

Jerzy Barchański

Instytut Kompleksowych
Systemów Sterowania

TRANSMISJA IMPULSÓW PROSTOKĄTNYCH
JEDNORODNĄ LINIĄ KABLOWĄ

Streszczenie. W artykule przeprowadzono analizę teoretyczną odpowiedzi kabla jednorodnego o pomijalnie małej przewodności jednostkowej na pobudzenie w postaci skoku jednostkowego oraz impulsu prostokątnego w warunkach biegu jałowego oraz dopasowania falowego.

Dla potwierdzenia prawidłowości analizy podano wyniki przeprowadzonego przez autora eksperymentu.

1. Zależności wstępne

Dla określenia własności transmisyjnych kabla jednorodnego o pomijalnie małej upływności jednostkowej G wygodnie jest stosować zależności podane w pracy Kadena (1) określające względne wartości parametrów:

względna tłumienność

$$\frac{\alpha}{\alpha_{\infty}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \left(\frac{R}{\omega L}\right)^2}}} \quad (1.1)$$

gdzie α_{∞} oznacza tłumienność falową dla nieskończonej wielkiej częstotliwości

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \alpha = \alpha_{\infty} = \frac{R}{2\sqrt{L/C}} \quad (1.2)$$

oraz względna opóźność fazowa

$$\frac{\tau_f}{\tau_{\infty}} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{R}{\omega L}\right)^2}} \quad (1.3)$$

gdzie

$$\tau_{\infty} = \sqrt{LC}. \quad (1.4)$$

2. Reakcja kabla na skok jednostkowy oraz impuls prostokątny przy biegu jałowym

Założmy, że w chwili $t = 0$ załączono na wejściu kabla stałe napięcie o wartości E . Transformacja Fouriera takiego sygnału wejściowego ma postać

$$F_1(j\omega) = \frac{E}{j\omega} \quad (2.1)$$

Charakterystyka częstotliwościowa kabla przy biegu jałowym

$$K(j\omega) = \frac{1}{\cosh j\omega l} \quad (2.2)$$

gdzie

j - tamowność jednostkowa

l - długość kabla.

Transformację Fouriera reakcji kabla na skok jednostkowy obliczamy z relacji

$$F_2(j\omega) = F_1(j\omega) K(j\omega) = \frac{E}{j\omega \cosh j\omega l} \quad (2.3)$$

Przebieg czasowy reakcji linii obliczamy przy pomocy odwrotnego przekształcenia Fouriera

$$u_2(t) = \frac{E}{2\pi j} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j\omega t}}{\omega \cosh \frac{1}{2}} d\omega. \quad (2.4)$$

Całkę (2.4) wyznaczamy korzystając z twierdzenia o residuach. Jako rozwiązanie otrzymamy następujące wyrażenie:

$$u_2(t) = \left[1 - \frac{4}{\pi} \exp\left(-a_{\infty} \frac{t}{t_{\infty}}\right) \sum_{\nu=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{\nu-1}{2}}}{\nu} \left\{ \frac{a_{\infty} \sin \frac{t}{t_{\infty}} \sqrt{\left(\frac{\nu}{2}\right)^2 - a_{\infty}^2}}{\sqrt{\left(\frac{\nu}{2}\right)^2 - a_{\infty}^2}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \cos \frac{t}{t_{\infty}} \sqrt{\left(\frac{\nu}{2}\right)^2 - a_{\infty}^2} \right\} \right] E, \quad (2.5)$$

gdzie oznaczono

$$a_{\infty} = \alpha_{\infty} \cdot l \quad (2.6)$$

$$t_{\infty} = \tau_{\infty} \cdot l$$

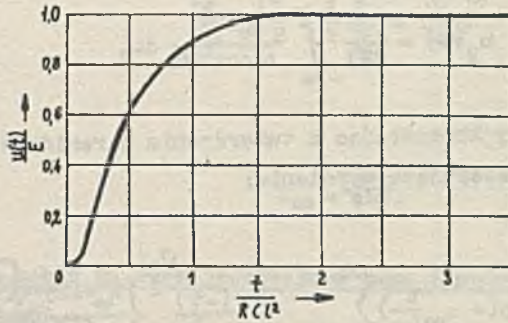
Wyrażenie powyższe obowiązuje wyłącznie dla $t \geq 0$; bowiem dla $t < 0$ $u(t) = 0$.

