ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1974

Seria: Automatyka, z. 27 Nr kol. 396

Andrzej Królikowski

Studium Doktoranckie
przy Wydziale Automatyki i Informatyki

SYNTEZA SUBOPTYMALNEGO CIĄGU ESTYMUJĄCEGO

Streszczenie. W artykule rozpatrzono zagadnienie doboru ciągu sterowań $\underline{u}_N$ maksymalizującego ślad odwrotności macierzy kowariancji estymaty wektora nieznanych parametrów funkcji impulsowej procesu, przy ograniczeniu energii sterowań. Przyjęcie modelu dyskretnego oraz rozwiązania suboptymalnego pozwoliło na wybór innej metody rozwiązywania, wydaje się łatwiejszej, aniżeli w pracy [1] dla układu ciągłego.

1. Wstęp

W poniższym artykule rozpatrzono problem optymalnej estymacji wektora nieznanych parametrów procesu, przy ograniczeniu energii sygnałów sterujących. Problem optymalności estymacji polega na maksymalizacji śladu odwrotności macierzy kowariancji estymaty $\hat{\underline{\theta}}$, poprzez dobór ciągu sterowań $\underline{u}_N$. Rozwiązanie tego problemu jest rozwiązaniem suboptymalnym w stosunku do problemu rozpatrywanego w pracy [1] dla procesu ciągłego, gdzie problem optymalizacji polegał na minimalizacji śladu macierzy kowariancji estymaty $\hat{\underline{\theta}}$ i stanowił całkowe równanie macierzowe bardzo trudne do rozwiązania. Dla przypadku jednego nieznanego parametru było to równanie całkowe Fredholma drugiego rodzaju. Niestety nie podano tam sposobu ogólnego rozwiązania tego równania. W niniejszej pracy rozważa się model dyskretny, co pozwala na uniknięcie rozwiązania warunku optymalności metodą mnożników Lagrange'a, a sprowadza rozwiązanie do zagadnienia wartości i wektorów własnych, których znajdowanie wydaje się być łatwiejsze z uwagi na istniejące, dobrze opracowane metody.

2. Opis procesu i warunek optymalności ciągu $\underline{u}_N$

Liniowy proces da się wyrazić całką splotu

$$x(t) = \int_0^t g(t,\tau)u(\tau)d\tau, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T \tag{1}$$

gdzie $g(t,\tau)$ jest odpowiedzią impulsową, $u(\tau)$ sygnałem wejściowym w chwili τ, zaś $x(t)$ jest wyjściem w chwili t.

Wyjście $x(t)$ jest mierzone z pewnym szumem $\xi(t)$, tzn.

$$y(t) = x(t) + \xi(t), \tag{2}$$

gdzie $y(t)$ jest mierzonym wyjściem. Wielkości u, x, y są skalarne. Należy estymować wektor $\underline{\theta}$ nieznanych parametrów występujących w odpowiedzi impulsowej $g(t,\tau)$

$$g(t,\tau) = g(t,\tau,\underline{\theta}) \tag{3}$$

gdzie

$$\underline{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \theta_n \end{bmatrix} \tag{4}$$

Zakłada się, że $g(t,\tau,\underline{\theta})$ jest liniowe względem $\underline{\theta}$ i wtedy

$$g(t,\tau,\underline{\theta}) = \theta_1 g_1(t,\tau) + \theta_2 g_2(t,\tau) + \ldots + \theta_n g_n(t,\tau) \tag{5}$$

Analogiczną postać można uzyskać zakładając, że odchylenie wektora $\underline{\theta}$ od $\underline{\theta}_o$ jest dostatecznie małe, tak, że można dokonać linearyzacji sygnału wyjściowego w stosunku do zmian parametrów. Przyjmijmy dla prostoty układ stacjonarny, wtedy (5) jest

$$g(t-\tau,\underline{\theta}) = \theta_1 g_1(t-\tau) + \theta_2 g_2(t-\tau) + \ldots + \theta_n g_n(t-\tau) \tag{6}$$

