

ZYGMUNT NOWOMIEJSKI, ZOFIA CICHOWSKA  
Katedra Podstaw Elektrotechniki

### NIEZRÓWNOWAŻONE UKŁADY TRÓJFAZOWE

Streszczenie. W przedłożonej pracy autorzy rozważają rozkład mocy w układach trójfazowych nie-zrównoważonych, związane z tym rozkładem współczynniki oraz warunki współpracy układów niezrównoważonych z symetrycznym kondensatorem kompensującym moc bierną. Wprowadzono pojęcie mocy asymetrii  $K$  przy pomocy definicji innej niż to miało miejsce dotychczas i wykazano znaczenie tej nowej definicji. Rozważono wpływ nierównomierności obciążenia na rozkład mocy w poszczególnych fazach i jego związek z współczynnikiem asymetrii prądowej i napięciowej. Wprowadzono szereg nowych wielkości określających warunki pracy układu. W szczególności przeanalizowano wpływ symetrycznej kompensacji mocy biernej na symetrię prądową w układzie. Jak wykazano, zwiększenie współczynnika mocy w układach niezrównoważonych zasilanych układem napięć symetrycznych jest okupione odpowiednim zwiększeniem się asymetrii prądowej. Rozważono także wpływ symetrycznej kompensacji mocy biernej na pracę układu niezrównoważonego zasilanego układem napięć asymetrycznych. Pokazano, że w układach takich przed przystąpieniem do zaprojektowania kondensatora kompensującego należy, przy pomocy wykresu kołowego zbadać zmiany współczynnika symetrii prądowej jakie zajdą w układzie.

Przedstawioną teorię zilustrowano przykładami.

### Wstęp

Przedstawiona praca jest poświęcona rozkładowi mocy występujących w układach niezrównoważonych, współczynnikom związanym z tym rozkładem oraz wpływom jaki na układ niezrównoważony posiada symetryczna kompensacja mocy biernej.

Do czasu kiedy cała uwaga elektrotechników skupiona była na układach trójfazowych symetrycznych, a więc w szczególności zrównoważonych wydawało się, że wystarczającą ilość informacji o pracy układów trójfazowych uzyskuje się przy pomocy wielkości wyróżnionych w teorii układów jednofazowych, tzn. mocy czynnej, biernej i pozornej oraz współczynnika mocy układu. Dopiero zapoczątkowane przez F. Bucholtza [2] rozważania o układach trójfazowych niezrównoważonych wykazały, że dla uzyskania wystarczającej informacji o pracy takich układów powyższe wielkości nie wystarczają i że należy dla dobrego ich opisanie wprowadzić wielkości nowe nie występujące lub niewyróżniające się w układach jednofazowych. Szereg cennych relacji, zawierających dużą ilość informacji odnoszących się do układów trójfazowych jako całości uzyskali obok F. Bucholtza autorzy tacy jak L.S. Żurie [4], I. Rosenzweig [7], W. Quade [8] i A.P.T. Sah [9], [10], w których pracach mimo całkiem odmiennego sposobu podejścia, można wyróżnić pewną wspólną cechę. Tą wspólną cechą jest podejście do analizy układu trójfazowego jako do zwartej całości, którego istotne dla reżimu pracy wielkości nie koniecznie muszą wpływać z przebiegów występujących w poszczególnych fazach i które wynikają nie tylko z prawidłowego sumowania efektów pracy poszczególnych faz.

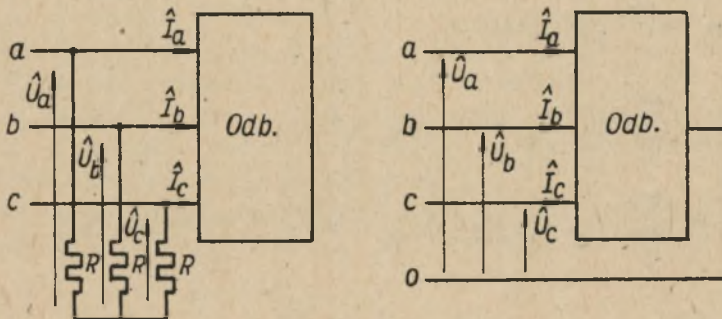
W przedłożonej pracy ta ogólna cecha, którą autorzy uważają za słuszną została zachowana.

### II. Rozkład mocy

Niech dany jest układ trójfazowy trój- lub czteroprzewodowy (rys.1) o danych napięciach fazowych (w postaci symbolicznej)  $\hat{U}_a, \hat{U}_b, \hat{U}_c$  i prądach przewodowych  $\hat{I}_a, \hat{I}_b, \hat{I}_c$ .

Symboliczną moc pozorną:  $\hat{S} = P + j Q$  pobieraną przez układ, otrzymujemy przy pomocy relacji:

$$\hat{S} = \sum_k \hat{U}_k \hat{I}_k^*, \quad k = a, b, c \quad (1)$$



Rys. 1

Część rzeczywista z symbolicznej mocy pozornej jest, na podstawie definicji, równa mocy czynnej  $P$ , a część urojona jest równa mocy biernej  $Q$ , czyli zachodzi:

$$P = \sum_k U_k I_k \cos \varphi_k$$

$$Q = \sum_k U_k I_k \sin \varphi_k, \quad k = a, b, c \quad (2)$$

gdzie kąty  $\varphi_a$ ,  $\varphi_b$  i  $\varphi_c$  są kątami przesunięcia fazowego między prądem przewodowym i napięciem fazowym w odpowiednich fazach.

Niech  $\psi$  jest kątem zdefiniowanym przy pomocy relacji:

$$\cos \psi \stackrel{df}{=} \frac{P}{S}, \quad \sin \psi \stackrel{df}{=} \frac{Q}{S} \quad (3)$$

$$\text{gdzie } S = |\hat{S}| = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad (4)$$

Wielkość  $S$  nazywamy mocą pozorną.

Zachodzi:

$$\hat{S} = S e^{j\psi}$$

Wstawiając powyższe wyrażenie do (1) i dzieląc obustronnie przez  $e^{j\psi}$  otrzymamy:

$$S = \sum_k U_k I_k \cos(\varphi_k - \psi) \quad (5)$$

$$0 = \sum_k U_k I_k \sin(\varphi_k - \psi), \quad k = a, b, c \quad (6)$$

Założmy, że

$$\varphi_a = \varphi_b = \varphi_c = \varphi \quad (7)$$

Wtedy na podstawie relacji (6) zachodzi

$$0 = \sin(\varphi - \psi) \sum_k U_k I_k$$

Wyrażenie  $\sum_k U_k I_k$  jest wielkością dodatnią i różną od zera w każdym układzie pobierającym prąd, stąd:

$$\sin(\varphi - \psi) = 0$$

$$\psi = \varphi$$

Dla takich układów na podstawie (5) moc pozorna  $S$  jest dana przez relację:

$$S = \sum_k U_k I_k, \quad K = a, b, c \quad (8)$$

Na ogół jednak prawa strona relacji (8) jest różna od mocy pozornej zdefiniowanej jako pierwiastek z sumy kwadratów całkowitej mocy czynnej i całkowitej mocy biernej układu. Z drugiej strony należy zauważyć, że warunek (7) jest wystarczający, aby prawdziwa była relacja (8). Stąd więc wynika, że suma mocy pozornych poszczególnych faz jest równa całkowitej mocy pozornej układu, w którym spełniony jest warunek (7).

W szczególności odnosi się to do tak zwanych układów zrównoważonych tj. takich, dla których zachodzi

$$\frac{\hat{U}_a}{\hat{I}_a} = \frac{\hat{U}_b}{\hat{I}_b} = \frac{\hat{U}_c}{\hat{I}_c} \quad (9)$$

Kładziemy:

$$U_m \stackrel{\text{df}}{=} \sqrt{\sum_k U_k^2}, \quad I_m \stackrel{\text{df}}{=} \sqrt{\sum_k I_k^2}, \quad k = a, b, c \quad (10)$$

oraz:

$$P_m \stackrel{\text{df}}{=} U_m I_m \quad (11)$$

Wielkość  $P_m$  nazywamy mocą modułową. (Wielkość  $U_m$  można by nazwać modułem napięć fazowych układu, a  $I_m$  modułem prądów przewodowych układu).

Zachodzi:

$$P_m \geq S = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad (12)$$

Istotnie, łatwo wykazać korzystając z tożsamości:

$$\sum_k U_k^2 \cdot \sum_k I_k^2 = \left( \sum_k \hat{U}_k \check{I}_k \right) \cdot \left( \sum_k \check{U}_k \hat{I}_k \right) + \\ + \sum_{k < r} \left| \hat{U}_k \hat{I}_r - \hat{U}_r \hat{I}_k \right|^2, \quad k, r = \langle a, b, c \rangle$$

że między mocami  $P_m$ ,  $P$  i  $Q$  oraz przebiegami zachodzi relacja:

$$P_m^2 = P^2 + Q^2 + \sum_{k < r} \left| \hat{U}_k \hat{I}_r - \hat{U}_r \hat{I}_k \right|^2$$

stąd, kładąc:

$$K \stackrel{\text{df}}{=} \sqrt{\sum_{k < r} \left| \hat{U}_k \hat{I}_r - \hat{I}_k \hat{U}_r \right|^2} \quad (13)$$

otrzymamy

$$P_m^2 = P^2 + Q^2 + K^2 \quad (14)$$

Wielkość  $K$  nazywamy mocą asymetrii. Relację (13) wyrażającą jej związek z przebiegami zawdzięczamy I. Rosenzweigowi [7] i dlatego nazwiemy ją relacją Rosenzweiga. Z relacji tej wynika, że w układach zrównoważonych (por. [9]) moc  $K$  jest równa zero.

W układach takich zachodzi:

$$P_m = S = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad (15)$$

Jak widać wprowadzenie do rozważań mocy  $P_m$  pociągnęło za sobą z punktu widzenia formalnego wprowadzenie także do rozważań wielkości  $K$ . Jednak z punktu widzenia

fizykalnego wprowadzenie do rozważań wielkości  $P_m$  nie jest oczywiste. Można powiedzieć, że moc  $P_m$  jest równa maksymalnej mocy czynnej układu o danym module napięć fazowych  $U_m$  i danym module prądów przewodowych  $I_m$ .

(por. [2], [4], [7]).

W celu ściślejszego powiązania mocy  $K$  z rozkładem energii zachodzącym w układzie i niezależnie od mocy  $P_m$  kładziemy (por. [6]):

$$\hat{I}_k \stackrel{df}{=} \hat{I}_{ik} + \hat{I}_{\psi k} \quad (16)$$

$$\hat{I}_{ik} \stackrel{df}{=} \frac{\hat{S}}{U_m^2} \cdot \hat{U}_k, \quad k = a, b, c$$

oraz:

$$\hat{Y} \stackrel{df}{=} \frac{\hat{S}}{U_m^2} \quad (17)$$

tak, iż:

$$\hat{I}_{ik} = \hat{Y} \hat{U}_k \quad (18)$$

$\hat{Y}$  nazwiemy zastępczą admitancją układu.

Z definicji (16) wynika, że wielkości  $\hat{I}_{ik}$  są równe rozkładowi całkowitej mocy czynnej i biernej proporcjonalnemu do napięć fazowych w poszczególnych fazach.

Różnica między rzeczywiście w danym przewodzie płynącym prądem  $\hat{I}_k$  a tą (w pewnym sensie unormowaną) porcją mocy czynnej i biernej, która przypada na fazę "k" ( $k = a, b, c$ ) w zależności od symbolicznej wielkości napięcia fazowego, jest równa wielkości  $\hat{I}_{\psi k}$ , którą nazwiemy symbolicznym prądem asymetrii fazy "k" (ściślejszej przewodu "k"). Mówiąc inaczej, jeśli w danym układzie moc czynna i bierna pobierana przez poszczególne

fazy jest proporcjonalna do napięć fazowych w odpowiednich fazach to w sensie definicji (16) układ taki uważamy za symetryczny i w układzie takim wielkości  $\hat{I}_{\varphi k}$  dla każdego  $k$  są równe zero.  
Zachodzi:

$$\hat{I}_{ik} \check{I}_{\varphi k} = \hat{Y} \hat{U}_k (\check{I}_k - \check{Y} \check{U}_k) = \hat{Y} (\hat{U}_k \check{I}_k - \check{Y} U_k^2)$$

stąd:

$$\begin{aligned} \sum_k \hat{I}_{ik} \check{I}_{\varphi k} &= \hat{Y} \left\{ \sum_k \hat{U}_k \check{I}_k - \check{Y} \sum_k U_k^2 \right\} = \\ &= \hat{Y} \left\{ \hat{S} - \frac{\hat{S}}{U_m^2} U_m^2 \right\} = 0, \quad k = a, b, c \end{aligned} \quad (19)$$

Z powyższego wynika, że rozkład (16) jest ortogonalnym rozkładem prądów przewodowych układu względem jego napięć fazowych. To, że proponowany rozkład jest ortogonalnym rozkładem prądów przewodowych ma nie tylko znaczenie formalne. Fakt ten określa znaczenie obrania  $\hat{Y}$  (por. 17) jako współczynnika proporcjonalności między wielkościami  $\hat{I}_{ik}$  i  $\hat{U}_k$  ( $k = a, b, c$ ). Wyraża on mianowicie stwierdzenie, że układ wielkości  $\hat{I}_{ia}$ ,  $\hat{I}_{ib}$  i  $\hat{I}_{ic}$  jest układem najlepiej aproksymującym prądy  $\hat{I}_a$ ,  $\hat{I}_b$  i  $\hat{I}_c$  z wszystkich możliwych układów prądowych proporcjonalnych do napięć fazowych  $\hat{U}_a$ ,  $\hat{U}_b$  i  $\hat{U}_c$ .

