ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1974

Seria: Automatyka, z. 27 Nr kol. 396

Zbigniew Tatarkiewicz

Studium Doktoranckie przy Wydziale
Automatyki i Informatyki

O OPTYMALNYM STEROWANIU DOCELOWYM UKŁADAMI DYSKRETNYMI

Streszczenie. Praca przedstawia metodę znajdowania sekwencji (ciągu) sterowań, która przeprowadza badany układ, opisany liniowymi równaniami różnicowymi, z pewnego zbioru warunków początkowych do określonego zbioru docelowego w minimalnej ilości kroków. Zakłada się że na poszczególne elementy sekwencji, jak i na pewien funkcjonał określony na ciągu sterowań, nałożone są ograniczenia.

Zadanie rozwiązuje się drogą sprowadzenia do tzw. zagadnienia momentów, sformułowanego przez M.G. Kreina. Przyjęta metoda rozwiązania problemu pozwala na uzyskanie ogólnych rezultatów, dla szerokiej klasy sterowań dopuszczalnych (spełniających założone ograniczenia) oraz różnie definiowanych zbiorów punktów początkowych i końcowych procesu.

Rozważania zilustrowane są przykładem liczbowym.

Wstęp

Przedmiotem zainteresowania wielu prac np. [1], [2], [3], [4] były w ostatnich latach problemy wyznaczania sterowania optymalnego, w sensie minimalizacji pewnego funkcjonału, które przeprowadza badany układ dynamiczny z zadanego stanu początkowego do zadanego stanu końcowego. Dla liniowych układów dynamicznych i funkcjonałów jakości zależnych wyłącznie od sterowania efektywnymi metodami, rozwiązującymi problem, okazały się metody matematyczne bazujące na pewnych zagadnieniach analizy funkcjonalnej (np. twierdzeniu Banacha-Hahna o rozszerzaniu funkcjonału liniowego z zachowaniem normy; twierdzeniach o ogólnej postaci funkcjonału liniowego w różnych typach przestrzeni). Pozwalają one z jednej strony na stosunkowo łatwe wykazanie istnienia sterowania optymalnego, z drugiej na ominięcie w toku obliczeń tzw. problemu dwugranicznego.

Wymaganie osiągnięcia przez układ zadanego stanu końcowego jest żądaniem bardzo "ostrym" i często nieuzasadnionym z punktu widzenia technologii czy ekonomii. Dlatego też w wielu zagadnieniach praktycznych wymaga się jedynie by układ w wyniku sterowania znalazł się w określonym ε - otoczeniu danego stanu końcowego. W wypadku gdy istnieje również możliwość wyboru stanu początkowego, z pewnego określonego zbioru, (np. procesy inwestycyjne) powstaje zadanie sterowania optymalnego ze zbioru stanów początkowych do zbioru docelowego lub punktu końcowego.

Praca podaje sposób rozwiązania postawionego problemu drogą sprowadzenia do tzw. zagadnienia momentów. Przyjęta metoda pozwala na uzyskanie ogólnych rezultatów dla szerokiej klasy sterowań dopuszczalnych i różnie definiowanych zbiorów warunków początkowych i końcowych.

Postawienie problemu

Niech rozpatrywany układ opisują równania

$$x(k+1) = F(k)x(k) + G(k)u(k); \quad k=k_0,\ k_0+1,\dots,k_1-1, \tag{1.1}$$

gdzie

$x(k)\in R^n$ jest ~~n-wymiarowym~~ wektorem stanu należącym do n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej R^n,

$u(k)\in R^r$ r - wymiarowym wektorem sygnałów wejściowych (sterowań) $r \leqslant n$, a $F(k)$ i $G(k)$ macierzami odpowiednio $n \times n$ i $n \times r$ wymiarowymi, określonymi na wszystkich etapach sterowania.

Problem polega na wyznaczeniu takiego sterowania $\{u(k)\}$, które przeprowadza układ (1.1) z dowolnego punktu, należącego do otoczenia zadanego stanu początkowego x^d, do dowolnego punktu z otoczenia zadanego stanu końcowego x^f w minimalnej ilości etapów.

