane, co jest wymagane w wielu innych metodach.

2. Model liniowy względem szukanych parametrów

Dla uproszczenia zapisu wprowadźmy następujące oznaczenia i definicje:

- a) ciąg wartości $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ nazywać będziemy operatorem liczbowym $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_n] = [a]$
- b) $[c] = [a] \pm [b]$, jeśli $c_i = a_i \pm b_i$

c) $[c] = [a] * [b]$, jeśli $c_i = \sum_{j=0}^1 a_j b_{i-j}$

d) $[c] = [a] * k$, jeśli $c_i = a_i \cdot k$

e) $[c] = \frac{[a]}{[b]}$, jeśli c_i są wartościami liczbowymi uzyskanymi z dzielenia dwóch wielomianów, których współczynnikami licznika są $a_0, a_1 \dots a_n$, a mianownika $b_0, b_1 \dots b_n$.

Rozpatrzmy obiekt inercyjny 1 rzędu o operatorowej funkcji przejścia $F(p) = \frac{k}{1 + pT}$. Oznaczmy ciąg wartości liczbowych sygnału wejściowego w kolejnych momentach próbkowania (co δ) $x_0, x_1, x_2 \dots x_{n-1}$ przez $[x]$, a sygnału wyjściowego przez y . Stosując metodę operatora różniczkującego [3] lub równoważną w tym przypadku formę Z, co daje lepszą aproksymację niż przekształcenie Z lub jego zmodyfikowana postać [7] uzyskamy przy podstawieniu

$$p \triangleq \frac{2}{\delta} \frac{[1, -1]}{[1, 1]}$$

$$[Y] \left(1 + \frac{2}{\delta} \frac{[1, -1]}{[1, 1]} T \right) = [x] \cdot k$$

(2.1)

$$[Y]([1, 1] + \frac{2T}{\delta} [1, -1]) = k [x][1, 1]$$

$$[Y] \left[1, \frac{1 - 2T/\delta}{1 + 2T/\delta} \right] = \frac{k}{1 + 2T/\delta} [x][1, 1].$$

Oznaczając $[x][1, 1]$ przez $[x^*]$, można napisać równoważne powyższemu równanie różnicowe

$$y_i + \frac{1 - \frac{2T}{\delta}}{1 + \frac{2T}{\delta}} y_{i-1} = \frac{k}{1 + \frac{2T}{\delta}} x_i^* \quad (2.2)$$

lub

$$y_i = -a_1 y_{i-1} + b_1 x_i^*, \quad (2.3)$$

gdzie

$$a_1 = \frac{1 - \frac{2T}{\delta}}{1 + \frac{2T}{\delta}}$$

$$b_1 = \frac{k}{1 + \frac{2T}{\delta}}$$

Wartości a_1 , b_1 a z nich bezpośrednio T oraz k można znaleźć stosując wzór 1.3.

W tym przypadku sprowadza się to, do rozwiązania układu równań

$$-a_1 \sum_{i=1}^{n-1} y_{i-1}^2 + b_1 \sum_{i=1}^{n-1} x_i^* y_{i-1} = \sum_{i=1}^{n-1} y_i y_{i-1} \quad (2.4)$$

$$-a_1 \sum_{i=1}^{n-1} x_i^* y_{i-1} + b_1 \sum_{i=1}^{n-1} x_i^{*2} = \sum_{i=1}^{n-1} x_i^* y_i$$

Wprowadźmy oznaczenia

$$\sum_{i=1}^{n-1} y_{i-1}^2 = S_1$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} x_i^* y_{i-1} = S_2$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} x_i^{2*} = S_3$$

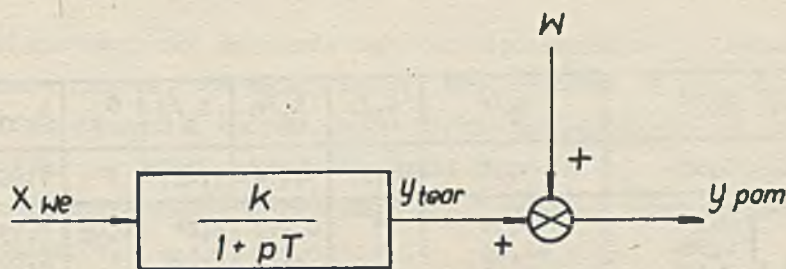
$$\sum_{i=1}^{n-1} y_i y_{i-1} = S_4$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} x_i^* y_i = S_5$$

Przeprowadzono kilkadziesiąt prób estymacji parametrów dla schematu, gdzie

$$x_{we} = 3,5 \sin 6t - 2 \sin 11t + 6 \sin 9,9t$$

$$k = T = 1.$$



Rys. 1

$$y_{teor} = \frac{[x] [1. 1]}{\left[1 + \frac{2T}{\delta}, 1 - \frac{2T}{\delta} \right]}$$

przy

$$[x] = [x_{we}(\delta), x_{we}(2\delta) \dots x_{we}(n\delta)]$$

n - ilość pomiarów

δ - krok próbkowania = 0.1

w - szum o rozkładzie normalnym o średniej 0, wariancji σ_w^2 i macierzy kowariancji $\Gamma = \sigma_w^2 \mathbb{1}$ (generator pseudolosowy)

$$y_{\text{pom}, i} = y_{\text{teor}, i} + w_i.$$

Przebieg wejściowy wybrano jako sumę trzech przebiegów sinusoidalnych o różnych amplitudach i częstotliwościach, aby uczynić go nieregularnym, ale jednocześnie (co będzie użyteczne w dalszej części opracowania) umożliwiającym proste obliczenie teoretycznego (rzeczywistego) wyjścia obiektu niezależnie od przyjętej aproksymacji. Tutaj aby móc przeanalizować jedynie wpływ zakłóceń na wyniki estymacji i uniezależnić się od przyjętej aproksymacji, tak w sensie utworzonego równania różnicowego, jak również kroku próbkowania δ , przebieg y_{teor} obliczono stosując mnożenie i dzielenie operatorów liczbowych, co zapewnia przy braku szumu spełnienie (pomijając błąd maszynowy) równania 2.3 dla dowolnego i . Wyniki obliczeń przy różnym poziomie szumu oraz zmienności współczynników układu równań $S_1 \div S_5$ zebrano w tabeli

