ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1966
Seria: ELEKTRYKA z. 20 Nr kol. 158

ZYGMUNT NOWOMIEJSKI
Katedra Podstaw Elektrotechniki

UOGÓLNIONA METODA SYMBOLICZNA

Streszczenie. W pracy przedstawiono uogólnioną metodę symboliczną i jej zastosowanie do analizy układów liniowych o przebiegach odkształconych. Odmiennie niż w wcześniejszych pracach autora, w których funkcja symboliczna została zbudowana przy pomocy szeregu, w pracy obecnej wprowadzono funkcje symboliczne przy pomocy transformacji Hilberta. Takie ujęcie zagadnienia pozwoliło na wyprowadzenie uogólnionego symbolicznego "prawa Ohma" oraz wyprowadzenie szeregu nowych zależności dla niektórych rodzajów mocy występujących w układach o przebiegach odkształconych.

1. Funkcja symboliczna[x)]

Niech f(t) będzie funkcją okresową przemienną o okresie T, spełniającą warunki Dirichleta[xx)] w przedziale [0, t]. Zachodzi

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t \tag{1}$$

gdzie:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t) \cos n\omega t \, dt$$
$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t) \sin n\omega t \, dt, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \tag{2}$$

Kładziemy:

$$f_n(t) = a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t \tag{3}$$

x) Por. [1], str. 7, oraz [2].

xx) Por. [3], str. 164.

Stosując transformację Hilberta[x)] do funkcji $f_n(t)$, otrzymamy:

$$H\left\{f_n(t)\right\} = \text{V.P.}\ \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f_n(\tau)d\tau}{\tau - t}$$

$$= -a_n \sin n\omega t + b_n \cos n\omega t$$

stąd:

$$f_n(t) - j\,H\left\{f_n(t)\right\} = (a_n - j\,b_n)\,e^{jn\omega t} \tag{4}$$

Kładziemy:

$$\hat{F}_{mn} = a_n - jb_n \tag{5}$$

Na podstawie założeń oraz relacji (4) i (5), stosując transformację Hilberta do funkcji $f(t)$, otrzymamy:

$$f(t) - j\,H\left\{f(t)\right\} = \sum_{n=1}^{\infty}\hat{F}_{mn}\,e^{jn\omega t} \tag{6}$$

gdzie:

$$H\left\{f(t)\right\} = \text{V.P.}\ \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\tau)d\tau}{\tau - t} \tag{7}$$

Kładziemy:

$$\hat{F}(t) = f(t) - j\,H\left\{f(t)\right\}^{xx)} \tag{8}$$

Funkcję $\hat{F}(t)$ nazywamy funkcją symboliczną stowarzyszoną z funkcją rzeczywistą $f(t)$. Jest ona funkcją okresową o okresie T i całkowalną z kwadratem w przedziale $[0, T]$.
Zachodzi:

$$\frac{1}{T}\int_{0}^{T}\left|\hat{F}(t)\right|^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \sum_{n=1}^{\infty}\left|\hat{F}_{mn}\right|^2 \tag{9}$$

---

x) Por. [4], str. 72-73 oraz [5], str. 633-637.

xx) Por. [11].

Lecz:

$$\frac{1}{T}\int_0^T [f(t)]^2 dt = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

Stąd:

$$\frac{1}{2T}\int_0^T |\hat{F}(t)|^2 dt = \frac{1}{T}\int_0^T [f(t)]^2 dt \tag{10}$$

Z drugiej strony:

$$\int_0^T \hat{F}(t)\check{F}(t)dt = \int_0^T [f(t)-j\,H\{f(t)\}][f(t)+j\,H\{f(t)\}]\,dt$$

$$= \int_0^T [f(t)]^2 dt + \int_0^T [H\{f(t)\}]^2 dt \tag{11}$$

oraz:

$$\int_0^T \hat{F}(t)\hat{F}(t)dt = 0$$

$$= \int_0^T [f(t) - j\,H\{f(t)\}][f(t) - j\,H\{f(t)\}]\,dt$$

$$= \int_0^T [f(t)]^2 dt - \int_0^T [H\{f(t)\}]^2 dt -$$

$$- 2\,j \int_0^T f(t)\,H\{f(t)\}\,dt \tag{12}$$

Wynika stąd, że:

$$\int_0^T [f(t)]^2 dt = \int_0^T [H\{f(t)\}]^2 dt \tag{13}$$

$$\int_0^T f(t,\,H\{f(t)\}\,dt = 0 \tag{14}$$

Czyli: (I) wartości skuteczne (normy) funkcji $f(t)$ oraz $H\{f(t)\}$ są sobie równe,

(II) funkcje $f(t)$ oraz $H\{f(t)\}$ są do siebie wzajemnie ortogonalne.