Otoczenia punktów x^d i x^f określamy odpowiednio jako zbiory wszystkich elementów $x(k_o)$ i $x(k_1)$ spełniających warunki

$$\|\varepsilon^d\|_{z_d} = \|x^d - x(k_o)\|_{z_d} = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j^d - x_j(k_o)|^{z_d}\right)^{\frac{1}{z_d}} \leqslant M_d \tag{1.2}$$

$$\|\varepsilon^f\|_{z_f} = \|x^f - x(k_1)\|_{z_f} = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j^f - x_j(k_1)|^{z_f}\right)^{\frac{1}{z_f}} \leqslant M_f \tag{1.3}$$

gdzie z_d, $z_f \geqslant 1$; M_d, M_f są dodatnimi stałymi, danymi dla określonego problemu i oznaczamy przez $D(x^d, z_d, M_d)$ oraz $D(x^f, z_f, M_f)$.

Tak więc

$$D(x^d, z_d, M_d) = \left\{x(k_o) : \|x^d - x(k_o)\|_{z_d} \leqslant M_d\right\} \tag{1.4}$$

$$D(x^f, z_f, M_f) = \left\{x(k_1) : \|x^f - x(k_1)\|_{z_f} \leqslant M_f\right\} \tag{1.5}$$

Warunki techniczne i ekonomiczne narzucają na ciąg sterujący $\{u(k)\}$ i jego składowe szereg ograniczeń. Ograniczenia te można podzielić [4] na dwie podstawowe klasy.

1) Ograniczenia lokalne - są to ograniczenia narzucone na poszczególne składowe wektora $u(k)$ na każdym etapie sterowania.

2) Ograniczenia globalne - są to ograniczenia nałożone na pewien funkcjonał zależny od ciągu sterowań $\{u(k)\}$ w całym przedziale sterowania $[k_o, k_1-1]$. Ciąg $\{u(k)\}$ spełniający te ograniczenia będziemy nazywali dalej sterowaniem dopuszczalnym, pod warunkiem, że wszystkie jego elementy $u(k)$ spełniają również ograniczenia typu 1).

W dalszych rozważaniach zakładamy, że ciąg $\{u(k)\}$ należy do zbioru sterowań dopuszczalnych U określonego następująco:

$$U = \left\{ \{u(k)\} : \|\{u(k)\}\|_p = \left[\sum_{k=k_0}^{k_1-1} \sum_{l=1}^{r} |u_l(k)|^p \right]^{\frac{1}{p}} \leqslant M_p; \right.$$

$$\left. p \geqslant 1,\ M_p > 0 \right\} \tag{1.6}$$

W zastosowaniach szczególnie ważny jest przypadek, gdy $p \to \infty$. Zbiór sterowań dopuszczalnych U przyjmuje wtedy postać

$$U = \left\{ \{u(k)\} : \max_k \max_l |u_l(k)| \leqslant M_\infty;\ k = \right.$$

$$\left. = k_0, \ldots, k_1-1;\ l=1, \ldots, r \right\} \tag{1.7}$$

Oznacza to, że żadna ze składowych wektora u nie przekracza na całym przedziale sterowania zadanej amplitudy M_∞.

Ograniczenia typu $\|\{u(k)\}\|_1 \leqslant M_1$ oraz $\|\{u(k)\}\|_2 \leqslant M_2$ można interpretować jako ograniczenia, odpowiednio, całkowitej wydajności i energii źródła sterującego.

Obecnie, wykorzystując wprowadzone oznaczenia, sformułujemy następujące zadanie

Z a d a n i e. Wyznaczyć takie sterowanie $\{u(k)\}$, które przeprowadza układ (1.1) z dowolnego punktu należącego do zbioru $D(x^d, z_d, M_d)$ (1.4), do dowolnego punktu zbioru $D(x^f, z_f, M_f)$ (1.5) w minimalnej ilości $k_1^o - k_o$ etapów, i które należy do zbioru sterowań dopuszczalnych U (1.6).