Dla łatwiejszej interpretacji wyrażenia (2.5) rozważone zostaną dwa przypadki szczególne; a mianowicie nieskończenie dużego tłumienia ($a_{\infty} \rightarrow \infty$) oraz tłumienia pomijalnie małego ($a_{\infty} \rightarrow 0$).

W pierwszym przypadku otrzymamy wyrażenie

$$\frac{u_2(t)}{E} = 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{\nu-1}{2}}}{\nu} \exp \left[- \left(\frac{\nu}{2} \right)^2 \frac{t}{RC l^2} \right]. \quad (2.7)$$

Zależność $\frac{u_2(t)}{E}$ od bezwymiarowego parametru $\frac{t}{RCI^2}$ stanowiącego zredukowaną skalę czasu przedstawiono na rys. 2.1.

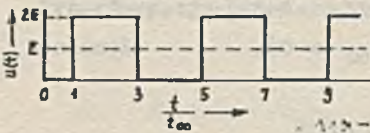


Rys. 2.1. Przebieg napięcia na wyjściu nieobciążonego toru o dużej tłumienności ($a_{\infty} > \frac{\pi}{2}$) przy podaniu na wejście skoku jednostkowego

Miarą czasu narastania przebiegu na wyjściu toru jest wielkość RCI^2 . Po czasie $t = RCI^2$ napięcie $u_2(t)$ osiąga ok. 90% wartości końcowej E .

Zupełnie inny charakter ma przebieg na końcu toru w przypadku pomijalnie małego tłumienia ($a_{\infty} \rightarrow 0$). Wyrażenie (2.5) przyjmuje wówczas następującą postać

$$\frac{u_2(t)}{E} = 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{\nu} (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} \cos \frac{\pi \nu}{2} \frac{t}{t_{\infty}} \quad (2.8)$$

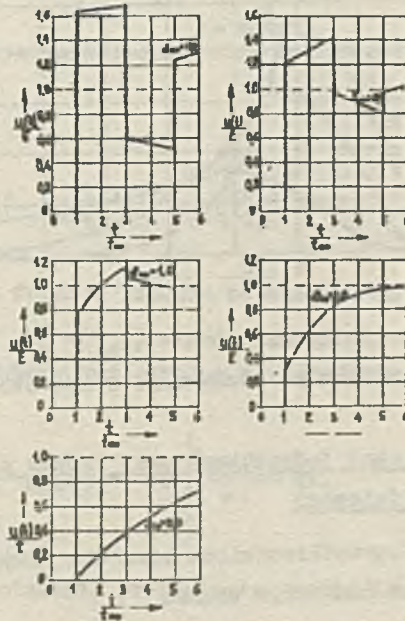


Rys. 2.2. Przebieg napięcia na wyjściu nieobciążonego toru bezstratnego przy podaniu na wejście skoku jednostkowego

Mamy wówczas do czynienia z falą prostokątną o okresie $4t_{\infty}$, amplitudzie $2E$, przesuniętą o wartość t_{∞} w stosunku do początku liczenia czasu (rys. 2.2).

Obliczenie przebiegu napięcia $u_2(t)$ dla pośrednich wartości tłumienia jest bardzo pracochłonne, ponieważ szereg (2.5) jest słabo zbieżny.