Mamy:

$$\begin{aligned} \hat{I}_{\varphi k} &\equiv \hat{I}_k - \hat{I}_{ik} \\ \hat{I}_{\varphi k} &\equiv \hat{I}_{ik} \left( \frac{\hat{I}_k - \hat{I}_{ik}}{\hat{I}_{ik}} \right), \quad |\hat{I}_{ik}| \neq 0 \\ \hat{I}_{\varphi k} \cdot \check{I}_{ik} &\equiv I_{ik}^2 \left( \frac{\hat{I}_{\varphi k}}{\hat{I}_{ik}} \right) \end{aligned}$$



czyli:

$$\sum_k \hat{I}_{\psi k} \hat{I}_{ik} = \sum_k I_{ik}^2 \left( \frac{\hat{I}_{\psi k}}{\hat{I}_{ik}} \right) \quad (20)$$

Na podstawie (19) lewa strona wyrażenia (20) jest równa zeru. Kładziemy:

$$\hat{\alpha} \stackrel{\text{df}}{=} \frac{\hat{I}_{\psi a}}{\hat{I}_{ia}}, \quad \hat{\beta} \stackrel{\text{df}}{=} \frac{\hat{I}_{\psi b}}{\hat{I}_{ib}}, \quad \hat{\gamma} \stackrel{\text{df}}{=} \frac{\hat{I}_{\psi c}}{\hat{I}_{ic}} \quad (21)$$

stąd:

$$\hat{\alpha} I_{ia}^2 + \hat{\beta} I_{ib}^2 + \hat{\gamma} I_{ic}^2 = 0$$

Dzieląc uzyskane wyrażenie przez  $Y^2$ , otrzymamy

$$\hat{\alpha} U_a^2 + \hat{\beta} U_b^2 + \hat{\gamma} U_c^2 = 0 \quad (22)$$

Wyrażenie (22) posłuży nam do obliczenia współczynników  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}$  i  $\hat{\gamma}$  w zależności od przebiegów. Oprócz tego jednak samo dla siebie jest bardzo charakterystyczne. Można je uważać za jedną z podstawowych tożsamości każdego układu trójfazowego. Np. w układzie podanym na rys.2 zachodzi:

$$\hat{I}_k = \sum_r \hat{Y}_{kr} \hat{U}_r, \quad r = a, b, c \quad (23)$$

Dla takiego układu tożsamość (22) przyjmuje postać:

$$\sum_k U_k^2 \left\{ \sum_r \left[ \left( \frac{\hat{Y}_{kr}}{\hat{Y}} \right) \left( \frac{\hat{U}_r}{\hat{U}_k} \right) - \delta_{kr} \right] \right\} = 0 \quad (24)$$

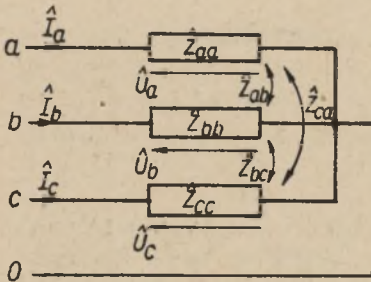
$$k, r = a, b, c$$

gdzie:

$$\delta_{kr} = \begin{cases} 1, & \text{gdy } r = k \\ " & \text{gdy } r \neq k \end{cases}$$

Na podstawie (16) i (21),  
otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \frac{\hat{I}_{\psi a}}{\hat{I}_a} &= \frac{\hat{\alpha}}{1 + \hat{\alpha}}, \\ \frac{\hat{I}_{\psi b}}{\hat{I}_b} &= \frac{\hat{\beta}}{1 + \hat{\beta}}, \\ \frac{\hat{I}_{\psi c}}{\hat{I}_c} &= \frac{\hat{\gamma}}{1 + \hat{\gamma}} \end{aligned} \quad (25)$$



Rys. 2

Zachodzi:

$$\begin{aligned} \frac{1 + \hat{\alpha}}{1 + \hat{\beta}} \cdot \left( \frac{\hat{U}_a}{\hat{U}_b} \right) &= \frac{\hat{I}_a}{\hat{I}_b} \\ \frac{1 + \hat{\beta}}{1 + \hat{\gamma}} \cdot \left( \frac{\hat{U}_b}{\hat{U}_c} \right) &= \frac{\hat{I}_b}{\hat{I}_c} \end{aligned}$$

oraz:

$$\hat{\alpha} U_a^2 + \hat{\beta} U_b^2 + \hat{\gamma} U_c^2 = 0$$

Z tego układu trzech równań obliczamy z pomocą związków

$$(25) \text{ stosunki } \frac{\hat{I}_{\psi k}}{\hat{I}_k}.$$

Otrzymamy:

$$\begin{aligned} \frac{\hat{I}_{\psi a}}{\hat{I}_a} &= \left(\frac{U_b}{U_m}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{\hat{U}_a}{\hat{I}_a}\right)\left(\frac{\hat{I}_b}{\hat{U}_b}\right)\right] + \left(\frac{U_c}{U_m}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{\hat{U}_a}{\hat{I}_a}\right)\left(\frac{\hat{I}_c}{\hat{U}_c}\right)\right] \\ \frac{\hat{I}_{\psi b}}{\hat{I}_c} &= \left(\frac{U_c}{U_m}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{\hat{U}_b}{\hat{I}_b}\right)\left(\frac{\hat{I}_c}{\hat{U}_c}\right)\right] + \left(\frac{U_a}{U_m}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{\hat{U}_b}{\hat{I}_b}\right)\left(\frac{\hat{I}_a}{\hat{U}_a}\right)\right] \\ \frac{\hat{I}_{\psi c}}{\hat{I}_c} &= \left(\frac{U_a}{U_m}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{\hat{U}_c}{\hat{I}_c}\right)\left(\frac{\hat{I}_a}{\hat{U}_a}\right)\right] + \left(\frac{U_b}{U_m}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{\hat{U}_c}{\hat{I}_c}\right)\left(\frac{\hat{I}_b}{\hat{U}_b}\right)\right] \end{aligned} \quad (26)$$

Jak widać w układach zrównoważonych prawe strony relacji (26) są równe zero i w układach takich prądy asymetrii nie występują,

Kładąc:

$$\hat{Z}_k = \frac{\hat{U}_k}{\hat{I}_k}, \quad \hat{Y}_k = \hat{Z}_k^{-1} \quad (27)$$

relacje (26) możemy zapisać w postaci:

$$\frac{\hat{I}_{\psi k}}{\hat{I}_k} = \sum_{k+r} \left(\frac{U_r}{U_m}\right)^2 \left[1 - \hat{Z}_k \hat{Y}_r\right], \quad k, r = a, b, c \quad (28)$$

Wielkości występujące po prawej stronie relacji (28) łatwo zmierzyć zespołem woltomierzy, amperomierzy i watomierzem. Stąd też łatwo uzyskać liczbowe wyniki dla stosunków:

$$\frac{\hat{I}_{\psi k}}{\hat{I}_k}$$

Stosunki te są miarą asymetrii występującej w każdej fazie układu wynikłej z nierównomiernego rozkładu mocy czynnej i biernej na poszczególne fazy w sensie definicji (16).

Kładziemy:

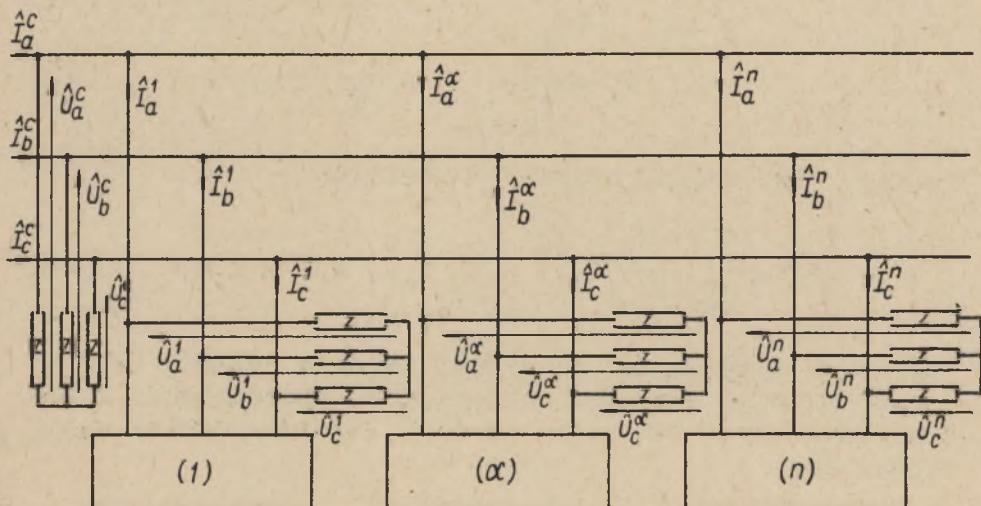
$$G = \frac{P}{U_m^2}, \quad B = \frac{Q}{U_m^2} \quad (29)$$

$$\hat{I}_{pk} \stackrel{\text{df}}{=} G\hat{U}_k, \quad \hat{I}_{qk} \stackrel{\text{df}}{=} B\hat{U}_k$$

otrzymamy:

$$\hat{I}_k = \hat{I}_{pk} - j \hat{I}_{qk} + \hat{I}_{\psi k} \quad (30)$$

Niech dana jest sieć 3-fazowa zasilająca n 3-fazowych odbiorów podłączonych równolegle (rys.3). Załóżmy, że straty na przewodach łączących są pomijalnie małe.



Rys. 3.

Wskaźnikiem "c" oznaczać będziemy wielkości odnoszące się do zasilania całości. Stąd na podstawie założeń, otrzymamy:

$$\hat{U}_k^c = \hat{U}_k^1 = \dots = \hat{U}_k^\alpha = \dots = \hat{U}_k^n$$

$$\hat{I}_k^c = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} \hat{I}_k^\alpha, \quad k = a, b, c \quad (31)$$

$$P^c = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} P^\alpha, \quad Q^c = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} Q^\alpha$$

Przeprowadzając rozkład ortogonalny prądu  $\hat{I}_k^c$ , otrzymamy:

$$\hat{I}_k^c = \frac{P-jQ}{[U_m^c]^2} \cdot \hat{U}_k^c + \hat{I}_{\psi k}^c \quad (32)$$

czyli:

$$\hat{I}_k^c = \frac{\sum_{\alpha} P^\alpha - j \sum_{\alpha} Q^\alpha}{[U_m^c]^2} \hat{U}_k^c + \hat{I}_{\psi k}^c =$$

$$= \sum_{\alpha} \frac{P^\alpha}{[U_m^\alpha]^2} \cdot \hat{U}_k^\alpha - j \sum_{\alpha} \frac{Q^\alpha}{[U_m^\alpha]^2} \hat{U}_k^\alpha + \hat{I}_{\psi k}^c$$

stąd:

$$\hat{I}_{pk}^c = \sum_{\alpha} \hat{I}_{pk}^\alpha \quad (33)$$

$$\hat{I}_{qk}^c = \sum_{\alpha} \hat{I}_{qk}^\alpha, \quad k = a, b, c$$

W dalszym ciągu otrzymujemy:

$$\sum_{\alpha} \hat{I}_k^{\alpha} = \sum_{\alpha} \hat{I}_{pk}^{\alpha} - j \sum_{\alpha} \hat{I}_{qk}^{\alpha} + \hat{I}_{\psi k}^c$$

$$\hat{I}_{\psi k}^c = \sum_{\alpha} (\hat{I}_k^{\alpha} - \hat{I}_{pk}^{\alpha} + j \hat{I}_{qk}^{\alpha})$$

$$\hat{I}_{\psi k}^c = \sum_{\alpha} \hat{I}_{\psi k}^{\alpha}, \quad k = a, b, c \quad (34)$$

Z relacji (33) i (34) wynika twierdzenie: w rozważanym układzie z odbiornikami podłączonymi wyłącznie równolegle wielkości  $\hat{I}_{pk}$ ,  $\hat{I}_{qk}$ , i  $\hat{I}_{\psi k}$  wzięte niezależnie od siebie spełniają I prawo Kirchhoffa, W szczególności wynika stąd bardzo ważny wniosek, że podłączenie równoległe do układu niezrównoważonego układu zrównoważonego nie wpływa na zmianę mocy asymetrii K (układu wypadkowego) ponieważ układ zrównoważony nie wprowadza do układu prądów asymetrii  $I_{\psi k}$ . Jak zobaczymy wniosek ten pozwoli na badanie szczególnych przypadków pracy układu.