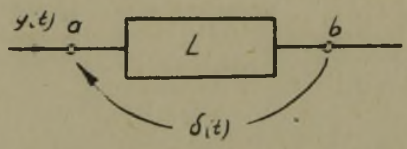
2. Analiza układu liniowego o przebiegach okresowych

Rozważmy układ liniowy skupiony między końcówkami a i b (por. rys. 1) i niech y(t) będzie odpowiedzią układu na sygnał napięciowy $\delta(t)$.
Kładziemy:

$$\hat{Y}(n\omega) = \int_0^\infty y(t)e^{-jn\omega t}dt, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \tag{16}$$

oraz

$$\hat{Y}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{Y}(n\omega)e^{jn\omega t}\,^{x)} \tag{16}$$



Rys. 1

Wielkość $\hat{Y}(t)$ nazwiemy symboliczną admitancją przejścia rozważanego układu dla przebiegów okresowych o okresue T.
Kładziemy:

$$\hat{Y}(n\omega) = G(n\omega) - j\,B(n\omega)$$

$$\hat{G}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} G(n\omega)\, e^{jn\omega t}\,^{x)} \tag{17}$$

$$\hat{B}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} B(n\omega)e^{jn\omega t}\,^{x)} \tag{18}$$

Jak wiadomo[xx)] między wielkościami $G(n\omega)$ i $B(n\omega)$ mają miejsce realcje:

$$G(n\omega) - G(\infty) = \text{V.P.}\ \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{B(y)dy}{n\omega - y}$$

$$B(n\omega) = \text{V.P.}\ \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{G(y)dy}{n\omega - y} \tag{19}$$

---

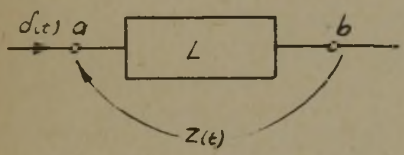
x) Na ogół wielkości: $\hat{Y}(t)$, $\hat{G}(t)$ oraz $\hat{B}(t)$ nie są funkcjami całkowalnymi z kwadratem, lecz dystrybucjami okresowymi, (por. [6], str. 59, [7], str. 79).

xx) Por. [8], str. 198–212.

Jeżeli zamiast sygnału napięciowego $\delta(t)$ wprowadzimy na wejście układu L sygnał prądowy $\delta(t)$ (por. rys. 2) w odpowiedzi otrzymamy sygnał z(t).
Kładziemy:

$$\hat{Z}(n\omega) = \int_0^{\infty} z(t)\, e^{-jn\omega t}\, dt \tag{20}$$

$$\hat{Z}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{Z}(n\omega)\, e^{jn\omega t} \tag{21}$$



Rys. 2

Wielkość $\hat{Z}(t)$ nazwiemy symboliczną impedancją przejścia układu dla przebiegów okresowych o okresie T.
Kładziemy:

$$\hat{Z}(n\omega) = R(n\omega) + j\, X(n\omega) \tag{22}$$

$$\hat{R}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} R(n\omega)\, e^{jn\omega t} \tag{23}$$

$$\hat{X}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} X(n\omega)\, e^{jn\omega t} \tag{23}$$

przy czym:

$$\begin{aligned} R(n\omega) - R(\infty) &= \text{V.P.}\ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X(y)\,dy}{n\omega - y} \\ X(n\omega) &= -\text{V.P.}\ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(y)\,dy}{n\omega - y} \end{aligned} \tag{24}$$

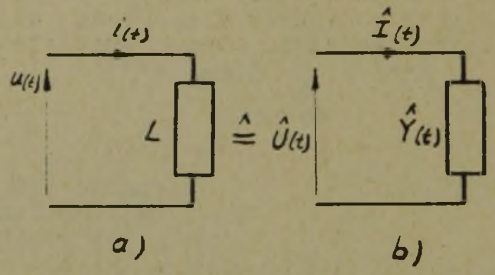
Łatwo wykazać, że:

$$\begin{aligned} G(n\omega) &= G(-n\omega), \quad R(n\omega) = R(-n\omega) \\ B(n\omega) &= -B(-n\omega), \quad X(n\omega) = -X(-n\omega) \end{aligned} \tag{25}$$

