ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1974

Seria: Automatyka, z. 27 Nr kol. 396

Jerzy Mikulski, Jerzy Klamka

Instytut Automatyki Procesów Przemysłowych i Pomiarów

SYNTEZA MINIMALNEJ SIECI ZŁOŻONEJ Z LOGICZNYCH ELEMENTÓW PROGOWYCH

Streszczenie. W artykule przedstawiono sposób syntezy sieci logicznej, która realizuje funkcje przełączające przy użyciu minimalnej ilości elementów progowych. Definicyjne warunki, by funkcja przełączająca była funkcją progową, dane są w postaci macierzowej, a algorytm jest oparty na założeniu, że nie ma dodatniej liniowej zależności w wierszach tej macierzy dla funkcji linioworozdzielalnych (to znaczy dla funkcji progowych). Dla funkcji nierozdzielalnych dodatnia liniowa zależność jest usuwana przez dodanie kolumn (odpowiadających wyjściom poprzednich elementów progowych w sieci) do macierzy. Algorytm jest ilustrowany przykładami syntezy sieci dwu elementowej.

Podczas procesu syntezy sieci logicznej realizującej funkcje przełączające problemem o pierwszoplanowym znaczeniu jest użycie minimalnej ilości elementów logicznych. Istnieje wiele metod projektowania układów logicznych złożonych z elementów progowych [1] - [7], lecz w większości wypadków ich zastosowanie, szczególnie dla dużej ilości zmiennych, staje się mało praktyczne i w ogólnym przypadku dla funkcji nie będących funkcjami progowymi nie prowadzi do rozwiązań minimalnych. Dlatego też celowym wydaje się przedstawienie generalnej metody syntezy prowadzącej do rozwiązań minimalnych, czyli bardziej ekonomicznych. Metoda ta nadaje się do praktycznych obliczeń na maszynach cyfrowych bez żadnych ograniczeń, za wyjątkiem wielkości pamięci maszyn cyfrowych. Metoda była sprawdzona na maszynie cyfrowej GIER, gdzie powyższy warunek spowodował wprowadzenie ograniczenia ilości zmiennych do siedmiu.

Na wstępie podać należy kilka koniecznych określeń. Element progowy jest to element logiczny posiadający n argumentów wejściowych ($x_1, x_2, \ldots, x_n$) i jedno wyjście. Wejścia i wyjście są zmiennymi binarnymi mogącymi przyjmować dwie wartości (0 i 1). Każdemu wejściu przyporządkowana jest pewna liczba całkowita w_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) zwana wagą i-tej zmiennej. Istnieje jeszcze całkowita liczba w_o zwana progiem. Zarówno w_i, jak i w_o są to liczby rzeczywiste mogące przyjmować wartości dodatnie i ujemne.

Strukturę elementu progowego będziemy określać wektorem współczynników $W^T = [w_o; w_1, w_2, \ldots, w_n]$. Współczynnik progowy w_o jak i wagowe współczynniki w_i całkowicie określają działanie elementu progowego, a tym samym funkcję logiczną, którą on realizuje.

Funkcję przełączającą $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, która opisuje pracę tego elementu nazywamy funkcją progową. Funkcją progową jest funkcja przełączająca, gdy spełnia następujące warunki:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1, \quad \text{gdy} \quad w_o + \sum_{i=1}^{n} w_i x_i > 0$$

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \quad \text{gdy} \quad w_o + \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leqslant 0 \tag{1}$$

gdzie operacje sumy i iloczynu są operacjami arytmetycznymi.

Dla ułatwienia dalszych rozważań definicję funkcji progowej zapiszemy inaczej definiując stale równy jeden współczynnik x_o i wyrównując groty nierówności

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1 \quad \text{gdy} \quad \sum_{i=0}^{n} w_i x_i \geqslant 1$$

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \quad \text{gdy} \quad -\sum_{i=0}^{n} w_i x_i \geqslant 0. \tag{2}$$

Jeśli uporządkowany leksykograficznie ciąg n wag, będziemy nazywać wektorem kolumnowym wag typu $[(n+1)x1]$

$$W = \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ w_n \end{bmatrix}$$

Tablica wejściowa niech będzie macierzą typu $[2^n x(n+1)]$.