Na podstawie relacji (30) otrzymamy:

$$I_k^2 = (\hat{I}_{pk} - j \hat{I}_{qk} + \hat{I}_{\psi k}) \cdot (I_{pk} + j \check{I}_{qk} + \check{I}_{\psi k})$$

$$\sum_k I_k^2 = \sum_k (\hat{I}_{pk} - j \hat{I}_{qk} + \hat{I}_{\psi k}) (\check{I}_{pk} + j \check{I}_{qk} + \check{I}_{\psi k})$$

Po wykonaniu działań oraz na podstawie (19) otrzymamy;

$$\sum_k I_k^2 = \sum_k I_{pk}^2 + \sum_k I_{qk}^2 + \sum_k I_{\psi k}^2$$

Kładziemy:

$$I_{pm} \stackrel{\text{df}}{=} \sqrt{\sum_k I_{pk}^2}, \quad I_{qm} \stackrel{\text{df}}{=} \sqrt{\sum_k I_{qk}^2}, \quad I_{\psi m} \stackrel{\text{df}}{=} \sqrt{\sum_k I_{\psi k}^2} \quad (35)$$

stąd:

$$I_m^2 = I_{pm}^2 + I_{qm}^2 + I_{\psi m}^2 \quad (36)$$

Z definicji prądów  $\hat{I}_{\psi k}$  oraz z właściwości rozkładu ortogonalnego wynika, że moduł  $I_{\psi m}$  jest wielkością wyznaczającą absolutną i globalną asymetrię układu spowodowaną nierównomiernym rozkładem mocy  $P$  i  $Q$  na poszczególne fazy.

Dla modułów  $I_{pm}$  i  $I_{qm}$  otrzymamy związki:

$$P = U_m I_{pm}, \quad Q = U_m I_{qm} \quad (37)$$

Stąd na podstawie (36) otrzymamy:

$$P_m^2 = P^2 + Q^2 (U_m I_{\psi m})^2$$

Kładziemy:

$$K \stackrel{\text{df}}{=} U_m I_{\psi m} \quad (38)$$

Naturalnie, ze względu na relację (14) z punktu widzenia formalnego definicje (13) i (38) są równoważne.

### III. Współczynniki mocy i inne współczynniki układu

Współczynnik mocy  $\lambda$  jest często zdefiniowany jako stosunek mocy czynnej  $P$  pobieranej przez układ do jego mocy pozornej  $S$ , czyli

$$\lambda = \frac{P}{S}$$

Jednak wielkość tak zdefiniowana nie przez wszystkich autorów jest podobnie interpretowana. Przede wszystkim należy tu wyróżnić dwie skrajnie przeciwstawiające się interpretacje. Według pierwszej  $\lambda$  jest współczynnikiem, który w każdym układzie (a więc i w niezrównoważonym) w sposób jednoznaczny i z wystarczającą dozą informacji określa ekonomiczne wykorzystanie energii elektrycznej dostarczonej do układu. U podstaw takiej interpretacji leży pogląd, że sprawy energetyczne sprowadzają się do rozliczenia z globalnie pobranej mocy przez układ i że rozkład mocy na poszczególne fazy na rozliczenie to nie ma wpływu. Nie oznacza to, że autorzy reprezentujący ten pogląd nie interesują się asymetrią występującą w układzie, np. prądową lub napięciową (por. [3], [7]) lecz w każdym przypadku sprowadzają zagadnienie do wpływu asymetrii na kształtowanie się współczynnika mocy.

Według drugiej interpretacji  $\lambda$  jest współczynnikiem o określonym znaczeniu użytkowym jedynie w układach zrównoważonych. W tych przypadkach ma on sens, który mu się przypisuje, a więc pozwala na prawidłowe rozliczenie się z ekonomicznego wykorzystania dostarczonej energii elektrycznej i dostarcza wystarczającą ilość informacji aby, np. poprzez kompensację stosunek tego wykorzystania korzystnie zmienić.

Autorzy ci (por. [1], [4], [5]) całkowicie odrzucają przypisanie jakiegokolwiek sensu współczynnikowi  $\lambda$  w układach niezrównoważonych (lub takich, w których występuje jakakolwiek bądź asymetria) uważając, że w układach takich tylko współczynniki obliczone dla poszczególnych faz posiadają znaczenie.

Nam nie wydaje się aby którakolwiek z obu przytoczonych interpretacji była słuszna. Jak postaramy się to wykazać przy pomocy związków wyprowadzonych poniżej, za-



gadnienie nie polega na tym aby przyjąć lub odrzucić w rozważaniach nad układami niezerównoważonymi współczynnik mocy odnoszący się do całości lub do poszczególnych faz, lecz do wprowadzenia takich związków które by w wystarczającym stopniu informowały o pracy układu i to tak w odniesieniu do zachowania się układu jako całości jak i w odniesieniu do jego poszczególnych faz.

Przeprowadzimy rozkład napięć fazowych i prądów przewodowych na składowe symetryczne. Przyjmując fazę "a" jako fazę odniesienia dla tego rozkładu, otrzymamy:

$$\hat{U}_a = \hat{U}_0 + \hat{U}_1 + \hat{U}_2$$

$$\hat{U}_b = \hat{U}_0 + \hat{\alpha}^2 \hat{U}_1 + \hat{\alpha} \hat{U}_2 \quad (39)$$

$$\hat{U}_c = \hat{U}_0 + \hat{\alpha} \hat{U}_1 + \hat{\alpha}^2 \hat{U}_2 \quad \hat{\alpha} = e^{j\frac{2\pi}{3}}$$

oraz analogiczne relacje dla prądów przewodowych. W relacjach (39) wskaźnik "0" odnosi się do składowej zerowej, wskaźnik "1" do składowej zgodnej, a wskaźnik "2" do składowej przeciwnej kolejności faz.

Zachodzi:

$$U_m = \sqrt{3} \sqrt{\sum_k U_k^2} \quad (40)$$

$$I_m = \sqrt{3} \sqrt{\sum_k I_k^2}, \quad k = 0, 1, 2$$

Stąd:

$$P_m = 3 \sqrt{\sum_k U_k^2} \cdot \sqrt{\sum_k I_k^2} \quad (41)$$

Dla symbolicznej mocy pozornej  $\hat{S}$  otrzymamy:

$$\hat{S} = 3 \sum_k \hat{U}_k \hat{I}_k, \quad k = 0, 1, 2 \quad (42)$$

Zakładając, że kąty przesunięcia fazowego między odpowiednimi składowymi symetrycznymi prądów i napięć wynoszą  $\theta_0$ ,  $\theta_1$  i  $\theta_2$ , otrzymamy:

$$\hat{S} = 3 \sum_k U_k I_k e^{j\theta_k}, \quad k = 0, 1, 2 \quad (43)$$

W zależności od kąta  $\psi$  (por. [3]) oraz składowych symetrycznych przebiegów moc pozorną  $S$  da się przedstawić przy pomocy związku:

$$S = 3 \sum_k U_k I_k \cos(\theta_k - \psi), \quad k = 0, 1, 2 \quad (44)$$

Zachodzi także:

$$0 = \sum_k U_k I_k \sin(\theta_k - \psi) \quad (45)$$

Kładziemy:

$$\hat{\delta}_s \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\hat{S}}{P_m} \quad (46)$$

Wielkość  $\hat{\delta}_s$  nazwiemy symbolicznym współczynnikiem symetrii układu.

Stąd:

$$\delta_s = |\hat{\delta}_s| = \frac{\sum_k U_k I_k \cos(\theta_k - \psi)}{\sqrt{\sum_k U_k^2} \cdot \sqrt{\sum_k I_k^2}}, \quad k=0,1,2 \quad (47)$$

Kładziemy:

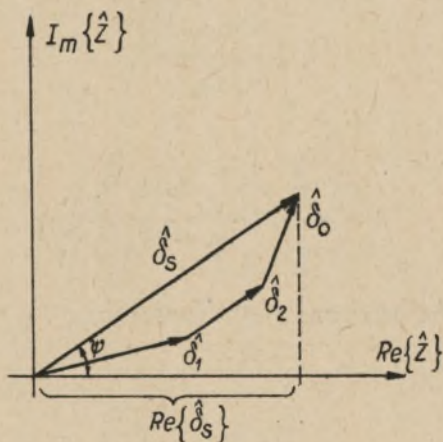
$$\hat{\delta}_{uk} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\hat{U}_k}{\sqrt{\sum_k U_k^2}}, \quad \delta_{ik} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\hat{I}_k}{\sqrt{\sum_k I_k^2}}$$

$$\hat{\delta}_k \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\delta}_{uk} \cdot \check{\delta}_{ik} \quad (48)$$

Z definicji tych oraz (46) i (47) otrzymamy:

$$\hat{\delta}_s = \sum_k \hat{\delta}_k \quad (49)$$

$$\delta_s = \sum_k \delta_k \cos(\theta_k - \psi), \quad k = 0, 1, 2 \quad (50)$$



Rys. 4

Relację (49) łatwo da się zilustrować graficznie odwzorowując wprowadzone wielkości na płaszczyźnie Gaussa (rys.4).

Z rysunku bezpośrednio wynika, że:

$$\delta_s = \sqrt{\sum_k \delta_k^2 + 2 \sum_{k < r} \delta_k \delta_r \cos(\theta_k - \theta_r)} \quad (51)$$

$$k, r = 0, 1, 2$$

Dla układów trójprzewodowych ( $\delta_0 = 0$ ), otrzymamy:

$$\delta_s = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2 + 2 \delta_1 \delta_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)} \quad (52)$$

(por. [3]).

Współczynnik mocy:  $\lambda = \frac{P}{S}$  jest równy stosunkowi części rzeczywistej symbolicznego współczynnika symetrii do jego modułu, tj. zachodzi:

$$\lambda = \frac{\operatorname{Re} \{ \hat{\delta}_s \}}{|\hat{\delta}_s|} \quad (53)$$

Stąd:

$$\lambda = \frac{\sum_k \delta_k \cos \theta_k}{\sum_k \delta_k \cos(\theta_k - \varphi)} \quad (54)$$

W układach równomiernie obciążonych  $\delta_s = 1$  i otrzymujemy

$$\lambda = \operatorname{Re} \{ \hat{\delta}_s \} \quad (55)$$

W dalszym ciągu naszych rozważań przejdziemy do omówienia wpływu asymetrii prądowej i napięciowej na rozkład mocy. W tym celu przejdziemy do wyrażenia związków już uzyskanych dla poszczególnych przebiegów przy pomocy ich składowych symetrycznych.