Jeżeli $\hat{Y}(n\omega)$ oraz $\hat{Z}(n\omega)$ obliczymy dla tego samego układu L to otrzymamy:

$$\hat{Z}(n\omega) = \frac{1}{\hat{Y}(n\omega)} \tag{26}$$

Rozważmy dowolny układ liniowy L (por. rys. 3a) załączony na napięcie okresowe przemienne u(t) o okresie T. Zakładamy, że u(t) jest funkcją rozwijalną na szeregu Fouriera (1) zbieżny do u(t). Na podstawie relacji (15) i (16) możemy obliczyć symboliczną admitancję przejścia $\hat{Y}(t)$ tego układu.



Rys. 3

W myśl relacji (8) kładziemy:

$$\hat{U}(t) = u(t) - j\,H\{u(t)\} \tag{27}$$

Symboliczna funkcja napięcia $\hat{U}(t)$ stowarzyszona z napięciem u(t) jest funkcją okresową o okresie T, całkowalną z kwadratem w przedziale [0, T].
Piszemy:

$$\hat{U}(t) \triangleq u(t) \tag{28}$$

gdzie symbol "≙" odczytujemy, iż symboliczna funkcja $\hat{U}(t)$ odpowiada funkcji u(t) opisującej rzeczywisty przebieg przy czym

$$u(t) = \mathrm{Re}\{\hat{U}(t)\} \tag{29}$$

Zachodzi (na podstawie (5) i (6))

$$\hat{U}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{U}_{mn}\, e^{jn\omega t} \tag{30}$$

gdzie:

$$\hat{U}_{mn} = \frac{1}{T}\int_0^T \hat{U}(t)\, e^{-jn\omega t}\, dt \tag{31}$$

Łatwo zauważamy, że $\hat{U}_{mn}$ jest zespoloną amplitudą n-tej harmonicznej przebiegu napięcia i że:

$$\frac{\hat{U}_{mn}}{\sqrt{2}} = \hat{U}_n \tag{32}$$

jest jej zespoloną wartością skuteczną.
Aby obliczyc prąd i(t) posłużymy się zasadą superpozycji. W myśl tej zasady zastosowanej do obwodu przedstawionego na rys. 3a, otrzymamy:

$$i(t) = \int_0^\infty y(\tau)u(t-\tau)\, d\tau^{x)} \tag{33}$$

Stąd:

$$H\{i(t)\} = \int_0^\infty y(\tau)\, H\{u(t-\tau)\}\, d\tau$$

Czyli:

$$\hat{I}(t) = i(t) - j\, H\{i(t)\} = \int_0^\infty y(\tau)\, \hat{U}(t-\tau)\, d\tau$$

Lecz:

$$\hat{U}(t-\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-jn\omega\tau}(\hat{U}_{mn}\, e^{jn\omega t})$$

Stąd:

$$\hat{I}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\int_0^\infty y(\tau)\, e^{-jn\omega\tau} d\tau\, (\hat{U}_{mn}\, e^{jn\omega t})\right\}$$

$$\hat{I}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{Y}(n\omega)\, \hat{U}_{mn}\, e^{jn\omega t} \tag{34}$$

Z drugiej strony:

$$\frac{1}{T}\int_0^T \left\{\frac{1}{T}\int_0^T \hat{Y}(\tau)\, \hat{U}(t-\tau)\, d\tau\right\} e^{-jn\omega t} dt =$$

$$= \frac{1}{T^2}\int_0^T \int_0^T \hat{Y}(\tau)\, \hat{U}(t-\tau)\, e^{-jn\omega t} d\tau\, dt$$

---

x) Por. [8], str. 83-87.