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Dla ułatwienia sformalizowania zapisów funkcję $F(x_1,x_2,\dots,x_n)$ będziemy podawać w postaci wektora kolumnowego typu $[2^n x1]$

$$F = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_{2^n-1} \end{bmatrix}$$

gdzie

$f_i = 1$, jeśli $F(x_{i1},x_{i2},\dots,x_{in}) = 1$

$f_i = 0$, jeśli $F(x_{i1},x_{i1},\dots,x_{in}) = 0$

W tablicy wejściowej nie są uwzględnione znaki występujące przed częścią nierówności. W celu uwzględnienia ich wprowadzimy diagonalną macierz A typu $\left[2^n \times 2^n\right]$:

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & & a_{2^n-1} \end{bmatrix}$$

gdzie

$a_i = 1$, jeśli $F(x_i, \ldots, x_{in}) = 1$

$a_i = -1$, jeśli $F(x_{i1}, \ldots, x_{in}) = 0$.

Po wprowadzeniu tych zapisów ważoną sumę z definicji funkcji progowej można zapisać w postaci macierzowej

$$AXW \geqslant F \tag{3}$$

Jeżeli posługiwalibyśmy się geometryczną interpretacją funkcji przełączającej, to kolejne zespoły argumentów wejściowych reprezentowane przez ciąg $(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n}), \ldots, (x_{2^n-1\ 1}, x_{2^n-1\ 2}, \ldots, x_{\frac{n}{2}-1n})$ cyfr binarnych (0,1) można traktować jako współrzędne kolejnych wierzchołków w przestrzeni n-wymiarowej.

Znając definicyjne warunki, by funkcja przełączająca była funkcją progową, można zauważyć, że zawsze powinno istnieć dla funkcji progowych liniowe równanie (n-1) wymiarowej płaszczyzny

$$w_o x_o + w_1 x_1 + w_2 x_2 + \ldots + w_n x_n = 0 \tag{4}$$

oddzielające wierzchołki odpowiadające $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$ (dla których $w_o x_o + \ldots + w_n x_n > 0$) od wierzchołków odpowiadających $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ (dla których $w_o x_o + \ldots + w_n x_n \leqslant 0$).

A więc funkcja progowa jest funkcją linioworozdzielalną (i oczywiście vice versa). Jest to warunek konieczny i wystarczający realizowalności funkcji przełączającej przy użyciu pojedynczego elementu progowego.

Jeśli funkcja przełączająca jest funkcją linioworozdzielalną, wtedy układ nierówności (3) ma rozwiązanie i otrzymać je można wykorzystując znane procedury programowania liniowego przy warunku rozwiązania minimalnego w liczbach całkowitych. Dla funkcji linioworozdzielalnych współczynniki wagowe i progowy określają działanie elementu, przy czym pamiętać należy, że na wejście o wadze w_i oddziaływuje sygnał wejściowy x_i.

Przed rozważaniem problemu syntezy sieci logicznej złożonej z elementów progowych dla funkcji nierozdzielalnych liniowo podamy warunek konieczny i wystarczający liniowej rozdzielalności funkcji przełączającej.

T w i e r d z e n i e

Warunkiem koniecznym i wystarczającym, aby układ nierówności (3) $AXW \geqslant F$ miał rozwiązanie W (i wtedy funkcja przełączająca byłaby funkcją linioworozdzielalną) jest, aby układ równań

$$X^T A^T B = 0 \qquad (5)$$

nie miał rozwiązań nieujemnych.

D o w ó d

Dla skrócenia zapisu wprowadza się oznaczenie

$$AX = M^T \qquad (6)$$

gdzie M jest macierzą typu $\left[(n+1) \times 2^n\right]$.

Stąd relacje (3) i (5) przyjmują postać

$$M^TW \geqslant F \tag{7}$$

$$MB = 0 \tag{8}$$

Relację (7) można przedstawić w postaci

$$W^TM - F^T \geqslant 0 \tag{9}$$

Wprowadzając oznaczenia

$$Z = \left[W^T \,\vdots\, 1 \right] \tag{10}$$

gdzie Z jest wektorem wierszowym (n+2) wymiarowym

$$K = \begin{bmatrix} M \\ \hdashline -F^T \end{bmatrix} \tag{11}$$

gdzie K jest macierzą typu $\left[(n+2) \times 2^n\right]$, można układ nierówności (9) zapisać w postaci równoważnej

$$ZK \geqslant 0 \tag{12}$$

W dalszej części dowodu, zamiast układu równań (8), będzie rozważać się równoważny mu układ

$$KB = Q \tag{13}$$

gdzie

$Q = \begin{bmatrix} 0 \\ \hdashline -F^TB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \hdashline q \end{bmatrix}$ Q jest wektorem kolumnowym o wymiarze (n+2) (14)

$$q = -F^TB \tag{15}$$

Warunek wystarczający

Załóżmy, że układ (5) nie ma rozwiązań nieujemnych. Wykażemy, że wówczas układ nierówności (3) ma rozwiązanie. Jeżeli układ równań (5) nie ma rozwiązań nieujemnych, to również równoważny mu układ równań (13) nie ma rozwiązań nieujemnych.