Mamy (por. (16)):

$$\hat{I}_a = \hat{Y} \hat{U}_a + \hat{I}_{\psi a}$$

$$\hat{I}_b = \hat{Y} \hat{U}_b + \hat{I}_{\psi b}$$

$$\hat{I}_c = \hat{Y} \hat{U}_c + \hat{I}_{\psi c}$$

Stąd:

$$\hat{I}_0 = \hat{Y} \hat{U}_0 + \hat{I}_{\psi 0}$$

$$\hat{I}_1 = \hat{Y} \hat{U}_1 + \hat{I}_{\psi 1} \tag{56}$$

$$\hat{I}_2 = \hat{Y} \hat{U}_2 + \hat{I}_{\psi 2}$$

gdzie:

$$\hat{I}_{\psi 0} = \frac{1}{3} (\hat{I}_{\psi a} + \hat{I}_{\psi b} + \hat{I}_{\psi c})$$

$$\hat{I}_{\psi 1} = \frac{1}{3} (\hat{I}_{\psi a} + \hat{\alpha} \hat{I}_{\psi b} + \hat{\alpha}^2 \hat{I}_{\psi c}) \tag{57}$$

$$\hat{I}_{\psi 2} = \frac{1}{3} (\hat{I}_{\psi a} + \hat{\alpha}^2 \hat{I}_{\psi b} + \hat{\alpha} \hat{I}_{\psi c})$$

Zachodzi:

$$\begin{aligned} \sum_k \hat{U}_k \check{I}_{\psi k} &= \sum_k \hat{U}_k (\check{I}_k - \check{Y} \check{U}_k), \quad k = 0, 1, 2 \\ &= \sum_k \hat{U}_k \check{I}_k - \frac{\hat{S}}{3 \sum_k U_k^2} \sum_k U_k^2 = \frac{1}{3} \hat{S} - \frac{1}{3} \hat{S} = 0 \end{aligned}$$

Czyli:

$$\sum_k \hat{U}_k \check{I}_{\psi k} = 0 \quad k = 0, 1, 2 \quad (58)$$

Z relacji (58) wynika, że zależności (56) stanowią rozkład ortogonalny poszczególnych składowych symetrycznych prądów przewodowych względem składowych napięć fazowych. W rzeczywistości uzyskaliśmy znacznie głębszy wynik. Z przeprowadzonego rozważania wynika, że rozkład ortogonalny prądów przewodowych względem napięć fazowych prowadzi do rozkładu ortogonalnego składowych symetrycznych prądów przewodowych względem składowych symetrycznych napięć fazowych. Dlatego też uzyskane uprzednio relacje wynikłe z rozkładu ortogonalnego poszczególnych przebiegów pozostają w mocy dla ich składowych symetrycznych w identycznej postaci. W szczególności na podstawie (26), otrzymamy:

$$\frac{\hat{I}_{\psi k}}{\hat{I}_k} = \sum_{r \neq k} \left( \frac{U_r}{U_{sm}} \right)^2 \cdot 1 - \left( \frac{\hat{U}_k}{\hat{U}_r} \right) \left( \frac{\hat{I}_r}{\hat{I}_k} \right) \quad (59)$$

$$r, k = 0, 1, 2$$

gdzie:

$$U_{sm} = \sqrt{\sum_k U_k^2}, \quad k = 0, 1, 2$$

Rozważmy układ w którym składowe zerowej kolejności nie występują. Kładziemy:

$$\hat{\epsilon}_u \stackrel{\text{df}}{=} \frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1}, \quad \hat{\epsilon}_i \stackrel{\text{df}}{=} \frac{\hat{I}_2}{\hat{I}_1} \quad (60)$$

Współczynniki  $\hat{\epsilon}_u$  i  $\hat{\epsilon}_i$  nazwiemy odpowiednio: symbolicznym współczynnikiem asymetrii napięciowej i symbolicznym współczynnikiem asymetrii prądowej.

W miejsce relacji (59) otrzymamy:

$$\frac{\hat{I}_{\psi 1}}{\hat{I}_1} = \left(1 - \frac{1}{1 + \hat{\epsilon}_u^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{\hat{\epsilon}_i}{\hat{\epsilon}_u}\right) \quad (61)$$

$$\frac{\hat{I}_{\psi 2}}{\hat{I}_2} = \left(\frac{1}{1 + \hat{\epsilon}_u^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{\hat{\epsilon}_u}{\hat{\epsilon}_i}\right)$$

Z relacji (61) widać jaki mają wpływ współczynniki asymetrii prądów i napięć na asymetrię układu. Po elementarnych przekształceniach z zależności (61) otrzymamy (por. (48)):

$$\frac{I_{\psi m}}{I_m} = \sigma_1 |\hat{\epsilon}_u - \hat{\epsilon}_i| \quad (62)$$

Z relacji (62) wynika, że globalna asymetria rozpatrywanego układu jest zależna od różnicy współczynników asymetrii napięciowej i prądowej. Dlatego aby jej uniknąć przy obciążeniach w których asymetria prądowa jest nieunikniona ze względu na ich charakter pracy (np. piece łukowe) należy asymetrię napięciową dobrać tak, aby moduł:  $|\hat{\epsilon}_u - \hat{\epsilon}_i|$  był możliwie mały.

Kładziemy:

$$\hat{\epsilon}_\psi \stackrel{\text{df}}{=} \frac{\hat{I}_{\psi 2}}{\hat{I}_{\psi 1}} \quad (63)$$

Na podstawie (58) zachodzi:

$$\hat{\epsilon}_u \hat{\epsilon}_\psi = -1 \quad (64)$$

Z powyższego wyniku przede wszystkim, że:

$$U_1 I_{\psi 1} = U_2 I_{\psi 2} \quad (65)$$

Relacja (65) wykazuje w jaki sposób są zależne od siebie wartości skuteczne składowych symetrycznych zgodnej i przeciwnej kolejności faz prądów asymetrii. Wynika z niej, że w układach, w których  $U_1$  i  $U_2$  są sztywno utrzymywane, wielkości te są proporcjonalne do siebie i że każdej zmianie jednej z nich odpowiada proporcjonalna zmiana drugiej. Z drugiej strony widać, że stosunek składowych symetrycznych  $I_{\psi 2}$  i  $I_{\psi 1}$  jest odwrotnie proporcjonalny do współczynnika asymetrii napięciowej  $\epsilon_u$ . Każda jego zmiana pociąga ściśle określoną zmianę sto-

sunku:  $\frac{I_{\psi 2}}{I_{\psi 1}}$ . W granicznym przypadku gdy  $U_2 = 0$  i  $U_1 \neq 0$

otrzymamy:  $I_{\psi 1} = 0$ .

Położmy:  $\hat{U}_k = U_k e^{j\beta_k}$ ,  $\hat{I}_{\psi k} = I_{\psi k} e^{j\alpha_{\psi k}}$ ,  $k = 1, 2$

Na podstawie (64) otrzymamy:

$$\beta_2 - \alpha_{\psi 2} = \pi + (\beta_1 - \alpha_{\psi 1}) \quad (66)$$

Z powyższej relacji wynika, że kąt zawarty między składowymi symetrycznymi prądami asymetrii zależy od kąta zawartego między składowymi symetrycznymi  $\hat{U}_2$  i  $\hat{U}_1$ .

Gdy kąt między  $\hat{U}_2$  i  $\hat{U}_1$  jest duży, to bezwzględna wartość kąta między  $\hat{I}_{\psi 2}$  i  $\hat{I}_{\psi 1}$  jest mała i odwrotnie.



Widzimy także, że gdy  $\hat{U}_1$  wyprzedza  $\hat{U}_2$  (na płaszczyźnie Gaussa) to  $\hat{I}_1$  opóźnia się względem  $\hat{I}_{\psi 2}$ , czyli że jeśli prąd  $\hat{I}_{\psi 1}$  posiada charakter indukcyjny, to prąd  $\hat{I}_{\psi 2}$  posiada charakter pojemnościowy i vice versa.

Dla symbolicznego współczynnika symetrii w rozważonym układzie otrzymamy:

$$\hat{\delta}_S = \hat{\delta}_1 + \hat{\delta}_2$$

gdzie:

$$\hat{\delta}_1 = \frac{U_1 I_1}{U_{sm} I_{sm}} e^{j\theta_1}$$

$$\hat{\delta}_2 = \frac{U_2 I_2}{U_{sm} I_{sm}} e^{j\theta_2}$$

stąd:

$$\hat{\delta}_S = \frac{e^{j\theta_1} + \epsilon_u \epsilon_i e^{j\theta_2}}{\sqrt{1 + \epsilon_u^2} \cdot \sqrt{1 + \epsilon_i^2}} \quad (67)$$

Współczynnik mocy  $\lambda$  obliczymy przy pomocy relacji:

$$\lambda = \frac{\operatorname{Re} \{ \hat{\delta}_S \}}{\delta_S}$$

czyli:

$$\lambda = \frac{\cos \theta_1 + \epsilon_u \epsilon_i \cos \theta_2}{\cos(\theta_1 - \psi) + \epsilon_u \epsilon_i \cos(\theta_2 - \psi)} \quad (68)$$

Relacja (68) podaje zależność zachodzącą między współczynnikami asymetrii napięciowej i prądowej a współczynnikiem mocy. W układach, w których asymetria napięciowa nie występuje  $\hat{U}_2$  jest równe zeru.

W tym przypadku  $I_{\psi 1} = 0$ , lecz  $I_{\psi 2}$  może być różne od zera i zachodzi

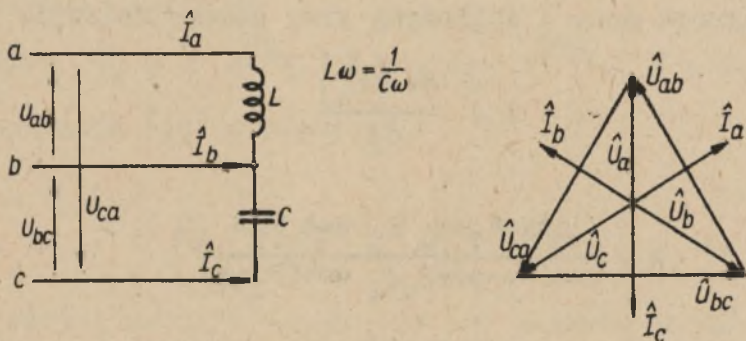
$$\hat{I}_{\psi 2} = \hat{I}_2 \quad (69)$$

Ogólnie, w tym przypadku relacje (56) redukują się do postaci:

$$\hat{I}_1 = \hat{Y} \hat{U}_1 \quad (70)$$

$$\hat{I}_2 = \hat{I}_{\psi 2}$$

Moc asymetrii K pobierana przez taki układ jest równa iloczynowi:  $3U_1 I_{\psi 2} = 3U_1 I_2$  i w przypadku, gdy symboliczna moc pozorna  $\hat{S}$  pobierana przez układ jest równa zero (por. układ podany na rys.5) jest ona jedyną mocą występującą w układzie.



Rys. 5

IV. Wpływ kompensacji mocy biernej na pracę układu

Założmy, że całkowita moc bierna  $Q$  pobierana przez układ posiada charakter indukcyjny tj. zakładamy, że:  $Q > 0$ . Założmy dalej, że kompensację mocy  $Q$  chcemy uzyskać przy pomocy kondensatora statycznego, 3-fazowego i symetrycznego podłączonego równolegle do układu, tak jak to na ogół występuje w praktyce. Zaletą posłużenia się takim układem jest to, że układ taki ze względu na swoją symetrię nie "pobiera" mocy asymetrii  $K$  i dlatego, na podstawie twierdzenia na str. 38 (por. (34)) nie powoduje zmiany prądów asymetrii  $I_{\psi k}$  obciążających poszczególne fazy. Niech  $C$  jest szukaną pojemnością jednej fazy takiego kondensatora połączzonego w gwiazdę. Otrzymamy (por. [6]):

$$I_{ck}^2 = (C\omega)^2 U_k^2, \quad k = a, b, c$$

stąd:

$$\sqrt{\sum_k I_{ck}^2} = C\omega \cdot U_m \quad (71)$$

$$I_{qmc} = C\omega \cdot U_m$$

Lecz (na podstawie (37)):

$$I_{qmc} = \frac{Q_c}{U_m}$$

czyli:

$$C = \frac{Q_c}{U_m^2 \omega} \quad (72)$$

gdzie  $Q_c$  jest całkowitą mocą bierną pobieraną przez kondensator. Jeśli położymy:  $|Q_c| = Q$  z wzoru (72)

otrzymamy szukaną pojemność  $C$  jednej fazy kondensatora, którego podłączenie spowoduje całkowitą kompensację mocy biernej. Łatwo też przy pomocy podobnego rozumowania obliczyć pojemność  $C'$  potrzebną do kompensacji częściowej. Otrzymamy:

$$C' = \frac{P (\operatorname{tg} \psi - \operatorname{tg} \psi')}{U_m^2 \omega} \quad (73)$$

gdzie:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{Q}{P}, \quad \operatorname{tg} \psi' = \frac{Q - |Q_c|}{P}$$

W układach zrównoważonych zasilanych symetrycznie relacje (72) i (73) sprowadzają się do ogólnie znanych zależności przy pomocy których obliczamy szukane pojemności  $C$  ewentualnie  $C'$ . Gdy układ jest zrównoważony, lecz napięcie zasilania jest niesymetryczne, wprowadzenie symetrycznego kondensatora obliczonego przy pomocy relacji (72) lub (73) do układu powoduje kompensację mocy biernej (całkowitą lub częściową) a cały "wypadkowy" układ pozostaje nadal układem zrównoważonym. Stąd, tak przeprowadzona kompensacja jest uzasadniona i całkowicie spełnia swoje zadanie. Powstaje jednak pytanie: jak wpływa tak przeprowadzona kompensacja mocy biernej na pracę układu niezrównoważonego?

Aby odpowiedzieć na to pytanie trzeba skutek kompensacji mocy biernej rozpatrywać w dwóch aspektach. Trzeba rozważyć po pierwsze: co dzieje się z globalną symetrią układu wypadkowego pod wpływem kompensacji mocy biernej, oraz po drugie: jak wpływa ona na rozkład mocy w poszczególnych fazach. Na pierwsze z tych pytań najprościej można odpowiedzieć wychodząc z rozpatrywania

stosunku  $\frac{I_{\psi m}}{I_m}$  (por. (62)) dla układu przed i po kompensacji mocy  $Q$ .