$n = 100$

S_1/n	S_2/n	S_3/n	S_4/n	S_5/n	σ_w	k_{obl}	T_{obl}
0,383	-1,52	88,51	0,274	2,838	0	1,00	1,00
* $\left\{ \begin{array}{l} 0,389 \\ 0,381 \\ 0,377 \\ 0,383 \\ 0,385 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} -1,54 \\ -1,43 \\ -1,56 \\ -1,58 \\ -1,48 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} " \\ " \\ " \\ " \\ " \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 0,277 \\ 0,271 \\ 0,270 \\ 0,270 \\ 0,275 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 2,81 \\ 2,90 \\ 2,74 \\ 2,81 \\ 2,86 \end{array} \right.$	0,05	$\left\{ \begin{array}{l} 0,95 \\ 0,83 \\ 1,04 \\ 0,99 \\ 0,89 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 0,95 \\ 0,83 \\ 1,05 \\ 0,98 \\ 0,90 \end{array} \right.$
* $\left\{ \begin{array}{l} 0,442 \\ 0,532 \\ 0,525 \\ 0,593 \\ 0,649 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} -1,64 \\ -1,72 \\ -1,40 \\ -1,33 \\ -1,52 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} " \\ " \\ " \\ " \\ " \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 0,172 \\ 0,198 \\ 0,208 \\ 0,290 \\ 0,329 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 1,89 \\ 2,47 \\ 2,68 \\ 3,24 \\ 3,00 \end{array} \right.$	0,5	$\left\{ \begin{array}{l} 0,12 \\ 0,15 \\ 0,15 \\ 0,22 \\ 0,23 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 0,15 \\ 0,15 \\ 0,15 \\ 0,19 \\ 0,21 \end{array} \right.$
* $\left\{ \begin{array}{l} 1,205 \\ 1,215 \\ 1,393 \\ 1,383 \\ 1,364 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} -0,66 \\ -0,41 \\ -0,94 \\ -1,19 \\ -1,67 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} " \\ " \\ " \\ " \\ " \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 0,256 \\ 0,271 \\ 0,216 \\ 0,299 \\ 0,207 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 2,69 \\ 4,03 \\ 3,42 \\ 3,39 \\ 2,84 \end{array} \right.$	1,0	$\left\{ \begin{array}{l} 0,08 \\ 0,12 \\ 0,10 \\ 0,11 \\ 0,09 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 0,08 \\ 0,08 \\ 0,07 \\ 0,08 \\ 0,07 \end{array} \right.$

n = 600

S_1/n	S_2/n	S_3/n	S_4/n	S_5/n	σ_w	k_{obl}	T_{obl}
0.330	-1.50	84.34	0.227	2.65	0	1.00	1.00
0.333	-1.51	"	0.227	2.64	0.05	0.95	0.95
0.333	-1.50	"	0.227	2.66		0.91	0.91
0.331	-1.50	"	0.225	2.65		0.90	0.90
0.579	-1.46	"	0.218	2.57	0.5	0.15	0.14
0.600	-1.52	"	0.230	2.82		0.17	0.15
0.567	-1.52	"	0.197	2.67		0.15	0.13
0.542	-1.79	"	0.230	2.15		0.16	0.17
1.515	-1.42	"	0.240	3.36	1.0	0.10	0.07
1.300	-1.43	"	0.237	3.30		0.11	0.08
1.250	-0.81	"	0.267	3.55		0.12	0.08
1.283	-2.08	"	0.174	1.92		0.07	0.07
1.398	-1.51	"	0.188	2.81		0.09	0.07
1.271	-1.26	"	0.235	2.81		0.09	0.08
1.378	-1.87	"	0.151	2.32		0.07	0.07

* - różne realizacje szumu.

Widać systematyczne zawyżanie wartości współczynnika S_1 zależnego od kwadratu zmiennej obciążonej błędem. Współczynniki S_2, S_4, S_5 wykazują losowe wahania, których amplituda nie zmniejsza się w sposób istotny przy 6-krotnym zwiększeniu ilości pomiarów n . Oceńmy, przyjmując pewne uproszczenia zmniejszanie się tych wahań przy zwiększaniu ilości pomiarów.

Wprowadźmy zmienną losową $W_{n,p}$ zdefiniowaną wzorem

$$W_{n,p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(t_i) x_i$$

gdzie

- 1) f jest ciągłą okresową funkcją rzeczywistą o okresie T ;
- 2) $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots$ są zmiennymi losowymi niezależnymi i normalnymi o wartości oczekiwanej 0 i wariancji σ^2 .

3) $t_1 = \frac{T}{p}$, $t_{i+1} - t_i = \frac{T}{p}$ - dla każdego "i" całkowitego i dodatniego, p jest liczbą całkowitą dodatnią.