Rozpatrzmy dwa przypadki

1. Układ (13) nie posiada w ogóle rozwiązań,
2. Układ (13) posiada rozwiązania, ale nie ma rozwiązań nieujemnych.

ad 1. Jeżeli układ równań (13) nie posiada w ogóle rozwiązań, to [8]

$$\mathrm{rz}\,K < \mathrm{rz}\left[K \mid Q\right] \quad \text{oraz} \quad \mathrm{rz}\,K \leqslant (n+1) \tag{16}$$

i wektor kolumnowy Q nie jest kombinacją liniową wektorów K_j ($j = 1,2,\ldots,2^n$), gdzie K_j oznacza j-tą kolumnę macierzy K. Niech zatem $\mathrm{rz}\,K = s \leqslant n+1$ i przypuśćmy, że kolumny macierzy K zostały tak ponumerowane, że wektory $K_1, K_2, \ldots, K_s$ są liniowo niezależne. Stąd wynika [8], że układ równań

$$Z\left[K_1 \mid K_2 \mid \ldots \mid K_s\right] = 0 \tag{17}$$

posiada przynajmniej jedno rozwiązanie $\bar{Z}$.

Z drugiej strony, ponieważ macierz K jest rzędu s, więc

$$K_p = \sum_{j=1}^{s} \mu_{jp} K_j \quad (p = s+1, s+2, \ldots, 2^n) \tag{18}$$

Równość (18) wynika z faktu, że kolumny $K_{s+1}, K_{s+2}, \ldots, K_{2^n}$, są kombinacjami liniowymi kolumn $K_1, K_2, \ldots, K_s$.

Na mocy równości (18) mamy

$$\bar{Z}K_p = \bar{Z}\sum_{j=1}^{s} \mu_{jp} K_j = \sum_{j=1}^{s} \mu_{jp} \bar{Z}K_j = 0 \quad (p = s+1, \ldots, 2^n) \tag{19}$$

czyli

$$\bar{Z}K = 0 \tag{20}$$

a zatem układ równań

$$ZK = 0 \tag{21}$$

posiada przynajmniej jedno rozwiązanie, czyli w konsekwencji układ nierówności (12), a tym samym i układ nierówności (3) ma przynajmniej jedno rozwiązanie.

ad 2. Jeżeli układ (13) posiada rozwiązanie, ale nie ma rozwiązań nieujemnych, to dowód istnienia rozwiązania układu nierówności (3) przeprowadzimy przez indukcję względem liczby r kolumn macierzy K.

Dla $r = 1$ układ o jednej niewiadomej

$$K_1 b = Q \tag{22}$$

ma z założenia rozwiązanie ujemne $\bar{b} < 0$. Stąd, uwzględniając fakt, że dla wektora kolumnowego F zachodzi nierówność

$$F \geqslant 0 \tag{23}$$

łatwo sprawdzić, że wektor wierszowy

$$\bar{Z} = \left[0 \,\vdots\, , F^T\bar{b}\right] \tag{24}$$

jest rozwiązaniem układu nierówności $ZK_1 \geqslant 0$. Rzeczywiście

$$\bar{Z}K_1 = \bar{Z}\frac{1}{\bar{b}}Q = \frac{1}{\bar{b}}\left[0 \,\vdots\, , F^T\bar{b}\right]\begin{bmatrix} 0 \\ \hline -F^T\bar{b} \end{bmatrix} = \frac{1}{\bar{b}}(F^T\bar{b})(-F^T\bar{b}) = -\frac{1}{\bar{b}}(F^T\bar{b})^2 \tag{25}$$

