Reichskuratorium für Wirtschaftlichkeit
RKW.-Veröffentlichung Nr. 116

Rechentechnik

Rechentafeln und Sonderrechenstäbe

LEIPZIG / B. G. TEUBNER / BERLIN

12076

P 302

AWF

Rechentechnik

Rechentafeln und Sonderrechenstäbe

von Dipl.-Ing. Marcel Zühlke

Herausgegeben vom
Reichsausschuß für wirtschaftliche Fertigung (AWF)
beim Reichskuratorium für Wirtschaftlichkeit

Zweite Auflage

1942
Verlag und Druck von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

Verlags-Best.-Nr. 12076

139280

Copyright 1938 by Reichskuratorium für Wirtschaftlichkeit (RKW), Berlin NW 6

D 1146/13

Vorwort zur ersten Auflage

Die vom AWF im Jahre 1928 herausgegebene Schrift „Graphisches Rechnen“ RKW/AWF 23/222 — bearbeitet von Studienrat H. Schwerdt unter Mitarbeit von Dr.-Ing. W. Gütschow, Dr. Iris Runge, Ing. F. Wolf —, die eine Beispielsammlung von Rechentafeln mit Richtlinien für die Anfertigung und praktische Ausgestaltung von Rechentafeln darstellt, ist seit längerem vergriffen. Durch diese Beispielsammlung war dem Lehrer wie dem Schüler von Lehrgängen über Nomographie ein wertvolles Rüstzeug in die Hand gegeben. Nachdem die verschiedensten rechentechnischen Hilfsmittel in zahlreichen Betrieben der Praxis erheblich an Bedeutung gewonnen haben und nachdem die ursprünglich nur in Berlin durchgeführten AWF-Rechenkurse seit einigen Jahren auch in zahlreichen anderen Städten des Reiches abgehalten werden, erscheint eine Neuauflage der genannten Schrift im Sinne einer weiteren Verbreitung des zeit- und arbeitsparenden Rechnens in erhöhtem Maße erwünscht.

In der vorliegenden von Dipl.-Ing. M. Zühlke bearbeiteten Druckschrift hat die frühere Schrift „Graphisches Rechnen“ eine grundlegende Umarbeitung und Erweiterung erfahren. Der Stoff wurde neu gegliedert und nach einheitlichen Richtlinien überarbeitet. Es wurde von der umfangreichen Sammlung von Beispielen abgesehen; dafür traten besonders charakteristische oder einfache Fälle in den Vordergrund. Diese Umgestaltung konnte um so mehr verantwortet werden, als in den letzten Jahren — nicht zuletzt unter Auswirkung der Bestrebungen des Ausschusses Rechentechnik im AWF — eine große Anzahl guter Rechentafeln und Rechenstäbe in Büchern und Zeitschriften veröffentlicht worden sind. An Beispielstoffen mangelt es also keineswegs mehr. Die im Oktober 1938 vom AWF veranstaltete Ausstellung „Rechentechnik“ gab ein deutliches Zeugnis dafür.

Möge die Neuauflage der vorliegenden Druckschrift ebenso fruchtbringend wirken wie die bisherigen Arbeitsergebnisse, insbesondere

„Graphisches Rechnen“ und „Sonderrechenstäbe, ihre Anwendung und ihr Entwurf“ von F. Bahlecke sowie zahlreiche Sonderrechenstäbe des AWF und die in den AWF-Mitteilungen veröffentlichten „Rechentechnischen Berichte“, und zwar nicht nur auf die AWF-Rechenkurse, sondern auch auf manche Gebiete der Praxis.

Dem Verfasser der vorliegenden Schrift, Herrn Dipl.-Ing. M. Zühlke, der seit Jahren als Lehrer bei den AWF-Rechenkursen in Berlin tätig war, sowie dem Obmann des Ausschusses Rechentechnik beim AWF, Herrn Studienrat Schwerdt, der uns bei der Drucklegung beraten und unterstützt hat, sei auch an dieser Stelle für die wertvolle Mitarbeit herzlicher Dank ausgesprochen.

Der Bearbeiter in der Geschäftsstelle des AWF war Herr Assessor Dr. rer. techn. K. Voos.

Berlin, Oktober 1938.

Ausschuß für wirtschaftliche Fertigung
beim Reichskuratorium für Wirtschaftlichkeit.

Vorwort zur zweiten Auflage

Die Besprechungen der ersten Auflage in der technischen Fachpresse haben gezeigt, daß die Fachkreise das Buch mit großer Freude und Zustimmung aufgenommen haben. Trotz aller durch den Krieg bedingten Schwierigkeiten haben wir uns daher entschlossen, das Buch in zweiter wesentlich erweiterter Auflage erscheinen zu lassen. Gerade heute, wo der Mangel an Fachkräften wegen der stark gestiegenen Anforderungen an die Technik größer ist als je, kommt dem Einsatz zeitsparender Hilfsmittel noch größere Bedeutung zu als früher.

Eine Durchsicht der zweiten Auflage wird zeigen, daß die Schrift eine gründliche Überarbeitung erfahren hat. Überall sind, wo irgend angängig, die aus dem Leser- und Benutzerkreis kommenden Anregungen und Wünsche beachtet worden. Für die freundliche Mitarbeit an der Verbesserung des Buches durch Besprechung in den Fachzeitschriften und durch Zuschriften soll an dieser Stelle allen Beteiligten gedankt werden.

Bei den an vielen Stellen vorgenommenen Erweiterungen und Ergänzungen wurde der Hauptwert auf weitgehende Vertiefung des

Stoffes und Abrundung in methodischer Hinsicht gelegt. Wir nennen einige Beispiele:

Der Abschnitt über Funktionsleitern wurde erheblich ausgebaut; dabei kam es uns besonders darauf an, die praktischen Gesichtspunkte der Funktionsleiterherstellung in den Vordergrund zu stellen. Über die Herstellung der Funktionsleitern wurde daher neben Erweiterung der schon vorhandenen Hinweise noch ein besonderer Abschnitt aufgenommen. Auch die in der ersten Auflage nicht behandelten allgemeineren Doppelleitern sind ausführlich besprochen worden.

Bei den Leitertafeln sind zunächst Darstellungsmittel behandelt worden, die sich auf zwei Funktionsleitern aufbauen. Das gelegentlich nützliche Hilfsmittel der Gleitkurve und die oben schon erwähnte allgemeinere Doppelleiter sind ausführlich beschrieben. Die in vielen Büchern und Zeitschriftenaufsätzen benutzte Determinantenschreibweise der Schlüsselgleichung wurde erklärt. Die Leitertafel mit drei geradlinigen, durch einen endlichen Punkt gehenden Trägern wurde ihrer Bedeutung wegen abgeleitet und im Beispiel behandelt.

Die Abschnitte über Netztafeln und über Sonderrechenstäbe wurden durch Hinweise ergänzt.

Der Abschnitt über Leitertafeln mit Netzen wurde erweitert. Besonderer Wert wurde hier auf möglichst elementare Herleitung der Gesetze aus der Kenntnis der Schlüsselgleichung für gewöhnliche Leitertafeln gelegt. Viele Beispiele erläutern das Verfahren.

Der Abschnitt „Hinweise auf einige neuzeitliche Rechenverfahren" hat in dem schon in der ersten Auflage vorhandenen Teil wesentliche Ergänzungen erfahren. Ein Beispiel über die projektive Verzerrung einer Leitertafel wurde ausführlich durchgerechnet. Für das Erkennen der Möglichkeit der Darstellung in Leitertafeln durch Betrachtung der dualen Netztafeln wurden viele Beispiele angegeben. Schließlich konnte an einem neuen, noch in der Entwicklung befindlichen Zweig der Rechentechnik nicht vorbeigegangen werden: Die Näherungslösungen und die zu ihrer Gewinnung in den letzten Jahren entwickelten Methoden sind in vielen Beispielen behandelt oder angedeutet worden. Im übrigen ist dieser Abschnitt kürzer behandelt worden als die übrigen Abschnitte des Buches. Es ist auch nicht die Absicht des Buches, in die hohe Theorie der Rechentechnik einzuführen. Wir haben uns aber die Darstellung der Methoden nicht versagen können, um denen, die das Zeug und die Lust dazu haben, den Zugang zur höheren Rechentechnik zu ebnen.

Eine gründliche Überarbeitung und Erweiterung hat schließlich der Abschnitt „Richtlinien für Herstellung und praktische Ausgestaltung von Rechentafeln und Sonderrechenstäben“ erfahren.

Der zur Verfügung stehende Raum hat es uns leider nicht gestattet, von einigen wichtigen Fällen abgesehen, die Zahl der Beispiele stark zu vermehren. Um aber auch hier dem Benutzer und den zur ersten Auflage geäußerten Wünschen gerecht zu werden, wurden die Literaturhinweise erheblich vermehrt, und zwar sowohl im Text als auch in einem sehr ausführlichen Literaturverzeichnis. Bei der Zusammenstellung der in den „Rechentechnischen Berichten“ der AWF-Mitteilungen und in den AWF-Mitteilungen selbst erschienenen rechentechnischen Arbeiten ist jeweils auf den zugehörigen Buchabschnitt verwiesen worden.

Wir hoffen, daß die Neuauflage ebenso wie die erste Auflage in allen Fachkreisen wieder volle Zustimmung finden wird.

Bearbeiter in der Geschäftsstelle des AWF waren Herr E. Kaemmel und Herr H. Drescher.

Berlin, im Dezember 1941. **Marcel Zühlke.**

Reichsausschuß
für wirtschaftliche Fertigung
beim Reichskuratorium für Wirtschaftlichkeit.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung 11

A. Darstellungselemente 14

I. Grundlagen 14
1. Funktionen und Veränderliche; Festlegungen 14
2. Die Zahlentafel 15
3. Das Schaubild (Die Kurventafel) 16
4. Die Formel 21
5. Überführung einer Darstellungsform in eine andere 23

II. Funktionsleitern 25
1. Die Doppelleiter 25
2. Die einfache oder Funktionsleiter 28
3. Die logarithmische Leiter 36
4. Die Potenzleitern 40
5. Die projektiven Leitern 43
6. Zur Herstellung von Funktionsleitern 47
7. Die Leiter mit krummlinigem Träger 51

III. Funktionsnetze 53
1. Das gleichförmige Netz; Millimeterpapier 53
2. Streckung von Kurven; die Funktionsschar 54
3. Das geometrisch verzerrte Netz 59
4. Das beliebig verzerrte Netz 63

B. Leitertafeln 67

I. Gleitkurven und Doppelleitern 67

II. Leitertafeln im engeren Sinne 71

III. Die erste Grundform 73
1. Der symmetrische Fall 73
2. Anwendungen 73
3. Der unsymmetrische Fall 80
4. Anwendungen 82
5. Erweiterungen und besondere Hilfsmittel 87
6. Der allgemeinere Fall 98

IV. Die zweite Grundform ... 98
1. Geometrische Beziehungen ... 98
2. Anwendungen ... 100
3. Der allgemeinere Fall ... 105
V. Die Koordinatenmethode ... 105
1. Die allgemeine Bedingung für Fluchtrichtigkeit ... 105
2. Die geradlinige Leitertafel der ersten Grundform ... 107
3. Die krummlinige Leitertafel ... 108
VI. Die Methode der freien Parameter ... 114

C. Netztafeln ... 117
I. Das Schaubild ... 117
II. Netztafeln im engeren Sinne ... 117
III. Die erste Grundform; Parallelschartafeln ... 118
1. Der symmetrische Fall ... 118
2. Anwendungen ... 120
3. Der unsymmetrische Fall ... 124
4. Anwendungen ... 126
5. Erweiterungen ... 128
6. Der allgemeinere Fall ... 137
IV. Die zweite Grundform; Strahlentafeln ... 137
1. Geometrische Beziehungen ... 137
2. Anwendungen ... 138
V. Allgemeinere geradlinige Netztafeln ... 142
1. Die allgemeine Bedingungsgleichung ... 142
2. Einige Hinweise ... 144
VI. Krummlinige Netztafeln; Wanderkurventafeln ... 146

D. Verbundrechentafeln und Tafeln mit besonderen Ablesevorschriften ... 149
I. Vereinigung von Leiter- und Netztafeln ... 149
II. Leitertafeln mit Funktionsnetzen ... 154
III. Rechentafeln mit besonderen Ablesevorschriften ... 163

E. Sonderrechenstäbe ... 167
I. Das Rechnen mit parallel verschieblichen Strecken ... 167
II. Der AWF-Sonderrechenstab ... 171
III. Einige Beispiele ... 171

F. Hinweise auf einige neuzeitliche Rechenverfahren 180
I. Projektive Verzerrungen 180
II. Dualität 188
III. Näherungsmethoden 198
1. Die Näherung in der Funktion, Ersatzfunktionen 200
2. Die Näherung im Bild 205

G. Richtlinien für Herstellung und praktische Ausgestaltung von Rechentafeln und Sonderrechenstäben 208
I. Formulierung der Aufgabe; Rechenhilfen oder Gebrauchstafeln 208
II. Wahl der Tafelart; Vor- und Nachteile der einzelnen Tafelformen 212
III. Durchführung des Tafelentwurfes 215
IV. Zeichnerische Ausstattung der Tafeln 227
V. Schlußbemerkungen 229

H. Anhang 230
I. Schlagwörterverzeichnis 230
II. Literaturverzeichnis 233
1. Rechentafeln und Sonderrechenstäbe in den AWF-Mitteilungen ... 233
2. Bücher über Rechentechnik 240
3. Leitertafeln in der ETZ 245
III. Arbeitsergebnisse des Ausschusses Rechentechnik im AWF 246
IV. Teiltafel für logarithmische Leitern ..... Faltblatt

Bezeichnungen

In diesem Buch sind die folgenden Bezeichnungen verwendet:

u, v, w, r, s, t	Veränderliche
$\triangle u, \triangle v$	kleine Änderung des Wertes u bzw. v
x, y	rechtwinklige Koordinaten
a, b, c, d	gerichtete Strecken, Linienkoordinaten
l	Zeicheneinheit
L	Bezugsstrecke
p, q	Leiternabstände in Leitertafeln
n, m	Exponenten, freie Parameter
α, β, γ	Winkel
A, B, C, D, k, K	Konstanten
P	einzelner Punkt, Pol, Projektionszentrum
$\triangle$	Determinante einer projektiven Funktion
$t, t_1, t_2, \ldots$	Hilfsveränderliche, Parameter
g, g_0, p	Geraden, Polaren

Einleitung

Zeichnerische Verfahren zur Lösung schwieriger oder umfangreicher Rechenaufgaben sind heute zum Gemeingut vieler Kreise geworden. So bedient sich z. B. der Ingenieur seit langem graphischer Verfahren zum Auffinden der Biegelinie, zum Bestimmen von Fachwerkstabkräften und Knotenpunktsverschiebungen, zum Ermitteln von Trägheitsmomenten usw. Der Elektrotechniker dringt mit Hilfe von Vektordiagrammen in die Wirkungsweise elektrischer Geräte und Maschinen ein.

Bei diesen zeichnerischen Lösungen handelt es sich aber nur um die Ermittlung eines Wertes oder einer Gruppe von zusammengehörigen Einzelwerten bzw. um Veranschaulichung eines physikalischen Zustandes. Solche zeichnerischen Verfahren sollen im folgenden nicht behandelt werden.

Den eben betrachteten Verfahren stehen nun andere gegenüber, bei denen eine Aufgabe mit veränderlichen Eingangswerten immer wieder gelöst werden soll. Eine Zeichnung, die zu gegebenen Eingangswerten den gesuchten Wert unmittelbar abzulesen gestattet, wollen wir Rechentafel nennen.

Mit den Rechentafeln sind andere Rechenhilfsmittel zur Lösung der gleichen Aufgabe eng verwandt: die Sonderrechenstäbe, die nicht wie der gewöhnliche logarithmische Rechenschieber für beliebige Einzelrechnungen, sondern für die häufige Lösung einer bestimmten Aufgabe bestimmt sind. Die Verwandtschaft mit den Rechentafeln beruht vor allem darin, daß man sich bei den Sonderrechenstäben der gleichen Darstellungselemente wie bei Rechentafeln bedient. Sie unterscheiden sich von den letzteren nur durch die Beweglichkeit der einzelnen Elemente gegeneinander.

Der Entwurf und die zweckmäßige Ausgestaltung von Rechentafeln und Sonderrechenstäben ist Gegenstand der nachfolgenden Abschnitte.

Der Sonderrechenstab weist durch seinen Aufbau den Weg in ein neues wichtiges Gebiet, nämlich in das der sogenannten rechnenden Getriebe. Bei diesen rechnenden Getrieben werden die kinematischen

Eigenarten der verschiedenen Getriebeelemente zur Lösung von Rechenaufgaben ausgenutzt, so ähnlich wie bei Rechentafeln die einer Zeichnung innewohnende geometrische Beziehung zum Aufbau von Tafeln benutzt wird. Das Gebiet der rechnenden Getriebe ist aber, wenn man von der speziellen Verwendung in sogenannten Rechenmaschinen absieht, trotz der gewaltigen praktischen Bedeutung noch so wenig geordnet, daß es im Rahmen dieses Buches nicht behandelt werden kann. Der Ausschuß für Rechentechnik beim AWF hat in Zusammenarbeit mit dem Getriebeausschuß des AWF durch systematisches Durchforschen der Patentliteratur eine Systematisierung des Stoffes vorbereitet. Seit dem Erscheinen der ersten Auflage sind über dieses Thema einige interessante Veröffentlichungen erschienen. Es sei z. B. auf den Aufsatz von H. Krüger, Grundgetriebe in Feuerleitgeräten in der Zeitschrift „Feinmechanik und Präzision" 48 (1940), Heft 9, S. 93...98 verwiesen. Von Interesse sind weiterhin die Arbeiten von A. Kuhlenkamp in der Z. VDI, besonders 82 (1938), S. 1277...1281.

Ein gänzlich anders geartetes Gebiet ist das der elektrischen Rechengeräte. Die Bedeutung elektrischer Rechengeräte ist in ständigem Steigen begriffen. Eine zusammenfassende Darstellung ist bis jetzt noch nicht erschienen und dürfte sich auch in der heutigen Zeit aus begreiflichen Gründen verbieten.

Daß gerade der AWF die Herausgabe dieses Buches für die Gestaltung von Rechentafeln und -stäben unternimmt, ist keine Zufälligkeit. Die Frage nach der Zweckmäßigkeit graphischer Rechenhilfsmittel ist nämlich vorwiegend eine wirtschaftliche Frage. Oft verlangt der Betrieb eine Reihe von zwar einfachen, aber ermüdenden und zeitraubenden Berechnungen, die sich in gleicher oder ähnlicher Form an vielen Stellen wiederholen. Benutzt man für die Ausführung solcher Rechnungen Rechentafeln oder Sonderrechenstäbe, so gelingt es oft, hochqualifizierte Arbeitskräfte von dieser anstrengenden Kleinarbeit zu entbinden. Die Rechnungen können auch nach kurzer Anleitung von Personen durchgeführt werden, die die Zusammenhänge gar nicht zu kennen brauchen. Feste Zahlenwerte, die beim üblichen Rechnen immer wieder beachtet werden müssen, treten bei den besonderen Hilfsmitteln nach außen nicht in Erscheinung, sondern werden durch den Aufbau der Tafel berücksichtigt. Gleichzeitig treten Rechenfehler weniger oft auf, weil unter anderem das Abschätzen der Stellenzahl des Ergebnisses entfällt. Bei allen diesen Vorteilen kann noch das

Rechenhilfsmittel der Eigenart des Benutzers oder den Anforderungen des Betriebes weitgehend angepaßt werden.

Man hat die zu besprechenden Rechenhilfsmittel sehr treffend als Speicher für Rechenaufgaben bezeichnet. Die von einem Zeichner aufgetragene Rechentafel als Speicherwerk wäre auch dann noch wirtschaftlich, wenn jede einzelne dieser Rechnungen vorher vom Zeichner der Tafel geleistet werden müßte. Eine so entstandene Tafel kann nämlich nach Vervielfältigung von einer großen Zahl anderer Rechner unter erheblicher Zeitersparnis benutzt werden. Es ist aber eine wertvolle Eigenart aller graphischen Rechenhilfsmittel, daß die Wirtschaftlichkeit der Speicherung von Rechenaufgaben dadurch erheblich gesteigert wird, daß nicht alle in einer Rechentafel gespeicherten Aufgaben einzeln eingezeichnet zu werden brauchen, sondern daß eine Auswahl solcher Aufgaben zur Konstruktion der Tafel ausreicht. Wie man dies erreicht, wird später klar werden.

Ein weiterer Vorteil der Rechentafeln besteht in der Anschaulichkeit. Sehr oft ist der Einfluß der Veränderung einer oder mehrerer Eingangsgrößen auf das Endergebnis an Hand der Tafel sofort zu überblicken, während die Feststellung dieses funktionalen Zusammenhangs sonst eine Vielzahl von Rechnungen erfordert. Daß man diese Eigenart rechentechnischer Hilfsmittel dazu benutzen kann, auch rein mathematische Zusammenhänge übersichtlich und für die quantitative Auswertung unmittelbar verwendbar darzustellen, hat in einem ausgezeichneten Buch H. Schwerdt deutlich erwiesen.[1])

Die vorliegende Schrift ist nicht nur ihrer Gliederung, sondern auch der in ihr zum Ausdruck gebrachten nomographischen Anschauungsweise nach wesentlich bestimmt durch die Zusammenarbeit des Verfassers mit dem Obmann des Ausschusses für Rechentechnik beim AWF, Herrn Studienrat Schwerdt. Dieser hat nicht nur in jahrelanger Lehrtätigkeit bei den vom AWF veranstalteten Nomographiekursen nomographisches Gedankengut in die Praxis verpflanzt sondern auch in zahlreichen Zeitschriften- und Buchveröffentlichungen bestimmend dazu beigetragen, der Rechentechnik in Deutschland ein eigenes Gesicht zu geben und ihr den Raum zu erobern, der ihr gemäß ihrer Bedeutung als zeit- und arbeitsparendes „wirtschaftliches" Hilfsmittel zukommt. Es ist dem Verfasser daher ein aufrichtiges Bedürfnis, Herrn Studienrat Schwerdt für seine unmittelbare und mittelbare Mitarbeit an dieser Schrift den herzlichsten Dank abzustatten.

1) H. Schwerdt, Anwendung der Nomographie in der Mathematik. Berlin 1931.

A. Darstellungselemente

I. Grundlagen

1. Funktionen und Veränderliche; Festlegungen

Es kommt sehr häufig vor, daß zwei veränderliche Größen — wir wollen sie im allgemeinen u und v nennen — in eine bestimmte Beziehung zueinander treten. Diese Beziehung wollen wir Funktion nennen.

Wir betrachten ein Beispiel, bei dem diese Beziehung zwischen den beiden Größen durch das Experiment festgestellt ist. Messen wir die Temperatur t im Innern eines Ofens in Abhängigkeit von der Zeit z vom Beginn des Anheizens an, so ergibt sich z. B. die in der nachstehenden Tafel (Bild 1) dargestellte Zuordnung:

Durch diese Tafel des experimentellen Befundes wird offenbar in eindeutiger Weise innerhalb der für diese Messung erreichbaren Genauigkeit der Veränderlichen z (der Zeit) die andere Veränderliche t (die Temperatur) zugeordnet. Die Tafel vermittelt daher eine Funktion. Man nennt die Veränderliche z als die leitende Versuchsveränderliche die „unabhängige Veränderliche", während t „abhängige Veränderliche" heißt. Wir wollen die gewonnene Funktion, weil sie sich auf eine Erfahrung stützt, eine empirische Funktion nennen.

Zeit z	Temp. t
min	Grad
0	20
10	30
20	50
30	90
40	160
50	230
60	300
70	350
80	390
90	420
100	440
110	450

Bild 1.
Tafel für den Temperaturverlauf in einem Ofen in Abhängigkeit von der Zeit

Es bereitet keine Schwierigkeiten, in dem betrachteten Beispiel die Temperatur t als unabhängige Veränderliche, die Zeit z dagegen als abhängige Veränderliche zu betrachten. Fragt man z. B. danach, welche Zeit zu einer bestimmten Temperatur gehört, so erhält man die gleiche Größenzuordnung; die Temperatur ist aber nun die leitende Versuchsveränderliche geworden. Daß aber zu jeder Temperatur t nur eine Zeit z gehört, ist nur dann sicher, wenn die Temperatur ständig zunimmt wie in unserem Falle, oder ständig abnimmt.

2. Die Zahlentafel

Vorhin haben wir in einer Tafel durch Gegenüberstellung zusammengehöriger Zahlenwerte einen „funktionalen" Zusammenhang dargestellt. Wir wollen eine solche Tafel eine Zahlentafel nennen, wenn sich in ihr die Werte der unabhängigen Veränderlichen wenigstens abschnittsweise in gleichen Schritten ändern, wie dies in unserem Beispiel für die Zeit z zutrifft. Man schreibt gewöhnlich in einer Zahlentafel die unabhängige Veränderliche auf die linke Seite eines senkrechten Striches, die zugehörigen Funktionswerte auf die rechte Seite. Die Differenz zweier aufeinanderfolgender Zahlenwerte der unabhängigen Veränderlichen nennt man den Zahlenschritt.

In unserem Beispiel ändert sich die unabhängige Veränderliche kontinuierlich, d. h. außer den in der Zahlentafel angegebenen Werten für z haben auch alle Zwischenwerte einen Sinn. Wir hätten z. B. statt in Abständen von 10 min auch in Abständen von 1 min oder in noch kürzeren Abständen messen und damit den Wertevorrat unserer Zahlentafel beliebig erhöhen können. Aus praktischen Gründen vermag aber eine Zahlentafel nur immer eine endliche Auswahl zusammengehöriger Funktionswerte in systematischer Anordnung zu geben. Welche Werte die Funktion in Zwischenwerten annimmt, ist zunächst unbekannt. Für die angegebenen Zahlenwerte der unabhängigen Veränderlichen enthält aber die Zahlentafel die Funktionswerte in jeder bei der Messung erreichbaren Genauigkeit.

Liegen die in der Zahlentafel enthaltenen Werte der unabhängigen Veränderlichen hinreichend dicht[1]), so kann man bei Funktionen, deren „glatter" Verlauf auf Grund der Beobachtung oder aus theoretischen Überlegungen gesichert ist, die Funktionswerte auch für Zwischenwerte mit ausreichender Genauigkeit ermitteln. Man nimmt hierzu an, daß in dem fraglichen Abschnitt die Änderung der abhängigen Veränderlichen proportional der Änderung der unabhängigen Veränderlichen erfolgt. Man nennt diese einfachste Art der Einschaltung von Zwischenwerten geradlinige Einschaltung oder lineare Interpolation.[2])

Ist z. B. in unserer Zahlentafel eine solche Einschaltung zwischen $z = 40$ und 50 min erlaubt, so ergibt sich der Funktionswert t für $z = 43$ min zu

$$t = 160 + \frac{3}{10} \cdot 70 = 160 + 21 = 181 \text{ Grad.}$$

1) Genauere Ausführungen über den Sinn des Wortes „hinreichend" folgen später unter A II, 2.

2) Man vergleiche auch hierzu die späteren Ausführungen unter A II, 2.

Nicht immer hat es übrigens Sinn, nach den Funktionswerten für Zwischenwerte der unabhängigen Veränderlichen zu fragen. Sehr oft nimmt die unabhängige Veränderliche nur einzelne, z. B. ganze Werte an.[1]) Stellt man z. B. die Monatsumsätze eines Fahrradgeschäftes für ein Jahr in einer Tafel zusammen, in der man die Monate als unabhängige Veränderliche von 1 bis 12 beziffert, so hat es nur Sinn, nach ganzzahligen Werten der unabhängigen Veränderlichen zu fragen. Wir werden im nächsten Abschnitt auf diese Frage noch einmal zurückkommen.

3. Das Schaubild (Die Kurventafel)

Der Zahlentafel haften einige Nachteile an, die sie für manche Zwecke ungeeignet machen. Der erste Nachteil ist der, daß die Zahlentafel den Verlauf der Funktion nicht auf den ersten Blick zu erfassen gestattet. Will man sich z. B. Klarheit über das Wachstum oder das Abfallen der abhängigen Veränderlichen verschaffen, so muß man von Zeile zu Zeile die Differenzen der Funktionswerte ermitteln.

Ein weiterer Nachteil besteht auch darin, daß die Zahlentafel bei Funktionen mit kontinuierlich veränderlichen Werten nur eine Auswahl der Funktionswerte wiedergibt, während dazwischenliegende Werte durch Interpolation gefunden werden müssen. Dieser Nachteil wird auch oft nicht durch den Vorteil großer Genauigkeit der enthaltenen Einzelwerte ausgeglichen, wenn es z. B. auf eine übertriebene Genauigkeit nicht ankommt. Man wird sich der Zahlentafel daher nur bei hohen Genauigkeitsansprüchen, dann aber auch mit großem Nutzen bedienen. In anderen Fällen benutzt man zweckmäßig das Schaubild, das neben dem Vorteil größerer Anschaulichkeit bei kontinuierlich veränderlichen Größen die Funktionsbeziehung für jeden beliebigen Zwischenwert ergibt.

Man gelangt zum Schaubild in der folgenden Weise: Man zeichne eine waagerechte Gerade und eine hierzu senkrechte Gerade. Die waagerechte Gerade nennt man Abszissen-, die senkrechte Ordinatenachse. Den Schnittpunkt beider Geraden nennt man Koordinatenanfangspunkt oder Ursprung *O*. Das ganze Gebilde trägt den Namen „Rechtwinkliges Achsenkreuz“ oder Koordinatensystem. In dem Bild 2 ist ein solches Achsenkreuz mit allen Bezeichnungen eingetragen.

1) Man nennt sie dann auch einen „Index“.

Jeder Punkt der Zeichenebene ist in einem solchen Achsenkreuz durch Angabe zweier Zahlen eindeutig festgelegt. Zieht man nämlich durch einen Punkt P parallel zu den Achsen zwei Geraden, so treffen diese Geraden die Achsen in den beiden Punkten P_1 bzw. P_2. Die Strecke OP_1, Abszisse genannt, und die Strecke OP_2, Ordinate

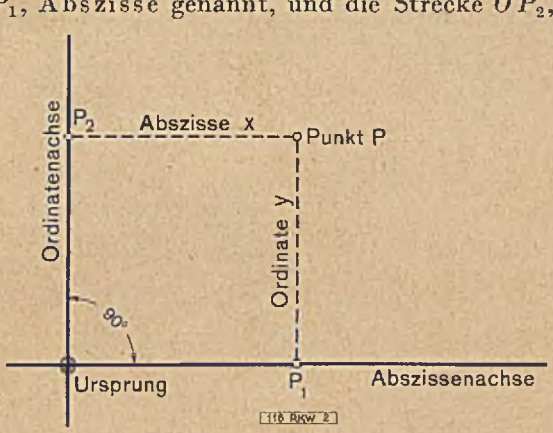


Bild 2. Koordinatensystem

genannt, bestimmen die Lage des Punktes P. Liegt P_1 bzw. P_2 rechts bzw. oberhalb O, so sollen die Strecken positiv zählen, im anderen Fall negativ.

Umgekehrt kann jedem Zahlenpaar u, v ein Punkt P unserer Darstellung zugeordnet werden. Wir wählen hierzu zwei Einheitsstrecken l_1 und l_2, auch Zeicheneinheiten genannt, und tragen auf der Abszissenachse die Strecke

$$x = l_1 \cdot u,$$

auf der Ordinatenachse die Strecke

$$y = l_2 \cdot v$$

vom Ursprung O aus ab. Ist x bzw. y positiv, so erfolgt das Abtragen nach rechts bzw. nach oben, sonst umgekehrt.

Bei der Durchführung von Rechenzeichnungen nach Art der Cremonapläne oder des Seileckes ist die Darstellung der Zeicheneinheit als Strecke zweckmäßig, weil dies das Einstellen des Zirkels oder das Abtragen von Strecken in der Rechenzeichnung erleichtert. In Rechentafeln, wie sie in diesem Buche behandelt werden, wird aber nicht gezeichnet, und die Größe der gewählten Zeicheneinheit ist auch für die

Benutzung der Tafel völlig gleichgültig. Im vorliegenden Buch ist daher auch von der Darstellung der Zeicheneinheit durch eine Strecke Abstand genommen worden.

Ziehen wir durch die Endpunkte der auf den Achsen abgetragenen Strecken Parallelen zu den Achsen, so schneiden sich die Parallelen im sogenannten Bildpunkte P des Zahlenpaares u, v. Trägt man

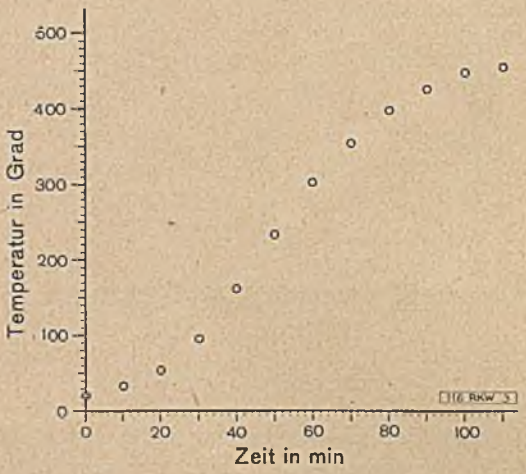


Bild 3. Schaubild des Temperaturverlaufs nach Bild 1

z. B. auf diese Weise die Zahlenpaare des Bildes 1 in einem Achsenkreuz auf, so ergeben die einzelnen Bildpunkte der Zahlenpaare ein anschauliches Bild von dem Temperaturverlauf beim Anheizen des Ofens. In Bild 3 sind als Zeicheneinheiten gewählt:

5 mm für 10 min	$l_1 = 0{,}5$ [mm] [1])
10 mm für 100 Grad	$l_2 = 0{,}1$ [mm] [1])

Um nicht immer genötigt zu sein, zur quantitativen Auswertung des Schaubildes einen Maßstab heranzuziehen, und um die Angabe der Zeicheneinheiten zu ersparen, empfiehlt es sich, an die Achsen des Schaubildes einen Maßstab anzusetzen, der vorzugs-

1) Da man eine Zeit bzw. eine Temperatur als Strecke auftragen will, müßten, genau genommen, die Größen l_1 und l_2 die Dimension mm/min bzw. mm/Grad besitzen. Da das Ergebnis der Auftragung aber unabhängig davon ist, welche Dimension die darzustellenden Größen haben, wird von der Dimension der darzustellenden Größe in der Rechentechnik meist abgesehen.

weise die Ganzen, die Zehner usw., nach kleineren Zahlen die Zehntel, Hundertstel usw. enthält.

Es ist dabei nicht notwendig, an jeden Teilstrich auch eine Zahl zu setzen, sondern es genügt das Anschreiben von Zahlen in angemessenen Abständen. Auch hier werden wieder Ganze, Zehner usw., nach unten Zehntel, Hundertstel usw. bevorzugt. Um dem Auge die Orientierung zu erleichtern, werden die Teilstriche verschieden lang und gegebenenfalls verschieden stark ausgeführt. So ist es z. B. auch üblich, die 5 durch einen längeren Teilstrich hervorzuheben.

Würden die Teilstriche bei Bevorzugung des Zehnersystems zu eng aufeinanderfolgen, so empfiehlt sich, größere Zwischenräume nur in zwei oder gegebenenfalls fünf Teile einzuteilen. Es werden dann also die Zahlen 5 bzw. 2, 4, 6 und 8 und ihre Zehnerpotenzen durch Teilstriche angedeutet. Die Änderung des Zahlenwertes der dargestellten Größe zwischen zwei aufeinanderfolgenden Teilstrichen nennt man den Zahlenschritt oder kürzer den Schritt.

Die zwischen den einzelnen Teilstrichen liegenden Werte schätzt das menschliche Auge bei einiger Übung sehr genau ein. Damit der dabei begangene Fehler nicht größer als etwa $\frac{1}{10}$...$\frac{5}{10}$ mm wird, empfiehlt es sich, die Abstände aufeinanderfolgender Teilstriche nicht viel größer als etwa 2...3 mm zu machen; in Sonderfällen kann man bis zu 5 mm gehen.

Aber auch die zu starke Verringerung der Teilstrichabstände muß vermieden werden. Zu enge Teilstrichabstände ermüden das Auge sehr stark. Weiterhin ist die Einschätzung von Zwischenwerten von $\frac{1}{10}$ des Abstandes zweier aufeinanderfolgender Teilstriche wegen der begrenzten Genauigkeit des menschlichen Auges nicht mehr gesichert. Man wähle daher den Teilstrichabstand bei gezeichneten Teilungen nie viel kleiner als 1 mm, bei maschinell hergestellten Teilungen nie kleiner als $\frac{1}{2}$ mm. Beim Aufzeichnen von Teilungen, die später durch Reproduktionsverfahren verkleinert werden, ist die letzte Regel besonders zu beachten.

Wir nennen die in der beschriebenen Weise an den Achsen entstandenen Strichteilungen nach einem Vorschlage von H. Schwerdt gleichförmige Leitern oder Teilungen.[1]) Man unterscheidet bei den Leitern

1) Die früher häufig benutzte Bezeichnung „regelmäßige" oder „Regel"-Leiter soll von uns nicht übernommen werden, weil man schließlich den später zu betrachtenden Funktionsleitern auch eine Regelmäßigkeit des Aufbaues zuschreiben muß. Die

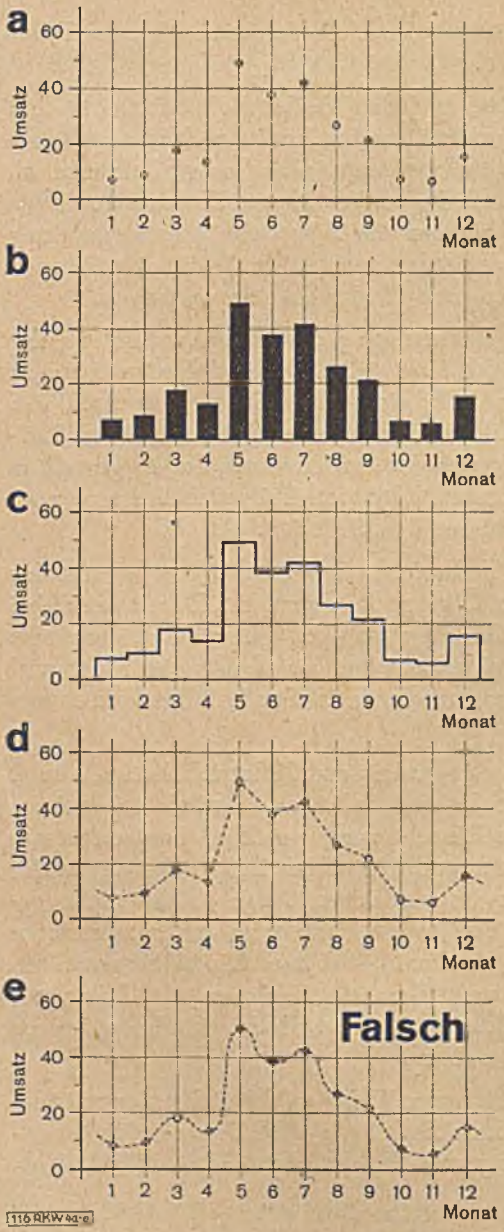


Bild 4 a—e. Verschiedene Darstellungsmöglichkeiten für Monatsumsätze

den Träger, das ist in unserem Falle die gerade Achse, und die Teilung. Da es später erforderlich wird, an einem Träger zwei Teilungen anzubringen, so zeichne man die Teilstriche nur immer an eine Seite des Trägers.

Hätten wir bei unserem Versuch über den Temperaturverlauf mehr Meßzeiten eingelegt, so hätten wir mehr als die im Bild 3 gezeichneten Bildpunkte erhalten. Da aus physikalischen Gründen zu jeder Zeit eine bestimmte Temperatur gehört, so können wir uns alle diese unendlich vielen Punkte eingetragen denken. Die Gesamtheit aller dieser Punkte ergibt in unserem Beispiel einen gekrümmten Linienzug (s. Bild 6). In meistens ausreichender Näherung erhält man diesen Linienzug, indem man durch die wenigen vorhandenen Meßpunkte einen möglichst glatten Linienzug hindurchlegt.

Bezeichnung „regelmäßige" Leiter ist also irreführend. Dagegen trifft das aus der Bewegungslehre übernommene Wort „gleichförmig" die Sachlage wesentlich besser und soll daher weiterhin angewendet werden.

Daß man dabei erhebliche Fehler begehen kann, geht schon daraus hervor, daß die wirkliche Kurve Sprünge aufweisen kann. Sehr oft ist aber eine Einschaltung von Zwischenwerten in der angedeuteten Weise erlaubt.

Liegen die einzelnen bekannten Bildpunkte der Funktion genügend dicht, so genügt eine geradlinige Einschaltung, indem man die einzelnen Punkte durch gerade Strecken verbindet. Dieses Verfahren entspricht der linearen Interpolation des vorigen Abschnittes.

In den Fällen, in denen die unabhängige Veränderliche sich nur in Sprüngen ändert, ist die Einschaltung von Zwischenwerten sinnlos oder aber falsch. In Bild 4 a seien z. B. die Monatsumsätze eines Fahrradgeschäftes in Abhängigkeit vom Monat 1...12 aufgezeichnet. Die unabhängige Veränderliche (Monate!) kann sich nur um ganze Zahlen ändern. Eine Verbindung der einzelnen Bildpunkte durch einen glatten Linienzug nach Bild 4 e wäre daher sinnlos und falsch, weil hierdurch dem Beschauer eine stetige Veränderlichkeit vorgetäuscht wird. Die Möglichkeiten zur deutlichen Hervorhebung der Bildpunkte sind in Bild 4 b bis 4 d dargestellt. Welche Darstellung bevorzugt wird, hängt von äußeren Umständen ab.

4. Die Formel

Alle funktionalen Zusammenhänge des Lebens, der Naturwissenschaft und der Technik treten uns zunächst auf Grund von systematischen Beobachtungen in Form von Zahlentafeln oder bei Verwendung von kontinuierlich registrierenden Instrumenten in Form von Schaubildern entgegen. Sehr oft gelingt es aber, den beobachteten Zusammenhang in einer Formel auszudrücken. Unter einer Formel verstehen wir dabei zunächst eine Verknüpfung der unabhängigen und abhängigen Veränderlichen durch die bekannten Rechenoperationen in Form einer Gleichung. Jedem zulässigen Wert der unabhängigen Veränderlichen wird dann durch diese Formel im einfachsten Fall ein bestimmter Wert der abhängigen Veränderlichen zugeordnet. Jede Formel zwischen zwei Größen u und v vermittelt also eine Funktion.

Die Formel besitzt gegenüber den bisher besprochenen Darstellungsmöglichkeiten für Funktionen den Vorteil, bei der Bestimmung aller zusammengehörigen Zahlenwerte jede gewünschte Genauigkeit zu erreichen. Weiterhin kann der Wert der abhängigen Veränderlichen

für jeden zulässigen Wert der unabhängigen Veränderlichen unmittelbar gewonnen werden. Eine Interpolation ist also nicht erforderlich.

Demgegenüber besitzt die Formel den Nachteil der Unanschaulichkeit. Weiterhin ist zur Bestimmung zweier zusammengehörigen Werte stets eine mitunter komplizierte Rechnung anzustellen. Wir betrachten einige einfache Beispiele.

I. Zwischen der bei freiem Fall zurückgelegten Wegstrecke s und der seit Beginn des Falles verflossenen Zeit t besteht angenähert die Beziehung

$$s = 5\left[\frac{\text{m}}{\text{sek}^2}\right] \cdot t^2 .$$

Zu jeder Zeit t kann mit Hilfe dieser Formel die durchfallene Wegstrecke s errechnet werden.

Man kann natürlich die Gleichung umformen, ohne an dem durch die Formel gegebenen Zusammenhang etwas zu ändern. Auflösung nach der Zeit t ergibt z. B.

$$t = \sqrt{\frac{s}{5 \cdot [\text{m}]}} \cdot [\text{sek}] .$$

Zu jeder zurückgelegten Wegstrecke kann hieraus die Fallzeit t errechnet werden. Man nennt die letzte Funktion die Umkehrfunktion der zuerst betrachteten, weil hier s die unabhängige und t die abhängige Veränderliche geworden ist.

II. Auch rein mathematische Zusammenhänge können eine Funktion in dem vorhin angegebenen Sinne bestimmen. Ordnen wir z. B. einer jeden Zahl u ihren Logarithmus[1]) v zur Basis 10 zu, so sind u bzw. v die unabhängige bzw. abhängige Veränderliche einer Funktion, die wir die Logarithmusfunktion nennen. Wir schreiben

$$v = \log u .$$

In diesem Falle ist eine Umrechnung zur Umkehrfunktion nicht mehr nur durch Anwendung der gewöhnlichen Rechenoperationen möglich.

---

1) Unter dem Logarithmus einer Zahl u versteht man bekanntlich die Zahl v, mit der man die Basis (im allgemeinen 10) potenzieren muß, um die erste Zahl, den Numerus u, zu erhalten.

Wenn man sich aber die Bedeutung des Logarithmus klarmacht, so erhält man als Umkehrfunktion

$$u = 10^v.$$

Das ist die sogenannte Exponentialfunktion.

III. Als drittes und letztes Beispiel betrachten wir eine Funktion, die durch Anwendung einfacher rationaler Rechenoperationen aus u entsteht.

$$v = \frac{A \cdot u + B}{C \cdot u + D}$$

A, B, C und D sind dabei feste, aber sonst willkürlich wählbare Zahlenwerte. Zu jedem Wert von u wird durch die Gleichung ein bestimmter Zahlenwert v zugeordnet. Unter einer gewissen Einschränkung, die wir später kennenlernen werden, wollen wir diese Funktion eine projektive Funktion nennen. Sie besitzt die Eigentümlichkeit, daß auch die zugehörige Umkehrfunktion eine projektive Funktion ist. Man erhält nämlich

$$u = \frac{D \cdot v - B}{-C \cdot v + A}.$$

Für theoretische Betrachtungen und allgemeine, von der speziellen Form der Funktion unabhängige Untersuchungen ist es zweckmäßig, für die Funktion v einer unabhängigen Veränderlichen u eine Abkürzung einzuführen. Wir schreiben

$$v = f(u)$$

(sprich: v gleich Funktion von u; kurz: v gleich f von u);

v ist dann die abhängige, u die unabhängige Veränderliche.

Statt f kann man, meist zum Zwecke der Unterscheidung, auch andere Buchstaben, z. B. $g(u)$, $k(u)$ verwenden. Auch große Buchstaben sind üblich, z. B. $F(u)$; $G(u)$; $H(u)$. Stellenweise werden wir zur Unterscheidung verschiedener Funktionen auch angehängte Zahlen verwenden, z. B. $f_1(u)$, $f_2(u)$ usw.

5. Überführung einer Darstellungsform in eine andere

Oft tritt die Aufgabe an uns heran, eine der behandelten Darstellungsformen in eine andere umzuwandeln. Wie man z. B. eine Zahlentafel in ein Schaubild umwandelt, haben wir schon unter A I, 3 kennengelernt. Auch der umgekehrte Weg, nämlich die Umwandlung eines

Schaubildes in eine Zahlentafel, bereitet keine Schwierigkeiten. Man hat nur zu in gleichen Zahlenschritten fortschreitenden Werten der unabhängigen Veränderlichen aus der Kurve die zugehörigen Zahlenwerte der abhängigen Veränderlichen zu entnehmen und die Werte in bekannter Weise in einer Zahlentafel zusammenzustellen. Die Angaben der Zahlentafel sind dann natürlich mit einer durch die Zeichnung und Ablesung bedingten Ungenauigkeit behaftet.

Die Umwandlung einer Formel in eine Zahlentafel geht ohne Schwierigkeiten vor sich, wenn man aus der Formel mit den Zahlenwerten u, die in gleichen Zahlenschritten fortschreiten, die zugehörigen Werte für v bestimmt und in einer Tafel zusammenstellt.

Dagegen ist die Rückkehr von der Zahlentafel eindeutig überhaupt nicht und nur bei genügend kleinem Zahlenschritt einigermaßen gesichert möglich. Die Mathematik bietet verschiedene Möglichkeiten zur Auffindung von Näherungsformeln für in Zahlentafeln dargestellte Funktionen[1]), wir wollen uns hier aber damit nicht näher befassen, weil es den Rahmen der Schrift überschreiten würde. Von einigen Interpolationsformeln werden wir später Gebrauch machen. In einfacheren Fällen kann man sich durch Probieren innerhalb einer gewissen Genauigkeit helfen.

Es bleibt schließlich noch die Umwandlung einer Formel in ein Schaubild und umgekehrt zu betrachten. Sehr oft kann man aus bestimmten Eigenschaften der darzustellenden Formeln leicht Konstruktionen angeben, die ohne weitere Zwischenstufen zum Schaubild führen.[2]) Oft versagt aber dieser Weg. Dann gelangt man über die Zahlentafel zum Schaubild.

Für die Umwandlung eines Schaubildes in eine Formel gilt ungefähr das über die Umwandlung einer Zahlentafel in eine Formel Gesagte. Wegen der beschränkten Genauigkeit eines Schaubildes kann es sich stets nur um eine Näherungslösung handeln. Auch hier gibt es direkte Wege, z. B. die Fourieranalyse, oder indirekte Wege über die Zahlentafel in der oben angegebenen Weise.

---

1) Es sei erinnert an die Lagrangeschen und Newtonschen Interpolationsformeln, an trigonometrische Interpolation und an die Gaußsche Methode der kleinsten Quadrate.

2) Z. B. Brauersche Konstruktion von Polytropen, Subtangentenkonstruktion der Exponentialfunktion; man vergleiche auch H. Schwerdt, Lehrbuch der Nomographie. Berlin 1924.

Das nachstehende Bild 5 zeigt ein Schema der Umwandlung von einer Form in die andere. Ausgezogene Pfeile bedeuten leichten, gestrichelte schweren und angenäherten Übergang.

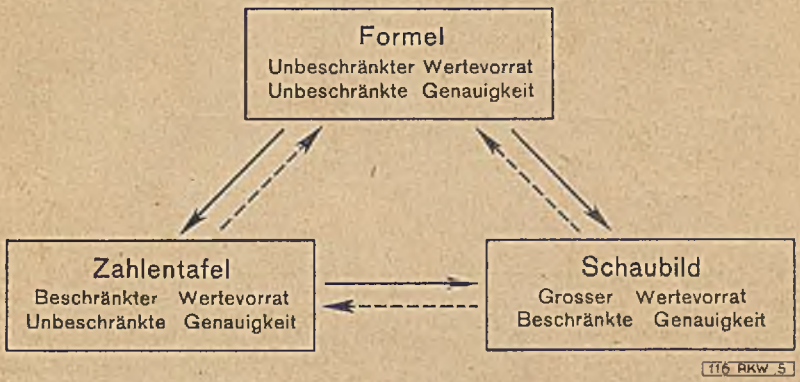


Bild 5. Überführung einer Darstellungsform in eine andere

Während früher die rückwärtigen Übergänge eine geringe Rolle in der Rechentechnik spielten, tritt die Notwendigkeit solcher Umwandlungen heute mehr in den Vordergrund, seitdem man gelernt hat, auch empirische Funktionszusammenhänge mit rechentechnischen Hilfsmitteln darzustellen.

II. Funktionsleitern

1. Die Doppelleiter

Von der schaubildmäßigen Darstellung einer Funktion, von der wir jetzt kontinuierliche Veränderlichkeit beider Veränderlichen annehmen, kommen wir leicht zu einer neuen Darstellungsform, die für die Rechentechnik von grundlegender Bedeutung ist. Wir betrachten noch einmal unser erstes Beispiel des Temperaturverlaufs in einem Ofen und denken uns von diesem Verlauf das Schaubild aufgezeichnet (Bild 6).

Durch die auf der Ordinatenachse links aufgetragenen Teilstriche ziehen wir waagerechte Geraden parallel zur Abszissenachse. Die Geraden schneiden die Kurve des Schaubildes in den zu den betreffenden Temperaturen gehörigen Bildpunkten. In Bild 6 sind die zu den Hunderten gehörigen Linien eingetragen worden. Die gewonnenen Bildpunkte loten wir auf die Abszissenachse herunter und schreiben

an die so erhaltene Teilung auf der oberen Seite der Trägergeraden die zugehörigen Temperaturen. Die Ausstattung und Beschriftung der neuen Leiter erfolgt nach den gleichen Gesichtspunkten wie die der gleichförmigen Teilung.

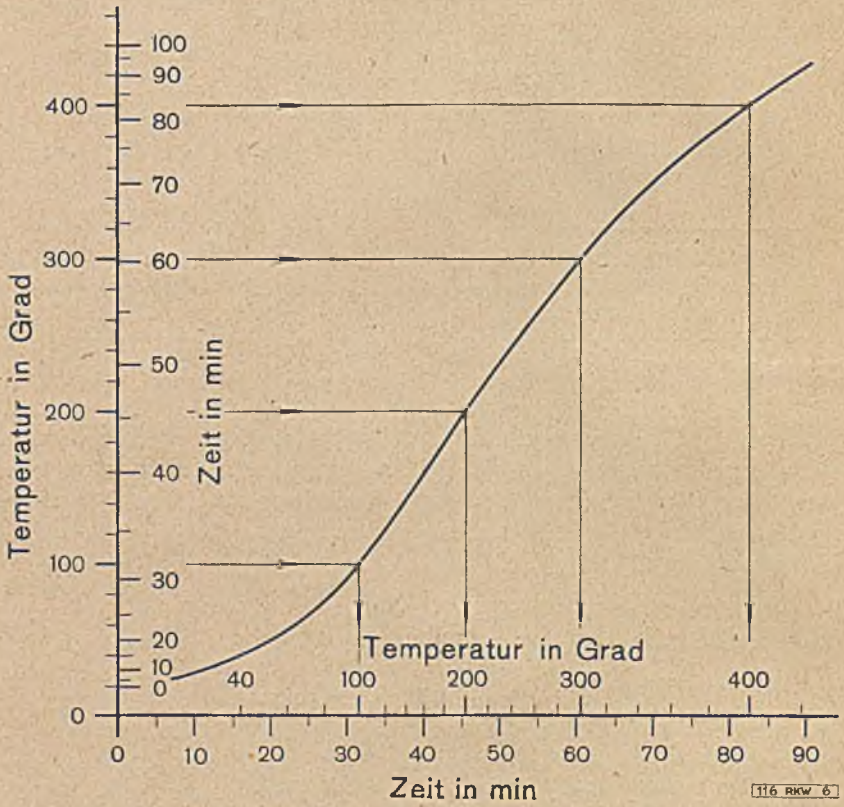


Bild 6. Schaubild eines Temperaturverlaufs. Konstruktion von Doppelleitern

Haben wir die beschriebene Konstruktion durchgeführt, so ist für künftige Rechnungen die Kurve überflüssig geworden. Zu jeder Zeit kann auf der Abszissenachse sofort darüber die zugehörige Temperatur abgelesen werden. Wir nennen das erhaltene Gebilde eine Doppelleiter[1]), weil ein Träger mit zwei Teilungen versehen ist.

Wie man sofort sieht, besitzt die obere Teilung die Eigenschaft, ungleichförmig geteilt zu sein. Die Teilstriche drängen sich in der Mitte

1) Die Bezeichnung geht auf P. Lukey zurück.

der Leiter und stehen an den Enden bei gleichen Zahlenschritten weiter auseinander. Man nennt eine ungleichförmige Leiter „Funktionsleiter".

Wegen der fortgesetzten Drängung bzw. Dehnung der Teile (so wollen wir die zu gleichen Zahlenschritten gehörigen Abstände zwischen den Teilstrichen nennen)[1]) kann die Einschaltung von Zwischenwerten nach dem Augenmaß nicht mehr genau erfolgen. Soll der bei gleichförmiger Einschaltung begangene Fehler nicht zu groß werden, so müssen einige Gesichtspunkte beachtet werden, auf die wir unter A II, 2 zurückkommen.

Eine Doppelleiter leistet das gleiche wie das Schaubild, besitzt aber den Vorteil geringeren Platzbedarfs. Vom theoretischen Standpunkt ist interessant, daß wir beim Übergang vom Schaubild zur Doppelleiter von einer zweidimensionalen, flächenhaften Darstellung zu einer eindimensionalen, linienhaften Darstellung gelangen. In dieser Erkenntnis liegt der große methodische und praktische Vorteil der Doppelleiter begründet. Bei sehr großen Bereichen bzw. bei sehr hohen Genauigkeitsanforderungen nimmt man bei den Schaubildern oft eine Unterteilung vor. Die Abszissen- und Ordinatenachse werden dann mehrfach beziffert. Hierdurch können Irrtümer entstehen. Das ist bei den besprochenen Doppelleitern nicht möglich. Die gegebenenfalls sehr lange Doppelleiter wird in mehrere handliche Teile zerlegt, die man nebeneinander anordnen kann. Man vergleiche z. B. Bild 7a. Der Nachteil geringerer Anschaulichkeit fällt bei einiger Übung fort, weil man dann aus dem Verlauf der Drängung bzw. Dehnung der Teile leicht auf das Wachstum der Funktion schließen kann.

Die Doppelleiter entsprang einer gewissen Bevorzugung der Abszissenachse, die als gleichförmige Teilung bei unserer Konstruktion erhalten geblieben ist. Eine andere Darstellung des gleichen Sachverhaltes gewinnen wir, wenn wir sinngemäß die Teilstriche der Abszissenachse über die Kurve auf die Ordinatenachse übertragen. In Bild 6 ist diese Übertragung ausgeführt worden. Man erhält eine Doppelleiter, bei der die gleichförmige Teilung der Ordinatenachse geblieben ist, während die Zeitteilung jetzt als Funktionsleiter erscheint. Wenn die Funktionsleiter vorhin eine Drängung der Teile in der Mitte auf-

1) Vielfach findet man für den Abstand aufeinanderfolgender Teilstriche das Wort „Teilungsintervall" oder „Teilintervall". Zur Vermeidung des Fremdwortes „Intervall" und aus Gründen der kürzeren Schreibweise wollen wir das kürzere Wort „der Teil" verwenden.

wies, so zeigt jetzt die Funktionsleiter eine Dehnung in der Mitte und eine Drängung an den Enden.

Die Möglichkeit, durch Bevorzugung einer Veränderlichen zu zwei ganz verschiedenen Doppelleitern für die gleiche Funktion zu gelangen, läßt es zweckmäßig erscheinen, für beide Darstellungsarten einen besonderen Namen zu wählen. Wir wollen künftig eine Doppelleiter nach der Veränderlichen benennen, die gleichförmig aufgetragen ist. Die waagerechte Doppelleiter von Bild 6 heißt also *z*-Doppelleiter, die senkrechte *t*-Doppelleiter.

Zu weiteren anders gearteten Doppelleitern, bei denen eine Bevorzugung der einen oder anderen Veränderlichen ganz wegfällt, kommt man auf folgende Weise. Wir denken uns eine der vorhin betrachteten Doppelleitern auf einer elastischen Unterlage aufgezeichnet und dann die Unterlage irgendwie in Richtung der Leitererstreckung, also in Längsrichtung der Trägergeraden verzerrt. So kann z. B. das untere Ende der Doppelleiter ausgezogen, das obere Ende zusammengedrückt werden. An den Ableseergebnissen in einer so verzerrten Doppelleiter ändert sich offenbar nichts, weil ja die Teilungen mit dem Träger ausgezogen oder zusammengedrückt werden. Solche „Verzerrungen" werden uns später noch eingehend beschäftigen; sie spielen in der Rechentechnik eine hervorragende Rolle.

Zur Beschäftigung mit solch allgemeinen Doppelleitern fehlen uns bis jetzt noch einige Hilfsmittel; spätere Betrachtungen im nächsten Abschnitt B werden uns aber von ganz anderer Seite an das Problem heranführen. Wir werden dann lernen, aus der andersgearteten Gestalt dieser Doppelleitern rechentechnische Vorteile zu schöpfen.

2. Die einfache oder Funktionsleiter

Bei den betrachteten Doppelleitern des vorigen Abschnittes bestand die Doppelleiter stets aus einer gleichförmig geteilten Leiter mit bestimmter Zeicheneinheit und einer ungleichförmig geteilten Funktionsleiter. Es bereitet nun keine Schwierigkeit, sich nach Entwurf der Doppelleiter die gleichförmige Leiter — nach der im übrigen die Doppelleiter benannt ist — entfernt zu denken. Kennt man nämlich die Zeicheneinheit, mit der diese Leiter gezeichnet war, so kann man sie jederzeit wieder mit Hilfe eines Maßstabes ohne Kenntnis des Funktionszusammenhanges der Doppelleiter reproduzieren. Das verbleibende Gebilde wollen wir Funktionsleiter im engeren Sinne

nennen. Zur ungleichförmig geteilten Leiter gehört aber stets die Angabe der Zeicheneinheit der weggenommenen gleichförmigen Leiter.

Es wäre ein empfindlicher methodischer Mangel, wenn die Funktionsleiter nur über das Schaubild in der im vorigen Paragraphen beschriebenen Weise gewonnen werden könnte. Abgesehen davon, daß man hierzu das Kurvenbild entwerfen müßte, würde eine aus dem Kurvenbild konstruierte Leiter eine erhebliche Ungenauigkeit aufweisen. Außer den Fällen, in denen die Funktion als Meßergebnis nur in Form einer Kurve vorliegt, gibt es noch einen anderen genaueren Weg zur Konstruktion einer Funktionsleiter. Ist nämlich

$$v = f(u)$$

die darzustellende Funktion, so bestimme man in einer Zahlentafel zu den in gleichen Zahlenschritten fortschreitenden Werten von u die zugehörigen Funktionswerte v. Die so ermittelten Werte v trägt man mit einer bestimmten, aber willkürlich wählbaren Zeicheneinheit auf einem geraden Träger von einem Anfangspunkt A aus ab. Die Abtragung erfolgt in einer festgelegten Richtung, wenn v positiv, in der entgegengesetzten Richtung, wenn v negativ ist. An die erhaltenen Teilstriche schreibt man nun die zugehörigen Zahlenwerte der unabhängigen Veränderlichen u an. Man merke sich also:

Zum Auftragen einer v-Funktionsleiter trage man die v-Werte auf, schreibe aber die zugehörigen, in gleichen Zahlenschritten fortschreitenden u-Werte an.

Bild 7 zeigt als Beispiel den Entwurf einer Funktionsleiter für die Funktion

$$v = \sqrt{u}$$

für den Bereich $u = 0...2$.

Als Zeicheneinheit ist $l = 50$ mm gewählt worden. Der Zahlenschritt beträgt bei der gezeichneten Leiter 0,1.

Die v-Werte sind mit Rücksicht auf die gewählte große Zeicheneinheit bis zur dritten Stelle hinter dem Komma angegeben und den Tabellen in der „Hütte", 27. Aufl., Bd. I, entnommen.

Es kann natürlich vorkommen, daß bei der Herstellung einer Tabelle für eine Funktionsleiter bei einigen Werten ein Rechenfehler unterläuft. Schon vor dem Aufzeichnen der Leiter findet man diesen Fehler sehr leicht durch Bildung der sogenannten 1. Differenzenreihe. Diese

entsteht durch Differenzbildung je zweier aufeinanderfolgender Werte a. In dieser Differenzenreihe müssen sich die Werte, die übrigens den „Teilen" entsprechen, stetig ändern. Nur an Stellen der Zahlenschrittänderung springt auch die Größe des Teils. Einen noch

u	v	$a = l \cdot v$
0	0	0
0,1	0,316	15,8
0,2	0,447	22,4
0,3	0,548	27,4
0,4	0,632	31,6
0,5	0,707	35,4
0,6	0,775	38,8
0,7	0,837	41,9
0,8	0,894	44,7
0,9	0,949	47,5
1,0	1,000	50,0
1,1	1,049	52,5
1,2	1,095	54,8
1,3	1,140	57,0
1,4	1,183	59,2
1,5	1,225	61,3
1,6	1,265	63,3
1,7	1,304	65,2
1,8	1,342	67,1
1,9	1,378	68,9
2,0	1,414	70,7

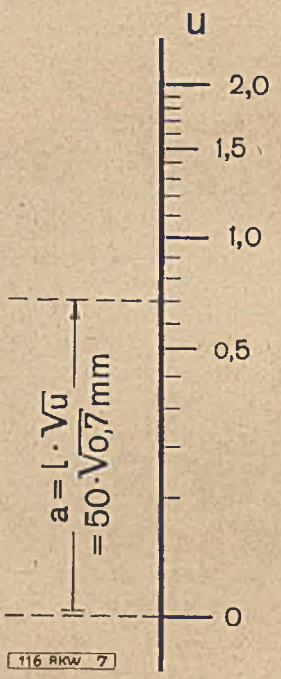


Bild 7. Entwurf einer Funktionsleiter

besseren Anhalt über begangene Fehler gibt die sogenannte 2. Differenzenreihe, die durch nochmalige Differenzbildung aufeinanderfolgender Teile entsteht. In ihr dürfen, abgesehen von den Stellen der Änderung im Zahlensprung, nur noch ganz geringfügige Änderungen vorkommen, für die wir später eine obere Grenze angeben werden.

Wie man die Differenzenreihen ausnutzen kann, um die Rechenarbeit bei der Aufstellung von Zahlentafeln einzuschränken, werden wir noch unter Abschnitt A II, 6 besprechen.

Alle die für den Entwurf einer gleichförmigen Leiter besprochenen Gesichtspunkte für Beschriftung, Ausbildung der Teilstriche und

Wahl des Zahlenschrittes bleiben unverändert erhalten. Insbesondere wird man also den Zahlenschritt so wählen, daß die Teile — so wollten wir ja den Abstand zweier benachbarter Teilstriche nennen — weder zu klein ($\approx$ 1...2 mm)[1]) noch zu groß ($\approx$ 5 mm) werden, weil sonst im ersten Fall die Ablesung mühsam ist und die aufgewendete Mühe nicht der erreichbaren Genauigkeit entspricht bzw. im zweiten Fall die Einschätzung von Zwischenwerten nicht mit einer großen Genauigkeit erfolgen kann. Die Wahl des Zahlenschrittes hängt natürlich wegen der absoluten Zahlenangaben für den Teil noch von der gewählten Zeicheneinheit ab.

Gegen die Forderung, daß die Länge der Teile weder zu klein noch zu groß sein soll, ist in Bild 7 unterhalb $u = 0{,}2$ bereits erheblich verstoßen. Will man die Forderung über die ganze Länge einer Funktionsleiter erfüllen, so ist man meist gezwungen, innerhalb der Leiter an bestimmten Stellen eine „Änderung des Zahlenschrittes" vorzunehmen. Aus Zweckmäßigkeitsgründen nimmt man diese Änderung des Zahlenschrittes nur an einer Stelle der Teilung vor, wo die unabhängige Veränderliche glatte Zahlenwerte annimmt. 1, 2, 5, 10 usw., 4 und 8 sind dafür bevorzugt. An der Stelle der Schrittänderung sollte grundsätzlich immer der Zahlenwert der unabhängigen Veränderlichen u angeschrieben werden.

Zeigt die Funktionsleiter eine starke Drängung oder Dehnung der Teile, so kann die Beschriftung ziemliche Schwierigkeiten bereiten. Man betrachte unter diesem Gesichtspunkt die in den nachfolgenden Abschnitten aufgezeichneten Leitern. Es ist dann nicht immer möglich, die Beschriftung ganz nach den oben genannten Gesichtspunkten durchzuführen. Bei sehr starker Dehnung der Teile muß man immer feiner unterteilen. Dabei sollte man sich bemühen, die Beschriftung so zu wählen, daß zu der angeschriebenen Zahl durch die nachfolgenden, nicht beschrifteten Teilstriche nur noch weitere Stellen angefügt werden. Als Beispiel zeigen wir in Bild 7 a eine in mehrere Teile zerlegte Doppelleiter für das Gaußsche Fehlerintegral.[2]) Man überzeuge sich selbst, daß die Ablesung auf den beiden rechten Leitern durch die Beschriftung erschwert ist. Man hätte bei

0,440 0,450 0,460 0,470 0,480 0,490 0,499 0 0,499 90

1) $\approx$ lies: ungefähr gleich.

2) Entnommen aus S. Koller, Graphische Tafeln zur Beurteilung statistischer Zahlen. Dresden und Leipzig 1940. Tafel 15, S. 73. Verkleinerte Wiedergabe.

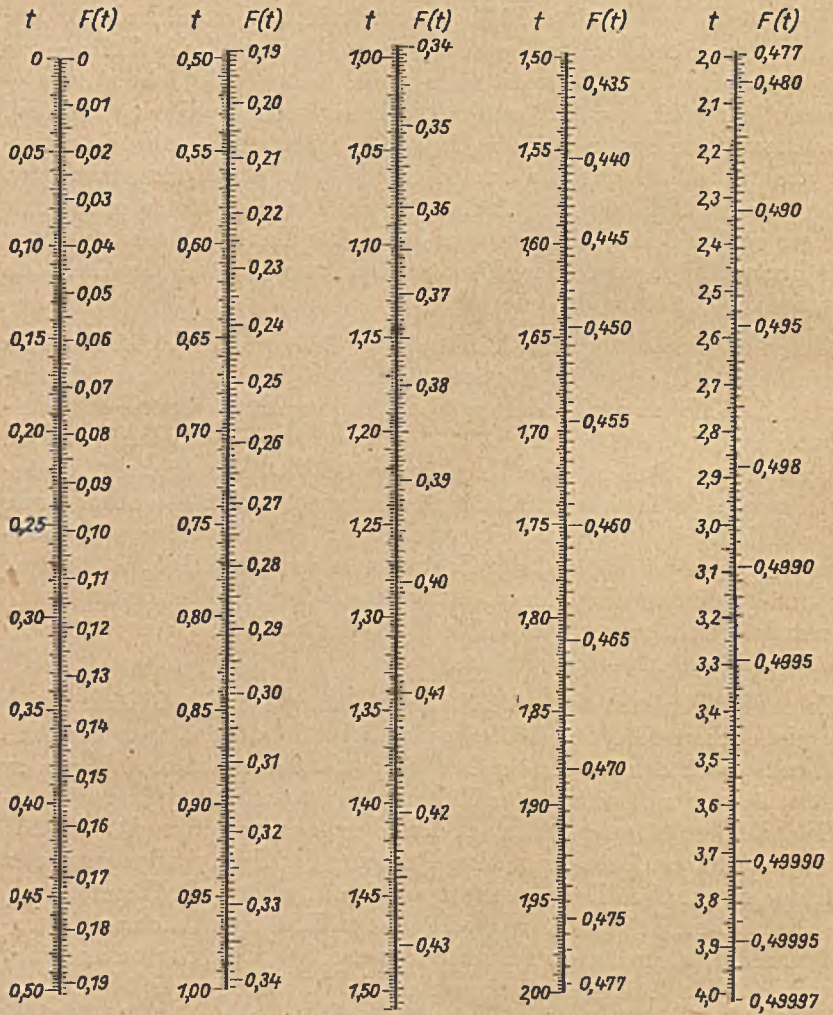


Bild 7a. Fehlerintegral

die 0 besser weggelassen. Weitere Verbesserungen ergibt das Fortlassen der Beschriftung 0,495; 0,4995; 0,49995. Die Kennzeichnung durch einen Punkt über dem Teilstrich ist hier zweckmäßiger.

Die Zeicheneinheit bestimmt sich in der Praxis meist aus den Forderungen über den darzustellenden Bereich der unabhängigen Veränderlichen und aus dem für das Rechenhilfsmittel verfügbaren Platz.

Steht z. B. für die Leiter eine Trägerlänge von L mm zur Verfügung und soll in der Funktion

$$v = f(u)$$

u den Bereich u_1 bis u_2 überstreichen, so gilt für die Zeicheneinheit l[1])

$$l \leqq \frac{L}{|f(u_2) - f(u_1)|}. \qquad (1)$$

Für jede Funktionsleiter gibt es aber eine untere Grenze für die Zeicheneinheit, unterhalb der die Einschätzung von Zwischenwerten nicht mehr mit der erforderlichen Genauigkeit erfolgen kann. Unser Auge ist nämlich geneigt, Zwischenwerte auf Funktionsleitern genau so einzuschätzen wie auf gleichförmigen Leitern, d. h. linear. Die Stelle, an der hierbei der größte Fehler begangen wird, liegt etwa in

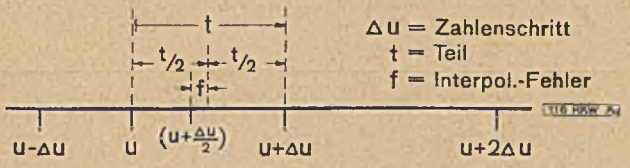


Bild 8. Ermittlung des Interpolationsfehlers

der Mitte zwischen zwei aufeinanderfolgenden Teilstrichen. Wir ordnen dieser Mitte infolge unserer Gewöhnung die Zahl u zu, die in der Mitte zwischen den zu den Teilstrichen gehörigen Zahlenwerten der unabhängigen Veränderlichen liegt. Man kann aber ausrechnen, wo der zu dieser Zahl u gehörige Teilstrich liegen muß. Die Längendifferenz zwischen diesem Teilstrich und dem linear eingeschätzten ist der theoretische Interpolationsfehler, der bei Teillängen von etwa 2 mm nicht größer werden darf als etwa $\frac{1}{90}$ des Teiles (s. Bild 8). Da der Teil sich nur in engen Grenzen ändert, so ergibt sich aus der obigen Forderung eine Mindestzeicheneinheit.

Wie stellt man nun zweckmäßigerweise fest, ob die nach obigen Punkten gekennzeichnete Interpolationsgenauigkeit einer Leiter erfüllt ist? Zunächst kann man dies so machen, wie wir es oben angedeutet haben. Man wählt also eine Stelle der Leiter aus und errechnet die Lage der Teilmitte und andererseits die Lage des Teilstriches für

1) $\leqq$ Dieses Zeichen wird gelesen: „kleiner gleich", das bedeutet also: „nicht größer als". Die angegebene Formel gilt streng genommen nur für ständig zunehmende oder abnehmende Funktionen.

den halben Zahlenschritt. Die Differenz zwischen den beiden Werten soll aus Wirtschaftlichkeitsgründen etwa $\frac{1}{10}$ mm oder rund $\frac{1}{20}$ des Teiles nicht überschreiten.

