

Jerzy Berchański

Instytut Kompleksowych
Systemów Sterowania

POTENCJALNA ODPORNOŚĆ NA ZAKŁÓCENIA
FLUKTUACYJNE SYGNAŁU IMPULSOWEGO
O DYSKRETNIE MODULOWANEJ SZEROKOŚCI

Streszczenie. Po określeniu pojęcia dyskretnej modulacji szerokości impulsów oraz potencjalnej odporności sygnału na słabe zakłócenia fluktuacyjne przedstawiono metodę przybliżonej oceny tejże w przypadku sygnałów o wielu wartościach dyskretnych. W oparciu o zaproponowaną metodę podjęto próbę oceny sygnałów dyskretnie modulowanych w szerokości pod kątem ich potencjalnej odporności na zakłócenia fluktuacyjne.

Rozważono warianty: a) z pasywną pauzą, b) z aktywną pauzą, c) z wtórną modulacją amplitudy, częstotliwości i fazy nośnika sinusoidalnego.

1. wstęp

Systemy transmisyjne wykorzystujące modulowany w szerokości nośnik impulsowy były uważane do chwili zastosowania sygnałów kodowo-impulsowych za jedno z najbardziej efektywnych. Modulacja szerokości impulsów szczególnie szeroko stosowana była w systemach radiotelemetrycznej łączności dalekosiężnej (1).

Główną zaletą sygnałów PDM jest prostota budowy urządzeń nadawczo-odbiorczych, szczególnie w przypadku systemów wielokanałowych przy stosunkowo wysokiej praktycznie uzyskiwanej dokładności transmisji.

Powodem mniejszej popularności sygnału PDM w systemach łączności przewodowej są zniekształcenia impulsów prostokątnych wprowadzane przez linie transmisji (2).

Zniekształcenia te wynikające z naturalnych charakterystyk transmisyjnych oraz zakłócenia nakładające się na nośnik impulsowy sprawiają, że określenie czasu trwania impulsu jest możliwe z dokładnością do pewnej minimalnej wartości $\Delta\tau$. W celu usunięcia niepewności określenia granic impulsu wystarczy jednakże wprowadzić dyskretną skalę czasu trwania impulsu. Podstawowa jednostka tej skali - kwant szerokości impulsu - powinna być nie mniejsza od wartości $\Delta\tau$.

W efekcie wprowadzenia dyskretniej skali szerokości impulsu odwzorowanie informacji następuje poprzez przyporządkowanie określonej szerokości impulsu skróconego zbioru kwantów czasowych. Możemy więc mówić o dyskretniej modulacji szerokości impulsu (Discrete Pulse Duration Modulation - DPDM).

Ograniczone pasmo przepuszczania linii transmisji sprawia, że minimalna szerokość impulsu prostokątnego powinna być większą od pewnej wartości τ_0 zależnej od częstotliwości granicznej linii f_g oraz zastosowanej metody odbioru. Tak więc całkowita szerokość impulsu τ będzie równa