Ponieważ $\bar{b} < 0$, więc

$$\bar{Z}K_1 = -\frac{1}{\bar{b}}(F^T\bar{b})^2 > 0 \qquad (26)$$

czyli układ nierówności $\bar{Z}K_1 \geqslant 0$ posiada rozwiązanie. Przypuśćmy, że twierdzenie zachodzi dla macierzy K o(r-1) kolumnach. Wykażemy, że zachodzi ono również dla macierzy K o r kolumnach. Z założenia układ

$$\sum_{j=1}^{r} K_j b_j = Q \qquad (27)$$

ma rozwiązanie, ale nie ma rozwiązania nieujemnego. Wobec tego nie istnieje również rozwiązanie nieujemne układu

$$\sum_{j=1}^{r-1} K_j b_j = Q \qquad (28)$$

bo takie rozwiązanie po dołączeniu $b_r = 0$ spełniałoby układ (27). Ponieważ na mocy założenia indukcyjnego twierdzenie jest słuszne dla (r-1), więc istnieje wektor wierszowy $\bar{Z}$, taki że

$$\bar{Z}\left[K_1, K_2, \ldots, K_{r-1}\right] \geqslant 0 \qquad (29)$$

Należy rozważyć dwa przypadki:

Przypadek pierwszy:

$$\bar{Z}K_r \geqslant 0 \qquad (30)$$

wówczas wektor $\bar{z}$ jest rozwiązaniem układu nierówności

$$\bar{z}\left[K_1, K_2, \ldots, K_{r-1}, K_r\right] \geqslant 0 \tag{31}$$

i twierdzenie zostało udowodnione.

Przypadek drugi:

$$\bar{z}K_r < 0 \tag{32}$$

Wprowadźmy do rozważań nowe wektory zdefiniowane w sposób następujący

$$K_j' = K_j + \lambda_j K_r, \text{ gdzie } \lambda_j = -\frac{\bar{z}K_j}{\bar{z}K_r} \geqslant 0 \ (j = 1,2,\ldots,r-1) \tag{33}$$

Stosując oznaczenia (33) układ

$$\sum_{j=1}^{r-1} K_j' b_j' = Q \tag{34}$$

gdzie b_j' $(j = 1,2,\ldots,r-1)$ są nowymi niewiadomymi, można zapisać w postaci

$$\sum_{j=1}^{r-1} K_j' b_j' = \sum_{j=1}^{r-1} (K_j + \lambda_j K_r) b_j' = \sum_{j=1}^{r-1} K_j b_j' + \sum_{j=1}^{r-1} \lambda_j K_r b_j' =$$

$$= \sum_{j=1}^{r-1} K_j b_j' + K_r \sum_{j=1}^{r-1} \lambda_j b_j' = Q \tag{35}$$

Układ (35) nie może mieć rozwiązania nieujemnego względem b_j $(j = 1,2, \ldots,r-1)$, bo wówczas z układu (35) wynikałoby, że układ (13) ma rozwiązania nieujemne, co przeczy założeniu. Zatem na mocy założenia indukcyjnego istnieje wektor wierszowy $\bar{z}'$ będący rozwiązaniem układu nierówności

$$\bar{Z}'[K_1', K_2', \dots, K_{r-1}'] \geqslant 0 \tag{36}$$

Określając wektor wierszowy $\tilde{Z}$ następująco

$$\tilde{Z} = \bar{Z}' - \frac{\bar{Z}'K_r}{\bar{Z}K_r}\bar{Z} \tag{37}$$

otrzymujemy na mocy zależności (33) relacje

$$\tilde{Z}K_j = \left[\bar{Z}' - \frac{\bar{Z}'K_r}{\bar{Z}K_r}\bar{Z}\right]K_j = \bar{Z}'\left[K_j - \frac{\bar{Z}K_j}{\bar{Z}K_r}K_r\right] = \bar{Z}'\left[K_j - \lambda_j K_r\right] = \bar{Z}'K_j' \tag{38}$$

$(j = 1,2,\dots,r-1)$.