Jak zauważyliśmy, kompensacja mocy  $Q$  przy pomocy kondensatora symetrycznego nie wpływa na zmianę wielkości  $I_{\psi m}$ . Pociąga ona jednak zmniejszenie

wielkości  $I_m$ , co jest oczywiste ponieważ wypadkowe prądy  $I_{qk}$  w każdej fazie są równe zeru, a wielkości  $I_{pk}$  i  $I_{\psi k}$  pozostają bez zmiany. Stąd, występująca w skompensowanym układzie wielkość  $I'_m$  jest mniejsza od  $I_m$  układu nieskompensowanego. Czyli:

$$\frac{I_{\psi m}}{I_m} < \frac{I_{\psi m}}{I'_m} \quad (74)$$

Oznacza to, że globalna asymetria układu się powiększyła w tym sensie, iż zwiększył się wpływ mocy asymetrii  $K$  na pracę układu. Rozważmy obecnie na przykładzie, na co wpływa wzrost stosunku (74) w układzie. Rozważmy mianowicie układ niezerównoważony zasilany sztywnie utrzymanym napięciem symetrycznym o zgodnej kolejności faz (por. przykład 1).

Dla takiego układu zachodzi:

$$\begin{aligned} \hat{I}_1 &= \hat{Y}\hat{U}_1 = \left[ \left( \frac{P}{U_1^2} \right) - j \left( \frac{Q}{U_1^2} \right) \right] \hat{U}_1 \\ \hat{I}_2 &= \hat{I}_{\psi 2} \end{aligned} \quad (75)$$

oraz:

$$\frac{I_{\psi m}}{I_m} = \frac{\epsilon_i}{\sqrt{1 + \epsilon_i^2}} \quad (76)$$

Wprowadzając do układu kondensator symetryczny kompensujemy wielkość:  $-j \frac{Q}{U_1^2} \hat{U}_1$ , a tym samym zmniejszamy

wartość skuteczną prądu  $\hat{I}_1$ , tj. zmniejszamy moduł składowych symetrycznych zgodnych kolejności faz prądów przewodnych przy czym pozostawiamy całkowicie bez zmiany ich składowe symetryczne przeciwnej kolejności faz:  $\hat{I}_{2k}$  ( $k = a, b, c$ ).

Dlatego współczynnik asymetrii prądowej  $\epsilon_1$  w układzie po kompensacji jest większy. Tak więc w rozpatrywanym przypadku zwiększenie się stosunku:  $\frac{I_{\psi m}}{I_m}$  jest wynikiem wzrostu współczynnika asymetrii prądowej układu i odwrotnie wzrost stosunku:  $\frac{I_{\psi m}}{I_m}$  oznacza powiększenie się asymetrii prądowej. (W przybliżeniu:  $\frac{I_{\psi m}}{I_m} \approx \epsilon_1$  i stąd łatwo w wielu ważnych układach praktycznych rozważyć wpływ jednej wielkości na drugą).  
 Przed kompensacją dla współczynnika asymetrii prądowej, otrzymamy:

$$\epsilon_1 = \frac{I_2}{I_1} = \frac{I_2 U_1}{P \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \psi}} = \left(\frac{K}{P}\right) \cos \psi \quad (77)$$

Dla współczynnika asymetrii prądowej  $\epsilon_1$ , po kompensacji (częściowej) zachodzi:

$$\epsilon'_1 = \frac{I_2}{I_1'} = \frac{U_1 I_2}{P \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \psi'}} = \left(\frac{K}{P}\right) \cos \psi' \quad (78)$$

stąd:

$$\frac{\epsilon'_1}{\epsilon_1} = \frac{\cos \psi'}{\cos \psi} \quad (79)$$

Lecz (por. (3)):

$\cos \psi = \lambda =$  wsp. mocy układu przed kompensacją

$\cos \psi' = \lambda' =$  wsp. mocy układu po kompensacji

czyli:

$$\frac{\Delta \epsilon_1}{\epsilon_1} = \frac{\Delta \lambda}{\lambda}$$

$$(\Delta \epsilon_1 = \epsilon_1' - \epsilon_1; \quad \Delta \lambda = \lambda' - \lambda) \quad (80)$$

Reasumując widzimy, że:

kompensacja mocy biernej poprawia współczynnik mocy układu i powoduje zwiększenie go do wartości:  $\lambda' = \cos \psi'$ , lecz wraz z wzrostem współczynnika mocy pogarsza się symetria prądowa w układzie, a przyrost asymetrii prądowej jest proporcjonalny do przyrostu współczynnika mocy.

Rozważmy teraz układ niezerównoważony zasilany napięciem niesymetrycznym lecz niezawierającym składowych zerowej kolejności faz  $\hat{U}_0 = 0$ . (por. przykłady 2 i 3). Równania tego układu przyjmują postać:

$$\hat{I}_1 = \hat{Y} \hat{U}_1 + \hat{I}_{\psi 1} = \left[ \frac{P}{U_m^2} - j \frac{Q}{U_m^2} \right] \hat{U}_1 + \hat{I}_{\psi 1} \quad (81)$$

$$\hat{I}_2 = \hat{Y} \hat{U}_2 + \hat{I}_{\psi 2} = \left[ \frac{P}{U_m^2} - j \frac{Q}{U_m^2} \right] \hat{U}_2 + \hat{I}_{\psi 2}$$

Podłączając (równolegle) symetryczny kondensator kompensujący częściowo moc bierną, otrzymamy dla układu skompensowanego:

$$\hat{I}_1' = \left[ \frac{P}{U_m^2} - j \frac{Q'}{U_m^2} \right] \hat{U}_1 + \hat{I}_{\psi 1} \quad (82)$$

$$\hat{I}_2' = \left[ \frac{P}{U_m^2} - j \frac{Q'}{U_m^2} \right] \hat{U}_2 + \hat{I}_{\psi 2}$$

stąd:

$$\hat{I}_1' - \hat{I}_1 = j \frac{\Delta Q}{U_m^2} \hat{U}_1 \quad (83)$$

$$\hat{I}_2' - \hat{I}_2 = j \frac{\Delta Q}{U_m^2} \hat{U}_2$$

gdzie:  $\Delta Q = Q - Q'$

tzn., że  $\Delta Q$  jest równe ubytkowi mocy biernej, który wystąpi w układzie pod wpływem kompensacji symetrycznej. W układzie w którym kompensacja nie występuje:  $\Delta Q = 0$ , a w układzie, w którym kompensacja mocy biernej jest całkowita:  $\Delta Q = Q$ .

Położmy:

$$\Delta B = \frac{\Delta Q}{U_m^2}$$

Otrzymamy:

$$\hat{I}_1' = \hat{I}_1 + j \hat{U}_1 \Delta B$$

$$\hat{I}_2' = \hat{I}_2 + j \hat{U}_2 \Delta B$$

Stąd:

$$\frac{\hat{I}_2'}{\hat{I}_1'} = \frac{\hat{I}_2 (1 + j \frac{\hat{U}_2}{\hat{I}_2} \Delta B)}{\hat{I}_1 (1 + j \frac{\hat{U}_1}{\hat{I}_1} \Delta B)}$$

Czyli:

$$\hat{\epsilon}_i' = \hat{\epsilon}_i \left( \frac{1 + j \hat{Z}_2 \Delta B}{1 + j \hat{Z}_1 \Delta B} \right) \quad (84)$$

gdzie:

$$\hat{Z}_k = \frac{\hat{U}_k}{\hat{I}_k}, \quad k = 1, 2$$



Równanie (84) ma podstawowe znaczenie dla określenia warunków pracy układu po jego kompensacji. Jak widać, wyraża ono związek jaki zachodzi między starym (tj. występującym przed kompensacją) współczynnikiem asymetrii prądowej, a nowym współczynnikiem  $\hat{\epsilon}'_1$ , występującym po kompensacji mocy bierniej w zależności od wpływu kompensacji na zmniejszanie się poboru mocy bierniej przez układ. Formalnie przyjmując  $\Delta B$  za parametr zmienny równanie (84) reprezentuje okrąg odwzorowany na płaszczyźnie Gaussa (por. przykłady 2 i 3) o współrzędnych środka:

$$\hat{M} = \hat{\epsilon}'_1 \left( \frac{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2}{2 \operatorname{Re} \{ \hat{Z}_1 \}} \right) \quad (85)$$

i o promieniu:

$$R = \frac{\epsilon_1 |\hat{Z}_2 - \hat{Z}_1|}{2 \operatorname{Re} \{ \hat{Z}_1 \}} \quad (86)$$

Zakładając, że  $\Delta B \rightarrow \infty$ , otrzymamy:

$$\hat{\epsilon}'_{u\infty} = \hat{\epsilon}_u \quad (87)$$

W praktyce oznacza to, że do danego niezrównoważonego układu podłączony został układ symetryczny pobierający taką moc bierną, iż w porównaniu z nią pobierana moc  $Q$  układu niezrównoważonego jest pomijalnie mała. Układ taki zachowuje się naturalnie tak jak układ zrównoważony i moc  $K$  pobierana przez ten układ jest pomijalnie mała.

Rozważając wpływ kompensacji mocy bierniej na pracę układu na podstawie przykładów 2 i 3 widzimy jaką rolę odgrywa równanie (84). Z przykładów tych wynika, że kompensacja mocy bierniej w różny sposób może wpłynąć na zmianę współczynnika asymetrii prądowej. I tak np. w odniesieniu do przykładu 2 widać, że w układzie skompensowanym przyrost asymetrii prądowej jest nieznaczny.

Zupełnie inaczej w przykładzie 3, gdzie nawet nieznaczna poprawa współczynnika mocy pociąga za sobą stosunkowo duży wzrost asymetrii prądowej.

Wykresy kołowe zmian współczynnika asymetrii prądowej dla przykładów 2 i 3 przedstawione są na rys.11 i 13.

Wynika stąd wniosek ogólny, że przed przystąpieniem do zaprojektowania kondensatora kompensującego dla danego układu należy sporządzić wykres kołowy odwzorowujący przebieg zmian współczynnika asymetrii prądowej w myśl relacji (84).

## V. P r z y k ł a d y

### P r z y k ł a d 1

Dane:

$$R_a = 3 \Omega, \quad \omega L_a = 9 \Omega$$

$$\frac{1}{\omega C_b} = 2 \Omega, \quad R_c = 10 \Omega$$

$$\hat{U}_a = 500 e^{j90^\circ} \text{ V}$$

$$\hat{U}_b = 500 e^{-j30^\circ} \text{ V}$$

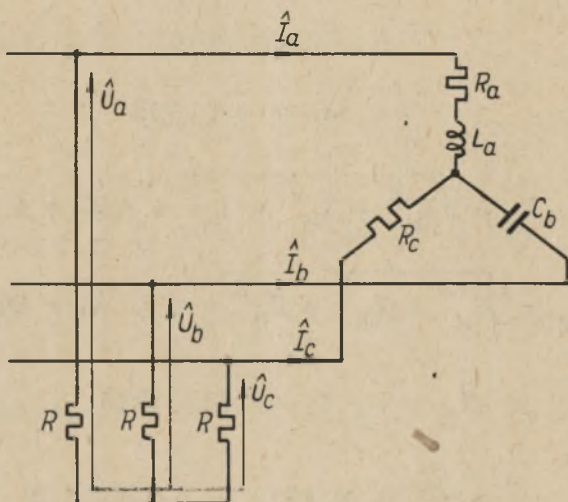
$$\hat{U}_c = 500 e^{-j150^\circ} \text{ V}$$