Zakładając, że przyjęto właściwy okres próbkowania równanie (2), mając na uwadze (1) i (6), można napisać w przybliżonej wersji dyskretnej

$$y_k = x_k + \xi_k \tag{7}$$

oraz

$$x_k = \theta_1 \sum_{i=0}^{k-1} h_{k-i}^{(1)} u_i + \ldots + \theta_n \sum_{i=0}^{k-1} h_{k-i}^{(n)} u_i \qquad k = 1,2,\ldots N \tag{8}$$

gdzie $h_i^{(j)}$ dla $i = 1,2,\ldots N$ oraz $j = 1,2,\ldots n$ są wartościami odpowiadającymi odpowiedziom impulsowym $g_j(t)$ dla chwili $t = iT$, gdzie T jest okresem dyskretyzacji. Mamy również

$$h_0^{(j)} = h_{-1}^{(j)} = h_{-2}^{(j)} = \ldots = 0 \tag{9}$$

dla każdego j oraz

$$y_k = y(kT), \quad x_k = x(kT), \quad \xi_k = \xi(kT), \quad u_k = u(kT) \tag{10}$$

Równanie (8) można napisać następująco

$$x_k = \underline{h}_k^T \underline{\theta}, \tag{11}$$

gdzie

$$\underline{h}_k^T = \left[\sum_{i=0}^{k-1} h_{k-i}^{(1)} u_i, \ldots, \sum_{i=0}^{k-1} h_{k-i}^{(n)} u_i \right] \tag{12}$$

Równania (11) i (7) dla $k = 1,2,\ldots N$ można napisać w następującej postaci macierzowej

$$\underline{y}_N = H_N\underline{\theta} + \underline{\xi}_N \tag{13}$$

gdzie

$$\underline{y}_N^T = (y_1, y_2, \ldots y_N)$$

$$\underline{\xi}_N^T = (\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_N) \tag{14}$$

$$H_N^T = (\underline{h}_1, \underline{h}_2, \ldots, \underline{h}_N).$$

Jeśli

$$E(\underline{\xi}_N) = 0$$

oraz

$$E(\underline{\xi}_N\underline{\xi}_N^T) = \sigma^2 I \tag{15}$$

gdzie E operator uśredniania statystycznego, zaś I_{NxN} macierz jednostkowa, to zgodnie z liniową teorią estymacji estymata $\hat{\underline{\theta}}$ jest

$$\hat{\underline{\theta}} = (H_N^T H_N)^{-1} H_N^T \underline{y}_N \tag{16}$$

zaś macierz kowariancji wektora $\hat{\underline{\theta}}$ jest

$$\Psi = E\left[(\underline{\theta} - \hat{\underline{\theta}})(\underline{\theta} - \hat{\underline{\theta}})^T\right] = \sigma^2 B^{-1} \tag{17}$$

gdzie

$$B = H_N^T H_N \tag{18}$$

Mając na uwadze (12) można macierz H_N^T zapisać w postaci

$$H_N^T = \begin{bmatrix} \underline{u}_N^T \underline{h}_1^{*(1)}, \ldots, \underline{u}_N^T \underline{h}_N^{*(1)} \\ \vdots \qquad \vdots \\ \underline{u}_N^T \underline{h}_1^{*(n)}, \ldots, \underline{u}_N^T \underline{h}_N^{*(n)} \end{bmatrix}_{[n\times N]} = \begin{bmatrix} \underline{u}_N^T H_1^* \\ \hline \vdots \\ \hline \underline{u}_N^T H_n^* \end{bmatrix} \tag{19}$$

gdzie

$$\underline{u}_N^T = (u_0, u_1, \ldots, u_{N-1}) \quad \underline{h}_k^{*(q)^T} = (h_k^{(q)}, h_{k-1}^{(q)}, \ldots, h_1^{(q)}, 0, \ldots, 0)_{[1\times N]}$$

$$H_q^* = (\underline{h}_1^{*(q)}, \ldots, \underline{h}_N^{*(q)})_{N\times N} \quad \text{dla } k = 1,2,\ldots,N \quad q = 1,2,\ldots,n \tag{20}$$

Zatem elementy macierzy B są formami kwadratowymi od $\underline{u}_N$

$$B = \begin{bmatrix} \underline{u}_N^T H_1^* H_1^{*T} \underline{u}_N & \ldots & \underline{u}_N^T H_1^* H_n^{*T} \underline{u}_N \\ \underline{u}_N^T H_2^* H_1^{*T} \underline{u}_N & \ldots & \underline{u}_N^T H_2^* H_n^{*T} \underline{u}_N \\ \vdots & & \vdots \\ \underline{u}_N^T H_n^* H_1^{*T} \underline{u}_N & \ldots & \underline{u}_N^T H_n^* H_n^{*T} \underline{u}_N \end{bmatrix}_{(n\times n)} \tag{21}$$