Stąd na mocy relacji (36) mamy

$$\tilde{Z}[K_1, K_2, \dots, K_{r-1}] = \bar{Z}'[K_1', K_2', \dots, K_{r-1}'] \geqslant 0 \tag{39}$$

Uwzględniając zależność (37) otrzymujemy

$$\tilde{Z}K_r = \left[\bar{Z}' - \frac{\bar{Z}'K_r}{\bar{Z}K_r}\bar{Z}\right]K_r = \bar{Z}'K_r - \bar{Z}'K_r\frac{\bar{Z}K_r}{\bar{Z}K_r} = 0 \tag{40}$$

Stąd na podstawie zależności (39) i (40) uzyskujemy

$$\tilde{Z}[K_1, K_2, \dots, K_{r-1}, K_r] \geqslant 0 \tag{41}$$

a więc ze słuszności twierdzenia dla (r-1) kolumn macierzy K wynika prawdziwość twierdzenia dla r kolumn macierzy K, czyli na mocy zasady indukcji matematycznej układ nierówności (12), a tym samym układ nierówności (3) posiada rozwiązanie. W ten sposób rozważywszy wszystkie możliwości udowodniliśmy, że jeżeli układ równań (5) nie ma rozwiązań nieujemnych, to układ nierówności (3) ma rozwiązanie.

W a r u n e k   k o n i e c z n y

Załóżmy, że układ nierówności (3) ma rozwiązanie. Wykażemy, że wówczas układ równań (5) nie ma rozwiązań nieujemnych. Zamiast rozważać układy postaci (12) i (13), dowód przeprowadzimy nie wprost. Załóżmy mianowicie, że układ nierówności (12) ma rozwiązanie i przypuśćmy, że układ równań (13) ma rozwiązanie nieujemne

$$\bar{\bar{B}} \geqslant 0 \tag{42}$$

Jeżeli układ nierówności (12) ma rozwiązanie $\bar{Z}$, czyli

$$\bar{Z}K \geqslant 0 \tag{43}$$

to wówczas na mocy (10), (14), (23) i (42) mamy

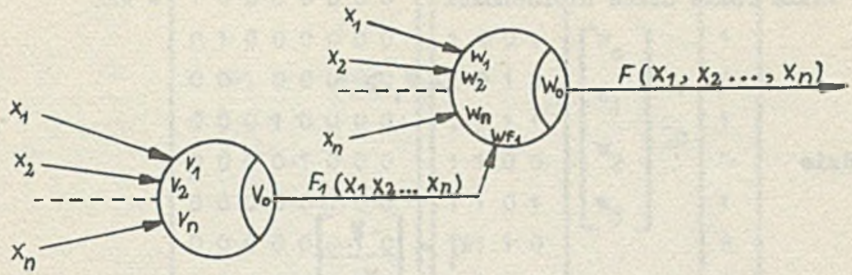
$$\bar{Z}K\bar{\bar{B}} = \bar{Z}Q = \left[\bar{W}^T \;\vdots\; 1\right]\left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline -F^T\bar{\bar{B}} \end{array}\right] = -F^T\bar{\bar{B}} < 0 \tag{44}$$

Z drugiej strony uwzględniając (42) i (43) otrzymujemy

$$\bar{Z}K\bar{\bar{B}} \geqslant 0 \tag{45}$$

czyli zachodzi sprzeczność. Zatem przypuszczenie, że układ równań (13) ma rozwiązanie nieujemne było fałszywe. Stąd, jeżeli układ nierówności (3) ma rozwiązanie, to układ równań (5) nie ma rozwiązań nieujemnych.

Jeżeli funkcja przełączająca nie jest linioworozdzielalną, do jej realizacji potrzebne będą co najmniej dwa elementy progowe. Ogólny schemat sieci logicznej w takim wypadku przedstawić można poniższym schematem



Wyjście pierwszego elementu jest wejściem drugiego elementu. To dodatkowe wejście dla drugiego elementu progowego powoduje dodanie dodatkowej kolumny do macierzy X. Niech ta dodana kolumna będzie wektorem kolumnowym F_1. Wtedy

$$X_1 = [X, F_1] \tag{46}$$

Dla realizacji funkcji $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ przy użyciu dwóch elementów kolumna F_1 musi być określona w ten sposób, żeby nie było dodatniej liniowej zależności pomiędzy wierszami nowej macierzy X_1. To zastrzeżenie wymaga, by