Przeprowadźmy analizę układu podanego na rys.6

$$\hat{Y}_a = \frac{1}{R_a + j \omega L_a} = 0,0333 - j 0,1 \text{ S}$$

$$\hat{Y}_b = j \omega C_b = 0,5 \text{ S}$$

$$\hat{Y}_c = \frac{1}{R_c} = 0,1 \text{ S}$$



Rys. 6

$$\hat{V}_o = \frac{\hat{U}_a \hat{Y}_a + \hat{U}_b \hat{Y}_b + \hat{U}_c \hat{Y}_c}{\hat{Y}_a + \hat{Y}_b + \hat{Y}_c} = 567 - j 140 \text{ V}$$

$$\hat{I}_a = (\hat{U}_a - \hat{V}_o) \hat{Y}_a = 45,1 + j 78 \text{ A}$$

$$\hat{I}_b = (\hat{U}_b - \hat{V}_o) \hat{Y}_b = 55 - j 67 \text{ A}$$

$$\hat{I}_c = (\hat{U}_c - \hat{V}_o) \hat{Y}_c = -100 - j 11 \text{ A}$$

$$\hat{S} = \hat{U}_a \hat{I}_a + \hat{U}_b \hat{I}_b + \hat{U}_c \hat{I}_c = 125,6 + j 58,0 = 138,5 e^{j 24^\circ 55'} \text{ kVA}$$

$$S = 138,5 \text{ kVA}$$

$$\varphi = 24^\circ 55'$$

$$P = 125,6 \text{ kW}$$

$$Q = 58,0 \text{ kVAR}$$

$$\lambda = \cos \psi = 0,908$$

$$I_m = \sqrt{I_a^2 + I_b^2 + I_c^2} = 160,4 \text{ A}$$

$$U_m = \sqrt{U_a^2 + U_b^2 + U_c^2} = 500 \sqrt{3} = 866 \text{ V}$$

$$P_m = U_m I_m = 143,2 \text{ kVA}$$

$$\hat{Y} = \frac{\hat{S}}{U_m} = 0,1675 - j 0,0774 \text{ S}$$

$$G = 0,1675 \text{ S}$$

$$B = 0,0774 \text{ S}$$

$$\hat{I}_{ia} = \hat{Y} \hat{U}_a = 38,7 + j 83,9 \text{ A}$$

$$\hat{I}_{ib} = \hat{Y} \hat{U}_b = 53,2 - j 75,5 \text{ A}$$

$$\hat{I}_{ic} = \hat{Y} \hat{U}_c = -91,9 - j 8,4 \text{ A}$$

$$\hat{I}_{\psi a} = \hat{I}_a - \hat{I}_{ia} = 6,45 - j 5,9 \text{ A}$$

$$\hat{I}_{\psi b} = \hat{I}_b - \hat{I}_{ib} = 1,75 + j 8,45 \text{ A}$$

$$\hat{I}_{\psi c} = \hat{I}_c - \hat{I}_{ic} = -8,15 - j 2,65 \text{ A}$$

$$I_{\psi m} = \sqrt{I_{\psi a}^2 + I_{\psi b}^2 + I_{\psi c}^2} = 14,93 \text{ A}$$

$$\frac{I_{\psi m}}{I_m} = 0,093$$

$$K = U_m I_{\psi m} = 12,93 \text{ kVA}$$

Dla składowych symetrycznych mamy:

$$\hat{U}_1 = \hat{U}_a, \quad \hat{U}_2 = 0, \quad \hat{U}_0 = 0, \quad \hat{I}_{\psi 1} = 0$$

$$\hat{I}_1 = \hat{Y} \hat{U}_1 = \hat{Y} \hat{U}_a = 38,7 + j 83,7 \text{ A}$$

$$\hat{I}_2 = \hat{I}_{\psi 2} = \frac{1}{3} (\hat{I}_a + \hat{\alpha}^2 \hat{I}_b + \hat{\alpha} \hat{I}_c) = 6,36 - j 5,7 \text{ A}$$

Łatwo sprawdzić, że moc asymetrii:  $K = 3 U_1 I_2 = 12,9 \text{ kVA}$

$$\hat{\epsilon}_1 = \frac{\hat{I}_2}{\hat{I}_1} = 0,0927 e^{-j107^\circ 5'}$$

Przeprowadźmy całkowitą kompensację mocy biernej  $Q$  przy pomocy symetrycznego układu trzech kondensatorów  $C_q$  połączonych w gwiazdę.

$$C_q = \frac{Q}{U_m^2 \omega} = 246 \mu\text{F}$$

Po kompensacji

$$\hat{I}_1' = G \hat{U}_1 = j 83,9 \text{ A}$$

$$\hat{I}_2' = \hat{I}_2$$

$$\epsilon_1' = \epsilon_1 \frac{\cos \psi'}{\cos \psi}$$

ale  $\cos \psi' = 1$  dla całkowitej kompensacji,

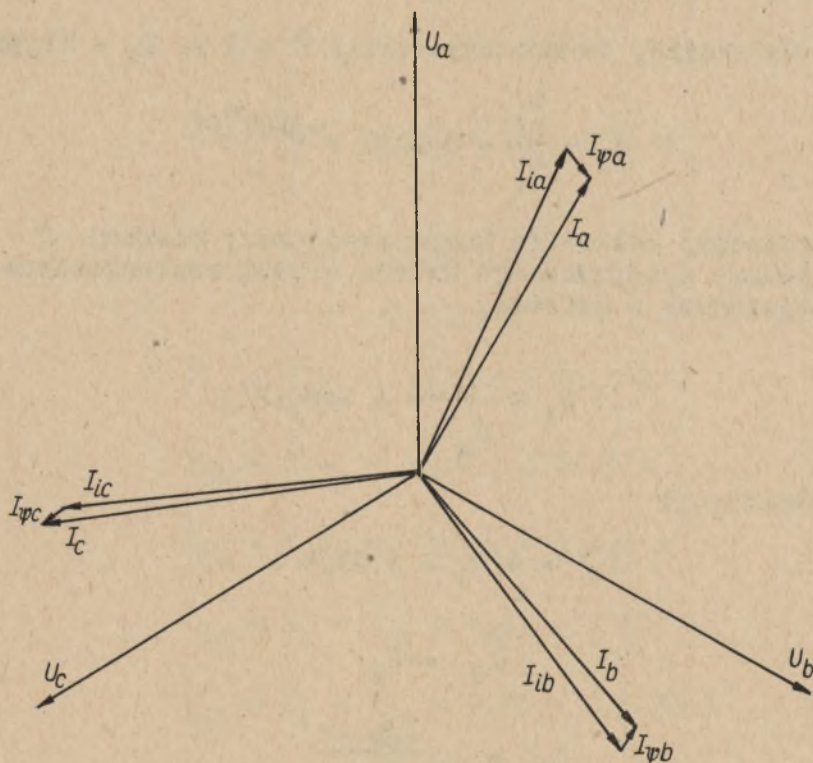
więc:

$$\epsilon_1' = \frac{\epsilon_1}{\cos \psi} = \epsilon_1 \frac{S}{P} = 0,1485$$

czyli przyrost współczynnika asymetrii  $\Delta\epsilon_1$  wynosi

$$\Delta\epsilon_1 = \epsilon_1' - \epsilon_1 = 0,0135$$

Wykres wektorowy prądów i napięć rozpatrywanego układu jest przedstawiony na rys.7



Rys. 7

Przykład 2

Dane:

$$R_a = 10 \Omega$$

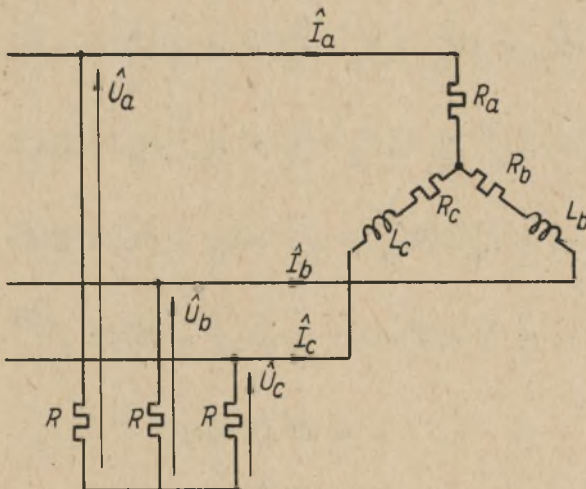
$$R_b = 6 \Omega, \quad \omega L_b = 6 \Omega$$

$$R_c = 6 \Omega, \quad \omega L_c = 8 \Omega$$

$$\hat{U}_a = 589 e^{j85^\circ 5'} \text{ V}$$

$$\hat{U}_b = 417,5 e^{-j36^\circ 55'} \text{ V}$$

$$U_c = 510 e^{-j138^\circ 40'} \text{ V}$$



Rys. 8

Przeprowadźmy analizę układu podanego na rys.8

$$\hat{Y}_a = \frac{1}{R_a} = 0,1 \text{ S}$$

$$\hat{Y}_b = \frac{1}{R_b + j \omega L_b} = 0,0833 - j 0,0833 \text{ S}$$

$$\hat{Y}_c = \frac{1}{R_c + j \omega L_c} = 0,06 - j 0,08 \text{ S}$$

$$\hat{V}_o = \frac{\hat{U}_a \hat{Y}_a + \hat{U}_b \hat{Y}_b + \hat{U}_c \hat{Y}_c}{\hat{Y}_a + \hat{Y}_b + \hat{Y}_c} = -147,3 - j 13,78 \text{ V}$$

$$\hat{I}_a = (\hat{U}_a - \hat{V}_o) \hat{Y}_a = 19,7 + j 60,0 \text{ A}$$

$$\hat{I}_b = (\hat{U}_b - \hat{V}_o) \hat{Y}_b = 20,3 - j 59,6 \text{ A}$$

$$\hat{I}_c = (\hat{U}_c - \hat{V}_o) \hat{Y}_c = -40,0 - j 0,49 \text{ A}$$

$$P = I_a^2 R_a + I_b^2 R_b + I_c^2 R_c = 73,3 \text{ kW}$$

$$Q = I_b^2 \omega L_b + I_c^2 \omega L_c = 36,6 \text{ kVAR}$$

$$\hat{S} = P + j Q = 71,3 + j 36,6 = 81,8 e^{j26^\circ 30'} \text{ kVA}$$

$$S = 81,8 \text{ kVA}$$

$$\psi = 26^\circ 30'$$

$$\lambda = \cos \psi = 0,896$$

$$I_m = \sqrt{I_a^2 + I_b^2 + I_c^2} = 97,7 \text{ A}$$



$$U_m = \sqrt{U_a^2 + U_b^2 + U_c^2} = 883 \text{ V}$$

$$P_m = U_m I_m = 86,3 \text{ kVA}$$

$$\hat{Y} = \frac{\check{S}}{U_m^2} = 0,0938 - j 0,0468 \text{ S}$$

$$G = 0,0938 \text{ S}$$

$$B = 0,0468 \text{ S}$$

$$\hat{I}_{ia} = \hat{Y} \hat{U}_a = 32,2 + j 52,7 \text{ A}$$

$$\hat{I}_{ib} = \hat{Y} \hat{U}_b = 19,5 - j 39,0 \text{ A}$$

$$\hat{I}_{ic} = \hat{Y} \hat{U}_c = -51,7 - j 13,7 \text{ A}$$

$$\hat{I}_{pa} = G \hat{U}_a = 4,69 + j 55 \text{ A}$$

$$\hat{I}_{pb} = G \hat{U}_b = 31,2 - j 23,4 \text{ A}$$

$$\hat{I}_{pc} = G \hat{U}_c = -35,9 - j 31,6 \text{ A}$$

$$\hat{I}_{qa} = B \hat{U}_a = 2,34 + j 27,5 \text{ A}$$

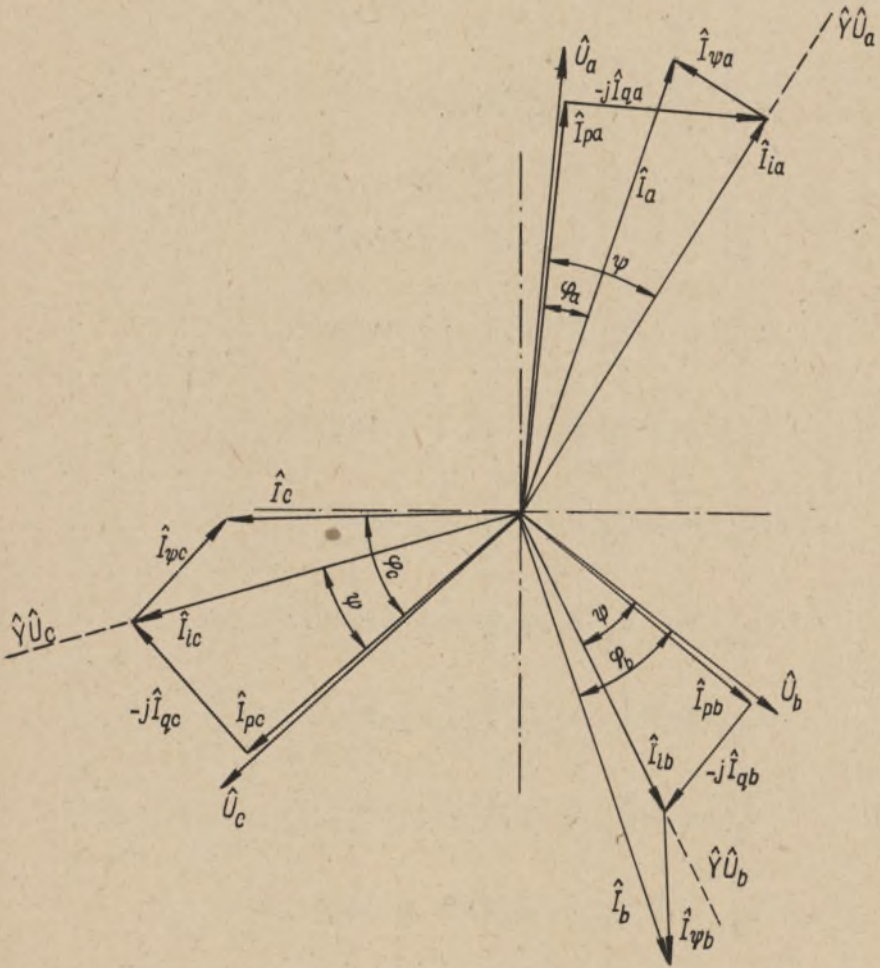
$$\hat{I}_{qb} = B \hat{U}_b = 15,58 - j 11,71 \text{ A}$$