Einen anderen Weg kann man unter Benutzung von Interpolationsformeln beschreiten. Diesen Formeln liegt folgende Überlegung zugrunde. In der Umgebung der betrachteten Stelle kann man die Funktion durch eine für die Rechnung besonders bequeme Näherungsformel ersetzen. Diese Näherungsformel ermittelt man nach einem hier nicht beweisbaren Verfahren[1]) aus den zu den einzelnen Zahlen der unabhängigen Veränderlichen gehörigen Strecken $a = l \cdot f(u)$. Die Zahlen der unabhängigen Veränderlichen schreiten dabei vereinbarungsgemäß in gleichen Zahlenschritten fort. Aus den Zahlen a (übrigens die rechte Spalte einer Zahlentafel) ermittelt man nach dem Schema Bild 8 a die 1., 2., 3. und weitere Differenzenreihen.[2])

u	a	1. Diff.-Reihe	2. Diff.-Reihe	3. Diff.-Reihe	usw.
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
u_{-3}	a_{-3}		II_{-3}		
u_{-2}	a_{-2}	$I_{-2,5}$	II_{-2}	$III_{-2,5}$	
u_{-1}	a_{-1}	$I_{-1,5}$	II_{-1}	$III_{-1,5}$	
u_0	a_0	$I_{-0,5}$	II_0	$III_{-0,5}$	
u_1	a_1	$I_{0,5}$	II_1	$III_{0,5}$	
u_2	a_2	$I_{1,5}$	II_2	$III_{1,5}$	
u_3	a_3	$I_{2,5}$		$III_{2,5}$	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

Bild 8 a. Differenzenschema

Der Index 0 bezieht sich dabei auf den Beginn des Teiles, in dem man die Interpolationsgenauigkeit prüfen will.

Dann gilt für die Mitte zwischen u_0 und u_1, also $\frac{u_0 + u_1}{2}$:

$$a_{\frac{1}{2}} = a_0 + \frac{1}{2} \cdot I_{0,5} - \frac{1}{16}(II_0 + II_1) + \frac{3}{256} \cdot (IV_0 + IV_1) - \cdots$$

1) Genaues findet man in den Lehrbüchern über numerisches Rechnen, die Formeln selbst in sehr übersichtlicher Darstellung z. B. in F. G. Gauß, Fünfstellige Logarithmentafeln. Stuttgart 1926.

2) Siehe die vorhergehenden Ausführungen über Kontrolle einer Zahlentafel, wo auch der Begriff der Differenzenreihe erklärt ist.

$a_0 + \frac{1}{2} I_{0,5}$ entspricht aber der Mitte des Teiles von a_0 bis a_1, da $I_{0,5}$ der Teillänge entspricht. Daher weichen die gesuchten Werte um

$$\frac{1}{16}(II_0 + II_1) - \frac{3}{256}(IV_0 + IV_1) + \cdots$$

voneinander ab. In unseren Fällen können meist die vierten und weiteren Differenzen gegenüber den zweiten vernachlässigt werden. Daher wird der Interpolationsfehler etwa

$$\frac{1}{16}(II_0 + II_1).$$

Man sieht also, wie man die 2. Differenzenreihe einer Zahlentafel zur Beurteilung des Zahlenschrittes heranziehen kann. Da der Interpolationsfehler etwa $\frac{1}{10}$ mm betragen soll, gilt

$$\frac{1}{16}(II_0 + II_1) \leqq \frac{1}{10}\text{ mm}$$

oder

$$(II_0 + II_1) \leqq 1{,}6\text{ mm}.$$

Bei gewissen Funktionsleitern kommt es wegen des vorliegenden Funktionscharakters vor, daß die Leiter von der Drängung der Teile zur Streckung der Teile oder von der Streckung zur Drängung übergeht. Die Teile werden also links von dieser Stelle und rechts von dieser Stelle entweder stetig größer oder stetig kleiner. In unmittelbarer Umgebung der Stelle ändern sich die Teile nur ganz wenig. Solche Leiterstellen nennt man gleichförmige Stellen der Leiter. Sie sind für die Interpolation besonders günstig, weil die 2. Differenzen verschwinden; außerdem gestaltet sich das Ablesen sehr bequem. Wir werden später in Abschnitt F I sehen, daß man manchmal die gleichförmige Stelle einer Teilung an eine beliebige Stelle der Leiter verlegen kann. Hierdurch lassen sich für häufig vorkommende Bereiche sehr günstige Ableseverhältnisse und Interpolationsverhältnisse schaffen.

In der Rechentechnik spielen einige Funktionsleitern wegen ihres häufigen Vorkommens oder wegen der Vorzüge ihres Aufbaues eine besonders wichtige Rolle. Wir wollen daher diese Leitern kurz besprechen und von jeder dieser Leitern einen Vertreter wiedergeben.

3. Die logarithmische Leiter

Der logarithmischen Leiter liegt die Funktion

$$v = \log u$$

zugrunde. Es ist für die Diskussion des Leitergefüges zunächst gleichgültig, auf welche Basis m dieser Logarithmus bezogen ist, weil ganz allgemein gilt

$$^{(m)}\log u = {}^{(n)}\log u \cdot {}^{(m)}\log n.^{1})$$

Die Wahl einer anderen Basis entspricht also nur einer Änderung der Zeicheneinheit. Wir beschränken uns daher auf die Betrachtung der Logarithmen zur Basis 10.

a) Wir erkennen zunächst eine wichtige Eigenschaft der logarithmischen Leiter: Da $\log (u \cdot 10^n) = \log u + \log 10^n = \log u + n$ ist, so gehen die Leiterstücke für $u = 10$ bis 100, für $u = 100$ bis 1000 usw., ferner die Stücke für 0,1 bis 1, 0,01 bis 0,1 usw. alle durch sogenannte Verzifferung aus dem Stück für $u = 1$ bis 10 hervor. Diese Verzifferung besteht im Anhängen oder Abstreichen von Stellen.

b) Da $\log 1 = 0$ ist, so fällt der Wert $u = 1$ mit dem Anfangspunkt der Leiter zusammen. Da weiterhin $\log 10 = 1$ ist, so steht der Teilstrich für $u = 10$ genau um die Zeicheneinheit l vom Anfangspunkt $u = 1$ entfernt. Daraus folgt, daß sich die Leiter genau alle Zeicheneinheiten wiederholt. Wir sprechen bei einem Bereich von 1...10, 10...100 usw. von einer Dekade.

c) Da der Logarithmus außerordentlich große negative Werte annimmt, wenn sich der Numerus u dem Werte 0 nähert, so enthält eine logarithmische Leiter, sie möge so lang sein wie sie will, niemals den Nullpunkt $u = 0$.

d) Da der gewöhnliche Logarithmus nur für positive Zahlen erklärt ist, gibt es auf einer logarithmischen Leiter niemals negative Zahlenwerte u.

e) Auf einer logarithmischen Leiter können leicht mehrere Größenordnungen der unabhängigen Veränderlichen u untergebracht werden, ohne daß die Leiter unhandlich wird. Jeder Potenz von 10 entspricht nämlich eine Zeicheneinheit. Steht z. B. eine Trägerlänge von 250 mm

---

1) Lies: $^{(m)}\log u$ = Logarithmus von u zur Basis m. Siehe auch Fußnote 1) S. 22.

zur Verfügung und wählt man als Zeicheneinheit 50 mm, so können fünf Zehnerpotenzen untergebracht werden, also z. B.

$$u = 1 \quad \ldots \quad 100\,000$$
$$u = 10 \quad \ldots 1\,000\,000$$
$$u = 0{,}01 \ldots \quad 1\,000 \text{ usw.}$$

f) Welche Bereiche man auch immer umfassen möge: die relative Rechengenauigkeit auf einer logarithmischen Leiter bleibt bis auf kleine, hier vernachlässigte Schwankungen konstant. Man kann sich nämlich an jeder Stelle der Leiter um das gleiche Stück b', z. B. 0,1 mm, irren. Der eingestellte Wert v unterscheidet sich daher an jeder Stelle der Leiter von dem gewünschten Wert um den konstanten Faktor

$$f = 10^{\frac{b'}{l}}$$

oder dessen Umkehrwert $1/f$.

Ist z. B. $b' = \frac{1}{10}$ mm, $l = 25$ mm, so wird

$$f = 10^{0{,}004} = 1{,}009.$$

Der Fehler ist also längs der ganzen Leiter 0,9 v. H. des eingestellten Wertes.

g) Da die logarithmische Leiter innerhalb einer Dekade für größere Werte von u gedrängter ist als für kleinere Werte von u, so muß zur Innehaltung der vorgeschriebenen Grenzen für die Teile schon innerhalb einer Dekade der Zahlenschritt mehrfach geändert werden, und zwar wird er nach wachsenden u hin größer. Man ändert ihn zweckmäßig bei $u = 1$, 2, 4 oder 5, 7 und für andere Dekaden entsprechend.

h) Der theoretische Interpolationsfehler beschränkt, wie wir gesehen haben, die Zeicheneinheit nach unten. Für eine Zeicheneinheit von $l = 20$ mm beträgt z. B. der Zahlenschritt von $u = 1$ ab $\triangle u = 0{,}5$. Der Teil hat zwischen $u = 1$ und $u = 1{,}5$ die Länge

$$b' = l \cdot \triangle v = 20 \cdot \log 1{,}5 = 3{,}5 \text{ mm}.$$

Also liegt die Mitte des Teiles bei

$$b = 1{,}75 \text{ mm}.$$

Aber $\quad l \cdot \log 1{,}25 = 20 \cdot 0{,}0969 = 1{,}938 \approx 1{,}94$ mm.

Der theoretische Interpolationsfehler liegt also bei

$$f = 0{,}2 \text{ mm}.$$

Das ist gerade etwas mehr als ein Zwanzigstel des Teils b'. $l = 20$ mm ist also bereits etwas kleiner als die minimal zulässige Zeicheneinheit. Zu gleichen Ergebnissen kommt man, wenn die Abschätzung über die 2. Differenzenreihe benutzt wird. Für einen Zahlenschritt von 0,5 ergeben sich bei einer Zeicheneinheit von $l = 20$ mm für die zweiten Differenzen, die zu den Intervallen 1...1,5 und 1,5...2 gehören, die Werte $II_0 = -2{,}50$ und $II_1 = -1{,}02$.

Der Interpolationsfehler wird daher

$$f \approx 0{,}22 \text{ mm}.$$

Man vermeide daher, in selbstgezeichneten Rechentafeln logarithmische Leitern mit weniger als 20 mm (genauer 23 mm) Zeicheneinheit zu verwenden.

Da logarithmische Leitern in vielen Rechentafeln vorkommen, sind in einer Tabelle am Schluß des Buches für die am häufigsten vorkommenden Zeicheneinheiten die Zahlentafeln zur Konstruktion der logarithmischen Leitern zusammengestellt. Es sind für jede Zeicheneinheit nur die Zahlen aufgenommen, die wirklich als Teilstriche eingezeichnet werden. Die Forderungen über Größe des Teiles und dementsprechend über Änderungen des Zahlenschritts sind berücksichtigt.

Um beim Leser eine Vorstellung vom Aussehen einer logarithmischen Leiter zu wecken, ist die Leiter

$$b = 100 \text{ mm} \cdot \log u$$

für den Bereich $u = 1...10$ unter Benutzung der erwähnten Teiltafel in Bild 9 aufgezeichnet worden.

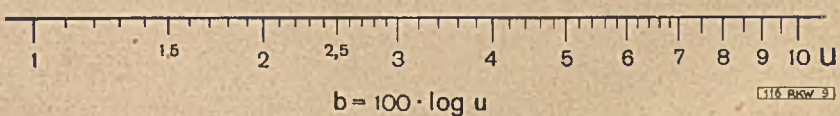


Bild 9. Logarithmische Leiter für $u = 1...10$

Wir werden später beim Entwurf von Leitertafeln sehen, daß es oft nicht gelingt, die Zeicheneinheit einer log-Leiter auf die in der Teiltafel vorhandenen Werte abzustimmen. In solchen Fällen ist man also gezwungen, sich eine Zahlentafel selbst auszurechnen, oder man verwendet bei geringeren Genauigkeitsansprüchen das nachstehend beschriebene Verfahren.

Im Handel sind sogenannte Logarithmenpapiere käuflich, die logarithmische Teilungen enthalten (siehe A III). Die Zeicheneinheiten schwanken zwischen etwa 80 mm und 250 mm. Aus den aufgedruckten Leitern erhält man weitere mit anderen Zeicheneinheiten, indem man durch den Punkt $u = 1$ nach Bild 10 schräge Strecken zeichnet, deren Längen gleich den gewünschten Einheiten sind und deren Endpunkte auf der Waagerechten durch $u = 10$ des käuflichen Papieres liegen. Die übrigen Waagerechten des Netzes schneiden dann die Strecken in den gesuchten Teilpunkten. Die parallel zu der benutzten Leiter verlaufenden Netzlinien sind für die Konstruktion belanglos. Man kann also gleicherweise einfach- oder doppeltlogarithmisches Netzpapier verwenden. (Über die Bezeichnungen vergleiche man A III.)

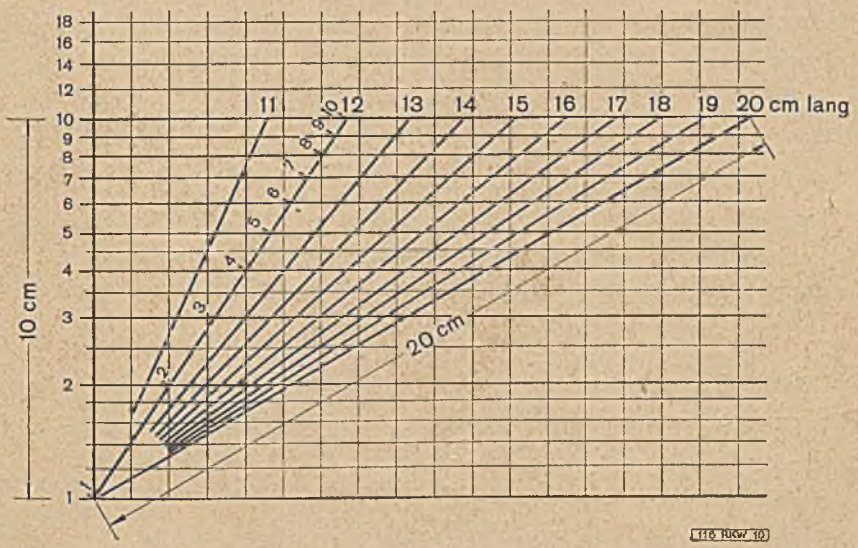


Bild 10. Aufzeichnen logarithmischer Leitern beliebiger Zeicheneinheit mit Hilfe von Log.-Papier

Es gibt auch besondere Geräte, die das Zeichnen von Teilungen erleichtern. Vgl. z. B. AWF-Mittlg. 20. Jahrgang (1938) Heft 1, S. 14, 15.

Außer einer Verzifferung um 10 oder eine Potenz von 10 kann auch gelegentlich eine Verzifferung um den Faktor 2 durchgeführt werden, wenn man käufliche Leitern, z. B. auf Logarithmenpapieren, verwendet.

Wir wollen hier noch eine Bemerkung einfügen über Funktionsleitern, die im Gegensatz zu bisherigen nicht, auch nicht abschnittsweise, nach gleichen Zahlenschritten fortschreiten, sondern bei denen die Teile alle gleich groß gewählt sind und die zugehörigen, nunmehr in ungleichen Schritten fortschreitenden Werte der unabhängigen Veränderlichen angeschrieben werden. Man nennt solche Leitern auch isograde Funktionsleitern. Sie haben z. Zt. nur untergeordnete Bedeutung. Es gibt allerdings ein Anwendungsgebiet dafür mit wachsendem Einfluß: Die nach dem Normblatt DIN 323 genormten Normungszahlen bilden sogenannte geometrische Reihen, d. h. jede nachfolgende Zahl entsteht aus der vorhergehenden durch Multiplikation mit einer Konstanten, die je nach der Reihe beträgt:

$$\sqrt[5]{10},\quad \sqrt[10]{10},\quad \sqrt[20]{10} \text{ oder } \sqrt[40]{10}.$$

Wenn man die Normungszahlenreihen logarithmisch aufträgt, so ergeben sich isograde Funktionsleitern. Die angeschriebenen Zahlen lauten z. B.

	1		1,6		2,5		4,0		6,3		10 (5er Reihe)
oder	1	1,25	1,6	2	2,5	3,15	4,0	5,0	6,3	8,0	10 (10er Reihe).

Da schon in manchen Anwendungsgebieten die in die Rechnung eingehenden Zahlen nur Normungszahlen sind, ist es zweckmäßig, statt der logarithmischen Leitern isograde Leitern mit den angeschriebenen Normungszahlen zu verwenden.

4. Die Potenzleitern

Die Potenzleitern verdienen vor allem wegen ihres Leitergefüges ganz besondere Beachtung. Sie sollen daher kurz besprochen werden. Unter einer Potenzleiter verstehen wir eine Funktionsleiter für die Funktion

$$v = u^n.$$

Dabei kann n jeden positiven und negativen Wert annehmen, die 0 ausgeschlossen. Insbesondere sind also auch alle Wurzelleitern Potenzleitern mit n zwischen 0 und 1, z. B.

$$n = \frac{1}{2}, \qquad v = u^{\frac{1}{2}} = \sqrt{u}.$$

Potenzleitern zeigen ein ganz verschiedenes Gefüge, je nachdem n absolut genommen größer oder kleiner als 1, positiv oder negativ

ist. Wir wollen hier nur einige typische Vertreter der Potenzleitern besprechen und uns insbesondere auf positive n beschränken. Die gewonnenen Ergebnisse lassen sich leicht auf Leitern mit anderen Exponenten übertragen.

a) $n = 2$. Die Quadratleiter

Sie ist ein Abbild der Funktion

$$v = u^2.$$

Die zugehörige Zahlentafel kann mit Hilfe von Tabellen in den Ingenieurtaschenbüchern, z. B. Hütte, 27. Aufl. Bd. I, entworfen

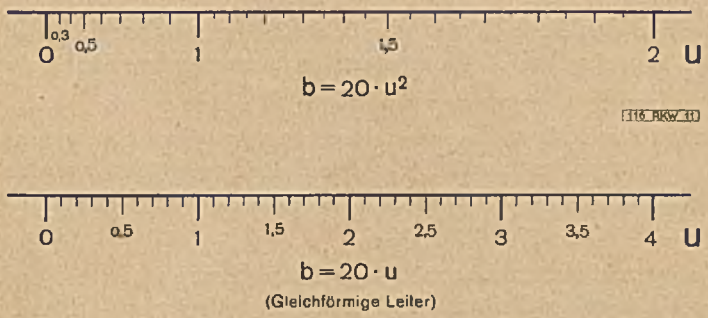


Bild 11. Quadratleiter und gleichförmige Leiter

werden. Die Funktionsleiter ist in Bild 11 für eine Zeicheneinheit von $l = 20$ mm und den Bereich $u = 0 \ldots 2$ aufgezeichnet.

Vergleicht man die erhaltene Leiter mit einer Leiter für u bei gleicher Zeicheneinheit (Bild 11), so erkennt man, daß bei der Quadratleiter eine Verschiebung der Teilstriche für gleiche Zahlenwerte u von 1 fort, und zwar für $u < 1$[1]) nach $u = 0$, für $u > 1$[1]) zu $u = \infty$[2]) hin eingetreten ist.

Ähnliches Verhalten zeigen alle Potenzleitern mit $n > 1$, und zwar um so schärfer ausgeprägt, je größer n wird.

In der Nähe von $u = 0$ liegen die Teilstriche außerordentlich gedrängt. Man ist daher gezwungen, den Zahlenschritt sehr groß zu wählen, wenn man nicht gegen unsere Regel über die Größe des Teils verstoßen will. Damit werden aber die theoretischen Interpolations-

1) Lies: u „kleiner" als 1 bzw. u „größer" als 1.

2) ∞ = „unendlich".

fehler in der Gegend der 0 zu groß. Für $l = 20$ mm ergibt sich z. B. für einen Zahlenschritt von $\triangle u = 0{,}1$ zwischen 0,3 und 0,4 ein maximaler theoretischer Interpolationsfehler von 0,05 mm. $\frac{1}{20}$ des Teiles beträgt 0,07 mm. Die Interpolation ist also gerade noch gesichert. Es hat daher keinen Sinn, mit der Leiter unterhalb $u = 0{,}3$ noch genau rechnen zu wollen. Eine Eintragung der Teilstriche für 0,1 und 0,2 ist daher unterblieben. Zu gleichen Ergebnissen führt wieder unsere Näherungsformel. Für den gewählten Zahlenschritt ist $II_0 = II_1 = 0{,}4$ mm, daher wird der begangene Interpolationsfehler

$$\frac{1}{16} \cdot (II_0 + II_1) = 0{,}05 \text{ mm}.$$

Wir wollen den Bereich von $u = 0$ bis 2,0 in Anlehnung an die Bezeichnungsweise bei Meßinstrumenten Anzeigebereich, dagegen den Bereich $u = 0{,}3 \ldots 2{,}0$ Meßbereich nennen.

Will man noch bis zu kleineren Werten von u hin eine genaue Ablesung erreichen, so muß die Zeicheneinheit vergrößert werden. Das schränkt aber bei vorgeschriebener Leiterlänge den Bereich der Veränderlichen u entsprechend ein.

Bei der gezeichneten Leiter ist zur Innehaltung unserer Forderung über die Länge der Teile der Zahlenschritt zwischen $u = 1$ und $u = 2$ auf 0,05 verringert.

b) $n = \frac{1}{2}$. Die Wurzelleiter

Sie stellt die Funktion

$$v = \sqrt{u}$$

dar, also die Umkehrfunktion zu der vorhin betrachteten Funktion $v = u^2$. Auch hier können mit Nutzen zur Aufstellung der Zahlentafel die Tabellen der technischen Taschenbücher benutzt werden. Die Leiter ist schon in Bild 7 mit $l = 50$ mm dargestellt. Wir wollen sie hier nochmals mit $l = 20$ mm in Bild 12 wiedergeben, um mit der Quadratleiter von Bild 11 einen besseren Vergleich zu haben.

Beim Vergleich mit der gleichförmigen Leiter $b = 20 \cdot u$ ergibt sich im Gegensatz zu $n > 1$, daß alle Teilstriche sich zur 1 hin gedrängt haben; und zwar sind die Werte $u < 1$ von der 0, die Werte $u > 1$ von ∞ weggedrängt worden.

Ähnliches Verhalten zeigen wiederum alle Potenzleitern mit $n < 1$, und zwar in um so stärkerem Maße, je kleiner n ist.

Wegen der starken Drängung der Teile bei großen u-Werten mußte der Zahlenschritt zweimal geändert werden, und zwar bei $u = 2$ von 0,2 auf 0,5 und bei $u = 10$ von 0,5 auf 1.

In der Nähe der Null ist die Interpolation wegen der starken Teildehnungen gefährdet. Wir berechnen den theoretischen Interpola-

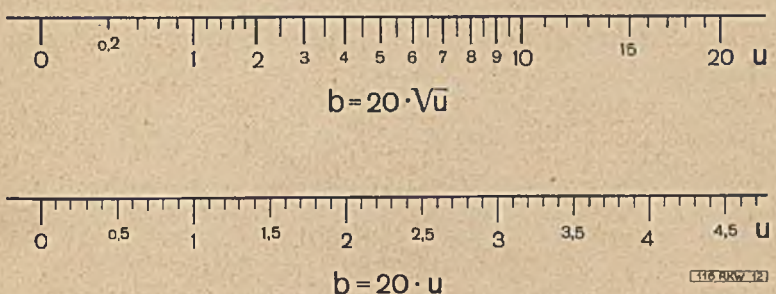


Bild 12. Wurzelleiter und gleichförmige Leiter

tionsfehler für den Teil $u = 0{,}2$ bis $u = 0{,}4$. Er ergibt sich im Maximum zu 0,16 mm, das ist etwas weniger als $\frac{1}{20}$ des Teils (0,185 mm). Damit ist die Interpolation also bis $u = 0{,}2$ herunter gesichert. Der Meßbereich ist also $u = 0{,}2 \ldots 20$, der Anzeigebereich $u = 0 \ldots 20$. Zwischen $u = 0$ und $u = 0{,}2$ ist also keine lineare Einschaltung möglich. Eine Vergrößerung der Zeicheneinheit kann auch hier wieder Abhilfe schaffen, allerdings unter erheblicher Beschränkung des Bereiches der unabhängigen Veränderlichen u.

Eine Potenzleiter mit $n < 0$, nämlich $n = -1$, werden wir anschließend unter A II, 5 eingehender behandeln.

5. Die projektiven Leitern

Die projektiven Leitern sind zeichnerische Abbildungen der projektiven Funktionen, die wir bereits im ersten Teil dieses Abschnittes unter A I, 4, III eingeführt haben. Die allgemeinste projektive Funktion hat danach die Gestalt

$$v = \frac{A'u + B'}{C'u + D'}, \tag{2}$$

wo A', B', C' und D' willkürliche, aber für eine bestimmte Funktion konstante Zahlenwerte bedeuten sollen. Eine Funktion kann natürlich nur in einer Leiter dargestellt werden, wenn sie nicht konstant

ist. Das ist sicher nicht der Fall, wenn $C' = 0$ und $A' \neq 0$ ist. Wir können also den Fall $C' = 0$ zunächst ausschließen. Wenn aber $C' \neq 0$[1]) ist, so kann man Nenner und Zähler durch C' dividieren, ohne an der Funktion etwas zu ändern. Wir erhalten so

$$v = \frac{Au + B}{u + D}. \tag{2a}$$

Man kann sehr leicht beweisen, daß diese Funktion nicht konstant ist, wenn

$$AD - B = \triangle$$

die sogenannte Determinante der projektiven Funktion, nicht verschwindet.

Eine besonders einfache projektive Leiter erhalten wir für

$$A = 0; \qquad B = 1; \qquad D = 0,$$

nämlich

$$v = \frac{1}{u}.$$

Da wir hier auch schreiben können:

$$v = (u)^{-1},$$

so stellt diese Leiter zugleich eine Potenzleiter mit dem Exponenten $n = -1$ dar. Die Aufstellung der Zahlentafel kann wieder mit Hilfe der Tabellen der technischen Taschenbücher erfolgen. In Bild 13 ist die Reziprokleiter, wie man sie auch nennt, für die Bereiche $u = 0{,}5 \ldots 10$ dargestellt. Die Zeicheneinheit beträgt $l = 50$ mm.

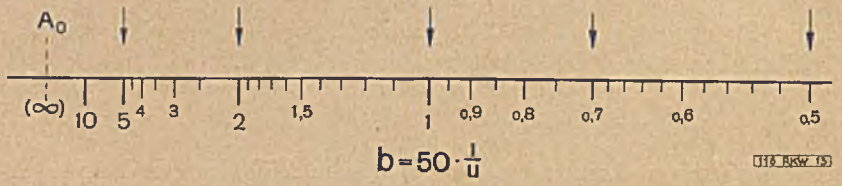


Bild 13. Reziprok- oder Kehrwertleiter

Im Gegensatz zu den bisher betrachteten Funktionsleitern wird der aufzutragende Funktionswert mit wachsendem Wert u der unabhängigen Veränderlichen kleiner; die Leiter entwickelt sich daher nach links. Gegen den Anfangspunkt der Leiter (A_0) findet eine außerordentliche Drängung der Teile statt. Aus diesem Grunde

1) $\neq$ lies: Ungleich oder „nicht gleich".

mußte an den mit einem Pfeil bezeichneten Stellen der Zahlenschritt geändert werden. Eine genügend genaue Interpolation kann nur bis etwa $u = 10$ bei $l = 50$ mm erfolgen. Der Meßbereich ist also $u = 0{,}5 \ldots 10$, der Anzeigebereich $0{,}5 \ldots \infty$. Während sich alle bisher betrachteten Leitern für wachsende u ins Unendliche erstrecken, geht die vorliegende Reziprokleiter für positive Werte von u nicht über den Anfangspunkt A_0 nach links hinaus.

Die Leiter enthält den Wert $u = 0$ nicht. Dieser würde unendlich weit vom Anfangspunkt entfernt liegen. Die Reziprokleiter hat daher drei charakteristische Punkte:

a) $u = \infty$; er fällt mit dem Anfangspunkt A_0 der Leiter zusammen;

b) $u = 1$; er liegt um die Zeicheneinheit vom Anfangspunkt entfernt;

c) $u = 0$; er liegt im Unendlichfernen.

Alle anderen projektiven Leitern haben ähnliche Eigenschaften wie die eben besprochene einfachste projektive Leiter. Man kann nämlich schreiben:

$$v = \frac{Au + B}{u + D} = \frac{Au + AD}{u + D} + \frac{-AD + B}{u + D} = A - \frac{(AD - B)}{u + D} = A - \frac{\triangle}{u + D};$$

$$\triangle \neq 0$$

oder

$$\frac{v - A}{-\triangle} = \frac{1}{u + D}. \tag{2b}$$

Die Division durch $-\triangle$ auf der linken Seite bedeutet eine Änderung des Zeichenmaßstabes, ist also für den grundsätzlichen Leiteraufbau belanglos. Das Vorzeichen von $\triangle$ entscheidet darüber, ob die Leiter sich von rechts nach links oder von links nach rechts entwickelt.

Der Wert $u = \infty$ fällt nicht in den Anfangspunkt, sondern in den Punkt $v = A$.

Die Konstante D bewirkt, daß nicht der Wert $u = 0$, sondern der Wert $u = -D$ ins Unendlichferne fällt. Im übrigen bewirkt diese additive Konstante eine Verzifferung der ganzen Leiter in u um den konstanten Betrag D.

Soll die allgemeine projektive Funktion in einer Zahlentafel dargestellt werden, so empfiehlt sich, zum Ausgangspunkt für diese Tabelle die Darstellung

$$v = A - \frac{\triangle}{u + D} \qquad (2b')$$

zu wählen, weil dann die Berechnung an die Tabellen für $\frac{1}{u}$ in den Technischen Taschenbüchern angeschlossen werden kann.

Die projektive Leiter kann bei geringeren Genauigkeitsanforderungen auch ohne Entwurf einer Zahlentafel konstruiert werden. Nach einem Satze, dessen Beweis wir übergehen wollen, entsteht nämlich jede projektive Leiter durch geeignete Zentralprojektion einer gleichförmigen Leiter auf die Trägergerade. Wie die spezielle Gestalt der projektiven Funktion die Lage der drei charakteristischen Punkte $u = 0$; $u = \infty$; $u = u_1$ festlegt, so kann man auch umgekehrt, von diesen drei Punkten ausgehend, die projektive Leiter entwerfen. Auch irgendwelche drei beliebigen Werte u_1, u_2 und u_3 mit ihren Bildpunkten v_1, v_2 und v_3 können zur Konstruktion der Leiter herangezogen werden. Wir wollen dies an einem Beispiel dartun:

$$v = \frac{2u - 3}{u + 2}.$$

Für die drei Werte

$$u_1 = -1; \qquad u_2 = 0; \qquad u_3 = +5$$

ergeben sich die Funktionswerte

$$v_1 = -5; \qquad v_2 = -1{,}5; \qquad v_3 = +1.$$

Wir tragen auf einer Trägergeraden von einem Anfangspunkt A die Werte v_1, v_2 und v_3 in einer bestimmten Zeicheneinheit, im Beispiel $l = 5$ mm auf (Bild 14). An die Teilstriche schreiben wir aber die u-Werte an.

In der Wahl der gleichförmigen Hilfsteilung haben wir zunächst noch vollkommene Freiheit. Es empfiehlt sich, die Hilfsteilung so zu legen, daß bei der Projektion keine „schleichenden" Schnitte entstehen. Einige Versuche werden bald zum Ziel führen. Zur Vereinfachung der Zeichnung lasse man die Hilfsgerade durch einen der eingetragenen Punkte, im Beispiel (willkürlich!) durch den Punkt für $u = -1$ hindurchgehen. Dann muß natürlich der Punkt $u = -1$ der gleichförmigen Hilfsleiter an der gleichen Stelle liegen.

Die Wahl der Zeicheneinheit auf der Hilfsleiter ist wiederum willkürlich und nur durch die Zweckmäßigkeit bestimmt. Wir haben im Beispiel 7,5 mm gewählt. Legen wir jetzt durch die zusammengehörigen Werte 0 und 0 bzw. 5 und 5 auf beiden Leitern zwei Geraden g_1 und g_2, so schneiden sich diese im gesuchten Projektions-

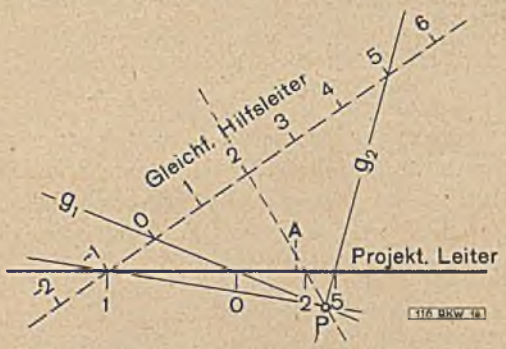


Abb. 14. Konstruktion einer projektiven Leiter

zentrum P. Damit ist die Konstruktion der übrigen Teilpunkte auf der projektiven Leiter möglich. In Bild 14 ist als Beispiel $u = 2$ eingetragen.

Es empfiehlt sich, die ausgezeichneten Punkte $v = \infty$; $u = \infty$ zur Konstruktion des Projektionszentrums P heranzuziehen, weil hierdurch die Rechenarbeit stark vermindert wird (Parallelen zu den Trägern durch P).

Wenn das beschriebene Verfahren auch gestattet, sich sehr schnell über den Aufbau einer projektiven Leiter zu orientieren, so möchten wir es wegen seiner beschränkten Genauigkeit für den Entwurf von Rechentafeln nur empfehlen, wenn kleine Teilbereiche der projektiven Leiter benötigt werden, oder zum Einschalten von Zwischenwerten. Für größere Bereiche gibt man zweckmäßig dem rechnerischen Verfahren den Vorzug.

6. Zur Herstellung von Funktionsleitern

Zur Herstellung einer Funktionsleiter haben wir unter A II, 2 bereits eine Reihe von Richtlinien gegeben. Auch im Abschnitt A I, 3 sind für gleichförmige Leitern wichtige Regeln zusammengestellt, die sinngemäß auf allgemeine Funktionsleitern übertragen werden

können. Wir wollen uns abschließend noch mit einigen praktischen Hilfsmitteln bei der Leiterherstellung befassen.

Für komplizierte Funktionszusammenhänge bereitet die Herstellung einer Zahlentafel für die Konstruktion der Funktionsleiter erhebliche Mühe, weil besonders bei großen Zeicheneinheiten und langen Leitern die Anzahl der Zahlenschritte erheblich werden kann. Hier empfiehlt es sich gelegentlich, von konstruktiven Hilfsmitteln für die Zeichnung der Leiter Gebrauch zu machen.

Man berechnet hierzu bei geringeren Genauigkeitsansprüchen einige wenige Zahlenwerte und zeichnet diese in einem Schaubild auf. Durch die gewonnenen Punkte zieht man dann eine möglichst glatte Kurve und entwickelt die Funktionsleiter konstruktiv nach den in Abschnitt A II, 1 gegebenen Richtlinien.

Werden größere Genauigkeitsansprüche gestellt, so entwirft man zunächst die Zahlentafel und auch die Funktionsleiter mit einem größeren Zahlenschritt, als es nach unseren früher gegebenen Richtlinien zulässig ist. Danach verdichtet man die Teilstriche der Funktionsleiter durch projektive Konstruktion. Es ist nämlich zu beweisen, daß fast alle praktisch vorkommenden Funktionen sich in kleinen Teilbereichen sehr genau durch eine projektive Funktion wiedergeben lassen. Man schaltet daher Zwischenwerte zwischen drei Teilstrichen so ein, als wenn es sich um eine projektive Leiter handelt. Hierzu verwendet man die im vorhergehenden Abschnitt A II, 5 angegebene Konstruktion.[1])

Gehen indessen die Genauigkeitsanforderungen noch weiter, so bleibt nur noch das rechnerische Einschalten von Zwischenwerten nach den schon früher unter A II, 2 betrachteten Interpolationsverfahren. Obgleich hierzu auch Rechnungen erforderlich sind, kann doch der Gesamtrechenaufwand gegenüber der Errechnung aller Teilpunkte gemäß der vorgelegten Formel geringer sein, besonders wenn man zur Durchführung der Rechnung eine Rechenmaschine verwendet.

Wir schreiben uns die nach der Formel errechneten, zu gleichen Zahlenschritten gehörigen Funktionswerte und die Differenzenreihen

---

1) Es gibt auch rechnerische Verfahren zum Verdichten einer Funktionsleiter durch projektive Leitern. Man vergleiche hierzu Willers: die Benutzung projektiver Skalen zur Unterteilung von Skalen anderer Funktionen. Za. MM. Band 20 (1940) Nr. 5, Seite 291—292.

nach dem Schema Bild 8a auf. Hat man nur einen Funktionswert für den halben Zahlenschritt einzuschalten, so verwendet man die bereits früher angewendete Formel

$$a_{\frac{1}{2}} = a_0 + \frac{1}{2}\cdot I_{0,5} - \frac{1}{16}\cdot(II_0 + II_1) + \frac{3}{256}\cdot(IV_0 + IV_1) - \cdots$$

oder $$a_{\frac{1}{2}} = a_0 + \frac{1}{2}I_{0,5} - \frac{1}{8}II_1 + \frac{1}{16}\cdot III_{1,5} - \frac{5}{128}IV_2 + \frac{7}{256}\cdot V_{2,5} - \cdots$$

Bei Einschaltung von mehreren Teilstrichen zwischen die exakt gerechneten verwendet man die allgemeineren Formeln

$$a = a_0 + \frac{m}{1}\cdot I_{0,5} \qquad \text{oder} \qquad a = a_0 + \frac{m}{1}I_{0,5}$$

$$-\frac{m(1-m)}{1\cdot 2}\cdot II_0 \qquad -\frac{m(1-m)}{1\cdot 2}II_1$$

$$-\frac{m(1-m)(1+m)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot III_{0,5} \qquad +\frac{m(1-m)(2-m)}{1\cdot 2\cdot 3}III_{1,5}$$

$$+\frac{m(1-m)(1+m)(2-m)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot IV_0 \qquad -\frac{m(1-m)(2-m)(3-m)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}IV_2$$

$$-\frac{m(1-m)(1+m)(2-m)(2+m)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot V_{0,5} \qquad +\frac{m(1-m)(2-m)(3-m)(4-m)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}V_{2,5}$$

$$-\cdots \qquad -\cdots$$

Darin bedeutet $m = \frac{u - u_0}{u_1 - u_0}$, das Verhältnis: Zwischenschritt zu Zahlenschritt; der Index 0 bezieht sich jeweils auf den Anfang des Teiles, in das Zwischenteilstriche eingeschaltet werden sollen.

Die erstere der Formeln verwendet man jeweils, wenn der Teil nicht am Ende der Leiter liegt, die zweite, wenn der weiter zu unterteilende Teil am Beginn oder Ende der Leiter oder des Leiterabschnittes mit einheitlichem Zahlenschritt liegt.

Von besonderer Bedeutung ist wegen der Bevorzugung der 2 und 5 beim Aufbau der Funktionsleitern noch der Fall, daß man zwischen zwei Teilpunkte noch vier Zwischenpunkte einschiebt, den Zahlenschritt also fünfmal kleiner wählt. Die Größe m nimmt dann nacheinander die Werte

$$m = 0{,}2;\quad 0{,}4;\quad 0{,}6;\quad 0{,}8$$

an. Die in Frage kommenden Koeffizienten der Interpolationsformeln haben wir nachstehend in einer Tabelle zusammengestellt.

m	$I_{0,5}$	II_0	II_1	$III_{0,5}$	$III_{1,5}$	IV_0	IV_1	IV_2	$V_{0,5}$	$V_{2,5}$
0,2	0,2	$-\frac{2}{25}$		$-\frac{4}{125}$		$+\frac{9}{625}$			$+\frac{99}{15\,625}$	
	0,2		$-\frac{2}{25}$		$+\frac{6}{125}$			$-\frac{21}{626}$		$+\frac{399}{15\,625}$
0,4	0,4	$-\frac{3}{25}$		$-\frac{7}{125}$		$+\frac{14}{625}$			$+\frac{168}{15\,625}$	
	0,4		$-\frac{3}{25}$		$+\frac{8}{125}$			$-\frac{26}{625}$		$+\frac{468}{15\,625}$
0,5	0,5	$-\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{16}$			$+\frac{3}{256}$	$+\frac{3}{256}$			
	0,5		$-\frac{1}{8}$		$+\frac{1}{16}$			$-\frac{5}{128}$		$+\frac{7}{256}$
0,6	0,6	$-\frac{3}{25}$		$-\frac{8}{125}$		$+\frac{14}{625}$			$+\frac{182}{15\,625}$	
	0,6		$-\frac{3}{25}$		$+\frac{7}{125}$			$-\frac{21}{625}$		$+\frac{357}{15\,625}$
0,8	0,8	$-\frac{2}{25}$		$-\frac{6}{125}$		$+\frac{9}{625}$			$+\frac{126}{15\,625}$	
	0,8		$-\frac{2}{25}$		$+\frac{4}{125}$			$-\frac{11}{625}$		$+\frac{176}{15\,625}$

Abb. 14 a. Koeffizienten der Differenzen beim Interpolieren

Die obenstehenden Koeffizienten jeder Zeile verwendet man bei Interpolation in einem Mittelteil, die untenstehenden bei Interpolation in einem Endteil der Leiter.

Beispiel: $m = 0{,}4$

$$a_{0,4} = a_0 + 0{,}4 \cdot I_{0,5} - \frac{3}{25} \cdot II_0 - \frac{7}{125} \cdot III_{0,5} + \frac{14}{625} \cdot IV_0 + \frac{168}{15\,625} \cdot V_{0,5} - \cdots$$

oder

$$a_{0,4} = a_0 + 0{,}4 \cdot I_{0,5} - \frac{3}{25} \cdot II_1 + \frac{8}{125} \cdot III_{1,5} - \frac{26}{625} \cdot IV_2 + \frac{468}{15\,625} \cdot V_{2,5} - \cdots$$

Für die Wahl des erforderlichen Zahlenschrittes läßt sich eine einfache Näherungsformel ableiten, deren Handhabung sehr bequem ist. Sie setzt allerdings die Kenntnis der Differentialrechnung voraus.

Wir wollen für mathematisch interessierte und bewanderte Leser einen ganz kurzen Überblick geben.

Soll eine Funktionsleiter für $v = f(u)$ hergestellt werden, so ermittelt man zunächst nach A II, 2 unter Beachtung der zugelassenen Gesamtleiterlänge L und des vorgeschriebenen Bereiches $u_0 \ldots u_1$ die Zeicheneinheit l

$$l = \frac{L}{|f(u_1) - f(u_0)|} \text{ [1]}$$

l wird auf glatte Werte abgerundet. Für die Größe des Teiles t gilt dann bei einem Zahlenschritt $\triangle u$

$$t = l \cdot f'(u) \cdot \triangle u.$$

Darin bedeutet $f'(u) = \frac{df(u)}{du}$ den Differentialquotienten der vorgelegten Funktion. t soll nun nach Früherem bei ungefähr $t_0 = 2$ mm liegen. Dann ergibt sich

$$\triangle u = \frac{t_0}{l \cdot f'(u)}.$$

Diese Formel gibt eine einfache Abschätzung des an den einzelnen Stellen der Leiter erforderlichen Zahlenschrittes. Die Werte werden nach den früher unter A II, 2 und A I, 3 gegebenen Regeln gerundet.

7. Die Leiter mit krummlinigem Träger

Es würde den Rahmen einer einführenden Broschüre übersteigen, wenn wir uns hier eingehend mit krummlinigen Trägern befassen wollten. Die krummlinigen Träger werden daher hier nur erläutert; im übrigen muß auf die Fachliteratur verwiesen werden.

Statt als Träger einer Teilung eine Gerade zu verwenden, kann man die Teilungen auch auf krummen Linien abtragen. Für die Wahl der Teile und der Zahlenschritte sowie für die Ausstattung und Ausbildung der Leiter gelten im wesentlichen die für geradlinige Träger dargelegten Gesichtspunkte.

Einen vollständigen Anschluß an unsere früheren Betrachtungen erhält man, wenn man, ausgehend von einem Anfangspunkt A, die

1) Es wird vorausgesetzt, daß $f(u)$ monoton, d. h. ständig steigend oder ständig fallend, verläuft.

Funktionswerte $v = f(u)$ in einer bestimmten Zeicheneinheit als Bogenlänge auf dem krummlinigen Träger abträgt und an den Endpunkt nicht v, sondern wieder u anschreibt (Bild 15).

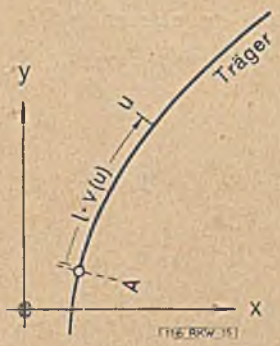


Bild 15.
Leiter mit krummlinigem Träger; Bogenlängenmethode

Eine solche Behandlung der krummlinigen Leitern ist aber mit Rücksicht auf die Anwendungen meist unzweckmäßig, weil die Bogenlänge des Trägers nur schwer oder überhaupt nicht in geschlossener Form als Funktion der Trägerkoordinaten x, y dargestellt werden kann. Man betrachtet vielmehr eine Leiter mit krummlinigem Träger zweckmäßig als das zeichnerische Abbild von zwei Funktionen u und v einer dritten Veränderlichen t:

$$u = f_1(t)$$

$$v = f_2(t).$$

Man nennt diese Methode die Parametermethode.

$$x = l_1 \cdot u$$

und

$$y = l_2 \cdot v$$

sind dann die Koordinaten (Abszisse x, Ordinate y) des Trägers in einem Schaubild mit den rechtwinkligen Achsen x und y. Man schreibt an den Träger die Werte t des sogenannten Parameters im jeweiligen Punkte an. Hierbei bevorzugt man, wie früher, glatte Werte von t. Auf diese Weise entsteht eine im allgemeinen ungleichförmige Teilung am Träger.

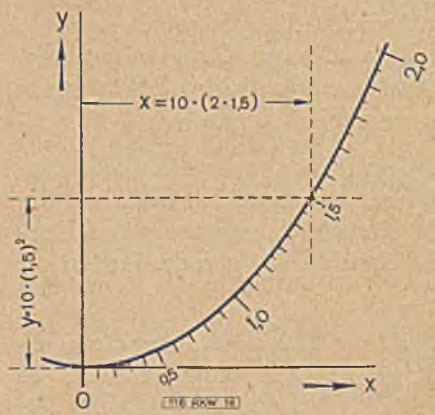


Bild 16. Leiter mit krummlinigem Träger; Parametermethode

Die krummlinige Leiter stellt also gegenüber der Leiter mit Trägergeraden ein Darstellungselement höherer Ordnung dar, weil durch sie zugleich zwei Funktionen einer Veränderlichen t zur Darstellung gelangen.

Als Beispiel ist in Bild 16 eine krummlinige Leiter für die beiden Funktionen

$$u = 2 \cdot t; \qquad v = t^2$$

mit den Zeicheneinheiten $l_1 = l_2 = l = 10$ mm für den Bereich $t = 0...2$ dargestellt.

III. Funktionsnetze

Funktionsnetze lassen sich in unmittelbarem Anschluß an die Funktionsleitern des vorigen Abschnittes einführen. Wir ziehen es aber vor, zunächst einen Weg zu beschreiten, der uns den Grund für die Einführung von Funktionsnetzen besonders anschaulich vor Augen führt.

1. Das gleichförmige Netz; Millimeterpapier

Wir haben unter A I, 3 das Schaubild zur anschaulichen Darstellung eines Funktionszusammenhanges kennengelernt. Tragen wir auf einem Achsenkreuz die Veränderliche u bzw. v in gleichförmigen Teilungen auf, so entspricht jedem Punkt P der Zeichenebene ein Zahlenpaar (u, v). Die Werte für u und v findet man, indem man durch den Punkt P zu den Achsen parallele Geraden zieht, die die Teilungen auf den Achsen in den Werten x bzw. y schneiden. Genau so, wie wir zur Erleichterung des Auffindens von u und v Teilungen an die Achsen legten, kann man in gleichen, durch die Teilungen gegebenen Abständen die zu den Achsen parallelen Geraden einzeichnen. Auch jetzt empfiehlt sich die Hervorhebung der zu glatten Zahlenwerten gehörigen Geraden durch Wahl verschiedener Strichstärken.

Man erhält auf diese Weise ein sich an die gleichförmige Teilung der Achsen anschließendes Netz von teils parallelen, teils sich rechtwinklig schneidenden Geraden. Das bekannte Millimeterpapier ist ein solches Netz. Weil es sich aus der gleichförmigen Teilung der Achsen entwickelt, nennen wir es ein gleichförmiges Netz.

Genau so, wie wir an die einzelnen Teilstriche einer gleichförmigen Leiter die zugehörigen u- bzw. v-Werte anschrieben und diese Teilstriche als Bild dieser Zahlen betrachteten, genau ebenso können wir auch unter Weglassung der Achsen die Netzgeraden mit den zugehörigen u- bzw. v-Werten kennzeichnen und die Geraden als Bild der Zahlen betrachten. Der Punkt P (u, v) ist dann der Schnittpunkt der Netzgeraden (u) und (v).

In Bild 17 ist ein solches gleichförmiges Netz für $u = 0...5$; $v = 0...4$ dargestellt.

Eine Einschätzung von Zwischenwerten bereitet keine Schwierigkeiten. Für die Genauigkeit dieser Einschätzung und die Wahl des Abstandes aufeinanderfolgender Netzlinien gelten die gleichen Überlegungen wie für Leiterteilungen. Man wird also den Abstand aufeinanderfolgender Netzlinien nicht kleiner als 2 bzw. 1 mm machen; eher wird man größere Abstände als auf Leitern wählen, um das Auge nicht zu ermüden.

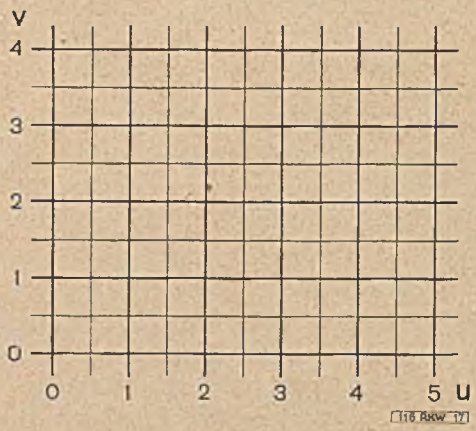


Bild 17. Gleichförmiges Netz

Das Aufzeichnen von Netzen ist wesentlich mühsamer als die Anfertigung einer Funktionsleiter. Man wird es daher vorziehen, die Maßstäbe des gleichförmigen Netzes für einen bestimmten Entwurf so zu wählen, daß man das gedruckte Millimeterpapier verwenden kann. Man wählt mit Rücksicht auf die stärkere Hervorhebung der Netzlinien für Vielfache von 5 mm und Vielfache von 10 mm als Zeicheneinheit zweckmäßig

$$l = 1; 2; 5; 10; 20; 50; 100 \text{ mm usw.}$$

Unzweckmäßig sind dagegen

$$l = 2{,}5; 25 \text{ und besonders } 40 \text{ mm oder gar } 30 \text{ mm.}$$

2. Streckung von Kurven; die Funktionsschar

Zeichnet man in ein gleichförmiges Netz eine Funktion $v = f(u)$ ein, indem man die zusammengehörigen Linien des Netzes für u und v zum Schnitt bringt, so erhält man als Verbindungslinie dieser Bildpunkte im allgemeinen eine krumme Linie (s. Bild 6).

In Bild 18 ist die Funktion $v = u^2$

in einem gleichförmigen Netz dargestellt. Zur Erhöhung der Übersichtlichkeit sind nur sehr wenige Netzlinien und zwar gestrichelt eingetragen.

Durch eine Verzerrung soll die erhaltene Parabel in die stark eingezeichnete Gerade übergeführt werden. Wir denken uns hierzu die parallelen u-Linien des Netzes, also die gestrichelten senkrechten Linien, aber auch alle anderen nichtgezeichneten u-Linien beweglich. Den Schnittpunkt der u-Linie mit der zugehörigen v-Linie verschieben wir nun unter Mitführung der u-Linie bis zum Schnitt der v-Linie mit der gewünschten Geraden. Die Bewegungsrichtung ist in Bild 18 durch Pfeile angedeutet. Durch diese Verschiebung kommen die u-Linien in die nach oben hin ausgezogene Lage. Die zugehörigen Zahlenwerte u sind in der Abbildung oben angeschrieben.

Benutzt man nun zum Auffinden der Bildpunkte der Funktion

$$v = u^2$$

ein Netz, das aus den bisherigen v-Linien und den neuen u-Linien besteht, so erhält man als Bild der Funktion die gerade Linie. Eine gerade Linie ist aber durch zwei Punkte genügend bestimmt. Die Einzeichnung zweier Bildpunkte, z. B. $u = 0$; $v = 0$ und $u = 4$; $v = 16$ genügt bereits zum Zeichnen der Geraden.

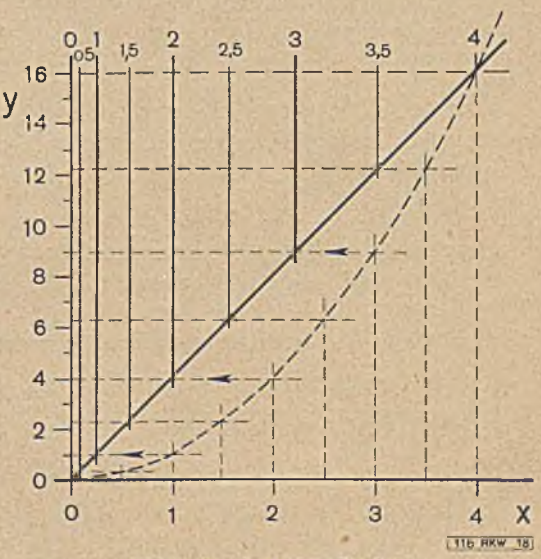


Bild 18. Streckung einer Parabel

Ein Netz, in dem durch die angegebene oder eine andersartige Verzerrung seiner Netzlinienteilungen eine gegebene Funktion in einer Geraden dargestellt wird, wollen wir ein „Funktionsnetz“ nennen. Das betrachtete Netz in Bild 18 hat die Eigentümlichkeit, daß nur die eine Gruppe der parallelen Netzgeraden eine Verschiebung erfahren hat. Jede der beiden Gruppen von parallelen Netzgeraden wollen wir auch Funktionsschar nennen.

Nachträglich kann man sich nun die Funktionsschar der u-Linien auch aus einer Funktionsleiter, und zwar in unserem Beispiel aus der

Quadratleiter entstanden denken, indem man durch die Teilpunkte einer waagerechten Quadratleiter senkrechte Geraden zeichnet. Damit hat man den Anschluß an die Funktionsleitern gewonnen. Eine „Funktionsschar" entsteht demnach ganz allgemein aus einer Funktionsleiter, indem man durch die Teilpunkte dieser Leiter parallele Geraden zeichnet. Ein Abweichen vom rechten Winkel zwischen dem Träger der Leiter und den Schargeraden entspricht einer Reduktion der Zeicheneinheit.

Für die Streckung von Kurven gilt nun der folgende spezielle Satz:

Eine Funktion zwischen zwei Veränderlichen

$$v = f(u)$$

kann durch eine Gerade dargestellt werden, wenn man das Netz aus zwei Funktionsscharen aufbaut, deren eine aus einer gleichförmigen Leiter $b = l \cdot v$, deren andere aus der Funktionsleiter $a = l \cdot f(u)$ abgeleitet ist.

Es sei aber bemerkt, daß diese Lösung für die Streckung einer Kurve nicht die einzig mögliche ist, sondern daß es auch noch andere Verzerrungen des gleichförmigen Netzes gibt, die die Streckung bewirken.

Bevor wir zu allgemeineren Funktionsnetzen übergehen, untersuchen wir einige wichtige Funktionsnetze der betrachteten Art.

a) Das einfach-logarithmische Funktionsnetz

Die Ordinatenteilung ist gleichförmig. Die senkrechte Funktionsschar dagegen ist aus der logarithmischen Leiter

$$a = l \cdot \log u$$

abgeleitet. Bild 19 zeigt ein solches Funktionsnetz für $u = 1...10$; $v = 0...25$ (Verkleinerung eines normalen Papiers von Schleicher und Schüll, Nr. $367\frac{1}{2}$).

Nach unserem speziellen Satz werden in einem solchen Funktionsnetz alle Funktionen

$$v = k \cdot \log u$$

in gerade Linien gestreckt. Da $\log 1 = 0$ ist, so gehen alle Geraden durch den Punkt $v = 0$; $u = 1$.

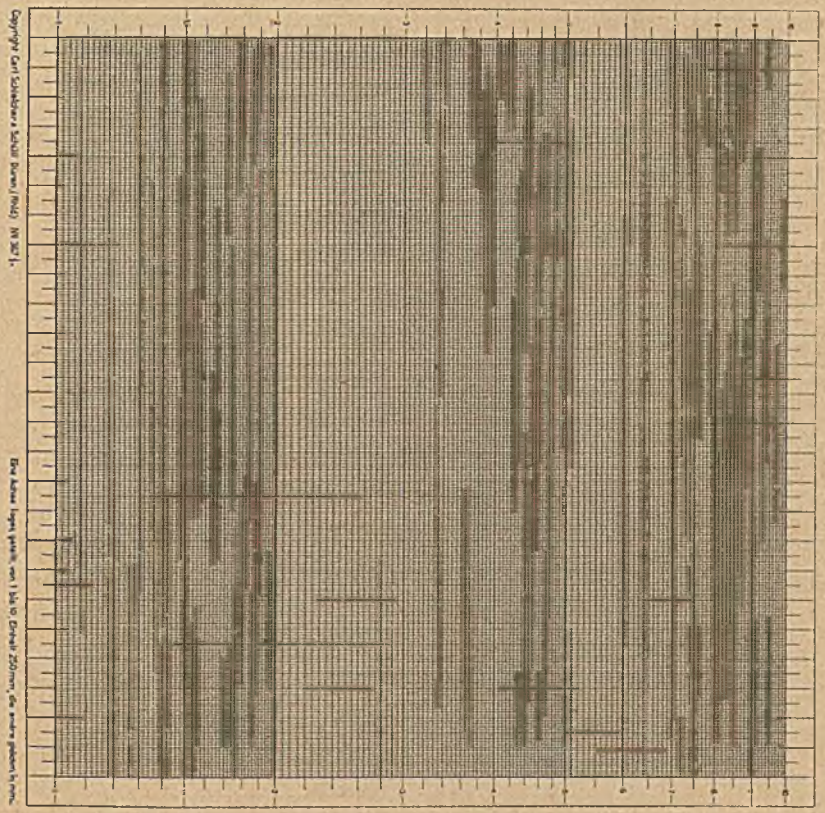


Bild 19. Verkleinertes einfach-logarithmisches Papier

Wir vermerken also die Tatsache, daß in Funktionsnetzen nicht nur eine Kurve, sondern ganze Scharen von Kurven gestreckt werden können.

Stellenweise findet man in der Literatur das einfach-logarithmische Funktionsnetz auch als Exponentialpapier bezeichnet. Diese Bezeichnung ist an sich nicht falsch; sie rührt daher, daß es gelingt, auf dem einfach-logarithmischen Netz die Exponentialfunktion als gerade Linie darzustellen, wenn man Abszisse und Ordinate miteinander vertauscht. Wir halten aber an der Bezeichnung „einfach-logarithmisch" fest, weil wir durch die Bezeichnungsweise den Funktionsaufbau des Netzes, nicht aber den der zu streckenden Funktionen zum Ausdruck bringen wollen. Eine gleiche Stellung werden wir bei

der Besprechung der geometrisch verzerrten Netze einnehmen. Unter „Exponentialnetz" verstehen wir ein anderes gleich zu besprechendes Netz.

b) Das Exponentialnetz

Versuchen wir die Exponentialfunktion

$$v = k \cdot b^u; \quad b > 1$$

zu strecken, so haben wir die senkrechte Funktionsschar aus der Leiter

$$a = l \cdot k \cdot b^u = L \cdot b^u$$

zu entwickeln.

Von besonderer Bedeutung ist das Funktionsnetz für den Bereich negativer u-Werte, also $u = 0 \ldots - \infty$. Die Entfernung der Netzlinien für $u = 0$ und $u = -\infty$ beträgt, da

$$b^0 = 1; \quad b^{-\infty} = 0,$$

gerade L. Die Netzschar entwickelt sich für wachsende u von rechts nach links. Man kehrt daher praktisch den positiven Richtungssinn

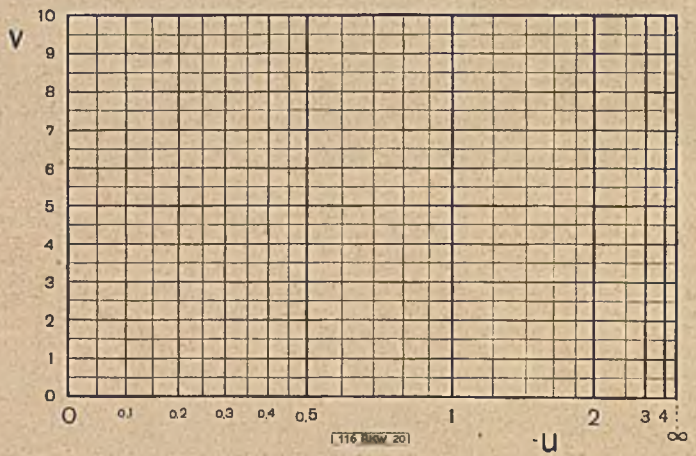


Bild 20. Exponentialpapier

auf der Abszissenachse um. Das Bild 20 zeigt dieses Funktionsnetz für

$L = 8$ cm,

$b = 2{,}71828 \ldots =$ Basis der natürlichen Logarithmen.

Die Zeicheneinheit in v-Richtung ist $l = 0{,}5$ cm. Der dargestellte Bereich für v ist 0...10.

Das Exponentialpapier in dieser Form ist von F. Wolf angegeben worden. Näheres und Beispiele für die Anwendung findet man in: Wissenschaftliche Veröffentlichungen aus dem Siemenskonzern III. Band 1. Heft S. 77ff.

3. Das geometrisch verzerrte Netz

Bisher haben wir nur solche Funktionsnetze betrachtet, bei denen von den beiden sich rechtwinklig schneidenden Parallelscharen nur eine eine Funktionsschar im engeren Sinne war, während sich die andere aus der gleichförmigen Leiter entwickelte. Es bereitet keine Schwierigkeit, sich ein Funktionsnetz vorzustellen, bei dem beide Scharen Funktionsscharen sind, sich aber nach wie vor rechtwinklig schneiden. Solche Netze, die man sich auch durch geeignete Verzerrung eines gleichförmigen Netzes entstanden denken kann, wollen wir geometrisch verzerrte Netze nennen.

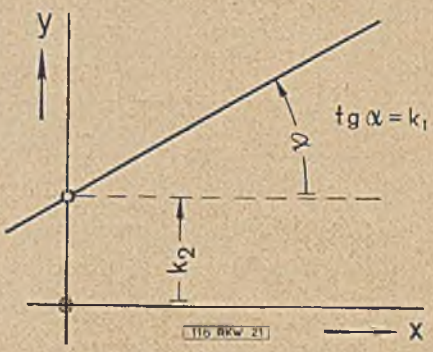


Bild 21. Zur Gleichung einer Geraden

In einem geometrisch verzerrten Netz entsteht die u-Schar aus der Funktionsleiter

$$a = l_1 \cdot f(u),$$

die v-Schar aus der Funktionsleiter

$$b = l_2 \cdot g(v).$$

Wie bei den einfacheren Netzen des vorigen Abschnittes 2 interessiert uns wieder die Frage, ob man durch Anwendung solcher geometrisch verzerrter Netze Kurven zu geraden Linien strecken kann. Wir wollen die Fragestellung umkehren und fragen, welche Funktionen in einem gegebenen Netz durch Gerade dargestellt werden.

In einem (x, y)-Koordinatensystem (Bild 21) lautet die Gleichung einer Geraden

$$y = k_1 \cdot x + k_2$$

Ist die Gerade in einem Funktionsnetz

$$x = a = l_1 \cdot f(u); \quad y = b = l_2 \cdot g(v)$$

eingezeichnet, so stellt sie also die Funktion dar (Bild 22):

$$l_2 \cdot g(v) = k_1 \cdot l_1 \cdot f(u) + k_2. \tag{3}$$

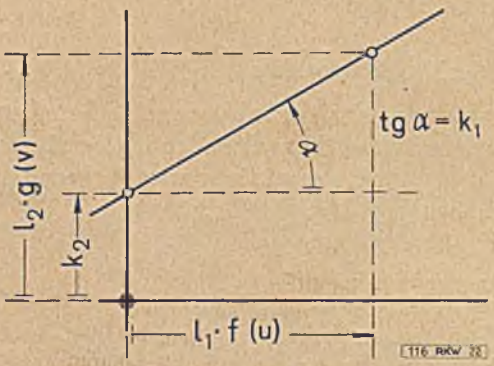


Bild 22. Gerade in einem Funktionsnetz

Für $g(v) \equiv v$, also gleichförmige v-Schar, und $k_2 = 0$ folgt daraus unmittelbar der spezielle Satz des vorigen Abschnittes.[1])

Von den geometrisch verzerrten Netzen ist vor allem das Netz von überragender praktischer Bedeutung, bei dem für beide Parallelscharen das gleiche Bildungsgesetz

$$a = l \cdot \log u$$

$$b = l \cdot \log v$$

zugrunde liegt. Dieses Funktionsnetz heißt

doppelt-logarithmisch.

Es ist im Handel in verschiedenen Zeicheneinheiten und Bereichen für die Veränderlichen u und v erhältlich. Bild 23 gibt ein doppeltlogarithmisches Netz mit

$$v = 1...10; \quad u = 1...10$$

wieder. (Verkleinerung von Papier Nr. 375½ von Schleicher und Schüll.)

1) ≡ Lies: identisch, d. h. nicht nur „gleich", sondern „ein und dasselbe wie".

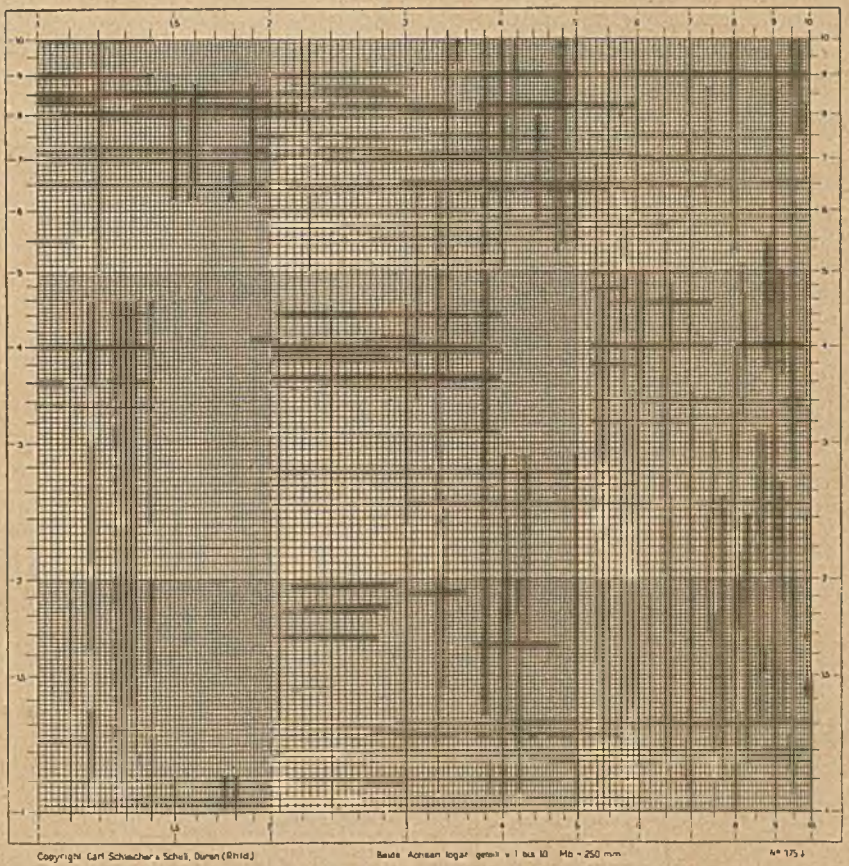


Bild 23. Verkleinertes doppelt-logarithmisches Papier

Welche Kurven werden nun im doppelt-logarithmischen Netz durch gerade Linien dargestellt? Nach unserer Formel (3) gilt

$$l \cdot \log v = k_1 \cdot l \cdot \log u + k_2.$$

Wir ersetzen k_2 durch $l \cdot \log v_0$ und erhalten nach Division durch l und Entlogarithmieren

$$v = v_0 \cdot u^{k_1}.$$

Es gilt also der Satz: Im doppelt-logarithmischen Netz werden alle Funktionen der Form

$$v = C \cdot u^n$$

durch gerade Linien dargestellt.

Dabei kann n jeden Zahlenwert annehmen, während C und u auf positive Zahlenwerte beschränkt sind. Änderung von $C = v_0$ ergibt Parallelverschiebung der Geraden, Änderung von n ergibt Änderung des Neigungswinkels der Geraden. In Bild 24 sind die Funktionen

$$v = 2 \cdot u;\ v = 20 \cdot \frac{1}{u} = 20 \cdot u^{-1};$$

$$v = 1 \cdot u^2$$

$$v = 0{,}5\sqrt{u} = 0{,}5 \cdot u^{\frac{1}{2}}$$

und $$v = 0{,}1 \cdot \sqrt{u}$$

im doppelt-logarithmischen Netz dargestellt.

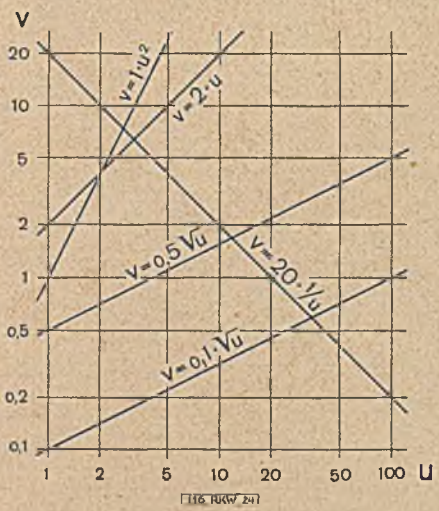


Bild 24. Streckung von Parabeln und Hyperbeln im doppelt-logarithmischen Netz.

Statt der Bezeichnung „doppelt-logarithmisch" findet man im Schrifttum auch die Bezeichnung „zweifach-logarithmisch". Gegen diese Bezeichnungsweise ist nichts einzuwenden, weil sprachlich und logisch „doppelt" und „zweifach" das gleiche bedeuten. Der Einwand, daß man darunter gegebenenfalls die auf Rechenschiebern öfters vorkommende log-log-Funktionsleiter verstehen könnte, gilt für beide Bezeichnungen. Da die log-log-Teilung aber hinter der log-Funktionsleiter stark an Bedeutung zurücktritt, so soll die Bezeichnung „doppelt-logarithmisch" hier für das gewöhnliche logarithmische Netz mit zwei logarithmischen Funktionsscharen beibehalten werden.

Im Sinne der schon früher dargelegten Einstellung halten wir aber die Bezeichnung „Potenzpapier" für das doppelt-logarithmische Papier nicht für zweckmäßig, weil wir nicht zum Ausdruck bringen wollen, was das doppelt-logarithmische Funktionsnetz „leistet", sondern wie es aufgebaut ist. „Potenznetze" sind daher für uns Netze, die aus Funktionsscharen mit Potenzgesetzen entstehen.

A. Walther hat im Institut für Praktische Mathematik der Technischen Hochschule Darmstadt einige Modelle zur anschaulichen Darstellung von logarithmischen Verzerrungen herstellen lassen. Diese

Modelle sind in der Zeitschrift für technische Physik beschrieben worden. Wir verweisen auf diese interessante Veröffentlichung.[1])

Geometrisch verzerrte Netze mit anderen Funktionsscharen werden wir noch im Abschnitt „Netztafeln" kennenlernen.

Die Herstellung von parallelen Funktionsscharen bereitet viel Mühe. Es sind Geräte entwickelt worden, die die Herstellung erleichtern. Wir erwähnen hier den Teilungsschieber von F. Schraidt. Das Gerät ist beschrieben in den AWF-Mitteilungen 1938, Heft 1, S. 14 und 15. Wer öfter Parallelfunktionsscharen der gleichen Art, aber mit veränderlicher Zeicheneinheit herzustellen hat, dem sei das Gerät zur Anschaffung empfohlen.

4. Das beliebig verzerrte Netz

Der Begriff des Funktionsnetzes kann noch etwas weiter gefaßt werden als in den vorigen Abschnitten. Man kann z. B. ein Netz von zwei sich schneidenden Kurvenscharen als Funktionsnetz betrachten, wenn man die Kurven der Scharen nach zwei Veränderlichen beziffert. Man nennt solche Systeme von zwei Kurvenscharen krummlinige Koordinaten.

Im Rahmen dieser Schrift soll nur das einfachste krummlinige Koordinatensystem besprochen werden, die Polarkoordinaten. Dieses System besteht aus der Schar konzentrischer Kreise um einen Punkt P und der Schar der durch diesen Punkt hindurchgehenden Geraden.

Die Bezifferung der Kreisschar erfolgt dabei nach dem Radius der Kreise, die Bezifferung der Geradenschar nach dem Winkel, den die Geraden gegen die horizontale Gerade durch P einschließen (Bild 25).

Auch für krummlinige Netze gelten die früher aufgestellten Regeln über die Teile und Zahlenschritte. Aus diesem Grunde müssen beim Polarkoordinatennetz mit wachsendem Durchmesser mehr radiale Netzgerade eingetragen werden (Bild 25).

Polarkoordinatensysteme eignen sich besonders zur Darstellung von Funktionszusammenhängen, bei denen die eine Veränderliche einen Winkel oder eine auf einen Winkel abbildbare Größe, z. B. die Zeit bei periodischen Vorgängen, darstellt.

---

1) Modelle zum Logarithmenpapier von A. Walther, H. J. Dreyer und H. Estenfeld. Z. f. Physik 20 (1939), Nr. 2, S. 56...58.

Für die Rechentechnik von größerer Bedeutung als allgemeine krummlinige Netze sind solche Netze, bei denen die zwei Scharen aus Geraden bestehen, die aber nun im Gegensatz zu früher nicht mehr parallel zu sein brauchen. Wie wir uns Funktionsscharen

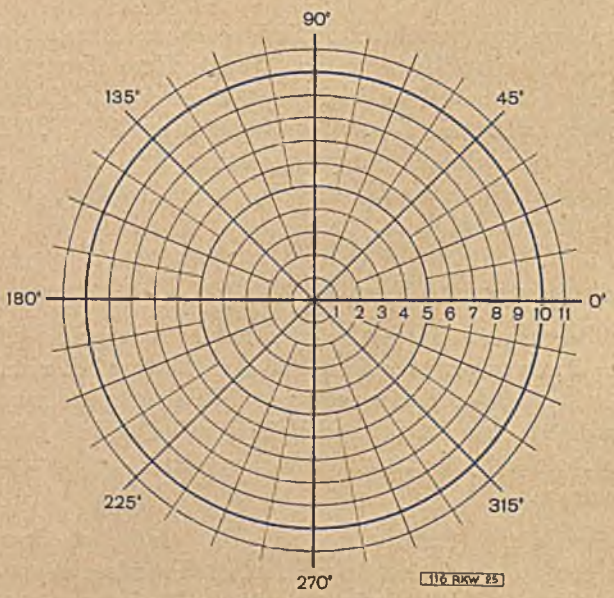


Bild 25. Polarkoordinaten

mit parallelen Geraden aus einer Funktionsleiter entwickelt haben, so kann man sich unter geringer Abänderung des Verfahrens eine Funktionsschar von nicht parallelen Geraden aus zwei Funktionsleitern entstanden denken. Wir zeichnen uns hierzu zwei verschiedene geradlinige Funktionsleitern für

$$u = f(t); \quad v = g(t)$$

in gleichen Zeicheneinheiten im Abstande L parallel auf. Verbinden wir dann gleiche Werte t auf beiden Leitern durch gerade Linien, so ergibt sich eine Funktionsschar mit nicht parallelen Geraden.