$$F_1^T A^T B \neq 0 \tag{47}$$

Warunek ten musi być spełniony dla wszystkich B, dla których spełnione jest równanie (5) $X^T A^T B = 0$, tzn. tam, gdzie istniała dodatnia liniowa zależność macierzy pierwotnej X (wynika to z twierdzenia powyżej udowodnionego). Iloczyn skalarny $F_1^T A^T B$ (dla wszystkich B) musi być albo dodatni, albo ujemny (gdyby np. dla B_1 i B_2, spełniających równanie (5), zaistniała sytuacja, że $F_1^T AB_1 > 0$ i $F_1^T A^T B_2 < 0$, to wtedy zawsze istnieje dodatnia liniowa kombinacja B_1 i B_2 $B_3 = \alpha B_1 + \beta B_2$ taka. że dla B_3 spełniającego równanie (5) $F_1^T A^T B_3 = 0$). Znak iloczynu skalarnego $F_1^T A^T B$ określa znak współczynnika wagowego w_{F_1} wejścia łączącego oba elementy progowe. Wektor F_1 określa warunki działania i niedziałania funkcji przełączającej realizowanej przez pierwszy element progowy.

W takim razie układ nierówności

$$AX_1W_1 \geq F \tag{48}$$

gdzie

$$W_1 = \begin{bmatrix} W \\ \hline w_{F_1} \end{bmatrix}$$

posiada rozwiązanie. Dla funkcji $F_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ istnieje również układ nierówności

$$A_1XV \geq F_1 \tag{49}$$

gdzie macierz A_1 uwzględnia znaki lewych stron nierówności dla F_1 (tak jak A dla $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$), a V jest wektorem kolumnowym wag pierwszego elementu progowego.
Rozpisując układ nierówności (48) otrzymamy

$$AX_1W_1 = A\left[XW + w_{F_1}F_1\right] \geq F \tag{50}$$

Oczywiście słusznym jest wtedy również zapis

$$A\left[XW + w_{F_1}A_1XV\right] \geq F \tag{51}$$

Przykład 1

$$F = \sum(0,1,3,5)_{x_1x_2x_3} \quad F = \bar{x}_1(\bar{x}_2 + x_3) + \bar{x}_2x_3$$

$$AXW = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&-1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&-1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&-1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\ 1&0&0&1\\ 1&0&1&0\\ 1&0&1&1\\ 1&1&0&0\\ 1&1&0&1\\ 1&1&1&0\\ 1&1&1&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0\\ w_1\\ w_2\\ w_3 \end{bmatrix} \geqslant \begin{bmatrix} 1\\1\\0\\1\\0\\1\\0\\0 \end{bmatrix}$$

$$X^TA^TB = \begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&1&1&1\\ 0&0&0&0&1&1&1&1\\ 0&0&1&1&0&0&1&1\\ 0&1&0&1&0&1&0&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&-1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&-1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&-1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0\\B_1\\B_2\\B_3\\B_4\\B_5\\B_6\\B_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\\0\\0\\0 \end{bmatrix}$$

$$B_0+B_1-B_2+B_3-B_4+B_5-B_6-B_7 = 0$$

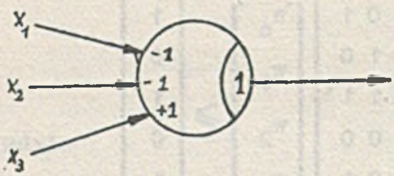
$$-B_4+B_5-B_6-B_7 = 0$$

$$-B_2+B_3 \qquad -B_6-B_7 = 0$$

$$+B_1 \quad +B_3 \quad +B_5 \quad -B_7 = 0.$$

Układ tych równań nie ma rozwiązań nieujemnych, tym samym układ nierówności ma rozwiązanie. Rozwiązanie to ma postać

$$W^T = [1;-1,-1,+1]$$



x_1 \ x_2x_3	00	01	11	10
0	1	2	1	0
1	0	1	0	-1

$\sum x_i \omega_i$

x_1 \ x_2x_3	00	01	11	10
0	1	1	1	0
1	0	1	0	0

Przykład 2

$$F = \sum(2,3,4,5,6)_{x_1x_2x_3} \qquad F = \bar{x}_1 x_2 + x_1(\bar{x}_2 + \bar{x}_3)$$

$$AXW = \begin{bmatrix} -1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&-1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1&0&0&0 \\ 1&0&0&1 \\ 1&0&1&0 \\ 1&0&1&1 \\ 1&1&0&0 \\ 1&1&0&1 \\ 1&1&1&0 \\ 1&1&1&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} \geqslant \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$X^T A^T B = \begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 0&0&0&0&1&1&1&1 \\ 0&0&1&1&0&0&1&1 \\ 0&1&0&1&0&1&0&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&-1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ B_5 \\ B_6 \\ B_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Układ równań

$$-B_0-B_1+B_2+B_3+B_4+B_5+B_6-B_7 = 0$$
$$+B_4+B_5+B_6-B_7 = 0$$
$$+B_2+B_3 \quad +B_6-B_7 = 0$$
$$-B_1 \quad +B_3 \quad +B_5 \quad -B_7 = 0$$