Dla $M_d = 0$ zbiór D_d redukuje się do punktu x^d. Tak więc, ważny problem sterowania z zadanego punktu początkowego do zbioru docelowego D_f jest szczególnym przypadkiem Zadania.

Z (1.2), (1.3) i (1.6) wynika, że sterowanie $\{u(k)\}$ rozwiązujące Zadanie istnieje, jeśli tylko spełniony jest warunek

$$\max\left\{ \frac{1}{M_d}\|\varepsilon^d\|_{z_d},\ \frac{1}{M_f}\|\varepsilon^f\|_{z_f},\ \frac{1}{M_p}\|u(k)\|_p \right\} \leqslant 1 \tag{1.8}$$

R o z w i ą z a n i e   Z a d a n i a

W dalszym ciągu rozważań będziemy dążyć do takiego przedstawienia Zadania, by można je traktować jako znany np. [1], [3] problem momentów, postawiony i rozwiązany przez M.G. Kreina.

Rozwiązanie układu równań (1.1) przy warunkach początkowych $k = k_o$, $x = x(k_o)$ przyjmuje postać [6]

$$x(k) = \Omega(k,k_o)x(k_o) + \sum_{i=k_o}^{k-1} \Omega(k,i+1)G(i)u(i) \tag{2.1}$$

gdzie Ω

$$\left.\begin{array}{ll} \Omega(k,k_o) = F(k-1)F(k-2)\dots F(k_o+1)F(k_o); & \text{dla } k > k_o \\ \Omega(k_o,k_o) = I; \quad n\text{x}n \text{ wymiarowa macierz jednostkowa} & \\ \Omega(k,k_o) = 0; \quad n\text{x}n \text{ wymiarowa macierz zerowa;} & \text{dla } k_o > k \end{array}\right\} \tag{2.2}$$

jest fundamentalną macierzą rozwiązań jednorodnej części układu równań (1.1) ($u \equiv 0$).

Dla $k = k_1$ z zależności (2.1) otrzymujemy

$$x(k_1) = \Omega(k_1,k_o)x(k_o) + \sum_{i=k_o}^{k_1-1} \Omega(k_1,i+1)G(i)u(i) \tag{2.3}$$

gdzie $x(k_1)$ i $x(k_o)$ są wektorami należącymi odpowiednio do zbiorów określonych przez (1.5) i (1.4).

Wprowadzając oznaczenie

$$\Omega(k_1,i+1)\,G(i) = H(k_1,i) \tag{2.4}$$

i przedstawiając równanie macierzowe (2.3) w postaci n równań skalarnych mamy

$$\varepsilon_j^f - \omega_j \varepsilon^d + \sum_{i=k_0}^{k_1-1} h_j(k_1,i)\, u(i) = c_j;\ j = 1,\dots,n \qquad (2.5)$$

Liczby c_j występujące w (2.5) wyznacza się z relacji

$$c_j = x_j^f - \omega_j(k_1,k_0)x^d;\ j = 1,\dots,n \qquad (2.6)$$

natomiast wektory h_j, ω_j są odpowiednio j-tymi wierszami macierzy H i Ω a x_j^f - j-tą składową wektora x^f. Elementy macierzy H; $h_{jl}(k,i)$ ($j = 1,\dots,n$; $l = 1,\dots,r$) można interpretować jako odpowiedzi układu, obserwowane na j-tym wyjściu w k-tym etapie sterowania, na jednostkowy sygnał sterujący podany na l-te wejście w i-tym etapie, przy założeniu zerowych warunków początkowych i niepobudzeniu pozostałych wejść układu.

Rozpatrzmy przestrzeń $l^*\{\mu_j\}$, której elementami są wektory μ_j wprowadzone w następujący sposób:

$$\mu_j = \left\{g_j,\ -\omega_j,\ h_j(\cdot)\right\}, \qquad (3.1)$$

gdzie element

$$g_j = (\delta_{j\nu}: \nu = 1,\dots,n);\ \delta_{j\nu} = \begin{cases} 1 \text{ dla } j = \nu \\ 0 \text{ dla } j \neq \nu \end{cases} \qquad (3.2)$$

jest j-tym wektorem jednostkowym, wektory ω_j i $h_j(\cdot)$ występują w relacji (2.5).