Podstawiamy $n = kp + 1$ - gdzie k, l - naturalne, $0 \leq l \leq p$.
 Chcemy zbadać zachowanie odchylenia standardowego $W_{n,p}$ przy dużych k i p. Jeżeli x_i są niezależnymi normalnymi zmiennymi losowymi, zaś a_i współczynnikami rzeczywistymi, to przy oznaczeniu wariancji zmiennej x przez $\text{Var} \cdot x$ mamy

$$\text{Var} \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i \right) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \text{Var} x_i.$$

Wobec tego

$$\text{Var} W_{n,p} = \text{Var} \left(\sum_{i=1}^n \frac{f(t_i)}{n} x_i \right) = \frac{\sigma^2}{n^2} \sum_{i=1}^n (f(t_i))^2,$$

stąd

$$\begin{aligned} \text{Var} W_{n,p} &= \frac{\sigma^2}{n} \frac{1}{kp+1} \sum_{i=1}^{kp+1} (f(t_i))^2 = \\ &= \frac{\sigma^2}{n} \frac{1}{kp+1} \left[\sum_{i=1}^p (f(t_i))^2 + \sum_{i=p+1}^{2p} (f(t_i))^2 + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots \sum_{i=(k-1)p+1}^{kp} (f(t_i))^2 + \sum_{i=kp+1}^{kp+1} (f(t_i))^2 \right] = \\ &= \frac{\sigma^2}{n} \frac{1}{kp+1} \left(k \sum_{i=1}^p (f(t_i))^2 + \sum_{i=1}^1 (f(t_i))^2 \right). \end{aligned}$$

Na mocy okresowości f i równości $t_1 = t_{i+1} - t_i = \frac{T}{p}$ mamy

$$\frac{\text{Var } W_{n,p}}{\frac{\sigma^2}{n}} = A_{n,p} + B_{n,p},$$

gdzie

$$A_{n,p} = \frac{k}{kp+1} \sum_{i=1}^p (f(t_i))^2, \quad B_{n,p} = \frac{1}{kp+1} \sum_{i=1}^p (f(t_i))^2.$$

Jeżeli $k \rightarrow \infty$, $p \rightarrow \infty$ a l przyjmuje dowolne wartości naturalne mniejsze za każdym razem od p , to $B_{n,p} \rightarrow 0$.

Z równości $A_{n,p} = \frac{1}{p + \frac{1}{k}} \sum_{i=1}^p (f(t_i))^2$ wynika, że

$$\frac{p}{p+1} \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p (f(t_i))^2 \leq A_{n,p} \leq \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p (f(t_i))^2$$

i z tego, że $\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{p}{p+1} = 1$ wynika, że dla $k \rightarrow \infty$, $p \rightarrow \infty$ $0 \leq l < p$ $A_{n,p}$ zachowuje się jak

$$\alpha_p = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p (f(t_i))^2$$

$$\alpha_p = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p (f(t_i))^2 = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^p (f(t_i))^2 \frac{T}{p} =$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{i=1}^p (f(t_i))^2 (t_i - t_{i-1}),$$

gdzie

$$t_0 = 0,$$

stąd

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \alpha_p = \frac{1}{T} \int_0^T (f(t))^2 dt = f_{sk}^2$$

gdzie f_{sk} jest wartością skuteczną f . Stąd dla $k, p \rightarrow \infty$ przy $0 \leq l < p$,
 $n = kp + 1$

$$\frac{\sqrt{\text{Var } W_{n,p}}}{\left(\frac{f_{sk} \delta}{\sqrt{n}}\right)} \rightarrow 1. \quad (2.5)$$

Sprawdzono obliczeniowo zmiany wartości członu $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} r_i w_i = A_j$,

gdzie

r_i - wartości sygnału wejściowego $x_{we}(i\delta)$, określonego wyżej

w_i - szum normalny o średniej zero i wariancji $\delta^2 = 1$

δ - 0.1 sek

j - nr realizacji

n	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
100	0.5	-0.187	0.427	-0.216	0.627
1000	-0.025	-0.051	0.338	-0.081	-0.123
2000	-0.127	0.091	0.061	-0.045	-0.037
3000	-0.25	0.060	0.039	0.026	-0.126

podobnie obliczono wartości A_j , przy sygnale $r_i = 10 \sin(0.1 i)$

n	Λ_1	Λ_2	Λ_3	Λ_4	Λ_5
100	0.127	0.218	-0.700	1.21	0.376
1000	0.004	0.284	0.106	0.454	0.154
2000	-0.290	0.183	0.084	0.174	0.230
3000	-0.254	0.041	0.061	0.033	0.152

Uzyskane rezultaty mieszczą się w granicach dwóch odchyień standardowych ($n = 3000$ $\sigma_{\text{wnp}} \approx 0.14$). Jest to zgodne z przytoczonymi oszacowaniami i oznacza, że stosowane do badań generatory pseudolosowe oprócz zgodności testów wymaganych przy ich sprawdzaniu, również pod tym względem nie wykazują żadnych anomalii.

3. Model nieliniowy względem szukanych parametrów (estymacja iteracyjna)

W pewnych zastosowaniach, w których sygnał wyjściowy $y(t)$ liniowego układu stacjonarnego, jak i sygnał wejściowy $x(t)$ określone są przez dane pomiarowe, można łatwo wykorzystać metodę przekształcenia Z lub operatorów liczbowych do wyznaczenia transmitancji układu stosując dzielenie wielomianów, tzn.

$$F(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad \text{lub} \quad [F] = \frac{[Y]}{[X]} \quad (3.1)$$

W praktyce oba sygnały dane są niedokładnie, obarczone błędem lub szumem, a wtedy dzielenie transformat będzie prowadziło do błędnych wyników. Dzielenie staje się mniej czułe na błędy, jeśli zastosować przekształcenie dolnoprzepustowe zmieniając zmienną Z na λ ($\lambda + 1 = Z^{-1}$). Ogólnie jednak w każdym eksperymencie obliczeniowym otrzymana zostanie inna transmitancja, czyli odpowiedź impulsowa dla dyskretnych przedziałów czasu. Niektórzy autorzy [4] proponują ograniczenie ilości elementów w poszukiwanej transmitancji. W tym przypadku operator liczbowy transmitancji posiada znacznie mniejszą (np. k) ilość elementów niż ilość pomiarów (ilość elementów operatorów $[X]$ i $[Y]$).