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \hat{Y}(\tau)\left\{\frac{1}{T}\int_0^T \hat{U}(t-\tau)\ e^{-jn\omega t}\ dt\right\}d\tau$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \hat{Y}(\tau)\left\{\frac{1}{T}\int_{-\tau}^{T-\tau} \hat{U}(\lambda)\ e^{-jn\omega(\lambda+\tau)}\ d\lambda\right\}d\tau$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \hat{Y}(\tau)\ e^{-jn\omega\tau}d\tau \cdot \frac{1}{T}\int_0^T \hat{U}(\lambda)\ e^{-jn\omega\lambda}d\lambda$$

$$= \hat{Y}(n\omega)\ \cdot\ \hat{U}_{mn}$$

Czyli, na podstawie (34):

$$\hat{I}(t) = \frac{1}{T}\int_0^T \hat{Y}(\tau)\ \hat{U}(t-\tau)\ d\tau \tag{35}$$

gdzie:

$$i(t) = \mathrm{Re}\left\{\hat{I}(t)\right\} \tag{36}$$

Relację (35) nazwiemy uogólnionym symbolicznym "prawem Ohma" dla układów o przebiegach okresowych. Można je także zapisać w postaci:

$$\hat{I}(t) = \frac{1}{T}\int_0^T \hat{Y}(t-\tau)\ \hat{U}(\tau)\ d\tau \tag{37}$$

Podobnie - wychodząc z danej symbolicznej impedancji przejścia $\hat{Z}(t)$ oraz z symbolicznego prądu $\hat{I}(t)$ można wykazać, że napięcie symboliczne $\hat{U}(t)$ (por. rys. 3b) dane jest przy pomocy relacji:

$$\hat{U}(t) = \frac{1}{T}\int_0^T \hat{Z}(\tau)\ \hat{I}(t-\tau)d\tau$$

$$\hat{U}(t) = \frac{1}{T}\int_0^T \hat{Z}(t-\tau)\ \hat{I}(\tau)\ d\tau \tag{38}$$

3. Symboliczny operator jednostkowy

Kładziemy:

$$\hat{1}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{jn\omega t^{x)}} \tag{39}$$

Dla dowolnej funkcji symbolicznej $\hat{F}(t)$, otrzymamy:

$$\hat{F}(t) = \frac{1}{T}\int_0^T \hat{F}(\tau)\ \hat{1}(t-\tau)d\tau \tag{40}$$

W szczególności, jeżeli $\hat{Y}(t)$ i $\hat{Z}(t)$ odnoszą się do tego samego układu L, otrzymamy:

$$\frac{1}{T}\int_0^T \hat{Y}(t-\tau)\ \hat{Z}(\tau-v)d\tau = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{Y}(n\omega)\ \hat{Z}(n\omega)\ e^{jn\omega(t-v)}$$

Czyli:

$$\hat{1}(t-v) = \frac{1}{T}\int_0^T \hat{Y}(t-\tau)\ \hat{Z}(\tau-v)d\tau \tag{41}$$

Na podstawie (38) mamy:

$$\hat{U}(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T \hat{Z}(\tau-v)\ \hat{I}(v)dv$$

Stąd:

$$\frac{1}{T}\int_0^T \hat{Y}(t-\tau)\hat{U}(\tau)d\tau = \frac{1}{T}\int_0^T \hat{Y}(t-\tau)\left\{\frac{1}{T}\int_0^T \hat{Z}(\tau-v)\hat{I}(v)dv\right\}d\tau$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \hat{I}(v)\left\{\frac{1}{T}\int_0^T \hat{Y}(t-\tau)\ \hat{Z}(\tau-v)d\tau\right\} dv$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \hat{1}(t-v)\hat{I}(v)dv = \hat{I}(t)$$

Tak więc operacją odwrotną do splotu wyrażonego w symbolicznym prawie Ohma jest splot i jeżeli:

$$\hat{U}(t) = \frac{1}{T}\int_0^T \hat{Z}(t-\tau)\ \hat{I}(\tau)d\tau$$

to:

$$\hat{I}(t) = \frac{1}{T}\int_0^T \hat{Y}(t-\tau)\ \hat{U}(\tau)\ d\tau$$

przy czym:

$$\frac{1}{T}\int_0^T \hat{Z}(t-\tau)\ \hat{Y}(\tau)\ d\tau = \hat{1}(t)$$

4. Prawa Kirchhoffa w postaci symbolicznej

Zakładamy, że rozważana sieć elektryczna jest siecią (kompleksem) zorientowaną. Tzn., że każdej gałęzi sieci przyporządkowany jest ustalony zwrot prądu a każdemu oczku przyporządkowana jest cyrkulacja o ustalonym zwrocie. W sieci zorientowanej I prawo Kirchhoffa zastosowane do i-tego węzła dane jest przy pomocy relacji:

$$\sum_i a_{ik}\ i_k(t) = 0 \tag{42}$$

gdzie:

$i_k(t)$ = prądowi płynącemu w k-tej gałęzi,

$$a_{ik} = \begin{cases} +1, & \text{gdy prąd } i_k(t) \text{ wpływa do i-tego węzła,} \\ -1, & \text{gdy prąd } i_k(t) \text{ wypływa z i-tego węzła,} \\ 0, & \text{gdy k-ta gałąź nie posiada wspólnego punktu z i-tym węzłem.} \end{cases}$$

Na podstawie definicji (7), otrzymamy:

$$H\left\{\sum_i a_{ik}\ i_k(t)\right\} = \sum_i a_{ik}\ H\left\{i_k(t)\right\} = 0$$

Stąd:

$$\sum_i a_{ik}\left[i_k(t) - j\ H\left\{i_k(t)\right\}\right] = 0$$

Czyli:

$$\sum_i a_{ik}\,\hat{I}_k(t) = 0 \tag{43}$$

Relacja (43) wyraża I prawo Kirchhoffa w postaci symbolicznej dla przebiegów okresowych o okresie T.
II prawo Kirchhoffa wypisane dla i-tego oczka zorientowanego kompleksu sieci przyjmuje postać:

$$\sum_i b_{ik}\,u_k(t) = 0 \tag{44}$$

gdzie:

$u_k(t)$ = napięciu między końcówkami k-tej gałęzi sieci,

$$b_{ik} = \begin{cases} +1, & \text{gdy gałąź } k \text{ występuje w i-tym oczku a napięcie } u_k(t) \text{ jest ostrzałkowane zgodnie z orientacją oczka,} \\ -1, & \text{gdy gałąź } k \text{ występuje w i-tym oczku a napięcie } u_k(t) \text{ jest ostrzałkowane przeciwnie do orientacji oczka,} \\ 0, & \text{gdy gałąź } k \text{ nie należy do i-tego oczka.} \end{cases}$$

Podobnie jak dla I prawa Kirchhoffa, na podstawie definicji (7), otrzymamy:

$$H\left\{\sum_i b_{ik}\,u_k(t)\right\} = \sum_i b_{ik}\,H\{u_k(t)\} = 0$$

Stąd:

$$\sum_i b_{ik}\left[u_k(t) - j\,H\{u_k(t)\}\right] = 0$$

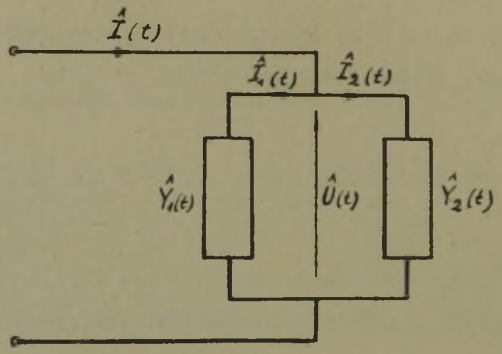
Czyli:

$$\sum_i b_{ik}\,\hat{U}_k(t) = 0 \tag{45}$$

5. Łączenie równoległe i szeregowe odpowiednio symbolicznych admitancji i impedancji

W myśl ogólnej zasady i na podstawie (35) symboliczna admitancja zastępcza $\hat{Y}_o(t)$ układu podanego na rys. 4 musi spełniać relację:

$$\hat{I}(t) = \frac{1}{T}\int_0^T \hat{Y}_o(\tau)\,\hat{U}(t-\tau)d\tau \tag{46}$$



Rys. 4

Zachodzi:

$$\hat{I}_1(t) = \frac{1}{T}\int_0^T \hat{Y}_1(\tau)\,\hat{U}(t-\tau)d\tau$$

$$\hat{I}_2(t) = \frac{1}{T}\int_0^T \hat{Y}_2(\tau)\,\hat{U}(t-\tau)\,d\tau$$

Lecz:

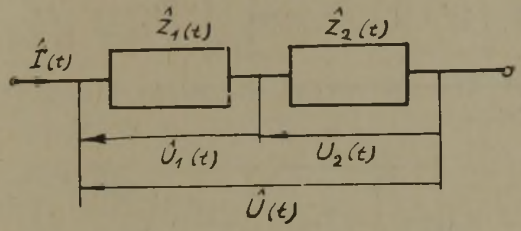
$$\hat{I}(t) = \hat{I}_1(t) + \hat{I}_2(t) = \frac{1}{T}\int_0^T \left\{\hat{Y}_1(\tau) + \hat{Y}_2(\tau)\right\}\hat{U}(t-\tau)\,d\tau \tag{47}$$