Zauważmy, że jeżeli wektory μ_j są elementami przestrzeni $l^*\{\mu_j\}$, do której sprzężona jest przestrzeń $l\{\vartheta\}$ elementów $\vartheta = \{\varepsilon^f, \varepsilon^d, u(i)\}$ to wyrażenia (2.5) są liniowymi funkcjonałami $\varphi(\mu_j)$ określonymi na elementach μ_j i zadanymi przez elementy $\vartheta \in l\{\vartheta\}$.

Można wykazać [5], że norma funkcjonału $\varphi(\mu_j)$, określonego na elementach μ_j, zaopatrzonych w normę

$$\|\mu_j\| = M_f\|g_j\|_{z_f^*} + M_d\|\omega_j\|_{z_d^*} + M_p\|h_j(\cdot)\|_q \tag{3.3}$$

ma postać

$$\|\varphi(\mu_j)\| = \max\left[\frac{1}{M_f}\|\varepsilon^f\|_{z_f},\ \frac{1}{M_d}\|\varepsilon^d\|_{z_d},\ \frac{1}{M_p}\|u(i)\|_p\right] \tag{3.4}$$

jeśli tylko $\{h_j(k_1,i)\} \in l^q$; $g_j \in l^{z_f^*}$, $\omega_j \in l^{z_d^*}$, a wskaźniki q, z_f^*, z_d^* sprzężone do p, z_f, z_d spełniają relacje

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1;\quad \frac{1}{z_f} + \frac{1}{z_f^*} = 1;\quad \frac{1}{z_d} + \frac{1}{z_d^*} = 1 \tag{3.5}$$

Porównując (1.8) i (3.4) otrzymujemy

$$\|\varphi(\mu_j)\| = \left[\max \frac{1}{M_f}\|\varepsilon^f\|_{z_f},\ \frac{1}{M_d}\|\varepsilon^d\|_{z_d},\ \frac{1}{M_p}\|u(k)\|_p\right] \leqslant 1 \tag{3.6}$$

Zgodnie z twierdzeniem Kreina [1], [2] rozwiązanie Zadania istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\|\varphi(\mu_j)\|^{-1} = \varrho^o(k_1-k_o) \geqslant 1 \tag{3.7}$$

gdzie

$$\varrho^o(k_1-k_o) = \min_{\lambda_j}\left\|\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\mu_j\right\| = \|\mu^o\| \tag{3.8}$$

przy warunku

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j c_j = 1 \tag{3.9}$$

Minimalną ilość etapów sterowania określa się jako najmniejszą z dodatnich liczb całkowitych $k_1^o - k_o$, przy której spełniony jest warunek (3.7).

Dla wyznaczenia optymalnego elementu $\vartheta^o = \left\{ \varepsilon^{f_o}, \varepsilon^{d_o} u^o(k) \right\}$ $k = k_o, \ldots, k^o - 1$, można wykorzystać następujące twierdzenie.

T w i e r d z e n i e [1]. Optymalny element ϑ^o posiada normę $\|\vartheta^o\| = \left[\varrho^o(k_1^o - k_o) \right]^{-1}$ oraz taką własność, że wartość funkcjonału $\varphi^o(\mu^o)$ wyznaczona przez ten element na wektorze minimalnym μ^o jest największą z możliwych, wśród wszystkich wartości funkcjonałów wyznaczonych przez dopuszczalne wektory ϑ z normą $\|\vartheta\| = \left[\varrho^o(k_1^o - k_o) \right]^{-1}$, czyli

$$\varphi^o(\mu^o) = \max_{\vartheta} \varphi(\mu^o); \quad \text{przy} \ \|\vartheta\| = \frac{1}{\varrho^o(k_1^o - k_o)} \tag{3.10}$$

P r z y k ł a d

Rozpatrzmy układ opisany równaniami różnicowymi

$$\begin{Bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} u(k) \tag{4.1}$$