$$\tau = \tau_0 + N\Delta\tau \quad (1)$$

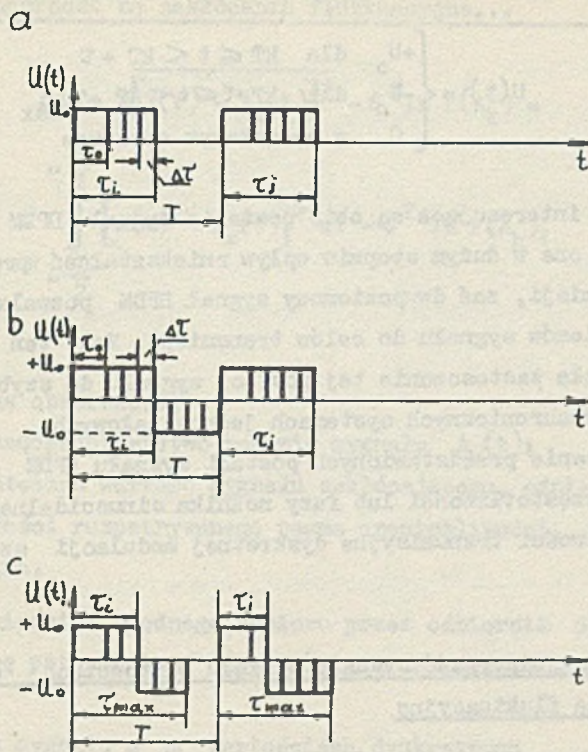
gdzie $N = 0, 1, 2, \dots$

Podstawową postacią sygnału DPDM jest sygnał z pasywną pauzą (rys. 1a). Jest to impuls prostokątny o szerokości τ wynikającej z zależności (1) i wysokości

$$U(t) = \begin{cases} U_0 & \text{dla } kT \leq t < kT + \tau \\ 0 & \text{w pozostałym obszarze} \end{cases} \quad (2)$$

gdzie T - odstęp między kolejnymi impulsami stały lub zmienny w zależności od metody przesyłu.

Bliźniaczą postacią ww. jest sygnał DPDM z aktywną pauzą i dwóch lub trzech poziomach napięć.



Rys. 1. Podstawowe postacie sygnału impulsowego o dyskretnie modulowanej szerokości

a) z pasywną pauzą, b) z aktywną pauzą i dwoma poziomami napięć, c) z aktywną pauzą i trzema poziomami napięć

W przypadku sygnału o dwóch poziomach napięć (rys. 1b) wysokość impulsu

$$U(t) = \begin{cases} +U_0 & \text{dla } kT \leq t < kT + \tau \\ -U_0 & \text{w pozostałym obszarze.} \end{cases} \quad (3)$$

Stosowanie sygnału o trzech poziomach napięć (rys. 1a) zakłada znajomość maksymalnej wartości przesyłanej wielkości. Wysokość impulsu prostokątnego jest wówczas równa

$$U(t) = \begin{cases} +U_0 & \text{dla } kT \leq t < kT + \tau \\ -U_0 & \text{dla } kT + \tau \leq t < kT + \tau_{\max} \\ 0 & \text{w pozostałym obszarze} \end{cases} \quad (4)$$

Szczególnie interesujące są obie postaci sygnału DPDM z aktywną pauzą. Łagodzą one w dużym stopniu wpływ zniekształceń wprowadzanych przez linię transmisji, zaś dwupoziomowy sygnał DPDM pozwala na wykorzystanie obu poziomów sygnału do celów transmisji. Fakt ten pozwala przewidywać przyszłe zastosowanie tej postaci sygnału do szybkiej transmisji danych w asynchronicznych systemach jednokanałowych.

Wykorzystanie przedstawionych postaci sygnału DPDM do manipulacji amplitudy, częstotliwości lub fazy nośnika sinusoidalnego, znacznie rozszerza możliwości transmisyjne dyskretnej modulacji szerokości impulsów.

2. Potencjalna odporność sygnału o wielu wartościach dyskretnych na zakłócenia fluktuacyjne

Przy przekazywaniu sygnałów kanałem z zakłóceniami przekazywana informacja ulega zniekształceniom. Wielkość zniekształceń jest uzależniona od poziomu i charakteru zakłóceń, sposobu przekazywania i sposobu odbioru informacji. W celu obiektywnego porównania różnych sposobów przekazywania informacji, z punktu widzenia odporności na zakłócenia, zostało wprowadzone przez Kotielnikowa (3) pojęcie odbiornika idealnego, tzn. odbiornika charakteryzującego się minimalną liczbą błędnie odtworzonych informacji. Reguła odbioru odbiornika idealnego jest regułą największej wiarygodności.