Oznaczając

$$[\xi] = [F] [X] - [Y] \quad (3.2)$$

można, np. poprzez zastosowanie kryterium minimalizacji sumy

$$Q = \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \quad (3.3)$$

gdzie

n - liczba pomiarów

ξ_i - i -ty element operatora błędu,

znaleźć optymalny w powyższym sensie k -elementowy operator transmitancji $[F]$. Jego elementy F_1, F_2, \dots, F_k można obliczyć stosując zwykły model regresji liniowej.

Zwiększenie k (uwzględnienie większej ilości składników odpowiedzi impulsowej), często poprawia dokładność aproksymacji, ale jednocześnie prowadzi (przy $k \rightarrow n$) do osiągnięcia wyniku o znikomej przydatności praktycznej, zgodnego z równaniem 3.1. W wielu przypadkach korzystniejsza jest dla dalszego wykorzystania znajomość wartości współczynników równania różniczkowego czy też różnicowego. Wartości tych współczynników można obliczać przy znajomości $[F]$, stosując różne metody przybliżone, prowadzi to jednak do dalszych błędów.

Transmitancja układu $[F]$ (nawet, jeśli uwzględnić nieskończoną, a w praktyce równą n - ilość jej wyrazów) jest określona jednoznacznie poprzez wartości najczęściej kilku współczynników (wartości współczynników równania różnicowego), jako

$$[F] = \frac{[b_1, b_2 \dots b_w]}{[1, a_1, a_2 \dots a_k]} \text{ przy } w \leq k. \quad (3.4)$$

Minimalizacja Q z równania 3.3 względem $b_1, b_2 \dots b_w, a_1 \dots a_k$, prowadzi ogólnie do innego estymatora wartości tych współczynników niż

minimalizacja Q z równania 1.2 poprzez zastosowanie F_{opt} z równania 1.3.

W tym modelu nieliniowym względem $a_1, a_2 \dots a_k$ wartości parametrów mogą być znalezione na drodze iteracyjnej. Czy to utrudnienie obliczeniowe w stosunku do prostego modelu regresyjnego, może być opłacalne i w jakich sytuacjach?

Rozważmy schemat identyfikacyjny przedstawiony na rys. 2.



Rys. 2

Założmy, że szumy zakłócające pomiary są niezależne od x_{teor} i y_{teor} .

Przypadek 1

Założenia: a) $x_{pom, i} = x_{teor, i}$

b) $y_{pom, i} = y_{teor, i} + W_{y,i}$

gdzie

"i" - oznacza wartość w chwili t_i

$W_{y,i}$ - szum o rozkładzie normalnym ze średnią zero, nieznaną wariancją σ^2 i macierzą kowariancji

$$\Gamma = \sigma^2 \mathbf{1}.$$

Oznaczmy $[x_{\text{teor}}][F]$ przez $[Y_{\text{obl}}]$. W tym przypadku również

$$[X_{\text{pom}}][F] = [Y_{\text{obl}}].$$

Operator liczbowy błędu z równania 3.2 przyjmuje postać

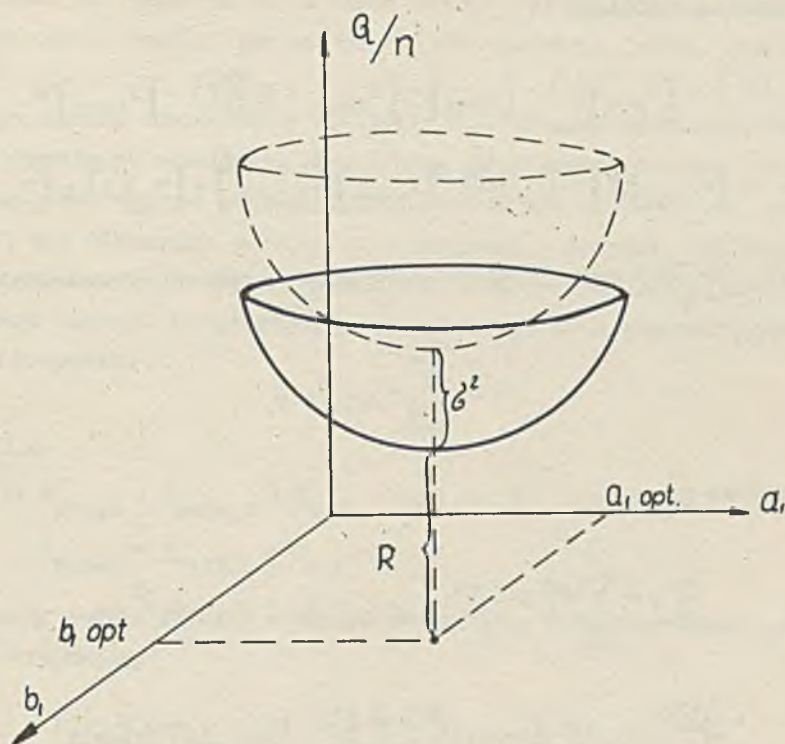
$$[\xi] = [X_{\text{pom}}][F] - ([Y_{\text{teor}}] + [W_y]) = [Y_{\text{obl}}] - [Y_{\text{teor}}] - [W_y]$$

Uśredniona suma kwadratów odchyłek z równania 3.3

$$\begin{aligned} \frac{Q}{n} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i^2 = \frac{1}{n} \sum (y_{\text{obl},i} - y_{\text{teor},i} - w_{y,i})^2 = \\ &= \frac{1}{n} \sum (y_{\text{obl},i} - y_{\text{teor},i})^2 - \frac{2}{n} \sum (y_{\text{obl},i} - y_{\text{teor},i}) \cdot w_{y,i} + \\ &\quad + \frac{1}{n} \sum w_{y,i}^2. \end{aligned}$$

Pierwszy składnik reprezentuje uśrednioną sumę kwadratów odchyłek w przypadku braku zakłóceń na wejściu i wyjściu. Przy zwiększaniu ilości pomiarów, zgodnie z założeniami, drugi składnik dąży do zera, a trzeci do σ^2 . Oznacza to, że powierzchnia sumy kwadratów podnosi się, w związku z istnieniem zakłóceń o niezależny od szukanych parametrów składnik o wartości równej nieznannej wariancji σ^2 , co nie ma wpływu na uzyskany wynik. Sytuację tę ilustruje dla estymacji dwóch nieznan-nych parametrów rys. 3.