Należy wyznaczyć takie sterowanie $\left\{ u(k) \right\}$; $k = 0, 1, \ldots, N^o - 1$, które przeprowadza układ (4.1) ze zbioru

$$D(x^d, z_d, M_d) = \left\{ x(o) : \left[(5 - x_1(o))^2 + (0 - x_2(o))^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leqslant 1 \right\} \tag{4.2}$$

do zbioru

$$D(x^f, z_f, M_f) = \left\{ x(N^o) : \left[(0-x_1(N^o))^2 + (0-x_2(N^o))^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2} \right\} \tag{4.3}$$

przy ograniczeniach na elementy ciągu sterującego $|u(k)| \leq 1$, w minimalnej ilości N^o etapów.

Fundamentalna macierz rozwiązań jednorodnej części układu (4.1) ma postać

$$\Omega(k,o) = \begin{bmatrix} 1, & k-o \\ o & 1 \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

natomiast macierz

$$H(N, i) = \begin{bmatrix} h_{11} \\ h_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N - i - 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

Z równań (2.6) wyznaczamy: $c_1 = -5$; $c_2 = 0$, a stąd oraz z warunku (3.9) otrzymujemy: $\lambda_1^o = -\frac{1}{5}$.

Minimalną normę $\frac{1}{\varrho o}$, funkcjonału $\varphi(\mu_j)$, obliczamy wykorzystując (3.8) i (3.3).

$$\varrho^o(N) = \min_{\lambda_1\lambda_2} \left[\frac{1}{2} \left\| \sum_{j=1}^{2} \lambda_j g_j \right\|_2 + 1 \left\| \sum_{j=1}^{2} \lambda_j \omega_j \right\|_2 + \right.$$

$$\left. + 1 \left\| \sum_{j=1}^{2} \lambda_j h_j \right\|_1 \right] = \min_{\lambda_1\lambda_2} \left[\frac{1}{2} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^{\frac{1}{2}} + \right.$$

$$\left. + (\lambda_1^2 + (N\lambda_1 + \lambda_2)^2)^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=0}^{N-1} |\lambda_1 (N-1-i) + \lambda_2| \right] \tag{4.6}$$

Warunek $\varrho^{\,o}(N) \geq 1$ jest spełniony dla $N^o = 4$ i przy $\lambda_2^o = \frac{2}{5}$. Wtedy $\varrho^o(4^o) = 1{,}47$; $\frac{1}{\varrho_o} = 0{,}68$.

Optymalny element ϑ^o wyznaczamy zgodnie z Twierdzeniem, maksymalizując wartość funkcjonału

$$\varphi(\mu^o) = \sum_{i=0}^{N^o-1} \mu^o(i)\vartheta^T(i), \quad \text{przy} \|\vartheta\| = 0{,}68 \tag{4.7}$$

na minimalnym elemencie

$$\mu^o = \sum_{j=1}^{2} \lambda_j^o \mu_j = -\frac{1}{5}\mu_1 + \frac{2}{5}\mu_2 = \left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\right) \tag{4.8}$$

Wyznaczenie elementu ϑ^o jest klasycznym problemem poszukiwania maksimum warunkowego, który można rozwiązać np. metodą mnożników Langrange'a.

W wyniku obliczeń otrzymujemy

$$x_1^o(o) = 4{,}7, \quad x_2^o(o) = -0{,}61; \quad x_1^o(4) = 0{,}15;$$

$$x_2^o(4) = -0{,}30;$$

$$\left\{u^o\right\} = \left\{-0{,}68, \ -0{,}37, \ +0{,}68, \ +0{,}68\right\}.$$

Łatwo sprawdzić, że optymalne punkty: początkowy $(x_1^o(o), x_2^o(o))$ i końcowy $(x_1^o(4), x_2^o(4))$ należą odpowiednio do zbiorów (4.2) i (4.3), a optymalne sterowanie $\left\{u^o\right\}$ przeprowadza układ (4.1) z $(x_1^o(o), x_2^o(o))$ do $(x_1^o(4), x_2^o(4))$.