W przypadku addytywnych zakłóceń fluktuacyjnych o rozkładzie normalnym i sygnału dyskretnego Kotielnikow dowiódł, że odbiornik będzie idealny, jeżeli po odebraniu sygnału $X(t)$ będzie odtwarzał ten sygnał $A_k(t)$, dla którego wartość wyrażenia

$$\begin{aligned} \Delta W &= T \overline{[X(t) - A_k(t)]^2} - \sigma^2 \ln P(A_k) = \\ &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [x(t) - A_k(t)]^2 dt - \sigma^2 \ln P(A_k), \end{aligned} \quad (5)$$

gdzie

T - czas obserwacji;

$P(A_k)$ - prawdopodobieństwo nadania sygnału $A_k(t)$;

σ - skuteczna wartość sygnału zakłócającego, odniesiona do szerokości rozpatrywanego pasma częstotliwości, będzie minimalna.

Prawdopodobieństwo błędnego odbioru przez odbiornik idealny można uważać za miarę potencjalnej odporności na zakłócenia danego typu sygnału.

W przypadku sygnału o m wartościach dyskretnych

$$A_1(t), A_2(t) \dots A_m(t) \quad (6)$$

warunkiem dostatecznym prawidłowego odbioru dowolnego z nich np. $A_1(t)$ jest spełnienie układu nierówności

$$\sigma \sqrt{2T} \cdot \sqrt{[A_j(t) - A_1(t)]^2} \ominus_{ij} \leq T \cdot [A_j(t) - A_1(t)]^2 + \sigma^2 \ln \frac{P(A_1)}{P(A_j)} \quad (7)$$

dla $i, j = 1, 2, \dots, m$ oraz $j \neq i$,

gdzie

\ominus_{ij} - bezwymiarowa zmienna losowa o rozkładzie normalnym.

Przekłamanie sygnału $A_i(t)$ nastąpi więc, jeśli zajdzie choć jedna z nierówności odwrotnych

$$\sigma \sqrt{2T} \sqrt{[A_j(t) - A_i(t)]^2} \Theta_{ij} > T \cdot [A_j(t) - A_i(t)]^2 + \sigma^2 \ln \frac{P(A_i)}{P(A_j)} \quad (8)$$

Prawdopodobieństwo spełnienia j-tej z tych nierówności jest określone równaniem

$$P_{ij} = P(\Theta_{ij} > \alpha_{ij}) = V(\alpha_{ij}) \quad (9)$$

gdzie

$$V(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz - \text{całka prawdopodobieństwa} \quad (10)$$

oraz

$$\alpha_{ij} = \frac{\sqrt{T \cdot [A_{i,j}(t) - A_i(t)]^2}}{\sqrt{2} \cdot \sigma} + \frac{1}{2} \ln \frac{P(A_i)}{P(A_j)} \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot \sigma}{\sqrt{T \cdot [A_j(t) - A_i(t)]^2}} \quad (11)$$

jest umowną miarą stosunku sygnału do zakłócenia.

Obliczenie prawdopodobieństwa spełnienia układu nierówności stwarza duże trudności, celowe jest więc zastosowanie metody przybliżonej.

Z rachunku prawdopodobieństwa wiadomo, że prawdopodobieństwo P zaistnienia dowolnego zdarzenia ze zbioru zdarzeń $\{E_1, E_2, \dots, E_m\}$ zawarte jest w przedziale

$$P(E_k)_{\max} \leq P \leq \sum_{k=1}^m P(E_k) \quad (12)$$

gdzie

$P(E_k)$ - prawdopodobieństwo zdarzenia E_k ,

$P(E_k)_{\max}$ - prawdopodobieństwo maksymalne w zbiorze prawdopodobieństw

$$\left\{ P(E_1), P(E_2), \dots, P(E_m) \right\}$$

Na podstawie relacji (12) można twierdzić, że prawdopodobieństwo $P(A_{i_{b\bar{k}}})$ spełnienia chociażby jednej z nierówności (8) lub inaczej mówiąc błędnego odbioru sygnału $A_i(t)$ będzie zawarte w przedziale

$$P_{ij_{\max}} \leq P(A_{i_{b\bar{k}}}) \leq \sum_{j=1}^m P_{ij} \quad (13)$$

Mnożąc nierówności (13) przez prawdopodobieństwo, a priori nadania sygnału $A_i(t)$, które oznaczymy przez $P(A_i)$ i sumując je dla $i = 1 \dots m$ otrzymamy