Ma rozwiązania nieujemne

$$B = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\\1\\0\\0\\1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\\0\\1\\0\\1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\\0\\1\\0\\1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\\0\\1\\1\\2\end{bmatrix}$$

$F_1^T A^T B \neq 0$ jest zachowane dla

$F_1^T = \left[0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\right]$, czyli $F_1 = \sum(2,3,4,5,6,7)_{x_1x_2x_3}$

I dla F_1

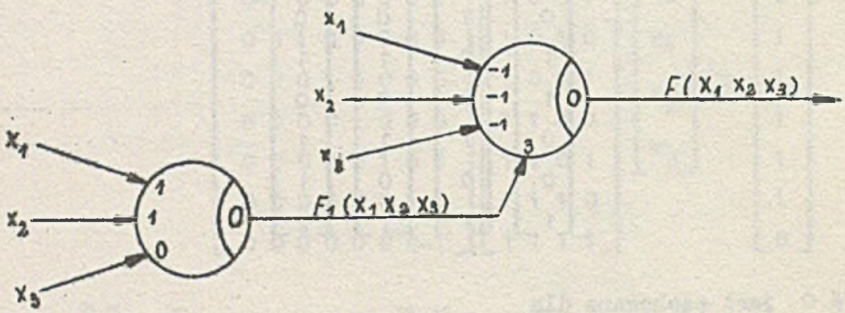
$$A_1XV = \begin{bmatrix}-1&0&0&0&0&0&0&0\\0&-1&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&1\\1&0&1&0\\1&0&1&1\\1&1&0&0\\1&1&0&1\\1&1&1&0\\1&1&1&1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}v_0\\v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix} \geqslant \begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$$

jest spełnione dla $V^T = \left[0;\ 1,1,0\right]$

A układ nierówności

$$AX_1W_1 = \begin{bmatrix} -1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&-1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0\\ 1&0&0&1&0\\ 1&0&1&0&1\\ 1&0&1&1&1\\ 1&1&0&0&1\\ 1&1&0&1&1\\ 1&1&1&0&1\\ 1&1&1&1&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_o\\ w_1\\ w_2\\ w_3\\ w_{F_1} \end{bmatrix} \geqslant \begin{bmatrix} 0\\0\\1\\1\\1\\1\\1\\0 \end{bmatrix}$$

Ma rozwiązanie $W^T = [0; -1,-1,-1,3]$



Przykład 3

$$F = \sum(3,4,6,7)_{x_1x_2x_3} \qquad F = x_2x_3 + x_1(x_2 + \bar{x}_3)$$

$$AXW = \begin{bmatrix} -1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&-1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&-1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&-1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\ 1&0&0&1\\ 1&0&1&0\\ 1&0&1&1\\ 1&1&0&0\\ 1&1&0&1\\ 1&1&1&0\\ 1&1&1&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_o\\ w_1\\ w_2\\ w_3 \end{bmatrix} \geqslant \begin{bmatrix} 0\\0\\0\\1\\1\\0\\1\\1 \end{bmatrix}$$

$$X^TA^TB = \begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 0&0&0&0&1&1&1&1 \\ 0&0&1&1&0&0&1&1 \\ 0&1&0&1&0&1&0&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&-1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&-1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&-1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ B_5 \\ B_6 \\ B_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Układ równań

$$\begin{aligned} -B_0-B_1-B_2+B_3+B_4-B_5+B_6+B_7 &= 0 \\ +B_4-B_5+B_6+B_7 &= 0 \\ -B_2+B_3 \qquad +B_6+B_7 &= 0 \\ -B_1 \quad +B_3 \quad -B_5 \quad +B_7 &= 0 \end{aligned}$$