Na rysunku 2.3 przedstawiono zależność $u_2(t)$ dla pięciu wartości tłumienności $a_{\infty} = 0,2; 0,5; 1,0; 2,0; 5,0$. Jak widać z rysunku, dla małych wartości tłumienności ($a_{\infty} \leq 1$) istnieje zauważalny wpływ wie-



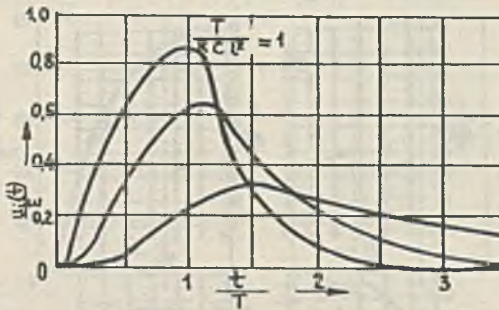
Rys. 2.3. Przebiegi napięcia na wyjściu torów o różnych wartościach tłumienności a_{∞} przy podaniu na wejście skoku jednostkowego

lokrotnych odbić. Wpływ odbić na przebieg napięcia $u_2(t)$ maleje ze wzrostem a_{∞} . Dla $a_{\infty} > \frac{\pi}{2}$ całkowicie znikają skoki napięcia wywołane odbiciami. Wystarcza wówczas posługiwanie się z dostatecznie dobrym przybliżeniem relacją (2.7), przy czym dla $t < t_{\infty}$ należy przyjąć $u_2(t) = 0$.

Wyniki powyższej analizy można stosować dla określenia zniekształceń impulsów prostokątnych przesyłanych linią kablową. Odejmując od siebie odpowiedzi na dwa skoki jednostkowe opóźnione względem siebie o t otrzymamy odpowiedź na impuls prostokątny

$$u_1(t) = u_2(t) - u_2(t - T). \quad (2.9)$$

Na rys. 2.4 przedstawiono odpowiedzi kabla na impuls prostokątny, przy czym jako parametr występuje tu wielkość $\frac{T}{RCl^2}$.



Rys. 2.4. Reakcje nieobciążonego kabla ($a_{\infty} > \frac{Rl}{2}$) przy podaniu na wejście impulsu prostokątnego o szerokości T

3. Reakcja kabla na skok jednostkowy oraz impuls prostokątny w warunkach dopasowania falowego

Charakterystyka częstotliwościowa toru dla przypadku dopasowania falowego określona jest poniższym wzorem

$$K(j\omega) = \exp(-\hat{\gamma}l). \quad (3.1)$$

Przebieg napięcia na końcu toru obliczamy z odwrotnego przekształcenia Fouriera

$$u_2(t) = \frac{E}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[j\omega t - \sqrt{(R + j\omega L)j\omega C} l\right] \frac{d\omega}{\omega} \quad (3.2)$$

Ze względu na skomplikowaną postać wyrażenia podcałkowego celowe jest obliczanie w pierwszej kolejności prądu na końcu toru. W tym celu należy funkcję podcałkową podzielić przez impedancję falową \hat{Z}

$$i(t) = \frac{ECI}{2\mathcal{R}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[j\omega t - \sqrt{(R + j\omega L)j\omega C}] d\omega}{\sqrt{(R + j\omega L)j\omega C}} \quad (3.3)$$

W wyniku rozwiązania powyższej całki otrzymamy wyrażenie (3.4)

$$i(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < t_{\infty} \\ \frac{E}{Z_{\infty}} \exp(-a_{\infty} \frac{t}{t_{\infty}}) J_0(ja_{\infty} \sqrt{\frac{t}{t_{\infty}}^2 - 1}) & \text{dla } t > t_{\infty} \end{cases} \quad (3.4)$$

gdzie $J_0(\psi)$ oznacza funkcję Bessela pierwszego rodzaju rzędu zerowego.