Porównując (46) i (47), otrzymamy:

$$\hat{Y}_o(t) = \hat{Y}_1(t) + \hat{Y}_2(t)$$

Dla n równolegle połączonych admitancji symbolicznych, otrzymamy:

$$\hat{Y}_o(t) = \sum_{k=1}^{k=n} \hat{Y}_k(t) \tag{48}$$



Rys. 5

Dla dwóch szeregowo połączonych impedancji symbolicznych $\hat{Z}_1(t)$ i $\hat{Z}_2(t)$ (por. rys. 5) szukana impedancja zastępcza $\hat{Z}_o(t)$ musi spełniać relację:

$$\hat{U}(t) = \frac{1}{T}\int_0^T \hat{Z}_o(\tau)\,\hat{I}(t-\tau)\,d\tau \tag{49}$$

Lecz:

$$\hat{U}(t)=\hat{U}_1(t)+\hat{U}_2(t) = \frac{1}{T}\int_0^T \left\{\hat{Z}_1(\tau)+\hat{Z}_2(\tau)\right\}\hat{I}(t-\tau)d\tau \tag{50}$$

Porównując (49) i (50), otrzymamy:

$$\hat{Z}_o(t) = \hat{Z}_1(t) + \hat{Z}_2(t)$$

Ogólnie, dla n szeregowo połączonych impedancji symbolicznych, otrzymamy:

$$\hat{Z}_o(t) = \sum_{k=1}^{k=n} \hat{Z}_k(t) \tag{51}$$

6. Obliczenie wartości skutecznej prądu i napięcia

Na podstawie relacji (10) zachodzi:

$$\frac{1}{T}\int_0^T [i(t)]^2\,dt = \frac{1}{2T}\int_0^T [\hat{I}(t)]^2\,dt$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T [u(t)]^2\,dt = \frac{1}{2T}\int_0^T [\hat{U}(t)]^2\,dt$$

Stąd wartości skuteczne przebiegu prądu i napięcia są dane przy pomocy relacji:

$$I = \sqrt{\frac{1}{2T}\int_0^T |\hat{I}(t)|^2\,dt} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} I_n^2}$$

$$U = \sqrt{\frac{1}{2T}\int_0^T |\hat{U}(t)|^2\,dt} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} U_n^2} \tag{52}$$

gdzie I_n jest wartością skuteczną n-tej harmonicznej przebiegu prądu a U_n jest wartością skuteczną n-tej harmonicznej przebiegu napięcia (por. (32)).

7. Moc symboliczna, czynna, bierna i pozorna[x)]

Moc symboliczną $\hat{S}$ definiujemy przy pomocy relacji:

$$\hat{S} = \frac{1}{2T}\int_0^T \hat{U}(t)\,\check{I}(t)\,dt \tag{53}$$

gdzie:

$$\hat{U}(t) = u(t) - j\,H\{u(t)\}$$

$$\hat{I}(t) = i(t) - j\,H\{i(t)\} \tag{54}$$

a $\check{I}(t)$ jest wielkością sprzężoną do wielkości $\hat{I}(t)$.

---

x) Por. [1], str. 9 oraz [9].

Wielkości u(t) i i(t) są funkcjami opisującymi odpowiednio przebieg napięcia i prądu rozważanego układu. Zachodzi:

$$\hat{U}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{U}_{mn}\, e^{jn\omega t}; \quad \hat{I}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{I}_{mn}\, e^{jn\omega t} \tag{55}$$