Eine Funktionsschar aus nicht parallelen Geraden ist also das Abbild zweier Funktionen, genau ebenso, wie eine krummlinige Funktionsleiter (Bild 16) das Abbild zweier Funktionen der gleichen unabhängigen Veränderlichen t ist. Einer geradlinigen Funktionsleiter

entspricht also in unserer Betrachtungsweise eine Parallelfunktionsschar; einer krummlinigen Funktionsleiter entspricht dagegen eine Funktionsschar nicht paralleler Geraden. Auf den tieferen Grund dieser Beziehungen kommen wir im Abschnitt F II zurück.

In Bild 26 ist für die beiden Funktionen

$$u = 0{,}1 \cdot t; \quad v = \log t$$

mit $t = 1...10$; $l = 50$ mm; $L = 50$ mm eine Nichtparallelfunktionsschar entworfen.

Besonders einfache Gebilde erhält man, wenn sich eine der beiden Funktionen auf eine Konstante reduziert. Man spricht dann von einer Strahlenschar. Eine solche Strahlenschar haben wir schon bei den Polarkoordinatennetzen kennengelernt. Die Schargeraden gehen alle durch einen Punkt, den wir den Träger der Schar nennen wollen. Die in gleichen Winkeln α fortschreitende Strahlenschar der Polarkoordinaten ist das Abbild der beiden Funktionen

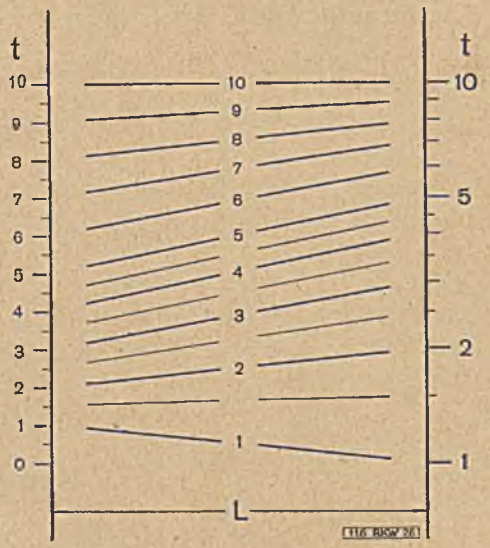


Bild 26. Geradlinige nichtparallele Funktionsschar

$$u = 0; \quad v = L \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Eine andere Strahlenschar, der wir bei den Netztafeln wieder begegnen werden, erhalten wir, wenn wir wählen

$$u = 0; \quad v = t \qquad \text{(s. Bild 27).}$$

Die gezeichnete Schar zeigt zunehmende Drängung der Geraden mit wachsendem t. In der Nähe des Strahlenpunktes P liegen die einzelnen Geraden so dicht, daß man dort nicht mehr genau ablesen kann. Außerdem muß man mehrere Geraden weglassen, um die Zeichnung übersichtlich zu gestalten. Am besten ist es, den Strahlenpunkt P mit einem Schutzkreis zu versehen.

Es ist manchmal zweckmäßig, die Zahlenwerte der Veränderlichen t an einer Hilfsgeraden anzuschreiben. Die Hilfsgerade kann geknickt sein, wie das in Bild 27 dargestellt ist. Der Knick liegt hier bei $t = 10$. Es ist empfehlenswert, die Teilstriche dieser Hilfsteilungen gegebenen-

falls nach dem Verlauf der Schargeraden auszurichten. Davon ist von $t = 10$ ab in Bild 27 Gebrauch gemacht.

Wenn auch die Anwendung allgemeiner Funktionsscharen in der Rechentechnik häufig ist, so haben doch schon aus Herstellungs-

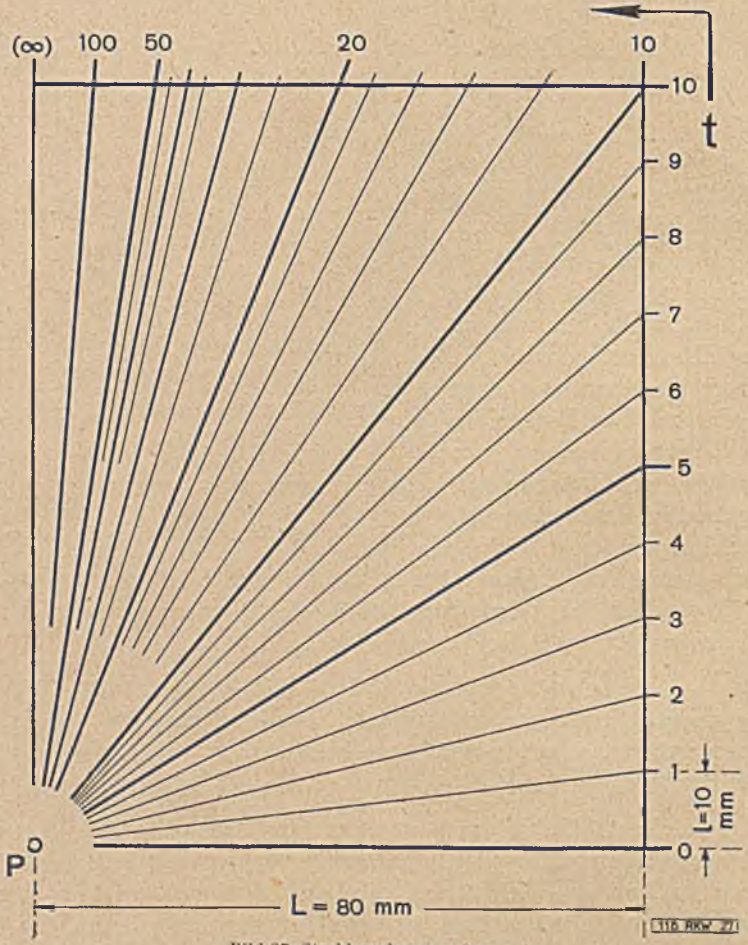


Bild 27. Strahlenschar $u = 0$; $v = t$

gründen die geradlinigen Funktionsscharen und besonders die Parallel- und Strahlenscharen eine besondere Bedeutung. Bei diesen ist immer ein Punkt Träger der Schargeraden; bei den ersteren der unendlich ferne Punkt (siehe hierzu C III), bei den letzteren ein im Endlichen liegender Punkt, der Strahlenpunkt.

B. Leitertafeln

Wir haben uns im Abschnitt A, II eingehend mit den Funktionsleitern befaßt und ihre Gesetzmäßigkeiten an Hand einiger wichtiger Beispiele dargelegt. Die Funktionsleiter war das zeichnerische Abbild einer Funktion zwischen zwei Veränderlichen $v = f(u)$ bzw. bei krummlinigen Trägern das Abbild zweier Funktionen der gleichen unabhängigen Veränderlichen t. Wir gehen jetzt einen Schritt weiter und betrachten zugleich mehrere solche Funktionsleitern, die in einer zunächst willkürlichen Anordnung zueinander liegen.

I. Gleitkurven und Doppelleitern

Der einfachste Fall ist der, daß zwei Funktionsleitern in irgendeine Beziehung zueinander treten. Wir denken uns zunächst einmal die beiden nach bestimmten Funktionen aufgebauten Leitern in beliebiger, aber unveränderlicher Anordnung auf einer Zeichnung dargestellt. Es kommt nun darauf an, die einzelnen Punkte der beiden Leitern in Beziehung zueinander zu setzen. Das geschieht in einfachster Weise dadurch, daß man die beiden Leiterträger mit einer irgendwie aufgebauten Geradenschar zum Schnitt bringt. Wir ordnen dann die beiden unabhängigen Veränderlichen der zwei Leitern so einander zu, daß Werte zusammengehören, die auf derselben Hilfsgeraden liegen. Bezeichnet man die Veränderliche der ersten Funktionsleiter mit u, die der zweiten Leiter mit v, so wird durch diese Zuordnung eine Funktion

$$v = f(u)$$

bestimmt. Die Funktion hängt aber nicht nur davon ab, welche Funktionsleitern gewählt wurden und wie diese relativ zueinander liegen, sondern ist auch wesentlich bestimmt durch die Art der Geradenschar. Soll die Tafel übersichtlich bleiben, so wird man die Hilfsgeradenschar nicht aufzeichnen, sondern beispielsweise als Schar der möglichen Tangenten an eine geeignete Kurve erklären. Wir

nennen diese Kurve in Anlehnung an H. Schwerdt eine Gleitkurve.[1]) Wir haben im Rahmen dieser kurzen Einführung nicht die Absicht, eine Theorie der Gleitkurven darzustellen, sondern verweisen Interessierte auf die angegebene Literaturstelle. Das Verfahren der Gleitkurve ist äußerst schmiegsam: so kann z. B. durch passende Wahl der Gleitkurve und der Lage der beiden Leitern für beliebige Funktionsleitern theoretisch jede Funktion dargestellt werden. Das ist von Interesse, wenn das Gefüge der beiden Leitern durch andere Gesichtspunkte festgelegt ist, beispielsweise dadurch, daß die beiden Leitern Bestandteile von den nachher zu besprechenden Leitertafeln im engeren Sinne sind. Bei den uns zur Verfügung stehenden mathematischen Hilfsmitteln können wir die Gleichung der Gleitkurve nicht ableiten. Man kann die Gleitkurve aber immer mit ausreichender Genauigkeit als sogenannte Hüllkurve konstruieren. Man verbindet hierzu eine Zahl von Punkten der beiden Leitern untereinander, die durch die Funktionsvorschrift

$$v = f(u)$$

einander zugeordnet sind. Legt man diese Punkte hinreichend dicht, so entsteht die Gleitkurve anschaulich als Hüllkurve aller gezeichneten Geraden. Bild 27a zeigt die Konstruktion für den Fall $v = u$ bei zwei parallelen Funktionsleitern, von denen die eine gleichförmig, die andere logarithmisch ist.

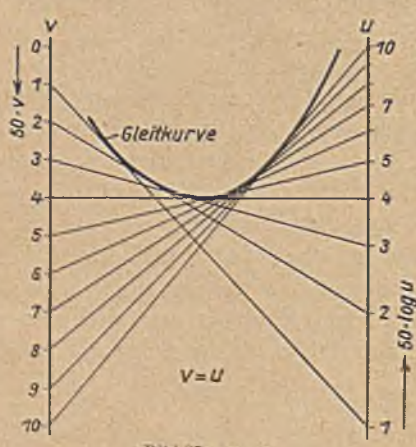


Bild 27a. $v = u$

In Spezialfällen schrumpft die Gleitkurve zu einem Punkt zusammen. Die Abbildung der einen Leiter auf die andere ist dann im Sinne unserer Ausführungen unter A II, 5 eine projektive. Damit wollen wir die Betrachtungen über Gleitkurven abschließen.

Von der speziellen Wahl der Gleitkurve unabhängig wird die Zuordnung der beiden Leitern dann, wenn die als geradlinig angenommenen Funktionsleitern zur Deckung gebracht werden. Damit die Teilstriche sich nicht gegenseitig stören, setzt man die Teil-

1) S. H. Schwerdt. Lehrbuch der Nomographie. Berlin 1924. S. 130 u. a.

striche der beiden Leitern auf entgegengesetzte Seiten der gemeinsamen Trägergeraden. Das so entstehende Gebilde, das eine bestimmte Funktion

$$v = f(u)$$

wiedergibt, nennen wir eine Doppelleiter.[1]) Die früher betrachteten speziellen Doppelleitern sind Sonderfälle dieser allgemeinen Doppelleitern, wenn nämlich eine der Leitern gleichförmig wird.

Da eine Möglichkeit des Ausgleiches im Funktionszusammenhang wegen des Fehlens der Gleitkurve nicht möglich ist, können die beiden Funktionsleitern nicht mehr ganz willkürlich gewählt werden. Die vorgegebene Funktion sei

$$v = f(u).$$

Wir nehmen nun eine weitere Funktion zu Hilfe:

$$w = F\{v\}.$$

Setzen wir hierin v aus der gegebenen Funktion ein, so erhalten wir

$$w = F\{v\} = F\{f(u)\}.$$

Der rechts stehende Ausdruck ist wieder eine Funktion von u:

$$F\{f(u)\} = H(u).$$

Es gilt also $F(v) = H(u).$

Wir tragen nun auf dem Träger links von einem Anfangspunkt aus $F\{v\}$ und rechts vom gleichen Anfangspunkt in der gleichen Richtung $H(u)$ als Funktionsleitern — beide mit der gleichen Zeicheneinheit — auf; dann stellt die erhaltene Doppelleiter den Funktionszusammenhang

$$v = f(u)$$

dar. Das Gefüge der Doppelleiter hängt offenbar von der Wahl der Funktion F ab. Durch geeignete Wahl von F kann man dieses Gefüge günstig beeinflussen.

Wir wollen an einem Beispiel die Möglichkeit solcher Umformungen dartun. Wir betrachten die Funktion

$$v = f(u) = \sqrt{100 - u^2}.$$

1) Man vergleiche hierzu die Betrachtungen und den Hinweis am Ende des Abschnittes A II, 1.

Wir konstruieren die Doppelleiter zunächst in der früher abgeleiteten Art. Hierzu tragen wir rechts v als gleichförmige Leiter mit der Zeicheneinheit $l = 5{,}0$ mm auf, links in der gleichen Zeicheneinheit die Funktionsleiter

$$a = l \cdot \sqrt{100 - u^2}.$$

Die entstandene Doppelleiter (Bild 27 b, rechts) zeigt für kleine Werte u eine ganz erhebliche Drängung. Eine Interpolation ist für $u < 2$ nicht mehr möglich.

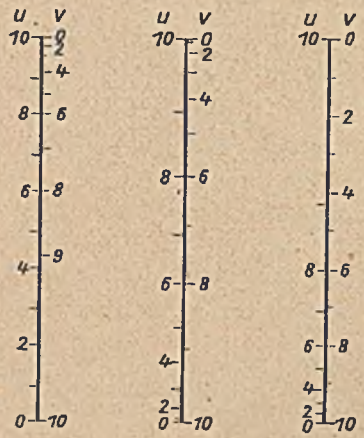


Bild 27 b. $v = \sqrt{100 - u^2}$

Wir wählen nun

$$w = F\{v\} = v^2$$

und damit

$$F\{f(u)\} = H(u)$$
$$= (\sqrt{100 - u^2})^2 = 100 - u^2.$$

Die so entstehende Doppelleiter zeigt Bild 27 b, Mitte. Die beiden Funktionsleitern sind spiegelbildlich gleich geworden. Die erhebliche Drängung der Leiter für u für kleine Werte u ist zwar nicht ganz beseitigt, aber stark gemildert, so daß Interpolation bis herunter zu $u = 1$ möglich ist.

Weiterhin wählen wir

$$w = F\{v\} = \sqrt{100 - v^2}$$

und damit $F\{f(u)\} = H(u) = \sqrt{100 - \sqrt{100 - u^2}^2} = u$.

Die so erhaltene Doppelleiter ist in Bild 27 b links dargestellt. Sie entspricht einer u-Doppelleiter. Auf der v-Leiter entsteht bei kleinen v-Werten eine erhebliche Drängung.

Man erkennt, daß man durch geeignete Wahl der Funktion $F\{v\}$, die wir als Verzerrung deuten können, die Interpolationsgenauigkeit auf beiden Funktionsleitern vergleichmäßigen und ohne Vergrößerung der Zeicheneinheit an den ungünstigen Leiterstellen steigern kann.

Die in dieser Schrift zur Verfügung stehenden mathematischen Hilfsmittel gestatten es uns nicht, diese Methode der Verbesserung des

Doppelleitergefüges weiter auszubauen.[1]) Die Möglichkeiten sind jedoch durch das Beispiel sicher klar zum Ausdruck gekommen. Es ist aber erstaunlich, wie wenig in der Praxis von diesem einfachen Mittel zur Verbesserung von Doppelleitern Gebrauch gemacht wird.

Die Doppelleiter leistet theoretisch das gleiche wie ein Schaubild. Sie besitzt aber den Vorteil kleinen Raumbedarfs und erheblich bequemerer und genauerer Interpolation, besonders, wenn von dem beschriebenen Hilfsmittel der Verzerrung Gebrauch gemacht wird.

II. Leitertafeln im engeren Sinne

Wir wenden uns nun Leitertafeln zu, die aus mehr als zwei Funktionsleitern aufgebaut werden. Eine Zeichnung mit zunächst drei Funktionsleitern von beliebigem Funktionsverlauf mit gerad- oder krummlinigen Trägern bezeichnen wir als Leitertafel.

Wählt man auf zwei von diesen Funktionsleitern für die Veränderlichen u und v bestimmte Werte u_1 und v_1 und legt durch die beiden Bildpunkte eine Gerade, so trifft diese Gerade im allgemeinen auch den Träger der dritten Leiter in einem bestimmten Punkte, der einem bestimmten Werte der Veränderlichen w entspricht. Den beiden Werten u_1 und v_1 wird also ein bestimmter Wert w_1 zugeordnet. Man schreibt hierfür in Erweiterung der von uns früher eingeführten gekürzten Schreibweise für Funktionen

$$w = f(u, v).$$

w ist die abhängige, u und v sind die beiden unabhängigen Veränderlichen. Diese Funktion liegt fest, wenn die Funktionsleitern und ihre Lage zueinander gegeben sind. Die Berechnung dieser Funktion kann zwar, besonders bei krummlinigen Leitern, ziemlich kompliziert sein, ist aber immer durchführbar. Damit haben wir ein Erzeugungsprinzip für beliebig viele Leitertafeln und die ihnen „zugeordneten" Funktionen $w = f(u, v)$ gefunden.

Jede solche Leitertafel ist aber im Sinne der Einleitung eine Rechentafel, weil sie zu je zwei Werten u, v einen dritten Wert w ohne weitere

1) Der mathematisch bewanderte Leser sei auf einen kürzlich erschienenen Aufsatz hingewiesen: Hans Knobloch: Über eine Verzerrungsfunktion in der Nomographie. Za. MM. Band 21 (1941) Nr. 2, S. 103—107.

Rechnung zu ermitteln gestattet. In dieser Rechentafel sind die drei Veränderlichen u, v und w innerhalb ihres Gültigkeitsbereiches auf Funktionsleitern gespeichert. Drei zusammengehörige Werte u, v und w liegen nach unseren obigen Ausführungen auf einer Geraden, die man Ablesegerade oder Fluchtgerade nennt. Die Bedingung des Fluchtrechtliegens zusammengehöriger Werte nennt man auch die „Ablesevorschrift" dieser Tafelform.

Die Besonderheit der Ablesevorschrift mit einer Geraden, der Fluchtgeraden, hat Veranlassung zu besonderen Bezeichnungen für die Leitertafeln gegeben. Man bezeichnet sie gelegentlich als Fluchtlinientafel oder Fluchtentafel. Wir werden an der Bezeichnung Leitertafel festhalten. Die Ablesegerade wird in Wirklichkeit durch ein Lineal, einen straffgespannten Faden oder ein durchsichtiges Gerät mit eingeritztem Ablesestrich gegeben. Eine Einzeichnung der Ablesegeraden für ein bestimmtes Beispiel ist zur Erläuterung nützlich, in allen Gebrauchsfällen aber weder notwendig noch zweckmäßig, weil hierdurch der Gebrauchswert der Leitertafel bald erheblich sinken würde.

In der Praxis geht es fast in allen Fällen nicht darum, zu einer gegebenen Funktionsleiteranordnung die zugehörige Funktion

$$w = f(u, v)$$

zu suchen, sondern man sucht zu einer gegebenen Funktion eine Darstellung in einer Leitertafel. Abgesehen davon, daß eine solche Darstellung gar nicht in allen Fällen existiert, ist auch das Auffinden einer Leitertafel zu einer gegebenen Funktion auf systematischem Wege außerordentlich schwierig und gehört zu den schwierigsten Problemen der theoretischen Nomographie. Es ist daher zweckmäßig, den anderen Weg zu beschreiten und für besonders einfache Funktionsleiteranordnungen die zugehörige Funktion zu bestimmen. Man muß dann versuchen, die vorgelegte Funktion durch geeignete Umformung in Übereinstimmung damit zu bringen. Wie wir später an einigen Beispielen zeigen werden, führt dieser Weg in einfacheren Fällen sehr schnell zum Ziel.

Besonders einfach sind Leitertafeln, bei denen die Träger gerade Linien sind. Wir werden uns daher zunächst diesen Leitertafeln zuwenden.

III. Die erste Grundform

1. Der symmetrische Fall

Eine Leitertafel mit geradlinigen Trägern rechnen wir zur ersten Grundform, wenn die drei Träger parallel verlaufen.

Mit Rücksicht auf eine spätere Erweiterung des Begriffes der ersten Grundform ist es zweckmäßig, die Eigenschaft des Parallellaufens noch anders auszudrücken. Von zwei parallelen Geraden sagt man, sie schneiden sich im Unendlichen oder sie haben einen unendlich fernen Punkt gemeinsam. Wir wollen daher von unseren drei Trägern der ersten Grundform sagen, sie gehen alle drei durch einen (nämlich einen unendlich fernen) Punkt.

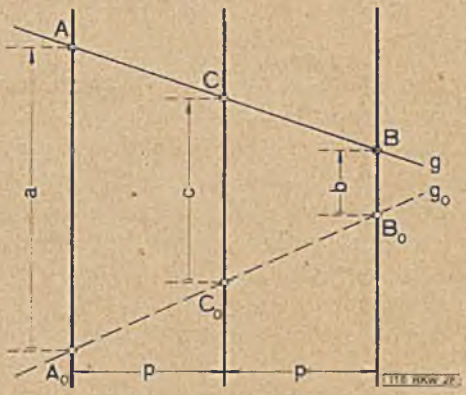


Bild 28. Aufbau einer Leitertafel der ersten Grundform; symmetrischer Fall

Es ist zweckmäßig, die Lage der drei parallelen Leitern zunächst weiter festzulegen, indem man annimmt, daß die zwei äußeren in gleichem Abstand p von der Mittelleiter verlaufen. Wir suchen zunächst eine geometrische Beziehung zwischen den Strecken, die auf den drei Leitern von einer an sich willkürlichen, die drei Träger schneidenden Geraden g_0 und einer anderen, die Ablesegerade vertretenden geraden Linie g abgeschnitten werden (s. Bild 28).

Die drei Trägergeraden bilden mit den beiden Geraden g_0 und g zusammen ein Trapez mit Mittellinie. Mit den Bezeichnungen von Bild 28 ergibt sich nach dem bekannten Satz über die Mittellinie im Trapez

$$2c = a + b. \tag{4}$$

Diese Gleichung heißt Schlüsselgleichung.

2. Anwendungen

Weniger, um damit ein neues Rechenhilfsmittel für die einfache Addition zu gewinnen, als vielmehr um den Aufbau der Leitertafel zu erläutern, soll an einem ersten Beispiel gezeigt werden, wie man eine Leitertafel für die Addition

$$w = u + v \tag{5}$$

gewinnen kann. Wir schreiben hierzu die beiden Formeln (4) und (5) untereinander, nachdem wir die letztere mit l multipliziert haben:

$$2c = a + b$$
$$l \cdot w = l \cdot u + l \cdot v.$$

Durch ein Verfahren, das wir Angleichung nennen wollen, führen wir beide Formeln identisch ineinander über, indem wir setzen

$$a = l \cdot u; \quad b = l \cdot v; \quad c = \frac{1}{2} l \cdot w.$$

Rechts stehen aber gleichförmige Funktionsleitern für u, v und w mit den Zeicheneinheiten

$$l_u = l; \quad l_v = l; \quad l_w = \frac{1}{2} l.$$

Die Zeicheneinheiten der beiden Außenleitern werden also gleich; die Zeicheneinheit der Innenleiter ist halb so groß wie die der Außenleitern.

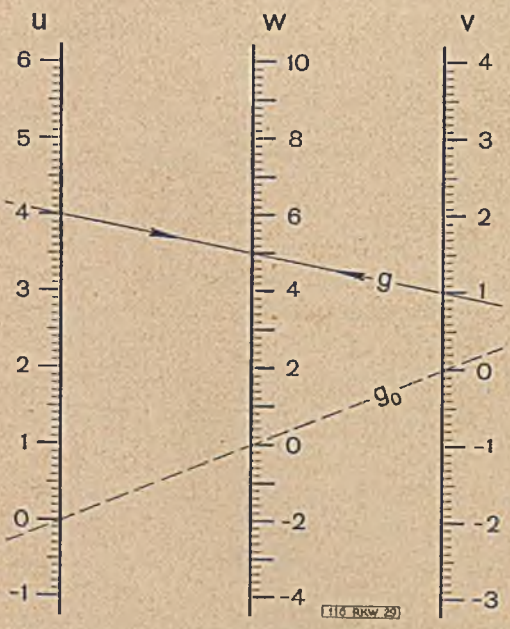


Bild 29. Leitertafel für $w = u + v$

Für die Bereiche

$$u = -1 \ldots + 6$$
$$v = -3 \ldots + 4$$

und damit

$$(w = -4 \ldots + 10)$$

ist in Bild 29 diese Leitertafel mit

$$l_u = l_v = 1 \text{ cm}$$
$$l_w = \frac{1}{2} \text{ cm}$$

entworfen. Dabei sind die im früheren Abschnitt dargelegten Gesichtspunkte für den Entwurf von Funktionsleitern berücksichtigt worden. Insbesondere ist der Teil nirgends kleiner als 1 mm und dementsprechend der Zahlenschritt auf den Außenleitern 0,1, auf der Innenleiter 0,2 gewählt.

In die Tafel ist ein Ablesebeispiel

$$4 + 1 = 5$$

eingetragen. Verbindet man den Bildpunkt $u = 4$ (auf der u-Leiter) mit dem Bildpunkt $v = 1$ auf der v-Leiter durch eine Gerade, so schneidet diese Fluchtlinie (Ablesegerade) die w-Leiter im Punkte $w = 5$. In die Tafel ist die Anfangsgerade g_0 mit eingezeichnet. Sie kann aber in fertigen Leitertafeln ganz wegbleiben und wird in den späteren Tafeln auch nicht mehr gezeichnet.

Die Leitertafel Bild 29 besitzt vier für Leitertafeln dieser Art allgemein sehr wichtige Eigenschaften:

1. Die Anfangspunkte der drei Funktionsleitern, nämlich $a = 0$, $b = 0$ und $c = 0$, liegen auf einer Anfangsgeraden g_0, deren Lage vollkommen gleichgültig ist. Statt sie wie in Bild 29 von links nach rechts ansteigen zu lassen, hätten wir sie auch waagerecht oder anders verlaufen lassen können. Diese Freiheit in der Wahl der Anfangsgeraden kann man oft ausnutzen, um der Leitertafel eine geeignete Form zu geben. (Das war in Bild 29 auch der Grund für die spezielle Lage von g_0.) Beim Entwurf geht man zweckmäßig so vor, daß man die beiden Außenleitern geeignet legt, also z. B. so, daß die Leitermitten in gleicher Höhe liegen. Erst dann zeichnet man die Anfangsgerade g_0 und bestimmt deren Schnittpunkt mit der Innenleiter. Dieser Schnittpunkt ist der Anfangspunkt der w-Leiter ($c = 0$).

Oft ist die Einzeichnung der Anfangsgeraden g_0 unbequem oder auf dem nach unten und oben beschränkten Zeichenblatt gänzlich unmöglich. Dann kann man so vorgehen, daß man nach Festlegung der beiden äußeren Leitern zwei Werte u_0, v_0 auf diesen Leitern auswählt und durch deren Bildpunkte die Ablesegerade zeichnet. Der Schnittpunkt mit der Innenleiter entspricht dem Punkte $w_0 = u_0 + v_0$. Man verschiebt nun die Innenleiter so lange, bis ihr Punkt $w = w_0$ mit dem Schnittpunkt zusammenfällt. Man nennt diese Methode zur Bestimmung der Lage der dritten Leiter die

„Methode des Beispiels".

Der Anfangspunkt $w = 0$ liegt dann um $l_w \cdot w_0$ tiefer als der Schnittpunkt des Ablesebeispiels.

2. Auf jeder Geraden gibt es zwei Fortschreitrichtungen, die man in willkürlicher Festsetzung als die positive bzw. negative wählen

kann. Es hätte uns offenbar nichts gehindert, unsere Leitertafel statt nach oben nach unten zu entwickeln. Diese Freiheit in der Wahl der positiven Fortschreitrichtung auf den Leitern kann für zusammengesetzte Tafeln von Bedeutung werden. Es ist aber wichtig zu merken, daß die positiven Fortschreitrichtungen auf allen drei Leitern einheitlich festgelegt werden müssen.

3. In unseren Gleichungen kommt nirgends der Abstand p der Außenleitern von der Innenleiter vor. Daraus ergibt sich, daß dieser Abstand willkürlich gewählt werden kann. Man wählt ihn aus Gründen der Ablesegenauigkeit so groß, daß sich keine schleichenden Schnitte der Ablesegeraden mit den Leitern ergeben, aber wiederum so klein, daß die Leitertafel den vorgeschriebenen Platz nicht überschreitet.

4. Die Leitertafel gestattet auch Umkehrung der Rechenrichtung. Fragt man z. B. nach dem Wert u, der zu $v = 1$ addiert werden muß, um $w = u + v = 5$ zu ergeben, so liefert die Rechnung

$$u = w - v = 5 - 1 = 4.$$

In der Leitertafel erhalten wir das gleiche Ergebnis, wenn wir durch die Bildpunkte $w = 5$ und $v = 1$ eine Ablesegerade legen; diese schneidet die u-Leiter im Ergebniswert $u = 4$. Die Leitertafel ist also zugleich eine Tafel für Additionen und eine Tafel für Subtraktionen. Da jede Subtraktion als die Addition einer negativen Zahl aufgefaßt werden kann, ist es berechtigt, kurzweg von einer Additionstafel zu sprechen.

Praktische Bedeutung erlangt die eben beschriebene erste Grundform erst durch Verallgemeinerung. Es sei eine Beziehung zwischen den drei Veränderlichen u, v, w gegeben durch

$$f(u) + g(v) = h(w), \tag{6}$$

wo f, g und h beliebige, auf Funktionsleitern darstellbare Funktionen bedeuten. Der Vergleich mit

$$a + b = 2c \tag{4}$$

zeigt, daß die durch (6) gegebene Rechenaufgabe mit der eben betrachteten Leitertafel gelöst werden kann, wenn man unter Ver-

wendung einer zunächst willkürlichen Zeicheneinheit l die Angleichung wie folgt vornimmt:

$$\begin{aligned} a &= l \cdot f(u) \\ b &= l \cdot g(v) \\ 2c &= l \cdot h(w) \quad \text{oder} \quad c = \frac{1}{2} l \cdot h(w). \end{aligned} \tag{5}$$

Also $$l_u = l; \quad l_v = l; \quad l_w = \frac{1}{2} l.$$

Aus den gleichförmigen Leitern unseres ersten einführenden Beispiels werden nunmehr allgemeine Funktionsleitern für $f(u)$, $g(v)$ und $h(w)$. Man nennt einen Funktionstyp gemäß (6) einen Additionstyp. Wir wenden die Ergebnisse an, um eine Leitertafel für Multiplikationen zu erhalten. Aus

$$u \cdot v = w \tag{7}$$

folgt durch Logarithmieren

$$\log u + \log v = \log w. \tag{7a}$$

Das ist aber gerade der Additionstyp (6). Die darzustellenden Funktionsleitern sind die früher eingehend besprochenen logarithmischen Leitern. Die Zeicheneinheit der mittleren Leiter ist nach den abgeleiteten Regeln die Hälfte der Zeicheneinheit der beiden äußeren.

Bild 30 zeigt eine so entstandene Rechentafel für die vorgegebenen Bereiche

$u = 1...20$

$v = 1...20$

$(w = u \cdot v = 1...400)$.

Die Zeicheneinheit auf den äußeren Leitern beträgt in Bild 30 5 cm. (Bekanntlich ist die Zeicheneinheit auf einer logarithmischen Funktionsleiter gleich dem Abstand der Zahlen 1 und

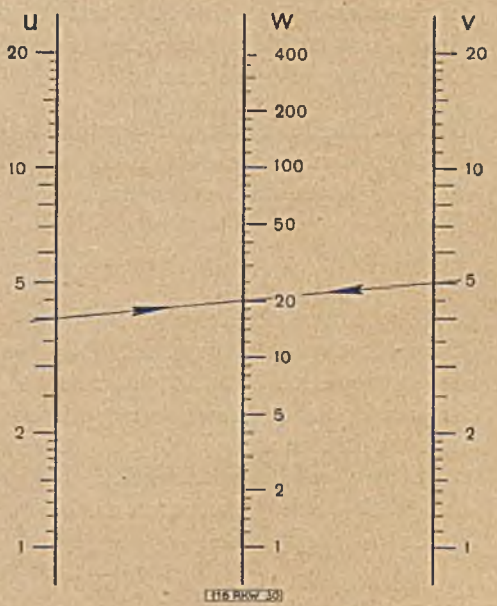


Bild 30. Leitertafel für $w = u \cdot v$

10 (siehe A II, 3). Beim Entwurf der Teilungen kann die Tafel im Anhang H IV benutzt werden.

In die Tafel Bild 30 ist ein Ablesebeispiel für die Rechenaufgabe

$$4 \cdot 5 = 20$$

eingetragen.

Genau so wie bei der zuerst besprochenen Tafel Bild 29 kann auch jetzt die Rechenrichtung umgekehrt werden. Es können daher mit der Tafel nach Bild 30 auch Divisionsaufgaben gelöst werden. Es ist nämlich

$$\log v = \log w - \log u$$

identisch mit

$$v = \frac{w}{u}.$$

Die erhaltene Multiplikationstafel besitzt den Nachteil, daß die 0 auf keiner der drei logarithmischen Leitern enthalten ist. Indem man die Leitertafel aber nach unten fortsetzt, kann man der Null ohne Mühe sehr nahekommen, ohne dabei die Ablesegenauigkeit zu verringern. Wir werden später eine Multiplikationstafel kennenlernen, die zwar die 0 genau enthält, dafür aber in der Gegend der 0 eine sehr geringe Rechengenauigkeit bietet.

Daß die Möglichkeiten der Verwendung von Leitertafeln in der bisher besprochenen einfachsten Form durch die behandelten Fälle noch nicht erschöpft sind, soll an einem weiteren Beispiel dargelegt werden. Es soll

$$w = \sqrt{2u^2 + v^2} \tag{8}$$

in einer Leitertafel dargestellt werden. Wir haben schon im Fall der Multiplikationstafel gesehen, daß eine mathematische Umformung eines gegebenen Funktionszusammenhanges mitunter gestattet, die Beziehung auf den Additionstyp zu reduzieren. Diese Umformungen einer Funktion, um sie für eine bestimmte Darstellungsart geeignet zu machen, spielen in der praktischen wie theoretischen Nomographie eine große Rolle. Quadrieren wir bei der vorliegenden Funktion beide Seiten, so ergibt sich

$$w^2 = 2u^2 + v^2 \tag{8a}$$

oder

$$2u^2 + v^2 = w^2.$$

Vergleichen wir dies wieder mit

$$a + b = 2c, \tag{4}$$

so erkennen wir, daß die Aufgabe gelöst wird, wenn man wählt:

$$a = l \cdot (2u^2); \quad b = l_v\, v^2$$

$$c = \frac{1}{2} l \cdot w^2$$

$$l_u = l_v = l; \quad l_w = \frac{1}{2} l.$$

Alle drei Funktionsleitern sind also Potenzleitern mit dem Exponenten 2.

In Bild 31 ist eine Tafel für die Bereiche

$$u = (0)...1...6$$

$$v = (0)...1...8{,}0$$

$$(w = (0)...2...12)$$

mit der Zeicheneinheit der äußeren Leitern $l = 1$ mm gezeichnet. Als Ablesebeispiel ist die Rechenaufgabe

$$9 = \sqrt{2 \cdot 6^2 + 3^2}$$

eingetragen.

Die Eigenschaft der Potenzleitern mit einem Exponenten $n > 1$, in der Nähe der Null wegen der Drängung keine genaue Ablesung zu gestatten, überträgt sich natürlich auch auf eine aus solchen Potenzleitern aufgebaute Leitertafel. Die Leitertafel Bild 31 enthält zwar noch die Bilder der Werte $u = v = w = 0$, eine Interpolation zwischen diesen Punkten und den nächststehend gezeichneten erfüllt aber nicht mehr die

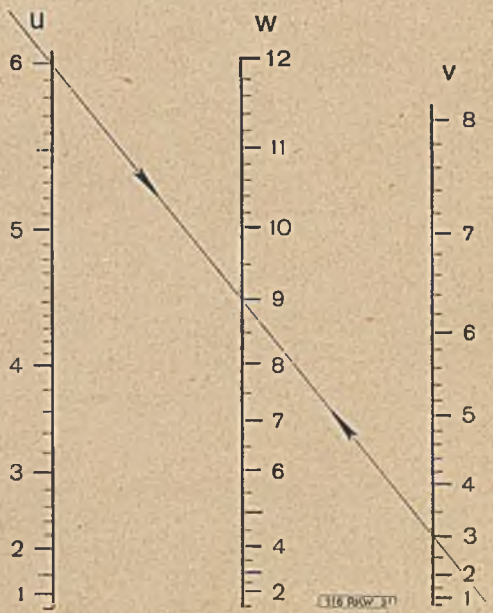


Bild 31. Leitertafel für $w = \sqrt{2u^2 + v^2}$

gewünschten Genauigkeitsansprüche. Eine Bezifferung der Null ist daher nicht erfolgt. Eine Besonderheit auf der u-Leiter verdient wegen ihrer Bedeutung bei anderen, insbesondere logarithmischen Leitern eine Erwähnung. Statt die Leiter $2u^2$ mit der Zeicheneinheit l zu zeichnen, kann man auch die Leiter u^2 mit der doppelten Zeicheneinheit $2l$ entwerfen. Ein konstanter Faktor der darzustellenden Funktion kann also immer zur Zeicheneinheit genommen werden.

3. Der unsymmetrische Fall

Bei dem zuerst besprochenen Fall gleicher Abstände der Außenleitern von der Innenleiter werden die Zeicheneinheiten auf den beiden Außenleitern gleich groß. Es kann daher bei sehr ungleichen Bereichen auf den beiden Außenleitern vorkommen, daß die Teilungslänge einer Außenleiter wesentlich länger wird als die der anderen. Damit ist schlechte Platzausnutzung verbunden.

Wir lassen daher jetzt die Forderung gleicher Abstände fallen und werden sehen, daß man damit ein Mittel zur Angleichung der Teilungs-

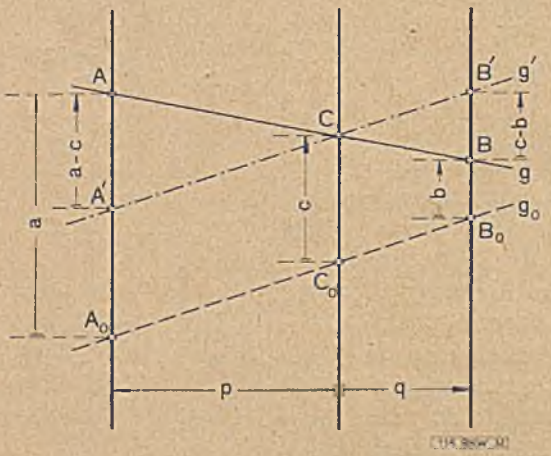


Bild 32. Aufbau einer Leitertafel der ersten Grundform; unsymmetrischer Fall

längen erhält. In Bild 32 besitze die linke Leiter den Abstand p, die rechte den Abstand q von der Innenleiter. g_0 sei wieder eine willkürliche Anfangsgerade, g eine spezielle Ablesegerade. Zwischen den auf den drei Leitern abgeschnittenen Strecken a, b und c besteht die

folgende Beziehung (man beachte, daß die Gerade g' parallel zu g_0 gezeichnet ist):

$$\frac{a-c}{p} = \frac{c-b}{q}. \tag{9}$$

Durch Umformung erhält man hieraus

$$a \cdot q + b \cdot p = c \cdot (p+q). \tag{9a}$$

Diese Gleichung geht, wie es sein muß, in die alte für den symmetrischen Fall über, wenn man $p = q$ setzt und durch den Faktor p dividiert.

Wir versuchen wieder eine Angleichung von (9a) an den Additionstyp

$$f(u) + g(v) = h(w), \tag{6}$$

indem wir die letzte Formel mit einem noch unbekannten Faktor A multiplizieren und gliedweise vergleichen:

$$\begin{aligned} A \cdot f(u) + A \cdot g(v) &= A \cdot h(w) \\ q \cdot a \quad + \quad p \cdot b \quad &= c \cdot (p+q), \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} A \cdot f(u) &= q \cdot a & \qquad a &= \frac{A}{q} \cdot f(u) \\ A \cdot g(v) &= p \cdot b & \qquad b &= \frac{A}{p} \cdot g(v) \\ A \cdot h(w) &= (p+q) \cdot c & \qquad c &= \frac{A}{p+q} \cdot h(w). \end{aligned}$$

Die Zeicheneinheiten auf den drei Leitern sind also

$$l_u = \frac{A}{q},$$

$$l_v = \frac{A}{p},$$

$$l_w = \frac{A}{p+q}.$$

Zwischen diesen Zeicheneinheiten gelten folgende Beziehungen:

1. $$l_u \cdot q = l_v \cdot p. \tag{10}$$

Die Zeicheneinheiten auf den Außenleitern verhalten sich also wie die zugehörigen Abstände von der Mittelleiter. Für den Entwurf der Tafel ist es bequem sich zu merken, daß zum größeren Abstand die größere Zeicheneinheit gehört.

2. $$l_w = \frac{l_u \cdot q}{q+p} = \frac{l_v \cdot p}{q+p}. \tag{11}$$

Wählt man also eine der Zeicheneinheiten, so sind die anderen nach Wahl von p und q eindeutig festgelegt. Es kommt übrigens nirgends auf die Absolutwerte von p und q, sondern nur auf das Verhältnis dieser Größen an. Man kann nämlich leicht die obenstehenden Formeln so schreiben, daß nur noch das Verhältnis $p : q$ vorkommt, z. B.

$$l_u = \frac{p}{q} \cdot l_v \tag{10a}$$

$$l_w = \frac{\frac{p}{q}}{1 + \frac{p}{q}} l_v = l_u \cdot \frac{1}{1 + \frac{p}{q}} \cdot \tag{11a}$$

Entfernt man aus diesen Formeln $\frac{p}{q}$, indem man dafür $\frac{l_u}{l_v}$ schreibt, so erhält man

$$l_w = \frac{l_u}{1 + \frac{l_u}{l_v}} = \frac{l_u \cdot l_v}{l_u + l_v} \cdot \tag{11b}$$

4. Anwendungen

Die Ermittlung der Zeicheneinheiten und der Abstände p und q soll an einem bestimmten Beispiel erläutert werden. Es soll eine Leitertafel für die Berechnung des Trägheitsmoments rechteckiger Querschnitte bezüglich der Hauptachsen entwickelt werden. Die darzustellende Funktion lautet

$$J = \frac{b \cdot h^3}{12} \cdot \tag{12}$$

Darin bedeuten:

J das äquatoriale Trägheitsmoment des rechteckigen Querschnittes bezüglich der waagerechten Hauptachse in cm^4

b die Breite des Querschnittes in cm

h „ Höhe „ „ „ cm.

Die Bereiche, innerhalb deren b und h und demgemäß J sich ändern, seien

$$b = 1 \ldots 5 \text{ cm}$$

$$h = 1 \ldots 5 \text{ cm}$$

$$\left(J = \frac{1}{12} \cdots \frac{625}{12} \text{ cm}^4 \approx 0{,}1 \ldots 1 \ldots 10 \ldots 60 \text{ cm}^4\right).$$

Durch Logarithmieren der Gl. (12) erhält man

$$\log (12 \cdot J) = \log (b) + \log (h^3).$$

Dabei ist willkürlich der im Nenner stehende Faktor 12 zu J gezogen. Ebensogut hätte man ihn zu b oder h^3 ziehen können.

Wählt man $p = q$, also den symmetrischen Fall und ordnet b und h auf den Außenleitern an, so wird, da b und h gleiche Bereiche umfassen, die Teilungslänge für $\log(h^3) = 3 \log h$ dreimal so lang wie die für $\log b$. Man entscheidet sich daher besser für den unsymmetrischen Aufbau, und zwar wird man p und q so wählen, daß die beiden Teilungslängen etwa gleich lang werden. Wir wollen b auf der linken (u-)Leiter, h auf der rechten (v-)Leiter darstellen. Damit die Leitern gleich lang werden, muß man also $l_u = 3 \cdot l_v$ wählen. Es ist also nach (10)

$$\frac{p}{q} = 3;$$

z. B. $\qquad p = 37{,}5 \text{ mm}; \quad q = 12{,}5 \text{ mm}.$

Für die Leitern stehe ein Platz von 7 cm Höhe zur Verfügung; dann ergibt sich nach der früher abgeleiteten Formel (1)

$$l_u = \frac{7}{\log \frac{5}{1}}$$

$$l_u = \frac{7}{0{,}699} \approx 10 \text{ cm}.$$

Wir wählen also

$$l_u = 10 \text{ cm} \qquad \text{für} \quad \log b$$

$$l_v = \frac{10}{3} = 3{,}33 \text{ cm} \qquad \text{für} \quad \log h^3 = 3 \cdot \log h.$$

Da die 3 zur Zeicheneinheit geschlagen werden kann, wird also die Leiter für h ebenfalls mit der Zeicheneinheit 10 cm entworfen. Es ergibt sich nun nach (11b)

$$l_w = \frac{l_u \cdot l_v}{l_u + l_v} = \frac{10 \cdot \frac{10}{3}}{10 + \frac{10}{3}} = \frac{100}{40} = 2{,}5 \text{ cm}.$$

Für alle benutzten Zeicheneinheiten sind die Teilungen in der Logarithmischen Teiltafel des Anhangs H IV enthalten und können daher daraus entnommen werden.

Die Leitern für b und h werden so gelegt, daß $b = 1$ und $h = 1$ auf einer waagerechten Linie liegen. Die Lage der Leiter für J bestimmt

man nach der Methode des Beispiels. So muß auf der Ablesegerade $b = 1$, $h = 1$ der Wert $J = \frac{1}{12}$ liegen.

Aber auch ein systematischer Weg führt zur Ermittlung der richtigen Lage von J. Offenbar stimmt die eben betrachtete Ablesegerade ($b = 1$, $h = 1$) mit der Geraden g_0 der Theorie überein. Von dem Schnittpunkt C_0 dieser Geraden mit dem Träger der J-Leiter sind nach oben abzutragen

$$c = l_w \cdot \log (12\,J)$$
$$= l_w \cdot \log 12 + l_w \cdot \log J.$$

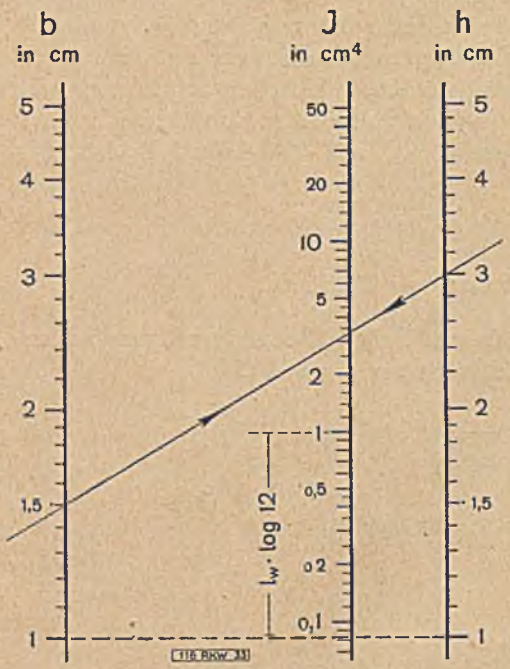


Bild 33. Leitertafel für $J = \frac{b\,h^3}{12}$

Den Anfangspunkt der J-Leiter ($J = 1$) finden wir also, wenn wir $l_w \cdot \log 12$ vom Schnittpunkt C_0 nach oben abtragen. Dieses Maß ist in der Leitertafel Bild 33 eingetragen.

Ablesebeispiel:

$b = 1{,}5$ cm; $h = 3$ cm;

$J = 3{,}38$ cm⁴.

Ein Vorteil der unsymmetrischen Anordnung verdient aus praktischen Gründen eine besondere Beachtung. An vielen Stellen der Technik versucht man die Beziehung zwischen mehreren Größen u, v, w durch sogenannte Potenzgesetze empirisch darzustellen:

$$w = u^n \cdot v^m.$$

Darin sind n und m ganze oder gebrochene Zahlen. Auch als exakte Formeln für bestimmte physikalische Sachverhalte tauchen solche Potenzgesetze auf. So besteht bei adiabatischer Zustandsänderung eines vollkommenen Gases die Beziehung

$$p \cdot V^k = C,$$

wobei k z. B. für Luft 1,41... beträgt.

Will man solche Potenzgesetze in einer Leitertafel der besprochenen Art darstellen, so hat man zu logarithmieren

$$\log w = \log (u^n) + \log (v^m)$$

$$\log w = n \cdot \log u + m \cdot \log v.$$

Sind l_u bzw. l_v die Zeicheneinheiten für $\log u^n$ bzw. $\log v^m$, so hat man aufzutragen

$$a = l_u \cdot n \cdot \log u = L_u \cdot \log u$$

$$b = l_v \cdot m \cdot \log v = L_v \cdot \log v.$$

Die resultierenden Zeicheneinheiten für $\log u$ bzw. $\log v$, L_u und L_v sollen aus wirtschaftlichen Gründen glatte Einheiten sein, die womöglich in der Tabelle des Anhangs enthalten sind. Eine neue Errechnung ist dann nicht notwendig. Durch passende Wahl von l_u und l_v kann das aber immer erreicht werden, welche Werte auch immer n und m haben mögen. Zugleich können bei bestimmten Bereichen für u und v die Leiterlängen im gewünschten Sinne abgestimmt werden. Hat man so l_u und l_v bestimmt, so ergibt sich aus Gl. (10)

$$p = \frac{l_u}{l_v} \cdot q,$$

daß p und q möglicherweise unglatte Zahlen werden. Das bereitet aber keine zeichnerischen Schwierigkeiten.

Mit der geeigneten Bestimmung von l_u und l_v ist aber auch das Maß der Willkür erfüllt. Die Zeicheneinheit l_w kann im allgemeinen nun nicht mehr so abgestimmt werden, daß sie auf glatte Werte führt, da nach (11b) l_w festliegt:

$$l_w = \frac{l_u \cdot l_v}{l_u + l_v}.$$

Man kann also durch geeignete Wahl von p und q immer erreichen, daß zwei der logarithmischen Zeicheneinheiten glatte Zahlenwerte annehmen. Damit kann die Rechenarbeit beim Entwurf einer Rechentafel auf ein Minimum reduziert werden.

Wir wollen zur Erläuterung der vorstehenden Ausführungen eine Leitertafel für

$$p \cdot V^k = C \tag{13}$$

entwickeln.

p = Absoluter Druck des Gases in at

V = Volumen des Gases in m^3

k = Verhältnis der spez. Wärmen $\frac{c_p}{c_v}$ (= 1,41 für Luft)

C = eine vom Ausgangsdruck p_0 und Ausgangsvolumen V_0 abhängige Konstante: $C = p_0 \cdot V_0^k$.

Die Bereiche seien

$$p = 1...30 \text{ at}; \quad V = 0{,}1...1 \text{ m}^3.$$

Logarithmieren liefert

$$\log C = \log p + k \cdot \log V.$$

p und V sollen auf den Außenleitern dargestellt werden. Die Leitern sollen eine Länge von etwa 7 cm besitzen. Als Zeicheneinheit für $\log p$ auf der u-Leiter erhält man

$$l_u = \frac{7}{\log \frac{30}{1}} = \frac{7}{1{,}477} = 4{,}74 \text{ cm} \approx 5 \text{ cm}.$$

Für die resultierende Zeicheneinheit auf der v-Leiter für $\log V$ ergibt sich

$$L_v = \frac{7}{\log \frac{1}{0{,}1}} = 7{,}0 \text{ cm}.$$

Sowohl l_u als auch L_v sind in der Tabelle im Anhang vorhanden; wir halten daran fest. Dann wird

$$l_v = \frac{L_v}{k} = \frac{7{,}0}{1{,}41} = 4{,}96 \text{ cm}$$

und

$$p = \frac{l_u}{l_v} \cdot q = \frac{5{,}0}{4{,}96} \cdot q = 1{,}01 \cdot q.$$

Wir wählen $p = 2{,}5$ mm; $q = 2{,}53$ mm.

Die Zeicheneinheit für $\log C$ würde eine nicht glatte Zahl ergeben. Die Besonderheit der Aufgabe erlaubt uns aber, von der Einzeichnung der $\log C$-Leiter ganz abzusehen. Man gibt nämlich gewöhnlich p_0

und V_0. Dann kann der Punkt auf dem mittleren Träger, der dem Werte $C = p_0 \cdot V_0^k$ entspricht, als Schnittpunkt der Ablesegeraden durch p_0 und V_0 gefunden werden. Dieser Punkt wird jetzt festgehalten, indem man die Ablesegerade um diesen Punkt dreht, bis sie in die neue gewünschte Lage kommt. Diese neue Lage kann z. B. bestimmt sein durch einen vorgegebenen Wert von p; dann kann V abgelesen werden.

Es gibt Ableselineale mit besonderer Dreheinrichtung, die ein Drehen der Ableselinie um einen bestimmten Punkt gestatten. Will man ohne diese Hilfsmittel auskommen, so empfiehlt sich, an die C-Leiter entweder die Werte C oder, was einfacher ist, eine gleichförmige mm-Teilung zu setzen, so daß man beim Verdrehen das Festbleiben des Drehpunktes prüfen kann (Bild 34).

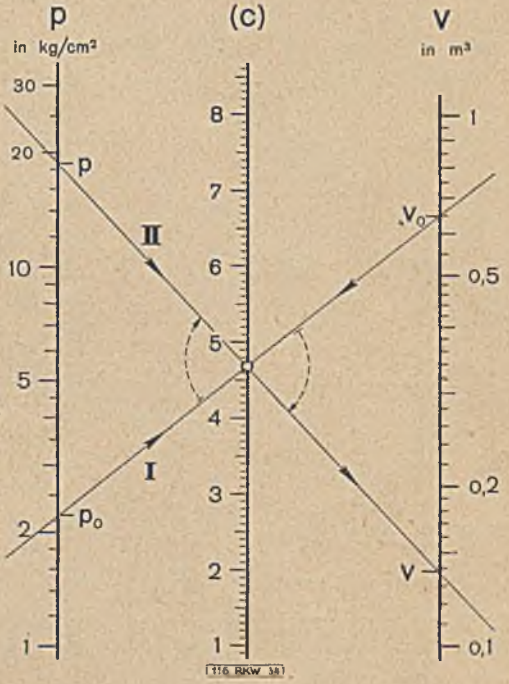


Bild 34. Leitertafel für $p \cdot V^{1{,}41} = p_0 \cdot V_0^{1{,}41}$

5. Erweiterungen und besondere Hilfsmittel

Das zuletzt behandelte Beispiel führt zu einem neuen Begriff. Man bezeichnet eine Leiter in Leitertafeln, an die man den Wert der Veränderlichen (im Beispiel: C) ohne Beeinträchtigung des Gebrauchswertes der Tafel nicht anzuschreiben braucht, als Zapfenlinie. Sie ist gewissermaßen der geometrische Ort der Drehzapfen, um die man die Ablesegerade beim Übergang von der einen zu anderen Ablesung zu drehen hat.

Solche Zapfenlinien können benutzt werden, um die Verwendbarkeit von Leitertafeln auf mehr als drei Veränderliche auszudehnen. Hat man z. B. eine Beziehung

$$f(u) + g(v) = h(w) + k(z), \tag{14}$$

so kann man unter Einführung einer Hilfsveränderlichen t schreiben

$$f(u) + g(v) = t \qquad (14a)$$

$$h(w) + k(z) = t. \qquad (14b)$$

Sowohl (14a) als auch (14b) können Darstellung in einer Leitertafel der ersten Grundform mit wahlweise symmetrischem oder unsymmetrischem Aufbau finden. Die Zeicheneinheiten der beiden Tafeln stimmt man nun so gegeneinander ab, daß die Zeicheneinheiten auf den t-Leitern gleich werden. Dann kann man, wie das in Bild 35 angedeutet ist, die beiden Leitertafeln durch Zurdeckungbringen der t-Leitern vereinigen. Sind z. B. u, v und w gegeben und z gesucht, so bestimmen u und v eine Ablesegerade g_1, die die t-Leiter in einem Punkte P_0 schneidet. Dieser Punkt P_0 dient nun als Zapfen für die Drehung der Ableselinie, die man so lange dreht, bis sie durch den Punkt w der w-Leiter geht. Sie schneidet dann die z-Leiter im gesuchten Wert z.

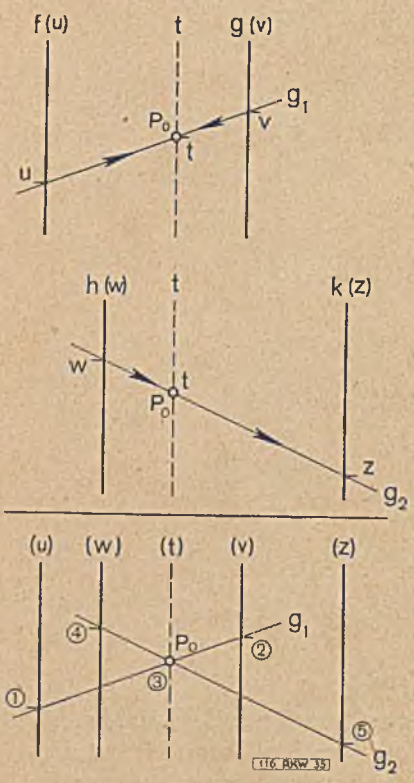


Bild 35. Überlagerung zweier Leitertafeln

Enthält der Additionstyp noch mehr Summanden, so kann das Verfahren durch Einführung weiterer Hilfsveränderlicher s, r usw. beliebig erweitert werden. Jeder Hilfsveränderlichen entspricht dann eine Zapfenlinie.

Es kann vorkommen, daß der Hilfsveränderlichen oder einer Funktion von ihr eine reelle Bedeutung in Form eines Zwischenergebnisses zukommt. Im allgemeinen ist es aber unnötig, die Leiter für t auszuführen. Wie im vorangegangenen Beispiel empfiehlt es sich aber dann, eine gleichförmige Teilung an der Zapfenlinie anzubringen.

Als Beispiel für die Anwendung von Zapfenlinien bringen wir eine Leitertafel zur Berechnung der Durchbiegung von Stahlachsen mit einer Einzellast.

Mit den Bezeichnungen von Bild 36

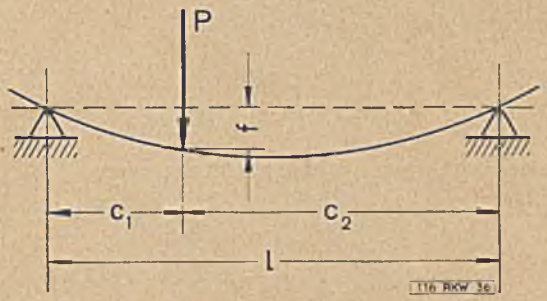


Bild 36. Balken auf zwei Stützen mit Einzellast

gilt $$f = \frac{P \cdot l^3}{3\,E\,J} \cdot \frac{c_1^2}{l^2} \cdot \frac{c_2^2}{l^2} = \frac{P \cdot l^3}{48 \cdot E\,J} \left[16 \cdot \frac{c_1^2}{l^2} \left(1 - \frac{c_1}{l} \right)^2 \right] \qquad (15)$$

$$f = \frac{P \cdot l^3}{48 \cdot E\,J} \cdot F\left(\frac{c_1}{l}\right). \qquad (15\,a)$$

Darin ist $$I = \frac{\pi}{64} \cdot d^4. \qquad (16)$$

Es bedeuten:

f Durchbiegung an der Laststelle in cm.

P Last in kg.

l Entfernung der beiden Lager in cm.

c_1, c_2 Entfernungen der Last von den Lagern in cm.

E Elastizitätsmodul des Achsenwerkstoffes in kg/cm² = $2 \cdot 10^6$ kg/cm² für Stahl.

J Trägheitsmoment der Achse in cm⁴.

d Durchmesser der Welle in cm.

F durch die eckige Klammer gegebene Funktion des Verhältnisses $\frac{c_1}{l}$.

$F = 1$ für $\frac{c_1}{l} = 0{,}5$, also Last in der Mitte.

Die Formel (15) wird durch Einführung mehrerer Hilfsveränderlicher in Teilformeln zerlegt:

1. Teilformel: $$t = P \cdot l^3.$$

Bereiche: $P = 600...1000...10\,000...100\,000...140\,000$ kg

$l = 80...100...500$ cm.

Die Bereiche sollen auf annähernd gleichen Leiterlängen dargestellt werden.

$$\log t = \log P + 3 \log l$$

$$c \cdot (p_1 + q_1) = q_1 \cdot a + p_1 \cdot b.$$

Wir gleichen an: $a = l_p \cdot \log P$

$$b = l_l \cdot \log l.$$

Also wird $c \cdot (p_1 + q_1) = q_1 \cdot l_p \cdot \log P + p_1 \cdot l_l \cdot \log l.$

Wählen wir $p_1 = q_1$, so muß also werden wegen

$$\log t = \log P + 3 \cdot \log l$$

$$\frac{p_1 \cdot l_l}{q_1 \cdot l_p} = \frac{l_l}{l_p} = 3.$$

Da der Bereich von P sich über etwa drei, der von l sich über etwa eine Dekade erstreckt, ergeben sich somit etwa gleiche Leiterlängen für die Leitern von P und l!

Mit Rücksicht auf den in diesem Buch zur Verfügung stehenden Platz wählen wir

$$l_l = 150 \text{ mm}$$

$$l_p = 50 \text{ mm}.$$

Es wird dann $l_t = \frac{l_p}{2} = 25$ mm.

Selbst wenn t abgelesen werden sollte, ist genügende Genauigkeit der Interpolation gewährleistet. t hat aber keine technische Bedeutung, braucht also nicht angeschrieben zu werden. Wir versehen daher die log t-Leiter mit einer mm-Teilung.

2. Teilformel: $r = \frac{t}{48\,E \cdot J}$; $J = \frac{\pi}{64} d^4$.

Bereiche:

$d = 10...100$ cm

$J \approx 500...1000...10\,000...100\,000...1\,000\,000...5\,000\,000$ cm^4.

Auch jetzt sollen die Bereiche durch gleiche Längen wie vorhin dargestellt werden:

$$\log t = \log (48E \cdot J) + \log r,$$

$$(p_2 + q_2) \cdot c = p_2 \cdot b + q_2 \cdot a.$$

Die Hilfsveränderliche t umfaßt, wie man aus der vorigen Teilaufgabe feststellt, etwa sechs Dekaden. J umfaßt vier Dekaden. t soll daher auf der Mittelleiter dargestellt werden.

Es ist $l_t = 25$ mm (siehe früher).

Wählt man $l_r = 100$ mm,

so ergibt sich aus

$$l_t = \frac{l_r \cdot l_J}{l_r + l_J};$$

$$l_J = \frac{l_t \cdot l_r}{l_r - l_t}$$

$$l_J = \frac{25 \cdot 100}{100 - 25} = \frac{2500}{75} = 33\tfrac{1}{3} \text{ mm}$$

und $$p_2 = \frac{l_r}{l_J} \cdot q_2 = \frac{100}{33\frac{1}{3}} \cdot q_2 = 3\,q_2.$$

Die Konstante $48 \cdot E$ wird durch die Methode des Beispiels berücksichtigt. Die Leiter für J kann zugleich als Doppelleiter ausgebildet werden, um aus J das zugehörige d zu ermitteln.

Die Zeicheneinheit für $\log d$ wird 4mal größer als die für $\log J$, also

$$l_d = 4 \cdot l_J = 4 \cdot 33\tfrac{1}{3} = 133\tfrac{1}{3} \text{ mm}.$$

Die Lage der beiden Leitern für J und d zueinander ermittelt man wieder durch die Methode des Beispiels.

Die Leiter für die Hilfsveränderliche r umfaßt etwa 1,5 Dekaden. r hat eine technische Bedeutung. Es ist nämlich die Durchbiegung für $\frac{c_1}{l} = 0{,}5$, also Einzellast in der Mitte. Wenn dieser Fall vorliegt, kann die Berechnung abgebrochen werden.

3. Teilformel: $$f = r \cdot F\left(\frac{c_1}{l}\right).$$

Mit Rücksicht auf die von rechts nach links fortschreitende Rechenrichtung in der gesamten Leitertafel soll die Durchbiegung f auf der linken Außenleiter erscheinen.

$$\log r = \log f - \log F\left(\frac{c_1}{l}\right).$$

$$(p_3 + q_3) \cdot c = q_3 \cdot a + p_3 \cdot b.$$

Wir wählen $q_3 = 2 \cdot p_3$.

Es wird wegen $l_r = 100$ mm

$$l_f = l_r \cdot \frac{p+q}{q}$$

$$= 100 \cdot \frac{3}{2} = 150 \text{ mm}$$

und

$$l_F = -\, l_r \cdot \frac{p+q}{p}$$

$$= -\, 100 \cdot \frac{3}{1} = -\, 300 \text{ mm}.$$

Die Leiter für $\frac{c_1}{l}$ ist keine logarithmische, sondern eine aus der Funktion $F\left(\frac{c_1}{l}\right)$ abgeleitete logarithmische Leiter, die zweimal durchlaufen wird, weil F für $\frac{c_1}{l} = 0{,}5$ ein Maximum hat. Das Minuszeichen bei l_F bedeutet, daß sich die Leiter im Gegensatz zu allen anderen nach unten entwickelt. Die Lage der Leiter bestimmt man nach der Methode des Beispiels.

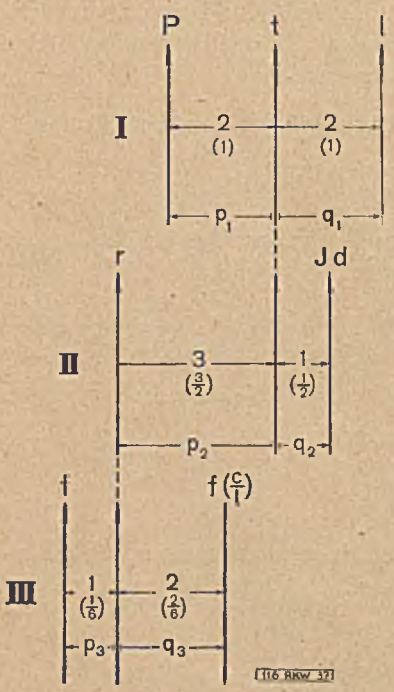


Bild 37. Überlagerung der Teiltafeln

Bis jetzt liegen die Abstände p und q nur relativ zueinander fest. Bild 37 zeigt ein Schema, wie man nunmehr die drei gewonnenen Leitertafeln überlagert. Die absoluten Größen von p und q wählt man so, daß die Leitern zweckmäßig verteilt sind. Im vorliegenden Beispiel kann sogar erreicht werden, daß die Leitern voneinander alle gleichen Abstand haben. Wir wählen dazu

$p_1 = q_1 = 25$ mm

$p_2 = 37{,}5$ mm; $\quad q_2 = 12{,}5$ mm

$p_3 = 12{,}5$ mm; $\quad q_3 = 25$ mm.

Bild 38 zeigt die fertige Tafel. Durch geeignete Verzifferung sind l,

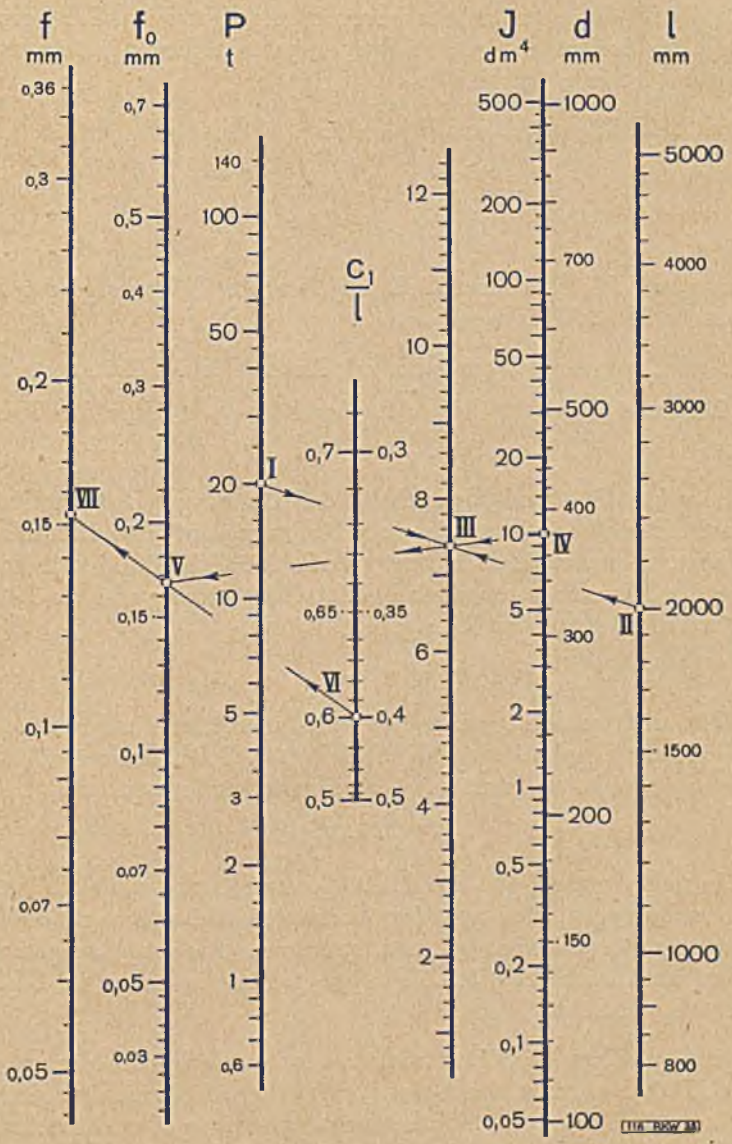


Bild 38.

Mehrfache Leitertafel für die Bestimmung der Durchbiegung von Stahlachsen

$f_0 = r$, d und f nicht in cm, sondern in mm aufgetragen. Zur Verminderung der Stellenzahl ist J in dm^4 dargestellt. Das Gewicht P der Einzellast ist in t dargestellt.

In die Tafel ist ein Ablesebeispiel für

$$P = 20\ \text{t}; \qquad l = 2000\ \text{mm}$$

$$J = 10\ \text{dm}^4; \qquad \frac{c_1}{l} = 0{,}6$$

eingetragen. Die römischen Ziffern geben die Reihenfolge der Einstellungen bzw. Ablesungen an.

Das Auftragen der Leitern kann mit Ausnahme der Leiter für $\log d$ ($l = 133\frac{1}{3}$ mm) und der Leiter für $\log F\left(\frac{c_1}{l}\right)$ mit Hilfe der Tabelle des Anhanges H IV erfolgen.

Der zweckmäßige und übersichtliche Aufbau von Leitertafeln erfordert oft, daß das Ergebnis einer Rechnung auf einer Außenleiter erscheint. Grundsätzlich haben wir die Möglichkeit hierfür schon durch den Hinweis gegeben, daß die Rechenrichtung in einer Leitertafel umgekehrt werden kann. Ist z. B.

$$w = u + v$$

gegeben, und werden u und v auf den Außenleitern aufgetragen, so erscheint das Ergebnis w auf der Innenleiter. Soll w auf einer Außenleiter erscheinen, so kann man die Formel umformen:

$$v = (-u) + w.$$

Man hat also w und $(-u)$ auf den Außenleitern und v auf der Innenleiter aufzutragen. Das negative Vorzeichen bei u besagt, daß die Leiter von der Geraden g_0 in umgekehrter Richtung aufgetragen werden muß (siehe Bild 39). Wir haben hiervon schon in Bild 38 Gebrauch gemacht.

Zu genau gleichen Ergebnissen kommt man übrigens auch in anderer Weise: Bisher waren p und q positive Strecken. Läßt man für p und q auch negative Werte zu, indem man die positiven Werte der Anordnung nach Bild 32 zuordnet und p und q immer von der Ergebnisleiter aus rechnet, so ergeben sich formal richtige Rechentafeln. Die Formeln für die Zeicheneinheiten liefern mitunter negative Werte, d. h. die Leiter ist in negativer Richtung auf dem Träger zu ent-

wickeln. In Bild 39 sind die Werte p und q und die Zeicheneinheiten unter Kennzeichnung ihres Vorzeichens eingetragen.

Bevor wir uns einer anderen Grundform geradliniger Leitertafeln zuwenden, soll noch gezeigt werden, wie man in Fällen, in denen eine Darstellung in geradlinigen Parallelleitertafeln nicht möglich ist, durch Wahl neuer Veränderlichen doch zu einer einfachen Darstellung kommen kann. Zur Erläuterung des Verfahrens betrachten wir ein bestimmtes Beispiel.

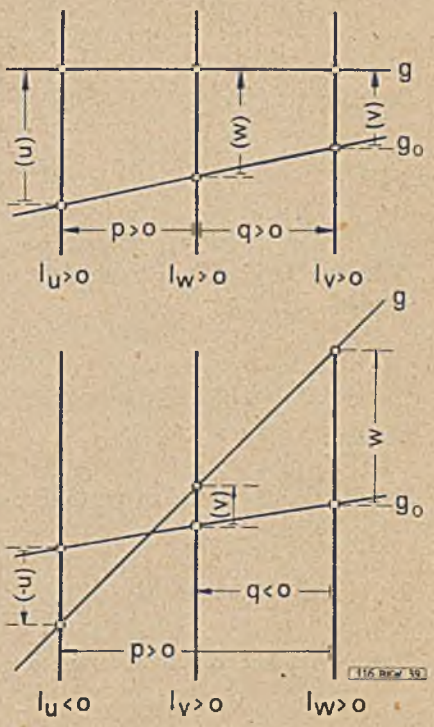


Bild 39.
Negative Zeicheneinheiten und Leiternabstände

Zwischen dem mit Rücksicht auf die Erwärmung dauernd zulässigen Strom J und den Abmessungen b und h einer rechteckigen Kupferschiene großer Länge besteht die angenäherte Beziehung

$$J^2 = (b^2 \cdot h + bh^2) \cdot c \quad (17)$$

mit $c \approx 46{,}6\ \mathrm{A^2/mm^3}$.