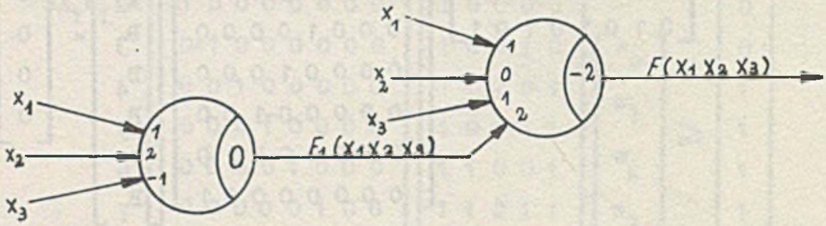
Ma rozwiązanie nieujemne

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$F_1^T = \begin{bmatrix} 0&0&1&1&1&0&1&1 \end{bmatrix}$ spełnia warunek $F_1^TA^TB \neq 0$

$$F_1 = \sum(2,3,4,6,7)_{x_1x_2x_3}$$

Dla F_1 $A_1XV \geqslant F_1$ ma rozwiązanie $V^T = [0; 1,2,-1]$, a układ nierówności $AX_1W_1 \geqslant F$ ma rozwiązanie $W^T = [-2;1,0,1,2]$.



Może się czasami okazać, że nie uda się otrzymać takiego F_1 by $F_1^TA^TB \neq 0$ dla wszystkich B. Wtedy funkcję $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ można zrealizować przy użyciu sieci logicznej złożonej z co najmniej trzech elementów progowych. Również w wypadku, gdyby F_1 nie była funkcją progową, realizacja dwuelementowa jest niemożliwą i wtedy należy cały tok rozumowania powtórzyć dla funkcji $F_1(x_1,\ldots,x_n)$.

Ograniczona ilość miejsca nie pozwala na przedstawienie większej ilości przykładów. Wydaje się, że przedstawiona metoda testowania funkcji przełączającej czy jest ona liniowo rozdzielalną, czy nie i na bazie tego określanie współczynników opisujących pracę elementów w sieci realizującej daną funkcję znajdzie praktyczne zastosowanie przez projektantów. Prowadzi ona na pewno do rozwiązań bardziej ekonomicznych. Metoda ta nadaje się również doskonale do projektowania funkcji przełączających nie całkowicie określonych.

LITERATURA

1. Paull M.C. and McCluskey E.J. Jr.: Boolean functions realizable with single threshold organs. Proc. IRE, vol. 48, July 1960.

2. Minnick R.C.: Linear-input logic. IRE Trans. on Electronic Computers, vol. EC-10, March 1961.

3. McNaughton R.: Unate truth functions, IRE Trans. on Electronic Computers, vol. EC-10, March 1961.

4. Dertouzos M.L.: Threshold logic: A synthesis approach. Reaearch monograph no. 32 The M.I.T. Press, Cambridge, Massachusetts 1965.

5. Hopcroft J.E. and Mattson R.L.: Synthesis of minimal threshold logic networks. IEEE Trans Electronic Computers, vol. EC-14, August 1965.

6. Wawiłow E.N. i inni: Sintiez schiem na porogowych elemientach, Sowietskoje radio, Moskwa 1970.

7. Kohavi Z.: Switching and finite automata theory; McGraw-Hill Book Company, New York 1970.

8. Simonnard M.: Programowanie liniowe. PWN Warszawa 1967.

СИНРЕЗ СХЕМ НА МИНИМАЛЬНОМ КОЛИЧЕСТВИЕ ПОРОГОВЫХ ЭЛЕМВНТОВ

Р е з ю м е

В статье представлена задача реализации переключательных функций на схемах, состоящих из минимального количества пороговых элементов. Линейные неравенства, определяющие пороговые функции даны в виде матриц,а алгоритм синтеза сведен к задаче рассмотрения имеет ли место в этой матрице линейная положительная зависимость между строками для переключательных функции линейно разделённых (значит для функции пороговых). Для функций линейно неразделённых положительная линейная зависимость устраняется при помощи дополнения столбцов к матрице, которые отвечают выходам предыдущих элементов в схеме. Одновременно представлены примеры схем, реализованные двумая пороговыми элементами.

SYNTHESIS OF MINIMAL THRESHOLD LOGIC NETWORKS

S u m m a r y

The paper presents an algorithm for synthesis of networks which realize switching functions using a minimal number of threshold elements. The condition for threshold functions is presented by a matrix. The algorithm is based on the principle that for linearly separable switching functions (i.e. for threshold functions) does not exist any positive linear dependence in the rows of this matrix. For nonseparable functions the positive linear depehdences are removed by adding columns (representing the outputs of a threshold elements in the network) to the matrix. The algorithm is illustrated with examples of the networks synthesis with two threshold elements.