Przebieg napięcia uzyskamy korzystając z równań linii długiej

$$u_2(t) = -\frac{1}{C} \int_0^t \frac{\partial i(t)}{\partial t} dt. \quad (3.5)$$

Ostateczną postać rozwiązania przedstawia wyrażenie (3.6)

$$u_2(t) = E \left\{ e^{-a_{\infty} \frac{t}{t_{\infty}}} + a_{\infty} \int_{x=1}^{\frac{t}{t_{\infty}}} \frac{\exp(-a_{\infty} x) J_1(ja_{\infty} \sqrt{x^2 - 1})}{j\sqrt{x^2 - 1}} dx \right\}, \quad (3.6)$$

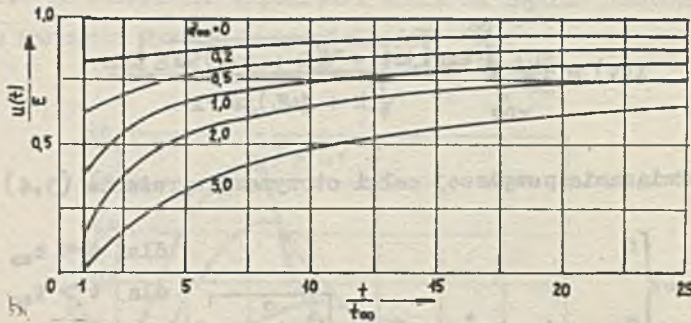
gdzie $J_1(\psi)$ oznacza funkcję Bessela I rodzaju 1 rzędu.

Przebieg napięcia $u_2(t)$ przedstawiono na rys. 3.1. Z rysunku widać, że przebieg napięcia jest zależny od wartości tłumierności a_{∞} , przy czym w każdym przypadku w chwili $t = t_{\infty}$ następuje skok napięcia od zera do wartości

$$u_2(t_{\infty}) = E e^{-a_{\infty}} \quad (3.7)$$

Następnie napięcie narasta monotonicznie do wartości

$$u_2(\infty) = E. \quad (3.8)$$



Rys. 3.1. Przebieg napięcia na wyjściu toru obciążonego impedancją falową przy podaniu na wejście skoku jednostkowego

Celowe jest przeanalizowanie postaci 3.6 dla przypadku pomijalnie małej indukcyjności ($L \rightarrow 0$), co jest równoznaczne z $a_\infty \rightarrow \infty$ oraz $t_\infty \rightarrow 0$.

W efekcie przekształceń otrzymamy

$$u_2(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot E \cdot \lim_{\substack{a_\infty \rightarrow \infty \\ t_\infty \rightarrow 0}} \int_0^{\sqrt{\frac{a_\infty t}{2t}}} \exp(-z^2) dz. \quad (3.9)$$

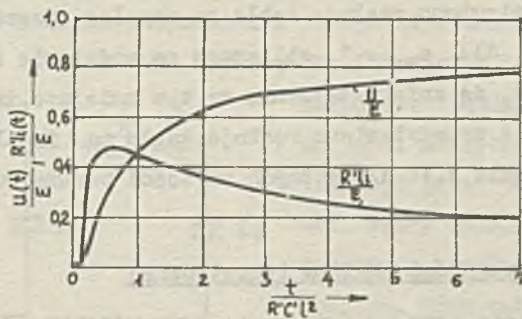
Po wprowadzeniu symbolu funkcji błędu Φ możemy napisać, że

$$u_2(t) = E \left[1 - \Phi \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{RC1^2}{t}} \right) \right]. \quad (3.10)$$