Stąd:

$$\frac{1}{2T}\int_0^T \hat{U}(t)\check{I}(t)dt = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \hat{U}_{mn}\,\check{I}_{mn} = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{U}_n\,\check{I}_n \tag{56}$$

gdzie $\hat{U}_n$ jest zespoloną wartością skuteczną n-tej harmonicznej napięcia a $\check{I}_n$ jest wielkością sprzężoną do zespolonej wartości skutecznej n-tej harmonicznej prądu.
Kładziemy:

$$\hat{U}_n = U_n\, e^{j\beta_n}; \quad \hat{I}_n = I_n\, e^{j\alpha_n}$$

$$\beta_n - \alpha_n = \psi_n$$

Otrzymamy:

$$\hat{S} = \sum_{n=1}^{\infty} U_n\, I_n\, e^{j\psi_n} \tag{57}$$

Moc czynna:

$$P = \mathrm{Re}\left\{\hat{S}\right\} = \sum_{n=1}^{\infty} U_n\, I_n \cos\psi_n \tag{58}$$

a moc bierna:

$$Q = \mathrm{Im}\left\{\hat{S}\right\} = \sum_{n=1}^{\infty} U_n\, I_n \sin\psi_n \tag{59}$$

Relacja (57) wynika z definicji mocy czynnej, tj.:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)i(t)dt$$

a relacja (58) wynika z definicji mocy biernej Q podanej przez C.I. Budeanu w roku 1927 (por. [10]).

Na podstawie (54) mamy:

$$\frac{1}{2T}\int_0^T \hat{U}(t)\check{I}(t)dt = \frac{1}{2T}\int_0^T \left[u(t)-j\,H\{u(t)\}\right]\left[i(t)+j\,H\{i(t)\}\right]\,dt$$

$$= \frac{1}{2T}\int_0^T \left[u(t)i(t)+H\{u(t)\}H\{i(t)\}\right]\,dt +$$

$$+\,j\,\frac{1}{2T}\int_0^T \left[u(t)H\{i(t)\}-i(t)H\{u(t)\}\right]\,dt$$

Stąd, na podstawie (53), (58) i (59):

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)i(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T H\{u(t)\}H\{i(t)\}dt \qquad (60)$$

$$Q = \frac{1}{2T}\int_0^T \left[u(t)H\{i(t)\} - i(t)H\{u(t)\}\right]\,dt \qquad (61)$$

Relację (61) da się uprościć. Istotnie, wychodząc z iloczynu $\hat{U}(t)\,\hat{I}(t)$, otrzymamy:

$$\int_0^T \hat{U}(t)\hat{I}(t)dt = 0 = \int_0^T \left[u(t)i(t) - H\{u(t)\}H\{i(t)\}\right]\,dt -$$

$$-\,j\int_0^T \left[u(t)H\{i(t)\} + i(t)H\{u(t)\}\right]\,dt$$

Czyli:

$$\int_0^T u(t)H\{i(t)\}dt = -\int_0^T i(t)H\{u(t)\}\,dt \qquad (62)$$

Uwzględniając realcję (62) na podstawie relacji (61), otrzymamy:

$$Q = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)H\{i(t)\}dt = -\frac{1}{T}\int_0^T i(t)H\{u(t)\}dt \qquad (63)$$

Z relacji (57), (58) i (59) wynika, że:

$$\hat{S} = P + j\,Q \qquad (64)$$

Moc pozorną S definiujemy przy pomocy relacji:

$$S = |\hat{S}| = \sqrt{P^2 + Q^2} \tag{65}$$

Kładziemy:

$$\hat{S} = S\, e^{j\Psi}, \text{ gdzie: } \cos\Psi = \frac{P}{S}, \ \sin\Psi = \frac{Q}{S} \tag{66}$$

Wstawiając do (57), otrzymamy:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=1}^{\infty} U_n\, I_n \cos(\Psi_n - \Psi) \\ Q &= \sum_{n=1}^{\infty} U_n\, I_n \sin(\Psi_n - \Psi) \end{aligned} \tag{67}$$

Jak wiemy, dla dowolnego układu liniowego L i przebiegów okresowych u(t) i i(t) o okresie T zachodzi:

$$\hat{I}(t) = \frac{1}{T}\int_0^T \hat{Y}(\tau)\, \hat{U}(t-\tau)\,d\tau$$

Stąd na podstawie definicji (53), otrzymamy:

$$\hat{S} = \frac{1}{2T}\int_0^T \hat{U}(t)\left\{\frac{1}{T}\int_0^T \check{Y}(\tau)\, \check{U}(t-\tau)\,d\tau\right\} dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \check{Y}(\tau)\left\{\frac{1}{2T}\int_0^T \hat{U}(t)\check{U}(t-\tau)\,dt\right\} d\tau$$