Zaznaczona na rys. 3 wartość $R > 0$, reprezentuje błąd aproksymacji (równanie różnicowe zamiast różniczkowego, zbyt duży krok próbkowania itp. [5], [6]). Jeśli zachowanie obiektu opisane jest bezbłędnie przez przyjęte równanie różnicowe, wtedy $R = 0$ (pomijając błąd obliczeń maszynowych). Wynika stąd, że ten sposób estymacji nie ma cech obciążenia, co ma miejsce w identycznej sytuacji w modelu regresyjnym.



Rys. 3

W praktyce, ze względu na ograniczoną ilość pomiarów n , występują fluktuacje składników o wartości oczekiwanej równej zero. W podejściu regresyjnym zmienia to wartości elementów odwracanej macierzy, a w podejściu iteracyjnym daje sfalowanie ("pomarszczenie") powierzchni sumy kwadratów. Przy kilkakrotnym powtórzeniu eksperymentu, obliczone wartości parametrów układają się losowo wokół estymatora obciążonego (regresja) lub wokół wartości prawdziwych (iteracja), co ilustrują rysunki 5 i 6.

Przypadek 2

Założenia: a) $x_{pom,i} = x_{teor,i} + W_{x,i}$ gdzie W_x o własnościach identycznych jak w przypadku 1
 b) $y_{pom,i} = y_{teor,i}$

przy tych założeniach

$$\begin{aligned} [\xi] &= [x_{\text{pom}}][F] - [Y_{\text{pom}}] = [x_{\text{teor}} + W_x][F] - [Y_{\text{teor}}] = \\ &= [x_{\text{teor}}][F] + [W_x][F] - [Y_{\text{teor}}] = [Y_{\text{obl}}] + [W_x][F] - [Y_{\text{teor}}]. \end{aligned}$$

Oznaczmy $[W_x][F]$ przez $[Z]$, gdzie zgodnie z definicją mnożenia operatorów liczbowych.

$$Z_i = \sum_{j=0}^i W_{x,j} F_{i-j}$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{Q}{n} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i^2 = \frac{1}{n} \sum (y_{\text{obl},i} + Z_i - y_{\text{teor},i})^2 = \\ &= \frac{1}{n} \sum (y_{\text{obl},i} - y_{\text{teor},i})^2 + \frac{2}{n} \sum Z_i (y_{\text{obl},i} - y_{\text{teor},i}) + \\ &\quad + \frac{1}{n} \sum Z_i^2. \end{aligned}$$

Przy zwiększaniu n drugi składnik ($E(Z) = 0$) dąży do zera. Oznaczając trzeci składnik przez S i rozpisując Z_i otrzymujemy

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{n} \sum Z_i^2 = \frac{1}{n} \sum (W_{x,0} F_i + W_{x,1} F_{i-1} + \dots + W_{x,i} F_0)^2 = \\ &= \frac{1}{n} (\sum W_{x,0}^2 F_i^2 + W_{x,1}^2 F_{i-1}^2 + \dots + W_{x,i}^2 F_0^2 + \\ &\quad + 2(W_{x,0} W_{x,1} F_i F_{i-1} + W_{x,0} W_{x,2} F_i F_{i-2} + \dots)) \end{aligned}$$

Wynika stąd, że wartość S jest funkcją nie tylko wariancji szumu W_x , ale również transmitancji $[F]$, zależnej bezpośrednio od szukanych pa-

rametrów. W przeciwieństwie więc do przypadku 1 punkty powierzchni sumy kwadratów nie podnoszą się o stałą wartość, co zmienia jej kształt w stosunku do przypadku, gdy zakłócenia nie występują lub są pomijalne.

Przeprowadzone eksperymenty potwierdziły słuszność powyższych wniosków, a uzyskiwane rezultaty, nie różniły się w sposób istotny od wyników uzyskanych metodą regresji. Obliczeniowo nic nie stoi na przeszkodzie, aby odbiegając od ujęcia tradycyjnego i jedynie możliwego w wielu innych metodach, minimalizować sumę kwadratów odchyżeń sygnału wejściowego zamiast wyjściowego, przez co przypadek 2 zostanie sprowadzony do przypadku 1.

Przypadek 3

Założenia: $x_{pom,i} = x_{teor,i} + W_{x,i}$ W_x i W_y niezależne

$$y_{pom,i} = y_{teor,i} + W_{y,i}$$

Wprowadzając indeks "2" dla oznaczenia wyrażenia rozpatrywanego w przypadku 2 otrzymujemy

$$\begin{aligned} [\xi] &= [x_{teor} + W_x][F] - [y_{teor} + W_y] = \\ &= [Y_{obl}] + [W_x][F] - [y_{teor}] - [W_y] \end{aligned}$$