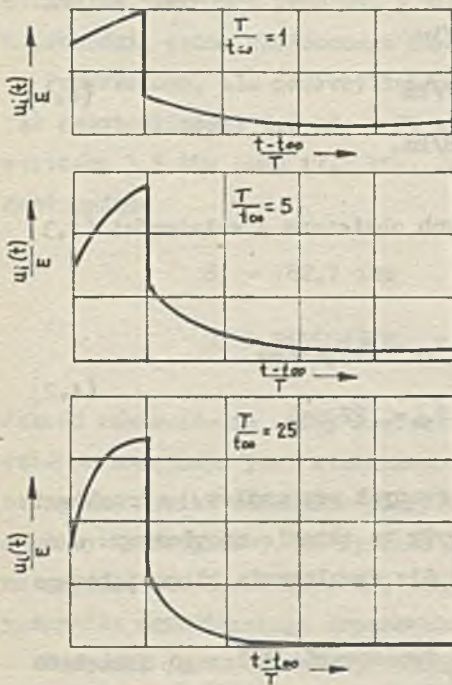
Przebieg $u_2(t)$ jest pokazany na rys. 3.2.

Można wykazać, że dla torów o tłumienności $a_\infty > 1$ wystarcza całkowicie dla obliczenia przebiegu $u_2(t)$ w zakresie $t > t_\infty$ wyrażenie 3.10. Dla $t < t_\infty$ należy przyjąć $u_2(t) = 0$. Wartość skoku napięcia w chwili $t = t_\infty$ otrzymujemy ze wzoru 3.7. Wobec tego możemy przyjąć z wystarczającą dla praktyki dokładnością, że

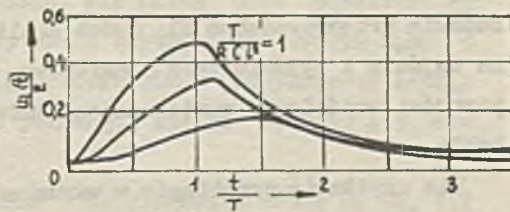
$$\frac{u_2(t)}{E} \approx \begin{cases} 0 & \text{dla } t < t_\infty \\ \exp(-a_\infty) & \text{dla } t = t_\infty \\ 1 - \Phi \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{RC1^2}{t}} \right) & \text{dla } t > t_\infty \end{cases}$$



Rys. 3.2. Przebieg napięcia i prądu na wyjściu toru o pomijalnie małej indukcyjności jednostkowej ($L \rightarrow 0$) obciążonego impedancją falową przy podaniu na wejście skoku jednostkowego



Rys. 3.3. Zniekształcenie impulsu prostokątnego o szerokości T transmitowanego kablem o tłumienności $a_\infty = 1$



Rys. 3.4. Zniekształcenie impulsu prostokątnego o szerokości T transmitowanego kablem o dużej tłumienności ($a_\infty > 1$)

Na rys. 3.3 przedstawiono reakcję kabla na impulsy prostokątne o różnej szerokości T dla $a_{\infty} = 1$ obliczone na podstawie zależności 3.6.

Z rysunku widać, że zniekształcenia są tym mniejsze, im szerszy jest impuls. Na rys. 3.4 przedstawiono reakcje kabla na impuls prostokątny obliczone z wyrażenia 3.10 dla różnych wartości parametru $\frac{T}{RCI^2}$.

4. Sprawdzenie poprawności analizy teoretycznej

W celu sprawdzenia poprawności powyższych rozważań przeprowadzono eksperyment na linii kablowej o długości 32 km zbudowanej z dalekosiężnego kabla telekomunikacyjnego TKD 84 x 2 x 1,2 o nominalnych wartościach parametrów jednostkowych

$$\begin{aligned} R &= 31,9 \Omega/\text{km} \\ C &= 26,5 \text{ nF}/\text{km} \\ L &= 0,55 \text{ mH}/\text{km}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