Kładziemy:

$$\hat{\varphi}(\tau) = \frac{1}{2T}\int_0^T \hat{U}(t)\check{U}(t-\tau)\,dt \tag{68}$$

otrzymamy:

$$\hat{S} = \frac{1}{T}\int_0^T \hat{\varphi}(\tau)\, \check{Y}(\tau)\,d\tau \tag{69}$$

$\hat{\varphi}(\tau)$ jest współczynnikiem autokorelacji funkcji $\hat{U}(t)$

Zachodzi:

$$\hat{\varphi}(\tau) = \check{\varphi}(-\tau)$$

$$\hat{\varphi}(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n^2 \, e^{jn\omega\tau} \tag{70}$$

Korzystając z relacji (18) otrzymamy:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T \hat{\varphi}(\tau)\check{G}(\tau)d\tau$$

$$Q = \frac{1}{T}\int_0^T \hat{\varphi}(\tau)\check{B}(\tau)d\tau \tag{71}$$

Z relacji (69) i (71) widać, że moc symboliczna $\hat{S}$ oraz moce: czynna P i bierna Q pobierane przez element liniowy L są zależne nie tyle od przyłożonego napięcia u(t) ile od współczynnika autokorelacji $\hat{\varphi}(\tau)$. Oznacza to, że jeżeli dane są dwa różne napięcia symboliczne $\hat{U}_a(t)$ i $\hat{U}_b(t)$ odpowiadające dwom różnym napięciom rzeczywistym $u_a(t)$ i $u_b(t)$ przyłożonym do tego samego elementu L a posiadające równe współczynniki autokorelacji $\hat{\varphi}(\tau)$, to pobór mocy czynnej P i biernej Q przez element L w obu przypadkach będzie taki sam.

Rękopis złożono w Redakcji w kwietniu 1965 r.

LITERATURA

[1] Nowomiejski Z.: "Moc i energia elektryczna w układach elektrycznych o dowolnych ustalonych przebiegach". Zeszyty Naukowe Pol. Śl. "Elektryka" Z. 15, Gliwice 1963.

[2] Nowomiejski Z.: "Moszcznost aktivnaja, reaktivnaja i moszcznost iskarzenia v elektriczeskich sistemach s periodiczeskimi niesinusoidalnymi processami. Izviestia Vysszich Uczebnych Zaviedenij. Elektromechanika Nr 6/1964.

[3] Cholewicki T.: "Analiza obwodów elektrycznych". WNT, Warszawa 1962.

[4] Ditkin W.A., Prudnikow A.P.: "Przekształcenia całkowe i rachunek operatorowy". PWN, Warszawa 1964.

[5] Irving J., Mullineux M.: "Mathematics in Physics and Engineering". Academic Press, New York and London, 1959.

[6] Mikusiński J., Sikorski R.: "Elementarna teoria dystrybucji". PWN, Warszawa 1964.

[7] Lighthill M.J.: "Wstęp do analizy Fouriera i teorii dystrybucji". PWN, Warszawa 1963.

[8] Papoulis A.: "The Fourier Integral". McGraw-Hill Book Company, 1962.

[9] Nowomiejski Z.: "Filtry mocy". Zeszyty Naukowe Pol. Śl. "Elektryka" Z. 18, Gliwice 1964.

[10] Budeanu C.I.: "Puissances réactives et fictives". Institut Roumain de l'Energie, 1927.

[11] Gabor D.: "Theory of Communication". J.Inst. Electr.Engrs. 93 (1946) str. 429.

ОБОБЩЕННЫЙ СИМБОЛИЧЕСКИЙ МЕТОД

Р е з ю м е

В статье представлено обобщенный символический метод и его применение для анализа линейных систем с деформированными процессами. В противоположность предыдущих работ автора, в которых символическая функция была построена при помощи ряда, в настоящей работе введены символические функции при помощи трансформации Гильберта. Такой подход в вопросу дал возможность вывести обобщенное символическое "право Ома", а также вывести ряд новых зависимостей для некоторых родов мощности, выступающих в системах с деформированными процессами.

GENERALIZED SYMBOLIC METHOD

S u m m a r y

Description of the generalized symbolic method and their applian e for the analysis of the linear systems with the deformed processes. On the contraty as in the previous author's works in which the symbolic function has been built by the series, in this work are presented symbolic functions by Hilbert transformations. Such a form of this problem allowed the derivation of the generalized symbolic Ohm's law and derivations of the series of the new realtions for some types of power apearing in the systems with the deformed processes.