U w a g i i w n i o s k i

Wszystkie przeprowadzone w pracy rozważania można bez trudu rozszerzyć na przypadki

1) Zbiór D_f jest przekrojem s zbiorów ($D_f = \bigcap_{i=1}^{s} D_{fi}$; $s \leqslant n$) wyznaczonych przez układ nierówności

$$\left(\sum_{j=1}^{j_1} |\varepsilon_j^f|^{z_{f1}}\right)^{\frac{1}{z_{f1}}} \leqslant M_{f1}, \ldots, \left(\sum_{j=j_{s-1}+1}^{j_s=n} |\varepsilon_j^f|^{z_{fs}}\right)^{\frac{1}{z_{fs}}} \leqslant M_{fs} \qquad (5.1)$$

2) Na poszczególne składowe $u_l(k)$ wektora $u(k)$ nałożone są ograniczenia globalne o różnej postaci

$$\|u_l(k)\|_{p_l} \leqslant M_{p_l}; \quad l = 1, \ldots, r \qquad (5.2)$$

W przypadku 2) wystarczy wprowadzić nową normę

$$\|u(k)\| = \max_l \left\{\frac{1}{M_{p_l}} \|u_l(k)\|\right\}; \quad l = 1, \ldots, r \qquad (5.3)$$

i definiować zbiór sterowań dopuszczalnych w następujący sposób

$$U = \left\{\{u(k)\}: \|u(k)\| \leqslant 1\right\} \qquad (5.4)$$

Norma $\|u(k)\|$ dana jest przez (5.3).

Warto zwrócić uwagę, że przez odpowiednie zdefiniowanie elementu μ_j i jego normy można było sprowadzić postawione zadanie do dobrze znanych problemów sterowania "z punktu do punktu". Pozwoliło to na wykorzystanie rezultatów prac [1-4].

P o d z i ę k o w a n i e

Niniejsza praca powstała dzięki inspiracji Doc. R. Gessinga, któremu pragnę tą drogą wyrazić podziękowanie za cenne dyskusje i uwagi.

LITERATURA

1. Krasowskij N.N.: Tieorija uprawlenija dwiżenijem, Moskwa 1968.
2. Gabasow R., Kiriłłowa F.: Kaczestwiennaja tieorija optimalnych processow, Moskwa 1971.
3. Kulikowski R.: Procesy optymalne i adaptacyjne w układach regulacji automatycznej, PWN, Warszawa 1965.
4. Malanowski K., Rolewicz S.: Zastosowanie płaszczyzn podpierających się do wyznaczania sterowania czasowo optymalnego, Arch. Autom. i Telemech. v. X, 1965.
5. Alexiewicz A.: Analiza funkcjonalna, PWN, Warszawa 1969.
6. Derusso P.M., Roy R.I., Close C.M.: State variables for enginners, New York 1965.

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ФИНИШНОМ УПРАВЛЕНИИ ДИСКРЕТНЫМИ СИСТЕМАМИ

Р е з ю м е

В статье рассмотрена задача определения последовательности управлений, котсрая переводит линейную систему разностных уравиений с некоторого множества начальных состояний в какую - нибудь точку из заданного множества конечных состояний за минимально возможное число шагов.

Принимаем, что на все члены управляемой последовательности, а также на некоторый функционал, заданный на управлении, наложены ограничения.

Задача решается путем сведения к так называемой Л-проблеме моментов. Показано, что принятый подход к решению поставленной проблемы позволяет достигнуть общих результатов для широкого класса допускаемых управлений и неодинаково определеных множеств начальных и конечных точек процесса.

В статье приведён численный пример.

ON OPTIMAL TARGET CONTROL OF A DISCRETE SYSTEM

S u m m a r y

This paper presents the method of determining the sequence of control signals, that transfers an investigated system, given by the difference equations, from a certain initial conditions set to a prescribed target set in minimum stages quantity.

We assume that each component of control sequence and a certain functional defined on the control sequence are restricted.

The problem has been solved by means of transition to the so called L - problem of M.G. Krein. It has been demonstrated that this method makes possible receiving general results for a large class of the admissible control and differently defined sets of the initial and final process points.

Considerations have been illustrated by a numerical example.