$$\hat{I}_{qc} = B \hat{U}_c = -17,93 - j 15,75 \text{ A}$$

$$\hat{I}_{\varphi a} = \hat{I}_a - \hat{I}_{ia} = -12,5 + j 7,3 \text{ A}$$

$$\hat{I}_{\psi b} = \hat{I}_b - \hat{I}_{ib} = 0,8 - j 20,6 \text{ A}$$

$$\hat{I}_{\psi c} = \hat{I}_c - \hat{I}_{ic} = 11,7 + j 13,2 \text{ A}$$



Rys. 9

Wykres wektorowy prądów i napięć rozpatrywanego układu jest przedstawiony na rys.9

$$I_{\psi m} = \sqrt{I_{\psi a}^2 + I_{\psi b}^2 + I_{\psi c}^2} = 30,9 \text{ A}$$

$$K = U_m I_{\psi m} = 27,3 \text{ kVA}$$

Globalna asymetria układu:

$$\frac{I_{\psi m}}{I_m} = 0,316$$

Dla składowych symetrycznych, otrzymamy:

$$\hat{U}_0 = \frac{1}{3} (\hat{U}_a + \hat{U}_b + \hat{U}_c) = 0 \text{ V,}$$

$$\hat{U}_1 = \frac{1}{3} (\hat{U}_a + \hat{\alpha} \hat{U}_b + \hat{\alpha}^2 \hat{U}_c) = 500 e^{j90^\circ} \text{ V}$$

$$\hat{U}_2 = \frac{1}{3} (\hat{U}_a + \hat{\alpha}^2 \hat{U}_b + \hat{\alpha} \hat{U}_c) = 100 e^{j60^\circ} \text{ V}$$

$$\hat{I}_1 = \frac{1}{3} (\hat{I}_a + \hat{\alpha} \hat{I}_b + \hat{\alpha}^2 \hat{I}_c) = 26,9 + j 47,5 \text{ A}$$

$$\hat{I}_2 = \frac{1}{3} (\hat{I}_a + \hat{\alpha}^2 \hat{I}_b + \hat{\alpha} \hat{I}_c) = -7,25 + j 12,62 \text{ A}$$

$$\hat{I}_{\psi 1} = \hat{I}_1 - \hat{Y} \hat{U}_1 = 3,55 + j 0,55 \text{ A}$$

$$\hat{I}_{\psi 2} = \hat{I}_2 - \hat{Y} \hat{U}_2 = -15,99 + j 6,84 \text{ A}$$

Na podstawie wzoru (65) sprawdzamy:

$$U_1 I_{\psi 1} = U_2 I_{\psi 2} = 1785 \text{ VA}$$

$$\hat{I}_{11} = \hat{Y} \hat{U}_1 = 23,4 + j 46,9 \text{ A}$$

$$\hat{I}_{12} = \hat{Y} \hat{U}_2 = 8,74 + j 5,78 \text{ A}$$

$$\hat{I}_{p1} = G \hat{U}_1 = j 46,9 \text{ A}$$

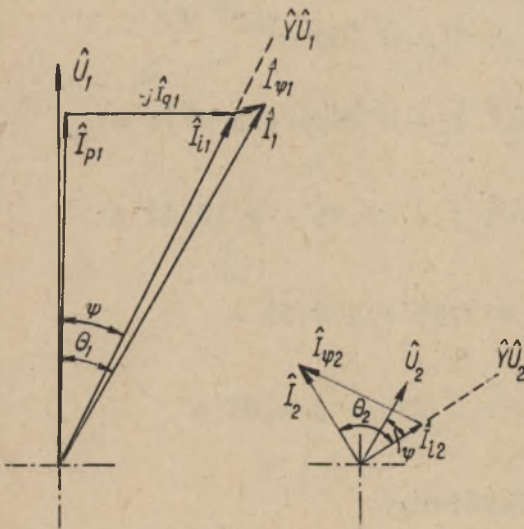
$$\hat{I}_{p2} = G \hat{U}_2 = 4,69 + j 8,12 \text{ A}$$

$$\hat{I}_{q1} = B \hat{U}_1 = j 23,4 \text{ A}$$

$$\hat{I}_{q2} = B \hat{U}_2 = 2,34 + j 4,05 \text{ A}$$

Wykres wektorowy składowych symetrycznych prądów i napięć jest przedstawiony na rys. 10.

Współczynnik asymetrii prądowej



Rys. 10

$$\hat{E}_1 = \frac{\hat{I}_2}{\hat{I}_1} =$$

$$= -0,252 + j 0,0904 =$$

$$= 0,266 e^{j160^{\circ}7'}$$

Podczas kompensacji mocy biernej  $Q$  przy zmianach pojemności  $C_q$  współczynnik asymetrii zmienia się w myśl wzoru (84) po okręgu

$$\hat{E}'_1 = \hat{E}_1 \frac{1+j \hat{Z}_2 \Delta B}{1+j \hat{Z}_1 \Delta B},$$

$$\text{gdzie: } \Delta B = \omega C_q = \frac{\Delta Q}{U_m^2}$$

W rozpatrywanym układzie:

$$\hat{Z}_1 = \frac{\hat{U}_1}{\hat{I}_1} = 9,02 + j 1,58 \Omega$$

$$\hat{Z}_2 = \frac{\hat{U}_2}{\hat{I}_2} = -6,87 + j 0,197 \Omega$$

Obliczmy współrzędne środka okręgu oraz jego promień (por. wzory (85), (86)):

$$\hat{M} = \hat{E}_1 \frac{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2}{2 \operatorname{Re}\{\hat{Z}_1\}} = -0,0209 + j 0,0301$$

$$R = \frac{E_1 |\hat{Z}_2 - \hat{Z}_1|}{2 \operatorname{Re}\{\hat{Z}_1\}} = 0,227$$

okrąg ten przedstawiony jest na rys.11.

Obliczmy punkt odpowiadający całkowitej kompensacji mocy biernej dla  $\Delta B = B = 0,468 \text{ S}$ , co odpowiada pojemności

$$C_q = \frac{q}{U_m^2 \omega} = 148,9 \text{ } \mu\text{F}$$

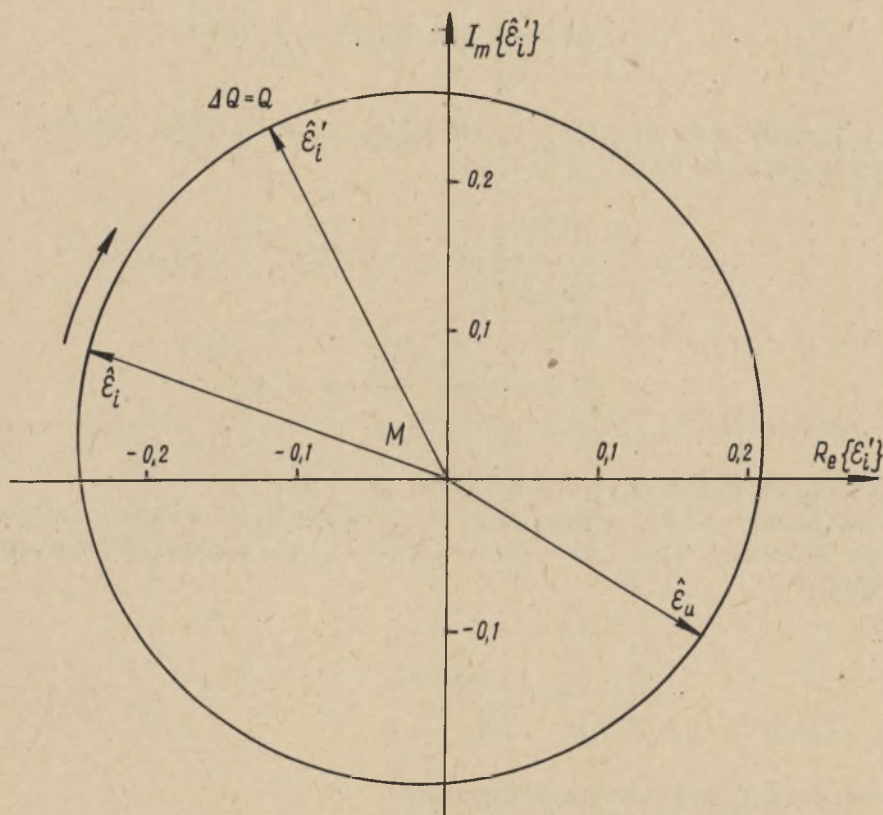
wtedy na podstawie wzoru (84)

$$\hat{E}'_1 = -0,128 + j 0,2412$$

Dla  $\Delta B \rightarrow \infty$  otrzymujemy

$$\hat{E}'_{1\infty} = \hat{E}_u = \frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} = 0,2 e^{-j30^\circ}$$

$\hat{\varepsilon}_1$ ,  $\hat{\varepsilon}'_1$  przy całkowitej kompensacji mocy biernej oraz  $\hat{\varepsilon}_u$  naniesione są na rys.11. Z rysunku widać, że w całym zakresie kompensacji  $\varepsilon_1$  praktycznie się nie zmienia.



Rys. 11

Przykład 3

Dane:

$$R_a = 3\Omega, \quad \omega L_a = 9\Omega$$

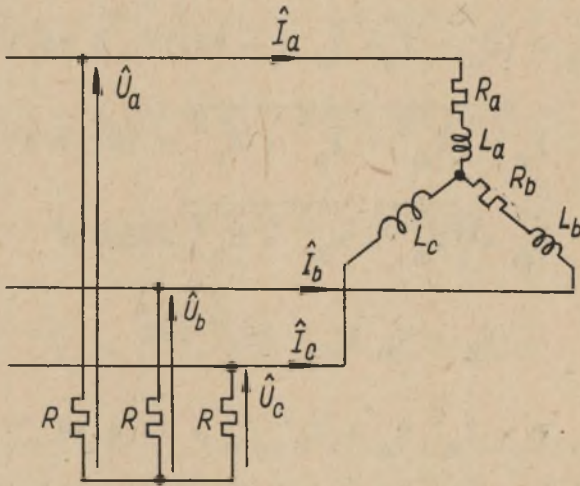
$$R_b = 5\Omega, \quad \omega L_b = 5\Omega$$

$$\omega L_c = 10 \Omega$$

$$\hat{U}_a = 589 e^{j85^\circ 5'} \text{ V}$$

$$\hat{U}_b = 417,5 e^{-j36^\circ 55'} \text{ V}$$

$$\hat{U}_c = 510 e^{-j138^\circ 40'} \text{ V}$$



Rys. 12

Przeprowadźmy analizę układu podanego na rys.12

$$\hat{Y}_a = \frac{1}{R_a + j \omega L_a} = 0,0333 - j 0,1 \text{ S}$$

$$\hat{Y}_b = \frac{1}{R_b + j \omega L_b} = 0,1 - j 0,1 \text{ S}$$

$$\hat{Y}_c = \frac{1}{j \omega L_c} = -j 0,1 \text{ S}$$

$$\hat{V}_o = \frac{\hat{U}_a \hat{Y}_a + \hat{U}_b \hat{Y}_b + \hat{U}_c \hat{Y}_c}{\hat{Y}_a + \hat{Y}_b + \hat{Y}_c} = 58,3 + j 90,5 \text{ V}$$

$$\hat{I}_a = (\hat{U}_a - \hat{V}_o) \hat{Y}_a = 49,3 + j 17,36 \text{ A}$$

$$\hat{I}_b = (\hat{U}_b - \hat{V}_o) \hat{Y}_b = -6,58 - j 61,5 \text{ A}$$

$$\hat{I}_c = (\hat{U}_c - \hat{V}_o) \hat{Y}_c = -42,7 + j 44,1 \text{ A}$$

$$I_m = \sqrt{I_a^2 + I_b^2 + I_c^2} = 101,6 \text{ A}$$

$$U_m = \sqrt{U_a^2 + U_b^2 + U_c^2} = 883 \text{ V}$$

$$P_m = U_m I_m = 89,7 \text{ kVA}$$

$$P = I_a^2 R_a + I_b^2 R_b = 27,4 \text{ kW}$$

$$Q = I_a^2 \omega L_a + I_b^2 \omega L_b + I_c^2 \omega L_c = 81,5 \text{ kVAR}$$

$$\hat{S} = P + j Q = 27,4 + j 81,5 \text{ kVA}$$

$$K = \sqrt{P_m^2 - P^2 - Q^2} = 26,5 \text{ kVA}$$

$$\hat{Y} = \frac{\check{S}}{U_m^2} = 0,0350 - j 0,1043 \text{ S}$$

$$G = 0,0350 \text{ S}$$

$$B = 0,1043 \text{ S}$$



Dla składowych symetrycznych, otrzymamy:

$$\hat{U}_0 = 0 \text{ V}, \quad \hat{U}_1 = 500e^{j90^\circ} \text{ V}, \quad \hat{U}_2 = 100e^{j60^\circ} \text{ V}$$