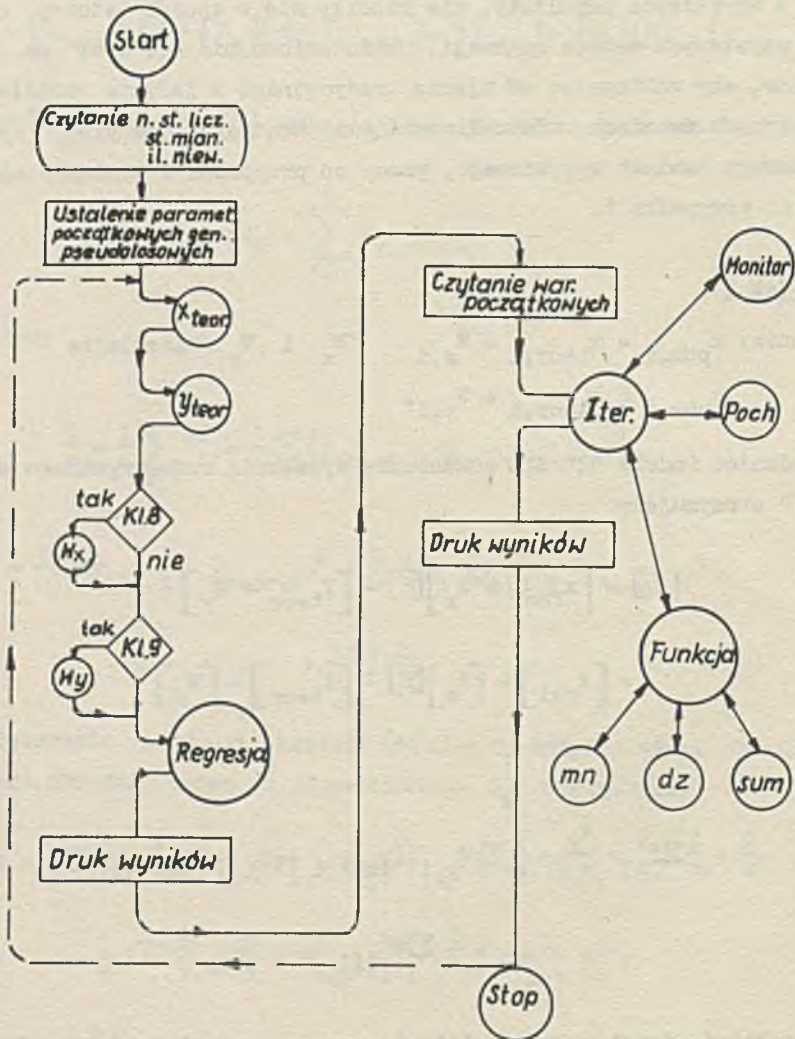
oraz

$$\begin{aligned} \frac{Q}{n} &= \frac{1}{n} \sum \xi_i^2 = \frac{Q_2}{n} - \frac{2}{n} \sum W_{y,i} (y_{obl,i} + z_i - y_{teor,i}) + \\ &+ \frac{1}{n} \sum W_{y,i}^2 \end{aligned}$$

Wobec założeń, drugi składnik dąży do zera, a trzeci do $\frac{2}{y}$. Oznacza to, że w zależności od poziomu zakłóceń na wejściu i wyjściu przypadek ten można traktować jako jeden z wcześniej omawianych.

4. Opis programu dla EMC

Schemat blokowy programu obliczającego iteracyjne parametry $a_1, a_2, \dots, a_k, b_1, b_2, \dots, b_w$ z równania 3.4 podano na rys. 4.



Rys. 4

Dla modelowania zakłóceń zastosowano dwa generatory pseudolosowe W_x i W_y włączane odpowiednio klawiszami 8 i 9, pulpitu sterującego maszyny.

Oznaczenia:

- n - ilość pomiarów
- st. licz - stopień licznika (W)
- st. mian - stopień mianownika (k)
- il. niew - ilość niewiadomych, niekoniecznie równa $W + k$ (patrz opis procedury funkcja)
- δ - krok próbkowania.

Opis podprogramów

a) Regresja

Podprogram oblicza estymatory parametrów zgodnie z równaniem (1.3)

b) Iter

Podprogram iteracyjnego poszukiwania optymalnych wartości parametrów.

- Zastosowano zmodyfikowaną przez Fletchera i Powella [9]

- metodę Davidsona [8]. Podprogram odwołuje się do podprogramów monitor funkcja, poch.

c) Monitor

Podprogram umożliwiający śledzenie iteracji poprzez wyprowadzenie wyników pośrednich. Sterowanie z pulpitu maszyny.

d) Funkcja

Podprogram określający jak szukane parametry, w ilości określonej przez il. niew. mają być wprowadzane do licznika i mianownika [F]

Np. przy aproksymacji jak w równaniu 2.1

$$\frac{[k, k]}{\left[1 + \frac{2T}{\delta}, 1 - \frac{2T}{\delta}\right]} - \text{gdzie szukane są } k \text{ i } T.$$

W pewnych sytuacjach, jeśli spodziewane jest opóźnienie, można je narzucić wprowadzając określoną ilość zer w liczniku, nie zmieniając ilości niewiadomych

$$\text{mp. } \frac{[0, 0, 0 \dots 0, b_1, b_2]}{[1, a_1, 0 \dots 0]}$$

e) dz

Zoptymalizowany pod względem czasu działania podprogram wykonujący dzielenie operatorów liczbowych

f) mm

Zoptymalizowany jak dz, podprogram realizujący mnożenie operatorów liczbowych

g) sum

Podprogram oblicza $\sum \xi_i^2$ zgodnie z równaniem 3.2 i 3.3

h) Poch

Podprogram obliczający pochodną cząstkową automatycznie dobierający krok dla zapewnienia jej poprawności.

Czas działania programu zależny jest przede wszystkim od ilości niewiadomych, n oraz wartości początkowych.

Orientacyjnie, przy przeprowadzanych próbach il. niew. = 2-5, $n = 50$ 300 na maszynie cyfrowej Odra 1204, dla uzyskania rezultatu potrzeba było od kilku do kilkunastu kroków iteracyjnych (kilkadziesiąt sekund do kilkunastu minut).

5. Wyniki obliczeń i uwagi końcowe

Przy pomocy opisanego programu przeprowadzono wiele prób identyfikacji parametrów obiektu. Zmieniano parametry modelu obiektu, sygnał wejściowy, krok próbkowania δ , poziom szumu na wejściu i wyjściu, ilość pomiarów n oraz sposób obliczania y_{teor} (zgodnie z równaniem różniczkowym lub różnicowym opisującym obiekt). Na rysunkach 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 przedstawiono wyniki obliczeń dotyczące estymacji wzmocnienia k i stałej czasowej T obiektu inercyjnego 1 rzędu. Sygnał wejściowy, sposób zakłóceń oraz wartości k i T są dla tych wykresów zgodne ze schematem z rys. 1. Sygnał wyjściowy obliczono zgodnie z równaniem różniczkowym, a nie różnicowym (tj. rzeczywisty). Rys. 5 i 6 ilustrują wyniki uzyskane z dziesięciu realizacji szumu dla $n = 50$ oraz $n = 250$.