Statt die Abmessungen der Schiene durch Breite b und Höhe h zu kennzeichnen, kann man eine solche Kennzeichnung auch durch die Höhe h und das Verhältnis $\frac{b}{h}$ (von Breite zu Höhe) vornehmen. Man erhält dann

$$J^2 = h^3\left[\left(\frac{b}{h}\right)^2 + \frac{b}{h}\right] \cdot c. \quad (17a)$$

Betrachtet man h, $\frac{b}{h}$ und J als die neuen Veränderlichen des Problems, so läßt sich diese Gleichung durch Logarithmieren auf eine Additionsform bringen:

$$\log\left(\frac{J^2}{c}\right) = \log h^3 + \log\left[\left(\frac{b}{h}\right)^2 + \frac{b}{h}\right].$$

Als Bereiche seien vorgegeben:

$$h = 5...10...100 \text{ mm}$$

$$\frac{b}{h} = 0{,}016...0{,}02...0{,}2...0{,}26$$

und $$J = 20...200...2000 \text{ Amp.}$$

Der Bereich für $$\left[\left(\frac{b}{h}\right)^2 + \frac{b}{h}\right] = F\left(\frac{b}{h}\right)$$

wird $$F\left(\frac{b}{h}\right) = 0{,}0204...0{,}1...0{,}39,$$

also etwas mehr als eine Dekade. Auch h umfaßt reichlich eine Dekade. Da aber h mit der dritten Potenz in die Rechnung eingeht, wählen wir

$$p = 3q.$$

Dabei soll $\frac{b}{h}$ auf der linken, h auf der rechten Außenleiter aufgetragen werden.

Mit Rücksicht auf den verfügbaren Platz wählen wir

$$l_F = 100 \text{ mm}$$

$$l_h = 100 \text{ mm}.$$

Dann wird die Zeicheneinheit der Mittelleiter für J

$$l_J = 2 \cdot \frac{100 \cdot \frac{100}{3}}{100 + \frac{100}{3}} = 2 \cdot \frac{100}{4} \text{ mm} = 50 \text{ mm}.$$

Weiterhin wählen wir

$$p = 60 \text{ mm}; \qquad q = 20 \text{ mm}.$$

Bild 40 zeigt die fertige Tafel. Als Ablesebeispiel ist

$$J = 1000 \text{ A}; \qquad h = 50 \text{ mm}$$

eingetragen. Die richtige Lage der Leiter für J ist nach der Methode des Beispiels bestimmt worden.

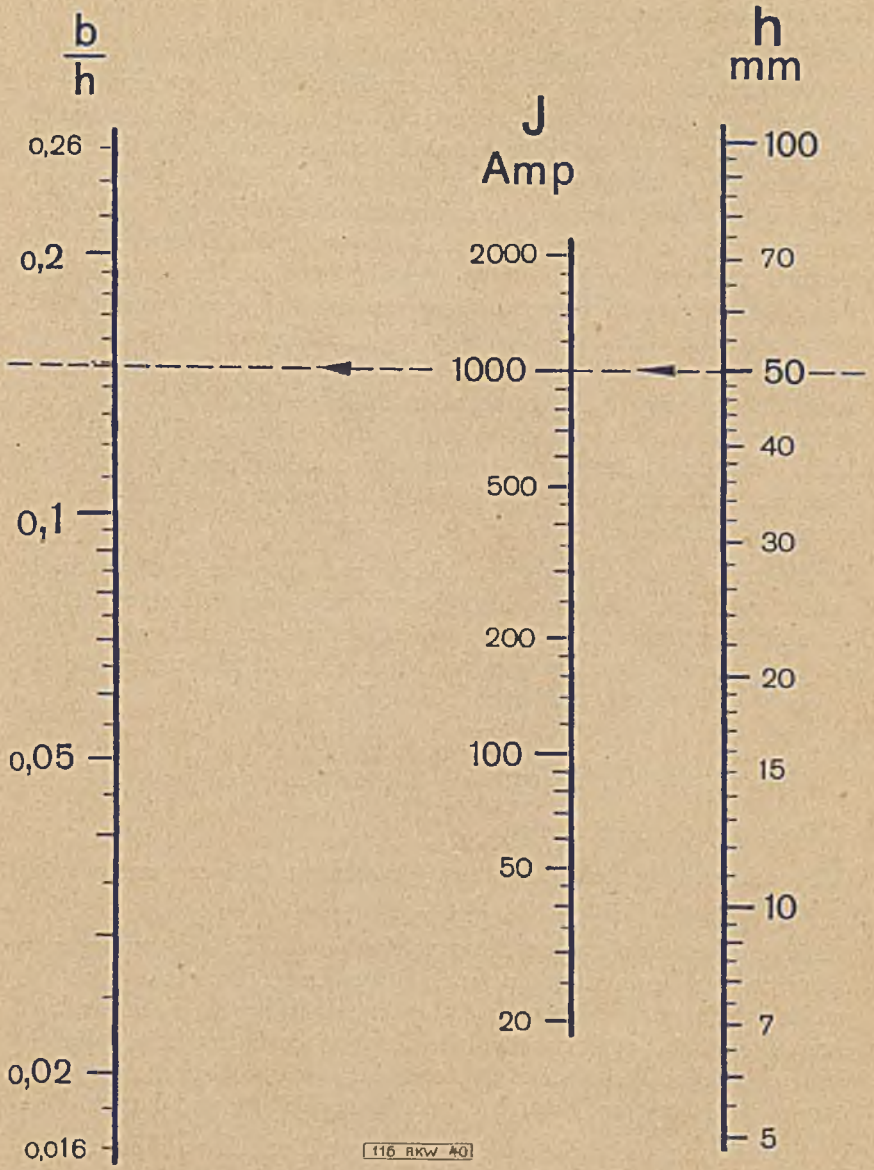


Bild 40.

Leitertafel zur Bestimmung des zulässigen Belastungsstromes von Flachleitern aus Kupfer

6. Der allgemeinere Fall

Wir haben die geradlinigen Leitertafeln der ersten Grundform dadurch gekennzeichnet, daß wir gesagt haben: Bei dieser Grundform gehen die drei Trägergeraden durch einen, und zwar einen unendlich fernen Punkt. Lassen wir die Einschränkung „unendlich fern" fallen, so erhalten wir den allgemeineren Fall der ersten Grundform. Im späteren Kapitel F I werden wir aus der Kenntnis über die projektiven Verzerrungen die Berechtigung dafür herleiten, beide Leitertafeln einheitlich zu bezeichnen. An sich rechtfertigt diese Verwandtschaft, den allgemeineren Fall hier zu übergehen. Wenn wir es dennoch nicht tun, so liegt das daran, daß man in vielen Fällen auf direktem Wege zu einem ganz einfachen Ansatz der allgemeinen Tafel kommen kann. Eine Behandlung des allgemeineren Falles im Rahmen dieses Abschnittes ist um so mehr erforderlich, als das Kapitel F II nur sehr kurz gehalten ist, nur als Anregung dienen soll und kaum ohne Studium weiterer Literatur für die Beherrschung projektiver Verzerrungen ausreicht.

Zwar können wir, ebenso wie bisher und auch an anderer Stelle später noch, zur Ableitung der Gesetze von geometrischen Sätzen über Dreiecke und Vierseite ausgehen, wir ziehen es aber vor, hier einen anderen Weg zu beschreiten. Unter B V, 2 findet man die gewünschte Ableitung und auch ein einfaches Beispiel.

IV. Die zweite Grundform

1. Geometrische Beziehungen

Wir rechnen eine Leitertafel mit geradlinigen Trägern zur zweiten Grundform, wenn nur zwei Träger parallel laufen.

Auch hier ist eine andere Ausdrucksweise zur Erleichterung einer späteren Verallgemeinerung zweckmäßig. Unter Benutzung des Begriffes des unendlich fernen Punktes, den wir früher eingeführt haben, formulieren wir das Eigentümliche der zweiten Grundform dadurch, daß wir sagen: Bei einer Leitertafel der zweiten Grundform gehen nur zwei Trägergerade durch einen (unendlich fernen) Punkt.

In Bild 41 sind die drei Träger gezeichnet. Der Abstand der beiden parallelen Träger, der, wie sich zeigen wird, für die abzuleitende geometrische Beziehung zwischen den einzelnen Strecken keine Bedeutung hat, sei p. Wesentlicher ist die Länge der Strecke L, die von

den beiden parallelen Trägern auf dem dritten Träger abgeschnitten wird. Die durch eine Ablesegerade g auf den drei Trägern abgeschnittenen Strecken sollen wie folgt zählen:

Auf der linken Leiter vom Schnittpunkt A_0 aus nach oben positiv bis zum Schnittpunkt A mit der Ablesegeraden.

Auf der rechten Leiter vom Schnittpunkt B_0 aus nach unten positiv bis zum Schnittpunkt B mit der Ablesegeraden.

Auf der schrägen Leiter vom Schnittpunkt A_0 aus nach rechts positiv bis zum Schnittpunkt C mit der Ablesegeraden.

Aus der Ähnlichkeit der beiden Dreiecke A_0CA und B_0CB ergibt sich sofort

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{L-c} \qquad (18)$$

oder

$$a = b \cdot \frac{c}{L-c}. \qquad (18a)$$

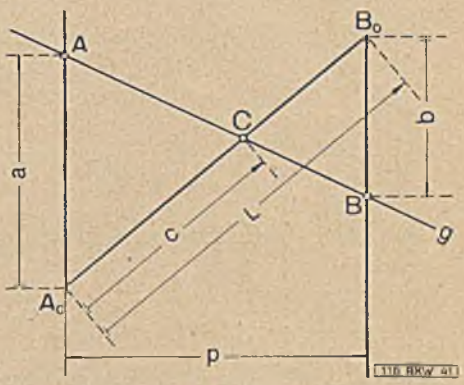


Bild 41. Aufbau einer Leitertafel der zweiten Grundform

Trägt man auf den beiden Außenleitern der ersten Grundform zwei Veränderliche u und v in einer gleichförmigen Teilung auf, so kann auf dem Innenträger die Summe auf einer anderen (zufällig auch gleichförmigen) Leiter abgelesen werden. Wir hatten daher diese Tafelform eine Additionsform genannt. Trägt man bei der Tafel der zweiten Grundform nach Bild 41 auf den beiden Außenleitern die beiden Veränderlichen u und v in gleichförmigen Leitern auf, so kann auf dem dritten, schrägen Träger der Quotient $\frac{u}{v}$ abgelesen werden, wenn man diesen Träger mit einer geeigneten projektiven Leiter versieht. Es ist daher berechtigt, diese Tafelform als eine Divisionsform zu bezeichnen. Ebenso wie man bei der ersten Grundform aber wegen der erlaubten Umkehrung der Rechenrichtung auch von einer Subtraktionsform sprechen kann, so kann man bei der zweiten Grundform auch von einer Multiplikationsform sprechen. Unter diesem Namen ist diese Tafelform bekannt.

2. Anwendungen

Unter Anlehnung an die besondere Form der Schlüsselgleichung (18a) versuchen wir eine Angleichung an den Multiplikationstyp

$$f(u) = g(v) \cdot h(w), \tag{19}$$

wo f, g und h beliebige Funktionen ihrer Veränderlichen sind. Unter Wahl der Zeicheneinheiten l_u und l_v beginnen wir mit

$$a = l_u \cdot f(u)$$

$$b = l_v \cdot g(v).$$

Setzen wir das in (18a) ein, so wird

$$l_u \cdot f(u) = l_v \cdot g(v) \cdot \frac{c}{L - c}$$

oder

$$f(u) = g(v) \cdot \frac{l_v}{l_u} \cdot \frac{c}{L - c}.$$

Die letzte Gleichung wird in (19) identisch übergeführt, wenn man setzt

$$h(w) = \frac{l_v}{l_u} \cdot \frac{c}{L - c}.$$

Durch Auflösung nach c erhält man hieraus

$$c = L \cdot \frac{h(w)}{\frac{l_v}{l_u} + h(w)}. \tag{20}$$

Damit ist die Angleichung vollzogen. Wir stellen noch einmal zusammen:

$$a = l_u \cdot f(u)$$

$$b = l_v \cdot g(v)$$

$$c = L \cdot \frac{h(w)}{\frac{l_v}{l_u} + h(w)}.$$

Dann gilt

$$f(u) = g(v) \cdot h(w).$$

Zur Erläuterung sollen zwei Beispiele besprochen werden.

a) Leitertafel für die Darstellung der allgemeinen Potenz $u = v^w$

Durch Logarithmieren erhält man

$$\log u = (\log v) \cdot w.$$

Das ist ein Multiplikationstyp. Wir gleichen an:

$$a = l_u \cdot \log u$$

$$b = l_v \cdot \log v$$

und

$$c = L \cdot \frac{w}{\frac{l_v}{l_u} + w}.$$

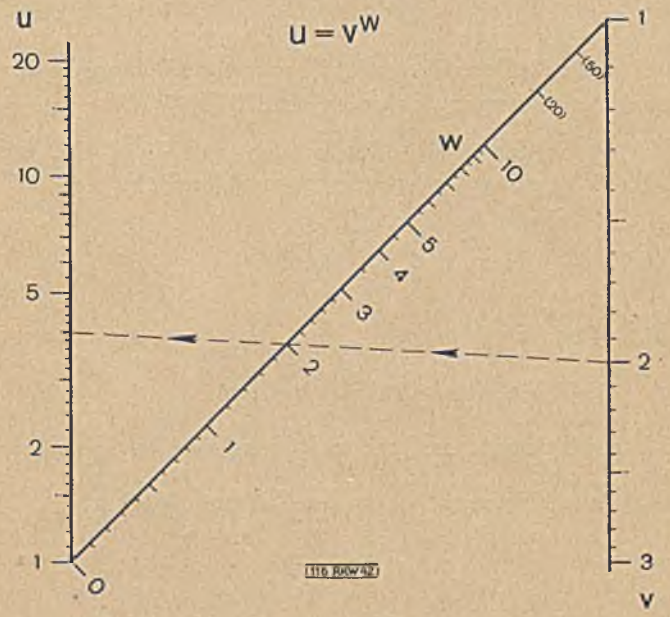


Bild 42. Leitertafel für $u = v^w$

Die beiden Außenleitern sind also normale logarithmische Leitern mit den Zeicheneinheiten l_u bzw. l_v; die schräge Mittelleiter ist eine projektive Leiter. Für

$$w = 0 \quad \text{ergibt sich} \quad c = 0,$$

für

$$w = \infty \quad ,, \quad ,, \quad c = L.$$

Die Punkte $w = 0$ bzw. $w = \infty$ fallen also in die Schnittpunkte der Mittelleiter mit der linken bzw. rechten Leiter für u bzw. v.

Bild 42 zeigt die Leitertafel für

$$l_u = 50 \text{ mm}; \quad l_v = 150 \text{ mm}; \quad L = 100 \text{ mm}$$

und die Bereiche

$$u = 1...20; \quad v = 1...3; \quad w = 0...10.$$

In der Nähe der Schnittpunkte kann in bestimmten Rechenrichtungen nicht mehr genau gerechnet werden.

b) Leitertafel für die Berechnung der Temperaturerhöhung aus der Widerstandszunahme bei Kupferwicklungen nach REM § 34

Die Tafel ist in den AWF-Mitteilungen Juli 1928, 10. Jahrgang, Heft 7, S. 58, in etwas anderer Form veröffentlicht.

Es gilt
$$t = \frac{R_w - R_k}{R_k} \cdot (235 + t_k). \tag{21}$$

Darin bedeuten

t die Temperaturerhöhung in Grad

t_k die Temperatur, bei der R_k gemessen, in Grad Celsius

R_k den Widerstand im kalten Zustand in Ohm

R_w „ „ „ warmen „ „ „

Man schreibe
$$235 + t_k = v$$

$$t = u$$

$$\frac{R_w - R_k}{R_k} = \left(\frac{z}{100}\right) = w$$

(z ist die relative Widerstandserhöhung in Hundertsteln).

Dann ist die Angleichung an die Normalform

$$f(u) = g(v) \cdot h(w)$$

möglich:

$$a = l_u \cdot t$$

$$b = l_v \cdot (235 + t_k)$$

$$c = L \cdot \frac{\frac{z}{100}}{\frac{l_v}{l_u} + \frac{z}{100}} = L \cdot \frac{z}{100 \cdot \frac{l_v}{l_u} + z}$$

Wir wählen $l_u = 1$ mm; $l_v = 2$ mm; $L = 575$ mm.

Die Leitern werden nur im interessierenden Bereich

$t_k = 0...$ 50 Grad

$z = 0...$ 40 v.H.

$t = 0...100$ Grad

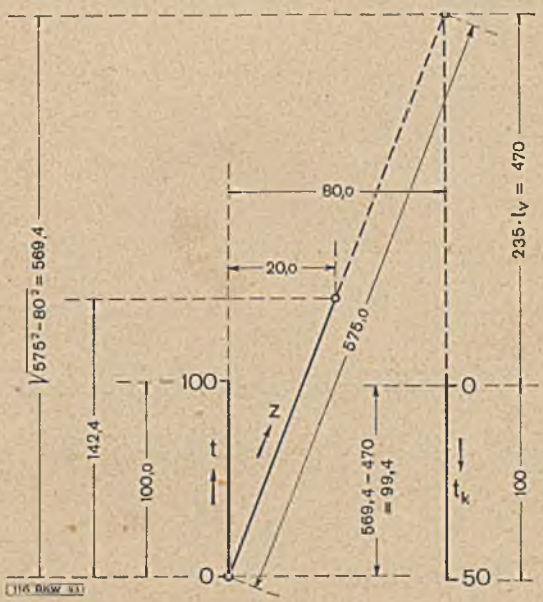


Bild 43. Bestimmungsstücke für die Tafel nach Bild 44

gezeichnet. Bild 43 erläutert das Verfahren, nach dem die Lage der Leiter $v = 235 + t_k$ ermittelt wird, ohne den Schnittpunkt dieser Leiter mit der Leiter für z auftragen zu müssen. Der Abstand der parallelen Leitern ist zu 80 mm gewählt.

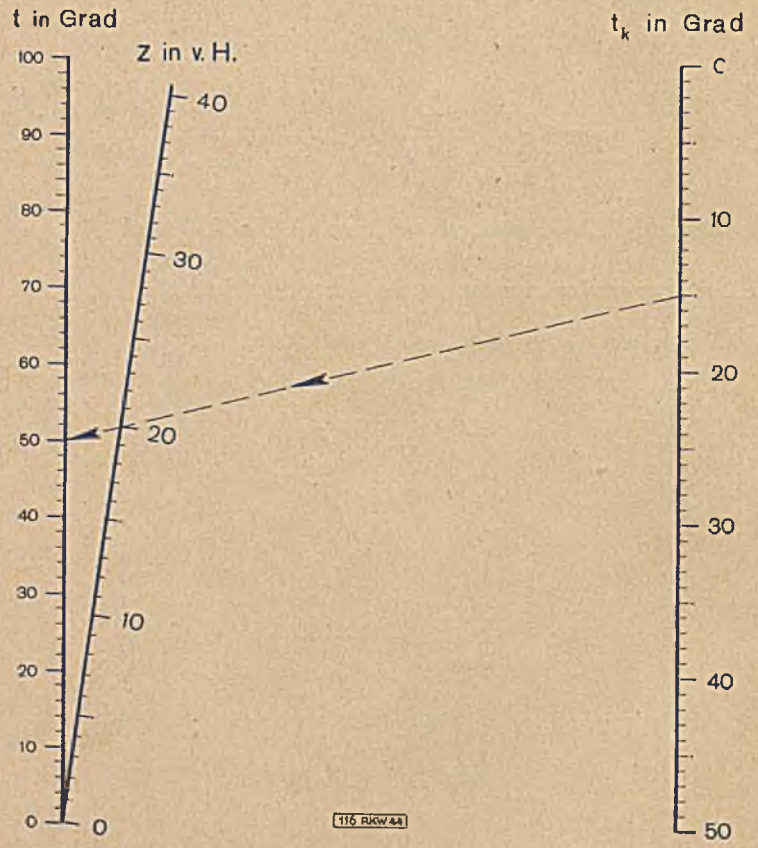


Bild 44. Leitertafel für die Bestimmung der Temperaturerhöhung von Kupferwicklungen

Die fertige Tafel ist in Bild 44 dargestellt. Die Gleichung der z-Leiter lautet

$$c = 575 \cdot \frac{z}{200 + z}.$$

Als Ablesebeispiel ist eingetragen

$$t_k = 15 \text{ Grad}; \quad z = 20 \text{ v.H.}; \quad t = 50 \text{ Grad}.$$

3. Der allgemeinere Fall

Die bisher betrachtete zweite Grundform entspricht dem speziellen Fall, daß zwei der drei Geraden sich im unendlich fernen Punkte schneiden. Es ist grundsätzlich möglich, den allgemeineren Fall, bei dem die drei Schnittpunkte der drei Geraden alle im Endlichen liegen, elementar mit Hilfe von Sätzen über das Vierseit zu behandeln. Wir verzichten darauf, weil hier die später behandelte projektive Verzerrung den bequemsten Zugang zu dem Problem darstellt (F II). Die Bedeutung der allgemeineren zweiten Grundform ist geringer als die Bedeutung der speziellen zweiten und der allgemeineren und speziellen ersten Grundform.

V. Die Koordinatenmethode

1. Die allgemeine Bedingung für Fluchtrichtigkeit

Bisher haben wir geradlinige Träger angenommen und zum Auffinden der einer besonderen Anordnung eigenen Schlüsselgleichung eine Beziehung zwischen den Trägerlängen aufgestellt. In allgemeineren Fällen, besonders aber bei krummlinigen Trägern, empfiehlt sich ein anderer Weg.

Das Kennzeichen der besprochenen Leitertafeln war die Verwendung einer Geraden als Ablesemittel. Drei Punkte u, v, w auf den drei Leitern gehörten zusammen, wenn sie auf einer Geraden lagen. Wir wollen daher die Bedingung dafür, daß drei Punkte auf einer Geraden liegen, ableiten. Wir betrachten ein rechtwinkliges Koordinatensystem x, y, in dem die drei Träger eingezeichnet seien. Eine Gerade schneidet die drei Träger in den Punkten (x_1, y_1), (x_2, y_2) und (x_3, y_3) (Bild 45). Aus der Ähnlichkeit der beiden Dreiecke $P_1 A P_2$ und $P_1 B P_3$ ergibt sich sofort

$$\frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1}. \qquad (22)$$

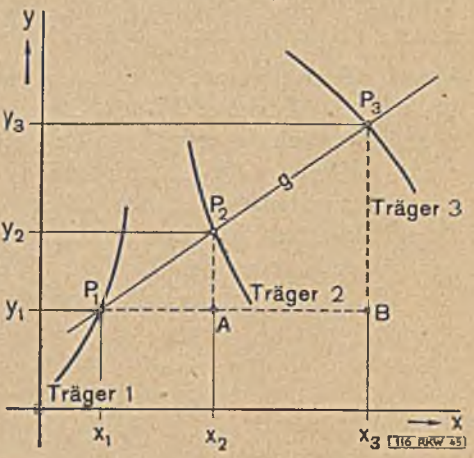


Bild 45. Koordinatenmethode bei Leitertafeln

Daraus ergibt sich durch Umrechnung z. B.

$$y_1(x_2 - x_3) + y_2(x_3 - x_1) + y_3(x_1 - x_2) = 0. \tag{23}$$

Das ist eine Form der allgemeinen Schlüsselgleichung für Leitertafeln. Aus ihr gewinnt man die darzustellende Formel, indem man für die drei Träger ihre Parameterdarstellungen

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(t); \quad x_1 = g_1(t) \\ y_2 &= f_2(r); \quad x_2 = g_2(r) \\ y_3 &= f_3(s); \quad x_3 = g_3(s) \end{aligned} \tag{24}$$

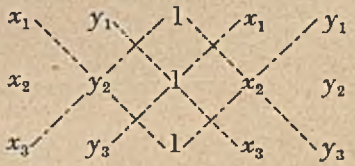
einsetzt. Im allgemeinsten Fall ist also eine Leitertafel mit drei krummlinigen Trägern das geometrische Abbild der Verknüpfung von sechs verschiedenen Funktionen mit insgesamt drei Veränderlichen r, s, t.

Mit Rücksicht auf viele Veröffentlichungen im Schrifttum wollen wir uns noch kurz mit einer Darstellungsart der Schlüsselgleichung befassen, die man vielfach angewendet findet. Ohne Kenntnis dieser Darstellungsart bereitet das Studium der Arbeiten zu große Schwierigkeiten. Die Schlüsselgleichung (23) schreibt man auch in der Form

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{23a}$$

Das in Strichen stehende Gebilde nennt man eine Determinante. Die Gleichung ist, wenigstens wollen wir es hier so deuten, nur eine andere einfachere Schreibweise für die Schlüsselgleichung (23).

Von der Determinante (23a) kommt man zur ursprünglich bekannten Form in der folgenden Weise. Man schreibt die zwei ersten Spalten noch einmal dahinter und multipliziert dann die auf von links nach rechts fallenden 45°-Linien stehenden Elemente, sofern auf diesen Linien drei Elemente stehen. Die drei Produkte summiert man. Sodann bildet man die drei Produkte von Gliedern, die auf von links nach rechts steigenden 45°-Linien liegen. Diese drei Produkte zieht man ab. Das Ergebnis setzt man gleich 0.



Man erhält also

$$x_1 \cdot y_2 \cdot 1 + y_1 \cdot 1 \cdot x_3 + 1 \cdot x_2 \cdot y_3$$
$$- x_3 \cdot y_2 \cdot 1 - y_3 \cdot 1 \cdot x_1 - 1 \cdot x_2 \cdot y_1 = 0.$$

Läßt man die Faktoren 1 aus und ordnet nach den Werten y, so erhält man die Schlüsselgleichung (23).

2. Die geradlinige Leitertafel der ersten Grundform

Die Koordinatenmethode gestattet es uns leicht, eine einfache Ableitung für geradlinige Leitertafeln der ersten Grundform zu geben, die wir schon unter B III, 6 in Aussicht gestellt haben. Wir beschränken uns nur auf die erste Grundform, grundsätzlich kann aber auch die allgemeinere zweite Grundform so behandelt werden.

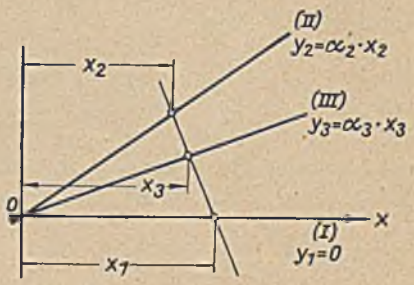


Bild 45a. Die allgemeinere erste Grundform

Es ist zweckmäßig, den gemeinsamen Punkt der drei Träger in den Ursprung des Koordinatensystems zu legen. Die erste Trägergerade lassen wir mit der x-Achse zusammenfallen (Bild 45a).

Also gilt $$y_1 = 0. \qquad (24\,a,\,1)$$

Die beiden anderen Träger haben dann die Gleichungen

$$y_2 = \alpha_2 \cdot x_2; \quad y_3 = \alpha_3 \cdot x_3. \qquad (24\,a,\,2)$$

Setzt man dies in die Schlüsselgleichung (23) für Leitertafeln ein, so erhält man nach einigen Umformungen und Division durch $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$

$$\frac{\alpha_2 - \alpha_3}{x_1} + \frac{\alpha_3}{x_2} = \frac{\alpha_2}{x_3}. \qquad (24\,b)$$

Setzt man hierin

$$x_1 = l_1 \cdot f_1(u) \qquad x_2 = l_2 \cdot f_2(v) \qquad x_3 = l_3 \cdot f_3(w), \qquad (24\,c)$$

so erhält man $$\frac{\alpha_2 - \alpha_3}{l_1 \cdot f_1(u)} + \frac{\alpha_3}{l_2 \cdot f_2(v)} = \frac{\alpha_2}{l_3 \cdot f_3(w)}. \qquad (24\,d)$$

Diese allgemeinere erste Grundform ist zweckmäßig, wenn die Summe der reziproken Beträge gebildet werden soll, weil sich dabei gleich-

förmige Leitern ergeben. Das kommt in der Optik und in der Elektrotechnik oft vor. Der Kombinationswiderstand R zweier paralleler Widerstände R_1 und R_2 errechnet sich z. B. zu

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}. \tag{24e}$$

Es ist also zur Angleichung zu setzen:

$$\begin{aligned} f_1(u) &= R_1; \quad f_2(v) = R_2; \quad f_3(w) = R; \\ l_1 &= \alpha_2 - \alpha_3; \quad l_2 = \alpha_3; \quad l_3 = \alpha_2. \end{aligned} \tag{24f}$$

Für $\alpha_2 = 0{,}60; \quad \alpha_3 = 0{,}30$

und die Bereiche $R_1 = 0...250$

$R_2 = 0...200$

ist die Tafel in Bild 45b dargestellt.

Die gleiche Tafel kann auch zur Berechnung der Brennweiten von Linsen aus Bild- und Gegenstandsweiten dienen.

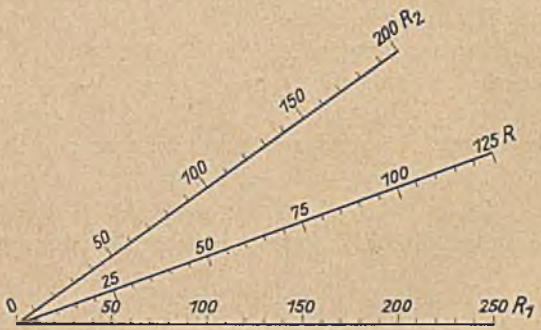


Bild 45b. Leitertafel für $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

3. Die krummlinige Leitertafel

Zur Erläuterung und ersten Anleitung für die Anfertigung krummliniger Leitertafeln sollen zwei Beispiele behandelt werden:

a) Leitertafel mit zwei parallelen Leitern und einer krummlinigen Leiter

In Bild 46 ist der vorliegende Fall der Trägeranordnung dargestellt.

Die eine geradlinige Leiter ist mit der y-Achse zur Deckung gebracht, während die zweite geradlinige Leiter parallel zur y-Achse im Abstand

$x = 1$ verläuft. Die krummlinige Leiter liegt zwischen $x = 0$ und $x = 1$. (Das ist aber nicht erforderlich!)

Die Schlüsselgleichung vereinfacht sich wegen $x_1 = 0$; $x_3 = 1$ zu

$$y_1(x_2 - 1) + y_2 - y_3 \cdot x_2 = 0. \tag{25}$$

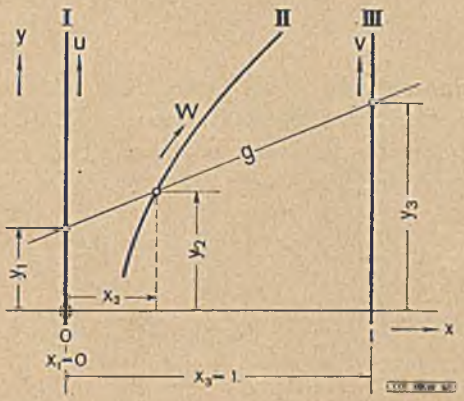


Bild 46. Leitertafel mit einer krummlinigen Leiter

Wir formen die Schlüsselgleichung um und erhalten

$$y_1(u) = \frac{-y_3(v) + \dfrac{y_2(w)}{x_2(w)}}{\dfrac{1}{x_2(w)} - 1}. \tag{25 a}$$

Darin sind u, w und v die Veränderlichen auf den Leitern I, II und III.

Es soll als Anwendung die Darstellung der Formel

$$\operatorname{tg} \gamma_0 = \frac{\mu}{\sin \varphi + \mu \cdot \cos \varphi} \tag{26}$$

für die Bereiche $\mu = 0{,}10 \ldots 0{,}50$

$\gamma_0 = 10^0 \ldots 25^0$

$\varphi = 10^0 \ldots 60^0$

versucht werden.

Die Tafel ist von W. Fehn angegeben worden. Man vergleiche AWF-Mitt. 1937, Heft 1, S. 13...14.

Bei der gegebenen Formel ist eine Beziehung zur Schlüsselgleichung (25 a) nicht erkennbar. Wir formen daher die gegebene Beziehung um und erhalten

$$\frac{1}{\mu} = \frac{\operatorname{ctg}\gamma_0 - \cos\varphi}{\sin\varphi}. \qquad (26\,a)$$

Versuchen wir nunmehr die Angleichung, so ergibt eine Aufzeichnung der Tafel ungünstige Schnittverhältnisse der Kurve $(y_2; x_2)$ mit der Ableselinie. Wir formen daher die Beziehung durch Einführung von Beiwerten l und m nochmals um:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{[l \cdot \operatorname{ctg}\gamma_0 + m] + [l \cdot (-\cos\varphi) - m]}{l \cdot \sin\varphi}. \qquad (26b)$$

Auf Grund mehrerer Versuche wählen wir

$$l = 2; \quad m = -14.$$

Nunmehr liefert die Angleichung

$$y_1 = \frac{1}{\mu} \qquad x_1 = 0$$

$$y_3 = -2 \cdot \operatorname{ctg}\gamma_0 + 14 \qquad x_3 = 1$$

$$+\frac{y_2}{x_2} = 14 - 2 \cdot \cos\varphi \qquad \frac{1}{x_2} - 1 = 2 \cdot \sin\varphi$$

oder $$y_2 = \frac{14 - 2 \cdot \cos\varphi}{1 + 2 \cdot \sin\varphi} \qquad x_2 = \frac{1}{1 + 2 \cdot \sin\varphi}.$$

Es werden also dargestellt

auf Leiter I μ

„ „ II φ

„ „ III γ_0.

Die Zeicheneinheit für alle x-Werte sei 8 cm. Die parallelen Leitern haben also den Abstand $L = 8$ cm.

Die Zeicheneinheit für alle y-Werte wählen wir zu 1 cm. Wir erhalten dann die Leitertafel Bild 47.

Als Ablesebeispiel ist eingetragen

$$\mu = 0{,}178; \quad \varphi = 25^0; \quad \gamma^0 \approx 17^0.$$

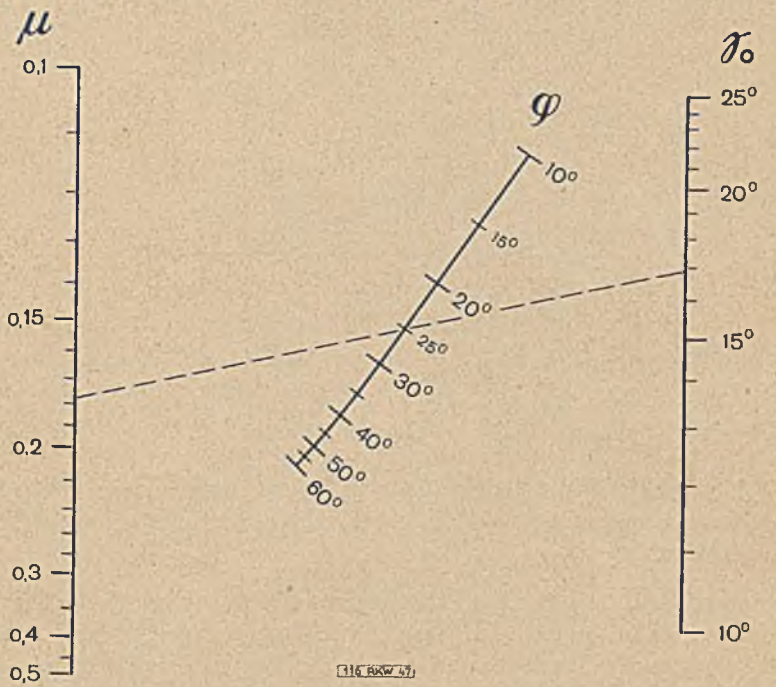


Bild 47. Leitertafel für Formel (26)

b) Leitertafel mit einem Kreisträger und zwei rechtwinkligen geradlinigen Trägern

Unter den krummlinigen Trägern verdient der Kreis wegen seiner leichten Herstellbarkeit eine besondere Beachtung. Wir betrachten als Beispiel eine Leitertafel für die Lösung der quadratischen Gleichung

$$w^2 + u \cdot w + v = 0. \tag{27}$$

Die Tafel besteht aus zwei sich rechtwinklig schneidenden Trägergeraden und einem den einen Träger im Nullpunkt berührenden

Kreisträger von Radius $\frac{1}{2}$ nach Bild 48. Die geradlinigen Träger sind in die Achsen gelegt.

Es ist $$x_1 = 0; \quad y_2 = 0.$$

Damit lautet die Schlüsselgleichung bei allgemeinem krummlinigem Träger

$$y_1 \cdot (x_2 - x_3) - y_3 \cdot x_2 = 0.$$

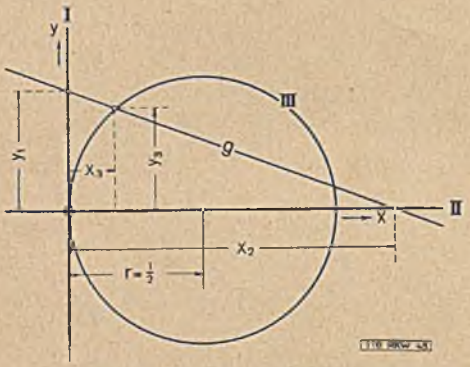


Bild 48. Leitertafel mit Kreisträger

Die Schwierigkeit besteht nunmehr in der geeigneten Umformung der gegebenen Gleichung, so daß sie an die Schlüsselgleichung angeglichen werden kann.

Wir verzichten auf eine Durchführung der Rechnung, die sich mit Hilfe der später zu besprechenden projektiven Verzerrungen (siehe F I) wesentlich vereinfachen läßt, und geben das Ergebnis der Rechnung an.

Wir haben in einem bestimmten Zeichenmaßstab aufzutragen:

1. auf der y-Achse $$b = -\frac{1}{m \cdot u},$$

2. auf der x-Achse $$a = \frac{1}{1 - m^2 v}, \tag{28}$$

3. die krummlinige Leiter

$$x_3 = \frac{1}{1 + m^2 w^2}; \qquad y_3 = \frac{m \cdot w}{1 + m^2 w^2}.$$

Der hier eingeführte willkürliche Zahlenwert m gestattet es, bevorzugte Teilbereiche auf einer der Leitern besonders günstig zu orientieren. Man nennt m einen freien Parameter.

Die krummlinige Leiter für w wird nun gerade der früher angedeutete Kreisträger; denn

$$x_3^2 + y_3^2 = \frac{1 + m^2 w^2}{(1 + m^2 w^2)^2} = \frac{1}{1 + m^2 w^2} = x_3.$$

Das ist aber die Gleichung des Kreises mit dem Radius $r = \frac{1}{2}$, der die y-Achse im Nullpunkt berührt.

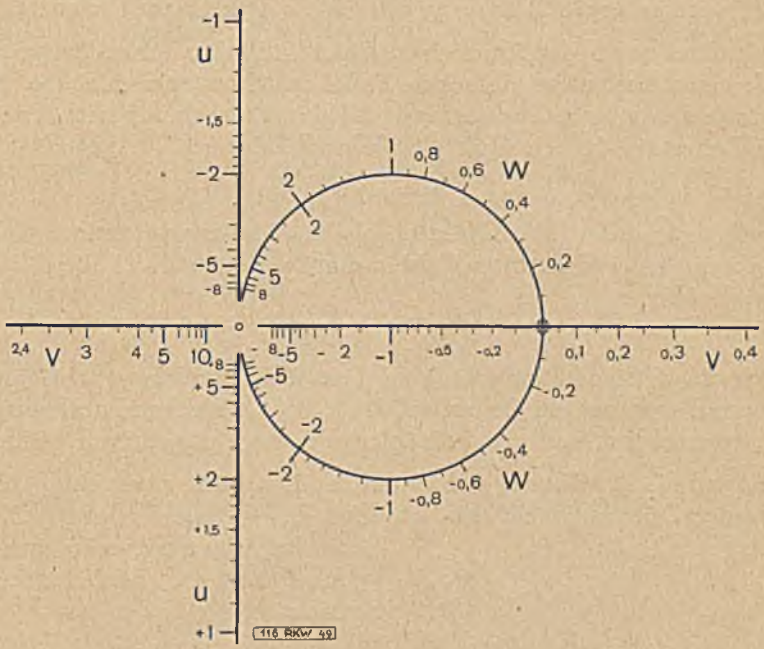


Bild 49. Rechentafel für $w^2 + u \cdot w + v = 0$

Für die Darstellung der Rechentafel ist in Bild 49 $m = 1$ gewählt. Die Zeicheneinheit für die Darstellung ist $l = 40$ mm.

Es kann nicht verhehlt werden, daß die Angleichung der gegebenen Formel an die Schlüsselgleichung eine erhebliche Rechenarbeit erfordert und darüber hinaus mehr oder weniger zufällig ist. Einen Weg zum systematischen Auffinden der Tafelform mit Kreisträger werden wir in Abschnitt F I angeben, müssen aber mit Rücksicht auf den Zweck der vorliegenden Schrift den Leser bezüglich Einzelheiten auf die Literatur verweisen (z. B. Schwerdt, Lehrbuch der Nomographie).

VI. Die Methode der freien Parameter

Im vorigen Abschnitt haben wir willkürliche Beiwerte m und l in die gegebenen Formeln eingeführt, die es uns bei geeigneter Wahl ermöglichten, eine den vorgeschriebenen Bereichen oder der vorgeschriebenen Genauigkeit angepaßte, günstige Tafelform zu finden. Wir wollen solche Beiwerte, die willkürlich in die Rechnung eingeführt werden, freie Beiwerte oder freie Parameter nennen.

Wir wollen außer den im vorigen Abschnitt behandelten Beispielen noch einen besonders einfachen Fall betrachten, bei dem die Bedeutung dieser freien Parameter deutlich in Erscheinung tritt. Es soll eine Leitertafel für die Multiplikationsaufgabe

$$w = u \cdot v \tag{7}$$

angefertigt werden. Die Funktion bleibt offenbar ungeändert, wenn man u mit einer konstanten Zahl m multipliziert, v durch die gleiche Zahl dividiert:

$$w = (m \cdot u) \cdot \left(\frac{v}{m}\right).$$

Benutzen wir für die Darstellung eine Leitertafel von der zweiten Grundform und stellen w auf der linken, $m \cdot u$ auf der rechten Parallelleiter dar, so erscheint v auf der Schrägleiter in einer projektiven Teilung.

Während die Einführung von m auf der Leiter für u nur eine Änderung der Zeicheneinheit bewirkt, wird das Gefüge der projektiven Leiter bei Änderung von m grundlegend geändert. Nach unseren Formeln wird

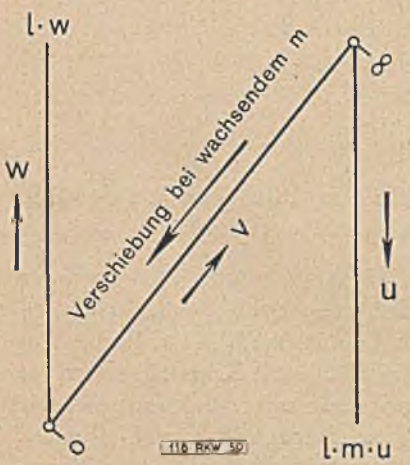


Bild 50. Einfluß des freien Parameters auf das Tafelgefüge

$$c = L \cdot \frac{\frac{v}{m}}{1 + \frac{v}{m}}.$$

Für wachsende m wandern daher alle Teilpunkte der v-Leiter nach $v = 0$ hin und von $v = \infty$ weg. Umgekehrt ergibt abnehmendes m eine Verschiebung der Teilstriche auf der v-Leiter nach $v = \infty$ hin und von $v = 0$ weg (Bild 50). Während die Endpunkte der Leiter $c = 0$ $(v = 0)$ und $c = L$ $(v = \infty)$

also fest bleiben, kann der im speziellen Fall interessierende Bereich in eine günstige Lage gebracht werden.

Die darzustellende Gleichung gestattet aber noch die Einführung eines weiteren freien Parameters erheblich größerer Bedeutung. Statt

$$w = u \cdot v \tag{7}$$

kann man nämlich auch schreiben

$$w^n = u^n \cdot v^n, \tag{7'}$$

wo n eine beliebige ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahl sein kann. Durch geeignete Wahl dieses „freien Parameters" n können bestimmte Teilbereiche auf der v-Leiter und auf den anderen Leitern besonders hervorgehoben werden.

Bild 51 zeigt eine Leitertafel der zweiten Grundform für die Bereiche

$$w = 0...10$$

$$u = 0...10$$

$$v = 0...(\infty)$$

für drei verschiedene Werte des „freien Parameters" n

$$n = 1; \quad n = 2; \quad n = 3.$$

Der Punkt $v = 1$ bleibt fest; die Teilstriche wandern für wachsendes n nach links und rechts fort. Der Bereich um 1 erfährt also eine bevorzugte Darstellung.

Die Bedeutung der „freien Parameter" geht weit über die im vorstehenden wiedergegebenen Beispiele hinaus. Wie man sie verwenden kann, um zu rechentechnisch leichter auszuwertenden Formeln zu kommen, haben zuerst O. Amsel und H. Seelos gezeigt. Wir benutzen zur Ableitung den vom Verfasser dieses Buches vorgeschlagenen Weg. Die Formel

$$W_p = \frac{1}{\frac{1}{m} - 0{,}194} \cdot \left(0{,}0992 + \frac{1}{m} \cdot W_{50°}\right)$$

eignet sich schlecht zur Darstellung in einer Leitertafel, weil m an

zwei verschiedenen Stellen vorkommt. Man fügt nun einen zunächst willkürlichen Parameter c zu $W_{50°}$ hinzu und erhält

$$W_p = \frac{\frac{1}{m}}{\frac{1}{m} - 0{,}194} (W_{50°} + c) - c \cdot \frac{\frac{1}{m} - \frac{0{,}0992}{c}}{\frac{1}{m} - 0{,}194}.$$

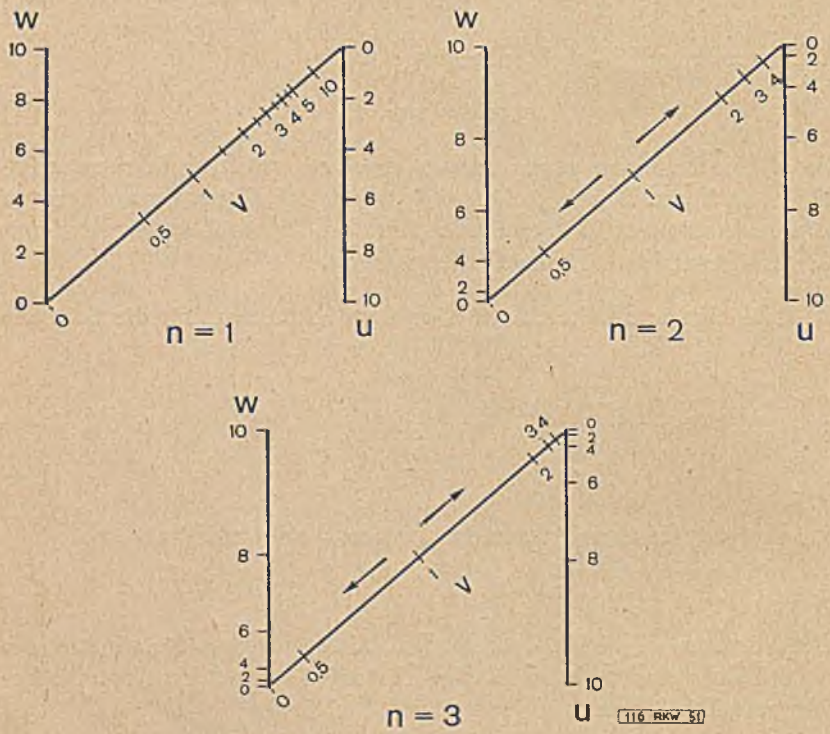


Bild 51. Verschiedene Darstellungen für $w = u \cdot v$

c wird nun so bestimmt, daß der letzte Bruch gerade 1 wird; das wird erreicht für $c = 0{,}5113$. Damit erhält man

$$W_p + 0{,}5113 = \frac{\frac{1}{m}}{\frac{1}{m} - 0{,}194} \cdot (W_{50°} + 0{,}5113).$$

Diese Formel gestattet eine einfache nomographische Darstellung in einer Leitertafel der ersten Grundform oder in einem Sonderrechenstab (siehe Abschnitt E III).

C. Netztafeln

Den im vorigen Abschnitt besprochenen Leitertafeln ist die Verwendung von Funktionsleitern zur Speicherung der Veränderlichen eigentümlich. Wir betrachten nun Rechentafeln, bei denen die Speicherung der Veränderlichen in Funktionsscharen erfolgt. Mit Funktionsscharen haben wir uns im Abschnitt A III eingehend befaßt.

I. Das Schaubild

Auch hier beginnen wir zunächst mit dem einfachen Fall von zwei Funktionsscharen. Diese werden übereinandergelegt und bilden dann ein Netz. Die Verknüpfung der beiden Veränderlichen erfolgt durch Einzeichnung irgendeiner Kurve. Es gehören dann Werte zueinander, deren zugehörige Scharkurven sich auf der gewählten Kurve schneiden. Das Ergebnis ist ein im allgemeinen krummliniges Schaubild. Die in Abschnitt A III betrachteten Netze sind zwei Funktionsscharen dieser Art, die so gewählt sind, daß für gewisse Funktionen die verknüpfende Kurve eine Gerade wird.

II. Netztafeln im engeren Sinne

Wir betrachten nunmehr solche Gebilde, die aus drei Funktionsscharen bestehen. Eine Zeichnung, die aus drei sich in beliebiger Weise überdeckenden Funktionsscharen besteht, wollen wir eine Netztafel im engeren Sinne nennen. Drei Zahlenwerte u, v, w der Veränderlichen sollen zusammengehören, wenn die diese Zahlenwerte darstellenden Kurven der drei Funktionsscharen durch einen Punkt gehen.

Besonders einfache Netztafeln erhält man, wenn die Funktionsscharen aus geraden Linien bestehen. Die „Ablesevorschrift" in solchen Tafeln lautet dann: „Drei Zahlenwerte u, v und w gehören zusammen, wenn ihre Bildgeraden durch einen Punkt gehen." Wir gehen so vor, daß wir zunächst einige einfache Grundformen von geradlinigen Netztafeln betrachten und ihre Schlüsselgleichungen bestimmen. Dem Leser wird zur Erleichterung des Verständnisses des Abschnittes F II

empfohlen, sich die weitgehende formale Analogie zwischen den Grundformen der Netztafeln und den Grundformen der Leitertafeln vor Augen zu führen.

III. Die erste Grundform; Parallelschartafeln

Die Netztafeln der ersten Grundform bestehen aus drei Parallelfunktionsscharen, von denen sich zwei unter rechtem Winkel schneiden. Je nach der Lage der dritten Parallelfunktionsschar unterscheiden wir in Übereinstimmung mit den Leitertafeln der ersten Grundform den symmetrischen und den unsymmetrischen Fall.

Wir wollen auch hier zur Herstellung einer vollkommenen Analogie zu dem Abschnitt B, Leitertafeln, eine andere Ausdrucksweise für das Parallellaufen der Netzgeraden einführen. Wir sagen, die Geraden jeder Funktionsschar gehen durch einen (unendlich fernen) Punkt. Es ist ja bekannt, daß man von zwei parallelen Geraden sagt, sie schneiden sich in einem unendlich fernen Punkte.

1. Der symmetrische Fall

Bild 52 zeigt die Anordnung der Funktionsscharen durch Wiedergabe je zweier Bildgeraden, und zwar der Anfangsgeraden, von denen aus

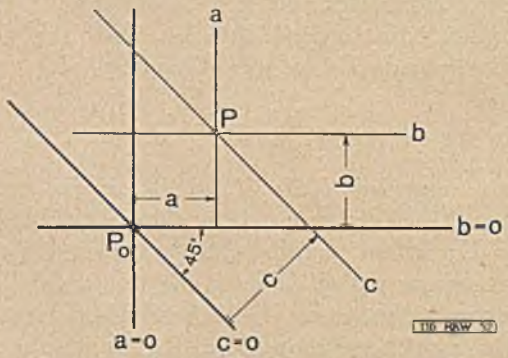


Bild 52. Aufbau von Netztafeln der ersten Grundform

die Messung erfolgt und je einer Bildgeraden durch den Punkt P. Die Anfangsgeraden gehen durch den Anfangspunkt P_0.

Die dritte Parallelschar verläuft unter 45° zur Waagerechten. Zwischen den Strecken a, b und c gilt dann die Beziehung

$$a + b = c \cdot \sqrt{2}. \tag{29}$$

Diese Gleichung wollen wir die Schlüsselgleichung der symmetrischen ersten Grundform der Netztafeln nennen. Sie unterscheidet sich von der Schlüsselgleichung der ersten symmetrischen Grundform der Leitertafeln nur durch die bei c stehende Konstante. Diese lautet hier $\sqrt{2}$, früher dagegen 2 (s. Formel 4).

Wegen der Form der Schlüsselgleichung wollen wir von einer Summenform sprechen. Eine Angleichung an die Aufgabe

$$f(u) + g(v) = h(w) \tag{6}$$

ist leicht zu bewerkstelligen. Wir setzen

$$a = l \cdot f(u)$$
$$b = l \cdot g(v)$$
$$c = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot l \cdot h(w).$$

Die Netztafel besteht dann

1. aus einer senkrechten Funktionsschar der Funktion $f(u)$ mit der Zeicheneinheit l,
2. aus einer waagerechten Funktionsschar der Funktion $g(v)$ mit der Zeicheneinheit l,
3. aus einer unter 45° verlaufenden Funktionsschar der Funktion $h(w)$ mit der Zeicheneinheit $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot l$.

Die dritte Schar kann aus einer unter 45° verlaufenden durch P_0 gehenden Funktionsleiter

$$c = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot l \cdot h(w)$$

entwickelt werden. Man kann sie aber auch aus der durch P_0 gehenden waagerecht verlaufenden Funktionsleiter

$$c' = l \cdot h(w)$$

ableiten, wenn man durch die Teilpunkte dieser Leiter die Schargeraden nicht senkrecht zum Träger, sondern unter 45° zum Träger zeichnet (Bild 53).

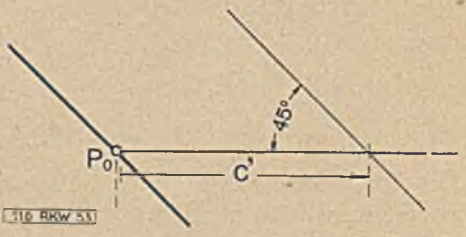


Bild 53.
Entwurf der Parallelschar $c' = l \cdot h(w)$

2. Anwendungen

Bild 54 zeigt eine so entstandene Netztafel zur Addition. Als Zeicheneinheit ist $l = 1$ mm gewählt. Die Tafel besteht also aus einem sogenannten gleichförmigen Netz mit einer Parallelgeradenschar für die

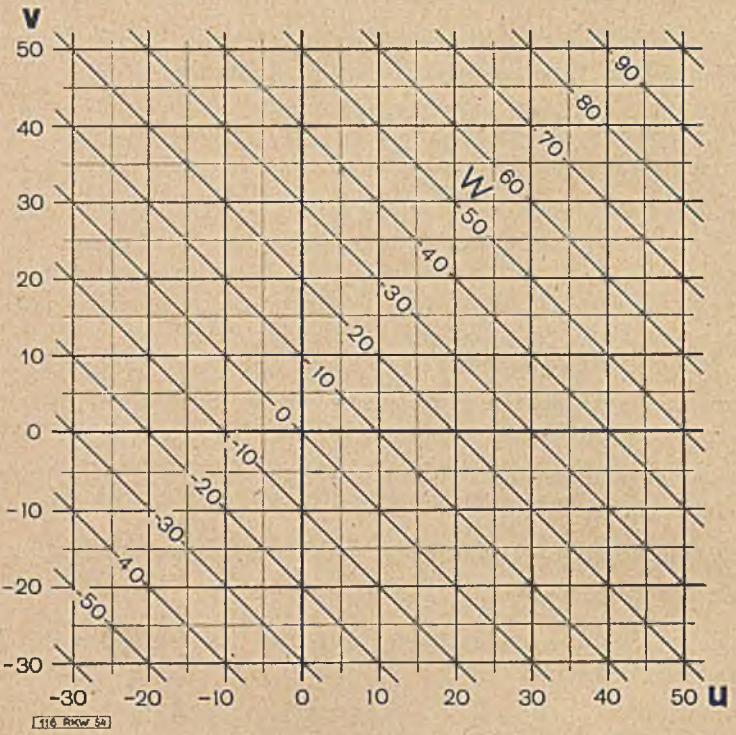


Bild 54. Netztafel für $w = u + v$

dritte Veränderliche. Es ist üblich, solche Tafeln Parallelschartafeln zu nennen.

$$w = u + v$$
$$u = -30 \ldots + 50$$
$$v = -30 \ldots + 50$$
$$(w = -60 \ldots + 100).$$

Die Tafel kann unter Verwendung von gewöhnlichem Millimeterpapier entworfen werden.

Eine Tafel zur Addition ist natürlich auch zur Subtraktion zu verwenden. Man hat hierzu nur den Schnittpunkt der w-Linie mit der u-Linie

zu suchen und auf der v-Linie durch den gleichen Punkt den Wert von v abzulesen. Dann ist

$$v = w - u.$$

Kehrt man in der waagerechten v-Schar die positive Fortschreitrichtung um, so erhält man eine Tafel, bei der die Rechenlinien „w“

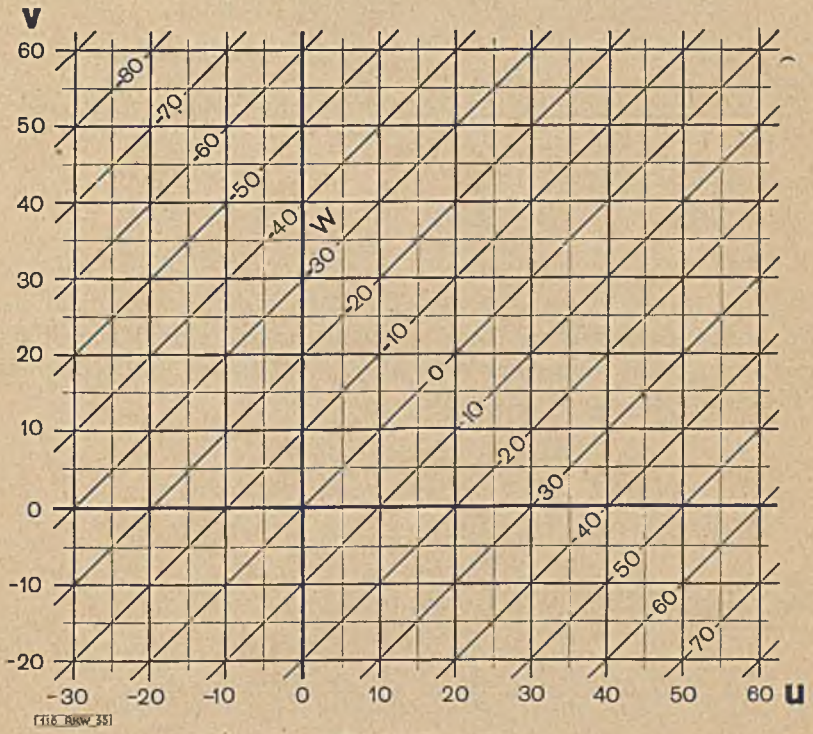


Bild 55. Netztafel für $w = u - v$

von links nach rechts unter 45 Grad ansteigen. Eine solche Tafel kann zur Ausführung von Subtraktionsaufgaben zweckmäßiger sein. Hat man z. B. zu rechnen

$$w = u - v,$$

so schreibt man

$$w = u + (-v).$$

Man kehrt auf den v-Linien also das Vorzeichen um und verwendet die Tafel mit ansteigenden w-Linien (Bild 55).

Die Bereiche sind

$$u = -30 \ldots + 60$$
$$v = -20 \ldots + 60$$
$$(w = -90 \ldots + 80).$$

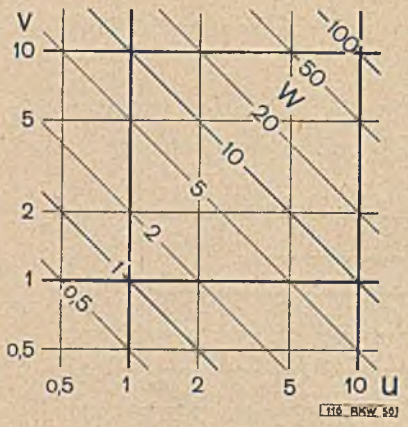


Bild 56. Netztafel für $w = u \cdot v$

Eine Netztafel zur Ausführung von Multiplikationen bzw. Divisionen erhalten wir, wenn wir

$$w = u \cdot v \qquad (7)$$

durch Logarithmieren in

$$\log w = \log u + \log v \qquad (7a)$$

umwandeln und wie folgt angleichen:

$$c' = l \cdot \log w$$

$$a = l \cdot \log u$$

$$b = l \cdot \log v.$$

Die Netztafel besteht dann aus einem doppeltlogarithmischen Funktionsnetz mit einer Parallelschar mit logarithmischem Gesetz. Bild 56 zeigt eine Multiplikationstafel dieser Art für die Bereiche

$$u = 0{,}5 \ \ldots \ 10$$

$$v = 0{,}5 \ \ldots \ 10$$

$$(w = 0{,}25 \ldots 100).$$

Die Zeicheneinheit ist zu $l = 30$ mm gewählt worden.

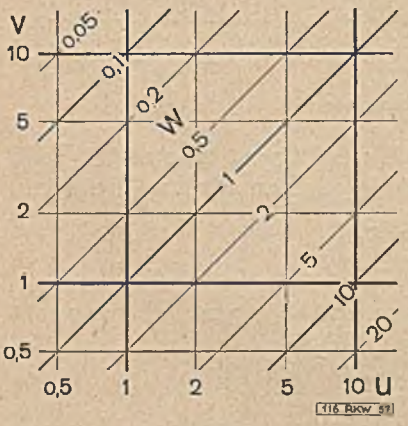


Bild 57. Netztafel für $w = \frac{u}{v}$

Man erhält hieraus eine Tafel für die Divisionsaufgabe

$$w = \frac{u}{v}$$

durch Umkehren der positiven Zählrichtung in der v-Schar und gleichzeitiger Änderung der logarithmischen Leiter für v (Bild 57).

Schließlich betrachten wir noch eine Netztafel für die Funktion

$$w = \sqrt{r^2 - v^2}. \qquad (30)$$

Quadrieren liefert

$$w^2 = r^2 - v^2. \qquad (30a)$$

Die Angleichung an die Schlüsselgleichung ergibt

$$c' = l \cdot w^2$$

$$a = l \cdot r^2$$

$$b = -l \cdot v^2.$$

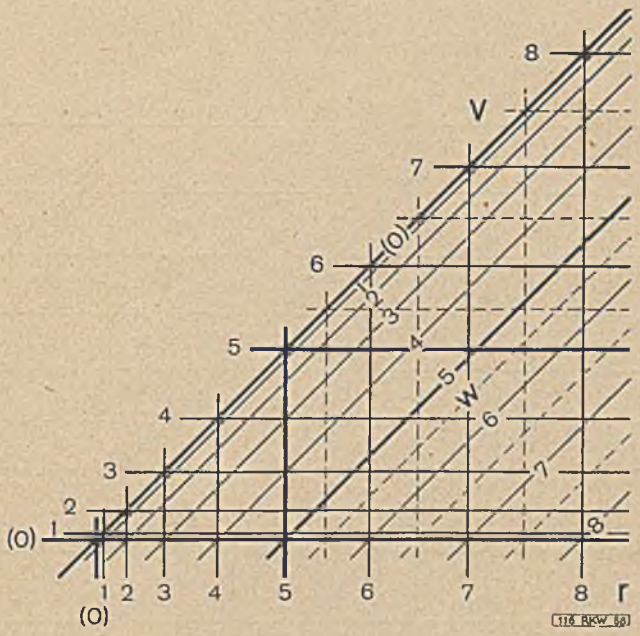


Bild 58. Netztafel für $w = \sqrt{r^2 - v^2}$

Mit $l = 1$ mm erhalten wir die Netztafel Bild 58 für die Bereiche

$$r = 0...8$$

$$v = 0...8$$

$$(w = 0...8).$$

Dabei ist die positive Richtung der v-Schar umgekehrt.

Die obere linke Ecke des Netzes kann unterdrückt werden, weil $r > v$ sein muß.

Eine andere Darstellung gewinnen wir durch eine andersartige Angleichung:

$$r^2 = w^2 + v^2 \tag{30b}$$

$$c' = l \cdot r^2$$

$$a = l \cdot w^2$$

$$b = l \cdot v^2.$$

Bild 59 zeigt das Ergebnis.

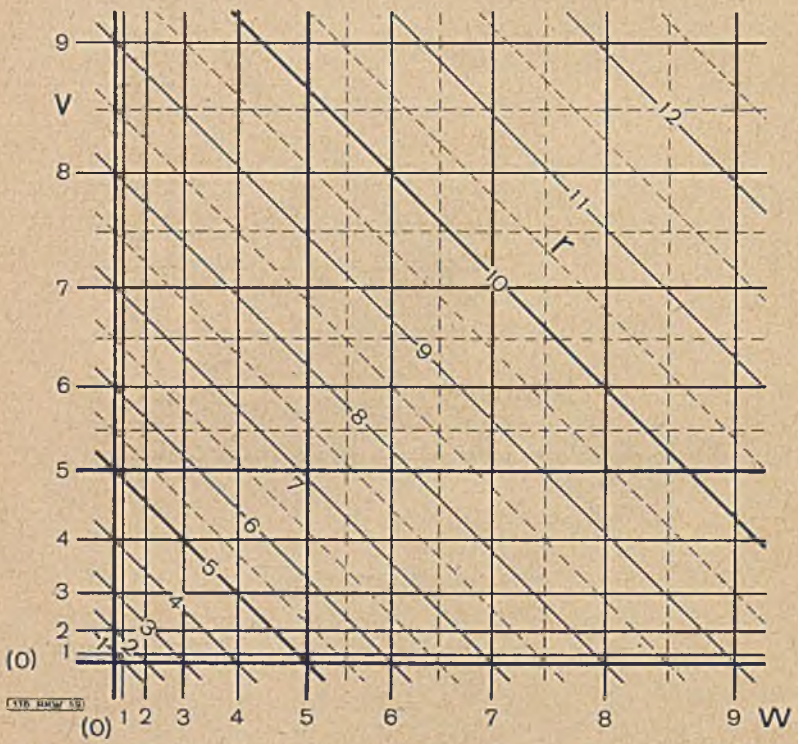


Bild 59. Netztafel für $w = \sqrt{r^2 - v^2}$

3. Der unsymmetrische Fall

Beim unsymmetrischen Fall der ersten Grundform wird auf die spezielle Lage der dritten Parallelschar verzichtet. Die Geraden dieser Schar schließen einen von 45 Grad verschiedenen Winkel α zwischen sich und der waagerechten x-Achse ein. Siehe Bild 60.

Nach der Abbildung gilt

$$\sin \alpha = \frac{c}{a + b \cdot \operatorname{ctg} \alpha}$$

oder

$$c = a \cdot \sin \alpha + b \cdot \cos \alpha. \tag{31}$$

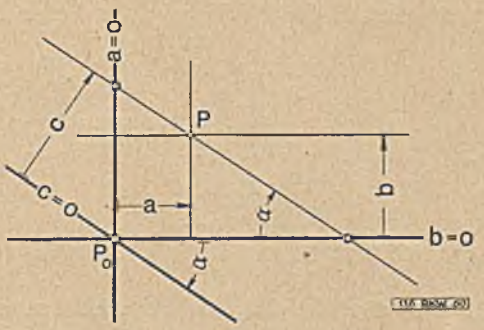


Bild 60. Aufbau von Netztafeln der ersten Grundform; unsymmetrischer Fall

Da es sich wieder um einen Summentyp handelt, suchen wir eine Angleichung an

$$f(w) = g(u) + h(v).$$

Wir setzen

$$c = A \cdot f(w)$$

$$a = \frac{A}{\sin \alpha} \cdot g(u)$$

$$b = \frac{A}{\cos \alpha} \cdot h(v).$$

Die Zeicheneinheiten für die u- bzw. v-Schar sind also

$$l_u = \frac{A}{\sin \alpha}$$

$$l_v = \frac{A}{\cos \alpha}.$$

Die Division dieser beiden Gleichungen ergibt

$$\frac{l_u}{l_v} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha.$$

Zwischen den Zeicheneinheiten auf den beiden Achsen besteht also eine durch den Winkel der dritten Parallelschar festgelegte Beziehung. Weiterhin ist

$$l_w = A = l_u \cdot \sin \alpha = l_v \cdot \cos \alpha.$$

Die Zeicheneinheit der w-Parallelschar ist also gleichfalls festgelegt.

Wird entsprechend Bild 53 die dritte Schar nicht durch eine zu ihr senkrechte, sondern durch eine zur x-Achse parallele Funktionsleiter festgelegt, so gilt für die Zeicheneinheit dieser Leiter

$$l'_w = \frac{l_w}{\sin \alpha} = l_u .$$

Benutzt man zur Abtragung der w-Funktionsleiter dagegen die y-Achse, so wird

$$l''_w = \frac{l_w}{\cos \alpha} = l_v .$$

4. Anwendungen

Die unsymmetrische Netztafel der ersten Grundform wird mit Vorteil verwendet, wenn die Bereiche der Veränderlichen u und v sehr verschieden voneinander sind oder wenn aus bestimmten Gründen die Maßstäbe auf den zwei Achsen verschieden sein müssen. Von besonderer Bedeutung ist die Möglichkeit der ungleichen Maßstäbe, wenn mit fertigen vorgedruckten Funktionsnetzen gearbeitet werden soll.

Bild 61 zeigt eine auf dem doppeltlogarithmischen Funktionsnetz aufgebaute Netztafel für die Funktion

$$w = v \cdot \sqrt{u} . \tag{32}$$

Wir logarithmieren:

$$\log w = \frac{1}{2} \log u + \log v. \tag{32a}$$

Die Angleichung an

$$c = a \sin \alpha + b \cos \alpha$$

liefert

$$a = 2 \cdot l \cdot \left(\frac{1}{2} \log u\right) = l \cdot \log u$$

$$b = l \cdot \log v$$

($\log u$ und $\log v$ werden also in gleichen Zeicheneinheiten aufgetragen; fertiges Logarithmenpapier, z. B.: Schleicher und Schüll Nr. 365½)

und

$$\frac{l_u}{l_v} = \frac{2 \cdot l}{l} = 2 = \operatorname{ctg} \alpha$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}; \quad \alpha = 26^0\,33'.$$

Die Geraden der dritten Schar verlaufen also von links nach rechts fallend unter einem Winkel von $26^0\,33'$.

Es ist zweckmäßig, die Neigung der Geraden in der Netztafel nicht durch Eintragung des Winkels α, sondern durch die „Methode des

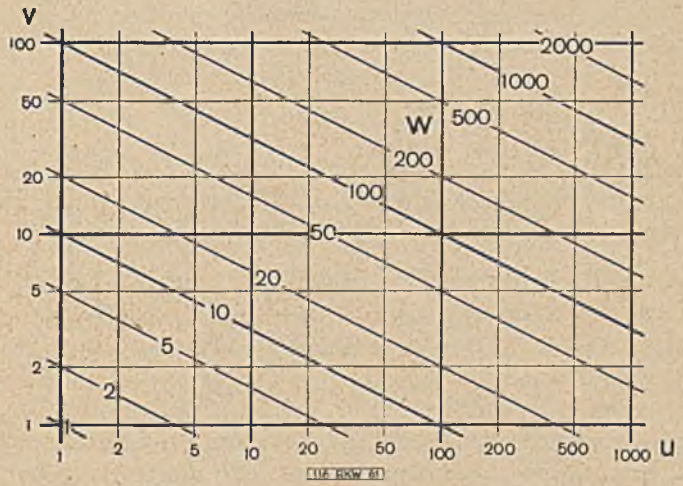


Bild 61. Netztafel für $w = v \cdot \sqrt{u}$

Beispiels“ zu bestimmen. Man bestimmt durch zwei Zahlenbeispiele von einer Geraden zwei Punkte, z. B. für Bild 61

$$u = 1 \qquad v = 50 \qquad (w = 50)$$

$$u = 100 \qquad v = 5 \qquad (w = 50).$$

Damit liegt die Neigung der Schargeraden fest. Für das Beispiel von Bild 61 kann die Entwicklung der Schar leicht geleistet werden, weil für $u = 1$ gilt: $w = v$ (siehe Bild 61).

Es ist unter Umständen zweckmäßiger, zum Entwurf einer unsymmetrischen Parallelschartafel zunächst ohne Rücksicht auf die Bereiche eine symmetrische Tafel mit $\alpha = 45$ Grad zu entwerfen und die unsymmetrische Tafel daraus dadurch zu gewinnen, daß alle in der Abszissen- bzw. Ordinatenrichtung aufzutragenden Strecken in einem bestimmten konstanten Verhältnis gekürzt bzw. verlängert werden.

5. Erweiterungen

Wir haben früher Hilfsmittel kennengelernt, mit denen Leitertafeln für Funktionen zwischen mehr als drei Veränderlichen gewonnen werden konnten. Bei der Aufgabe

$$u + v = w + z \tag{14'}$$

führte die Zerlegung in

$$u + v = t$$

$$w + z = t$$

und die Einführung einer Zapfenlinie für t zum Ziel. Auch bei Netztafeln gibt es Hilfsmittel ähnlicher Art, die es ermöglichen, Rechenhilfsmittel für mehr als drei Veränderliche zu gewinnen.