$$\sum_{i=1}^m P_{ij_{\max}} \cdot P(A_i) \leq P_{\text{b\bar{k}e\bar{d}u}} \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m P(A_i) P_{ij} \quad (14)$$

gdzie

$$P_{\text{b\bar{k}e\bar{d}u}} = \sum_{i=1}^m P(A_{i_{b\bar{k}}}) \cdot P(A_i) \quad (15)$$

jest miarą potencjalnej odporności sygnału o m wartościach dyskretnych na zakłócenia fluktuacyjne.

3. Przybliżona ocena potencjalnej odporności na zakłócenia fluktuacyjne sygnału impulsowego o dyskretnie modulowanej szerokości

Analiza potencjalnej odporności na zakłócenia sygnału DPDM będzie prowadzona w oparciu o zależności podane w poprzednim paragrafie.

Dla otrzymania liczbowych wartości prawdopodobieństwa błędu konieczne jest przyjęcie maksymalnej liczby kwantów zawartych w informacyjnej części sygnału oraz rozkładu prawdopodobieństwa a priori poszczególnych wartości sygnału. Założmy więc, że mamy do czynienia z sygnałem o 8 jednakowo prawdopodobnych wartościach dyskretnych.

Przypadek ten jest reprezentatywny dla systemów wielokanałowych oraz objętości informacyjnej sygnału nie przekraczającej 3 bitów. Przy założeniu równomiernego rozkładu wartości sygnału argument prawdopodobieństwa błędu upraszcza się do wyrażenia

$$\alpha_{ij} = \frac{\sqrt{T [A_j(t) - A_i(t)]^2}}{\sqrt{2} \sigma} \quad (16)$$

gdzie wyrażenie

$$\Delta A_{ij} = \sqrt{T \cdot [A_j(t) - A_i(t)]^2} \quad (17)$$

traktowane być może jako miara odległości między dowolnymi sygnałami $A_i(t)$ oraz $A_j(t)$ ze skończonego zbioru sygnałów $\{A_k(t)\}$. Przy uwzględnieniu powyższych założeń przystąpić można do analizy poszczególnych postaci sygnału DPDM.

3.1. Sygnał DPDM z pasywną pauzą

Dla sygnału przedstawionego na rys. 1a, gdzie $N_{\max} = 8$, można znaleźć odległość ΔA_{ij} jako równą wyrażeniu

$$\Delta A_{ij} = |j - i| \cdot U_0^2 \cdot \Delta \tau. \quad (18)$$

Argument prawdopodobieństwa błędu określony wzorem (16) jest równy

$$\alpha_{ij} = \sqrt{|j - i|} \cdot \alpha' \quad (19)$$

gdzie

$$\alpha' = \sqrt{\frac{\Delta \tau}{2}} \cdot \frac{U_0}{6} \quad (20)$$

jest umownym stosunkiem elementarnego sygnału DPDM do zakłócenia.

Prawdopodobieństwo odebrania sygnału $A_j(t)$, gdy nadany został sygnał $A_i(t)$ jest określone całką prawdopodobieństwa

$$P_{ij} = V(\sqrt{|j-i|} \cdot \alpha') \quad (21)$$

Korzystając z relacji (21) oraz uwzględniając (13) można zestawić tabelę 1.