Rys. 5. Dziesięć realizacji w obecności szumu o $\sigma = 0.2$; $n = 50$
 $\delta = 0.1$

• iteracja X regresja

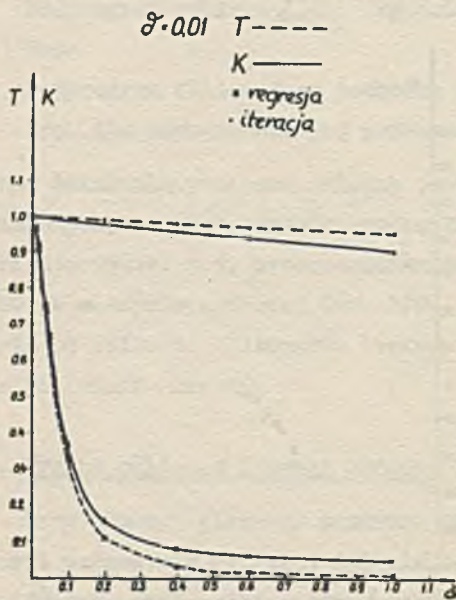
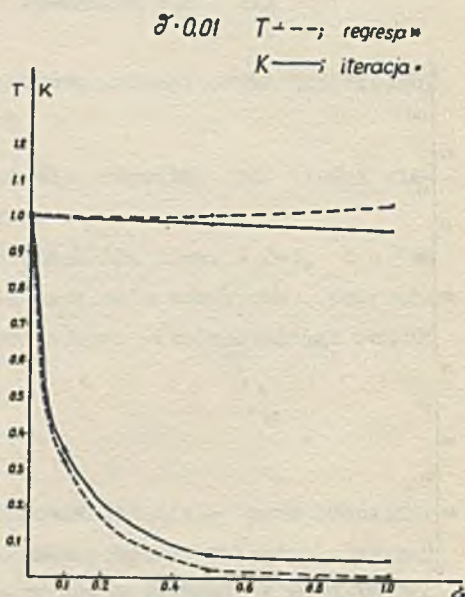


Rys. 6. Dziesięć realizacji w obecności szumu o $\sigma = 0.2$; $n = 250$;
 $\delta = 0.1$

• iteracja X regresja

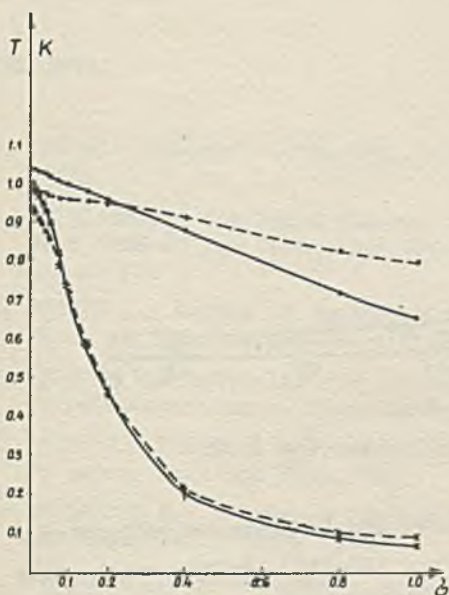
Rysunki 7 i 8 ilustrują wpływ poziomu zakłóceń na otrzymywane wartości k i T przy $n = 100$ oraz $n = 200$.

Na rys. 9, 10, 11 przedstawiono otrzymane rezultaty przy zachowaniu stałego przedziału czasu $n \cdot \delta$.

Rys. 7. Wyniki obliczeń $n = 100$ Rys. 8. Wyniki obliczeń $n = 200$

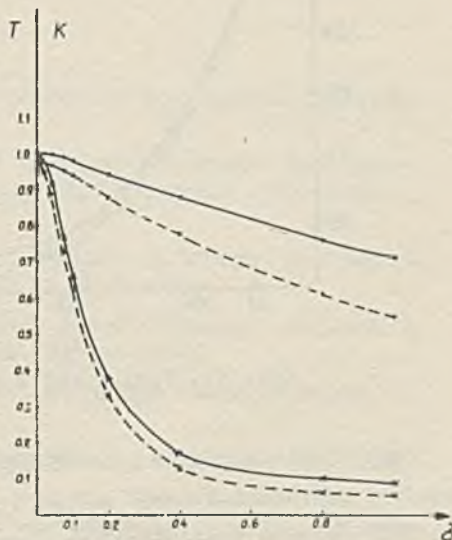
Dla $n = 50$ wyniki k i T uzyskane przy braku zakłóceń ($\sigma = 0$) odbiegają od wartości rzeczywistych, gdyż $\delta = 0.1$ s, nie zapewnia w tym przypadku dobrej aproksymacji. Zmniejszanie kroku próbkowania poprawia estymatory z obu sposobów przy braku zakłóceń, jednak w ich obecności wartości uzyskane z regresji pogarszają się, w związku z narastającym błędem numerycznego obliczania pochodnej, mającej swój u-

dział w równaniu, którego średni błąd jest minimalizowany w regresji. Widoczne to jest na rys. 9, 10, 11, choć oczywiście z nich nie wynika. Z nieprzytoczonych tutaj rezultatów doświadczeń wynika również (co było spodziewane zgodnie z 2.5), że zwiększanie ilości pomiarów ma istotny wpływ na wyniki przy małych wartościach n .