Postępując analogicznie jak w [1] można pokazać, że ciąg $\underline{u}_N$ spełniający warunek

$$\min_{\underline{u}_N} \operatorname{tr} \Psi \tag{22}$$

przy ograniczeniu

$$\underline{u}_N^T \underline{u}_N = 1 \tag{23}$$

wyznacza się z równania

$$\operatorname{tr}\Psi^2\left[Bu_i - \sum_{j=0}^{N-1}\Lambda_{(i,j)}u_j\right] = 0 \qquad i = 0,1,\dots,N-1 \tag{24}$$

gdzie macierz $\Lambda_{(i,j)}$ spełniają równanie

$$B = \sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1}\Lambda_{(i,j)}u_i u_j \tag{25}$$

Równanie (24) dla $n > 1$ jest bardzo trudne do rozwiązania. Łatwo zauważyć, że $\operatorname{tr} B$ ma postać formy kwadratowej

$$\operatorname{tr}B = \underline{u}_N^T\,(H_1^* H_1^{*T} + \dots + H_n^* H_n^{*T})\,\underline{u}_N = \underline{u}_N^T\,H\,\underline{u}_N \tag{26}$$

3. Wyznaczanie ciągu suboptymalnego $\hat{\underline{u}}_N$

Mając na uwadze trudności związane z rozwiązaniem równania (24) wyznaczamy ciąg sterowań $\underline{u}_N$ spełniający warunek

$$\min_{\underline{u}_N}\frac{1}{\operatorname{tr}\Psi^{-1}} = \max_{\underline{u}_N}\operatorname{tr}\Psi^{-1} = \max_{\underline{u}_N}\operatorname{tr} B \tag{27}$$

przy ograniczeniu (23).

Zgodnie z rozważaniami z pracy [2] $\operatorname{tr} B$ może służyć jako wskaźnik jakości identyfikacji, a dla $N\to\infty$ wskaźniki $\operatorname{tr}\Psi$ oraz $\dfrac{1}{\operatorname{tr}\Psi^{-1}}$ są równoważne gdy dla $\Psi > 0$

$$\lim_{N\to\infty}\operatorname{tr}\Psi = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{\operatorname{tr}\Psi^{-1}} = 0 \tag{28}$$

Ciąg sterowań spełniający warunek (27) nazywamy ciągiem suboptymalnym $\hat{\underline{u}}_N$.

Łatwo zauważyć, że macierz H jest symetryczna, a wtedy największa wartość własna λ_{max} macierzy H jest największą wartością formy kwadratowej (26) na sferze $\underline{u}_N^T\underline{u}_N = 1$, tzn.

$$\max \operatorname{tr} B = \lambda_{max} \tag{29}$$

zaś wektor własny $\underline{u}$ odpowiadający tej wartości własnej jest szukanym ciągiem sterowań suboptymalnych $\hat{\underline{u}}_N$, to znaczy spełnia on równanie

$$H\hat{\underline{u}}_N = \lambda_{max}\hat{\underline{u}}_N \tag{30}$$

Znalezienie wartości własnej λ_{max} oraz rozwiązanie równania (30) wydaje się być łatwiejszym zadaniem (zwłaszcza dla niedużych N) niż rozwiązanie warunku (24), ze względu na istniejące dobrze opracowane metody znajdowania wartości i wektorów własnych macierzy symetrycznych [3].