Tabela 1

1	2	3
i	$P_{ij_{\max}}$	$\sum_{j=i}^8 P_{ij}$ dla $j = i$
1	P_1	$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 + P_7$
2	P_1	$2P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6$
3	P_1	$2P_1 + 2P_2 + P_3 + P_4 + P_5$
4	P_1	$2P_1 + 2P_2 + 2P_3 + P_4$
5	P_1	$2P_1 + 2P_2 + 2P_3 + P_4$
6	P_1	$2P_1 + 2P_2 + P_3 + P_4 + P_5$
7	P_1	$2P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6$
8	P_1	$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 + P_7$

W drugiej kolumnie tabeli 1 znajdują się maksymalne wartości prawdopodobieństw $P_{ij_{\max}}$ odpowiadające odpowiedniemu indeksowi wiersza tabeli, w trzeciej kolumnie suma

$$\sum_{j=i}^8 P_{ij} \quad \text{dla } j \neq i$$

Zastosowany w tabeli symbol P_n , gdzie $n = 1, 2, \dots, 7$ oznacza wartość

$$P_n = v(\sqrt{n} \cdot \alpha') \quad (22)$$

gdzie

$$n = |j - i| \quad (23)$$

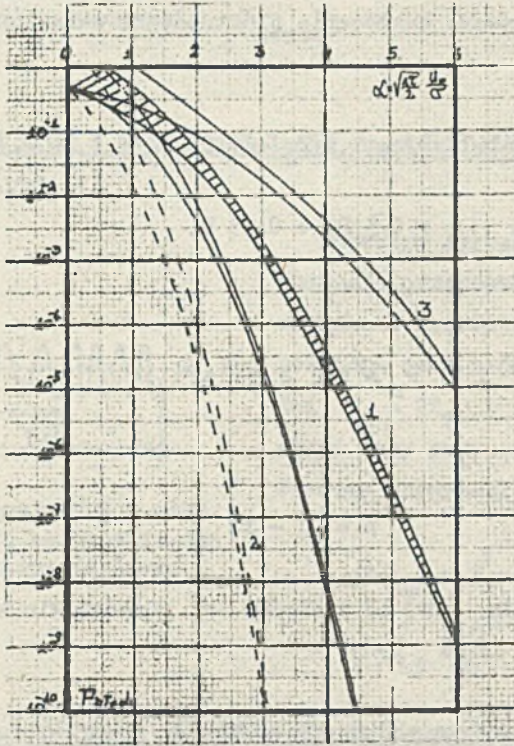
Porównując wartość $P_{ij_{\max}}$ dla różnych indeksów "i", możemy wysnuć intuicyjnie wyczuwalny wniosek, że najbardziej prawdopodobny jest błąd polegający na odbiorze wartości sąsiedniej (większej lub mniejszej o ΔT) w stosunku do wartości nadanej. Sumując oddzielnie pozycje występujące w drugiej i trzeciej kolumnie tabeli 1 oraz mnożąc obie sumy przez prawdopodobieństwo a priori nadania dowolnego z sygnałów $A_i(t)$, równe

$$P(A_i) = \frac{1}{8} \quad (24)$$

możemy zgodnie z nierównościami (14) ocenić potencjalną odporność na zakłócenia fluktuacyjne sygnału DPIM z pasywną pauzą następująco

$$P_1 \leq P_{\text{błędu}} \leq 1,75 P_1 + 1,5 P_2 + 1,25 P_3 + P_4 + 0,75 P_5 + \\ + 0,5 P_6 + 0,25 P_7 \quad (25)$$

Zależność powyższego oszacowania od umownego stosunku sygnału do zakłócenia α' przedstawia wykreślnie krzywa 1 na rys. 2.



Rys. 2. Oszacowanie prawdopodobieństwa błędów dla różnych postaci sygnału DPDM

3.2. Sygnał DPDM z aktywną pauzą

Dla sygnału przedstawionego na rys. 1c gdzie $M_{\max} = 8$ odległość Δ_{1j} jest równa

$$\Delta_{1j} = 4U_0^2 \cdot \Delta\tau \cdot |j - 1| \quad (26)$$

Argument prawdopodobieństwa błędów

$$\alpha_{1j} = 2 \cdot \sqrt{|j - 1|} \cdot \alpha' \quad (27)$$

gdzie α' określone jest wzorem (20).