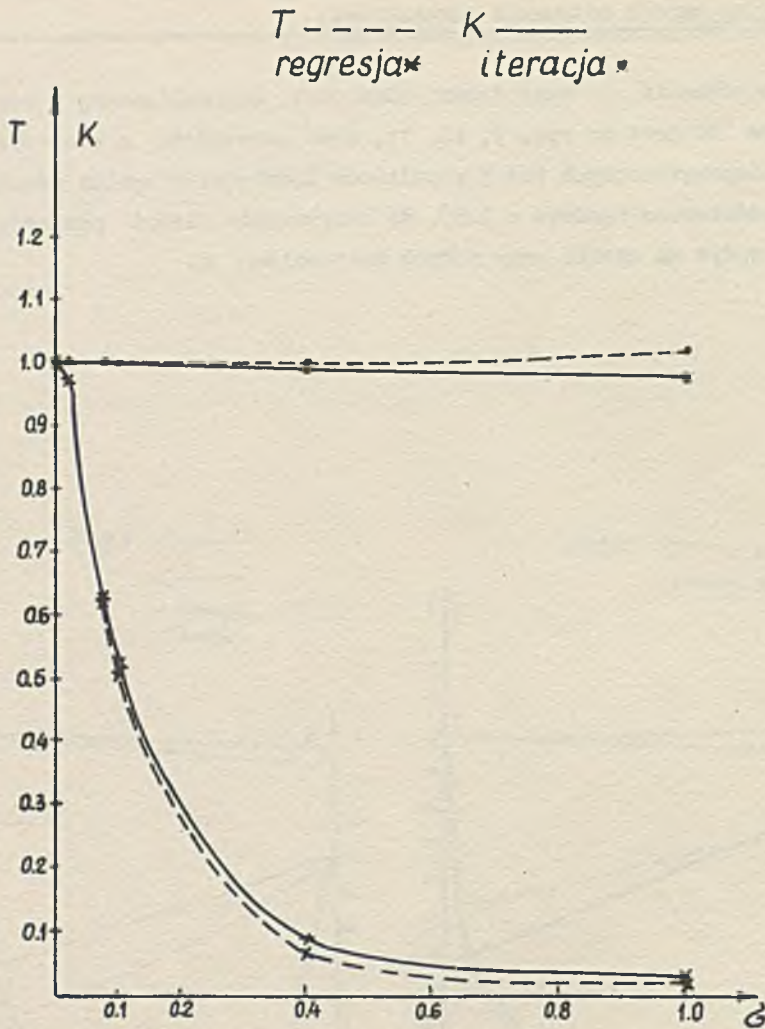
Rys. 9. Wyniki obliczeń $n = 50$

$\delta = 0.1$ T-----
 K—————
 x regresja
 o iteracja



Rys. 10. Wyniki obliczeń $n = 100$

$\delta = 0.05$ T-----
 K—————
 x regresja
 o iteracja



Rys. 11. Wyniki obliczeń $n = 100$ $d = 0.025$

Przy ilości pomiarów zapewniających względnie poprawne uśrednienie błędu i reprezentatywność próbki (np. $n = 100-200$), dalsze zwiększanie ilości pomiarów jest niecelowe, gdyż widoczną poprawę w estymacji można by osiągnąć przez jej bardzo wydatne zwiększenie, co w praktyce najczęściej nie może mieć miejsca.

Przeprowadzono próby estymacji parametrów przy błędnie ("na wyrost") zaproponowanym modelu obiektu. Uzyskiwany rezultat różnił się stałym czynnikiem w postaci operatora liczbowego występującego w liczniku i mianowniku $[F]$. W takich przypadkach powtórzenie obliczeń przy zmniejszaniu licznika i mianownika o ten sam stopień (1,2.. itd.) eliminuje zbędny czynnik przy nieistotnej zmianie sumy Q .

W przypadku, gdy poziom zakłóceń na wyjściu obiektu jest duży, sposób iteracyjny daje dużo lepsze estymatory parametrów niż regresja.

Uzyskiwane wcześniej w programie wyniki regresji można przyjąć, jako warunki początkowe dla iteracji.

Procedurę iteracyjną można znacznie usprawnić uwzględniając fakt, iż omawiany model jest liniowy względem parametrów licznika [2].

LITERATURA

1. LEE R.: Optimal Estimation, Identification and Control, Cambridge 1964.
2. An Algorithm for Least Squares Estimation of Nonlinear Parameters When Some of the Parameters Are Linear-Technometrics Vol 14 No. 3 August 72.
3. TUSTIN A.: Method of Analysing the Behaviour of Linear Systems in Terms of Time Series. J. IEE cz. II A, 47 London.
4. JEDRUCH W.: Optymalizacja iteracyjnych metod estymacji parametrów obiektów sterowania. Praca doktorska. Gdańsk 1971.
5. WASOW A.: Discrete approximation to the Laplace transformation. Z. f. angew. Math und Phys. 1957.
6. BRIDGLAND B.: A note on numerical integrating operators J.Soc.Ind. and Appl. Math. Sept. 1958.
7. JURY E.: Przekształcenie Z i jego zastosowania. WNT, Warszawa 1970.
8. DAVIDSON W.: Variable metric method for minimization A.E.C. Res. Develop. Rep. ANL-59.
9. FLETCHER R., POWELL M.: A rapidly convergent descent method for minimization. Comput. J. 8. 65.
10. DAVID M., HIMMELBLAU: Process Analysis by Statistical Methods New York 1968.

ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ ОБЪЕКТА

Р е з ю м е

В статье подан итерационный метод оценки параметров объекта, подчеркнут вычислительный аспект.

Полученные результаты сравнены с методом линейной регрессии.

AN ITERATIVE ESTIMATION OF UNKNOWN OBJECT PARAMETERS

S u m m a r y

In this paper an iterative estimation of object parameters is described. The computational aspect is emphasized and the comparison of the obtained results with the well known linear regression method is given.