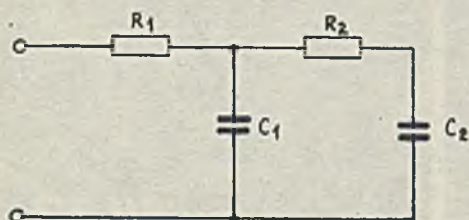
Nominalne wartości parametrów granicznych obliczane z zależności (1.3) oraz (1.7) są następujące

$$\begin{aligned} \alpha_{\infty} &= 110 \text{ mN}/\text{km} & \tau_{\infty} &= 3,8 \mu\text{s}/\text{km} \\ a_{\infty} &= 3,52 \text{ N} & t_{\infty} &= 122 \mu\text{s}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Badania przeprowadzono dla dwóch analizowanych przypadków. Przebiegi na wejściu i wyjściu toru obserwowane były na ekranie oscyloskopu o oporności wejściowej wystarczająco dużej dla symulowania biegu jałowego kabla.

Dla uzyskania przebiegów w warunkach dopasowania falowego obciążano kabel równoważnikiem impedancji falowej kabla. Z pomiarów impedancji falowej kabla wynika, że reaktancja falowa ma charakter pojemnościowy, w związku z czym jako równoważniki kabla wybrano dwójniki R, C o strukturze drabinkowej (rys. 4.1).

Istota projektowania równoważnika polega na dobraniu wartości elementu dwójnika R, C w taki sposób, aby impedancja tego dwójnika przy



Rys. 4.1. Równoważnik impedancji falowej kabla

bierała w węzłach aproksymacji wartości odczytane z krzywej impedancji jaką pragniemy odwzorować. Węzły aproksymacji wybrano w oparciu o rozkład węzłów wg Czebyszewa. Równoważniki zapewniały dopasowanie w zakresie $f_R \div \tau_{\min}$ gdzie f_R oznacza częstotliwość powtarzania impulsów, a τ_{\min} - minimalną szerokość impulsu. A więc zakres dopasowania pokrywał się z szerokością pasma skutecznego minimalnego impulsu.

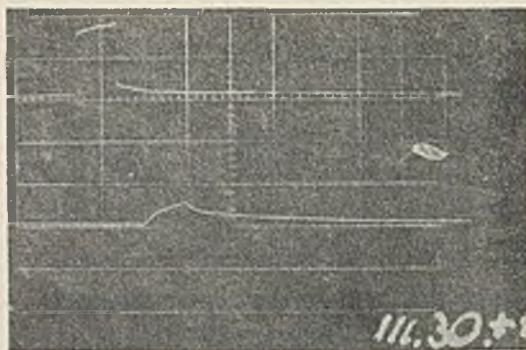
Przykładowo, dla częstotliwości $f_R = 600$ Hz zakres dopasowania objął częstotliwości 0,6 kHz - 20 kHz, jako węzły aproksymacji wybrano wartości 3,5 kHz oraz 17,2 kHz, zaś wartości parametrów dwójnika były następujące

$$R_1 = 182,7 \text{ ohm} \qquad R_2 = 278,6 \text{ ohm}$$

$$C_1 = 0,2689 \mu\text{F} \qquad C_2 = 0,29 \mu\text{F}.$$

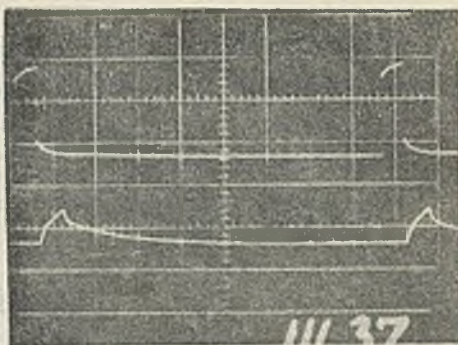
Jakość równoważenia w tak szerokim zakresie częstotliwości dwójnikiem czteroelementowym jest stosunkowo niska, nie można więc oczekiwać by otrzymane wyniki dokładnie pokrywały się z wartościami otrzymanymi z analizy teoretycznej. Na rysunku 4.2 przedstawiono oscylogramy napięć na wejściu i wyjściu toru dla biegu jałowego, zaś na rysunku 4.3 dla przypadku ograniczonego dopasowania.