Potencjalna odporność na zakłócenia fluktuacyjne określona jest nierównościami

$$P_1 \leq P_{\text{błądu}} \leq 1,75 P_1 + 1,5 P_2 + 1,25 P_3 + P_4 + 0,75 P_5 + \\ + 0,5 P_6 + 0,25 P_7 \quad (28)$$

gdzie

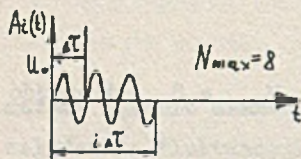
$$P_n = V(2 \cdot \sqrt{n} \alpha') \quad (29)$$

oraz

$$n = |j - i| \quad (30)$$

Zależność oszacowania (28) od wartości α' przedstawia krzywa 2 na rysunku 2.

3.3. Sygnał DPDM z wtórną modulacją amplitudy nośnika sinusoidalnego (rys. 3)



Rys. 3. Sygnał DPDM z wtórną modulacją amplitudy nośnika sinusoidalnego

Przy założeniu, że w kwancie $\Delta\tau$ mieści się całkowita liczba okresów nośnika sinusoidalnego o amplitudzie U_0 otrzymamy następujące relacje

$$\Delta A_{ij} = \frac{1}{2} U_0^2 \cdot \Delta\tau \cdot |j - i| \quad (31)$$

$$\alpha_{ij} = \sqrt{\frac{|j - i|}{2}} \cdot \alpha' \quad (32)$$

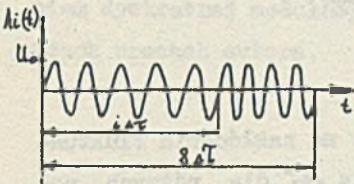
Potencjalna odporność na zakłócenia fluktuacyjne określona jest nierównościami (25), w których

$$P_n = V\left(\sqrt{\frac{n}{2}} \alpha'\right) \quad (33)$$

zaś n określone jest przez (30).

Zależność oszacowania $P_{\text{b}} \text{ b} \ddot{e} \text{d} \text{u}$ od α' obrazuje przebieg 3 na rysunku 2.

3.4. Sygnal DPDM z wtórna modulacją częstotliwości nośnika sinusoidalnego (rys. 4)



Rys. 4. Sygnal DPDM z wtórna modulacją częstotliwości nośnika sinusoidalnego

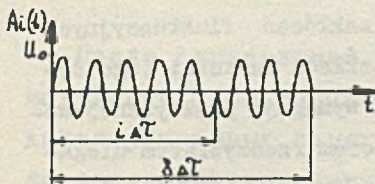
Rozważmy sygnał DPDM, w którym informacja przenoszona jest przy pomocy nośnika o częstotliwości f_1 , pauza wypełniona jest nośnikiem o częstotliwości $f_2 = 2f_1$ i zachowana zostaje ciągłość fazy przy zmianie częstotliwości. Wówczas otrzymamy

$$\Delta \Lambda_{ij} = U_0^2 \cdot \Delta \tau \cdot |j - i| \quad (34)$$

$$\alpha_{ij} = \sqrt{|j - i|} \cdot \alpha' \quad (35)$$

Potencjalna odporność na zakłócenia fluktuacyjne określona jest nierównościami (25), w których P_n zdefiniowane jest wzorem (22) i (23). Zależność oszacowania prawdopodobieństwa błędnego odbioru od umownego stosunku sygnału do zakłócenia α' przedstawia wykreślnie krzywa 1 na rys. 2.

3.5. Sygnal DPDM z wtórna modulacją fazy nośnika sinusoidalnego (rys. 5)



Rys. 5. Sygnal DPDM z wtórna modulacją fazy nośnika sinusoidalnego

Rozważmy przypadek, gdy koniec części informacyjnej sygnału wyznaczony jest momentem inwersji nośnika sinusoidalnego, o okresie będącym podwielokrotnością kwantu $\Delta \tau$, wówczas otrzymamy

$$\Delta \Lambda_{ij} = 2 U_0^2 \cdot \Delta \tau |j - i| \quad (36)$$

$$\alpha_{ij} = \sqrt{2 \cdot |j - i|} \alpha' \quad (37)$$

Potencjalną odporność na zakłócenia fluktuacyjne możemy oszacować zgodnie z (25), gdzie

$$P_n = \sqrt[4]{2n} \cdot \alpha' \quad (38)$$

zaś n wynika z (30).