(por. przykład 2)

$$\hat{\mathcal{E}}_u = \frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} = 0,2 e^{-j30^\circ}$$

$$\hat{I}_1 = \frac{1}{3} (\hat{I}_a + \hat{\alpha} \hat{I}_b + \hat{\alpha}^2 \hat{I}_c) = 55,2 + j 18,1 \text{ A}$$

$$\hat{I}_2 = \frac{1}{3} (\hat{I}_a + \hat{\alpha}^2 \hat{I}_b + \hat{\alpha} \hat{I}_c) = -5,8 - j 1,41 \text{ A}$$

$$\hat{\mathcal{E}}_1 = \frac{\hat{I}_2}{\hat{I}_1} = -0,103 + j 0,00813 = 0,1035 e^{j175^\circ 30'}$$

$$\hat{Z}_1 = \frac{\hat{U}_1}{\hat{I}_1} = 2,67 + j 8,17 \Omega$$

$$\hat{Z}_2 = \frac{\hat{U}_2}{\hat{I}_2} = -11,52 - j 12,03 \Omega$$

Rozpatrzmy teraz wykres kołowy zmian współczynnika asymetrii prądowej  $\mathcal{E}_1$  przy kompensacji mocy biernej.

Współrzędne środka okręgu

$$\hat{M} = \hat{\mathcal{E}}_1 \frac{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2}{2 \operatorname{Re}\{\hat{Z}_1\}} = 0,205 + j 0,389$$

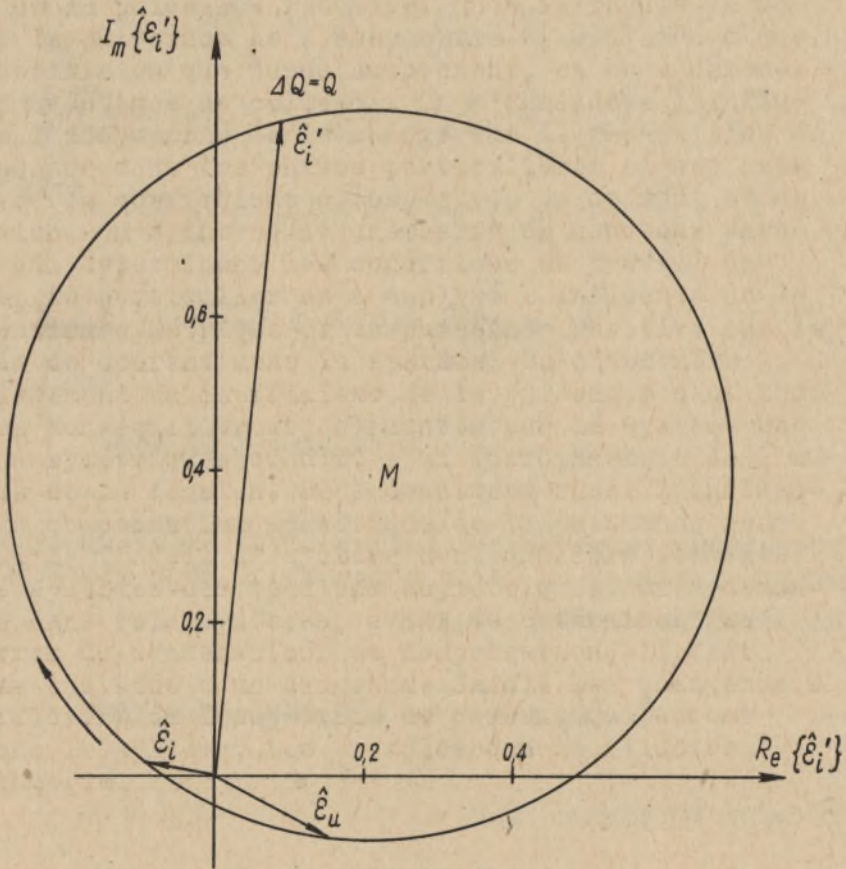
Promień okręgu

$$R = \frac{\mathcal{E}_1 |\hat{Z}_2 - \hat{Z}_1|}{2 \operatorname{Re}\{\hat{Z}_1\}} = 0,478$$

Przy całkowitej kompensacji mocy biernej, otrzymamy:

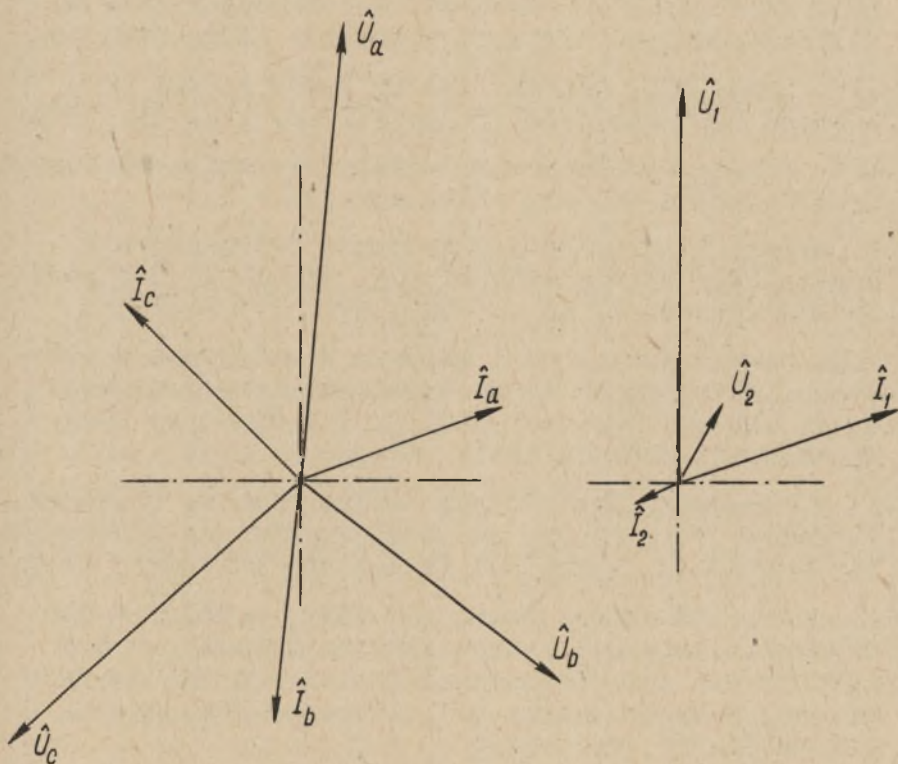
$$\Delta B = B = 0,1043 \text{ S}, \quad C_q = \frac{Q}{U_m^2 \omega} = 332 \text{ } \mu\text{F}$$

$$\hat{\mathcal{E}}_i' = \hat{\mathcal{E}}_i \frac{1 + j \hat{Z}_2 \Delta B}{1 + j \hat{Z}_1 \Delta B} = 0,0761 + j 0,839$$



Rys. 13

Wykres kołowy zmian  $\varepsilon_i$  z naniesionymi punktami  $\hat{\varepsilon}_i, \hat{\varepsilon}'_i, \hat{\varepsilon}_u$  przedstawiony jest na rys.13.



Rys. 14

Z wykresu widać, że kompensacja mocy biernej powoduje znaczny wzrost asymetrii prądowej. Na rys.14 przedstawiony jest wykres wektorowy prądów i napięć rozpatrywanego układu.

Rękopis złożono w redakcji w listopadzie 1963.

## LITERATURA

- [1] I.S. Antoniu: Chestiuni speciale de electrotehnica Ed. Academiei RPR Bucuresti 1956.
- [2] F. Buchholz: Die Darstellung der Begriffe "Scheinleistung" und "Scheinarbeit" bei Mehrphasenstrom. Elektro-Journal (1921), September - Heft, str. 15.
- [3] J.F. Lamb, D.B. Brandt: Vector Power Factor of 3-Phase Circuits, AIEE Transactions, vol. 68, 1949.
- [4] L.S. Lurie: Kazuščajasja moščnost trechfaznoj sistemy. Electricestvo, 1, 1951. str. 47 - 53.
- [5] F. Manea: Puissances des systemes triphasés non symétriques et non sinusoidaux, Studia si Cercetari de Energetica, X, No 4, 1960, str. 771 - 777.
- [6] Z.J. Nowomiejski: Moc i energia elektryczna w układach elektrycznych o dowolnych ustalonych przebiegach. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej Elektryka nr 7, Gliwice 1961.
- [7] I. Rosenzweig: Symboliczny wielowymiarowy rachunek wektorowy jako metoda analizy układów wielofazowych. PE Lwów 1939. Czasopismo Techniczne Tom L VI, 1939.
- [8] W. Quade: Zusammensetzung der Wirk-, - Blind- und Scheinleistung bei Wechselströmen Beliebiger Kurvenform und neue Leistungsdefinitionen für unsymmetrische Mehrphasensysteme beliebiger Kurvenform. ETZ 58 (1937) str. 1312.
- [9] A.P.T. Sah: Dyadic Algebra Applied to 3-phase Circuits, AIEE 55 (1936), str. 876.
- [10] A.P.T. Sah: Complex Vectors in 3-phase Circuits. AIEE 55 (1936) str. 1356.
- [11] B.A. Telesev: Neobrzodimoje utočnenie terminologii v voprocze izmierenia reaktivnoj moščnosti.

## НЕБАЛАНСНЫЕ ТРЕХФАЗНЫЕ СИСТЕМЫ

## С о д е р ж а н и е

В представленном труде авторами рассматривается распределение мощности в трех фазных небалансных системах, связанные с этой системой коэффициенты, а также условия взаимодействия небалансных систем с симметрическим конденсатором, компенсирующим реактивную мощность. Введено понятие мощности асимметрии  $K$  при помощи новой дефиниции и приведено значение этого нового определения. Было рассмотрено влияние неравномерности нагрузки на распределение мощности в отдельных фазах и его связь с коэффициентом асимметрии тока и напряжения. Введено ряд новых параметров, определяющих условия работы системы. В отдельности, проведен анализ влияния симметрии компенсации реактивной мощности на токовую симметрию системы. Как было доказано, увеличение коэффициента мощности в небалансных системах, питаемых от системы симметрических напряжений связано с соответствующим увеличением токовой асимметрии. Было также рассмотрено влияние симметрической компенсации реактивной мощности на работу небалансной системы, питаемой системой асимметрических напряжений. Выяснено, что в таких системах для запроектования компенсирующего конденсатора следует при помощи круговой диаграммы исследовать изменения коэффициента асимметрии тока, какие могут произойти в системе. Представленная теория была иллюстрирована примерами.

## LES SYSTÈMES TRIPHASÉS NON-ÉQUILIBRÉS

## R é s u m é

Dans leur rapport les auteurs ont considéré la répartition de la puissance dans les systèmes triphasés non-équilibrés, ensuite les coefficients concernant cette distribution et les conditions de collaboration des systèmes non-équilibrés avec le condensateur symétrique de la puissance réactive. On a introduit la notion de la puissance de l'assymétrie  $K$ , à l'aide d'une autre définition que jusqu'au présent, et on a démontré les avantages de celle-ci. On a considéré l'influence de l'assymétrie de la charge sur la repartition de la puissance dans les phases particulières et son rapport avec le coefficient d'assymetrie du courant et de la tension. On a introduit une serie de nouveaux paramètres qui déterminent les conditions de travail du système. En particulier on a analysé l'influence de la compensation symétrique de la puissance réactive sur la symétrie de courant dans le système. On a démontré l'accroissement du coefficient de la puissance dans les systèmes non-équilibrés, alimentés par le système des tensions symétriques conduit à un accroissement de l'assymetrie de la tension. On a considéré aussi l'influence de la compensation symétrique de la puissance réactive sur le travail du système non-équilibré alimenté par les systèmes des tensions asymétriques. On a démontré que dans tels systèmes, avant de déterminer les paramètres du condensateur de compensation, il faut examiner à l'aide d'un diagramme cercle les changements du coefficient de l'asymétrie de courant qui auront lieu dans le système. Les exemples donnés illustrent cette théorie.