4. Przypadek n = 1

W przypadku jednego nieznanego parametru, tzn. gdy n = 1, macierz kowariancji Ψ redukuje się do jednowymiarowej wariancji, a uzyskany ciąg sterowań zgodnie z warunkiem (27) jest optymalny również w sensie warunku (22). Macierz H_N ma teraz postać wektora kolumnowego [Nx1]

$$H_N = \begin{bmatrix} h_1 & & & \text{\large 0} \\ h_2 & h_1 & & \\ h_3 & h_2 & h_1 & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ h_N & h_{N-1} & \cdots\cdots & h_1 \end{bmatrix} \underline{u}_N = \overset{*}{H}{}_1^T \underline{u}_N \tag{31}$$

Macierz B redukuje się tu do postaci

$$B = H_N^T H_N = \underline{u}_N^T G_N \underline{u}_N \tag{32}$$

gdzie

$$G_N = H_1^* H_1^{*T} \tag{33}$$

jest macierzą symetryczną dodatnio określoną. Warunek optymalności jest

$$\min_{\underline{u}_N} \Psi \hat{=} \max_{\underline{u}_N} B = \lambda_{max} \tag{34}$$

dla

$$\underline{u}_N^T \underline{u}_N = 1$$

Zachodzi tu

$$H = G_N \tag{35}$$

gdzie macierz H jest macierzą formy kwadratowej z równania (26), zas λ_{max} jest największą wartością własną macierzy G_N.

Optymalny ciąg sterujący wyznacza się zatem z równania

$$G_N \underline{u}_N^o = \lambda_{max} \underline{u}_N^o \tag{36}$$

5. <u>Przykład</u>

Niech obiekt będzie opisany równaniem dyskretnym

$$x_k = \theta \sum_{i=0}^{k-1} h_{(k,k-i)} u_i$$

$$y_k = x_k = \xi_k \quad k = 1,2,3$$

Własności statystyczne szumu są znane

$$E(\xi_k) = 0, \quad E(\xi_k^2) = \sigma^2 = 1$$

Należy znaleźć ciąg sterowań optymalnych $\underline{u}_3^{oT} = (u_o^o, u_1^o, u_2^o)$ zapewniających spełnienie warunku (34).

Zdyskretyzowane odpowiedzi impulsowe wynoszą

$$h_{1,1} = 1,66 \; h_{2,2} = 0,757 \; h_{2,1} = 2,2 \; h_{3,3} = 0,82 \; h_{3,2} = 0,41 \; h_{3,1} = 2,44$$

Równanie (33) ma postać

$$\underline{u}_3^T G_3 \underline{u}_3 = \begin{bmatrix} u_o, & u_1, & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_o \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Największa wartość własna λ_{max} macierzy G_3 wynosi

$$\lambda_{max} = 8,387$$

a odpowiadający jej wektor własny, tj. optymalny ciąg sterowań $\underline{u}_3^o$, po uwzględnieniu warunku normalizacyjnego $\underline{u}_3^{oT} \underline{u}_3^o = 1$, jest

$$\underline{u}_3^o = \begin{bmatrix} 0,538 \\ 0,513 \\ 0,666 \end{bmatrix}$$

Łatwo sprawdzić, że

$$\underline{u}_3^{oT} G_3 \underline{u}_3^o = 4u_o^{o2} + 5u_1^{o2} + 6u_2^{o2} + 4u_o^o u_1^o + 4u_o^o u_2^o + 2u_1^o u_2^o =$$

$$= 8,387 = \lambda_{max}$$

LITERATURA

1. Levadi V.S.: Design of Input Signals for Parameter Estimation IEEE Trans. on Automatic Control No. 2 April 1966.
2. Królikowski A.: Dobór optymalnego ciągu identyfikującego Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, seria "Automatyka", nr 25.
3. Demidowicz B.P., Maron I.A.: Metody numeryczne, część I, Warszawa 1965.

СИНТЕЗ СУБОПТИМАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ОЦЕНКИ

Р е з ю м е

Рассматравается задача подбора последовательности входных сигналов максимизирующей след обратной для ковариационной матрицы оценки вектора неизвестных параметров $\underline{\theta}$ в импульсной функции процесса при ограничении энергии управляющих сигналов. Использование дискретной модели позволило решить задачу субоптимальным методом,что представляется более простым в сравнении с оптимальным методом для непрерывной системы, рассматриваемой в работе [1].

THE SYNTHESIS OF SUBOPTIMAL ESTIMATING SCHEME

S u m m a r y

This paper is concerned with a problem of choosing a sequence of input signals to maximize the trace of the inverse of the covariance matrix of the estimate of the vector of unknown parameters θ in response function of the process, subject to an energy constraint on the input signals. It seems that, in the case of discrete model, the suboptimal solution of optimization problem is simpler than in the continuous time oase as in [1].