So sind die Rechentafeln Bild 54 bzw. 55 zugleich Tafeln für die Aufgaben

$$u_1 + v_1 = u_2 + v_2 \,(= w)$$

bzw.

$$u_1 - v_1 = u_2 - v_2 \,(= w).$$

Die Ablesevorschrift in diesen Tafeln ist dann für gesuchtes v_2 durch Bild 62 bzw. 63 gegeben. Man erkennt, daß die dritte Schar w die

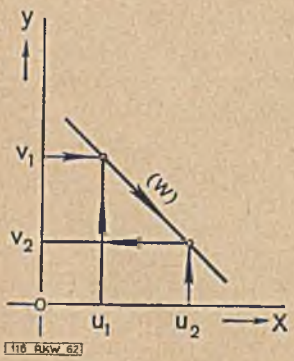


Bild 62. Ableseschlüssel für $u_1 + v_1 = u_2 + v_2$

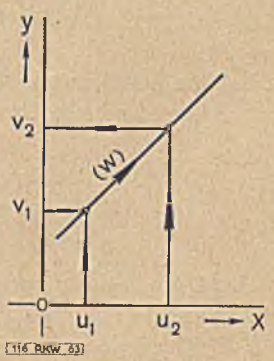


Bild 63. Ableseschlüssel für $u_1 - v_1 = u_2 - v_2$

Rolle der Zapfenlinie in Leitertafeln übernimmt. Jedem Wert der Hilfsveränderlichen w entspricht hier eine Netzgerade (während bei Leitertafeln ein Punkt der Zapfenlinie diese Rolle übernahm).

Die Ergebnisse können ohne Mühe auch auf den unsymmetrischen Fall übertragen werden.

Eine Erweiterung auf die Aufgabe

$$u_1 \cdot v_1 = u_2 \cdot v_2 \,(= w)$$

bzw.

$$\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} \,(= w)$$

bereitet gleichfalls keine Schwierigkeiten. Statt des gleichförmigen Netzes kommt ein logarithmisches Netz zur Anwendung. Im übrigen entsprechen die Netztafeln für die beiden genannten Fälle genau den Tafeln nach Bild 56 bzw. 57.

Das Verfahren kann unter Verwertung der bei Leitertafeln gewonnenen Erkenntnisse entsprechend erweitert werden. Das Erzeugungsprinzip für neue Netztafelformen für mehr als drei Veränderliche besteht danach im wesentlichen darin, eine der drei Scharen für eine weitere Netztafel zu verwenden und in dieser neuen Tafel gegebenenfalls wiederum eine Schar für eine nächste Tafel zu benutzen usw.

Während man bei Leitertafeln die einzelnen durch die Zapfenlinie kombinierten Leitern beliebig anordnen konnte, sind die Möglichkeiten bei Netztafeln etwas beschränkter, weil eine Netztafel den Platz durch das Netz bereits lückenlos ausfüllt. Man muß dann gegebenenfalls eine oder mehrere Scharen unterdrücken und durch Funktionsleitern ersetzen. Wir betrachten ein Beispiel dieser Art:

Zwischen der Umfangsgeschwindigkeit v in m/s, dem Durchmesser D in m und der Drehzahl n in Umdrehungen/min besteht die Beziehung

$$v = \frac{D \cdot \pi \cdot n}{60}. \tag{33}$$

Gleichzeitig stehen die Umfangsgeschwindigkeit v in m/s, die Umfangskraft P in kg und die übertragene Leistung N in PS in folgender Beziehung:

$$v = \frac{75 \cdot N}{P}. \tag{34}$$

Fassen wir nun v als Hilfsveränderliche auf, so erhalten wir

$$75 \cdot N \cdot \frac{1}{P} = D \cdot \pi \cdot \frac{n}{60} \,(= v). \tag{35}$$

Als Bereiche seien vorgegeben:

$$\begin{aligned} D &= 0{,}1 \;\ldots\; 10{,}0 \text{ m} \\ n &= 1 \;\ldots\; 1\,000 \text{ Umdr./min} \\ N &= 1 \;\ldots\; 100 \text{ PS} \\ P &\approx 20 \ldots 10\,000 \text{ kg}. \end{aligned}$$

Wir schreiben die Formel unter willkürlicher Einführung eines Faktors 10 noch etwas anders

$$N \cdot \frac{10 \cdot 75 \cdot 60}{\pi \cdot P} = (10 \cdot D) \cdot n \left(= \frac{10 \cdot 60}{\pi} v\right). \qquad (35\,a)$$

Damit ist die Formel auf unsere frühere Form gebracht, wenn wir setzen

$$u_1 = \frac{10 \cdot 75 \cdot 60}{\pi \cdot P}$$

$$v_1 = N$$

$$u_2 = n$$

$$v_2 = 10 \cdot D$$

Es ergibt sich das Schema des Bildes 64.

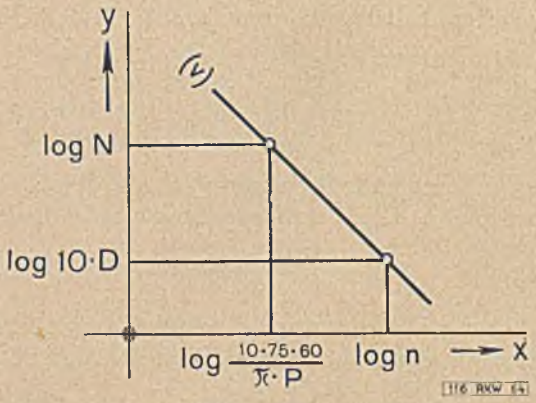


Bild 64. Ableseschlüssel für Bild 64a

Für N und D kann also die gleiche waagerechte logarithmische Schar gewählt werden. Für P und n kann nur eine der Scharen gezeichnet werden, z. B. für n, während die andere für P, da sie sich von rechts nach links entwickelt, durch eine logarithmische Funktionsleiter wiedergegeben werden muß.

Es ist weiterhin zweckmäßig, die einzelnen Leitern für die Angabe der Zahlenwerte räumlich zu trennen, indem man die eine Leiter links bzw. oben, die andere rechts bzw. unten aufträgt. Die Tafel ist in

Bild 64a für die angegebenen Bereiche als symmetrische Tafel ($\alpha = 45^0$) mit der Zeicheneinheit $l = 25$ mm aufgezeichnet. Die richtige Lage der Leiter für P kann zweckmäßig durch die Methode

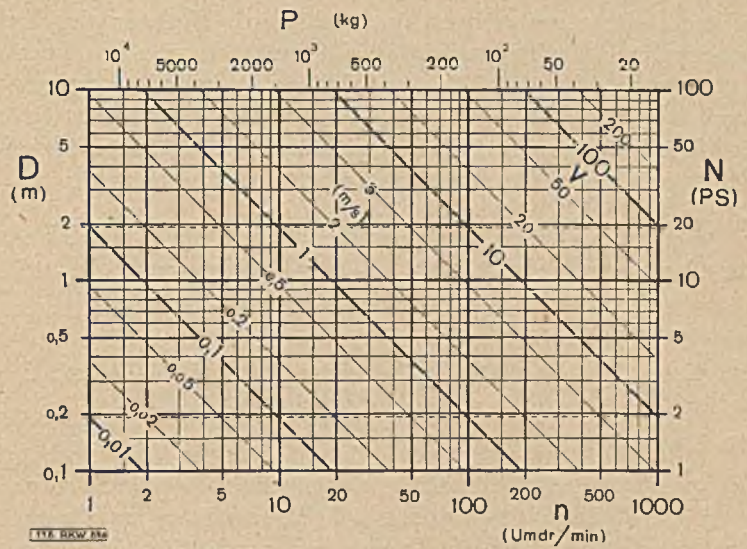


Bild 64 a. Netztafel für $v = \frac{D \cdot \pi \cdot n}{60}$ und $v = \frac{75 \cdot N}{P}$.

des Beispiels gefunden werden. Die Parallelschar für v kann entweder auf der x-Achse aus

$$\frac{10 \cdot 60}{\pi} \cdot v$$

oder besser auf der einzuzeichnenden Hilfsgeraden

$$D = \frac{60}{\pi}$$

bzw.

$$D = \frac{60}{\pi \cdot 100}$$

bzw.

$$D = \frac{100 \cdot 60}{\pi}$$

ermittelt werden, da für diese D-Werte

$$v = n$$

bzw.

$$v = \frac{1}{100} \cdot n$$

bzw.

$$v = 100 \cdot n$$

wird. Diese letztere Methode ist sehr beliebt und zweckmäßig und könnte im übertragenen Sinne auch als Methode des Beispiels bezeichnet werden.

Die beschriebene und am Beispiel erläuterte Methode der Unterdrückung einer Funktionsschar ist für mehr als vier Veränderliche nicht mehr zweckmäßig. Es empfiehlt sich dann eine Aneinanderreihung der einzelnen Teiltafeln. Als Beispiel betrachten wir eine Netztafel zur Berechnung elektrischer Leitungen auf Leistungsverlust. Die miteinander in Beziehung tretenden Größen sind:

1. Der Leiterquerschnitt q in mm² (im allgemeinen gesucht).
2. Die übertragene Wirkleistung N_G bei Gleichstrom in kW
   N_D bei Drehstrom in kW
   (im allgemeinen gegeben).
3. Der Leistungsfaktor des Verbrauches $\cos\varphi$ (im allgemeinen gegeben).
4. Die Länge der Leitung L in m (im allgemeinen gegeben).
5. Die spezifische Leitfähigkeit des Leiterwerkstoffes k in Siemens · m/mm² (im allgemeinen gegeben). Es interessieren im allgemeinen nur die Werte $k = 50$ für Kupfer und $k = 30$ für Aluminium.
6. Die Spannung U in Volt (bei Drehstrom die verkettete Spannung). Die Spannung ist teils gegeben, teils mit Rücksicht auf den Werkstoffaufwand noch zu verändern.
7. Der relative Leistungsverlust p in Hundertsteln der übertragenen Wirkleistung N. (Gegeben, oder mit Werkstoffaufwand (q) abzustimmen.)

Als festgegebene Werte können also N, $\cos\varphi$, L, k gelten, während U und p im Lauf der Rechnung verändert werden müssen und q gesucht wird. Man wird also die Tafel so aufbauen, daß die Größen U, p und q am Schluß der Rechnung erscheinen.

Zwischen den aufgezählten Größen gelten die folgenden Beziehungen:

a) für Gleichstrom: $$q = \frac{200 \cdot N \cdot L \cdot 1000}{U^2 \cdot p \cdot k}; \tag{36}$$

b) für Drehstrom: $$q = \frac{100 \cdot N_D \cdot L \cdot 1000}{U^2 \cdot p \cdot k \cdot \cos^2\varphi}. \tag{37}$$

Sie lassen sich einheitlich schreiben, wenn man für Gleichstrom

$\cos \varphi = 1$ einsetzt und an Stelle der Drehstromleistung die Bezugsleistung

$$N = \frac{1}{2} \cdot N_D \tag{38}$$

verwendet:

$$q = \frac{200 \cdot N \cdot L \cdot 1000}{k \cdot p \cdot U^2 \cdot \cos^2 \varphi}. \tag{39}$$

Wir zerlegen die Formel unter Einführung von Hilfsveränderlichen t_1, t_2, t_3 in folgende Teilaufgaben:

$$t_3 = \frac{200 \cdot 1000 \cdot N}{\cos^2 \varphi} \tag{39a}$$

$$t_2 = t_3 \cdot L \tag{39b}$$

$$t_1 = \frac{t_2}{U^2} \tag{39c}$$

$$(q \cdot k) = \frac{t_1}{p}. \tag{39d}$$

Dabei ist berücksichtigt, in welcher Reihenfolge die Veränderlichen in die Rechnung eingehen sollen.

Für die vier Teilaufgaben erhalten wir die folgenden Tafeln:

1. $$\frac{1}{\cos^2 \varphi} = t_3 \cdot \frac{1}{200 \cdot 1000 \cdot N}.$$

Angleichung: $w = v \cdot u$. Siehe Bild 56 bzw. 65.

Bereiche: $N = 1$ ...100

$\cos \varphi = 0{,}5...$ 1.

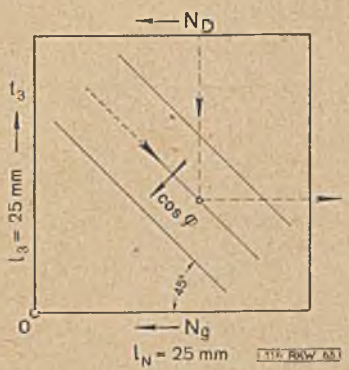


Bild 65. Ableseschlüssel

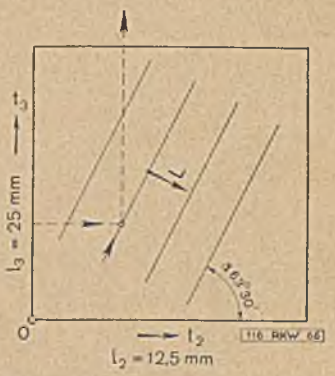


Bild 66. Ableseschlüssel

2. $$L = \frac{t_2}{t_3}.$$

Angleichung: $w = \frac{u}{v}$. Siehe Bild 57 bzw. 66.

Zur Verkleinerung der waagerechten Erstreckung der Teiltafel wählen wir für log t_2 den halben Maßstab wie für log t_3. Der Winkel zwischen der x-Achse und der schrägen L-Parallelschar wird daher nach C III, 3

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{l_2}{l_3} = \frac{2}{1} = 2; \quad \alpha = 63^0\,30'.$$

Bereiche: $L = 10...1000$ m.

3. $$U^2 = t_2 \cdot \frac{1}{t_1}.$$

Angleichung: $w = u \cdot v$. Siehe Bild 56 bzw. 67.

Auch hier wird die Zeicheneinheit in waagerechter Richtung auf die Hälfte gegenüber der senkrechten Richtung verringert. Es wird daher

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{2}{1} = 2; \quad \beta = 63^0\,30'.$$

Bereiche: $U = 110...500$ Volt.

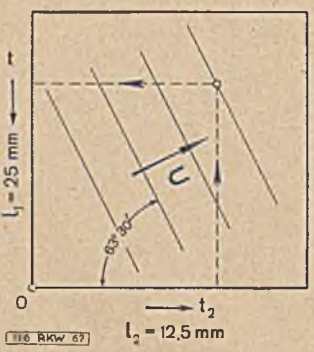


Bild 67. Ableseschlüssel

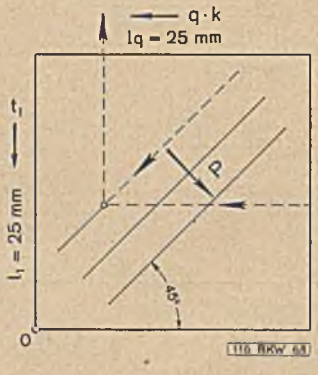


Bild 68. Ableseschlüssel

4. $$p = \frac{1}{(q \cdot k)} : \frac{1}{t_1}.$$

Angleichung: $w = u : v$. Siehe Bild 57 bzw. 68.

Bereiche: $p = 1...\ 10$ v. H.

$q = 4...400$ mm² (für Al.).

Setzt man alle vier Tafeln unter Beachtung gleicher Zeicheneinheiten für die Koppelveränderlichen zu einer großen Tafel zusammen, so erhält man die nachstehend abgebildete Tafel Bild 69. Tafeln dieser Form nennt man wegen ihres Aufbaues Mäandertafeln.

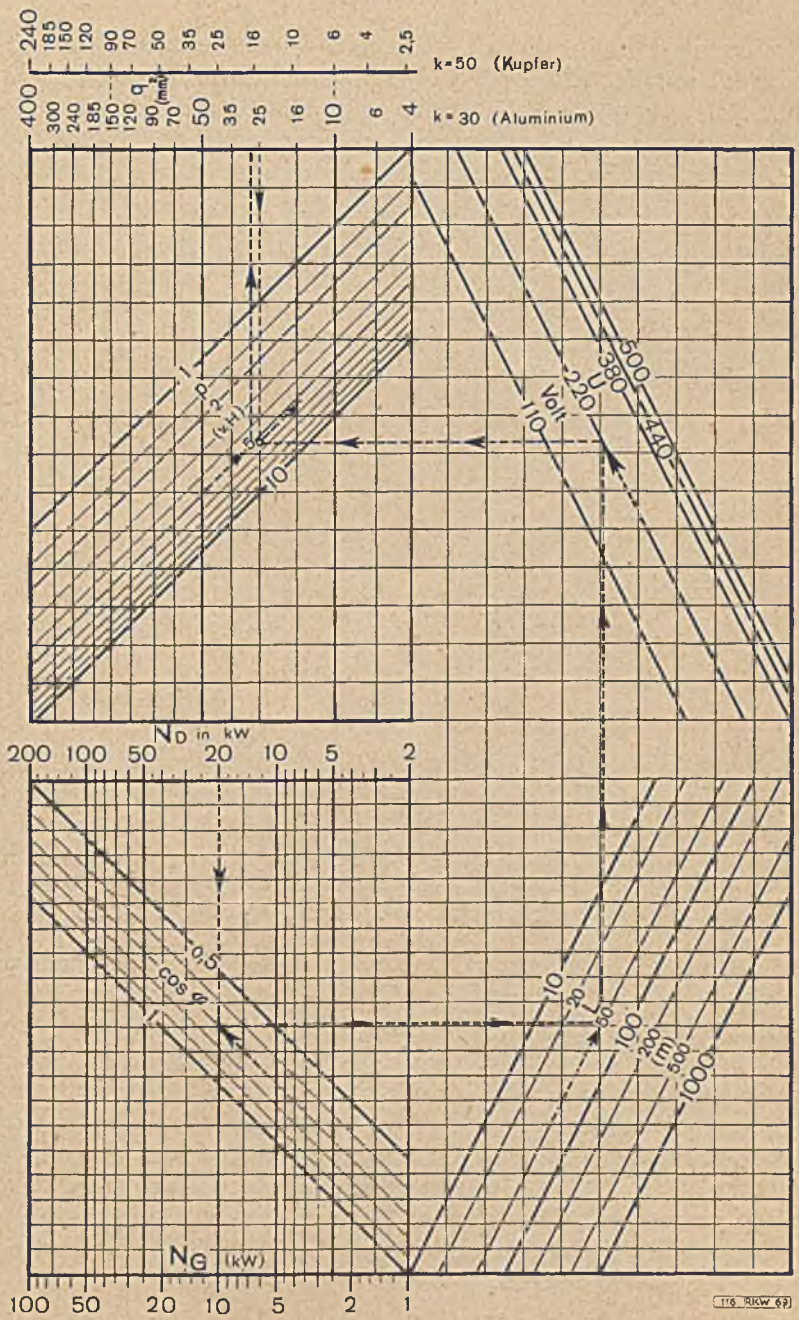


Bild 69. Mäandertafel für die Bestimmung des Leistungsverlustes von Leitungen

Mäandertafeln besitzen den Nachteil, daß man beim Rechnen mit ihnen oft mit der Hand oder dem Ablesehilfsmittel die Werte der einzustellenden Veränderlichen zudeckt. Um diesen Nachteil möglichst herabzumildern, ist der in Bild 69 wiedergegebene Aufbau verwendet worden: Der Umlaufsinn ist entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn.

Da die Werte der Zwischenveränderlichen $t_1 ... t_3$ belanglos sind, ist es auch nicht notwendig, logarithmische Teilungen zu verwenden. Als Rechenlinien für $t_1 ... t_3$ sind daher parallele Linien mit konstantem Abstand gewählt worden. Nur die Scharen für q und N sind logarithmisch aufgetragen worden.

Die Netztafel Bild 69 zeigt eine beachtenswerte Ausgestaltung. Es sind nur die Werte der Veränderlichen verzeichnet, denen in der Praxis wirkliche Bedeutung zukommt. So sind nur die normalen Spannungen

110, 220, 380, 440, 500 Volt

und die normalen Leitungsquerschnitte

4, 6, 10, 16, 25, 35, 50, 70, 90,

120, 150, 185, 240, 300, 400 mm²

eingetragen worden.

Die Veränderliche k ist dadurch berücksichtigt worden, daß für q zwei Leitern, nämlich eine für $k = 50$ (Kupfer im betriebswarmen Zustand) und eine zweite für $k = 30$ (Aluminium) gezeichnet sind. Die Leiter für Aluminium diente als Unterlage für die logarithmische Parallelschar, weil neuerdings dem Aluminium größere Bedeutung als Leitungswerkstoff zukommt.

Ein anderes Hilfsmittel zur Kopplung mehrerer Netztafeln ist von Diercks und Euler in ihrem Buch „Praktische Nomographie", Stahleisen 1939, eingehend und erschöpfend behandelt worden. Das ganze Buch, in dem eine große Zahl von Beispielen behandelt ist, ist der Methode der Leitlinie gewidmet. Unter Leitlinie verstehen die Verfasser eine unter 45° verlaufende Gerade, an der der Ableseweg gebrochen wird. Es wird durch dieses wohl zuerst von Kretschmer (siehe Fußnote 1 S. 210, G I) in anderem Zusammenhang angegebene Verfahren möglich, die einzelnen Netztafeln alle nebeneinander zu setzen, statt sie, wie in unserem vorhin behandelten Beispiel mäanderförmig aneinanderzufügen.

6. Der allgemeinere Fall

Wir können auch bei geradlinigen Netztafeln der ersten Grundform eine Verallgemeinerung finden, indem wir die Einschränkung fallen lassen, daß die Schargeraden durch einen unendlich fernen Punkt gehen. Die Verallgemeinerung sieht dann so aus, daß die drei Geradenscharen je durch einen Punkt gehen. Man nennt diesen Punkt den „Träger" der Geradenschar. Gingen bei der verallgemeinerten ersten Grundform der Leitertafeln die drei Träger durch einen Punkt, so verlangen wir jetzt aus später klar werdenden Gründen, daß die drei (punktförmigen) Träger der Scharen auf einer Geraden liegen. Näheres über solche verallgemeinerte Netztafeln der ersten Grundform findet man in C V, 2 und in F I.

IV. Die zweite Grundform: Strahlentafeln

Die besprochene erste Grundform verwendet zu ihrem Aufbau nur Parallelscharen. Im Gegensatz hierzu kommen bei Netztafeln der zweiten Grundform nur zwei Parallelscharen zur Anwendung, während die dritte Schar eine Strahlenschar ist (siehe Bild 27). Auch jetzt sagen wir allgemeiner: zwei der Geradenscharen gehen durch je einen unendlich fernen Punkt.

1. Geometrische Beziehungen

Wie bei den anderen Grundformen werden wir auch jetzt wieder eine geometrische Beziehung zwischen den Gebilden der Tafel ableiten. Wir denken uns hierzu die Strahlenschar so gelegt, daß ihr Trägerpunkt P_0 in den Koordinatenursprung fällt. Den Winkel zwischen einer Geraden der Strahlenschar und der positiven x-Achse wollen wir mit α bezeichnen (Bild 70).

Es gilt dann $$b = a \cdot \operatorname{tg} \alpha. \tag{40}$$

Diese Gleichung soll Schlüsselgleichung der zweiten Grundform der Netztafeln heißen.

Weil die veränderlichen Größen a, b und $\operatorname{tg} \alpha$ durch eine Multiplikation miteinander verknüpft sind, so wollen wir von einer Multiplikationsform bzw. Divisionsform sprechen.

Trägt man also in einer solchen Tafel die Größe u mit der Zeicheneinheit l_u als senkrechte gleichförmige Schar, die Größe v mit der

Zeicheneinheit l_v als waagerechte gleichförmige Schar auf und zeichnet ein Strahlenbündel durch den Ursprungspunkt mit

$$\operatorname{tg} \alpha = w \cdot \frac{l_v}{l_u}$$

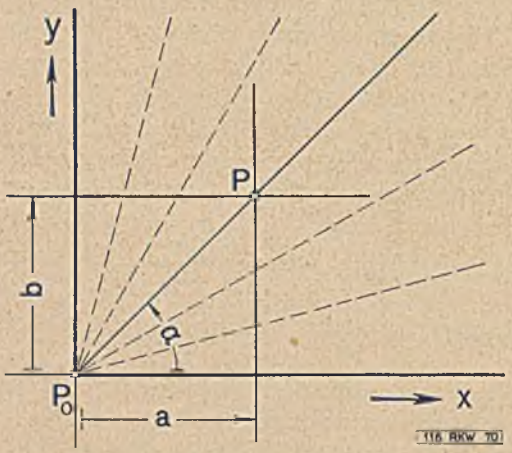


Bild 70. Aufbau von Netztafeln der zweiten Grundform

auf, so stellt die erhaltene Netztafel eine Rechentafel für

$$w = \frac{v}{u}$$

dar, wie man durch Einsetzen von

$$a = l_u \cdot u$$
$$b = l_v \cdot v$$
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{l_v}{l_u} \cdot w$$

in die Schlüsselgleichung einsieht.

2. Anwendungen

Will man allgemein eine Funktion von der Gestalt

$$f(w) = \frac{h(v)}{g(u)}$$

darstellen, so hat man aufzutragen

1. die senkrechte Schar $a = l_u \cdot g(u)$,
2. die waagerechte Schar $b = l_v \cdot h(v)$,
3. die Strahlenschar mit $\operatorname{tg} \alpha = \frac{l_v}{l_u} \cdot f(w)$.

Wir wollen zunächst den unter C III, 2 bereits behandelten Fall

$$w = \frac{v}{u}$$

als Beispiel betrachten.

Als Bereiche seien vorgegeben

$$v = 1 \quad ...10$$

$$u = 0{,}5... \ 5$$

$$(w = 0{,}2...20).$$

Da für v der größere Bereich vorgegeben ist, wählen wir die Zeicheneinheit l_v nur halb so groß wie die Zeicheneinheit l_u.

$$l_v = \ 7 \text{ mm}$$

$$l_u = 14 \text{ mm}.$$

Damit wird

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{14} \cdot w = 0{,}5 \cdot w.$$

Statt α hieraus zu ermitteln und die Schar dann zu entwerfen, kann hier wieder die „Methode des Beispiels" gute Verwendung finden. Für

$$u = 5$$

z. B. findet man nämlich

$$w = \frac{v}{5}.$$

Auf der Linie $u = 5$ können also die Punkte leicht ermittelt werden, durch die die w-Linien hindurchgehen.

Von $w = 2$ ab empfiehlt es sich, $v = 10$ zu setzen und die Punkte für die w-Linien auf der Linie $v = 10$ aus

$$w = \frac{10}{u}; \qquad u = \frac{10}{w}$$

zu ermitteln.

Wegen der starken Drängung der w-Linien in der Umgebung des Ursprungspunktes sind die w-Linien nicht bis zum Ursprung gezeichnet, sondern nur so weit, wie dies die Bereiche von v und u erfordern.

Bild 71 zeigt die fertige Tafel.

Soll überall im Gültigkeitsbereich die Interpolationsgenauigkeit einen hinreichend hohen Wert besitzen, so muß auf die Wahl des Zahlen-

schrittes für w und den Maßstab der Darstellung erhebliche Mühe verwendet werden.

In den bisher besprochenen Parallelschartafeln ist die Ablesegenauigkeit praktisch davon unabhängig, in welcher Rechenrichtung die Tafel verwendet wird, ob also etwa u und v gegeben und w gesucht

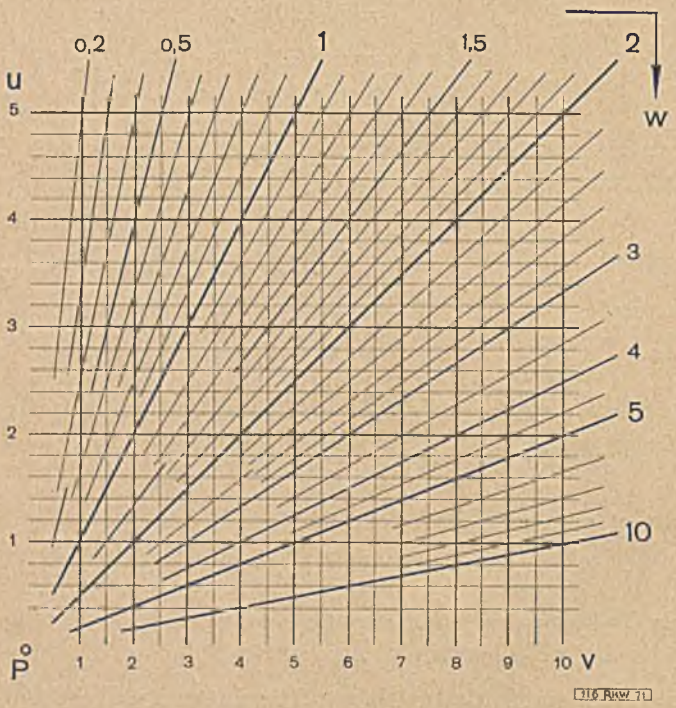


Bild 71. Netztafel für $w = \frac{v}{u}$

oder u und w gegeben und v gesucht oder schließlich v und w gegeben und u gesucht wird. Diese Unabhängigkeit beruht darauf, daß die Schnittwinkel nirgends zu ungünstig werden.

Anders bei den Strahlentafeln. Sind z. B. in Bild 71 v und w gegeben, wobei w kleine Werte, z. B. 0,2...0,5, haben soll, so sind die Schnitte zwischen den v- und w-Linien so schleichend, daß eine genaue Bestimmung des Schnittpunktes und damit von u unmöglich wird. Während also bei gegebenem u und v die Genauigkeit an allen Stellen der Tafel befriedigt, gilt das nicht mehr für gegebenes u und w bzw. v

und w für große bzw. kleine w-Werte. Bei der Wahl dieser Tafelform ist auf diesen Umstand besonders zu achten.

Besondere Bedeutung erlangen die Strahlentafeln, wenn man die Strahlenschar in das Netz nicht einzeichnet, sondern sie durch einen um den Punkt P_0 schwenkbaren Faden oder ein geeignet ausge-

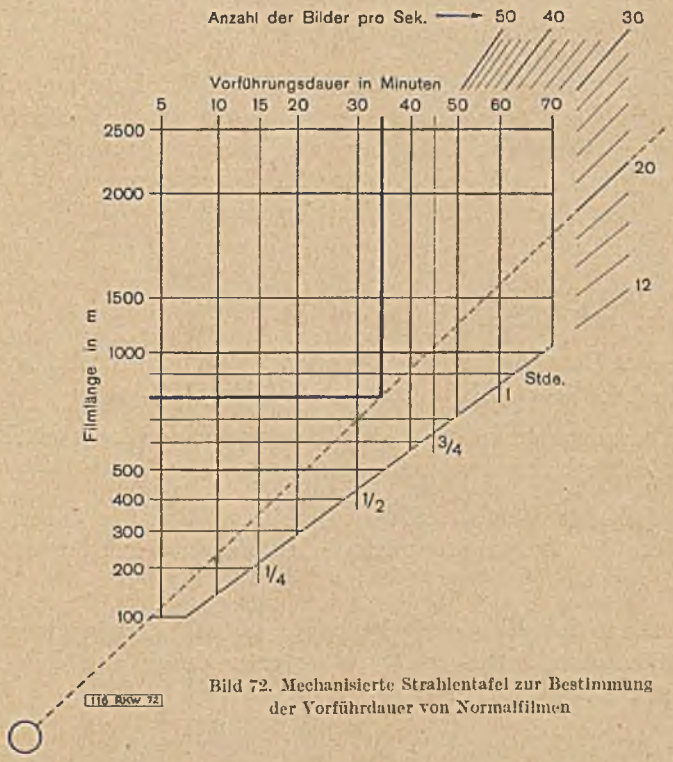


Bild 72. Mechanisierte Strahlentafel zur Bestimmung der Vorführdauer von Normalfilmen

stattetes drehbares Lineal ersetzt. Von der Strahlenschar läßt man nur die über das Netz hinausragenden Teile stehen, die als Richt- oder Ableseleitern für das schwenkbare Ablesegerät dienen.

Die Strahlentafeln sind zur angedeuteten Mechanisierung leichter geeignet als Parallelschartafeln, weil es im allgemeinen leichter ist, ein Ablesegerät um einen Punkt drehbar zu gestalten, als dieses Gerät parallel zu sich selbst zu verschieben.

Als Beispiel bringen wir eine von H. Schwerdt angegebene Strahlentafel mit Ersatz der Strahlenschar durch einen drehbaren Zeiger (Bild 72).

Es handelt sich um die Darstellung der Formel

$$L = 1{,}14 \cdot v \cdot t. \tag{41}$$

Darin bedeuten

L die Länge eines Normalfilms in m	100...2500 m
v die Anzahl der Bilder in der Sekunde	12... 50 $\frac{1}{s}$
t die Vorführzeit in Minuten	5... 70 min.

Die Tafel ist besonders bemerkenswert durch den Umstand, daß es gelungen ist, die „Methode der freien Parameter" zur Verbesserung der Tafel zu benutzen. Zieht man nämlich aus beiden Seiten der Gleichung für L die Wurzel, wobei der Wurzelexponent $n = 2$ die Rolle des freien Parameters spielt, so ergibt sich

$$\sqrt{L} = \sqrt{1{,}14} \cdot \sqrt{v} \cdot \sqrt{t}. \tag{41a}$$

Das ergibt zwei Vorteile:

1. die großen Bereiche für t und L werden mit ausreichender Genauigkeit in handlichen Abmessungen wiedergegeben.
2. Der Ursprungspunkt des Koordinatensystems wird von Ableselinien in hinreichendem Umfang befreit.

Die angegebenen Vorteile sind in dem Charakter der Wurzelleiter begründet, die Teilpunkte nach 1 hin zusammenzuziehen. Siehe A II, 4.

Strahlentafeln finden auch gegebenenfalls nützliche Anwendungen bei Meßinstrumenten, wenn die Strahlenschar durch den Zeiger des Instrumentes dargestellt ist.

V. Allgemeinere geradlinige Netztafeln

1. Die allgemeine Bedingungsgleichung

Unter den allgemeineren Netztafeln mit drei beliebigen, sich überdeckenden Scharen spielen die eine besondere Rolle, bei denen die Scharen aus geraden, nun aber nicht mehr parallelen Linien bestehen.

Wir haben schon im Abschnitt A III, 4 gelernt, solche allgemeine Geradenscharen durch Angabe zweier Funktionen der gleichen Ver-

änderlichen zu beschreiben. Dieses Verfahren wollen wir anwenden, um die allgemeine Bedingungsgleichung für geradlinige Netztafeln zu entwickeln.

Das Kennzeichen der Netztafeln bestand darin, daß zusammengehörige Bilder (u), (v), (w) der drei Veränderlichen u, v, w durch einen Punkt gehen sollten. Wir denken uns in Bild 73 je einen Vertreter der drei Geradenscharen eingezeichnet mit dem gemeinsamen Schnittpunkt P (x, y). Die drei Geraden sind durch Angabe der Abschnitte a_1, a_2, a_3 bzw. b_1, b_2, b_3 auf den beiden Geraden $x = 0$ und $x = L$ genau festgelegt. Damit eine solche Darstellung möglich ist, darf keine der drei Scharen eine zu den beiden Geraden parallele Schar sein, was aber immer durch geeignete Lage der Geraden erreicht werden kann.

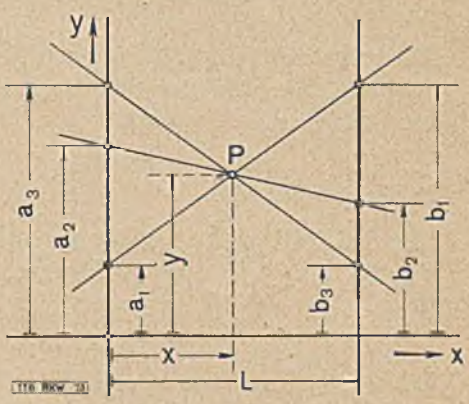


Bild 73. Ableitung der allgemeinen Schlüsselgleichung für geradlinige Netztafeln

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke folgt dann

$$\frac{a_3 - a_2}{a_3 - a_1} = \frac{b_2 - b_3}{b_1 - b_3}$$

oder durch Ausmultiplizieren und Ordnen nach b:

$$b_1(a_2 - a_3) + b_2 \cdot (a_3 - a_1) + b_3 \cdot (a_1 - a_2) = 0. \qquad (42)$$

Das ist eine Form der allgemeinen Schlüsselgleichung für geradlinige Netztafeln. Setzt man hierin ein

$$a_1 = f_1(t) \qquad b_1 = g_1(t)$$
$$a_2 = f_2(r) \qquad b_2 = g_2(r)$$
$$a_3 = f_3(s) \qquad b_3 = g_3(s),$$

worin f_1, f_2, f_3 und g_1, g_2, g_3 noch willkürliche Funktionen der Veränderlichen t, r, s bedeuten, so erhält man die allgemeinste, in geradlinigen Netztafeln darstellbare Funktion zwischen den drei Veränderlichen r, s, t.

Auch hier kann wieder eine Darstellung der Schlüsselgleichung (42) in Form einer Determinante erfolgen. Diese lautet dann

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (42\,a)$$

Man vergleiche die vollkommene, formale Übereinstimmung mit der Schlüsselgleichung (23 a) bei den Leitertafeln, B IV, 1. Wir kommen hierauf unter F II zurück.

2. Einige Hinweise

Für den Fall, daß zwei der Geradenscharen Strahlenscharen sind, deren Trägerpunkte in die Punkte

$$P_1(0, 0) \qquad P_2(L, 0)$$

fallen mögen, geht unsere Schlüsselgleichung über in

$$g_1(t) \cdot [f_2(r) - f_3(s)] - g_3(s) \cdot f_2(r) = 0. \qquad (43)$$

Tafeln dieser Art werden auch Doppelstrahlentafeln genannt (siehe z. B. Schwerdt, Lehrbuch der Nomographie, S. 117). Dort ist allerdings der Begriff der Doppelstrahlentafel noch etwas umfassender, weil die dritte Schar auch eine Kurvenschar sein kann.

Tafeln mit zwei Strahlenscharen eignen sich besonders für mechanische Ausbildung mit zwei Zeigerinstrumenten, wobei jeder Zeiger eine der Strahlenscharen darstellt. Es braucht dann nur die dritte Schar gezeichnet zu werden. Die Tafel wird hierdurch sehr übersichtlich und es kann darüber hinaus auch noch eine weitere Funktionsschar aufgenommen werden, ohne die Tafel zu unübersichtlich zu machen. Man vergleiche z. B. die Ausführungen in Schwerdt, Lehrbuch der Nomographie, 1. Auflage, S. 122.

Es sei darauf hingewiesen, daß es zur Doppelstrahlentafel noch einen anderen systematischen Weg gibt, den wir in einem späteren Abschnitt andeuten wollen (F I). Dabei geht man von der zweiten Grundform der geradlinigen Netztafeln aus, bei denen die zwei Trägerpunkte von zwei Geradenscharen unendlich ferne Punkte sind.

Zu einer anderen einfachen und öfters angewendeten Netztafel mit Geradenscharen gelangen wir durch folgenden Ansatz:

$$f_1(u) = u \qquad g_1(u) = u$$
$$f_2(v) = -2v \qquad g_2(v) = 2c - 2v$$
$$f_3(w) = 2c - 2w \qquad g_3(w) = -2w.$$

Es ist sofort einzusehen, daß es sich um drei Parallelscharen handelt, da sich die Funktionen f und g nur jeweils um eine Konstante unter-

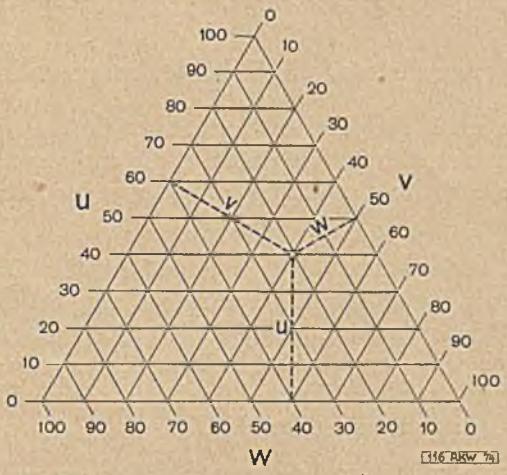


Bild 74. Dreiecktafel für $u + v + w = 100$

scheiden. Setzen wir die obigen Funktionen in die allgemeine Schlüsselgleichung ein, so erhalten wir nach Vereinfachung

$$u + v + w = c. \tag{44}$$

Für $c = 100$ ist die entstehende Netztafel in Bild 74 im verkleinerten Maßstab dargestellt. Man nennt diese Tafelform Dreiecktafel oder Dreieckskoordinaten. Sie sind des öfteren benutzt worden, z. B. zur Darstellung des Verhaltens von Dreistofflegierungen. Papiere mit Dreiecksnetzen sind im Handel erschienen.

Vergleicht man die Form der Schlüsselgleichung der geradlinigen Netztafeln mit der allgemeinen Bedingungsgleichung für Fluchtrichtigkeit von drei Punkten, so fällt die weitgehende formale Übereinstimmung auf. Wir werden in einem späteren Abschnitt (F II)

nachweisen, daß zwischen Leitertafeln und allgemeinen geradlinigen Netztafeln eine enge Verwandtschaft besteht.

Für den Fall, daß von den drei Geradenscharen zwei sich rechtwinklig schneidende Parallelscharen sind (geometrisch verzerrtes Netz) und nur die dritte Schar eine allgemeinere Geradenschar ist, empfiehlt sich gegebenenfalls ein einfacherer Ansatz als der nach dem vorigen Abschnitt. Wir müssen auch hier wieder auf die Literatur verweisen (z. B. Schwerdt, Lehrbuch der Nomographie, S. 134), in der allgemeine Bedingungsgleichungen für die Darstellbarkeit angegeben sind.

VI. Krummlinige Netztafeln; Wanderkurventafeln

Mit Rücksicht auf leichte Herstellbarkeit der Tafeln haben wir uns bisher nur mit solchen Netztafeln befaßt, die aus geraden Linien bestehen. Eine solche Beschränkung ist aber weder notwendig noch zweckmäßig.

Theoretische Überlegungen zeigen nämlich, daß die Darstellbarkeit einer vorgelegten Funktion in geradlinigen Netztafeln an gewisse Bedingungen für die Funktion geknüpft ist. Sind diese Bedingungen, die wir hier nicht angeben können, nicht erfüllt, so versagen alle bisherigen Darstellungsmöglichkeiten (und zwar sowohl geradlinige Netztafeln als auch alle Leitertafeln).

Es ist daher von besonderer Bedeutung, daß es einen Weg gibt, für eine Funktion zwischen drei Veränderlichen $w = f(u, v)$ unter gewissen, fast immer erfüllten Voraussetzungen eine im allgemeinen krummlinige Netztafel zu gewinnen.

Obgleich es nicht notwendig ist, beschränken wir uns wegen der großen praktischen Bedeutung auf den Fall geometrisch verzerrter Netze.

Legt man der Veränderlichen w einen festen Zahlenwert c zu, so kann man aus

$$c = f(u, v)$$

zu jedem Wert von u einen oder mehrere Werte v ermitteln. Die Gesamtheit aller dieser Wertepaare (u, v) ergibt in dem geometrisch verzerrten Netz

$$x = l_1 \cdot g(u) \qquad y = l_2 \cdot h(v)$$

eine Kurve $w = c$.

Lassen wir c verschiedene Werte annehmen, so erhalten wir für jedes c je eine Kurve und insgesamt also eine nach w bezifferte Kurvenschar.

Als Beispiel betrachten wir

$$w = u \cdot v. \qquad (7)$$

Setzen wir für w der Reihe nach die Werte

$c = 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100$

ein, so erhalten wir in einem gleichförmigen Netz für die Linien $w = c$ Hyperbeln mit den Achsen als Asymptoten (Bild 75).

Damit haben wir aber eine Netztafel für die Funktion

$$w = u \cdot v \qquad (7)$$

gewonnen, die man bei geeigneter Verdichtung der Hyperbelschar ebensogut zum Rechnen benutzen kann wie die früher gewonnenen geradlinigen Netztafeln.

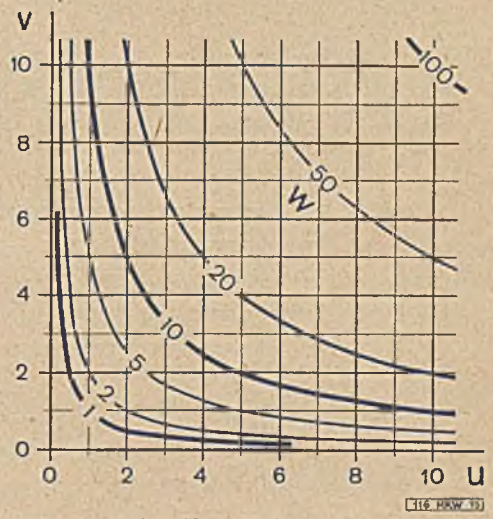


Bild 75. Netztafel für $w = u \cdot v$

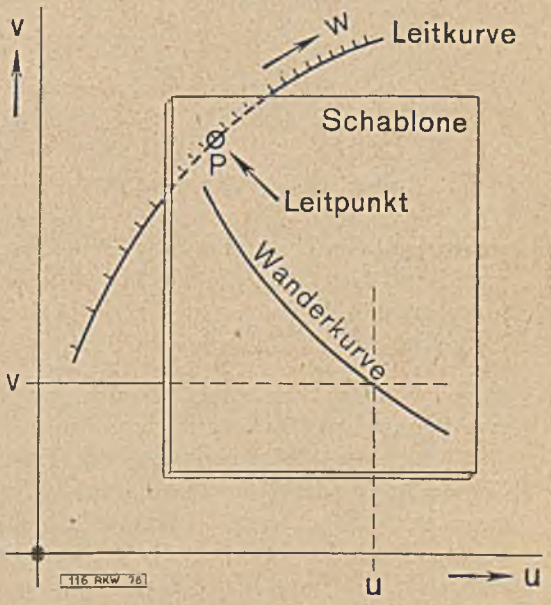


Bild 76. Ableseschlüssel in Wanderkurventafeln

Rechentechnisch sind unter solchen Netztafeln mit krummliniger Schar nur solche von besonderer Bedeutung, bei denen die Kurven der Schar alle einander gleich sind, also z. B. alle auseinander durch Parallelverschiebung hervorgehen. In einem solchen Falle kann man sich das Aufzeichnen aller Scharkurven ersparen. Man zeichnet die Kurve auf eine

durchsichtige Schablone und bestimmt die Lage der Schablone für bestimmte Werte der Scharveränderlichen w durch eine Leitkurve (siehe Bild 76), auf der ein Leitpunkt P der Schablone wandern muß.

Man nennt Rechentafeln dieser Art „Wanderkurvenblätter". Diese Tafelform kann unschwer eine Erweiterung auf vier Veränderliche u, v, w, t erfahren, indem man die Leitkurve durch ein Netz (u, v)

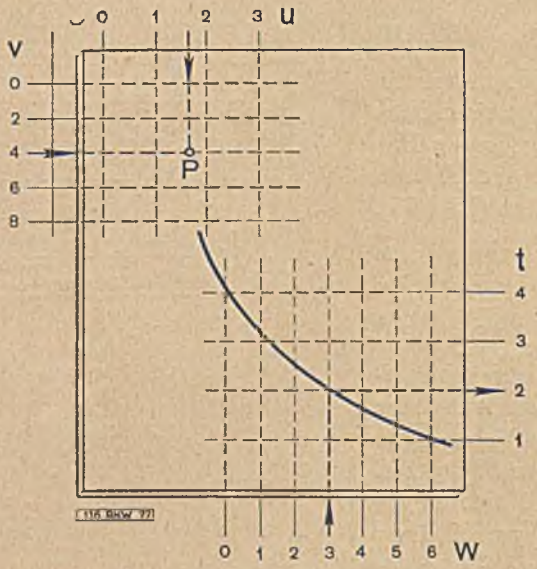


Bild 77. Ableseschlüssel für Wanderkurventafeln mit vier Veränderlichen

ersetzt und den Leitpunkt P der Schablone auf den Schnittpunkt von zwei Netzlinien (u, v) einstellt. Die Wanderkurve bestimmt dann zusammengehörige Werte von w und t in einem darunterliegenden (w, t)-Netz (Bild 77).

Durch Verwendung von Wanderkurven gelingt es, in doppeltlogarithmischen Papieren auch Summen darzustellen. Zur Vertiefung der Kenntnisse sei wieder auf die Literatur verwiesen, z. B. auf Schwerdt, Lehrbuch der Nomographie, S. 152—156 oder auf das ausgezeichnete Buch von P. Lukey, „Nomographie", Mathematisch-Physikalische Bibliothek Reihe I 59/60. Berlin 1937. Wanderkurventafeln, bei denen die Wanderkurve auch eine Verdrehung erfährt, sind denkbar, haben aber bisher keine Bedeutung erlangt.

D. Verbundrechentafeln und Tafeln mit besonderen Ablesevorschriften

I. Vereinigung von Leiter- und Netztafeln

Wir haben in den Abschnitten B und C gesehen, wie man durch Vereinigung mehrerer Teiltafeln, z. B. mehrerer Leitertafeln (Methode der Zapfenlinie) oder mehrerer Netztafeln (Mäandertafeln) Rechentafeln für mehr als drei Veränderliche gewinnen kann.

Ohne Schwierigkeit kann man nun auch Leiter- und Netztafeln kombinieren, wenn man nur darauf achtet, daß die „Koppelveränderliche" oder „Hilfsveränderliche" in beiden Tafeln in der gleichen Funktionsleiter bzw. dem entsprechenden Parallelscharnetz dargestellt ist.

Die Methode soll an einem besonders einfachen Beispiel dargelegt werden. Zwischen der maximalen Beanspruchung σ in kg/cm², dem Widerstandsmoment $W = \frac{\pi d^3}{32}$ in cm³ einer Welle und dem ideellen Biegemoment M_i in cmkg besteht unter gewissen, hier nicht nachzuprüfenden Voraussetzungen die Beziehung

$$M_i = W \cdot \sigma. \tag{45}$$

Das ideelle Biegemoment M_i errechnet sich aus dem Biegemoment M_b und dem Drehmoment M_d zu

$$M_i = \sqrt{M_b^2 + M_d^2}. \tag{46}$$

Setzen wir die letztere in die erste Beziehung ein und quadrieren, so erhalten wir

$$M_b^2 + M_d^2 = \sigma^2 \cdot \frac{\pi^2}{32^2} \cdot d^6. \tag{47}$$

Wir benutzen nun das Quadrat des ideellen Biegemoments $M_i^2 = t$ als Hilfsveränderliche. Die Aufgabe zerfällt dann in die zwei Teilaufgaben

$$t = M_b^2 + M_d^2 \tag{47a}$$

und

$$t = \frac{\pi^2}{32^2} \cdot \sigma^2 \cdot d^6 \tag{47b}$$

unter der Nebenbedingung, daß die Größe t in beiden Tafeln auf der gleichen Funktionsleiter oder im entsprechenden Netz erscheint.

Stellen wir die erste Teilaufgabe in einer Leitertafel mit parallelen Trägern dar, so erscheint die Hilfsveränderliche t auf einer gleichförmigen Leiter. Also muß auch in der zweiten Teilaufgabe die Veränderliche t als gleichförmige Teilung erscheinen. Hierzu bieten sich nun zwei Möglichkeiten:

1. Verwendung einer Leitertafel der zweiten Grundform;
2. Verwendung einer Netztafel der zweiten Grundform (Strahlentafel).

Wir wollen uns aus bestimmten, hier nicht angegebenen Gründen für die zweite Möglichkeit entscheiden.

Innerhalb der angegebenen Tafelformen gibt es nun noch eine ziemliche Reichhaltigkeit in der Möglichkeit der Ausführung. So kann man z. B. bei der Leitertafel für

$$t = M_b^2 + M_d^2 \qquad (47\,a)$$

die Hilfsveränderliche t auf der Mittelleiter, der rechten oder der linken Außenleiter erscheinen lassen. Bei der Netztafel kann sowohl d als auch σ in der Strahlenschar erscheinen. In Bild 78 sind einige von vielen Möglichkeiten kurz angegeben.

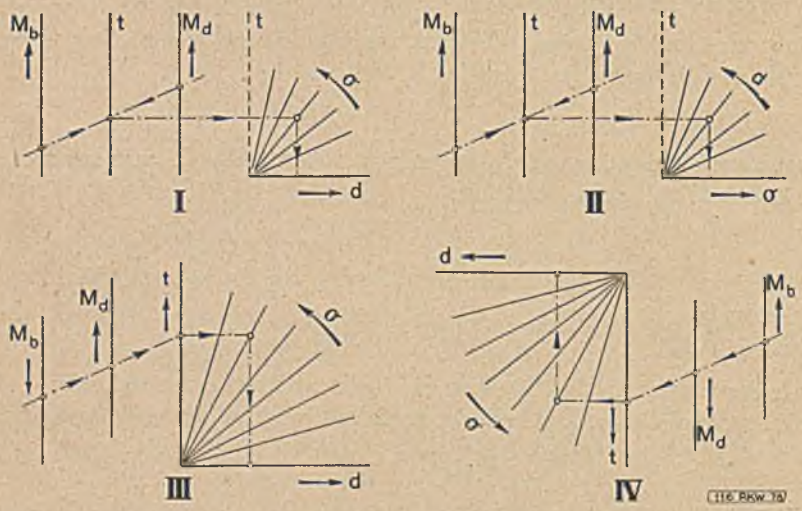


Bild 78. Aufbau von kombinierten Tafeln

Welche von diesen Tafelformen man bevorzugt, hängt vor allem davon ab, in welcher Rechenrichtung man vorzugsweise arbeitet. Im allgemeinen sind M_b und M_d gegeben und bei vorgeschriebenem σ der Durchmesser d gesucht. Da es sich als zweckmäßig erwiesen hat, in einer Rechentafel von rechts nach links fortzuschreiten, so werden wir die Tafelform IV der Form III vorziehen.

Läßt man die Hilfsveränderliche t auf der Mittelleiter erscheinen, so muß man eine der beiden Leitern M_b oder M_d in die Parallelschar für t hineinzeichnen oder man muß diese Rechenlinien für t von Fall zu Fall selbst durch ein Lineal herstellen. Beides ist unzweckmäßig. Wir werden daher versuchen, t auf einer Außenleiter erscheinen zu lassen (Form III und IV).

Ob man in der Strahlentafel d oder σ in der Schar erscheinen läßt, hängt in erster Linie von den darzustellenden Bereichen für d und σ ab. Auch aus Gründen der Fortschreitrichtung in der Tafel (σ ist gegeben, d gesucht) empfiehlt es sich aber, σ in der Schar darzustellen.

Nach diesen grundsätzlichen Erwägungen über die Tafelart gehen wir zum eigentlichen Entwurf über.

1. Leitertafel

$$t = M_b^2 + M_d^2. \tag{47a}$$

t soll auf der linken Außenleiter erscheinen.

Gegebene Bereiche:

$$M_b = 5000...30\,000 \text{ (kg} \cdot \text{cm)}$$

$$M_d = 5000...30\,000 \text{ (kg} \cdot \text{cm)}$$

$$(t = 50 \cdot 10^6...18 \cdot 10^8 \text{ kg}^2 \cdot \text{cm}^2).$$

Wir schreiben die Gleichung

$$M_d^2 = t + (-M_b^2)$$

$$w = u + v. \tag{5}$$

Die Teilungslängen auf den beiden Außenleitern (t) und ($-M_b^2$) sollen gleich lang werden. Für die Leitern möge ein Platz von 70 mm zur Verfügung stehen. Dann werden die Zeicheneinheiten:

$$l_{(t)} = \frac{70 \text{ mm}}{(18 - 0{,}5) \cdot 10^8} = \frac{70}{17{,}5} \cdot 10^{-8} \text{ mm} = 4 \cdot 10^{-8} \text{ mm},$$

$$l_{(M_b^2)} = \frac{70 \text{ mm}}{9 \cdot 10^8 - 0{,}25 \cdot 10^8} = \frac{70}{8{,}75} \cdot 10^{-8} \text{ mm} = 8 \cdot 10^{-8} \text{ mm}.$$

Damit ergibt sich die Zeicheneinheit der mittleren Leiter zu

$$l_{(M_d)^3} = \frac{l_l \cdot l_{M_b^3}}{l_l + l_{M_b^3}} = \frac{4 \cdot 10^{-8} \cdot 8 \cdot 10^{-8}}{4 \cdot 10^{-8} + 8 \cdot 10^{-8}} = \frac{32}{12} 10^{-8} = 2{,}667 \cdot 10^{-8} \text{ mm}.$$

Das Verhältnis der Abstände der Außenleitern von der Mittelleiter wird

$$\frac{p}{q} = \frac{l_l}{l_{M_b^3}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$p = \frac{q}{2}.$$

Damit kann die Leitertafel gezeichnet werden. Die Lage der Mittelleiter wird durch die Methode des Beispiels bestimmt.

2. Strahlentafel

$$t = \frac{\pi^2}{32^2} \cdot \sigma^2 \cdot d^6. \tag{47b}$$

Die Hilfsveränderliche t muß mit Rücksicht auf die Leitertafel als waagerechte Schar erscheinen, und zwar mit der Zeicheneinheit

$$l_t = 4 \cdot 10^{-8} \text{ mm}.$$

Die Veränderliche d soll als Vertikalschar erscheinen. Die darzustellenden Bereiche seien

$$d = 50...90 \text{ mm}.$$

Es möge sich um Transmissionswellen handeln. Es kommen dann nach DIN 114 nur folgende Durchmesser in Frage:

50, 55, 60, 70, 80, 90 mm.

Die Netzlinien werden nur für diese Maße eingetragen.

Dargestellt wird nach der Schlüsselgleichung

$$b = (\operatorname{tg} \alpha) \cdot a \tag{40}$$

auf der waagerechten Achse d^6. Bei einem Darstellungsbereich von 60 mm wird demnach die Zeicheneinheit für d^6 (d in cm einsetzen!)

$$l_{(d^6)} = \frac{60 \text{ mm}}{9{,}0^6 - 5{,}0^6} = \frac{60}{5{,}158} \cdot 10^{-5} = 11{,}6 \cdot 10^{-5} \text{ mm}.$$

Wir wählen $l_{(d^6)} = 1{,}2 \cdot 10^{-4}$ mm.

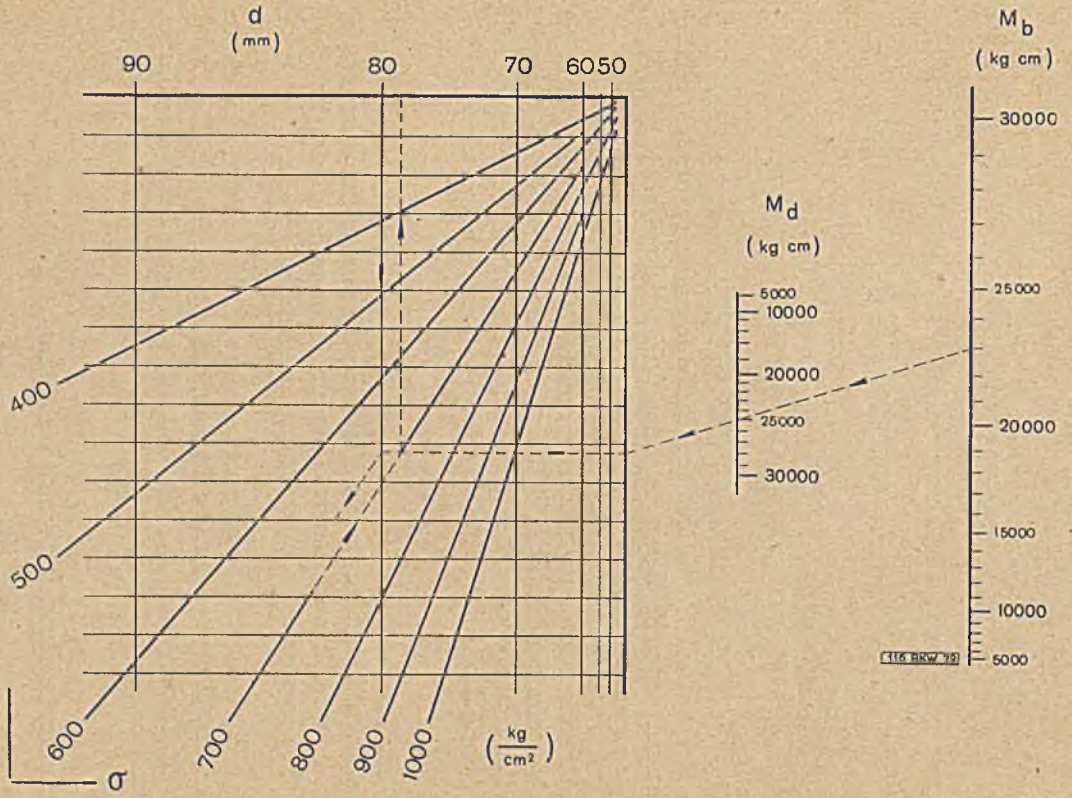


Bild 79. Kombinierte Rechentafel für die Berechnung von Transmissionswellen

Die Angleichung an die Schlüsselgleichung liefert dann

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{l_t}{l_d^4} \cdot \frac{\pi^2}{32^2} \cdot \sigma^2$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \left(\frac{4 \cdot 10^{-8}}{1{,}2 \cdot 10^{-4}} \cdot \frac{\pi^2}{32^2}\right) \cdot \sigma^2 = 3{,}21 \cdot 10^{-6} \cdot \sigma^2.$$

Der darzustellende Bereich von σ sei

$$\sigma = 400 \ldots 1000 \text{ kg/cm}^2.$$

Damit wird $(\operatorname{tg}\alpha)_{\min} = 3{,}21 \cdot 10^{-6} \cdot 10^6 \cdot 0{,}16 = 0{,}513,$

$$(\operatorname{tg}\alpha)_{\max} = 3{,}21 \cdot 10^{-6} \cdot 10^6 \cdot 1 \quad = 3{,}21.$$

Damit ist auch die Netztafel vollständig bestimmt. In Bild 79 ist die Rechentafel im natürlichen Maßstab aufgezeichnet. Mit Rücksicht auf bequeme Benutzung der Tafel ist diese nach Bild 78, IV aufgetragen.

Die Anordnung von t auf einer Außenleiter ergibt zwar die geschilderten Vorteile, bewirkt aber, daß die Leiter für M_d erheblich kürzer als die Leiter für M_b wird. Zur Erreichung ausreichender Rechengenauigkeit darf also der Maßstab der Darstellung nicht zu klein gewählt werden.

Bei der Rechnung wird man bei gewähltem σ nicht immer auf einen genormten Wellendurchmesser kommen. Man verfährt dann so, daß man mit der benachbarten d-Linie rechnet und aus der Tafel das zugehörige σ ohne neue Rechnung unmittelbar abliest.

Viele Beispiele über zusammengesetzte Tafeln findet man in der Literatur. Es sei in diesem Zusammenhang wieder auf die Bücher von P. Luckey und H. Schwerdt hingewiesen. Auch die Rechentechnischen Berichte des AWF bieten mannigfache Anwendungen.

II. Leitertafeln mit Funktionsnetzen

Sehr oft gelingt es, das Prinzip der Fluchtlinientafeln so zu erweitern, daß in einer Tafel ohne das Hilfsmittel der Zapfenlinien mehr als drei Veränderliche berücksichtigt werden können. Grundsätzlich kommt man zu solchen Erweiterungen, indem man eine oder mehrere

Funktionsleitern der Tafel durch ein beliebiges Funktionsnetz ersetzt. In Bild 80 ist beispielsweise eine solche Fluchtlinientafel mit drei krummlinigen Funktionsnetzen aufgezeichnet.

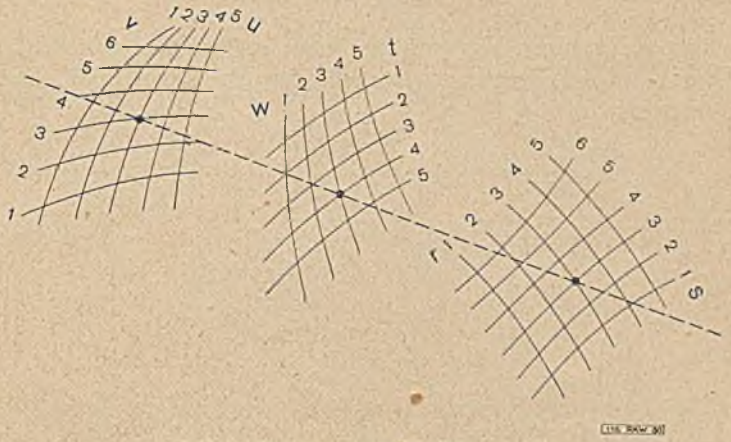


Bild 80. Verallgemeinerte Fluchtlinientafel

Die Schlüsselgleichung für diese allgemeinere Fluchtlinientafel erhalten wir aus der Schlüsselgleichung für die allgemeinste Leitertafel, indem wir die willkürlichen Funktionen

$$f_1, f_2, f_3, \quad g_1, g_2, g_3$$

der Veränderlichen t, r, s durch willkürliche Funktionen je zweier Veränderlichen ersetzen:

$$y_1 = f_1(u, v) \qquad x_1 = g_1(u, v)$$
$$y_2 = f_2(w, t) \qquad x_2 = g_2(w, t)$$
$$y_3 = f_3(r, s) \qquad x_3 = g_3(r, s).$$

Wir wollen uns auf den einfacheren Fall beschränken, daß zwei geradlinige parallele Leitern vorkommen, zwischen denen sich ein Netz befindet (Bild 81).

Für diesen Fall lautet die Schlüsselgleichung

$$y_1 \cdot (x_2 - L) + y_2 \cdot L - y_3 \cdot x_2 = 0 \tag{48}$$

oder bei Einsetzen der willkürlichen Funktionen

$$f_1(u) \cdot [g_2(w, t) - L] + L \cdot f_2(w, t) - f_3(v) \cdot g_2(w, t) = 0. \tag{48a}$$

Die Anwendung dieser Schlüsselgleichung soll an einem einfachen Beispiel erläutert werden: Der Gesamtpreis t für die Herstellung von w Apparaten beträgt

$$t = w \cdot u + v. \tag{49}$$

Dabei ist v der durch Vorbereitung usw. entstehende von der Stückzahl unabhängige Kostenanteil und u der Einzelpreis eines Stückes. Wir schreiben

$$u \cdot w - t + v = 0. \tag{49a}$$

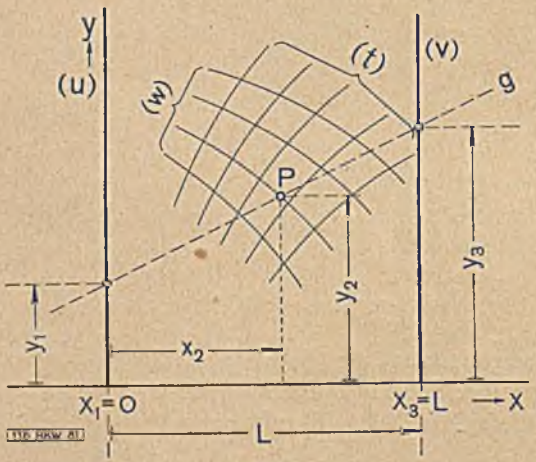


Bild 81. Ableitung der Schlüsselgleichung von Leitertafeln mit Netz

Ein Vergleich mit der Schlüsselgleichung legt es nahe, die letzte Gleichung mit einer zunächst unbekannten Funktion von w zu multiplizieren:

$$u \cdot w \cdot g(w) - t \cdot g(w) + v \cdot g(w) = 0. \tag{49b}$$

Weiterhin scheint es möglich, mit dem einfachen Ansatz auszukommen

$$f_1(u) = l_u \cdot u$$

$$f_3(v) = l_v \cdot v.$$

Unsere letzte Gleichung geht nur dann in die Schlüsselgleichung über, wenn man folgende drei Gleichungen erfüllen kann:

$$1.\quad l_u \cdot [g_2(w, t) - L] = w \cdot g(w)$$

$$2.\quad L \cdot f_2(w, t) = -t \cdot g(w)$$

$$3.\quad -l_v \cdot g_2(w, t) = g(w).$$

Aus diesen Gleichungen folgt zunächst, daß $g_2(w, t)$ gar nicht von t abhängt. Wir können also für $g_2(w, t)$ auch $g_2(w)$ schreiben. Setzen wir 3. in 1. ein, so erhalten wir

$$l_u \cdot \left(-\frac{1}{l_v} \cdot g(w) - L \right) = w \cdot g(w).$$

Daraus ergibt sich die unbekannte Funktion $g(w)$:

$$g(w) = -\frac{l_u \cdot L}{\frac{l_u}{l_v} + w}.$$

Damit erhält man

$$g_2(w) = \frac{L}{1 + \frac{l_v}{l_u} \cdot w}$$

und

$$f_2(w, t) = \frac{l_u \cdot t}{\frac{l_u}{l_v} + w}.$$

Damit sind also alle Funktionen zum Aufzeichnen der Tafel bekannt.

Die Bereiche seien wie folgt vorgeschrieben:

$$u = 0 \ldots \quad 5$$
$$v = 0 \ldots 100$$
$$w = 5 \ldots 100.$$

Damit die beiden gleichförmigen Außenleitern für u und v gleiche Länge bekommen, wählen wir

$$\frac{l_u}{l_v} = \frac{20}{1}.$$

Der Abstand der beiden Außenleitern werde zu

$$L = 80 \text{ mm}$$

gewählt; für die Zeicheneinheit auf der u-Leiter wählen wir mit Rücksicht auf den verfügbaren Platz

$$l_u = 20 \text{ mm}.$$

Damit wird

$$l_v = 1 \text{ mm}.$$

Die Außenleitern haben dann eine Länge von 100 mm. Es wird jetzt

$$x_2 = g_2(w) = \frac{80}{1 + \frac{w}{20}}$$

$$y_2 = f_2(w, t) = \frac{20 \cdot t}{20 + w} = \frac{t}{80} \cdot x_2.$$

Die Linien $w =$ konst. sind also Geraden parallel zu den Außenleitern, die Linien $t =$ konst. sind, wie man sich leicht überlegt, Geraden durch den Punkt $u = 0$ der u-Leiter.

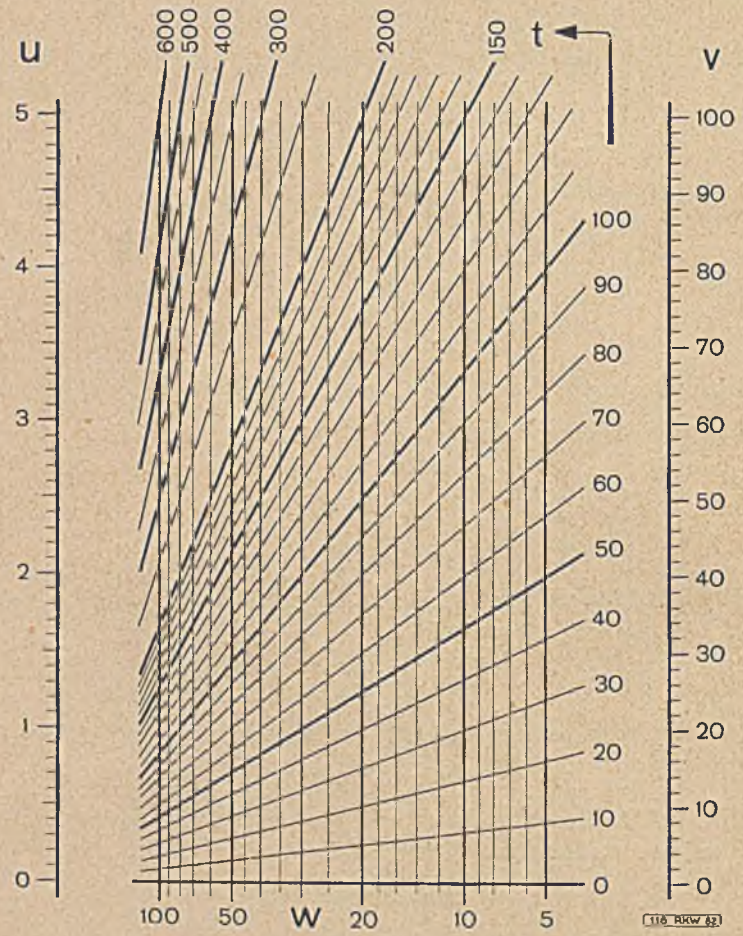


Bild 82. Rechentafel für $t = w \cdot u + v$

In Bild 82 ist die Fluchtlinientafel für die angegebenen Bereiche und Zeicheneinheiten aufgezeichnet. Es sei erwähnt, daß das Netz der w- und t-Linien auch konstruiert werden kann.

Sind u, v und w gegeben, so kann t mit ausreichender Genauigkeit

innerhalb der Bereiche für u, v und w ermittelt werden. Es ergeben sich immer hinreichend scharfe Schnitte.

Dagegen kann in gewissen Gebieten der Tafel die Rechenrichtung nicht beliebig bei ausreichender Genauigkeit umgekehrt werden. So ergeben sich für große w und t sehr ungünstige Schnittverhältnisse, wenn w und t gegeben sind.

Die Tafel Bild 82 ist übrigens nur eine von vielen möglichen Darstellungen. Man vergleiche hierzu den Abschnitt G.

Oft begegnet man der Auffassung, solche Leitertafeln mit einem Netz wären schwer abzuleiten. Wir wollen daher noch einen anderen, oft beschreitbaren und sehr anschaulichen Weg zur Gewinnung solcher Tafeln beschreiben.

Es sei eine Funktion zwischen vier Veränderlichen gegeben. Wir erteilen der Reihe nach den vier Veränderlichen feste Werte und untersuchen, ob bei dieser Beschränkung auf drei Veränderliche sich die Funktion in einer Leitertafel mit drei Trägern darstellen läßt. Von den vier Veränderlichen u, v, w, t sei z. B. t eine solche Veränderliche. Dann existiert eine Darstellung

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_1(u,t); & G_1(u,t); & 1 \\ F_2(w,t); & G_2(w,t); & 1 \\ F_3(v,t); & G_3(v,t); & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (49\,c)$$

Über diese Art der Darstellung vergleiche man unsere Ausführungen unter B V, 1, Gleichungen (23) und (23 a). Der Wert t wird hierbei konstant gehalten. Wenn man nun t ändert, so kann es vorkommen, daß dabei zwei der Leitern, z. B. für u und v, unverändert bleiben. Das ist z. B. der Fall, wenn die Funktionen F_1 und G_1 sowie F_3 und G_3 gar nicht von t abhängen, wenn also die Schlüsselgleichung lautet

$$\begin{vmatrix} F_1(u) & G_1(u) & 1 \\ F_2(w,t) & G_2(w,t) & 1 \\ F_3(v) & G_3(v) & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (49\,d)$$

Jeder konstante Wert t (t ändere man in gleichen Zahlenschritten!) gibt dann einen Leiterträger für w:

$$x_2 = F_2(w, t_1) \quad y_2 = G_2(w, t_1). \qquad (49\,e)$$

Jeder konstante Wert w (w ändere man in gleichen Zahlenschritten!) gibt aber auch einen Leiterträger für t

$$x_2 = F_2(w_1, t) \quad y_2 = G_2(w_1, t). \tag{49f}$$

Es entstehen so die beiden Scharen des Netzes! Die Leitertafel mit einem Netz entsteht also durch Überlagerung einfacher Leitertafeln mit drei Leitern.