Zależność (25) od α' przedstawia krzywa 4 na rys. 2.

4. Podsumowanie

Porównując zależność potencjalnej odporności na zakłócenia fluktuacyjne od umownego stosunku sygnału do zakłócenia α' dla różnych postaci sygnału impulsowego o dyskretnie modulowanej szerokości zauważyć można, że spośród sygnałów bez wtórnej modulacji większą odporność na zakłócenia ma sygnał z aktywną pauzą, zaś wśród sygnałów z wtórną modulacją nośnika sinusoidalnego największą odpornością na zakłócenia cechuje się sygnał z wtórną modulacją fazy.

Mniejsze wartości potencjalnej odporności na zakłócenia sygnałów z wtórną modulacją wynikają z faktu, że rozpatrywane były przebiegi o amplitudzie U_0 równej wysokości impulsu prostokątnego. Jeżeli w miejsce U_0 wstawić wartość amplitudy wynikającą z wartości skutecznej przebiegu sinusoidalnego

$$U_0 = \sqrt{2} \cdot U_{sk} \quad (39)$$

wówczas otrzymuje się znacznie większe wartości potencjalnej odporności na zakłócenia.

W artykule ograniczono się do zbadania wpływu zakłóceń fluktuacyjnych na sygnał DPDM przy założeniu równomiernego rozkładu wartości tego sygnału oraz odbioru idealnego. Otrzymane wyniki wymagają praktycznej weryfikacji. Impulsy prostokątne transmitowane torem rzeczywistym ulegają zniekształceniom, zmniejszającym ich odporność na zakłócenia. Zaproponowana przez Kotielnikowa metoda nie daje możliwości uwzględnienia tego faktu.

Interesująca jest odpowiedź na pytanie podstawowe - czy teoria potencjalnej odporności na zakłócenia fluktuacyjne jest adekwatna do rozpatrywanego sygnału o wielu wartościach dyskretnych czasu trwania impulsu.

W dalszym ciągu kwestią otwartą pozostaje określenie odporności na bardzo często spotykane w warunkach przemysłowych zakłócenia impulsowe. Zagadnienia te, jak również wiele innych związanych z wykorzystaniem dyskretnej modulacji szerokości impulsów, będą rozwijane w dalszych pracach autora.

LITERATURA

1. Gruenberg E.L.: Handbook of Telemetry and Remote Control. London 1967.
2. Kaden H.: Impulse und Schaltvorgänge in der Nachrichtentechnik. München 1957.
3. Kotel'nikov W.A.: Teoria potencjalnoj pomexoustojczivosti. Moskwa 1960.

ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТЬ ДИСКРЕТНОЙ ШИРОТНО-ИМПУЛЬСНОЙ МОДУЛЯЦИИ

Р е з ю м е

После определения понятия дискретной широтно-импульсной модуляции и потенциальной помехоустойчивости при слабых дальноканальных помехах приведён метод приближённой оценки последней при сигналах со многими дискретными значениями.

На основании предложенного метода автор делает попытку оценки потенциальной помехоустойчивости дискретной широтно-импульсной модуляции.

Рассмотрены подробно следующие случаи передачи сигнала:

- а) с пассивной паузой,
- б) с активной паузой,
- в) с вторичной модуляцией амплитуды, частоты и фазы несущей.

POTENTIAL NOISE - RESISTANCE OF THE DISCRETE PULSE DURATION MODULATION

S u m m a r y

Having defined the concept of the discrete pulse duration modulation and the potential signal resistance to the small Gaussian noise, a method of estimating this resistance in case of the signals with many discrete values has been presented in the paper.

According to the proposed method, the noise - resistance of the discrete pulse duration modulation has been established for:

- a) "on - off" signal,
- b) "polar" signal,
- c) "on - off" amplitude -, binary frequency -, and binary phase - modulated carrier wave.