Wartości czasu opóźnienia odczytane z oscylogramów równe są ok. 112 μ sek, a więc odchylenie od wartości nominalnej wynosi 8,2%. Różnica ta wynika raczej z odchyień parametrów jednostkowych kabla w stosunku do ich wartości nominalnych oraz z błędów odczytu czasu z oscylogramów niż z błędów analizy teoretycznej. Należy zwrócić uwagę na fakt, że kształt otrzymanych impulsów pokrywa się z wynikami teoretycznymi.



Rys. 4.2. Oscylogram odpowiedzi toru na impuls prostokątny przy biegu jałowym

Skala amplitud: górna 2 V/cm
dolna 1 V/cm
szerokość impulsu na wejściu toru $\tau = 67 \mu\text{s}$



Rys. 4.3. Oscylogram odpowiedzi toru na impuls prostokątny w warunkach ograniczonego dopasowania

Skala amplitud: górna 2 V/cm
dolna 1 V/cm
szerokość impulsu na wejściu toru $\tau = 100 \mu\text{sec}$

5. Wnioski

Poprawność analizy teoretycznej potwierdzona eksperymentem pozwala wysnuć kilka wniosków odnośnie transmisji impulsów prostokątnych linią kablową.

Zniekształcenia impulsów wynikają z naturalnych charakterystyk toru kablowego i zawsze należy się z nimi liczyć. W przypadku przesyłu impulsów prostokątnych na krótkie odległości kablem, którego tłumienność $a_{\infty} \leq 0,5$ N celowe jest dopasowanie obciążenia do impedancji falowej kabla. Unika się dzięki temu szkodliwych efektów wywołanych odbiciami, zaś początkowy skok napięcia $u_2(t_{\infty}) \geq 0,75 E$ umożliwia zastosowanie odbioru progowego bez zmiany szerokości impulsu. Przykładowo, dla kabla TKD 84 x 2 x 1,2 dotyczy to transmisji na odległość $l \leq 5$ km.

W przypadku konieczności transmisji kablem na większą odległość kiedy tłumienność $a_{\infty} > 1$ N, bardziej efektywny jest bieg jałowy kabla, a więc współpraca z odbiornikiem o bardzo dużej impedancji wejściowej. Dla dużych wartości a_{∞} całkowicie zanikają skoki napięcia wywołane odbiciami, zaś szybkość narastania napięcia w początkowej fazie impulsu jest dwukrotnie większa niż w przypadku dopasowania falowego.

LITERATURA

1. KADEN H.: Impulse und Schaltvorgaenge in der Nachrichtentechnik. München 1957.
2. DOETSCH G.: Praktyka przekształcenia Laplace'a, PWN Warszawa 1964.
3. NOWICKI W.: Transformatory, rozgałęźniki i równoważniki telekomunikacyjne. WKiŁ Warszawa 1970.
4. BARCHAŃSKI J.: Własności transmisyjne toru kablowego. Opracowanie ZPEE Energopomiar, Gliwice 1972.

ПЕРЕДАЧА ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ИМПУЛЬСОВ
ОДНОРОДНОЙ КАБЕЛЬНОЙ ЛИНИЕЙ

Р е з ю м е

В статье проведен теоретический анализ прохождения единичного скачка и прямоугольного импульса напряжения одно-
родной кабельной линией с пренебрежимо малой удельной про-
водимостью в режиме холостого хода и при нагрузке на бал-
новое сопротивление.

Правильность теоретических зависимостей и доказана ре-
зультатами проведенного автором эксперимента.

PULSES TRANSMISSION ON THE UNIFORM CABLE - LINE

S u m m a r y

The paper presents a theoretical analysis of the step function and the pulse response of a uniform cable - line with a negligible conduc-
tance - per - unit length:

- a) loaded with the characteristic impedance,
- b) open - circuited.

For verification of this analysis some research results are included.