Wir betrachten zur Übung ein Beispiel (übrigens möge der Leser die vorhin abgeleitete Tafel unter diesem Gesichtspunkt betrachten). Die Funktion laute

$$A = \frac{100 \cdot a}{\frac{a}{b} + \frac{100 - a}{c}}; \tag{49g}$$

Das Beispiel ist nicht gekünstelt, sondern der Praxis entnommen. Zunächst ist die Formel reichlich unübersichtlich. Wir formen sie etwas um, indem wir rechts und links durch 100 dividieren, rechts durch a kürzen und schließlich rechts und links den Kehrwert bilden. Dann ergibt sich

$$\frac{100}{A} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \cdot \frac{100 - a}{a}$$

oder

$$\frac{\frac{1}{A}}{100} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{\frac{a}{100 - a}}.$$

Für c = konst. ergibt sich eine Formel, die leicht in einer Leitertafel mit drei durch einen Punkt gehenden geraden Trägern dargestellt werden kann. (Erste Grundform, allgemeinerer Fall, siehe B V, 2.)

Für b = konst. erhalten wir eine Formel, die sich, wenn man $1/b$ zu der linken Seite der Gleichung schlägt, in einer Leitertafel der zweiten Grundform darstellen läßt. (Siehe B IV, 1.)

Die Überlagerung aller Tafeln, wobei die Leitern für a und A unverändert gehalten werden, ergibt schließlich die gesuchte Leitertafel. Wir beschränken uns hier auf die stark verkleinerte Wiedergabe der fertigen Tafel (Bild 82a).[1])

Der allgemeine Ansatz der Schlüsselgleichung hätte erheblich mehr Mühe gemacht. Das entstehende Netz besteht aus geraden

1) In der aus drucktechnischen Gründen sehr verkleinert wiedergegebenen Tafel ist die Teilung für den Gebrauch zu klein.

Linien, von denen die einen durch einen endlichen Punkt gehen, die andern parallel sind. Die Konstruktion der Tafel ist daher sehr leicht.

Es ist noch zu sagen, daß A die gesuchte Größe ist und $A = 0$ bzw. $a = 0$ in der Tafel enthalten sein sollte. Unter diesen Bedingungen erhält man eine Tafel mit überall einwandfreien Ablese- und Schnittverhältnissen.

Ein weiteres, einfaches Beispiel ist

$$\sin \alpha = p \cdot V - \frac{q}{V}.$$

Setzt man hier $V =$ konst., so erhält man eine einfache Leitertafel der ersten Grundform mit drei parallelen Leitern für p (gleichförmig), q (gleichförmig) und α (Sinusleiter). Man kann es so einrichten, daß bei verändertem V die beiden Leitern für p und q unverändert erhalten bleiben. Dann entsteht für α und V ein Netz.

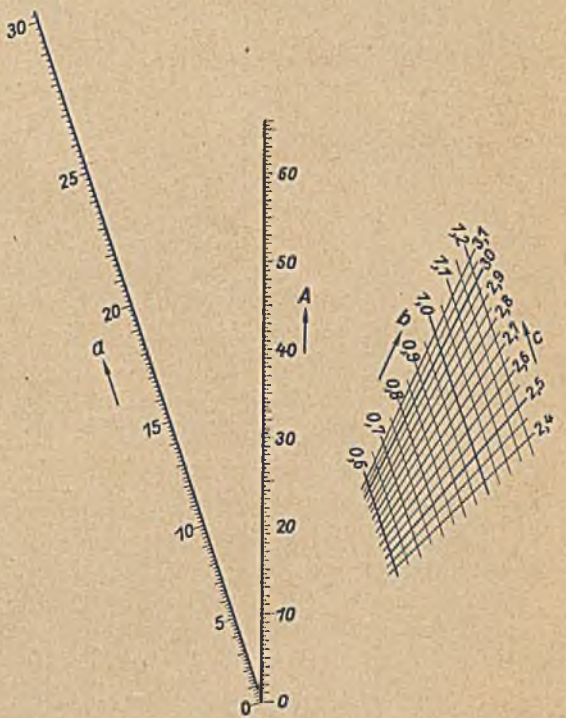


Bild 82a. Leitertafel mit Netz für Gleichung (49g). Verkleinerte Darstellung

Zum Schluß ein weiteres Beispiel: Bei Ermittlung von Leistungsmeßfehlern tritt die Formel auf:

$$F = f' \cdot \cos \varphi_1 + \frac{\delta'}{34{,}4} \cdot \sin \varphi_1.$$

Faßt man hier φ_1 als Parameter auf, so ergibt sich für $\varphi_1 =$ konst. eine einfache Leitertafel der ersten Grundform mit parallelen gleichförmigen Leitern für F, f' und δ'. Variation von φ_1 ergibt zwischen den Außenleitern für f' und δ' ein Funktionsnetz für F und φ_1

(Bild 82b). Eine genaue Ableitung der Tafel findet man in den AWF-Mitteilungen.[1])

Im gleichen Heft ist ein weiteres Beispiel für den Entwurf einer Leitertafel mit einem geradlinigen Netz behandelt, auf das hier be-

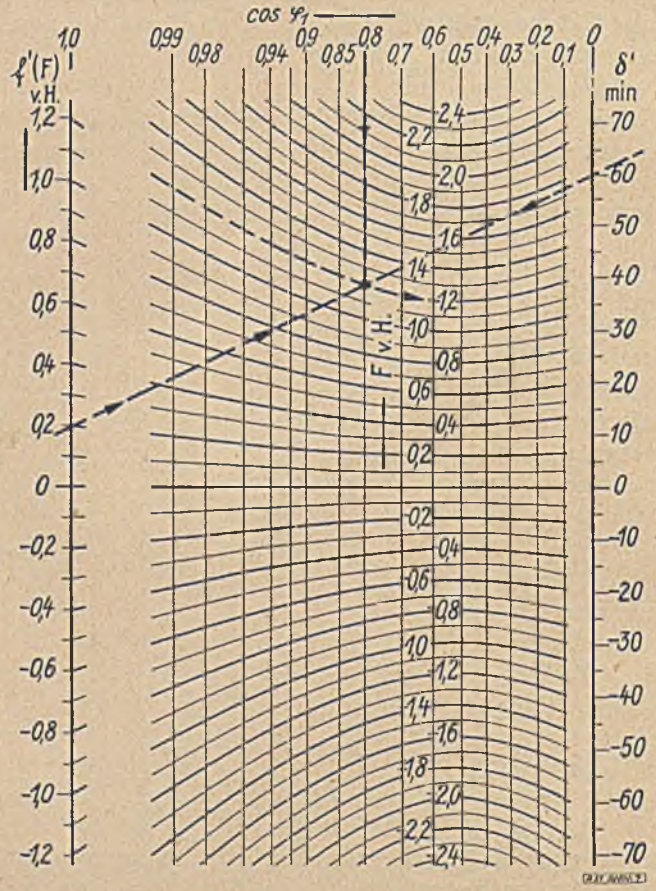


Bild 82b. Leitertafel mit Netz für Leistungsmeßfehler

sonders hingewiesen werden soll.[2]) Der dort gewonnenen Lösung steht eine früher von anderer Stelle angegebene Tafel gegenüber, die weniger gut geeignet ist und mit einem beweglichen Netz arbeitet.

1) M. Zühlke, Die Bestimmung der Leistungsmeßfehler aus den Stromwandlerfehlern. AWF-Mitt. 1938, Heft 9, S. 118 . . . 121.

2) Ders., Die Berechnung v. Vulkanisationszeiten, AWF-Mitt. 1938, H. 9, S. 121...125.

III. Rechentafeln mit besonderen Ablesevorschriften

Bei Netztafeln sind zusammengehörige Werte u, v, w der drei Veränderlichen dadurch gegeben, daß die drei Bildkurven für diese Zahlenwerte durch einen Punkt gehen. Besondere Ablesehilfsmittel werden nicht benötigt. Anders bei Leitertafeln. Hier ist zur Festlegung zusammengehöriger Werte eine Gerade, die Fluchtlinie, notwendig. Eine gerade Linie ist aber leicht zu beschaffen, z. B. durch einen straff gespannten Faden oder ein Lineal. Immerhin bedeutet die Beschränkung auf geradlinige Ablesevorrichtungen eine gewisse Einschränkung, die auch theoretisch dadurch zum Ausdruck kommt, daß nicht alle gegebenen Funktionen zwischen drei Veränderlichen in Leitertafeln dargestellt werden können.

Man kann z. B. an Stelle der Geraden den Kreis als Ablesekurve verwenden. Kreise lassen sich mit großer Genauigkeit leicht auf durchsichtigem Werkstoff aufzeichnen. Drei Werte u, v, w, die auf Leitern verzeichnet sein mögen, sollen dann zusammengehören, wenn die Bildpunkte für u, v, w auf einem Kreis mit bestimmtem Durchmesser liegen. Läßt man auch den Durchmesser des Kreises veränderlich, so kann man ohne Mühe gewisse Funktionen zwischen vier Veränderlichen darstellen.

Auf die Angabe besonderer Tafeln mit kreisförmigem Ablesehilfsmittel wollen wir wegen der geringen Bedeutung verzichten. Wir verweisen wieder auf die Literatur, insbesondere auf Schwerdt, Lehrbuch, S. 245 u. f. Es sind dort Tafeln angegeben

$$\text{1. für} \qquad J = J_s + e^2 \cdot M \tag{50}$$

$$\text{2. für} \qquad D^2 = d^2 + \frac{4}{\pi} \cdot \frac{G}{\gamma}. \tag{51}$$

Ebenso wie bei geradlinigem Ablesehilfsmittel gelingt es auch bei kreisförmigen Ableselinien nur, bestimmte Funktionsklassen darzustellen. Man gewinnt die Schlüsselgleichung, indem man die Bedingung dafür, daß drei Punkte auf einem Kreis liegen, anschreibt und für die darin vorkommenden Koordinaten willkürliche Funktionen einführt.

Rechentafeln mit anderen Ablesevorrichtungen gewinnen wir durch Verallgemeinerung. Wir wollen uns auf drei Grundformen beschränken, weil erstens allgemeinere Fälle heute noch keine große Bedeutung besitzen, zweitens die mathematischen Schwierigkeiten zum Teil erheblich sind.

1. Paralleltafeln

Als Ablesemittel dient ein Parallellineal nach Bild 83.

Die beiden Ablesekanten des Parallellineals werden durch eine Parallelogrammführung immer genau parallel gehalten. Die Anwendung des Strahlensatzes auf die von den Ablesekanten auf den Trägern I und II abgeschnittenen Längen a, b, c und d ergibt

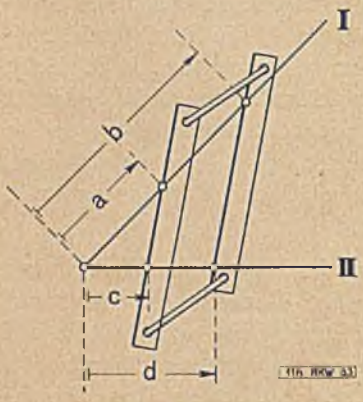


Bild 83. Parallellineal

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \tag{52}$$

oder

$$a \cdot d = b \cdot c. \tag{52a}$$

Es lassen sich also mit Paralleltafeln Funktionen zwischen vier Veränderlichen darstellen, die an die vorstehende Schlüsselgleichung angeglichen werden können.

2. Kreuztafeln

Bei Kreuztafeln dient als Ablesemittel ein sich unter 90 Grad schneidendes Geradenpaar. Die einfachste Tafel dieser Art besteht aus einem Trägerquadrat nach Bild 84.

Aus der Gleichheit der in Bild 84 mit $\overline{AB}$ bzw. $\overline{CD}$ bezeichneten Strecken ergibt sich

$$A - (a + b) = A - (c + d)$$

oder

$$a + b = c + d. \tag{53}$$

In Kreuztafeln können also algebraische Summen mit drei Summanden dargestellt werden. Die Kreuztafeln sind also hinsichtlich ihrer Leistung den Leitertafeln mit Zapfenlinien gleichwertig. Im Gebrauch sind sie nicht so einfach, wenn man nicht durch spezielle Ausbildung die Einstellung des Kreuzes auf gleichzeitig drei Werte erleichtert.

Durch Einführung von Funktionsteilungen kann man Kreuztafeln für allgemeinere Summen entwickeln. Insbesondere gestattet die logarithmische Leiter, Kreuztafeln für Produkte zu verwenden.

Durch Verlagerung der auf den vier Trägern aufgetragenen Leitern, insbesondere Benutzung der in Bild 84 unterdrückten Verlängerungen der Quadratseiten, gelingt es, als Ablesemittel einen rechten Winkel zu benutzen.

Es ist auch möglich, statt des Trägerquadrates ein Trägerrechteck zu verwenden. Grundsätzlich neue Funktionstypen werden auf diese Weise aber nicht gewonnen.

Natürlich können die besprochenen Tafelformen auch dadurch verallgemeinert werden, daß man an die Stelle der geradlinigen Träger krummlinige Träger setzt. Es ist dadurch möglich, eine große Menge verschiedener Funktionsklassen darzustellen. Größere Bedeutung haben aber solche Tafelformen bis jetzt nicht erlangt.

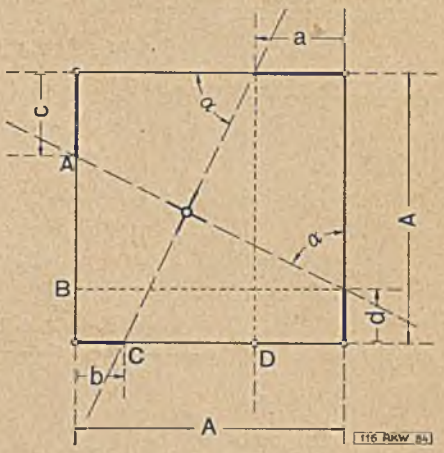


Bild 84.
Ableitung der Schlüsselgleichung für Kreuztafeln

3. Dreistrahltafeln

Diese Tafeln können aus den Dreiecksnetzen gewonnen werden, wenn man bis auf die drei Dreiecksseiten das Netz unterdrückt und an die Stelle des Netzes einen Dreistrahl setzt, der die drei Dreiecksseiten im rechten Winkel schneidet (Bild 85).

Die Summe der von dem Dreieck abgeschnittenen Strecken des Dreistrahls beträgt nach den früheren Überlegungen über Dreieckskoordinaten:

$$a + b + c = H = \text{konst.} \quad (44)$$

In Dreieckstafeln können also Funktionen mit der Grundform

$$f_1(u) + f_2(v) + f_3(w) = \text{konst.} \quad (54)$$

dargestellt werden.

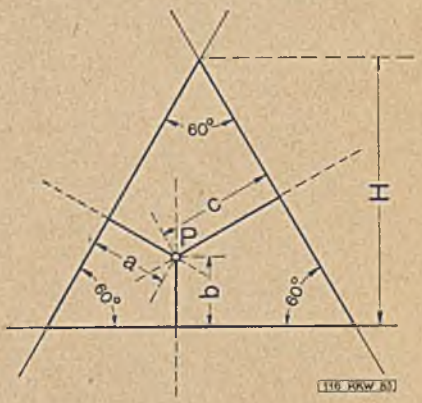


Bild 85. Aufbau einer Dreistrahltafel

Lassen wir die Höhe des Dreiecks zu Null werden, so wird aus dem Dreieck ein symmetrischer Dreistrahl. Die Tafel vermag dann Funktionen der Grundform

$$f_1(u) + f_2(v) + f_3(w) = 0 \qquad (54\,a)$$

darzustellen (Bild 86).

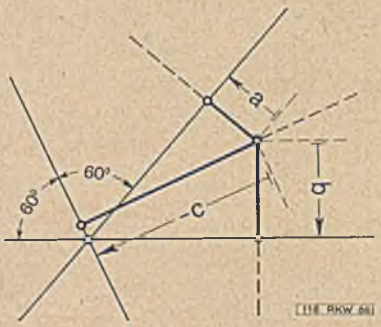


Bild 86. Ausgeartete Dreistrahltafel

Es sei darauf hingewiesen, daß es bei dieser Tafelform nicht mehr notwendig ist, den Dreistrahl parallel zu verschieben. Das Rechenergebnis der Tafel wird von einer Drehung des Dreistrahls unabhängig.

E. Sonderrechenstäbe

Die bis jetzt besprochenen Rechenhilfsmittel verwenden entweder Funktionsleitern oder aus Funktionsleitern abgeleitete Kurvenscharen. Allen Tafeln ist aber eigentümlich, daß die Funktionsleitern und -scharen unveränderlich gegeneinander festgelegt sind; nur das Ablesehilfsmittel erfährt eine Verschiebung bzw. Verdrehung. Nichts wesentlich Neues bringt es, wenn man das Ablesemittel festhält und die Funktionsleiteranordnung verschiebt.

Über den Rahmen der bisher besprochenen Hilfsmittel gehen aber Rechenvorrichtungen hinaus, bei denen die einzelnen Darstellungselemente, z. B. die Funktionsleitern, gegeneinander verschieblich angeordnet sind. Aus praktischen Gründen beschäftigen wir uns im nachstehenden nur mit parallel zueinander geführten Trägern bzw. Netzen. In einem ersten Abschnitt sollen die einfachen Gesetzmäßigkeiten solcher Leiteranordnungen besprochen werden.

I. Das Rechnen mit parallel verschieblichen Strecken

Strecken werden, wie das in den Grundlagen eingehend erläutert ist, als Bilder von Zahlen gebraucht. Soll z. B. eine Zahl u Darstellung in einer Strecke finden, so wählt man eine Zeicheneinheit $l_{(mm)}$ und trägt eine Strecke der Länge

$$a = l \cdot u$$

auf einer Geraden vom willkürlich festlegbaren Anfangspunkt aus auf. Auch negative Zahlen können auf diese Weise dargestellt werden, wenn man auf der Geraden eine positive Richtung festlegt.

Hat man auf diese Weise zwei Zahlen u und v mit gleicher Zeicheneinheit l auf zwei verschiedenen Geraden aufgetragen, so erhält man die Summe dieser zwei Zahlen, indem man die Geraden mit gleichem positivem Richtungssinn zur Deckung bringt und nun eine Gerade so lange verschiebt, bis der Endpunkt der ersten Strecke $l \cdot u$ mit dem

Anfangspunkt der zweiten Strecke $l \cdot v$ zusammenfällt. Die Strecke vom Anfangspunkt der ersten bis zum Endpunkt der zweiten Strecke ist dann

$$l \cdot u + l \cdot v = l(u + v),$$

also das Bild der Summe zweier Zahlen u und v.

Aus praktischen Gründen läßt man die Geraden nicht zusammenfallen, sondern legt sie nur parallel. Statt Anfangs- und Endpunkt zusammenfallen zu lassen, bringt man den Anfangspunkt der zweiten Strecke auf eine Gerade, die senkrecht zu den Trägergeraden verläuft und durch den Endpunkt der ersten Strecke geht. Die Summe mißt man auf einer dritten Geraden zwischen zwei senkrechten Geraden durch den Anfangspunkt der ersten und den Endpunkt der zweiten Strecke (Bild 87).

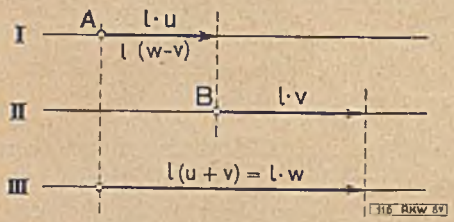


Bild 87. Addition von gerichteten Strecken

Das angegebene Verfahren kann sofort auf mehr als zwei Summanden ausgedehnt werden, indem man den Anfangspunkt einer weiteren Strecke mit dem Endpunkt der zweiten zur Deckung bringt usw. (Wir wollen immer sagen, daß sich zwei Punkte decken, wenn sie auf einer Geraden liegen, die zu den parallelen Trägergeraden senkrecht verläuft.)

Die Rechenrichtung kann umgekehrt werden. Aus

$$w = u + v$$

folgt

$$u = w - v.$$

Nach Bild 87 rechnet man das so, indem man die Endpunkte der Strecken zur Deckung bringt. Das Ergebnis ist dann die Strecke zwischen Anfangspunkt der ersten und Anfangspunkt der zweiten Strecke.

Der beschriebenen Art der Streckenaddition nach Bild 87 steht eine andere Art gegenüber, bei der die positive Richtung auf der zweiten Geraden umgekehrt ist. Man bringt dann die Endpunkte (bzw. Anfangspunkte) zur Deckung und erhält das Ergebnis als Strecke zwischen den Anfangspunkten (bzw. Endpunkten). Siehe Bild 88a und b.

Praktisch erreicht man die Parallelverschieblichkeit der Geraden dadurch, daß man die Geraden auf schmalen Zungen anordnet, die in einem Rahmen gehalten werden und die gegeneinander verschoben werden können. Wendet man das in Bild 88b angedeutete Verfahren an, bei dem die Anfangspunkte in Deckung bleiben, so kann man auch zwei Geraden unverschieblich gegeneinander auf einer Zunge unterbringen.

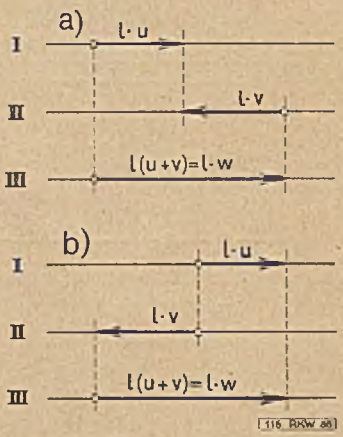


Bild 88a u. 88b. Addition von Strecken

Praktisch bedeutungsvoll wird das Rechnen mit parallelverschieblichen Strecken erst, wenn man auf den verschiedenen Geraden Funktionsleitern anordnet. Aus den vorstehenden Ausführungen ergibt sich unmittelbar, daß die Rechenvorrichtungen mit parallelverschieblichen Strecken zur Darstellung allgemeiner Summen bzw. Differenzen mit zwei und mehr Summanden geeignet sind. Die allgemeine Schlüsselgleichung lautet demnach

$$f_1(w) = f_2(u) \pm f_3(v) \pm \cdots \pm f_n(t). \quad (55)$$

Alle Beziehungen, die durch Logarithmieren oder andere Rechenoperationen auf diese Form gebracht werden können, sind zur Darstellung geeignet. Insbesondere können also Produkte und Quotienten bei Verwendung logarithmischer Leitern dargestellt werden.

Für die Anwendungen sind einige Rechenregeln von großer Bedeutung:

1. Es ist zweckmäßig, die Zungen mit dem ersten Summanden und dem Ergebnis (der Summe) gegeneinander unverschieblich zu machen und so anzuordnen, daß die Anfangspunkte beider Geraden zur Deckung kommen (Bild 89).

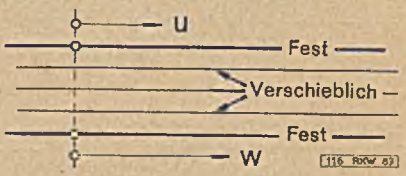


Bild 89. Aufbau von Rechenstäben

2. Sind die Leitern für u und w sehr lang, werden aber nur innerhalb eines beschränkten Bereiches benötigt, so brauchen die Anfangspunkte nicht mehr auf den Zungen vorhanden zu sein, sondern sie können unterdrückt sein, d. h. links bzw. rechts von den festen Zungen liegen. Das gilt auch für Zungen mit zwei Geraden, deren Anfangs-

punkte in Deckung liegen (Bild 90) und die die Differenz zweier Strecken darstellen.

3. Jede Zunge kann um 180° gedreht verwendet werden, ohne das Ergebnis der Rechnung zu ändern. Diese Regel ist in Bild 91 veranschaulicht.

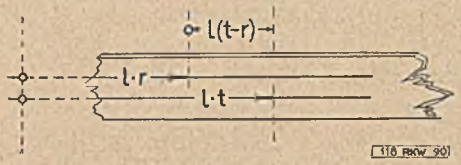


Bild 90.
Unterdrückte Anfangspunkte auf Rechenstabzungen

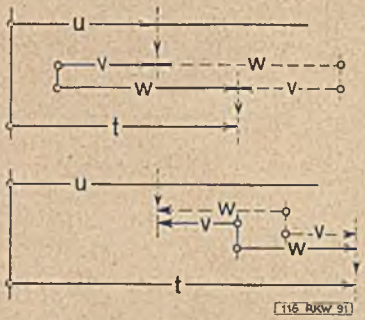


Bild 91. Umkehrbarkeit der Rechenstabzungen

4. Bei zwei auf einer Zunge fest angeordneten Trägergeraden können die Anfangspunkte der Geraden um ein konstantes Stück a gegeneinander verschoben werden, wenn zugleich andere Trägergeraden auf anderen Zungen eine Verschiebung erfahren, deren Summe gleich a ist. Diese Regel folgt unmittelbar aus den Gleichungen

$$u + v = w$$
$$(u + a) + v = (w + a)$$
$$u + (v + a) = (w + a).$$

Praktisch wirkt sich diese Regel beim Entwurf so aus, daß alle Teilungen in willkürlicher Weise auf den Zungen angeordnet werden können. Nur die letzte Zunge muß dann eine entsprechende Verschiebung erhalten, die man errechnen oder auch experimentell bestimmen kann (Methode des Beispiels).

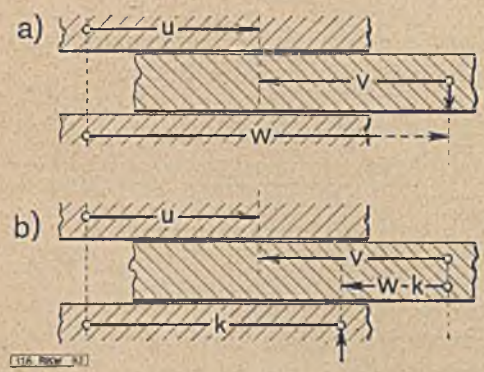


Bild 92a und 92b.
Erweiterung des Ablesebereichs auf Rechenstabzungen

5. Beim Entwurf eines Rechenstabes kann es vorkommen, daß ein Ergebnis rechts vom rechten Zungenende der Ergebnisleiter auftaucht. Man kann in solchen Fällen eine Ablesung ermöglichen, indem man das Ergebnis in ein konstantes

Stück und einen veränderlichen Rest zerlegt. Das konstante Stück wird auf der festen Ergebnisleiter durch einen Pfeil gekennzeichnet. Der Rest wird auf der darüberliegenden beweglichen Zunge aufgetragen, an die Teilstriche aber die Gesamtsumme angeschrieben (Bild 92).

6. Soll vom festen Anfangs- oder Endpunkt einer Strecke auf eine benachbarte Zunge übergegangen werden, so empfiehlt sich, die Übergangsrichtung durch einen Pfeil anzudeuten (Bild 92b).

II. Der AWF-Sonderrechenstab

Die Verwirklichung eines Sonderrechenstabentwurfes in den gebrauchsfertigen Stab ist im allgemeinen nur dann wirtschaftlich, wenn ein billiger normaler Rechenstabkörper mit ausreichenden mechanischen Eigenschaften zur Verfügung steht. Beispiele solcher vom AWF herausgegebenen Sonderrechenstäbe nach der Bauart Dr.-Ing. Sechase zeigen die Bilder 93 und 93a. Die Zungen bestehen aus Zeichenkartonstreifen, die durch eine Zellglashülle zusammengehalten werden. Zum Einstellen nicht benachbarter Leitern auf Deckung dient eine durchsichtige Deckplatte mit feinen Haarrissen.

Im Anhang H III, 1 ist ein Verzeichnis der vom AWF herausgegebenen Sonderrechenstäbe aufgenommen worden.

III. Einige Beispiele

Wir finden in der Literatur verstreut als auch besonders in den AWF-Mitteilungen (siehe die ausführliche Zusammenstellung im Anhang) eine große Zahl ausgeführter Stäbe gezeichnet und ihre Ableitung gegeben. Wir können uns daher mit wenigen Beispielen begnügen. Es sollen dabei die Lösungen hervorgehoben werden, bei denen durch besondere Kunstgriffe der Anwendungsbereich der Sonderrechenstäbe erweitert wird.

Wir haben unter E I gesehen, daß man mit Rechenstäben alle Funktionen zwischen beliebig viel Veränderlichen darstellen kann, die auf die Grundform

$$f_1(w) = f_2(u) \pm f_3(v) \pm \cdots \pm f_n(t) \qquad (55)$$

gebracht werden können. Außer eigentlichen Summen sind also auch Produkte darstellbar.

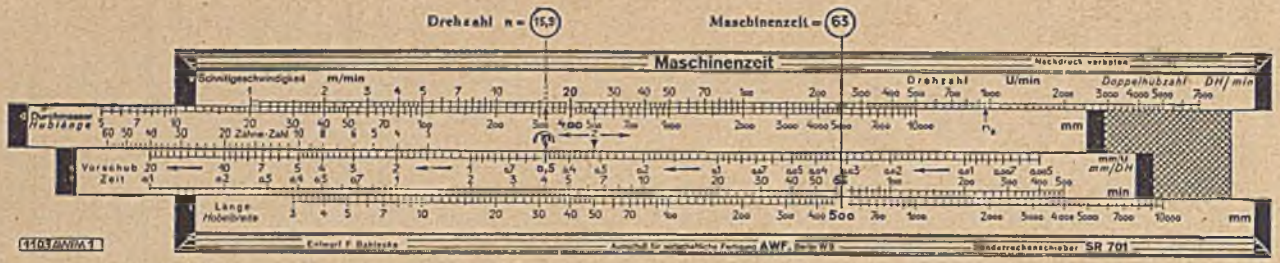


Bild 93. Sonderrechenstab SR 701 Maschinenzeit

Bild 93 a. Sonderrechenstab SR 732 Tiefziehen runder Hohlteile

Dagegen ist eine Gleichung der nachstehenden Form nicht mehr ohne weiteres darstellbar:

$$w = u \cdot v(u + v). \tag{56}$$

Wir können diese Formel aber auch anders schreiben:

$$w = u^3 \cdot \frac{v}{u} \cdot \left(1 + \frac{v}{u}\right). \tag{56a}$$

Jetzt kommt nur noch u und das Verhältnis $\frac{v}{u}$ vor. (Man vergleiche hierzu die Ausführungen unter B III, 5.)

$$w = u^3 \cdot F\left[\frac{v}{u}\right] = u^3 \cdot F(t) = u^3 \cdot r, \tag{56b}$$

worin $$r = F\left[\frac{v}{u}\right] = \frac{v}{u}\left[1 + \frac{v}{u}\right] = \frac{v}{u} + \left[\frac{v}{u}\right]^2 = t + t^2.$$

Trägt man also auf dem Rechenstab 3 log u und log r als Leitern auf, so ist eine Darstellung möglich. Nun kann aber mit dem gleichen Rechenstab der Wert $\frac{1}{t} = \frac{u}{v}$ ausgerechnet werden, und zwar unter Verwendung der gleichen logarithmischen Leiter für u und ohne neue Einstellung der beweglichen Zunge. Das Ergebnis dieser Rechnung wird also an der Leiter für u abgelesen. Statt nun an der Leiter für $\log r = \log F(t)$ die Werte von r anzuschreiben, können auch die zugehörigen $\frac{1}{t}$ Werte angeschrieben werden. Dieses Verfahren nennt man Zahlensprung (oder nach F. Bahlecke Zahlenbrücke).

Die Rechnung gestaltet sich nun so, daß man mit einer Rechenstabeinstellung

$$\frac{1}{t} = \frac{u}{v}$$

errechnet und mit der gleichen Einstellung auf der Leiter für r mit dem gefundenen $\frac{1}{t}$ weiterrechnet. Der Umstand, daß der Wert t an zwei verschiedenen Stellen des Rechenschiebers vorkommt, kann nach den bisherigen Erfahrungen nicht als Nachteil gelten. Bild 94 zeigt den Stab für die vorliegende Aufgabe in verkleinertem Maßstab. Die Bereiche sind

$$u = 1 \ \ldots \ 10;$$
$$v = 1 \ \ldots \ 5; \quad v < u$$
$$(w = 2 \ \ldots 750);$$
$$(t = 0{,}1 \ldots \ 1).$$

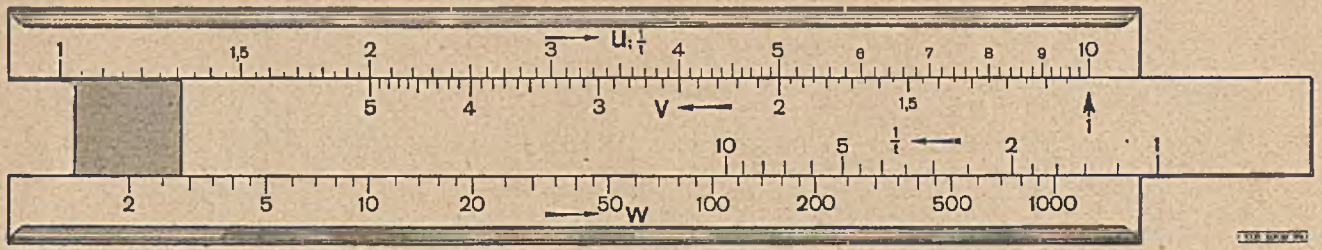


Bild 94. Rechenstab für $w = u \cdot v \cdot (u + v)$

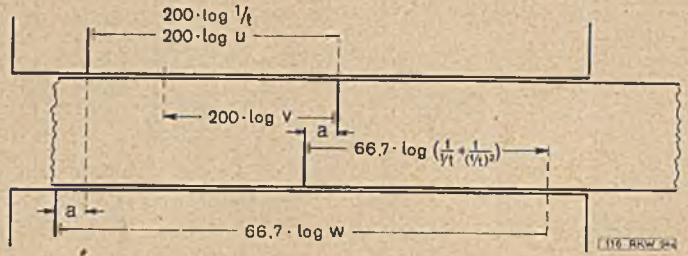


Bild 94 a. Aufbau und Ableseschlüssel für Bild 94

Als Teilungslänge stehen 200 mm zur Verfügung. Bild 94a enthält die Angaben für den Entwurf. Die Leiter für $\log(t + t^2)$ ist um das Stück $a = 10$ mm nach links verschoben und nach $1/t$ beziffert. Die gleiche Verschiebung hat also auch die Leiter für w erfahren.

Der Rechenstab von Bild 94 ist eingestellt für $u = 10$.

Der Rechenstab kann z. B. benutzt werden, um die zulässige Strombelastung von Rechteckschienen zu ermitteln. Man vergleiche Bild 40, wo eine Leitertafel für den gleichen Zusammenhang dargestellt ist.

Das angegebene Verfahren der Zahlenbrücke kann leicht auch auf andere Fälle angewendet werden. Man hat zu versuchen, aus zwei oder mehr der vorkommenden Veränderlichen eine neue Hilfsveränderliche t zu bilden, die mit dem Rechenstab errechnet werden kann. Die darzustellende Funktion möge sich dann aus den Veränderlichen und einer Funktion

$$r = f(t)$$

der Hilfsveränderlichen so zusammensetzen, daß sie mit dem Rechenstab errechnet werden kann.

Damit die Anwendung des Verfahrens nicht zu kompliziert wird, muß man allerdings fordern, daß alle Veränderlichen außer der Hilfsveränderlichen t nur einmal eingestellt zu werden brauchen. Zur Erläuterung verweisen wir auf den Sonderrechenstab SR 708 zur Berechnung von Wellen auf Biegung und Verdrehung nach der Bachschen Formel

$$d = 10 \sqrt[3]{\frac{3200 \cdot M_b}{\pi \cdot k_b}} \left[0{,}35 + 0{,}65 \sqrt{1 + \left(\frac{\alpha_0 \cdot M_b}{M_d}\right)^2} \right]. \qquad (57)$$

(Die Formel entspricht nicht der in D I behandelten für die gleiche Aufgabe. Über die Bewertung der beiden Formeln in der Praxis vergleiche man die Fachliteratur.)

Man berechnet nun mit dem Rechenstab zunächst

$$t = \frac{\alpha_0 \cdot M_b}{M_d}.$$

Die eckige Klammer faßt man dann als Funktion r von t auf

$$r = f(t) = 0{,}35 + 0{,}65 \cdot \sqrt{1 + t^2}.$$

Es wird also

$$d = 10 \cdot \sqrt[3]{\frac{3200 \cdot M_b}{\pi \cdot k_b}} \cdot r.$$

Diese Funktion kann mit dem Rechenstab errechnet werden. Das in der Hilfsveränderlichen t vorkommende M_b kommt nochmals getrennt vor. Es braucht aber nur einmal eingestellt zu werden, indem man die beiden Zungen des Stabes unter M_b mit Hilfe der Haarstriche der Deckplatte einstellt.

Bild 95 zeigt eine Wiedergabe des besprochenen Stabes.

Wir konnten den Anwendungsbereich von Fluchtlinientafeln dadurch erweitern, daß wir an Stelle einer Leiter ein Funktionsnetz setzten

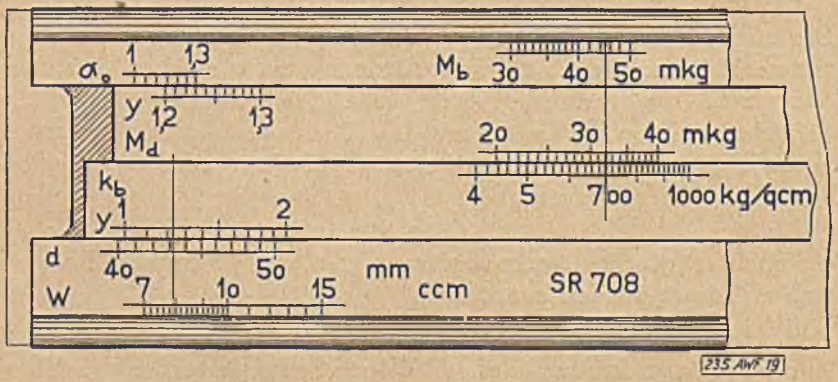


Bild 95. Rechenstab für eine Aufgabe der Festigkeitslehre

(siehe D II). Dieses Verfahren kann unter gewissen Umständen auf Rechenstäbe übertragen werden.

Ein der Zahlenbrücke gleichwertiges Verfahren gewinnen wir in folgender Weise: Es sei eine Funktion darzustellen, die sich in zwei Teile aufspalten lassen soll:

$$t = f_1(u_1) + f_2(v_1) + f_3(w_1) + \ldots \tag{58}$$

$$r = g_1(u_2) + g_2(v_2) + g_3(w_2) + \ldots$$

Sowohl t als auch r sind also durch Rechenstäbe darstellbar. Zwischen t und r gelte die Beziehung

$$r = F(t; p), \tag{59}$$

wo p noch eine weitere Veränderliche bedeutet.

Eine der Zungen wird nun mit einem Funktionsnetz versehen. Man kann sie zu diesem Zweck auf Kosten der anderen etwas breiter gestalten.

Man läßt p in gleichen Zahlenschritten fortschreitende Werte $p_1, p_2, p_3 \ldots$ annehmen. Für jedes p_n zeichnet man in das in Bild 96 gezeichnete Koordinatensystem eine Kurve II

$$x = l_r \cdot F\left(\frac{l}{l_t} \cdot y;\ p_n\right) \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

und eine Kurve I

$$x = l \cdot y.$$

Die Zeicheneinheiten l, l_r und l_t wählt man so, daß die Kurven I und II nicht zu flach, aber auch nicht zu steil verlaufen.

Man richtet es nun so ein, daß die Summe t mit der Zeicheneinheit l_t an dem unteren, die Summe r mit der Zeicheneinheit l_r am oberen

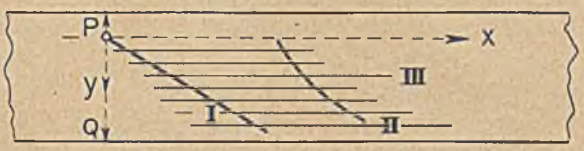


Bild 96. Rechenstabzunge mit Funktionsnetz

Rande der Zunge Bild 96 erscheint, und zwar stellen wir die Zunge Bild 96 so ein, daß der Anfangspunkt von r mit dem Pfeil P zusammenfällt. Weiterhin wird die Größe t auf der unteren Zunge so eingestellt, daß ihr Anfangswert mit Q zusammenfällt. Den Endpunkt von t lotet man nun mit einem Haarstrich der Deckplatte auf die Kurve I herauf. Den Schnittpunkt überträgt man mittels der waagerechten Hilfsschar III auf die zum gewählten p gehörige Kurve II. Dann liegt der Endpunkt von r senkrecht darüber. Man stellt ihn mit einem Haarstrich ein.[1])

Stäbe nach diesem Prinzip sind z. B. möglich für die folgenden Beziehungen:

1. $$T = T_\infty \cdot \left[1 - e^{-\frac{t}{c}}\right] \tag{60}$$

2. $$p_1 \cdot {v_1}^n = p_2 \cdot {v_2}^n. \tag{61}$$

F. Bahlecke hat das Verfahren treffend als Funktionsbrücke bezeichnet.

1) Das Verfahren ist noch erheblicher Verallgemeinerung fähig. So können z. B. P bzw. Q noch Verschiebungen gegenüber dem Koordinatensystem (x, y) erfahren; weiterhin kann auch die Kurve I krummlinig sein und gegebenenfalls noch einen weiteren Parameter q enthalten.

Kann eine darzustellende Funktion auf die Form

$$f_1(u) + f_2(v) + \cdots = F(p, t) \tag{62}$$

gebracht werden, so kann man eine Darstellung unter Zuhilfenahme eines Funktionsnetzes gewinnen, indem man auf einer Zunge das Funktionsnetz

$$x = l \cdot F(p, y) \quad p = p_1, p_2, p_3 \cdots$$

$$x = l \cdot F(y, t) \quad t = t_1, t_2, t_3 \cdots$$

aufzeichnet (Bild 97).

Bild 97. Rechenstabzunge mit Funktionsnetz

Der Pfeil P bestimmt den Anfangspunkt, der Schnittpunkt der p- mit der t-Linie des Funktionsnetzes den Endpunkt der Leiter für $F(p, t)$.

In dieser Weise können z. B. dargestellt werden:

1. $$G = \frac{\pi}{1000} \cdot L \cdot \gamma \cdot (d \cdot s + s^2) \tag{63}$$

2. $$d = 10 \sqrt[3]{\frac{32}{\pi \cdot k_b} \cdot \sqrt{M_b^2 + M_d^2}}. \tag{64}$$

Wir wollen das Kapitel über Sonderrechenstäbe nicht schließen, ohne auf andere, für die Gewinnung von Rechenstäben wertvolle Hilfsmittel hingewiesen zu haben. Ein Hilfsmittel ist die Methode der freien Parameter. Wir haben in Abschnitt B VI gezeigt, wie durch geschickte Einführung von Parametern aus zunächst unhandlichen Formeln solche entstehen, bei denen eine Produktdarstellung gewonnen ist, die sich zur Darstellung in Rechenschieberform gut eignet. In einem Rechenstab von Amsel und Seelos, dem Viskokalkulator, ist hiervon Gebrauch gemacht worden. Der Stab ist aus-

führlich in den Rechentechnischen Berichten des AWF, Jahrgang 1939, vom Verfasser beschrieben worden. Der Stab benutzt außerdem eine Reihe von Hilfsmitteln, wie sie im vorstehenden geboten wurden, z. B. Schieber mit Funktionsnetz und Zahlenbrücke.

Ein ausgezeichneter Rechenstab zur Berechnung von Schraubenfedern ist von der Firma Mauser auf den Markt gebracht worden (DRP). Der Stab benutzt ein krummliniges Funktionsnetz auf einem gemäß einer Veränderlichen schwenkbaren Schieber. Eine Veröffentlichung über den Aufbau des in vieler Beziehung sehr guten und interessanten Stabes ist in den Rechentechnischen Berichten des AWF erfolgt.[1])

Gerade die Erfahrung der letzten Jahre hat gelehrt, daß wir in der Ausstattung der Rechenstäbe und in der Darstellung komplizierter Zusammenhänge in Form von Rechenstäben noch lange nicht am Ende sind. Für den immer nach Fortschritt strebenden Rechentechniker bietet sich hier ein dankbares Betätigungsgebiet. Besonders aussichtsreiche Perspektiven eröffnen sich bezüglich der Anwendung von Näherungsmethoden, über die im nächsten Kapitel ganz kurz gesprochen werden wird. Auch hierüber findet man in den Rechentechnischen Berichten einige Hinweise.

1) AWF-Mitt. 1941, Heft 7/8, S. 50...52.

F. Hinweise auf einige neuzeitliche Rechenverfahren

Die vorhergehenden Kapitel stellen ohne größere mathematische Hilfsmittel die einfacheren Ansätze der Rechentechnik für den Praktiker zur Verfügung. Das ist auch der Hauptzweck dieses Buches. Für einfache Fälle wird dies immer ausreichen.

Dennoch dürfen wir nicht ganz an der Theorie neuzeitlicher Verfahren vorbeigehen, schon um dem auf diesem Gebiet Weiterstrebenden eine erste Anregung zur Beschäftigung mit diesen wichtigen und interessanten Gebieten zu geben. Wer in sich den Drang und das Zeug fühlt weiterzuarbeiten, wird aus dem nachfolgenden Abschnitt erste wertvolle Anregungen schöpfen. Die Darstellung ist aber in keiner Weise vollständig und soll es auch nicht sein. Den Lehrbüchern über Nomographie und dem Schrifttum über Rechentechnik wird man weitere Einzelheiten entnehmen können.

I. Projektive Verzerrungen

Sehr oft besitzen die nach den früheren Abschnitten entwickelten Netztafeln und insbesondere Leitertafeln eine recht unhandliche Form, die sich nicht durch Maßstabsänderung beseitigen läßt. Der Grund liegt darin, daß mit Rücksicht auf die Interpolationsgenauigkeit Mindestzeicheneinheiten für bestimmte Funktionsleitern festgelegt sind (siehe A II, 2). Zeichnet man aber die Funktionsleitern mit dieser Zeicheneinheit, so können sie, wenn die darzustellenden Bereiche fest vorgegeben sind, außerordentlich unhandlich werden.

Als klassisches Beispiel betrachten wir die in Abschnitt B III, 2 behandelte Leitertafel für die Aufgabe

$$w = \sqrt{2u^2 + v^2} \tag{8}$$

oder

$$2u^2 + v^2 = w^2. \tag{8a}$$

(Bild 31). Bereits eine Verdoppelung der darzustellenden Bereiche für u und v würde eine Verlängerung der Leitern auf das 4fache ergeben. Da mit Rücksicht auf ausreichende Interpolationsgenauigkeit bis zu Werten von $u = v = 1$ herunter eine Verkleinerung der Zeicheneinheiten nicht in Frage kommt, erhält man eine sehr große Tafel. Bei weiterer Vergrößerung der Bereiche wird die Tafel praktisch unausführbar.

Ein weiterer Nachteil der Tafel ist der, daß stets die großen Werte der Veränderlichen besonders bevorzugt werden, welche Zeicheneinheiten man auch immer wählen möge.

Wir versuchen nun die beschriebenen Nachteile dadurch zu vermeiden, daß wir die fertige Tafel einer Verzerrung unterwerfen, durch die die Leitern verkürzt werden und die Teilstrichanordnung, also das Leitergefüge, günstig beeinflußt wird. Derartige Verzerrungen müssen aber so beschaffen sein, daß sie an der Ablesevorschrift der Tafel nichts ändern. Bei Leitertafeln sind also nur solche Verzerrungen möglich, bei denen alle Ablesegeraden, d. h. überhaupt alle geraden Linien, in Geraden übergehen. Bei geradlinigen Netztafeln wird man aus Gründen der einfachen Tafelherstellung die gleiche Forderung stellen.

Es ist bekannt, daß perspektivische Abbildungen, wie sie beim Photographieren entstehen, die Eigenschaft haben, gerade Linien wieder in gerade Linien überzuführen. Bildet man also eine Leitertafel auf der Platte eines photographischen Apparates ab, so ist das entstehende Gebilde eine Leitertafel für den gleichen Funktionszusammenhang. Es ist nun bekannt, daß auf einer photographischen Aufnahme auch weitentfernte Punkte abgebildet werden können, ohne daß die nähere Umgebung eine zu starke Drängung erfährt. Durch geeignete Lage des Aufnahmeapparates kann also eine handlichere Darstellung gewonnen werden.

In der Praxis bedient man sich besser eines etwas allgemeineren und bequemeren Verfahrens. Die perspektivischen Abbildungen sind nämlich Sonderfälle allgemeinerer Abbildungen, die man

projektive Abbildungen

nennt. Man kann sie in folgender Weise angeben:

Wir betrachten eine Ebene mit dem rechtwinkligen Koordinatensystem (x, y) und eine Bildebene mit dem Koordinatensystem (x_1, y_1).

Dann gehen bei einer projektiven Abbildung die Punkte der ersten Ebene (x, y) in die folgenden Bildpunkte der Bildebene über:

$$x_1 = \frac{A_{11} \cdot x + A_{12} \cdot y + A_{13}}{A_{31} \cdot x + A_{32} \cdot y + A_{33}} \tag{65}$$

$$y_1 = \frac{A_{21} \cdot x + A_{22} \cdot y + A_{23}}{A_{31} \cdot x + A_{32} \cdot y + A_{33}}. \tag{66}$$

Die Nenner beider Brüche sind gleich! Die insgesamt neun Konstanten $A_{11} \ldots A_{33}$ bestimmen die Art der Abbildung. Offenbar sind aber von diesen Konstanten nur acht wesentlich, weil man die Brüche mit einer beliebigen Zahl erweitern kann. Man kann also acht Bedingungen erfüllen. Z. B. kann man vier gegebene Punkte der ersten Ebene in vier bestimmte Punkte der zweiten Ebene überführen. Durch eine solche Zuordnung sind aber die Konstanten $A_{11} \ldots A_{33}$ auch hinreichend bestimmt.

Man kann nun beweisen, daß bei einer allgemeinen projektiven Abbildung eine gleichförmige Leiter in eine projektive Leiter übergeführt wird, wie wir sie in A II, 5 eingehend betrachtet haben. Aus diesem Grunde spielen projektive Leitern in der Rechentechnik eine besondere Rolle.

Wir wollen das Verfahren der projektiven Verzerrung an einem einfachen Beispiel darlegen:

Die Tafel Bild 31 soll durch projektive Abbildung so verzerrt werden, daß der Bereich 1...20 für u und v mit ausreichender Genauigkeit wiedergegeben wird.

Die Berücksichtigung der angegebenen Bereiche in der Tafel nach Bild 31 ist bei dem rechentechnisch sehr ungünstigen Gefüge der Quadratleiter auf den in diesem Buche zur Verfügung stehenden Papierformaten nur möglich, wenn man auf ein Rechnen in den unteren Bereichen um 1 herum gänzlich verzichtet. Wir verzerren daher die Tafel durch Zuordnung von vier Punkten. Statt vier Punkte zu wählen, ist es in unserem Falle bequemer, drei Punkte und eine Gerade der unverzerrten Tafel Bild 97a und der verzerrten Tafel Bild 97b einander zuzuordnen.

Von den neun Konstanten der projektiven Darstellung kann man eine willkürlich gleich 1 setzen. Wir wählen hierzu $a_{32} = 1$ (1. Konstante).

I. Weiterhin ist es oft bequem, den unendlich fernen Punkt, der Träger der drei Trägergeraden ist, zu betrachten. Wir bestimmen daher

$$x = 0;\ y \to \infty \text{ geht über in } x_1 = 75;\ y_1 = 220.$$

Daraus folgt sofort

$$a_{12} = 75 \text{ (2. Konstante)} \qquad a_{22} = 220 \text{ (3. Konstante)}.$$

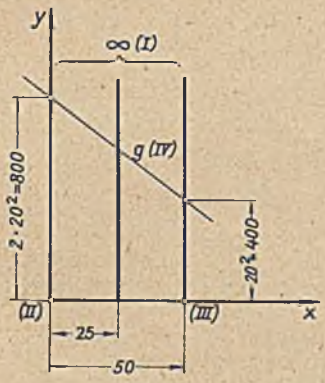


Bild 97a. (x, y)-Ebene

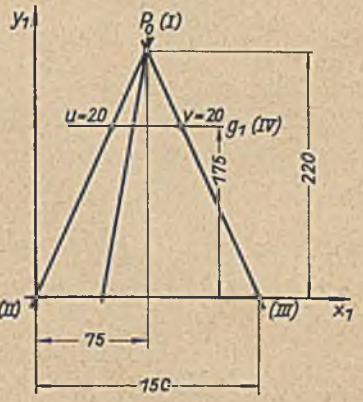


Bild 97b. (x_1, y_1)-Ebene

II. Der Nullpunkt soll in den Nullpunkt übergehen. Auch diese Festsetzung über die Lage der Koordinatensysteme ist oft nützlich.

$$x = 0;\quad y = 0 \quad \text{geht über in} \quad x_1 = 0;\quad y_1 = 0.$$

Daraus folgt

$$a_{13} = 0 \text{ (4. Konstante)} \qquad a_{23} = 0 \text{ (5. Konstante)}.$$

III. Der Anfangspunkt der rechten Leiter soll in einen Punkt auf der x_1-Achse übergehen.

$$x = 50;\quad y = 0 \quad \text{geht über in} \quad x_1 = 150;\quad y_1 = 0.$$

Daraus ergibt sich

$$150 = \frac{a_{11} \cdot 50}{a_{31} \cdot 50 + a_{33}} \qquad 0 = \frac{a_{21} \cdot 50}{a_{31} \cdot 50 + a_{33}}.$$

Die zweite Bedingung ergibt sofort

$$a_{21} = 0 \quad \text{(6. Konstante)}.$$

Die erste Bedingung lassen wir erst einmal unverändert stehen.

IV. Die durch die Punkte $u = 20$ und $v = 20$ gehende Gerade g soll in die waagerechte Gerade $y_1 = 175$ übergehen. Die Gerade g hat die Gleichung ($u = 20$, $v = 20$)

$$y = 800 - 8 \cdot x.$$

Nach Einsetzen dieser Gleichung in die Beziehung für y_1 und nach Gleichsetzen von y_1 mit 175 folgt

$$175 = \frac{-1760 \cdot x + 176\,000}{(a_{31} - 8) \cdot x + 800 + a_{33}}.$$

Diese Gleichung kann nur erfüllt werden, wenn der Zähler das 175 fache des Nenners ist. Daraus ergibt sich durch Vergleich der Konstanten und der mit x behafteten Glieder

$$a_{33} = 206 \quad \text{(7. Konstante)}$$

und

$$a_{31} = -2{,}06 \quad \text{(8. Konstante)}.$$

Die vorhin unbeachtete erste Bedingung unter III. liefert nunmehr zum Schluß

$$a_{11} = 309 \quad \text{(9. Konstante)}.$$

Die jetzt vollständig ermittelten Konstanten ordnen wir nach dem Schema an:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 309 & 75 & 0 \\ 0 & 220 & 0 \\ -2{,}06 & 1 & 206 \end{pmatrix}$$

Die gesuchte projektive Verzerrung ist damit bekannt. Auf die endgültige Durchführung der Aufgabe wollen wir hier verzichten. Wir bestimmen nur noch schnell den Anfangspunkt der mittleren Leiter. Aus

$$x = 25; \quad y = 0$$

ergibt sich

$$x_1 = 50; \quad y_1 = 0.$$

Das Ergebnis ist in Bild 98 dargestellt. Die drei ursprünglich parallelen Trägergeraden, von denen wir früher sagten, daß sie durch einen unendlich fernen Punkt gingen, gehen nunmehr durch einen im Endlichen gelegenen Punkt P_0, der in der Abbildung angedeutet ist.

Die Lage der Mittelleiter und die Gestalt der drei aus der quadratischen Leiter abgeleiteten projektiven Leitern ist durch die projektive Abbildung eindeutig bestimmt.

Wie man an der fertigen Tafel Bild 98 erkennt, sind die Ableseverhältnisse auf allen drei Leitern innerhalb des ganzen geforderten

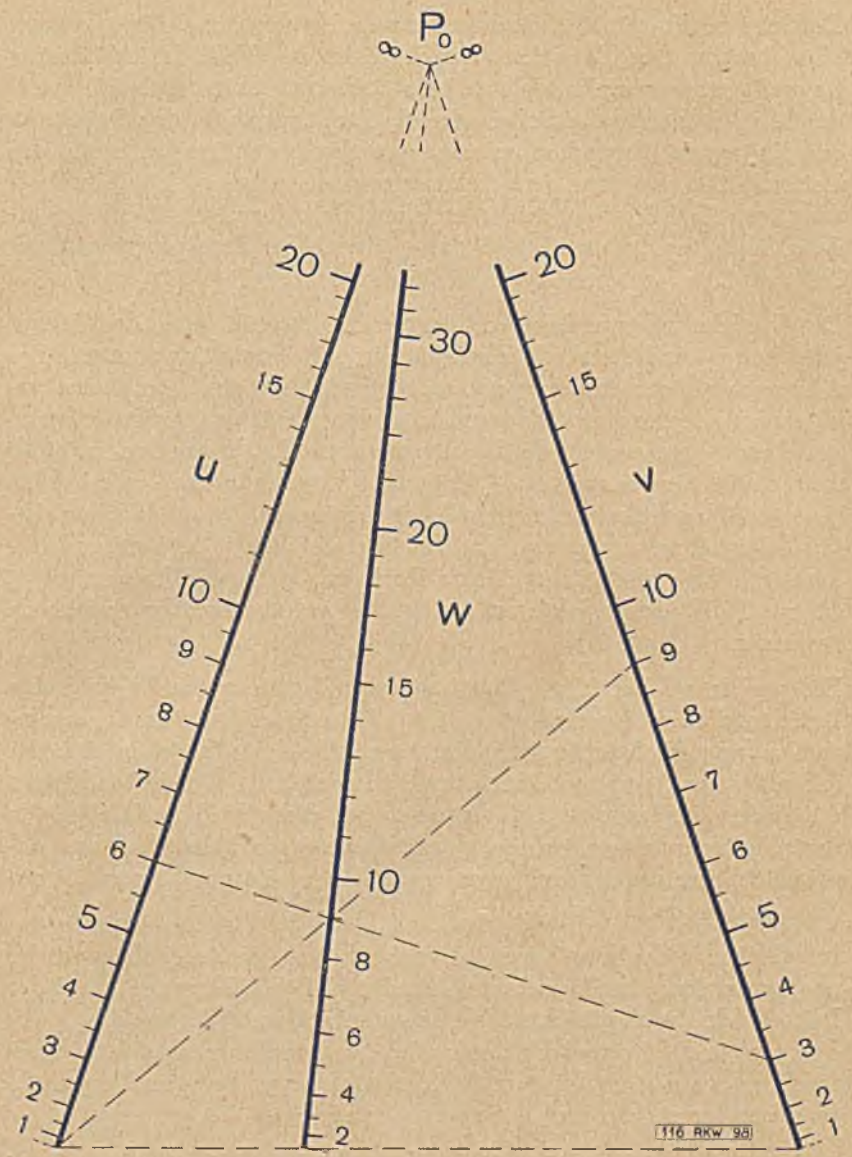


Bild 98. Leitertafel für $w = \sqrt{2u^2 + v^2}$; projektive Verzerrung.

Verkleinerte Darstellung, Maßstab 97 : 150

Bereichs recht günstig. Man erkennt eine deutliche Bevorzugung eines bestimmten Bereiches. Durch geeignete Wahl der Abbildung kann dieser Vorzugsbereich an jede Stelle der Leiter gebracht werden. Die Stelle der Leiter, an der die Teilstriche von der Streckung zur Drängung übergehen, nennt man die gleichförmige Stelle der Leiter.[1]) Sie liegt auf den Außenleitern etwa bei 6. Die Einschaltung von Zwischenwerten ist an einer gleichförmigen Stelle besonders leicht und genau, weil der theoretische Interpolationsfehler Null wird.

Das Verfahren der projektiven Verzerrungen setzt uns in den Stand, jede Leiter- und Netztafel zunächst einmal ohne Rücksicht auf Bereiche und Platzbedarf zu entwerfen und hinterher durch eine geeignete Verzerrung in eine handliche, den jeweiligen Anforderungen am besten entsprechende Tafel umzuwandeln. Kommen in einer Leitertafel Kegelschnitte als Träger vor, so kann man mindestens einen der Kegelschnitte in einen Kreis verwandeln[2]) und damit erhebliche Zeichenarbeit sparen. Die Rechentafel Bild 49, zu deren Herleitung wir ziemlich komplizierte Rechnungen durchführen müßten, ist mit Hilfe der projektiven Abbildung verhältnismäßig einfach zu gewinnen.

Die projektive Verzerrung hat im vorhin betrachteten Beispiel eine Leitertafel der (speziellen) ersten Grundform mit dem gemeinsamen (unendlich fernen) Schnittpunkt der drei Träger in eine der (allgemeineren) ersten Grundform übergeführt. Wir haben damit die früher aufgestellte Behauptung, daß diese beiden Tafelformen ursächlich zusammengehören, durch das Beispiel nahegelegt und damit die Berechtigung der gemeinsamen Bezeichnung „erste Grundform“ erwiesen.

In gleicher Weise kann man zeigen, daß der symmetrische und der unsymmetrische Fall der ersten Grundform B III, 1 bzw. B III, 3 der Leitertafeln durch projektive Verzerrung ineinander übergehen. Auch die spezielle zweite und die allgemeinere zweite Grundform der Leitertafeln erscheinen von diesem Gesichtswinkel nur als spezielle projektive Verzerrung ein und derselben Grundtafel.

1) Diese Bezeichnung gilt natürlich auch für den Fall, daß die Leiter von der Drängung zur Streckung übergeht. Vergleiche auch die Ausführungen Abschnitt A II, 2.

2) Diese Eigenschaft projektiver Abbildungen ist hier nicht beweisbar.

Die Methode der projektiven Abbildung gestattet es also, die verschiedenen Arten geradliniger Leitertafeln auf zwei wesentliche Grundformen zu reduzieren, nämlich

1. den symmetrischen Fall der ersten Grundform (B III, 1),
2. die zweite Grundform (B IV, 1).

Alle anderen Formen können aus diesen beiden durch projektive Verzerrungen gewonnen werden. Bild 99 zeigt in einem Schema, wie die einzelnen Grundformen zusammenhängen.

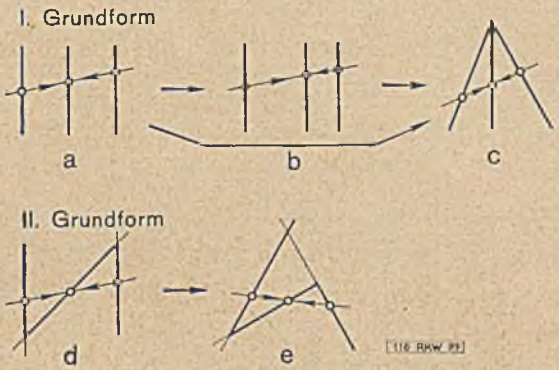


Bild 99. Typen geradliniger Leitertafeln

Unter dem Gesichtspunkt projektiver Abbildungen gibt es also die beiden Grundfälle:

1. die drei Leitern schneiden sich in einem Punkt (gegebenenfalls in einem unendlich fernen!),
2. die drei Leitern schneiden sich nicht in einem Punkt (gegebenenfalls schneiden sich zwei in einem unendlich fernen Punkt!).

Das Hilfsmittel der projektiven Abbildungen entkleidet also den unendlich fernen Punkt seiner Ausnahmestellung. Die Gründe für die scheinbar umständliche Ausdrucksweise über die Lage der drei geraden Träger in Leitertafeln bei unseren früheren Abschnitten treten nunmehr klar zutage.

Wir müssen es uns aus den eingangs genannten Gründen in diesem Buche versagen, die Methode der projektiven Verzerrungen weiter auszubauen. Es sei hierzu auf Zeitschriften- und Buchveröffentlichungen verwiesen.

Auch bei Netztafeln kann die Anwendung der projektiven Verzerrungen das Tafelgefüge entscheidend beeinflussen. Insbesondere führt eine projektive Verzerrung einer Netztafel der ersten Grundform mit parallelen Geradenscharen die Tafel in eine Doppelstrahlentafel über, von der wir schon in den Abschnitten C IV und C VI gesprochen haben.

II. Dualität

Der Vergleich des Abschnittes über Leitertafeln (B I...V) mit dem Abschnitt über Netztafeln (C I...V) zeigt eine bemerkenswerte Übereinstimmung. Diese Übereinstimmung, die ihren Ausdruck in der praktischen Gleichheit der Schlüsselgleichungen und der darzustellenden Funktionstypen findet, tritt auch äußerlich in der Bezeichnung der verschiedenen Tafelformen in Erscheinung.[1])

Einen Hinweis über die Ursache für diese weitgehende Übereinstimmung erhalten wir durch Vergleich der beiden Ableseschlüssel:

Schlüssel in geradlinigen Netztafeln:	Schlüssel in Leitertafeln mit gerader Ableselinie:
1. (Schar-)Gerade } bestimmen einen (Schnitt-)Punkt und 2. (Schar-)Gerade }	1. (Leiter-)Punkt } bestimmen eine (Flucht-)Gerade und 2. (Leiter-)Punkt }
Dieser Punkt bestimmt die (Ergebnis-)Gerade.	Diese Gerade bestimmt den (Ergebnis-)Punkt.

Beide Schlüssel gehen wechselweise ineinander über, wenn man überall das Wort „Gerade" durch das Wort „Punkt" ersetzt und umgekehrt. Die Gerade bei Netztafeln ist Bestandteil einer Geradenschar, der Punkt bei Leitertafeln ist Bestandteil einer Punkteschar auf einer Leiter.

Solche Beziehungen sind in der Geometrie nicht unbekannt. So ist es z. B. bekannt, daß jeder Satz, der sich mit Geraden und Punkten befaßt, in einen dualen Satz übergeht, wenn man das Wort „Gerade" durch das Wort „Punkt" und „Schneiden" durch „Verbinden" ersetzt.

1) Wir beschränken uns auf geradlinige Netztafeln; nicht geradlinige Netztafeln sollen ausscheiden, es sei denn, daß man sie durch eine geeignete Verzerrung in geradlinige überführen kann.

So gelten z. B. die Sätze:

1. Drei Geraden bestimmen drei (Schnitt-)Punkte.	2. Drei Punkte bestimmen drei (Verbindungs-)Geraden.

Einen Grund für die Gleichheit der darstellbaren Funktionstypen bei Leiter- und geradlinigen Netztafeln haben wir übrigens bereits in C V, 2 festgestellt. Wir bemerkten dort, daß die Schlüsselgleichung für allgemeinste Leitertafeln mit der Schlüsselgleichung für geradlinige Netztafeln vollkommen identisch ist, wenn man die Netztafeln durch sogenannte Linienkoordinaten, die Leitertafeln durch Punktkoordinaten beschreibt. Als Linienkoordinaten wollen wir hierbei die Abschnitte verstehen, die von den Netzgeraden auf zwei parallelen Geraden mit dem Abstand L abgeschnitten werden (siehe Bild 73).

Eine Beziehung zwischen einem Punkt und einer Geraden wollen wir nun dual nennen, wenn Punkt und Gerade durch die gleichen Koordinaten gegeben sind. Unseren Betrachtungen von früher über die Bedingung, daß drei Punkte auf einer Geraden liegen bzw. drei Geraden durch einen Punkt gehen, entnehmen wir nun die beiden folgenden wichtigen Sätze:

Liegen drei Punkte auf einer Geraden, so gehen die drei dualen Geraden durch einen Punkt.	Gehen drei Geraden durch einen Punkt, so liegen die drei dualen Punkte auf einer Geraden.

Wir erkennen also, daß die von uns festgestellten Beziehungen zwischen Leiter- und Netztafeln im Sinne unserer zuletzt gegebenen Festsetzung dual sind. Wir nennen die durch wörtliche Übersetzung von Punkt- in Linienkoordinaten gewonnene Beziehung die spezielle Dualität.

Liegt eine Leitertafel vor, so kann sie also durch spezielle Dualität in eine entsprechende Netztafel umgewandelt werden. Liegt umgekehrt eine geradlinige Netztafel vor, so vermittelt die spezielle Dualität eine Leitertafel für den gleichen Sachverhalt. Die auf diese Weise gewonnenen neuen Tafeln können nun mit Hilfe der vorhin behandelten projektiven Verzerrungen (F I) in eine praktisch brauchbare Form gebracht werden. Die Beziehung zwischen der Ausgangsrechentafel und der durch spezielle Dualität und projektive Verzerrung gewonnenen Tafel wollen wir allgemeine Dualität nennen.

Für die Praxis besonders wichtig ist die Tatsache, daß man an Kegelschnitten (Kreis, Ellipse, Parabel, Hyperbel) anschauliche duale Be-

ziehungen kennt. In Bild 100 sei k ein Kegelschnitt. Legen wir von einem Punkt P an k die beiden Tangenten t_1 und t_2 und verbinden die Berührungspunkte durch eine Gerade p, so heißt diese Gerade p die Polare des Punktes P (Pol). Pol und Polare sind nun duale Elemente.[1]) Schneiden sich also drei Polaren in einem Punkte, so liegen die zugehörigen Pole auf einer geraden Linie.

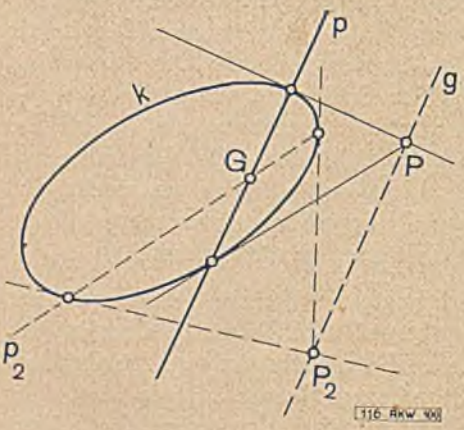


Bild 100. Pole und Polaren an einem Kegelschnitt

Pol und Polare lassen sich auch erklären, wenn vom Punkt P keine (reellen)[2]) Tangenten an den Kegelschnitt gelegt werden können. Es gilt nämlich der Satz:

Liegen zwei Pole auf einer Geraden g und schneiden sich die Polaren im Punkte G, so ist g die Polare zu dem Pol G (Bild 100).

Die Konstruktion von Pol und Polare ist besonders einfach beim Kreis und bei der Parabel. Man verwendet daher diese beiden Kurven mit Vorteil zur Überführung empirisch gefundener geradliniger Netztafeln in Leitertafeln, indem man jeder geraden Linie der Netztafel ihren Pol bezüglich des Kegelschnittes zuordnet.

1. Der Kegelschnitt ist ein Kreis vom Radius R

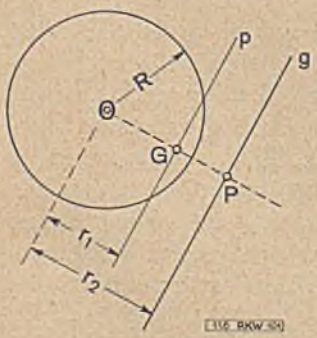


Bild 101. Pol und Polare beim Kreis

Es gilt

$$r_1 \cdot r_2 = R^2. \qquad (67)$$

Abstand von Pol r_1 bzw. r_2 und Polare r_2 bzw. r_1 vom Mittelpunkt des Kreises gehen also durch Spiegelung am Kreise auseinander hervor. Außerdem liegt der Pol auf dem Lot vom Mittelpunkt des Kreises auf die Polare.

1) Das ist hier nicht bewiesen.

2) Der mathematisch wenig geschulte Leser möge das in Klammern stehende Wort ganz weglassen.

Bei dualer Abbildung durch einen Kreis gehen über:

a) eine Parallelgeradenschar in eine Gerade durch den Mittelpunkt des Kreises;

b) eine Strahlenschar mit dem Träger P in die Polare von P.

Ein Kreis führt also z. B. über

a) eine Parallelschartafel nach Bild 54...61 in eine Leitertafel mit drei sich in einem Punkt schneidenden geraden Trägern nach Bild 99c (z. B. Bild 98)[1];

b) eine Strahlentafel nach Bild 71 in eine Leitertafel mit drei allgemein liegenden Leitern nach Bild 99e.

2. Der Kegelschnitt ist eine Parabel

Auf einer zur Hauptachse parallelen Geraden (Durchmesser), die durch den Pol hindurchgeht, besitzen Pol und Polare gleichen Abstand von der Parabel. Die Polare läuft parallel zur Tangente an die Parabel im Endpunkt des Durchmessers (siehe Bild 102).

Bei der dualen Abbildung durch eine Parabel gehen über

a) jede Parallelgeradenschar in eine zur Hauptachse parallele Gerade;

b) eine Strahlenschar mit dem Träger P in die Polare von P.

Eine Parabel führt also z. B. über:

a) eine Parallelschartafel nach Bild 54...61 in eine Leitertafel mit drei parallelen Trägern nach Bild 32 bzw. 28;

b) eine Strahlentafel nach Bild 71 in eine Leitertafel mit zwei parallelen Trägern nach Bild 41.

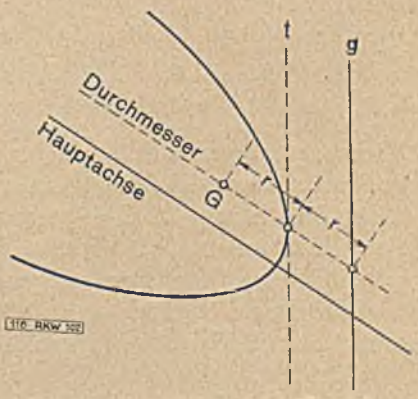


Bild 102. Pol und Polare bei der Parabel

Literatur über Dualität:

1. H. Schwerdt, Lehrbuch der Nomographie, Berlin 1924, S. 219 ...240.

1) Der Schnittpunkt ist nach obigem der Mittelpunkt des Kreises!

Dort ist auch ein Beispiel für die Umwandlung einer empirischen Netztafel durch Streckung und duale Abbildung gegeben (siehe Bild 103).

2. Handbuch der Rationalisierung, herausgegeben vom RKW. Berlin 1930. S. 588...590.

Überführung einer empirischen Netztafel fürDurchschlagsspannungen zwischen Kugelkalotten abhängig von der Beanspruchungsdauer durch Streckung und Dualität in eine Leitertafel (M. Zühlke) (siehe Bild 104).

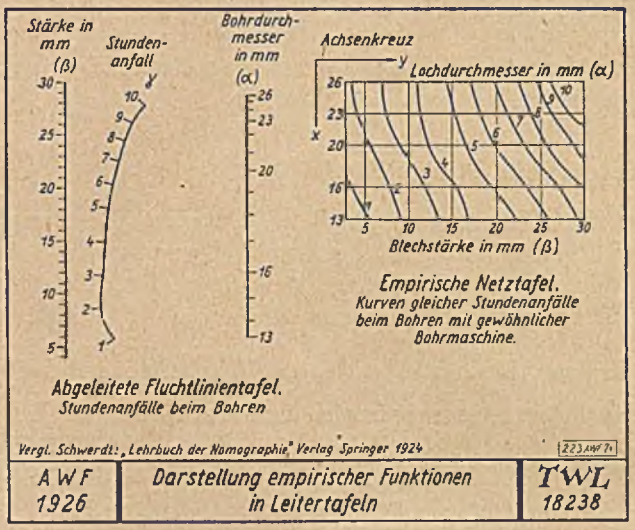


Bild 103. Empirische Netztafel und daraus gewonnene Leitertafel

3. Als drittes Beispiel zeigen wir in Bild 106 eine durch Streckung und nachfolgende duale Abbildung mittels einer Parabel gewonnene Leitertafel für die Berechnung von Luftinduktivitäten.

Hierzu ist folgendes zu bemerken: Für die Induktivität von Drosselspulen existieren Formeln, meist in Form von unendlichen Reihen. Eine Darstellung in Leitertafeln kann wegen des komplizierten Formelaufbaues nicht gefunden werden. Es gelingt aber, eine Netztafel (Bild 105) für einen entsprechend eingeschränkten, aber praktisch wichtigen Bereich so zu verzerren, daß im Rahmen einer für praktische Bedürfnisse ausreichenden Genauigkeit die Netztafel geradlinig wird. Die duale Umwandlung dieser Netztafel liefert dann die auf andere Weise wohl kaum gewinnbare Leitertafel von Bild 106.

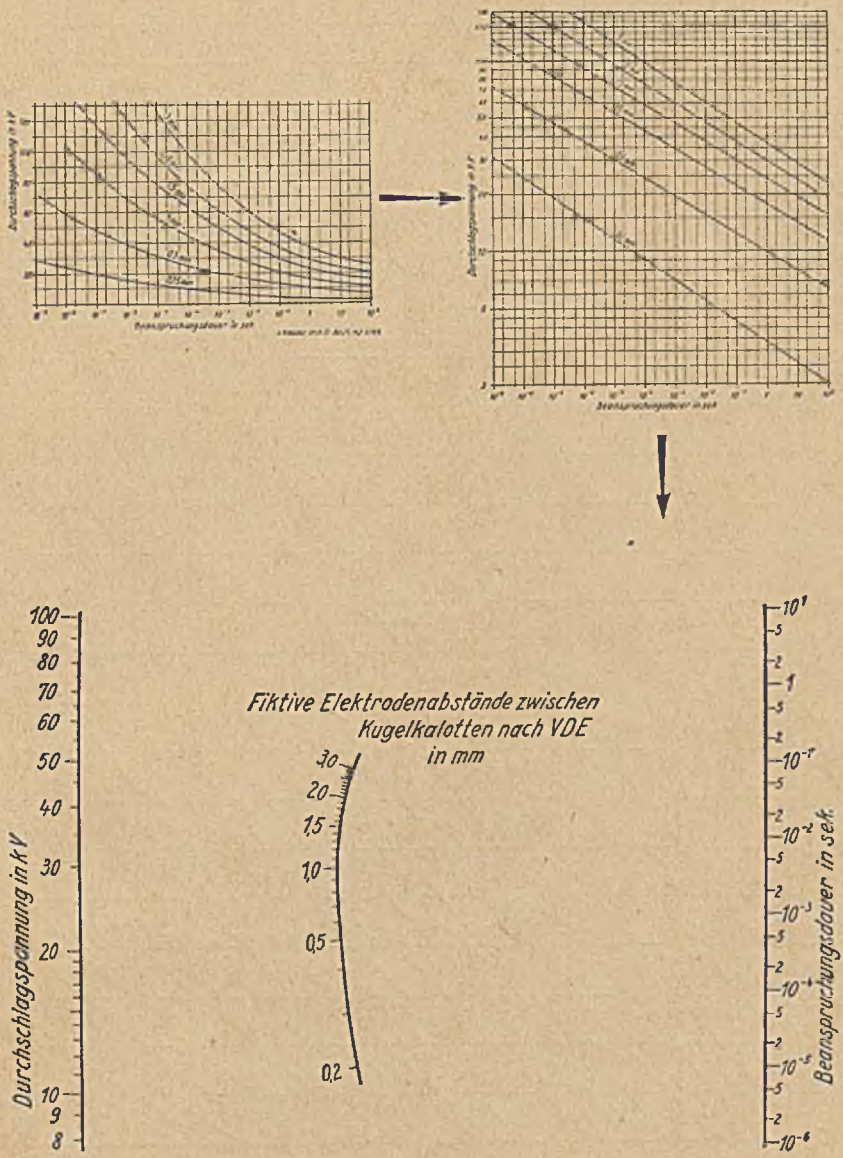


Bild 104. Überführung einer empirischen Netztafel in eine Leitertafel

(Durchschlagsspannungen zwischen Kugelkalotten in Abhängigkeit von der Beanspruchungsdauer)

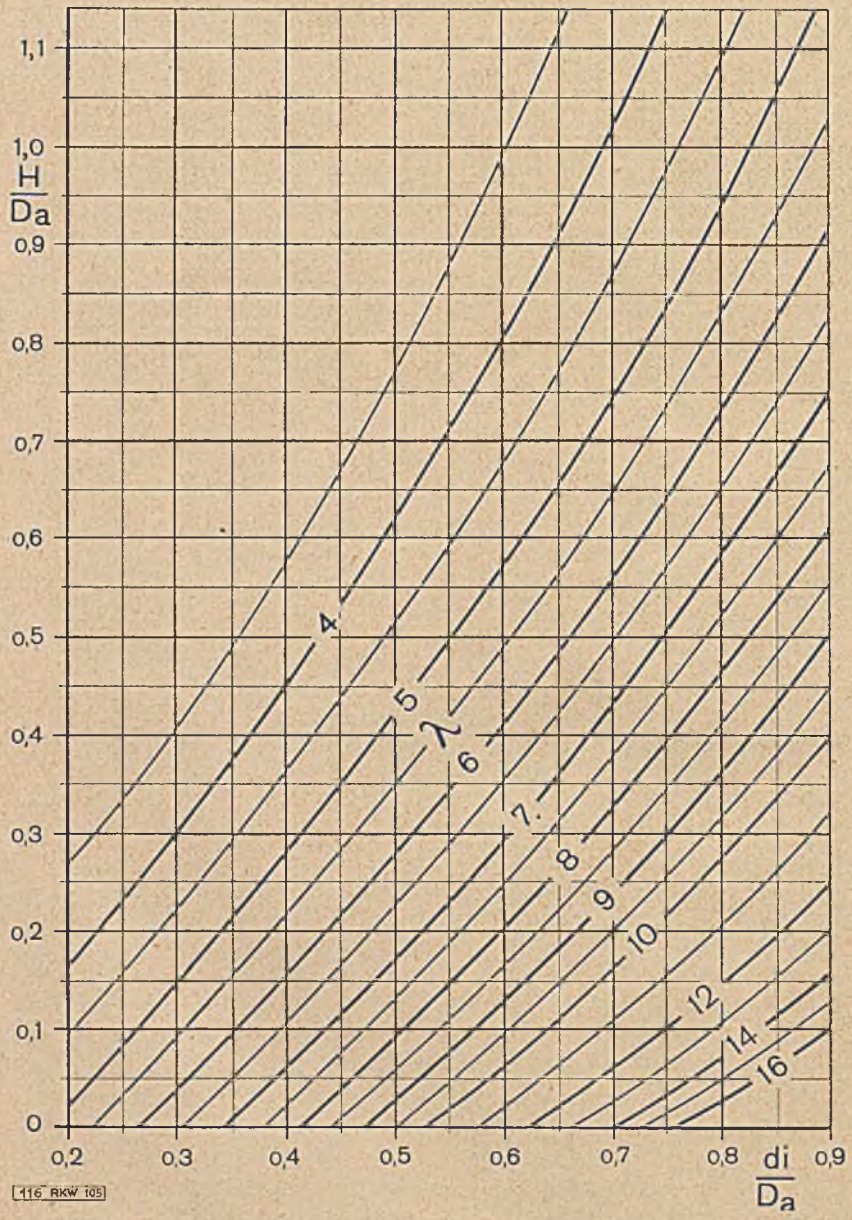


Bild 105. Netztafel zur Bestimmung von Luftinduktivitäten

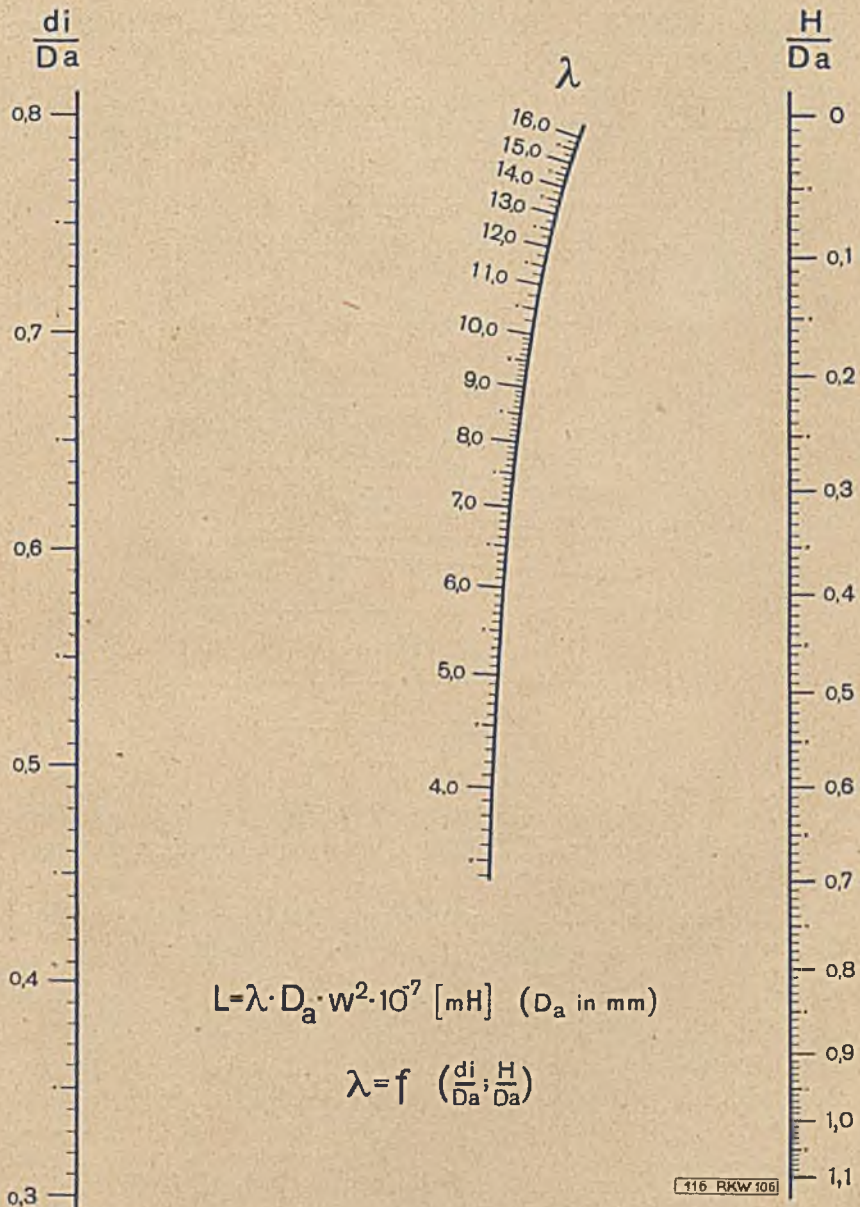


Bild 106. Leitertafel zur Bestimmung von Luftinduktivitäten

4. VDI-Zeitschrift 81 (1937), Nr. 39, S. 1137...1142. A. Walther, Verwandlung von Kurventafeln in Leitertafeln.

Für die Überführung von Netztafeln in Leitertafeln durch das Hilfsmittel der dualen Abbildung werden eine Reihe von Beispielen gegeben. Das Studium der Arbeit kann sehr empfohlen werden.

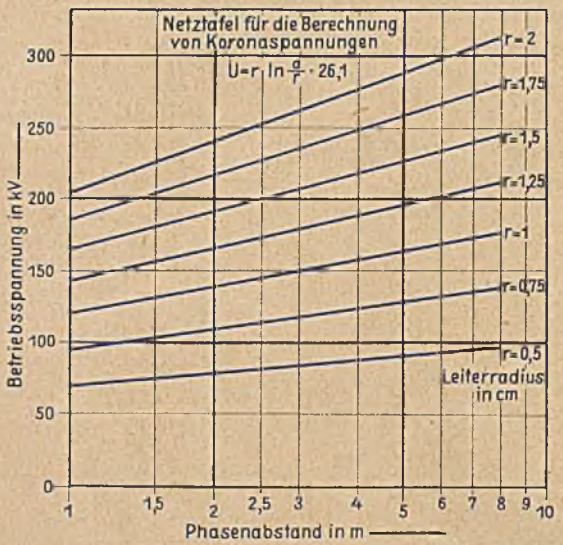


Bild 106 a. Koronaspannung

5. Elektrotechnische Zeitschrift 60 (1939), Heft 3, S. 65...70. A. Walther, H.-J. Dreyer und H. Schüßler, Ersatz von Kurventafeln durch Leitertafeln.

Auch in dieser dem Studium empfohlenen Arbeit werden eine große Zahl von Beispielen aus der Elektrotechnik behandelt.

Die Kenntnis von der Dualität zwischen geradlinigen Netztafeln und Leitertafeln kann oft mit Vorteil benutzt werden, um zu entscheiden, ob die Darstellung einer Funktion in einer Leitertafel möglich ist. Daß z. B. eine solche Darstellung für die quadratische Gleichung

$$w^2 + u \cdot w + v = 0 \tag{27}$$

existiert, folgt daraus, daß für $w =$ konst. sich in einem gleichförmigen (u, v)-Netz eine gerade Linie ergibt:

$$k^2 + u \cdot k + v = 0.$$

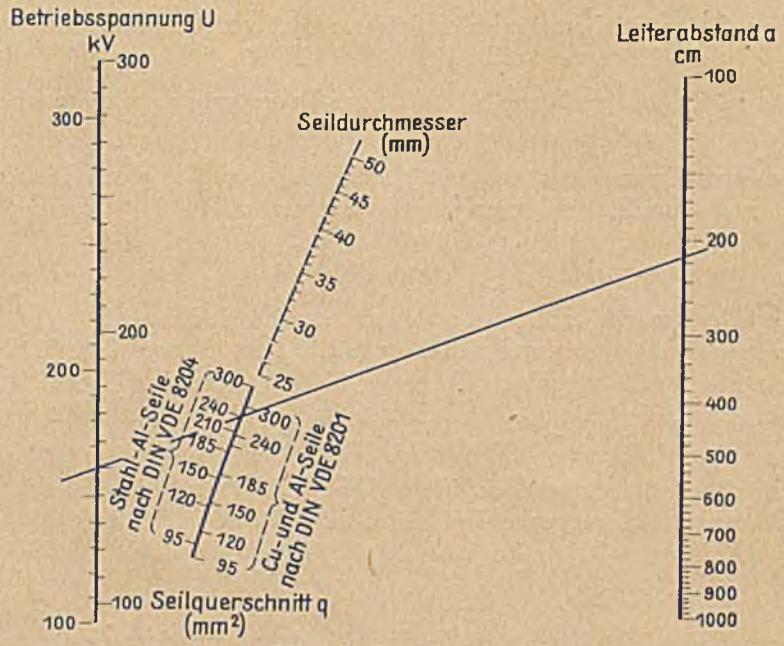


Bild 106 b. Koronaspannung

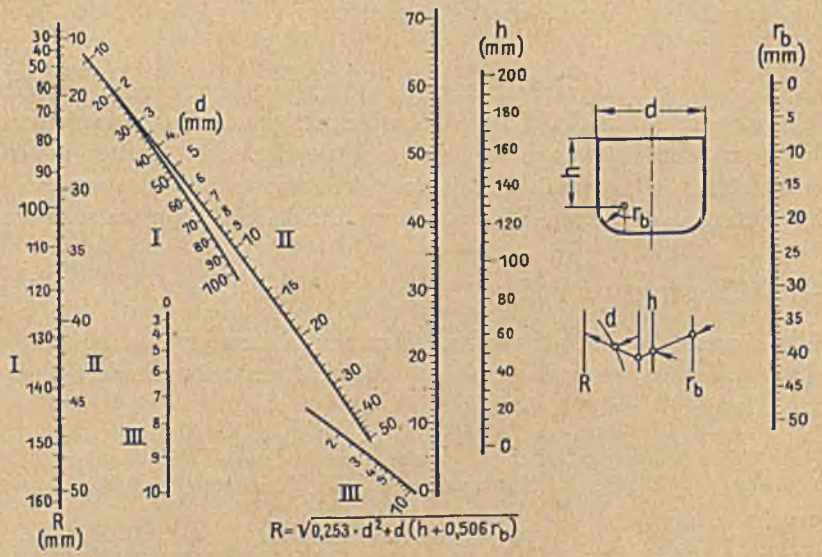


Bild 106 c. Tiefziehen von Hohlteilen

Eine der möglichen dualen Abbildungen dieser geradlinigen Netztafel ist die Leitertafel Bild 49.

Wir wollen das Verfahren wegen seiner Bedeutung an weiteren Beispielen darlegen.

Zwischen Koronaeinsatzspannung U, Leiterseilradius r und Phasenabstand a bei Hochspannungsfreileitungen gilt

$$U = 26{,}1 \cdot r \cdot \ln \frac{a}{r}.$$

Betrachtet man hierin r als Parameter, so wird die Kurve $U = f(a)$ in einem einfach logarithmischen Netz (siehe Bild 19) eine Gerade. Die Netztafel für die vorgelegte Formel wird daher eine geradlinige Netztafel (Bild 106a). Damit ist die Darstellung in einer Leitertafel (sogar mit zwei parallelen Trägern) gesichert (Bild 106b).[1])

Schließlich ein letztes Beispiel: Bei der Ermittlung der Zuschnittgrößen von tiefgezogenen Hohlteilen tritt die Formel[2]) auf:

$$R^2 = 0{,}253 \cdot d^2 + d \cdot h',$$

wo $h' = h + 0{,}506\, r_b$.

Diese Formel ist linear in R^2 und h'; daher existiert eine geradlinige Netztafel und damit auch eine Leitertafel, bei der sogar zwei parallele Leitern für R^2 und h' vorkommen (Bild 106c). Siehe auch F III, 1 d.

Es ist wichtig, daß solche Betrachtungen nicht nur schnell zum Ziel führen, sondern zugleich bereits im Ansatz wertvolle Hinweise auf die Form der Leitertafel und ihr rechentechnisches Gefüge geben. Beim Ansatz der Schlüsselgleichung erhält man übrigens wertvolle Fingerzeige. Auch freie Parameter lassen sich leicht vorher angeben.

III. Näherungsmethoden

Wir können die Betrachtungen über neuzeitliche Rechenverfahren nicht schließen, ohne noch einiges über Näherungsmethoden gesagt zu haben.

1) Die Tafel findet man im einzelnen abgeleitet in den AWF-Mitt. 1938, H. 10, S. 134 ... 136, R. Roeper, Nomogramm für die Berechnung von Koronaspannungen.

2) Siehe AWF-Mitteilungen 1940, Heft 10, S. 53 . . . 56, M. Zühlke, Rechentafeln für die Ermittlung der Zuschnittgrößen für rechteckige Hohlteile.

Wer noch nicht lange mit rechentechnischen Methoden arbeitet, vermag manchmal trotz vieler Anstrengung keine Rechentafel der vorstehend beschriebenen Art für eine vorgegebene Aufgabe zu finden. Er ist dann sehr leicht geneigt, das Scheitern seiner Bemühungen auf seine unzureichende Erfahrung zurückzuführen. Das mag in vielen Fällen stimmen, nicht aber in allen. Wie wir schon früher ausgeführt haben, gibt es Funktionen, die sich z. B. in einer Leitertafel oder in einem Sonderrechenstab oder in einer zusammengesetzten Netztafel einfach nicht darstellen lassen. Es würde den Rahmen dieses Buches erheblich überschreiten, wenn wir uns mit den Bedingungen befassen wollten, unter denen eine Darstellung in einer bestimmten Form möglich ist.

Sehr oft kommt es auch vor — um ein Beispiel zu nennen —, daß sich eine gegebene Formel in einfacher Weise in Form einer Leitertafel mit krummlinigen Trägern darstellen läßt, daß aber eine Darstellung in Form eines Sonderrechenstabes auch bei Anwendung aller früher betrachteten Hilfsmittel nicht gelingt. Es gibt aber Fälle, wo man aus praktischen Gründen nur einen Sonderrechenstab brauchen kann.

In vielen solchen und ähnlich gearteten Fällen gelingt es nun, dennoch eine befriedigende rechentechnische Lösung bestimmter Form zu finden, und zwar auf dem Wege über eine Näherungslösung. Sehr oft kommt es nämlich vor, daß ein Ergebnis nur mit einer geringen Genauigkeit gewünscht wird. Dann kann man versuchen, eine rechentechnische Lösung durch Vernachlässigungen zu gewinnen.

Es ist erstaunlich, daß man vom Hilfsmittel der Näherungslösungen in der Rechentechnik früher kaum Gebrauch gemacht hat. Erst seit einigen Jahren ist man darangegangen, die rechentechnischen Lösungen auch in dieser Richtung wirtschaftlich zu machen. Der Einwand wird oft gehört, daß man durch solche Methoden das Ergebnis, welches an sich schon durch das graphische Verfahren mit gewissen Fehlern behaftet ist, noch unsicherer macht. Wer aber mit dem Vorurteil fertig geworden ist, daß Rechentafeln zu „ungenau" seien, wird sich auch zur Näherungslösung durchringen, gelingt es doch trotz der „Näherung" — in vielen Fällen noch große Genauigkeiten zu erreichen. Bei den Forderungen über Genauigkeiten sollte man auch nie außer acht lassen, mit welcher Genauigkeit die Eingangswerte garantiert sind und mit welcher Sicherheit die zur Darstellung zu

bringende Funktion festliegt. Sehr oft ist nämlich diese Funktion auf empirischem Wege gewonnen.

Zur rechentechnischen Näherungslösung gibt es grundsätzlich zwei Wege, die übrigens für das Gesamtgebiet der Rechentechnik charakteristisch sind. Man kann nämlich den Übergang zur Näherungslösung schon bei der formelmäßigen Darstellung oder erst bei der in irgendeiner Form entworfenen Rechentafel machen. Welchen dieser Wege man bevorzugt, hängt von der Form der vorgelegten Aufgabe, aber auch sehr stark von der persönlichen Eigenart des Entwerfers ab. Wir wollen nachstehend beide Wege an Hand von Beispielen diskutieren.

1. Die Näherung in der Funktion, Ersatzfunktionen

a) Wir betrachten zunächst ein Beispiel, an dem F. Wolf[1]) und nach ihm erweiternd H. Schwerdt[2]) die Nützlichkeit von Näherungsmethoden für die Rechentechnik dargelegt haben. Sehr oft treten Formeln der nachstehenden Gestalt auf:

$$z^2 = \frac{x^2 + xy + y^2}{3} \tag{68}$$

(Quadratischer Mittelwert).

Man erhält nach F. Wolf durch

$$z^n = \frac{x^n + y^n}{2} \tag{69}$$

bei geeigneter Wahl von n eine ausgezeichnete Näherung.

Zunächst ergibt die Formel übereinstimmende Werte für

$$x = 0, \quad x = y, \quad y = 0,$$

was ohne weiteres aus der Betrachtung der Formeln (68) und (69) folgt. Einen geeigneten Exponenten, bei dem die Fehler in den anderen Bereichen möglichst klein werden, findet F. Wolf auf empirischem Wege zu

$$n = \frac{\log 4}{\log 3} = 1{,}262.$$

1) F. Wolf und H. Hochreuter, Die Nomographie als Hilfsmittel zur Berechnung elektrischer Fördermaschinen, „Elektrizität im Bergbau", 6. Jahrg. H. 2 und 3, 1931.

2) Noch nicht veröffentlicht. Man vergleiche aber AWF-Mitt. 1933, H. 9, S. 71 ... 72. Dort ist die Methode von E. William auf eine Formel für Zickzacknietung angewendet worden.

H. Schwerdt hat nachgewiesen, daß diesem Exponenten eine Näherung entspricht, bei der sich die beiden Funktionsflächen im Punkte $x = y = 1$ berühren. Der auftretende Fehler beträgt im ungünstigsten Falle weniger als 1,5 v.H. Für viele Fälle wird eine solche Genauigkeit schon ausreichen.

Wie man zu Näherungen durch Veränderung von n bzw. durch allgemeinere Schreibweise

$$z^n = a \cdot x^n + b \cdot y^n \tag{70}$$

kommen kann, die in gewissen, vorzuschreibenden Bereichen noch höheren Genauigkeitsansprüchen genügen, haben H. Schwerdt und E. William in den genannten Untersuchungen gezeigt. Die gewonnenen Ersatzfunktionen[1]) gestatten nun eine einfache Darstellung des Funktionszusammenhangs in einer Leitertafel der ersten Grundform mit parallelen Trägern oder in einem Sonderrechenstab.

Der von F. Wolf vorgeschlagene Weg erscheint zunächst als ein glücklicher Einfall. Man kommt aber zu dieser Näherungslösung auch zwangläufig auf systematischem Weg, der vom Verfasser angegeben worden ist. Wir wollen die Methode kurz skizzieren, können aber wegen der erforderlichen mathematischen Voraussetzungen die Rechnung nicht hier durchführen.

Eine gegebene Funktion $z = f(x, y)$ (71)

möge sich nicht unmittelbar zur Darstellung in einem Rechenstab eignen. Wir schreiben daher

$$F\{z\} = F\{f(x, y)\}. \tag{72}$$

Die neu eingefügte Funktion F ist zunächst ganz willkürlich. Wir wählen sie nun so, daß sich eine Darstellung ergibt, die der Schlüsselgleichung für Rechenstäbe (siehe Abschnitt E) entweder genau oder näherungsweise entspricht.

Beispiel: $z = x \cdot y.$

Die Funktion, die die gewünschte Umformung ergibt, ist genau

$$F\{z\} = \log z.$$

Man erhält $\log z = \log x + \log y.$

1) Die Bezeichnung „Ersatzfunktion" ist von H. Schwerdt vorgeschlagen worden. AWF-Mitt. 1938, H. 4, S. 58 f.

Im Beispiel von F. Wolf gewinnt man als Näherungslösung auf einem hier nicht erläuterten Weg

$$F(z) = z^n \quad \text{mit} \quad n = \frac{\log 4}{\log 3}.$$

b) Eine Näherungslösung für eine komplizierte Formel aus der Feuerungstechnik hat W. Boye angegeben.[1]) Für die mittlere spezifische Wärme der Rauchgase gilt nach Boye

$$[c p_m]_0^t = a \cdot b + c.$$

Darin ist a eine Funktion des unteren Heizwertes (H_u) und der Temperatur (t); b eine Funktion des unteren Heizwertes und des Kohlensäuregehaltes (CO_2); c eine Funktion der Temperatur (t) allein.

Es zeigt sich nun, daß a nur geringfügig vom Heizwert abhängt; da außerdem das Produkt $a \cdot b$ nur 10 v. H. von c ausmacht, kann diese Abhängigkeit vernachlässigt werden. Man setzt daher näherungsweise

$$a = f_1(t).$$

b ist eine Funktion von H_u und CO_2. Näherungsweise kann b dargestellt werden als ein Produkt von zwei Funktionen, von denen die eine nur von H_u, die andere nur von CO_2 abhängt:

$$b = f_2(H_u) \cdot f_3(CO_2).$$

Alles in allem gewinnt man so eine Näherungsfunktion, die eine Darstellung in Rechenschieberform gestattet. An einem weiteren Beispiel wird in der genannten Arbeit noch eine weitere Näherungslösung abgeleitet. Wegen Einzelheiten sei auf die Arbeit verwiesen.

c) Ein besonderes wichtiges Beispiel, an dem H. Schwerdt eine neue Methode zur Gewinnung von Ersatzfunktionen dargelegt hat, ist von P. Hofmann angegeben worden.[2]) Aus der Formel

$$x = r - \sqrt{r^2 + a^2 - 2a\sqrt{r^2 - \delta^2}}$$

1) W. Boye, Rechenschieber für Feuerungstechnik, AWF-Mitt. 1935, H. 12, S. 100 ... 103.

2) P. Hofmann, Die Profilverzerrung gedrehter Formstähle, AWF.-Mitt. 1938, H. 4, S. 58 ... 59. H. Schwerdt, Anpassung einer Näherungsfunktion an einen vorgeschriebenen Bereich. AWF.-Mitt. 1938, H. 4, S. 59 ... 62.

gewinnt Hofmann durch zweimalige Anwendung der Näherungsformel

$$\sqrt{u^2 + v} \approx u + \frac{v}{2u} \quad (v \ll u).^{1})$$

$$a - x = \frac{a\delta^2}{2r \cdot (r - a)}.$$

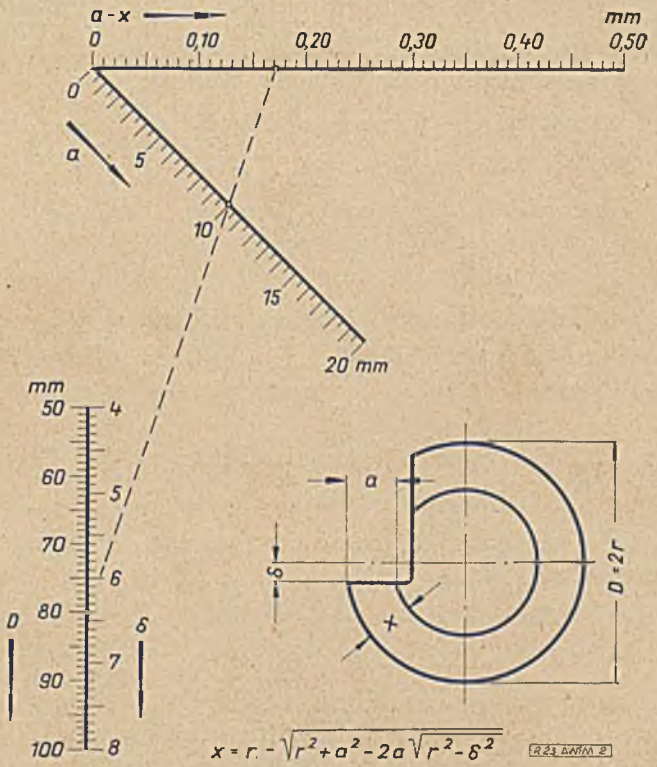


Bild 106 d. Profilverzerrung

Für $\frac{\delta}{2r} = 0{,}08$ (Erfahrungswert) wird schließlich

$$(a - x) = \frac{r \cdot a}{r - a} \cdot 0{,}012800.$$

Diese Formel kann in einer Leitertafel der ersten Grundform, allgemeinerer Fall, mit im Endlichen gelegenem Schnittpunkt aller drei geraden Träger dargestellt werden. $(a - x)$ ist die neue hierzu erforderliche Veränderliche (Bild 106 d).

1) Lies v klein gegen u.

H. Schwerdt hat durch genaue Diskussion des auftretenden Fehlers gezeigt, daß man eine im vorgeschriebenen Bereich der Veränderlichen bessere Näherung erreichen kann, indem man die Konstante 0,012 800 geringfügig ändert. Er entwirft hierzu das Fehlerbild der Ersatzfunktion in einer Netztafel mit den Koordinaten a und r. Wegen Einzelheiten verweisen wir auf die genannten Arbeiten.

d) Zu einer sehr brauchbaren Näherungslösung mit kleinem Fehler gelangte der Verfasser in der folgenden Weise[1]):

Es war die nachstehende Formel nomographisch darzustellen:

$$R^2 = 0{,}25 \cdot d^2 + d \cdot h + 0{,}57 \cdot d \cdot r_b - 0{,}14\, r_b^2.$$

Für die Veränderliche r_b gelten die Grenzen

$$0 < r_b < \frac{d}{2}.$$

Das letzte Glied der Formel steht einer nomographisch eleganten Lösung im Wege. Wir versuchen eine Näherungslösung, indem wir $0{,}14 \cdot r_b^2$ ersetzen durch

$$0{,}14 \cdot r_b \cdot \frac{d}{2}.$$

Offenbar wird der dadurch begangene Fehler an den Grenzen des Intervalls gleich 0. Am größten wird der Fehler für $r_b = \frac{d}{4}$. Man versucht nun die Näherung vollkommener zu machen, indem man folgenden Ansatz macht:

$$R^2 = (0{,}25 + \alpha) \cdot d^2 + d \cdot h + (0{,}57 - \beta) \cdot d \cdot r_b + [\beta \cdot d \cdot r_b - \alpha \cdot d^2 - 0{,}14\, r_b^2].$$

α und β werden nun so bestimmt, daß das in eckigen Klammern stehende Glied im Gesamtintervall möglichst klein wird. Nach einer Rechnung, die man in der Originalarbeit nachlesen möge, ergibt sich

$$\alpha = 0{,}003; \quad \beta = 0{,}064.$$

Mit einem Fehler, der absolut genommen überall kleiner als 0,6 v.H. bleibt, an zwei Stellen des Intervalls sogar Null wird, erhält man daher die Näherungsformel

$$R^2 \approx 0{,}253 \cdot d^2 + d\,(h + 0{,}506 \cdot r_b)$$

$$R^2 \approx 0{,}253 \cdot d^2 + d \cdot h'.$$

---

1) M. Zühlke, Rechentafeln für die Ermittlung der Zuschnittsgrößen für rechteckige Hohlteile. AWF-Mitt. 1940, H. 10, S. 53 ... 56.

Diese Formel haben wir in Abschnitt F II untersucht. Wir fanden, daß sie in einer Leitertafel mit zwei geradlinigen Trägern und einer krummlinigen Leiter dargestellt werden kann. Die Größe h' wird in der gleichen Tafel aus h und r_b in einer Leitertafel der ersten Grundform dargestellt. Siehe Bild 106c. Das ungünstige Leitergefüge macht eine Unterteilung der Bereiche erforderlich. Das ist in der Tafel geschehen. Die mit I, II oder III bezeichneten Leitern für d und R gehören zusammen. Den Ansatz der Tafel findet man in der Originalarbeit.

Weitere Beispiele für die Darstellung von Funktionszusammenhängen durch Einführung von Ersatzfunktionen findet man in den folgenden Arbeiten:

e) G. Wünsche: Der Einfluß einer Herabsetzung des Rechnungszinsfußes auf die Deckungsrücklage in der Lebensversicherung, AWF-Mitt. 1939, Heft 2, S. 40...43.

Näherungsansätze für Formeln aus der Versicherungsmathematik.

f) R. Roeper, Nomogramm zur Ermittlung von Luftschachtabmessungen in Transformatorenräumen, AWF-Mitt. 1939, Heft 9, S. 124...126.

Verwendung einer Ersatzfunktion, deren Fehler kleiner als 1 v. H. bleibt.

2. Die Näherung im Bild

Zu Näherungslösungen führt auch noch ein anderer Weg. Man kann versuchen, eine gefundene Darstellung eines Funktionszusammenhanges umzuformen, um so zu einer anderen einfachen Darstellung zu gelangen. Solche Näherungslösungen haben wir schon im Abschnitt F II über Dualität betrachtet. Es gelingt manchmal, eine krummlinige Netztafel so zu verzerren, daß sie mit praktisch ausreichender Näherung eine geradlinige Netztafel wird. Diese kann man dann mit dem Hilfsmittel der dualen Abbildung in eine Leitertafel umwandeln, die vielleicht für den vorliegenden Zweck geeigneter ist. Es gibt einen Satz, nach dem man jede beliebige Netztafel so verzerren kann, daß mindestens zwei Kurven der Schar in Geraden übergeführt werden. Der Satz ist im deutschen Schrifttum zuerst von A. Walther dargestellt worden.[1])

Er ist schon im Jahre 1931 vor Walther durch den Verfasser wiederentdeckt und gelegentlich einer Tagung des Ausschusses Rechen-

1) A. Walther, Verwandlung von Kurventafeln in Leitertafeln. Z. V. D. I. 81 (1937) Nr. 39, S. 1137 ... 1142.

technik im AWF vorgetragen worden. Zuerst angegeben wurde er nach A. Walther 1921 von Soreau.

Wegen der Anwendung des Verfahrens verweisen wir auf die genannte Arbeit von A. Walther.[1]) Wir beschränken uns hier auf die Wiedergabe der wesentlichen Gedankengänge.

In Bild 106e sind in einem rechtwinkeligen Koordinatensystem zwei Kurven gezeichnet, die gleichzeitig durch eine geometrische Ver-

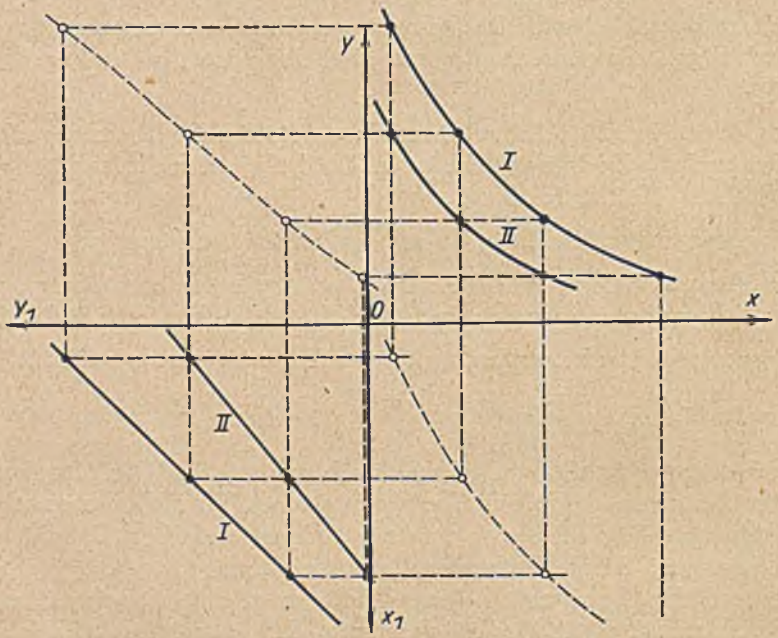


Bild 106e. Gleichzeitige Streckung zweier Kurven

zerrung zu geraden Linien gestreckt werden sollen. Die beiden Kurven sind z. B. zwei Kurven einer Schar. Dann werden bei der Verzerrung auch die anderen Scharkurven genau oder angenähert Geraden werden. Wir zeichnen nun zwischen den beiden Kurven eine Treppenkurve mit waagerechten und senkrechten Zügen so ein, daß die Eckpunkte wechselweise auf den beiden Kurven liegen. In einem anderen rechtwinkeligen Koordinatensystem — wir haben hierzu einen

1) Weitere Veröffentlichung: A. Walther, H.-J. Dreyer, H. Schüßler, Ersatz von Kurventafeln. ETZ 60 (1939), Heft 3, S. 65 ... 70.

anderen Quadranten des gleichen Koordinatensystems gewählt — zeichnen wir nun 2 beliebig liegende Geraden. Auch zwischen diese Geraden zeichnen wir einen rechtwinkeligen Treppenzug ein, den wir nunmehr in stetiger Weise dem Treppenzug des ersten Bildes zuordnen. Damit ist in groben Zügen die geometrische Verzerrung gefunden, die die beiden Kurven zu Geraden streckt. Zwischen den festliegenden Eckpunkten des Treppenzuges interpolieren wir nun durch Einzeichnen einer glatten Verzerrungskurve (siehe Bild 106c).

Wie weit der Bereich geht, in dem die Streckung möglich wird und inwieweit auch die anderen Scharkurven möglichst gut gestreckt werden, hängt sehr stark von der Wahl der beiden Geraden ab. Bei einiger Übung wird man die richtige Lage bald treffen.

Andere Methoden zur Gewinnung von Näherungslösungen durch Näherung im Bild sind in der Zwischenzeit in den nachstehenden Arbeiten veröffentlicht worden.

a) H. Schwerdt, Rechenstab für Sichtweite von Leuchtfeuern. AWF-Mitt. 1938, Heft 4, S. 63...65. Hierzu: J. Fischer, Bestimmung von Sichtweiten. AWF-Mitt. 1938, Heft 4, S. 62.

Bei einer Leitertafel mit krummlinigem Mittelträger wird dieser durch eine Gerade ersetzt. Die Übertragung der Leiterpunkte auf den geraden Träger erfolgt nach einem vorgegebenen Schlüssel. Die Fehler werden diskutiert. Wesentlich ist die duale Abbildung der Leitertafel zum Zwecke der Fehlerdiskussion.

b) W. Treusch, Wärmeübergang bei turbulenter Strömung in Rohren. AWF-Mitt. 1939, H. 1, S. 17...21.

Ersatz von schwach gekrümmten Kurven einer Netztafel durch Ersatzgeraden und Abbildung in einer Leitertafel. Diskussion der Fehler.

c) M. Zühlke, Die Bestimmung der Leistungsmeßfehler aus den Stromwandlerfehlern, AWF-Mitt. 1938, Heft 9, S. 118...121. Ersatz von ähnlich verlaufenden Strom- und Winkelfehlerkurven durch eine Näherungskurve und Darstellung des Ergebnisses in zwei einfachen Leitertafeln der ersten Grundform mit parallelen Trägern.

Das Gebiet der Näherungslösungen ist erst wenig erforscht. Zwar weisen die in den letzten Jahren veröffentlichten, oben genannten Arbeiten bereits einen deutlichen Weg in dieses Neuland der Rechentechnik. Sicher stehen wir hier aber erst am Anfang einer interessanten Entwicklung.

G. Richtlinien für Herstellung und praktische Ausgestaltung von Rechentafeln und Sonderrechenstäben

I. Formulierung der Aufgabe; Rechenhilfen oder Gebrauchstafeln

Die Ausführungen der vorhergehenden Abschnitte machen den Leser mit den zur Zeit wichtigsten und am häufigsten benutzten Darstellungsmitteln bekannt. Daß in unserer Zusammenstellung dieselben Gesetzmäßigkeiten, d. h. Formeln gleicher Art, in mannigfachen verschiedenen Tafelformen und Rechenstäben wiederholt auftreten, ist keineswegs ein belangloser Zufall, sondern wirft durchaus ein Schlaglicht auf die besondere Arbeitsweise der Rechentechnik. Wer die erste Bekanntschaft mit rechentechnischen Methoden macht, wird hier naturgemäß eine Schwierigkeit sehen, und eine häufig aufgeworfene „erste Frage" bezieht sich darauf, wie denn unter den verschiedenen Tafelformen die für den Einzelfall „richtige" Darstellung gefunden werde. In der Tat ist stellenweise die Vielfältigkeit der möglichen Tafelformen so verwirrend, daß ein Anfänger kaum auf den ersten Hieb die richtige Darstellung herausfinden wird. Man betrachte hierzu die früher gegebenen Beispiele, insbesondere Bild 78 und das Bild 107 auf Seite 223. Die Frage nach der Darstellungsform läßt sich nicht ohne weiteres oder mit einem kurzen Wort beantworten; denn zunächst sind unsere Darstellungsmöglichkeiten gleichwertig. Bei der Beurteilung der Frage wollen wir nämlich nicht verkennen, daß die persönliche Gewöhnung des Rechners eine gewisse Rolle spielt; und da eine Rechentafel oder ein Sonderrechenstab ja nicht um ihrer selbst willen da sind, sondern Hilfsmittel darstellen, so wird der einzelne sicherlich jedesmal die Darstellungsart als die „beste" bezeichnen, mit der er am schnellsten oder leichtesten arbeitet. Diese Auffassung wird sich vertreten lassen, wenn es sich um Rechenhilfsmittel für den eigenen Gebrauch handelt, so-

genannte „Rechenbehelfe", die wohl jeder Ingenieur schon lange, ehe es eine eigentliche Rechentechnik gab, mit bestem Erfolg angewendet hat.

Dennoch liegt auch in diesen mannigfachen „Einzelkonstruktionen", die sich vielfach durch Ausgestaltung der sogenannten Diagramme entwickelt haben, letzten Endes eine erhebliche Unwirtschaftlichkeit, die wir durch rechentechnische Arbeitsweise beseitigen können. Eine Unmenge von Einzelkonstruktionen ist in unnützer Parallelarbeit nicht nur auf fremden, sondern oft sogar auf ganz verwandten technischen Gebieten von Fall zu Fall neu „erfunden" worden, wo die Sachlage auf Grund eines gemeinsamen Rechengerätes mit einem Schlage zu klären war. Wer ferner die Literatur laufend verfolgt, trifft auf manches graphische Verfahren, das dem Autor infolge seiner Beschäftigung mit dem Gegenstand geläufig und handlich ist, das aber dem fremden Benutzer Schwierigkeiten bereitet, überhaupt erst den graphischen Rechnungsgang (Ablesevorschrift) zu verfolgen. Darstellungen dieser Art eignen sich nicht für den allgemeinen Gebrauch, da sie dem Benutzer unproduktive Leerarbeit auferlegen.

Somit gewinnen wir einen Gesichtspunkt, von dem aus die rechentechnischen Hilfsmittel in zwei Gruppen zu scheiden sind:

a) in Rechenbehelfe für den Einzelgebrauch des Herstellers,

b) in Rechentafeln und Sonderrechenstäbe, die wiederholt Anwendung finden und einem weiteren Benutzerkreis dienen sollen.

Beim Entwurf eines Behelfes (*a*) wird uns das Bestreben leiten, schon bei der Herstellung selbst möglichst wenig zu zeichnen und wenig zu rechnen. Daher ist es verständlich, wenn für diese Zwecke die vorgedruckten Funktionsnetze mit Vorliebe herangezogen werden. Die Logarithmenpapiere, die ja Produkte und Quotienten so bequem darstellen, enthalten bereits die wichtigen Linien, in vielen Fällen sogar schon die richtige Bezifferung, so daß der eigentliche Rechengang sozusagen durch Einzeichnung weniger, zumeist gerader Linien erledigt ist. So sind unsere Bilder 24, 56, 57, 61 und in gewissem Sinne auch die alten AWF-Maschinenkarten, für die inzwischen in Sonderrechenstäben bessere Rechenhilfsmittel vorliegen, in unmittelbarer Anlehnung an das vorhandene (vorgedruckte) Logarithmenpapier entstanden. Entsprechendes gilt für andere vorgedruckte Netze (Dreiecksnetz, Polarpapier, Exponentialpapier).

Wir wollen noch weiter auf die sogenannten Rechenlinien hinweisen, das sind die oft verschlungenen Ablesewege innerhalb des Tafelfeldes, deren Bedeutung für Funktionen zwischen mehr als drei Veränderlichen wir an Hand von Bild 64 a behandelt haben. Das Auftreten einer weiteren Veränderlichen wirkt sich (allgemein gesprochen) in einer Brechung des Ableseweges aus. Während sich dieses Verfahren im Schema — vgl. Bild 62, 63, 64 — sehr leicht überschauen läßt, dem Hersteller einer Tafel also gewiß rasch geläufig wird, erfordert die Ausführung der Rechnung in der fertigen Tafel, wenn wir wieder neu vor die Aufgabe gestellt werden, doch jedesmal wieder einige Überlegung und Aufmerksamkeit (siehe z. B. Bild 64 a).

Was bedeutet nun das Brechen des Ableseweges? Tatsächlich benutzen wir doch dieselbe Tafel mehrmals in verschiedener Bedeutung, d. h. wir haben mehrere Tafeln — weil wir ja die Herstellungsarbeit sparen wollten — in einer Tafel zusammengefaßt. Wir können diese überlagerten Tafeln aber trennen und „mäanderförmig" aneinanderreihen. Das Schema solcher Tafeln (siehe Bild 69) läßt sich rasch erfassen, und man wird zugeben, daß die Ablesevorschrift in der fertigen Tafel (Bild 69), eigentlich von selbst gegeben, sicher leichter zu handhaben ist als die „graphische Rechnung" in gebrochenen Rechenlinien. Allerdings erfordert eine Tafel nach Art von Bild 69 eine gewisse Mehrarbeit beim Entwurf, die Tafel selbst wird auch zumeist ein größeres Format erhalten müssen als die Überlagerungsdarstellung. Auf ein anderes, einem ähnlichen Zweck dienendes Verfahren der „Leitlinie" haben wir im Abschnitt C III, 5 hingewiesen.

Ein weiteres Beispiel sei aus der Gruppe der Leitertafeln gegeben. Wir wissen, daß in Dreileitertafeln die Zeicheneinheiten der Leitern zumeist verschieden ausfallen: die Leitern müssen also einzeln entworfen werden (s. z. B. Bild 30). Kretschmer[1]) hat ein Verfahren entwickelt, das die Herstellung der Leitertafel auf fertigem Logarithmenpapier ermöglicht: Man geht von der mittleren Leiter (die eine abweichende Zeicheneinheit habe) zu einer schrägen Geraden und bricht den Ableseweg nach unten: der Neigungswinkel dieser Schrägen läßt sich leicht so wählen, daß die Ablesung unten an der fertigen Teilung erfolgen kann. (Aus diesem Verfahren haben sich übrigens die Wanderkurvenblätter entwickelt.) Wir sparen Entwurfsarbeit und nehmen bewußt einige Umstände und Schwierigkeiten der Ablesung

1) Werft Reederei Hafen 4 (1923), S. 35.

in Kauf. Wird eine Tafel nicht oft gebraucht, so ist das Verfahren sicherlich am Platze.

Das Ergebnis unserer Überlegung ist also klar: Vor dem Entwurf eines Rechenhilfsmittels müssen wir entscheiden und abschätzen, ob eine nur vorübergehende Benutzung des Rechenhilfsmittels die Anwendung vereinfachter Herstellung rechtfertigt, oder ob die Häufigkeit wiederkehrender Rechnung die handliche Ausgestaltung der Tafel oder eines Rechenstabes und damit einen größeren Aufwand an „vorbereitender Arbeit" erfordert. Die folgenden Ausführungen beziehen sich auf gebrauchsfertige Tafeln und Sonderrechenstäbe, werden jedoch stellenweise auch für die Rechenbehelfe von Nutzen sein.

Diese klare Formulierung der Aufgabe wird oft nicht vorgenommen; das führt dann zu Fehlschlüssen über den Wert und Nutzen rechentechnischer Methoden. So schrieb man uns einmal:

„Wir haben gefunden, daß für Aufgaben unseres Arbeitsgebietes der Arbeitsaufwand zur Herstellung einer genauen Rechentafel für komplizierte Gleichungen größer ist als der für die normale Ausrechnung mit Hilfe von Tabellen und Rechenschieber."

Die gleiche Stelle führte aus:

„Verwickelte Gleichungen erfordern in den meisten Fällen komplizierte Nomogramme, die, wenn ein hoher Grad von Genauigkeit verlangt wird, sehr sauber und mit aller Sorgfalt hergestellt werden müssen."

Beide Urteile zeigen, daß ihre Urheber den wahren Sinn der Rechentafel für häufig wiederkehrende Rechnung noch nicht erkannt haben und die diesbezüglich ausgestattete und verfeinerte Rechentafel zu sehr als „Rechenhilfe", nicht aber als selbständiges Rechengerät werten.

Bezüglich der Anwendbarkeit der rechentechnischen Hilfsmittel ist zu sagen, daß ihre Eignung natürlich stark vom jeweiligen Arbeitsgebiet abhängt. Es gibt aber Fälle, z. B. in der Arbeitszeitermittlung, wo der Anteil der Rechenstäbe und Rechentafeln am Gesamtarbeitsgebiet leicht 30 v. H. und mehr betragen kann. Diese Zahl ist nicht aus der Luft gegriffen, sondern geht auf genaue Untersuchungen zurück. Hat man sich zu der Ansicht durchgerungen, daß eine Tafel sehr häufig angewendet werden kann, also nicht nur als gelegentliche Rechenhilfe dient, so soll man zu ihrer Herstellung keine Mühe und keine Zeit scheuen. Für den Gebrauch einer Tafel ist es weniger wichtig, daß man viel Mühe und Zeit zur Herstellung aufgewendet hat, als vielmehr, daß die Benutzung einfach und sicher ist.[1])

1) Siehe die Ausführungen von H. Schwerdt in AWF-Mitt. 1936, Heft 8, S. 88.

II. Wahl der Tafelart; Vor- und Nachteile einzelner Tafelformen

Es gibt viele Fälle, in denen eine besondere Tafelart nicht zwangläufig vorgeschrieben ist, sondern die Wahl zwischen mehreren Formen offen steht. Vergleichen wir die einzelnen Hauptformen zunächst allgemein miteinander.

Die Ablesung in einfachen Netztafeln zeigt sehr große Ähnlichkeit mit der Benutzung von Rechentabellen. Wie man in Tabellenwerken aus einem waagerechten Eingang (Zeile) und einem senkrechten Eingang (Spalte) ein Ergebnis im Zahlenfelde findet, geht man schließlich auch in Netztafeln vor. Man wird den „Schlüssel" einer Netztafel also leicht auch solchen Personen erklären können, denen graphische Verfahren bisher völlig ferngelegen haben. Eine Netztafel macht ferner kein besonderes Ablesehilfsmittel (wie ein Lineal, Dreieck usw.) notwendig, ihre „Bedienung" kann mit einer Hand, sogar auf unglatter Unterlage erfolgen, das (fertige) Blatt läßt sich zur Not falten; eine der ersten Abschätzung dienende Ablesung erfolgt mit einer einfachen Fingerbewegung, vielleicht in sprichwörtlicher Bedeutung in einem Augenblick.

Vorzügen dieser Art stehen aber merkliche Nachteile gegenüber: nicht nur bei mangelhafter Beleuchtung bedingt die Ablesung in Netzen eine gewisse Anstrengung der Augen, die von vielen sogar als nicht unbeträchtlich bezeichnet wird; die Herstellung von Netztafeln, besonders von pausfähigen, die im allgemeinen die gut gedeckte Ausbildung zahlreicher dünner Linien erfordert, ist zeitraubend und verlangt eine sehr gepflegte Zeichentechnik. Ferner sind Netztafeln — man kann sagen zumeist — im Format größer als etwa Leitertafeln gleicher Genauigkeit. Schließlich ist das Zeichenblatt von dem Recheninhalt völlig bedeckt, so daß nur verhältnismäßig wenig Platz bleibt, die besonderen Spezialangaben wie Versuchskennzeichnungen, Lagernotizen, Fertigungsvermerke, Werkstoffkonstanten und dgl. übersichtlich anzuordnen; es ist ferner im allgemeinen nicht leicht, das ausgezeichnete Hilfsmittel der doppelten Bezifferung (Doppelleiter) in Netztafeln ganz eindeutig anzuwenden. Man vergleiche z. B. Bild 69.

In Ergänzung zu den vorstehenden Ausführungen beachte man besonders auch die Ausführungen von A. Walther in den in Abschnitt F II angegebenen Arbeiten über Umwandlung von Netztafeln in Leitertafeln.

Eine entsprechende Beurteilung der Leitertafeln läßt als wesentliche Vorzüge die folgenden erkennen: das Format kann meistens klein und handlich gehalten werden, das Zeichenfeld ist frei und übersichtlich, so daß in maßvoller Weise zahlreiche Sonderbemerkungen für den Rechner angebracht werden können; die Überlagerung mehrerer Teiltafeln beeinträchtigt, wenn sie geschickt vorgenommen wird, das Blickfeld kaum. Ferner lassen sich Leitern feiner und weiter unterteilen, d. h. verdichten, als Kurvenscharen, so daß die Ablesung in Leitertafeln unter Umständen sehr vereinfacht werden kann. Ein bedeutsamer Umstand ist schließlich, daß sich oft mehrere verschiedene Funktionen derselben gegebenen Größen in einer Leitertafel übersichtlich wiedergeben lassen, wobei die Funktionswerte mit einer Ablesung erscheinen, während die Benutzung mehrerer Linienscharen in einem Netz selbst bei farbiger Ausführung auf Schwierigkeiten stößt. Die besondere Bedeutung der Leitertafeln für Ausgleichung von empirischen Funktionen, die bei Bild 103...105 angedeutet ist, kann im Rahmen dieser Übersicht nicht weiter verfolgt werden.[1])

Demgegenüber benötigen wir bei der Ablesung stets ein geradliniges Hilfsmittel, Lineal, Papierrand oder dgl.; die Tafel selbst muß sich auf glatter Unterlage befinden. Das mag stellenweise dem Benutzer von Leitertafeln, etwa in der Werkstatt, rein äußerlich als eine gewisse Unbequemlichkeit erscheinen.

Die Sonderrechenstäbe nehmen insofern eine Sonderstellung ein, als sie durch die Beweglichkeit ihrer Elemente schon mehr nach den eigentlichen getrieblichen Rechengeräten weisen. Die Benutzung eines Rechenstabes ist den meisten Rechnern vom gewöhnlichen logarithmischen Rechenstab bekannt, so daß die Einführung eines Rechenhilfsmittels in Form eines Sonderrechenstabes auf keinerlei Schwierigkeiten stößt. Bezüglich der Unterteilung der Leitern liegen die gleichen Verhältnisse vor wie bei den Leitertafeln. Die Ablesung gestaltet sich indessen bequemer und genauer als dort, weil zusammengehörige Werte unmittelbar aufeinander eingestellt und abgelesen werden. Die Anzahl der in die Rechnung eingehenden Veränderlichen kann durch Vergrößerung der Zahl der beweglichen Zungen vermehrt werden, ist allerdings aus praktischen Gründen nach oben hin begrenzt. Die Anzahl der Einstellungen ist beim Rechenstab im allgemeinen kleiner als bei Netz- und Leitertafeln. An Stelle eines ge-

1) Man lese hierüber nach in H. Schwerdt, Nomographie, Lehrbuch 1924. Berlin. S. 233 § 47 und in Abschnitt F III.

brochenen Ableseweges in Netztafeln bzw. mehrfacher Einstellung der Fluchtgeraden in Leitertafeln tritt sehr oft eine einmalige Einstellung. Der Rechenstab wird zum Rechnen in der Hand gehalten, so daß eine besondere Auflage entbehrlich ist. Die Benutzung gestaltet sich daher sowohl im Büro als auch im Betrieb sehr bequem. Die Schwierigkeiten lagen früher oft darin, daß es wegen der geringen Auflagenzahl von Sonderrechenstäben nicht möglich war, eine wirtschaftlich tragbare Stabausführung zu wählen, die auch in mechanischer wie rechentechnischer Hinsicht den Ansprüchen genügt hätte. Seit der Einführung einfacher Sonderrechenstäbe durch den AWF kann diese Schwierigkeit als behoben gelten. Auch die Selbstanfertigung von Sonderrechenstäben ist heute bei Verwendung eines unbedruckten Schiebers billig und zweckmäßig.

Für Sondertafeln gelten nun ganz ähnliche Gesichtspunkte. Die Parallel- und Kreuztafeln stellen Funktionen zwischen vier Veränderlichen mit einer einzigen Ablesung dar, sie erfordern aber besondere Lineale und Ablesehilfsmittel, und damit sind sie wohl zumeist an Schreibtisch und Zeichenbrett gebunden. Wanderkurvenblätter werden vornehmlich nur für schwierigere Rechnungen heranzuziehen sein; es sind hochwertige Darstellungsmittel, die zunächst wesentlich im Büro Gebrauch finden, so daß praktische Rücksichten auf den Benutzerkreis vielleicht nicht in erster Linie stehen.

Durch Abwägen der Vor- und Nachteile muß der Konstrukteur eines Rechenhilfsmittels jedesmal selbst entscheiden, welche Tafelart er im Sonderfalle wählen mag, oder ob er einen Sonderrechenstab verwenden will. Umfang der Gebrauchshäufigkeit, Gewandtheit und Vorbildung des Benutzerkreises und Verwendungsort (Werkstatt, Büro, Werbung oder dgl.) sind dabei zunächst zu berücksichtigen; aber auch inhaltlich-sachliche Gesichtspunkte können oft entscheidend sein.

Die Entscheidung, welche Tafelform — ob Netz- oder Leitertafel oder Sonderrechenstab — man wählen will, beeinflußt aber, wenigstens in den meisten Fällen, nicht die ersten Entwurfsarbeiten. Das in Abschnitt F II dargelegte Hilfsmittel der dualen Abbildung ermöglicht es immer, jederzeit von einem Rechenstab zu einer Leitertafel oder von dieser zu einer geradlinigen Netztafel und umgekehrt überzugehen. Der Entwurf einer Tafel als geradlinige Netztafel ist stellenweise leichter, manchmal sogar viel anschaulicher. Der Übergang zur Leitertafel wird dann später vollzogen. Wir haben darauf im Abschnitt F II eingehend hingewiesen.

Bisher haben wir vorausgesetzt, daß dem Entwerfer die Wahl des Darstellungsmittels freisteht. Das ist nun aber durchaus nicht immer der Fall. Sämtliche, womöglich noch so verwickelte Funktionen zwischen drei Veränderlichen sind stets in Netztafeln darstellbar; in Leitertafeln können nur diejenigen Funktionen Erledigung finden, die bei geeigneter Darstellung auf geradlinige Netztafeln führen (vgl. Abschnitt F II, Dualität), also Funktionen mit bestimmten mathematischen Eigenschaften. Noch eingeengter sind die Verhältnisse bei den Sonderrechenstäben. Ohne Verwendung besonderer Hilfsmittel sind nur solche Funktionen darstellbar, die auf Addition oder Subtraktion zurückgeführt werden können. Durch Verwendung besonderer Hilfsmittel wie Zahlenbrücke und Funktionsbrücke kann aber der Anwendungsbereich nicht unerheblich erweitert werden. Manchmal gestattet auch die Einführung neuer Veränderlichen eine aus anderen Gründen besonders bevorzugte Tafelform. Man vergleiche hierzu Bild 40. Einen entscheidenden Schritt hat die Rechentechnik auf diesem Gebiet übrigens auch durch Betrachtung von Näherungslösungen getan. Man findet hierüber eine erste Einführung im Abschnitt F III. Bei Funktionen zwischen vier und mehr Veränderlichen ist auch die Darstellbarkeit in Netztafeln an besondere mathematische Bedingungen geknüpft. Diese theoretisch sehr tief gelegenen Fragen können wir hier nicht erledigen, sondern müssen auf die Spezialliteratur verweisen. Diese Zusammenhänge sind zweifellos schon jetzt in den Bereich der unmittelbaren praktischen Bedeutung gerückt, doch wird der Praktiker gegenwärtig vielfach noch mit dem vorliegenden Erfahrungsmaterial auskommen.

III. Durchführung des Tafelentwurfes

Wir wollen nun in großen Zügen die eigentliche Entwurfsarbeit beleuchten und uns zunächst auf Funktionen zwischen drei Veränderlichen beschränken.

Der Ausgang unserer Arbeit ist zumeist eine geschlossene Funktion, eine Formel. Es werden nun zuerst zweckmäßig konstante Größen und Veränderliche kenntlich gemacht, etwa mit Farbstift.

Schritt 1: Kennzeichnung der Veränderlichen.

$$V = \frac{1}{4} \pi \cdot l \cdot d^2. \tag{68}$$

Dann muß man sich darüber klar sein, was man mit der Tafel eigentlich berechnen will. Das mag auf den ersten Blick trivial erscheinen.

Eine Funktion zwischen drei Veränderlichen enthält aber drei Aufgabengruppen; für die Addition, Multiplikation und Potenz lauten sie:

$$\begin{array}{lll} w = u + v & \text{bzw.} \quad w = u \cdot v & \text{bzw.} \quad w = u^v \\ v = w - u & v = w : u & v = {}^u\log w \\ u = w - v & u = w : v & u = \sqrt[v]{w}. \end{array}$$

Jede Rechentafel für eine Funktion „löst" zwar auch die Aufgaben der beiden anderen zugehörigen Gruppen. Darauf haben wir bei der Erklärung der Abbildungen immer wieder ausdrücklich hingewiesen. Die Praxis erfordert aber nicht immer die Lösung aller dieser Gruppen; es ist vielmehr häufig die eine oder andere bevorzugt oder überhaupt nur möglich. So würde es sich im Beispiel

$$V = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot l \cdot d^2$$

darum handeln, ob man aus den Abmessungen des Zylinders (Drahtes) sein Volumen, oder bei gegebenem Volumen und gegebener Länge den Durchmesser, oder entsprechend die Länge sucht. Eine Bevorzugung der Rechenrichtung besteht auch darin, daß eine der Veränderlichen nur in besonderen Fällen unbekannt ist, wie z. B. in

$$M_b^2 + M_d^2 = W^2 \cdot \sigma_i^2 \qquad \text{(siehe Bild 79)}$$

die Größe σ_i. Ist in einer Formel jede der Veränderlichen als Endunbekannte möglich, so vermerken wir das besonders.

Nun werden die frei veränderlichen Größen (unabhängige Veränderliche) mit ihren Bereichen herausgeschrieben. Die genaue Angabe der Bereiche ist für die Wahl des Darstellungsmittels und seine Ausgestaltung von grundlegender Bedeutung. Durch die Bereiche der Unabhängigen ist nun der Bereich der Ergebnisgröße (Abhängigen) in gewisser Hinsicht schon bestimmt: Wenn nämlich in

$$u \cdot v = w \qquad (7)$$

$$u = 3...5$$

$$v = 2...6,$$

so kann für w nur der Bereich

$$w = 6...30$$

in Frage kommen; ein Ergebnis $w = 4$ oder etwa $w = 35$ ist im vorliegenden Falle unmöglich. Es muß aber der Bereich nicht immer ausgefüllt werden, sondern der Ergebnisbereich kann enger sein. Daraus ziehen wir beim Entwurf besondere Vorteile, sowohl für die Anordnung der Darstellungselemente als auch für die Steigerung der Genauigkeit.

Schritt 2: Festlegung der Bereiche.

Gegeben: $d = 0{,}3 \ldots 3 \ldots 30$ mm

$l = 0{,}1 \ldots 1 \ldots 8$ m

Gesucht: $V = 0{,}007 \ldots \ldots \underbrace{1 \ldots 100 \ldots}$ $\ldots 564$ cm³.

Nur dieser Bereich von V tritt auf.

Jetzt handelt es sich um die Feststellung des Funktionstyps. Das ist in der Praxis meist sehr einfach; unsere Formeln zeigen aus bestimmten, hier nicht weiter zu erörternden Gründen vielfach immer wieder dieselbe Gestalt: wo die physikalischen Beziehungen so aufgebaut sind, daß der Verhältnisschluß (Regeldetri) Anwendung findet, entwickeln sich die Formeln nach Multiplikationen oder Divisionen (Produktform), in anderen Fällen gehen die Formeln aus Additionen oder Subtraktionen hervor (Summenform). Eine dieser beiden Gruppen suchen wir zunächst einmal herauszuschälen, wobei wir die inhaltlich-sachliche Bedeutung der Veränderlichen vorerst außer acht lassen.

Daß wir jede Produktform in einen Quotienten überführen und durch Logarithmieren auf die Summenform, die sich natürlich auch als Differenz schreiben läßt, zurückführen können, bedarf wohl nicht mehr besonderer Betonung. Es sei aber kurz darauf aufmerksam gemacht, daß wir in Potenzen (mit konstanten Exponenten) keine Besonderheiten sehen.

In besonderen Fällen kann das Erkennen des Funktionstyps nicht unerhebliche Schwierigkeiten bereiten. An vielen Stellen dieses Buches haben wir hierfür Hinweise und Beispiele gegeben. Man vergleiche hierzu die Abschnitte B III, 2, 4, 5; B IV, 2; B V, 2, 3; B VI; C III, 2, 4, 5; C IV, 2; D I, II, III; E III.

Man lasse bei den Versuchen, eine geeignete Umformung zum Gefügigmachen einer Formel zu finden, nicht zu früh den Mut sinken.

Sehr oft leiten Betrachtungen über den Einfluß einzelner Veränderlichen auf einen geeigneten Ansatz hin. Wir erwähnen hier besonders die Ausführungen in den Abschnitten D II und F II.

Aus $$w = \frac{100 \cdot u}{v\left(\frac{u}{v} + \frac{100 - u}{t}\right)}$$

bzw. $$v = \frac{100 \cdot u}{\frac{u}{w} + \frac{100 - u}{t}}$$

werden z. B. durch Umformung

$$\frac{w}{100 - w} = \frac{t}{v} \cdot \frac{u}{100 - u}$$

bzw. $$\frac{100}{v} = \frac{1}{w} + \frac{1}{t} \cdot \frac{100 - u}{u},$$

also Formeln, die schon wesentlich harmloser aussehen. Wir erwähnen, daß es sich hier nicht um konstruierte Beispiele handelt, sondern um Aufgaben, die von fremder Stelle an den Verfasser herangetragen worden sind.

Wenn schließlich alle Versuche gescheitert sind, so bleibt immer noch die Möglichkeit, eine Näherungslösung zu finden, deren Fehler in den zugelassenen Grenzen liegen. Die Grenzen für die Genauigkeit sind natürlich von Fall zu Fall verschieden. Über die zur Verfügung stehenden Methoden verweisen wir auf den einführenden Abschnitt F III.

Wenn wir uns für die Form, also Netz- oder Leitertafel bzw. Sonderrechenstab, entschieden haben, so ist ein weiterer Schritt vollzogen:

Schritt 3: Wahl der Darstellungsform.

Nun haben wir unter den einzelnen Typen die Auswahl zu treffen:

Schritt 4: Wahl der Type.

Beginnen wir mit einer Summenform! In Netztafeln, in Fluchtlinientafeln und bei Sonderrechenstäben liegen die Verhältnisse ganz einfach; an Hand der Bilder 39, 54, 55, 87 erkennen wir, daß wir so-

wohl von der Schreibung in Addition wie in Subtraktion ausgehen können. Wenn nicht die weiter unten ausdrücklich hervorgehobenen Erwägungen über die sogenannte Koppelung (siehe Bilder 69, 79) Platz greifen müssen, weisen wir in Netztafeln die unabhängigen, d. h. also die zumeist gegebenen Größen den Scharen des Netzes, die Ergebnisgröße (abhängige Veränderliche) der schrägen Schar zu: die Scharen des Netzes schneiden sich nämlich stets scharf, und durch den somit möglichst genau festgelegten Ablesepunkt ist die Ergebnislinie, auch wenn sie sehr steil oder sehr flach verläuft, mit besonderer Genauigkeit bestimmt, während im anderen Falle durch schleichende Schnitte eine Einbuße an Genauigkeit auftreten kann. In Leitertafeln verlegen wir das Ergebnis, wenn der Bereich den gesamten möglichen Umfang umfaßt, gern auf eine mittlere Leiter, weil das Ableselineal bei dieser Anordnung die Ergebnisleiter nie außerhalb des Zeichenblattes schneiden kann; ist der Ergebnisbereich aber ausdrücklich eingeschränkt, so entfällt dieser Grund, und wir gewinnen gerade durch andere Anordnung (also durch Übergang von der Additionsschreibung zur Subtraktionsschreibung oder umgekehrt) eine Steigerung der Genauigkeit. Die größte Freiheit besitzen wir bei Sonderrechenstäben. Wenn man auch immer bestrebt sein wird, die Veränderlichen in der Reihenfolge aneinanderzufügen, in der sie normalerweise auftreten, so kann man bei einem fertigen Stab noch dadurch Anpassung an den jeweiligen Rechnungsfall erreichen, daß man die Zungen miteinander vertauscht bzw. umkehrt (siehe Bild 91). Hierdurch kann die Anzahl der Verstellungen bei Berechnung von Zahlenreihen auf ein Mindestmaß reduziert werden. Wenn wir noch anführen, daß oft auch rein äußerliche Rücksichten auf die Art oder Anbringung der Beschriftung mitsprechen können, so wird dies den Leser nicht etwa unsicher machen, sondern ihm vielmehr zeigen, daß der Entwurf eines Rechenhilfsmittels nicht lediglich als eine Übersetzung einer Rechnung ins Zeichnerische bzw. Getriebliche aufzufassen ist.

Bei Produktformen liegen die Dinge insofern etwas schwieriger, als wir bei den einzelnen Tafelarten mehrere verschiedenartige Typen besitzen:

1. Netztafeln

a) Logarithmische, also auf Summenform zurückgeführte Typen, z. B. Bild 56, 57, 61;

b) Strahlentafeln, also unmittelbare Produkttypen, z. B. Bild 71, 79;

c) Netztafeln mit Hyperbelschar, z. B. Bild 75.

2. Leitertafeln

a) Logarithmische, also auf die Summenform zurückgeführte Typen, z. B. Bild 30, 33, 34, 37, 40;

b) die zweite Grundform (unmittelbare Produkttypen), z. B. Bild 51 a—c.

c) Tafeln mit krummlinigen Trägern, z. B. Bild 49.

3. Sonderrechenstäbe

Die auf die Summenform zurückgeführten logarithmischen Typen.

In der nachstehenden Tabelle sind einige Beispiele gegeben, die wir kurz besprechen wollen. Das Beispiel (1) legt die Benutzung eines logarithmischen Types nahe, da die Leiter $\log v = \log \cos^2 \varphi = 2 \cdot \log \cos \varphi$ eine einfache Leiter log cos φ bzw. log sin φ ist, die bei verständiger Wahl der Zeicheneinheit entweder nach dem Rechenstab oder unmittelbar nach einer Tabelle für log cos gezeichnet werden kann. Eine unmittelbare Produkttype, die doch an irgendeiner Stelle auf projektive Teilungsfunktionen führt, liefert diesen Vorteil nicht.

Dagegen wird man vielleicht (3) und (5), die schon selbst projektive Funktionen enthalten, gerade in einer unmittelbaren Produkttype darstellen; denn eine projektive Funktion (nämlich die Teilungsfunktion) einer projektiven Funktion (nämlich der in der Formel vorkommenden) ist selbst wieder eine projektive Funktion; und da man die in der Formel vorkommende Funktion ja doch berechnen oder konstruieren müßte, so kann man natürlich sogleich auch die Teilungsfunktion projektiv wählen.

Das Beispiel (4) kann auf eine Produkttype hinweisen. Denn in einer logarithmischen Form muß man log von log f bilden, und für Werte $f \leqq 1$ erwachsen mathematische Schwierigkeiten. Eine Produkttype $w = u \cdot v$ enthält aber w regulär, d. h. log f selbst. Daß auch (7) aus ähnlichen Gründen einen auf die unmittelbare Produktform führenden Entwurf nahelegt, geht aus entsprechenden Erwägungen hervor.

Nr.	Formel	Typus	Erläuterung	Quelle
1	$r = \frac{N}{\cos^2 \varphi}$	$w = \frac{u}{v}$ Produktform	$u = N$ $v = \cos^2 \varphi$ $w = r$	Aus Bild 69
2	$\sigma_v = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$	$w = u + v$ Summenform	$u = \sigma^2$ $v = 4\tau^2$ $w = {\sigma_v}^2$	Aus Hütte 26. Aufl. I. S. 651 (Rankine)
3	$\lambda = a + \frac{0{,}0018}{\sqrt{V \cdot d}}$ $a = \text{const}$	$w = u \cdot v$ Produktform	$u = V$ $v = d$ $w = \left(\frac{0{,}0018}{\lambda - a}\right)^2$	Hütte 26. Aufl. I. S. 371 (Formel von Lang)
4	$f = e^{\mu \alpha}$ (μ und α veränderlich)	$w = u \cdot v$ Produktform	$u = \mu$ $v = \alpha$ $w = \ln f = 2{,}30 \cdot \log f$	Eulersche Formel der Seilreibung
5	$\mu = \frac{\beta \cdot (1 + 0{,}0112\, V)}{(1 + 0{,}06 \cdot V)}$	$w = u \cdot v$ Produktform	$u = \beta$ $v = \frac{1 + 0{,}0112\, V}{1 + 0{,}06 \cdot V}$ $w = \mu$	Hütte 26. Aufl. I. S. 302 Formel von Weichert
6	$\operatorname{tg} \gamma = \sin(\alpha + \beta)$	$w = u + v$ Summenform	$u = \alpha$ $v = \beta$ $\operatorname{tg} \gamma = \sin w$ Verzifferung der Leiter oder Schar (w) nach γ	
7	$t = {}^s\log r$	$w = u \cdot v$ Produktform	$u = t$ $v = {}^{10}\log s$ $w = {}^{10}\log r$	

Zu diesen Gesichtspunkten treten nun aber bestimmend die Bereiche. Weit ausgedehnte Bereiche konstanter oder nahezu konstanter relativer Genauigkeit wird man mit logarithmischen Darstellungselementen erfassen, bleibende absolute Genauigkeit weist auf Verwendung gleichförmiger Teilungen, ausgedehnte Bereiche mit

hervorgehobenem Teilbereich (siehe z. B. Bild 98) finden in projektiven Elementen Berücksichtigung. Vergleiche hierzu auch Abschnitt F I. Besondere Lageverhältnisse und Anordnungen können mit Potenzleitern (also in unmittelbaren Produkttypen) erreicht werden. Von ganz besonderer Bedeutung für die günstige Gestaltung der Tafeln ist danach die Methode der freien Parameter, von der wir in Abschnitt B VI, Bild 51 ausführlich berichtet haben. Die Methode ist aber noch viel umfassender.

Die Möglichkeiten, die genannten Gesichtspunkte zu beachten, stehen zum Teil in Konkurrenz, daher lassen sich auch nicht allgemein bindende Regeln dafür angeben, wie man etwa

$$w = u + v; \qquad w = u \cdot v; \qquad w = u : v; \qquad w = u^v \qquad \text{u. dgl.}$$

darstellen solle; vielmehr wird der Konstrukteur hier einer gewissen Erfahrung nicht entraten können, und es sei nicht verschwiegen, daß zahlreiche Tafeln, die als gebrauchsfertige Rechentafeln in Literatur und Handel erschienen sind und ihre Brauchbarkeit erwiesen haben, beim Entwurf erst mancherlei Abänderungen und Umformungen erfahren mußten.

Bei Behandlung von Funktionen mit vier und mehr Veränderlichen ist die Wahl der Type oft durch den Bau der Funktion und den inhaltlich-sachlichen Zusammenhang festgelegt. Unsere erste Aufgabe ist es, eine Zerlegung der gegebenen Funktion zu versuchen.

> Schritt 5: Zerlegung in Teilfunktionen durch Zusammenfassen und Einführung von neuen Hilfsveränderlichen (Zwischenergebnissen). Die Teilfunktionen müssen auf bekannte Typen führen.

Es ist zweckmäßig, hier zunächst die Ausführungen zu Bild 38, 69, 79 noch einmal nachzulesen. Die Funktion

$$s = u \cdot v \cdot w$$

kann wie folgt zerlegt werden:

$$u \cdot v = t_1 \quad \text{oder} \quad u \cdot w = t_2 \quad \text{oder} \quad v \cdot w = t_3$$

$$s = t_1 \cdot w \qquad s = t_2 \cdot v \qquad s = t_3 \cdot u.$$

Je zwei Veränderliche werden also „gekoppelt"; es muß unser Ziel sein, so zu koppeln, daß eine Veränderung der Aufgabe nicht immer

die Wiederholung des gesamten Ableseganges erfordert. Wir verweisen in diesem Zusammenhang auf unsere Ausführungen zu Bild 69 sowie Bild 78, wo Gesichtspunkte für die Kopplung angegeben sind. Wir empfehlen dem Leser, die Bilder 38 und 79 unter dem vorliegenden Gesichtspunkt zu diskutieren und gegebenenfalls eine andere Koppelung zu entwerfen.

Auch andere Gesichtspunkte, z. B. die dabei entstehenden speziellen Eigenschaften der Darstellungselemente, die zu verwirklichenden Bereiche, die Art des sich ergebenden Darstellungsmittels und dergleichen spielen gelegentlich eine Rolle. H. Schwerdt hat hierzu ein schönes Beispiel gegeben, das wir im Schema wiedergeben wollen (Bild 107).

Eine dieser möglichen Tafeltypen haben wir im Abschnitt D II berechnet (Bild 82).

Ob wir mäanderförmig aneinandergereihte Netztafeln oder mehrteilige Leitertafeln mit Zapfenlinien bzw. Sonderrechenstäbe mit einer oder mehreren Zungen benutzen, hängt von Entscheidungen ab, die wir oft erörtert haben. Eine Erleichterung kann in allen Fällen für die Hilfsveränderlichen angegeben werden. Die Zapfenlinie trägt im allgemeinen keine Bezifferung (es sei denn, daß die Hilfsgröße selbst eine technische Bedeutung hat und dann sozusagen als Geschenk erscheint, siehe z. B. Bild 38. Vielfach gibt man der Zapfenlinie irgendeine willkürliche, am einfachsten natürlich gleichförmige Teilung, um das Festhalten oder Merken der Zapfenpunkte zu erleichtern. Ganz entsprechende Überlegungen gelten für die Rechenlinien, die aus einem Tafelteil einer Mäandertafel in den anschließenden hinüberführen; ihr Gefüge kann völlig willkürlich, also zweckmäßig wieder gleichförmig gewählt werden (Bild 69). Für den Ansatz der Tafeln müssen wir allerdings Zeicheneinheiten und Teilungsfunktion für die Hilfsveränderliche berücksichtigen, da sie ja in zusammengehörigen Tafelteilen überein-

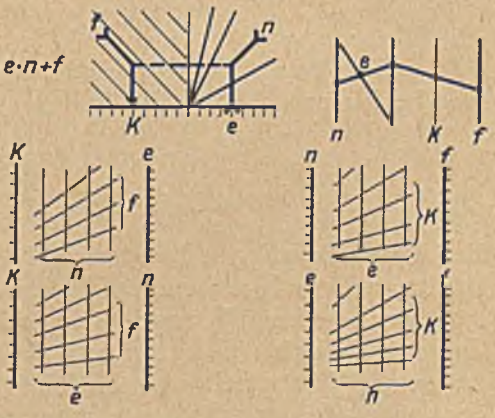


Bild 107. Verschiedene Lösungen für eine Aufgabe

stimmen müssen; nur die zahlenmäßige und zeichnerische Ausführung ersparen wir. Das nützen wir nun für die Entwurfsarbeit aus, indem wir unhandliche, praktisch schwieriger herstellbare Teilungen oder Zeicheneinheiten, die sich gerade aus glatten Einheiten der zu zeichnenden Elemente oft ergeben, ausdrücklich der Zapfenlinie und der Schar der Rechenlinien zuweisen, die wir zeichnerisch nicht auszugestalten brauchen. Bei Sonderrechenstäben entfällt, abgesehen vom Fall der Zahlenbrücke, in dem genau die gleichen Gesichtspunkte wie für Zapfenlinie und Rechenlinien gelten, die Verwendung von Hilfsteilungen.

Oben sind Gründe dafür angegeben worden, in einfachen Netztafeln das Ergebnis in eine Linienschar des Feldes zu verlegen. Bei mehrteiligen Netztafeln gibt man diesen Gesichtspunkt häufig auf, um einen so handlichen Schlüssel zu erhalten, wie ihn Bild 79 zeigt; die Rechenlinien gehören ja den Zwischenergebnissen (t) zu, und wenn man Linien des Netzes zu Rechenlinien ausbildet, können die Teiltafeln ohne Raumverlust dicht aneinandergefügt werden. (Die Frage nach dem Format ist bei mehrteiligen Tafeln stets wichtig.)

Bei Zerlegung der Funktionen kann der Fall auftreten, daß sich Produkt- und Summenformen ergeben. (Beispiel Bild 79.)

$$M_b^2 + M_d^2 = W^2 \cdot \sigma^2.$$

Wir wollen dieses (in der Funktionsform typische) Beispiel etwas eingehender untersuchen. Die Zerlegung ist fast zwangsläufig:

(1) $t^2 = W^2 \cdot \sigma^2$ (1a) $t = W \cdot \sigma$

(2) $t^2 = M_b^2 + M_d^2$.

Es ist naheliegend, an Stelle von (1) die einfachere Form (1a) zu wählen und eine logarithmische Tafelart (Netz- oder Leitertafel) anzusetzen; bei diesem Versuch würde man die Hilfsveränderliche (das Zwischenergebnis) t in einer logarithmischen Leiter erhalten; der Übergang zu (2) ist damit aber behindert, denn die Darstellung von Summen ist in logarithmischen Typen im allgemeinen nicht möglich. Also ist der erste Versuch nicht glücklich, vielmehr muß in jedem Falle (1) so dargestellt werden, daß sich das Darstellungselement, welches t angibt, unmittelbar in die Tafel für (2) übernehmen läßt. Die Auswahl der Tafel (1) wird also durch die Erfordernisse von (2) bestimmt. Die gebräuchlichen Summentypen enthalten nun un-

mittelbar die Teilung (Leiter oder Schar t^2); demnach kann (1a) nicht gewählt werden, sondern es kommt ein Produkttyp für (1) in Frage, der auch die Teilung t^2 enthält. Ob wir nun für (2) eine Netztafel oder (wie in Bild 79) eine Leitertafel und für (1) eine Strahlentafel (wie in Bild 79) oder eine Leitertafel der zweiten Grundform wählen, das bleibt uns überlassen und ist nach den eingangs dargelegten Gesichtspunkten zu entscheiden.

Es ist hier noch ein dritter Weg gangbar. Die Funktion (2) läßt sich nämlich im gleichförmigen Netz $x = M_b$, $y = M_d$ durch eine konzentrische Kreisschar mit dem Radius t linear (in der ersten Potenz!) darstellen. Geht man von einer derartigen Tafel aus, so muß nun mit (1a) weitergearbeitet werden. Der letzte Weg ist für die Konstruktion wohl der allereinfachste, er erfordert allerdings die geschickte Anordnung der Teiltafeln, denn die Hilfsgröße (t) erscheint nicht in einer Netzschar, sondern in einer Schar des Feldes.

Bei einer großen Anzahl von Funktionen ist die Zerlegung unmöglich. Die wissenschaftliche Rechentechnik hat eine Reihe von Funktionstypen herausgearbeitet, die unmittelbar in Leitertafeln mit Netzen (ohne Teiltafeln also) Darstellung finden. Bild 82 und 82a geben Beispiele. Wir verweisen auf den entsprechenden Abschnitt D II.

Für die Herstellung einer Rechentafel oder eines Rechenstabes ergibt sich zusammenfassend das nachstehende Schema, Bild 108.

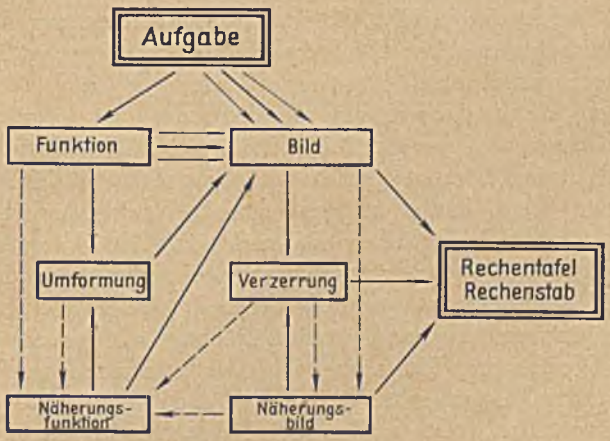


Bild 108. Schema rechentechnischer Arbeitsweise

Hierzu ist folgendes zu sagen:

Eine als Aufgabe vorgegebene Funktion kann gegebenenfalls in ein genau entsprechendes geometrisches Bild übersetzt werden. Aus diesem Bild, das übrigens auch unmittelbar als empirischer Befund gegeben sein kann, entsteht durch Ausstattung eine Rechentafel oder ein Rechenstab. Manchmal formt man die gegebene Funktion erst um, um den Übergang zu einer bekannten Schlüsselgleichung und damit zum geometrischen Bild und zur Tafel zu finden. In schwierigen Fällen gelangt man von der Funktion oder von ihrer identischen Umformung zu einer Näherungsfunktion, von dieser zu einem geometrischen Bild und von hier zum Rechengerät. Der Weg von der Näherungsfunktion zum geometrischen Bild kann gegebenenfalls über eine identische Umformung führen.

Das geometrische Bild kann nun seinerseits einer exakten Verzerrung unterworfen werden, von der aus man dann zum Rechengerät gelangt. In schwierigen Fällen geht man vom geometrischen Bild oder seiner exakten Verzerrung zu einem Näherungsbilde über. Das Näherungsbild kann nun entweder zum Rechengerät umgestaltet werden oder kann vorher noch eine Verzerrung erfahren. Auch die Umwandlung in eine Näherungsfunktion zum Zwecke der mathematischen Umformung mit nachfolgender Abbildung in ein geometrisches Bild ist denkbar. Damit ist der Kreis geschlossen. Alle Übergänge, die aus Absicht oder aus den gegebenen Verhältnissen heraus nur näherungsweise erfolgen können, sind im Schema Bild 108 durch gestrichelte Linien dargestellt. Ob man eine Umformung des Tafelgefüges im geometrischen Bild durch Verzerrung oder Näherung oder in der Formel durch identische Umformung oder Näherungsfunktion vornimmt, hängt von der Art der gestellten Aufgabe, manchmal auch von der persönlichen Eigenart des Entwerfers ab. Feste Richtlinien können hierfür nicht gegeben werden. Für alle angegebenen Wege findet man in diesem Buch oder in der genannten Literatur reichlichen Beispielstoff. Die Verzerrung des geometrischen Bildes (hierunter kann projektive oder duale Abbildung oder anderes verstanden werden) wird meist rechnungsmäßig vorgenommen. Grundsätzlich könnten aber auch hier mechanische Verfahren (Photographie) oder zeichnerische Verfahren benutzt werden. Einen ersten Versuch, die dargelegten Zusammenhänge darzustellen, hat in den AWF-Mitt. 1936, Heft 8, S. 89 H. Schwerdt unternommen.

IV. Zeichnerische Ausstattung der Tafeln

Einige Hinweise auf die rein zeichnerische Ausgestaltung der Tafeln und Stäbe dürften noch am Platze sein; sie gelten sinngemäß für alle Tafelarten.

Eine Rechentafel soll alle Angaben enthalten, die zur Entlastung des „Rechners" dienen können, in erster Linie also die Benennungen und Maße der Größen, aber auch ihren genauen Stellenwert. Dadurch wollen sich die Rechentafeln und der Sonderrechenstab dem gewöhnlichen Rechenstab, der wohl stets das eleganteste Universalrechenhilfsmittel darstellt, als „Spezialmaschinen" gegenüberstellen. Auch die Formel soll stets auf der Rechentafel angegeben werden, wenn die Tafel für sich allein zur Anwendung kommt. Die Einzeichnung eines Ablesebeispiels in Tafeln ist wohl besser als eine Ablesevorschrift in Textform; ob man die Linien des Beispiels punktiert zwischen vorhandene Linien des Netzes und der Scharen legt, oder ob man die Ablesewege durch Verstärkung der vorhandenen Linien angibt, mag der Erfahrung des Einzelnen überlassen sein. Die schematische Zeichnung des Schlüssels ist wohl auch sehr zweckmäßig, sicherlich in Netztafeln. — Daß die Beschriftung deutlich sein, aber doch auch gegen den zeichnerischen Inhalt etwas zurücktreten muß, versteht sich von selbst. Der Verführung, auf den freien Raum, den Leitertafeln und Kreuztafeln lassen, allzuviel Notizen und Bemerkungen zu setzen, widerstehe man besser.

In Netztafeln führt man die Linien zweckmäßig zu einer hervorgehobenen Geraden, an der man die Enden der Linien zu einer Leiter ausbildet (vgl. Bild 71, 72, 82). Ob man dabei eine sogenannte „Leiste" anwendet, ist wohl Geschmackssache; vielen Rechnern gibt die Leiste eine besondere Sicherheit in der Ablesung. In Leiter-, Kreuz- und Paralleltafeln sollte man Leisten aber unbedingt vermeiden, da sich sonst leicht Irrtümer durch Verwechslung mit dem Leiterträger ergeben können; dagegen ist die Verwendung einer Leiste bei Rechenstäben empfehlenswert.

„Glatte" Zahlenwerte werden durch längere Teilungsstriche und durch größere Beschriftung betont, in Netzen auch durch größere Strichdicke. Gerade ein Netz soll durch sein Gefüge die Ablesung schon innerhalb des Feldes ermöglichen, so daß die Ablesewege zum Rande, oft wenigstens, unnötig werden. Die vorgedruckten Logarithmenpapiere sind in dieser Hinsicht vorbildlich. Die angeschriebenen Zahlen sollen ebenfalls der Struktur der Teilung Rechnung

tragen. Unsymmetrische Beschriftungen sind immer störend. So wird man bei logarithmischen Teilungen kleiner Zeicheneinheiten nicht etwa die Zahlen 1 2 3 4 5 6 8 10, sondern besser nur 1 2 5 10 anschreiben. Bis zu fünf Schritte kann unser Auge mit einem Blick erfassen. Bei projektiven Teilungen und ebenfalls bei Potenzleitern bedarf dieser Punkt besonderer Beachtung; denn bei diesen Teilungen erfolgen die Schrittwechsel nicht in so einfacher Folge wie bei logarithmischen und die Beschriftung muß sich dem Schrittwechsel anpassen, damit die Schrittfolge ohne Erklärung überblickt werden kann. Hierbei beachte man auch die im Abschnitt A II, 2 gegebenen Richtlinien (Bild 7a), nach denen die Zahlen so angegeben werden, daß die nachstehenden Leiterstriche nur eine Vervollständigung der Dezimalen ergeben. Bei der 5 macht man hier allerdings oft eine berechtigte Ausnahme; besser ist es indessen, den Teilstrich für die 5 durch einen Punkt zu kennzeichnen.

Die Versuche, schematisch gerade und ungerade Zahlen durch Strichführung und Beschriftung zu kennzeichnen, konnten sich nicht bewähren, da sie oft mit den durch die Schrittfolgen verzerrter Netze und Teilungen erforderlichen Kennzeichnungen in Widerspruch stehen. — Daß man in allen Tafeln farbige Hilfsmittel und verschiedene Schriftarten zur Kennzeichnung der Koppelungen und dgl. verwenden kann, versteht sich von selbst; die Farben werden am besten möglichst ungesättigte Töne aufweisen. In Leitertafeln und Sonderrechenstäben lassen sich leicht Farbstreifen an die Teilungsträger setzen, in Netztafeln die Streifen zwischen den Ergebnislinien übersichtlich anlegen.

Die Anordnung (Reihenfolge) der Teiltafeln muß so erfolgen, daß die Hand des „Rechners" nicht den Blick verdeckt. Deshalb setzt man Beschriftungen in Netztafeln gern links und oben hin; in Tafeln mit Rechenlinien oder mehrteiligen Netz- und Leitertafeln arbeitet man zweckmäßig von rechts nach links. Auf diese Dinge wird in neuerer Zeit größerer Wert gelegt als früher (vgl. Bild 69, 79).

Anläßlich der ersten Auflage ist von vielen Stellen eine noch reichhaltigere Ausstattung des Buches mit Beispielen aus der Praxis gewünscht worden. Wo dies mit Rücksicht auf den Umfang der Schrift geschehen konnte, ist diese Ergänzung in der Neuauflage erfolgt. Um aber darüber hinaus noch mehr Übungsmaterial, besonders für Rechentechnikkurse, zur Verfügung zu stellen, bringen wir nachstehend in Abschnitt H (Anhang) II, ein Verzeichnis von Rechentafeln, die in den „Rechentechnischen Berichten" der AWF-Mit-

teilungen bzw. vorher in den AWF-Mitteilungen selbst mit Beschreibung und Hinweisen auf ihren Entwurf und ihre Herstellung veröffentlicht worden sind. Zu jeder Tafel ist hinzugefügt, in welchem Abschnitt dieses Buches die betreffende Tafel- oder Rechengerätform beschrieben worden ist. Wir hoffen, damit allen Wünschen entsprochen zu haben.

V. Schlußbemerkungen

Wenn wir von den algebraischen und funktionstheoretischen Zusammenhängen, von denen noch viele Probleme Förderung erfahren müssen, absehen, so sind die geometrischen Grundlagen der Rechentafeln und Sonderrechenstäbe, die Darstellungselemente, eigentlich durch elementare Regeln der analytischen und projektiven Geometrie gegeben, so daß man von „angewandter analytischer" oder „angewandter projektiver Geometrie" sprechen könnte.

Die Kombination verschiedener Darstellungselemente, ihre feste oder veränderliche Zuordnung zueinander sowie ihre funktionsmäßige Verknüpfung durch den sogenannten Ableseschlüssel bieten eine ungeheure Fülle von Möglichkeiten, mit denen man fast jedem Problem beikommen kann. Es hat auch nicht an Ansätzen gefehlt, diese Möglichkeiten systematisch zu erfassen. Wir verweisen hierzu auf die Arbeiten von Fürle, Rechenblätter, Progr. der 9. Realschule Berlin O 1902, Nr. 131. Siehe auch H. Schwerdt, Lehrbuch S. 249...251.

Und doch ist damit der Inhalt rechentechnischer Arbeitsweise keineswegs vollständig erfaßt. Unsere Lösungen sind nicht eindeutig und wenn auch mathematisch, so doch praktisch nicht gleichwertig. Die Ausführungen dieses letzten Abschnittes G haben gezeigt, daß wir die „Nebenbedingungen", die wir beim Entwurf beachten müssen, gar nicht ohne weiteres mathematisch erfassen oder formulieren können.

Das vorliegende Buch soll ein Wegweiser sein zur möglichst weitgehenden Erfassung dieser Bedingungen und zur Vermeidung von Umwegen. Daß hierbei auch unmittelbar verwendbare Hilfsmittel zur Durchführung mancher einschlägigen Arbeiten in möglichst einfacher und leichtverständlicher Art zur Verfügung gestellt werden, war der Leitgedanke der Darstellung. Man betrachte das vorliegende Buch aber nicht als Kochbuch und verlange von ihm nicht die fertig ausgerechnete Lösung für alle in der Praxis vorkommenden Fälle. Wahre Beherrschung der rechentechnischen Hilfsmittel verlangt nun einmal vielfache persönliche Erfahrung.

POLITECHNIKA ŚLĄSKA BIBLIOTEKA GŁÓWNA

H. Anhang

I. Schlagwörterverzeichnis

A

Abbildung, perspektivische 181
—, projektive 181
abhängige Veränderliche 14
Ablesegenauigkeit
auf Funktionsleitern 33, 212
bei Netztafeln 54, 212
Ablesegerade 72
Ablesekurve, Kreis als 163
Ablesevorschrift 209
in Leitertafeln 72
in Netztafeln 117
Ableseweg, Brechung 210
Abszisse 17
Abszissenachse 16
Achsenkreuz, rechtwinkliges 16
Addition von Strecken 168
Additionsform 99
Additionstafel 76
Additionstyp 77
Änderung des Zahlenschrittes 31, 37
allgemeine Doppelleiter 69
Dualität 189
Anfangsgerade 75
Anfangspunkt einer Leiter 29, 44
Angleichung 74
Anzeigebereich 42
ausgeartete Dreistrahltafel 166
AWF-Sonderrechenstab 171

B

Basis eines Logarithmensystems 22, 36
Beispiel, Methode 75, 127
Beiwert 114
—, freier 114
Bezeichnung einer Funktionsleiter 28
Bildebene 181
Bildgerade 53, 117
Bildpunkt 18, 182
Brechung des Ableseweges 210

D

Darstellungselemente 14
Dekade 36
Determinante 106, 144
— einer projektiven Funktion 44
Differenzenreihe 29, 34
Divisionsform 99, 137
Doppelleiter 25, 67, 69
—, verzerrte 28, 70
—, allgemeine 69
Doppelstrahlentafel 114
doppeltlogarithmisches Netz 60
Dreieckskoordinaten 145
Dreiecksnetz 145, 209
Dreieckstafel 145
Dreistrahl 165
Dreistrahltafel 165
—, ausgeartete 166
dual 189
Dualität 188
—, allgemeine 189
—, spezielle 189
Durchmesser einer Parabel 191

E

Einfache Funktionsleiter 28
einfach logarithmisches Netz 56
Einschaltung, geradlinige 15
—, projektive 47, 48
Ersatzfunktion 200
erste Grundform
bei Leitertafeln 73, 80, 98, 107
bei Netztafeln 118, 124, 137
Exponentialfunktion 23
Exponentialnetz 57
Exponentialpapier 56, 57, 209

F

Fehlerintegral 31
Fluchtgerade 72
Fluchtlinientafel 72, 154
—, verallgemeinerte 154
—, —, Schlüsselgleichung 155
Fluchtrichtigkeit 72, 105
Formel 21
freier Beiwert 114
freier Parameter 112, 114, 178
Funktion 14
—, empirische 14
—, projektive 23
—, —, Umkehrfunktion 23
—, —, Determinante 44
Funktionsbrücke 177
Funktionsleiter 25, 28
—, Ablesegenauigkeit 33, 212
—, Bezeichnung 28
—, einfache 28
—, Interpolationsfehler 33, 35

Funktionsleiter, isograde 40
Funktionsnetz 53, 55
Funktionsschar 54, 55
—, nichtparallele 64

G

geometrisch verzerrtes Netz 59
geradlinige Einschaltung 15
— Interpolation 15
— Leitertafel, Grundformen 73, 80, 98, 105, 187
— Netztafel 142
— —, Schlüsselgleichung 143
Getriebe, rechnendes 11
gleichförmige Leiter 19
gleichförmiges Netz 53
gleichförmige Stelle einer Leiter 35
— Teilung 19
Gleichung, quadratische 111, 196
Gleitkurve 67
Grundform, erste
bei Leitertafeln 73, 80, 98, 107
bei Netztafeln 118, 124, 137
—, zweite
bei Leitertafeln 98, 105
bei Netztafeln 137, 144, 188
Grundformen geradliniger Leitertafeln 73, 80 98, 105, 187

H

Hauptachse einer Parabel 191
Hilfsgerade 46, 65
Hilfsveränderliche 88, 129, 149, 175, 222, 223
Hüllkurve 68

I

Index 16
Interpolation 15, 47
—, lineare oder geradlinige 15, 21
—, projektive 47, 48
Interpolationsfehler auf Funktionsleitern 33, 35
—, theoretischer 33
Interpolationsformeln 34, 49
isograde Funktionsleiter 40

K

Kegelschnitt 189, 190, 191
—, Pol 190
—, Polare 190
Kehrwertleiter 44
Konstruktion projektiver Leitern 46
Koordinaten, krummlinige 63
—, Linienkoordinaten 189
—, Punktkoordinaten 189
Koordinatenmethode bei Leitertafeln 105
bei Netztafeln 142
Koordinatensystem 16
Koordinatenursprung 16
Kreis als Ablesegerade 163
Kreisschar 63
Kreuztafel 164
krummlinige Koordinaten 63
— Leitertafel 106, 108
— —, Schlüsselgleichung 106
— Netztafel 146
krummliniger Träger 51
— —, Parametermethode 52
Kurven, Streckung von 54
Kurvenschar 147
Kurventafel 16

L

Leiste 227
Leiter, Anfangspunkt 29, 44
—, gleichförmige 19
—, gleichförmige Stelle 35
—, logarithmische 36
— mit krummlinigem Träger 51
— — — —, Parametermethode 52
—, projektive 43
—, —, Konstruktion 46
Leitergefüge von Potenzleitern 41, 42
— — projektiven Leitern 45
Leitertafel 67
—, Ablesevorschrift 72
—, erste Grundform 73
—, — —, allgemeinerer Fall 98, 107
—, — —, symmetrischer Fall 73
—, — —, unsymmetrischer Fall 80
—, geradlinige, Grundform 73, 80, 98, 105, 107, 187
— im engeren Sinne 71
—, Koordinatenmethode 105
—, krummlinige 106, 108
—, —, Schlüsselgleichung 106
— mit Netzen 149, 154
—, zweite Grundform 98, 105
Leitlinie 136, 210
lineare Interpolation 15, 21
Linienkoordinaten 189
Logarithmus 22, 36
—, Basis 22, 36
logarithmische Leiter 36
— —, Rechengenauigkeit 37
— —, Zeicheneinheit 36, 38
Logarithmenpapier 39, 209
—, einfach 56
—, doppelt 60

M

Mäandertafel 134, 223
Meßbereich 42
Methode des Beispiels 75, 127
Millimeterpapier 53
Mindestzeicheneinheit 33
Multiplikationsform 99, 137
Multiplikationstafel 77, 78, 122
Multiplikationstyp 100

N
Näherung
im Bild 205
in der Funktion 200
Näherungsmethoden 198
Netz, beliebig verzerrtes 63
—, doppeltlogarithmisches 60
—, einfachlogarithmisches 56
—, geometrisch verzerrtes 59
—, gleichförmiges 53
—, Leitertafel mit Netz 149, 154
—, zweifachlogarithmisches 62
Netztafel 117
—, Ablesegenauigkeit 54, 212
—, Ablesevorschrift 117
—, erste Grundform 118, 124, 137
—, — —, allgemeinerer Fall 137
—, — —, symmetrischer Fall 118
—, — —, unsymmetrischer Fall 124
—, geradlinige 142
—, —, Schlüsselgleichung 143
— im engeren Sinne 117
—, Koordinatenmethode 142
—, krummlinige 146
—, zweite Grundform 137, 144, 188
Normungszahlen 40
Numerus 22

O
Ordinate 17
Ordinatenachse 16

P
Parabel 191
—, Durchmesser 191
—, Hauptachse 191
Parallelfunktionsschar 65
Parallellineal 164
Parallelschartafeln 118, 120
Paralleltafel 164
Parameter 52
Parameter, freier 112, 114, 178
Parameterdarstellung 52, 65
Parametermethode bei krummlinigen Leitern 52
perspektivische Abbildung 181
Pol eines Kegelschnittes 190
Polare eines Kegelschnittes 190
Polarkoordinaten 63, 209
Potenzgesetz 84
Potenzleiter 40
—, Gefüge 41, 42
Potenzpapier 62
Produktform 219, 220
projektive Abbildung 181
— Einschaltung 47, 48
— Funktion 23, 43
— —, Determinante 44
— —, Umkehrfunktion 23
— Interpolation 47
— Leiter 43
— —, Konstruktion 46
— —, Leitergefüge 45
— Verzerrung 180
Punktkoordinaten 189

Q
Quadratische Gleichung 111, 196
Quadratleiter 41

R
Rechenbehelfe 209
Rechengenauigkeit, relative, auf logarithmischen Leitern 37
Rechenlinie 210
Rechenrichtung 76, 216
Rechenstab, Schlüsselgleichung 169
Rechentafel 11, 71, 117, 209
—, mit besonderen Ablesevorschriften 163
rechnendes Getriebe 11
rechtwinkliges Achsenkreuz 16
Reziprokleiter 44

S
Schaubild 16, 117
Schlüsselgleichung der Leitertafeln von der ersten Grundform 73
— der verallgemeinerten Fluchtlinientafel 155
— des Rechenstabes 169
— von krummlinigen Leitertafeln 106
— von geradlinigen Netztafeln 143
Schritt 15, 19
Sonderrechenstab 11, 167, 209
—, AWF-Sonderrechenstab 171
spezielle Dualität 189
Spiegelung am Kreise 190
Strahlenpunkt 65, 66
Strahlenschar 65, 66
Strahlentafel 137
Strecken, Addition 168
Streckung von Kurven 54, 206
Subtraktionsform 99
Summenform 119, 218, 219
symmetrischer Fall
bei Leitertafeln 73
bei Netztafeln 118

T
Tafel 14
Teil 27
Teilstrich 19
Teiltafel H IV, Anhang
Teilung 20
—, gleichförmige 19
Teilungsschieber 39
theoretischer Interpolationsfehler 33
Träger 20, 137
—, krummliniger 51
—, —, Parametermethode 52
Trägerpunkt 65, 137

U
Umkehrfunktion 22
— einer projektiven Funktion 23
Umkehrung der Rechenrichtung 76
Umwandlung 23, 212
unabhängige Veränderliche 14

unsymmetrischer Fall
bei Leitertafeln 80
bei Netztafeln 124
Ursprung 16

V

Veränderliche 14
—, abhängige 14
—, unabhängige 14
—, Wahl neuer Veränderlichen 95, 173
verallgemeinerte Fluchtlinientafel 154
— —, Schlüsselgleichung 155
Verbundrechentafel 149
verzerrte Doppelleiter 28, 70
Verzerrung 28
—, projektive 180
Verzifferung 36, 39

W

Wahl der Zeicheneinheit 33, 51
— des Zahlenschritts 19, 31, 51
— neuer Veränderlichen 95, 173
Wanderkurvenblätter 148, 210
Wanderkurventafel 146
— mit 4 Veränderlichen 148
Wertevorrat 15
Wurzelleiter 40, 42

Z

Zahlenbrücke 173
Zahlenpaar 17
Zahlenschritt 15, 19
—, Änderung 31, 37
—, Wahl 19, 31, 51
Zahlensprung 173
Zahlentafel 15
Zapfenlinie 87
Zeicheneinheit 17
—, Wahl 33, 51
—, Mindestzeicheneinheit 33
— einer logarithmischen Leiter 36
zweifach logarithmisches Netz 62
zweite Grundform
bei Leitertafeln 98, 105
bei Netztafeln 137, 144, 188

II. Literaturverzeichnis

1. *Wir geben nachstehend ein Verzeichnis der in den AWF-Mitteilungen, besonders in den „Rechentechnischen Berichten" veröffentlichten bemerkenswerten Rechentafeln und Rechenstäbe mit kurzen Hinweisen auf die Abschnitte dieses Buches.*

1933 Heft 2 (auch 1932. Heft 5 S. 45). Sonderrechenstab Zinseszins SR 718.

1933 Heft 5. Sonderrechenstab zu den „Richtlinien für einen guten Mischgasbetrieb", H. Lummert.

$$M_{gs} = \frac{L_{gs}\,(H_w - 2800)}{1500}.$$

1933 Heft 9. Sonderrechenstab für Zickzacknietung, E. William, S. 71...72

$e^2 = 0{,}16 \cdot d^2 + 0{,}48 \cdot d \cdot p + 0{,}11 \cdot p^2$. Näherungslösung E I, III; F III

1935 Heft 11. Sonderrechenschieber für Elektrotechnik, W. Wolff, S. 90...94

1) $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}$ SR 709

2) $B = \dfrac{10^9}{2\pi f} \cdot \left(\dfrac{1}{50} - \dfrac{1}{c'}\right)$ SR 716

3) $e^{b_N} = \dfrac{2}{\omega \left\{ K \cdot \sqrt{Z_I \cdot Z_{II}} \mp \dfrac{M}{\sqrt{Z_I \cdot Z_{II}}} \right\}}$ SR 717 Als AWF-Stäbe erschienen (In Neubearbeitung)

4) $e^{-b_m} = \dfrac{1}{n} \cdot \left(e^{-b_1} + e^{-b_2} + \cdots + e^{-b_n}\right)$ SR 720

5) $z_0 = \sqrt{\dfrac{L_s}{c \cdot s}}$; $f_0 = \dfrac{1}{\pi \sqrt{L_s \cdot C \cdot s}}$ SR 719 E I, II, III

1935 Heft 12. 3 Rechenschieber für die Feuerungstechnik, W. Boye, S. 100...103

1) $V = \left(\frac{0{,}182}{CO_2} - 0{,}075\right) \cdot \left(\frac{H_u + 550}{1000}\right) + 1{,}141$

$L = \left(\frac{0{,}182}{CO_2} + 0{,}025\right) \cdot \left(\frac{H_u + 550}{1000}\right)$

Näherungsformeln! EI, II, III; FIII

2) $[C_{p_{mi}}]_0^t = f_1(\varrho, t) \cdot f_2(\varrho, CO_2) + f_3(t)$ Näherungsformel! EI, II, III; FIII

3) $q_v = \frac{V}{H_u} [C_{p_m}]_0^t \cdot (t - t_a)$ Näherungsformel! EI, II, III; FIII

1 Zunge mit Netz

1936 Heft 5. Ein Sonderrechenstab zur Berechnung der Trockenzeit bei der künstlichen Holztrocknung, F. Kollmann, S. 53...55

$Z = \frac{1}{\alpha} (\ln u_b - \ln u_e) \cdot \left(\frac{d}{25}\right)^{1{,}5} \cdot \frac{65}{t}$ SR 727. EI, II, III

Als AWF-Stab erschienen.

1936 Heft 7. Ermittlung der Feuchtigkeitszunahme des Holzes beim Furnieren, C. Blankenstein und Joh. Fischer, S. 81...82

$x = \frac{(i-1) \cdot Q \cdot (100 - L)}{s \cdot \gamma}$

Lösung in Form einer zusammengesetzten Tafel mit Leitertafeln der 1. Grundform und Netztafel der 1. Grundform. DI

1936 Heft 11. Sonderrechenstab SR 701, Maschinenzeit mit erweiterten Anwendungsbereichen. S. 119...121 EI, II, III

1936 Heft 11. Der AWF-Rechenschieber „Druck- und Glasbild-Vorlagen", O. Schneider. S. 121...123 EI, II, III
SR 729, Beschreibung. Als AWF-Stab erschienen.

1936 Heft 12. Gasrohrberechnung für Hoch- und Niederdruck. S. 128...130
1937 Heft 7. Gasrohrberechnung für Hoch- und Niederdruck. S. 77...78

$p_a^2 - p_e^2 = k_1 \cdot Z \cdot Q_n^{1{,}875} \cdot \frac{L}{D^5}$ [ata]

EI, II, III

$(P_a - P_e) \cdot \frac{P_m}{10333} = k_2 \cdot Z \cdot Q_n^{1{,}875} \frac{L}{D^5}$ [mm WS]

Zur Berechnung von Z werden Zahlentafeln angegeben.
SR 726. Als AWF-Stab erschienen.

1937 Heft 1. Leitertafel mit einem krummlinigen Träger für

$\operatorname{tg} \gamma_0 = \frac{\mu}{\sin \varphi + \mu \cdot \cos \varphi}$ von W. Fehn. S. 13...14 BV, 3

1937 Heft 4. Neuer Rechenschieber für das Tiefziehen runder Hohlteile, H. Gröbner, S. 42...43

$$D = \sqrt{d_m^2 + 4\, d_m \cdot h}$$ E I, II, III

SR 730, inzwischen ersetzt durch den verbesserten AWF-Stab SR 732

1937 Heft 8. S. 83...84 SR 732 E I, II, III

1937 Heft 6. AWF-Sonderrechenstäbe für Balken- und Trägerberechnungen und die Dinormen. S. 67...68, Beschreibung. E I, II, III
SR 714, SR 724, SR 710

1937 Heft 8. Leistungserrechnung in Kaltwalzwerken, S. 81...83

$$Z = \frac{1000}{0{,}0078 \cdot b \cdot d \cdot v \cdot 60} + \frac{1000 \cdot P}{60\, R}\ \text{[Stunden]}$$ E I, II, III

Als AWF-Stab SR 731 erschienen

1938 Heft 1. Sonderrechenstab für die Auswertung der Berstdruckprüfung, Dr. Sommer und H. Schwerdt. S. 9...12
Sorgfältige Ableitung des Rechenstabes SR 733. Studium wird empfohlen. E I, II, III

1938 Heft 1. Nomographische Spannungsberechnung bei Drehstromfreileitungen, H. Freytag, S. 12...13

$$R_1 = \frac{1000}{\chi \cdot q_{\text{eff}}} + \frac{0{,}4\pi}{1000} \cdot f \cdot \operatorname{tg}\varphi \left(0{,}25 + \ln \frac{D}{r}\right)$$ D, II

Krummlinige Leitertafeln mit Netz.

1938 Heft 1. Der Teilungsschieber (DRP), F. Schraidt, S. 14...15
Gerät zur Herstellung von Funktionsscharen. A III, 2

1938 Heft 2. Nomogramm zur Berechnung von Wirk- und Blindleistung bei gegebener Scheinleistung N_s und Phasenwinkel β, M. Zühlke, S. 29...31

$$N_s = \sqrt{N_w^2 + N_b^2};\quad \cos\varphi = \frac{N_w}{\sqrt{N_w^2 + N_b^2}};\quad \begin{matrix} N_w = N_s \cdot \cos\varphi \\ N_b = N_s \cdot \sqrt{1 - \cos^2\varphi} \end{matrix}$$ B, IV

Übersetzung eines mechanischen Rechengerätes in eine Leitertafel der 2. Grundform.

1938 Heft 2. Betriebsmäßige Strommessung an Stromverbrauchern, J. Fischer, S. 31...32

$$J_2 = \frac{1}{\frac{R_i}{U} + \frac{1}{J_1}}$$ B III, 4, 6; B IV, 3; B VI; F I

Leitertafel der ersten Grundform mit Netz, projektive Verzerrung, freie Parameter.

1938 Heft 3. Federung von Fahrzeugmodellen, W. Treusch u. H. Schmerdt, S. 43...45

$$\frac{f}{n} = \frac{P}{11\,700} \cdot \frac{r^3}{d^4} = \frac{884}{11\,700} \cdot \frac{r^3}{d}$$ B III, 5

Zusammengesetzte Leitertafel der 1. Grundform. Schlechte und verbesserte Form. (Kopplung zweier Funktionen.)

1938 Heft 3, 1938 Heft 5. Rechengerät zur Bestimmung der elektrischen Leistung aus Spannung und Strom oder Widerstand, M. Zühlke, S. 46, S. 75

$$\frac{E}{R} = J; \quad \frac{E^2}{R} = N$$ B III, 5

Zusammengesetzte Leitertafel der ersten Grundform als Ersatz für eine ungeeignete Tafel mit beweglichem Ablesedeckblatt.

1938 Heft 3. Neuer Rechenschieber zur Ermittlung von Schnittkraft und Schnittarbeit in der Stanzereitechnik, H. Gröbner, S. 47

$P = U \cdot s \cdot k_s$; $A = x \cdot P \cdot s$ AWF-Rechenstab SR 734 E I, II, III

1938 Heft 4. Die Profilverzerrung gedrehter Formstähle, P. Hofmann, S. 58...59
Ableitung einer Näherungsformel und Darstellung in einer Leitertafel der ersten Grundform mit drei durch einen endlichen Punkt gehenden geraden Trägern.

$$x = r - \sqrt{r^2 + a^2 - 2a\sqrt{r^2 - \delta^2}}$$

geht über in

$$\frac{0{,}012\,800}{a - x} = \frac{1}{a} - \frac{1}{r}$$ B III, 6; B V, 2; F III

Besprochen in 1938 Heft 8, S. 103...104.

1938 Heft 4. Anpassung einer Näherungsfunktion an einen vorgeschriebenen Bereich, H. Schwerdt, S. 59...62.
Theoretische Betrachtungen zur vorhergehenden Arbeit von P. Hofmann. Benutzung des Hilfsmittels der dualen Abbildung zum Studium des Fehlers. F II; F III

1938 Heft 4. Bestimmung von Sichtweiten, J. Fischer, S. 62

$$J = \frac{0{,}2 \cdot r^2}{\sigma^r}$$ B V, 3

Leitertafel mit einer krummlinigen Leiter

1938 Heft 4. Rechenstab für Sichtweiten von Leuchtfeuern, H. Schwerdt, S. 63 ...65
Näherungslösung, entwickelt aus der Leitertafel von J. Fischer durch Annäherung der krummlinigen Leiter durch eine Gerade und Umwandlung in einen Rechenstab. B V, 3; E III; F II; F III

1938 Heft 6. Nomogramm zur Ermittlung von Versicherungswerten, H. Schwerdt und G. Wünsche, S. 88...89.
Doppelleitern und zusammengesetzte Leitertafel mit krummlinigem Träger für Formeln aus der Versicherungsmathematik (Koordinatenmethode) B V, 3

1938 Heft 6. Sonderrechenstäbe zur Ermittlung des Fülldruckes in gasgefüllten Gefäßen, W. Grollmitz, S. 89...90
Ansatz von zwei Sonderrechenstäben für

$$P_{f_{760}} = 760 \cdot \left(1 - \frac{V_w}{V_g}\right)$$

$$P_f = \frac{P_{f_{760}} \cdot P_b}{760}$$

E I, II, III

1938 Heft 8. Profilverzerrung, M. Zühlke, S. 109...110
Referat über zwei Arbeiten von H. Wilhelmi, VDI-Zeitschr. Bd. 81 Nr. 30, S. 894...895
und Maschinenbau — Der Betrieb Bd. 16, H. 21/22, S. 555...556.
Rechengerät nach Art der rechnenden Getriebe.

1938 Heft 8. Schaubild und Nomogramm? J. Fischer und Prof. Sager, S. 110...112
Wiedergabe eines Schaubildes und einer Leitertafel mit Netz für die Formel

$$s = \frac{v^2}{2b} + v \cdot t$$

Gegenüberstellung D II

1938 Heft 8. Sonderrechenstab zur Ermittlung der wirtschaftlichen Losgröße, H. Höfinghoff, S. 112

Rechenstab für $L = 10 \cdot \sqrt{\frac{24 \cdot M \cdot E}{P \cdot Z}}$ E I, II, III

mit zwei beweglichen Zungen.

1938 Heft 9. Die Bestimmung der Leistungsmeßfehler aus den Stromwandlerfehlern, M. Zühlke, S. 118...121
Ableitung von Näherungslösungen in Form von Leitertafeln der ersten Grundform mit parallelen Trägern für

$$F = \frac{J_1}{J_n} \cdot \left[f' \cdot \cos \varphi_1 + \frac{\delta'}{34{,}4} \cdot \sin \varphi_1\right]$$

Näherung im Bild (Ersatzkurve). Außerdem Wiedergabe einer exakten Tafel (Leitertafel mit Netz) D II; B III, 3; F III

1938 Heft 9. Nomogramm für den Gesamtfehler bei Stromwandlern, J. Fischer, S. 125...126
Gleiche Formel wie vorstehend. Leitertafel mit Netz. Andere Zuordnung; Koordinatenmethode D II

1938 Heft 9. Die Berechnung von Vulkanisationszeiten, M. Zühlke, S. 121...125
Verschiedene Tafeln für

$$z = z_0 \cdot k^{0{,}1\,(t_0 - t)}$$

B III, 3; B III, 5; C IV, 1, 2; D II

1938 Heft 10. Nomogramm für die Berechnung von Koronaspannungen, R. Roeper, S. 134...136
Leitertafel mit krummlinigem Träger für

$$U = r \cdot \ln \frac{a}{r} \cdot C$$

Koordinatenmethode, Benutzung des dualen Netztafelbildes B V, 3; F II

1938 Heft 12. Nomographische Methoden, M. Zühlke, S. 166...172
Nach einem Vortrag anläßlich der Lehrertagung des AWF.

1939 Heft 1. Wärmeübertragung bei turbulenter Strömung in Rohren, W. Treusch, S. 17...21

$$N_u = \frac{\alpha \cdot d}{\lambda} = \frac{0{,}0395 \cdot R_e^{\frac{3}{4}} \cdot P_r}{1 + 1{,}5 \cdot R_e^{-\frac{1}{8}} \cdot P_r^{-\frac{1}{6}} \cdot (P_r - 1)}$$

Näherungslösung, Übergang von einer krummlinigen Netztafel durch Ersatz der Kurven durch Geraden. Umwandlung der geradlinigen Netztafel in eine duale Leitertafel mit einer krummlinigen Leiter F II; F III

1939 Heft 2. Der Einfluß einer Herabsetzung des Rechnungszinsfußes auf die Deckungsrücklage in der Lebensversicherung, G. Wünsche, S. 40...43
Zusammengesetzte Leitertafel, Leitertafel der zweiten Grundform als Näherungslösung, Leitertafel mit krummlinigen Trägern, Koordinatenmethode B V, 3; F III

1939 Heft 4. Ein Sonderrechenstab zur Berechnung von Nieten für Stahlhochbauten, Eisenbahn- und Straßenbrücken, Krane und Kranbahnen, W. Frost, S. 64...66
Beschreibung der Neubearbeitung des Rechenstabes SR 715 (Nieten für Stahlhochbau) E I, II, III

1939 Heft 4. Bestimmung von Ballonhöhen, J. Fischer, S. 67

$$h = b \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \cdot \operatorname{tg} \gamma_1; \quad z = b \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$$

Zusammengesetzte Leitertafel der ersten Grundform B III, 5

1939 Heft 5. Über die Verwendbarkeit der Nomogramme für Funktionszusammenhänge zwischen drei Variablen, L. Neder, S. 77...78
Hinweise über schrittweises Rechnen in einfachen Leitertafeln B III, 5

1939 Heft 5. Neue Hilfsmittel zur Bestimmung von Maschinenlaufzeiten an automatischen Verzahnungsmaschinen, O. Kleppek, S. 78...79

Rechenstab mit 2 Zungen für $t_h = \frac{Z \cdot m \cdot \pi \cdot i}{n \cdot s}$ SR 735 E I, II, III

1939 Heft 6. Ein Sonderrechenstab für die Spannungsnachrechnung von hölzernen Knickstäben, W. Frost, S. 90...92
Ableitung des SR 739 E I, II, III

1939 Heft 6. Die Logarithmen der Zahlen 2, 3 und 7 genügen, J. Fischer, S. 94
Aufbau der logarithmischen Leiter A II, 3

1939 Heft 7. Neue Hilfsmittel zur Bestimmung von Maschinenlaufzeiten an automatischen Verzahnungsmaschinen, W. O. Kleppek, S. 103...106
Ableitung der SR 736 und 737 E I, II, III

1939 Heft 8. Sonderrechenstab des AWF für das Drehen von Stahl mit Hartmetall, Fr. Seeboth, S. 117...118
Ableitung des SR 740 E I, II, III

1939 Heft 8. Vorschlag eines Sonderrechenstabes für Gefrierpunktserniedrigung, Paula Grötsch, S. 118 . . . 119

Entwurf eines Rechenstabes für $M = \frac{m_g \cdot g \cdot 1000}{G \cdot L}$ E I, II, III

1939 Heft 9. Nomogramm zur Ermittlung von Luftschachtabmessungen in Transformatorenräumen, R. Roeper, S. 124...126
Zusammengesetzte Leitertafel der ersten Grundform für

$$K_2 \cdot q = \frac{N_v \cdot \sqrt{1 + \alpha t_1}}{(t_2 - t_1)^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{h}} \quad \text{(Näherungslösung)}$$ B III, 5; F III

1939 Heft 10. Verbesserung einer Leitertafel, R. Jacki, S. 131...132
Überlagerte Leitertafeln der zweiten Grundform B IV, 2

1939 Heft 11/12. Der Viskokalkulator, ein Rechenstab für Viskositätsrechnungen. Nach O. Amsel und H. Seelos von M. Zühlke, S. 136...137 E III

1940 Heft 2/3. Sonderrechenstab „Bremsverzögerung", Bahlecke, S. 15...16.
Ableitung eines SR-Stabes für

$$b = \frac{v^2}{2l} \cdot k^2; \quad t = \frac{v}{b} \cdot k$$

Methode des Zahlensprungs. E III

1940 Heft 10. Rechentafeln für die Ermittlung der Zuschnittgrößen für rechteckige Hohlteile. M. Zühlke, S. 53...56

Ableitung einer Näherungslösung in Form einer mehrteiligen Leitertafel mit krummem Träger für

$$2R = \sqrt{4d \cdot h + 2r_b \cdot \pi \cdot d_2 + d_1^2}$$

und einer mehrteiligen Leitertafel der ersten Grundform für

$$H = 0{,}57 \cdot r_b + h + 0{,}5\,d,$$

sowie einer Leitertafel der ersten Grundform für

$$x = \frac{R_1}{R} = 0{,}7074 \cdot \left(\frac{R}{d}\right)^2 + 0{,}962$$

B III, 5; B V, 3 F III

2. Anläßlich einer Ausstellung und Tagung „Rechentechnik" 1938 hat der Ausschuß für Wirtschaftliche Fertigung eine Zusammenstellung über rechentechnische Literatur herausgegeben; sie wird nachstehend mit einigen Ergänzungen wiedergegeben. Wie alle solche Zusammenstellungen erhebt sie keinen Anspruch auf Vollständigkeit, dürfte aber dennoch für viele wertvolle Hinweise enthalten.

Bachmann, H., Tafeln über Abkühlungsvorgänge einfacher Körper. Mit 3 Abb. im Text und 3 Tafeln. 1938. 8 S. *RM* 4.80.

Balogh, A., Beitrag zur Nomographie. 2., ergänzte Auflage. Mit Abb. 1938. 56 S. *RM* 2.—.

Bauschinger, J. und J. Peters, Logarithmisch-trigonometrische Tafeln mit 8 Dezimalstellen, enthaltend die Logarithmen der trigonometrischen Funktionen für jede Sexagesimalsekunde des Quadranten. 2., durchgesehene und verbesserte Auflage. Mit Titel und Vorwort in deutscher und englischer Sprache. 2 Bände. 1936. Band 1: IV, XVII, 368 S. Band 2: II, 961 S. *RM* 52.—.
In zwei Ganzleinenbänden geb. *RM* 58.—.

Berl, E., W. Herbert und W. Wahlig, Nomographische Tafeln für die chemische Industrie. Mit einem Lineal. 31 Tafeln mit Beispielen. 1930. IV S. In Mappe *RM* 10.80.

Bindel, E., Logarithmen für jedermann. Elementare Einführung mit Hinweisen auf höhere Gesetzmäßigkeiten. Mit Abb. 1938. 95 S. *RM* 3.30.

Bohde, H., Mathematisch-technische Zahlentafeln. Vorgeschrieben zum Gebrauch im Unterricht und bei Prüfungen an den Höheren Technischen Staatslehranstalten. Zusammengestellt unter Mitwirkung von H. Höhn und Werners. 8., vermehrte Auflage. 1937. 105 S. *RM* 1.20.

Bosnjakovic, Fr., Technische Thermodynamik. Teil 2 nebst Diagrammen. Mit 243 Abb. 1937. XIV, 294, 24 S. 1 Blatt. Geb. *RM* 19.—.
Diagramme: 7 Tafeln in Mappe. *RM* 8.—.
Von den Diagrammen wurden Sonderdrucke für je *RM* 1.— hergestellt. Unter 10 Stück werden nicht abgegeben. (Wärmelehre und Wärmewirtschaft in Einzeldarstellungen, Band 12.)

Brandenburg, H., Zwei trigonometrische Tafeln alter Kreisteilung zur Berechnung der Hilfs- oder Richtungsgrößen a und b bei Ausgleichung von Dreiecksnetzpunkten mit bereits vorhandenen Unterschieden der Achsenabstände nebst wissenschaftlicher Erläuterung. 1932. 29 S. *RM* 3.50.

Crelle, A. L., Rechentafeln, welche alles Multiplizieren und Dividieren mit Zahlen unter Tausend ganz ersparen, bei größeren Zahlen aber die Rechnung erleichtern und sicherer machen. Neue Ausgabe. Besorgt von O. Seeliger, Neudruck. Mit Tafeln der Quadrat- und Kubikzahlen von 1—1000. 1938. VII S. Spalte 2—999. Geb. *RM* 18.—.

Diercks und Euler, Praktische Nomographie. 1939. 74 S. *RM* 5.—.

Feldkirchner, J., Zins- und Amortisationstabellen. 3., erweiterte Auflage in vier Sprachen. 1932. XXIV, 165 S. Geb. *RM* 12.—.

Friedrich, W., Tabellenbuch für Metallgewerbe zum Unterricht in Berufs-, Handwerker- und Fachschulen sowie zur Fortbildung und zum praktischen Gebrauch für Metallarbeiter, Techniker und Werkmeister. 200...218. Auflage. Mit 880 Abb. und vielen Rechnungsbeispielen. 1937. 220 S. (Ausgabe A der Sammlung von Fach- und Tabellenbüchern.) *RM* 1.60.

Groezinger, W., Fluchtlinientafeln zur Berechnung des $\cos \varphi$. 1925. *RM* 0.90.

Happach, V., Technisches Rechnen. Mit 66 Abb. im Text. 1933. 60 S. (Werkstattbücher, Heft 52.) *RM* 2.—.

Hartleib, O., Lohn-, Multiplikations- u. Divisionstabellen. Bd. 1, D: 2—200/1—120. 57...61. Auflage. 1937. 200 Doppelseiten. Geb. *RM* 7.—.

Heller, C., Der Stückzinsen-Anzeiger per dato in der Effektenberechnung, zugleich anwendbar auf alle Zinsrechnungsarten. Mit 1 ausgestanzten Tafel in Metallrahmen mit 2 drehbaren Rollen. 1933. 37,5×33,5 cm. *RM* 28.50.

Hiedl, H., Dampfturbinen-Verbrauchsdiagramme. Grundlagen und Entwurf nebst Beispielen. Mit 63 Textabbildungen. 1935. VI, 83 S. *RM* 8.—.

—, Verbrauchsdiagramme von Wärmekraftanlagen. Mit 101 Abb. im Text. 1937. VIII, 130 S. *RM* 10.50.

Hildebrandt, R., Mathematisch-graphische Untersuchungen über die Rentabilitätsverhältnisse des Fabrikbetriebes. Mit 31 Abb. im Text und auf 7 Tafeln. 1925. IV, 79 S. Geb. *RM* 5.94.

Höfer, M., Taschenbuch zum Abstecken von Kreisbogen mit und ohne Übergangsbogen. Begründet von O. Sarrazin und H. Oberbeck. Für Teilungen des Kreises in 400^g bearbeitet. Mit 38 Abb. 1938. VII, 368 S. Geb. *RM* 7.50.

Hottinger, M., Klima und Gradtage in ihren Beziehungen zur Heiz- und Lüftungstechnik. Mit 60 Abb. und 60 Zahlentafeln im Text. 1938. VII, 120 S. *RM* 9.60.

Hussmann, A., Rechnerische Verfahren zur harmonischen Analyse und Synthese mit Schablonen für eine Rechnung mit 12, 24, 36 und 72 Ordinaten. Mit 24 Abb. im Text und auf 2 Tafeln, 4 Zahlentafeln sowie 10 Berechnungstafeln. 1938. 28 S. *RM* 9.60.

Hymans, F. und A. V. Hellborn, Der neuzeitliche Aufzug mit Treibscheibenantrieb. Charakterisierung. Theorie, Normung. Mit 107 Abb. im Text. 1927. VI, 156 S. Geb. *RM* 14.30.

Imhoff, K., Taschenbuch der Stadtentwässerung. 7., neubearbeitete Auflage. Mit 58 Abb. und 15 Tafeln. 1936. 195 S. Geb. *RM* 5.40.

Immler, W., Grundlagen der Flugzeugnavigation. 3., erweiterte Auflage. Mit 150 Textabb., 19 Rechentafeln und 16 Tabellen im Anhang. 1937. 178 S. *RM* 12.—.

Jahnke, H., Fluchtentafeln für feuchte Luft. Mit 21 Abb. im Text und 7 Tafeln. 1937. III, 32 S. *RM* 12.60.

Jahnke-Emde, Funktionentafeln mit Formeln und Kurven. 3., wesentlich veränderte Auflage. Mit 181 Fig. 1938. VII, 305 S. Geb. *RM* 15.—.

Justi, E., Spezifische Wärme, Enthalpie, Entropie und Dissoziation technischer Gase. Mit 43 Abb. im Text und 116 Tabellen. 1938. VI, 157 S. Geb. *RM* 19.80.

Koch, W., Mollier-(i, s)-Diagramm zu den VDI-Wasserdampftafeln (große Ausgabe 1 WE = 2 mm). 1937. 1 Tafel 74,5×94,5 cm (Farbendruck). *RM* 6.—.

Koller, S., Graphische Tafeln zur Beurteilung statistischer Zahlen. 1940. 73 S. 6 Abb. und 15 Tafeln (darunter 4 Bildtafeln in Lichtdruck). Geb. *RM* 10.—.

Konorski, B. M., Hilfsbuch für Betriebsberechnungen. Mit besonderer Berücksichtigung nomographischer Methoden. Mit 46 Nomogramm- und 13 Kurventafeln und einem Lineal in einer Mappe sowie 71 Zahlentafeln und 35 Abb. 1930. IV, 137 S. DIN A 4. In Mappe *RM* 25.65.

—, Die Grundlagen der Nomographie. Mit 72 Abb. im Text. 1923. 86 S. (Vergriffen.) *RM* 3.—.

Kraus, E. J., Rechentafeln zur Ermittlung der Normalitätsfaktoren bei maßanalytischen Bestimmungen nebst Logarithmen, Einstellungen von Laugen, Säuren, Permanganat, Jod, Jodkalium, Thiosulfat, Silbernitrat. 1931. 12 S. *RM* 2.50.

Krauß, Die Nomographie. 1922. *RM* 1.80.

Küster, F. W., Logarithmische Rechentafeln für Chemiker, Pharmazeuten, Mediziner und Physiker. Für den Gebrauch im Unterrichtslaboratorium und in der Praxis berechnet und mit Erläuterungen versehen. Nach dem gegenwärtigen Stande der Forschung bearbeitet von A. Thiel. 41.—45., verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 4 S. Tabellen. 1935. 212 S. Geb. *RM* 6.80.

Lacmann, O., Die Herstellung gezeichneter Rechentafeln. Ein Lehrbuch der Nomographie. Mit 68 Abb. im Text und auf 3 Tafeln. 1923. VIII, 100 S. (Vergriffen.) *RM* 3.60.

Laer, W. v., Massenberechnungstafeln für Holzvorratsaufnahmen (Formhöhen-, Kreisflächen- und Massenmultiplikationstafeln). Nach den Grundner-Schwappachschen Massentafeln bearbeitet. 1936. 79 S. Geb. *RM* 5.80.

Liesche, O., Chemische Nomogramme. Herausgegeben auf Veranlassung der Deschema, Deutsche Gesellschaft für chemisches Apparatewesen e. V. Sammlung 1: 6 Tafeln mit Text auf dem Umschlag. 1929. In Umschlag *RM* 2.—.

Lips, Formeln und Tafeln zur Berechnung der ellipsoidischen, der konformen und der geographischen Koordinaten mit der Rechenmaschine. 1932. 56 S. *RM* 3.50.

Lohse, O., Tafeln für numerisches Rechnen mit Maschinen. 2. Auflage. Neubearbeitung von P. V. Neugebauer. 1935. 113 S. Geb. *RM* 6.—.

Lötzbeyer, Ph., Vierstellige Tafeln zum logarithmischen und natürlichen Rechnen. Graphische Rechentafeln. Ausgabe B mit Anhang „Mathematische Formeln". 11., unveränderte Auflage. Mit Figuren. 1938. 34, 8 S. Geb. *RM* 2.—.

Luckey, P., Nomographie. Praktische Anleitung zum Entwerfen graphischer Rechentafeln mit durchgeführten Beispielen aus Wissenschaft und Technik. 3., verbesserte Auflage. Mit 57 Figuren im Text und 48 Aufgaben. 1937. 107 S. *RM* 2.40.

—, Einführung in die Nomographie. Die Funktionsleiter. IX und 60 S. 1925. Kart. *RM* 1.20.

Lutz, O., pV-Tafel, Tabellen und Diagramme zur thermischen Berechnung der Verbrennungskraftmaschinen. Mit 20 Textabb. und 3 Tafeln. 1932. VI, 68 S. *RM* 8.50.

Lutz, O. und F. Wolf, IS-Tafel für Luft und Verbrennungsgase. Mit 4 Abb. und 5 Kurventafeln im Text sowie einer zweifarbigen Tafel. 1938. 14 S. *RM* 3.—. Tafel allein, ungefaltet *RM* 1.50.

Mayer, M., Nomographie des Bauingenieurs. Mit 47 Fig. 1927. 111 S. (Sammlung Göschen.) Geb. *RM* 1.62.

Mehmke, R., Leitfaden zum graphischen Rechnen. 2., vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 144 Fig. und 1 Additions- und Subtraktionskurve als Beilage. 1924. VIII, 183 S. *RM* 4.20.

Merkel, Fr. und Fr. Bosnjakovic, Diagramme und Tabellen zur Berechnung der Absorptions-Kältemaschinen. Mit 30 Abb. und 4 Diagrammen auf Tafeln. 1929. V, 43 S. *RM* 10.80.

Ostertag, P., Kälteprozesse. Dargestellt mit Hilfe der Entropietafeln. 2., verbesserte Auflage. Mit 72 Abb. und 6 Tafeln. 1933. IV, 112 S. Geb. *RM* 8.80.

Pirani, M. v., Graphische Darstellung in Wissenschaft und Technik. 2., verbesserte Auflage, besorgt von I. Runge. Mit 71 Abb. 1931. 149 S. (Sammlung Göschen.) Geb. *RM* 1.62.

Pollak, L. W., Rechentafeln zur harmonischen Analyse. 1926. Mit 5 Tabellen und 258 S. Rechentafeln. 23 S. Geb. *RM* 27.—.

Prölls, O., Graphisches Rechnen. Mit 164 Fig. im Text. 1920. 104 S. Geb. *RM* 1.80.

Rechentafeln für den Dampfkesselbetrieb. 40 Rechentafeln mit dreisprachigen Erläuterungen (deutsch, englisch, französisch). 1935. 19 S. Text. *RM* 6.—.

Graphisches Rechnen. Beispielsammlung und Richtlinien für Anfertigung und praktische Ausgestaltung von Rechentafeln. Im Auftrage des Ausschusses für graphische Rechenverfahren beim AWF bearbeitet von H. Schwerdt, W. Gütschow, I. Runge und F. Wolf. Mit Figuren. 1929. 145 S. (Aus der Sammlung „RKW-Veröffentlichungen".) (Vergriffen.) *RM* 2.75.

Rohrberg, A., Theorie und Praxis des logarithmischen Rechenstabes. 5., unveränderte Auflage. Mit 2 Fig. im Text. 1937. IV, 49 S. (Mathematisch-physikalische Bibliothek, Reihe 1, Heft 23.) *RM* 1.20.

Runge, C., Graphische Methoden. 3. Auflage. Mit 94 Fig. 1928. IV, 130 S. (Sammlung mathematisch-physikalische Lehrbücher, Nr. 18.) Geb. *RM* 5.40.

Sarrazin, O. und H. Oberbeck, Taschenbuch zum Abstecken von Kreisbogen mit und ohne Übergangsbögen für Eisenbahnen, Straßen und Kanäle. 56. Auflage. Mit 37 Textabb. 1938. VII, 306 S. Geb. *RM* 6.—.

Schilling, Fr., Über die Nomographie von M. d'Ocagne. Eine Einführung in dieses Gebiet. 3. Auflage. Mit 28 Abb. 1922. 47 S. *RM* 2.40.

Schreiber, P., Grundzüge einer Flächennomographie, gegründet auf graphische Darstellungen in Funktionspapieren mit gleichmäßiger und logarithmischer Teilung.

Heft 1. Mit 19 Fig. im Text und auf 3 Tafeln. 1921. IV, 85 S. *RM* 4.50.

Heft 2. Anleitung zum praktischen Zahlenrechnen mit Hilfe der Potenzpapiere und der Produktentafel. Mit 53 Fig. im Text. 1922. VI, 113 S. *RM* 5.75.

Schubert, H., Vierstellige Tafeln und Gegentafeln für logarithmisches und trigonometrisches Rechnen, in zwei Farben zusammengestellt. Neue Ausgabe von R. Haußner. Neue, durchgesehene Auflage. 1938. 175 S. (Sammlung Göschen.) Geb. *RM* 1.62.

Schülke, A., Vierstellige Logarithmentafel. Nebst Rechentafeln. Ausgabe A. Ohne Formelanhang. 27. Auflage. 1938. 33 S. Mit Figuren. Geb. *RM* 1.60.

Schwerdt, H., Lehrbuch der Nomographie auf abbildungsgeometrischer Grundlage. Mit 137 Abb. und 151 angewandten Aufgaben mit Lösungen. 1924. VI, 267 S. Geb. *RM* 11.60.

—, Die Anwendung der Nomographie in der Mathematik, für Mathematiker und Ingenieure dargestellt. Mit 240 Abb. im Text und auf 104 Tafeln. 1931. VII, 116 S. Geb. *RM* 25.20.

—, Einführung in die praktische Nomographie. Mit 62 Abb. 1927. VII, 122 S. Geb. *RM* 2.70.

Stotz, R., Werkstattrechnen. Ein Lehr- und Wiederholungsbuch für den Gebrauch in Refa-Vorkursen, in Gewerbeschulen und zum Selbstunterricht. Im Auftrag des Refa-Ausschusses Württemberg. 5. Auflage. Mit Figuren. 1938. 141 S. *RM* 1.20.

Technik der graphischen Darstellung. Herausgegeben von E. Weidmann. Mit Abbildungen. 1938. 60 S. Fr. 2.50.

ten Bosch, M., Die Wärmeübertragung. Ein Lehr- und Nachschlagebuch für den praktischen Gebrauch. 3., neubearbeitete Auflage. Mit 148 Textabb., 41 Anwendungsbeispielen und 5 Nomogrammtafeln. 1936. IX, 282 S. Geb. *RM* 26.70.

Terebesi, P., Rechenschablonen für harmonische Analyse und Synthese nach C. Runge. Wissenschaftliche Erläuterungen mit 8 Abb. und 13 Tafeln (13 S.), dazu 26 Rechenschablonen, 2 Blätter Rechenbeispiele und 2 Kontrollblätter sowie 1 Gebrauchsanweisung. 4 S. mit 5 Abb. 1930. DIN A 4. In Mappe *RM* 16.20.

Timpe, A., Einführung in die Finanz- und Wirtschaftsmathematik. Mit 70 Abb. im Text. 1934. VI, 217 S. *RM* 9.—.

Triebel, F., Rechen-Resultate. Tabellen zum Ablesen der Resultate von Multiplikationen und Divisionen bis $100 \times 1000 = 100\,000$ in Bruchteilen und ganzen Zahlen. Zum praktischen Gebrauch für Stückzahl-, Lohn- und Prozentberechnungen. Rechenhilfsmittel für alle Arten des Rechnens mit Zahlen jeder Größe. Radizieren (Wurzelsuchen) nach vereinfachtem Verfahren. 6. Auflage. 1934. 285 S. Geb. *RM* 18.—.

VDI-Wasserdampftafeln. Mit einem Mollier-(i, s)-Diagramm auf einer besonderen Tafel. Herausgegeben vom Verein Deutscher Ingenieure und in dessen Auftrag bearbeitet von W. Koch. 3 Tafeln. DIN A 4. 1937. 64 S. Kart. *RM* 7.50.

Wagener, E., Anwendung der Nomographie in der Wehrwissenschaft. Mit Figuren. 1936. 75 S. *RM* 2.80.

Werner, F., Praktische Rechenbildkunde (Nomographie). Mit 30 Abb. 1926. VI, 78 S. *RM* 2.70.

Werkmeister, P., Das Entwerfen von graphischen Rechentafeln (Nomographie). Mit 164 Textabb. 1923. VII, 194 S. Geb. *RM* 9.—.

Willers, A., Mathematische Instrumente. Mit 68 Fig. 1926. 144 S. (Sammlung Göschen.) *RM* 1.62.

Winkel, H., Der praktische Maschinenbauer. Ein Lehrbuch für Lehrlinge und Gehilfen. Ein Nachschlagebuch für den Meister. Band 2: Die wissenschaftliche Ausbildung. Teil 1: Mathematik und Naturwissenschaft. Bearbeitet von R. Kramm, K. Ruegg und H. Winkel. Mit 369 Textfig. 1923. VIII, 380 S. Geb. *RM* 6.30.

Witting, A., Funktionen, Schaubilder und Funktionstafeln. Eine elementare Einführung in die graphische Darstellung und die Interpolation. Mit 26 Fig. im Text, 3 Tafeln und zahlreichen Aufgaben. 1922. IV, 41 S. Kart. *RM* 1.20.

Zipperer, L., Tafeln zur harmonischen Analyse periodischer Kurven. Mit 6 Zahlentafeln, 9 Abb. und 23 graphischen Berechnungstafeln. 1922. IV, 12 S. In Mappe *RM* 3.78.

Zühlke, M., Rechentechnik, Rechentafeln und Sonderrechenstäbe. Reichskuratorium für Wirtschaftlichkeit Nr. 116. 1938. VIII, 212 S., 106 Abb. und 1 Teiltafel. Kart. *RM* 5.60.

3. *Wir wollen noch auf eine interessante Literaturzusammenstellung hinweisen, die Fr. Zimmermann 1939 in Heft 20 der Elektrotechnischen Zeitschrift. 60. Jahrg. S. 585...590, herausgegeben hat. Er stellt in dieser Arbeit alle bis zu diesem Zeitpunkt in der ETZ erschienenen Leitertafeln zusammen und gibt einen kurzen Abriß des Aufbaues der einzelnen Tafeltypen.*

III. Arbeitsergebnisse des Ausschusses Rechentechnik im AWF, Berlin W 9, Linkstraße 18

1. Sonderrechenstäbe des AWF

Die Sonderrechenstäbe des AWF bestehen aus einer biegsamen Hülle — Zellglas — (Bauart: Dr.-Ing. Seehase, in Berlin SO 36, DRP. und Ausl.-Pat.), in der die einzelnen auf weiße Pappe gedruckten Zungen untergebracht sind; besonders oft gebrauchte Werte können leicht gekennzeichnet werden.

		RM
	Maschinenbau:	
SR 701	Maschinenzeit	3.25
SR 702	Riemenleistung und Riemengeschwindigkeit	3.25
SR 703	Drehen von Stahl	3.25
SR 704	Tragkraft von Federn	3.25
SR 705	Längenänderung von Federn	3.25
SR 706	Fräsen von Stahl	3.25
SR 707	Fräsen von Gußeisen	3.25
SR 708	Welle auf Biegung und Verdrehung	3.25
SR 711	Biegefestigkeit	3.25
SR 725	Profilstahlgewichte	4.25
SR 731	Kaltwalzen von Bandeisen	3.25
SR 732	Tiefziehen runder Hohlteile (mit Läufer)	4.—
SR 734	Schnittkraft und Schnittarbeit (Stanzereitechnik) (mit Läufer)	4.—
SR 735	Maschinenlaufzeit — Verzahnung hobeln (Schneidradprinzip)	3.25
SR 736	Maschinenlaufzeit — Verzahnung hobeln — (Kammhobelprinzip — Kegelradhobeln)	3.25
SR 737	Maschinenlaufzeit — Zahnflankenschleifen (mit Läufer)	4.—
SR 740	Drehen von Stahl mit Hartmetall	3.25
	Hoch- und Tiefbau:	
SR 710	Durchbiegung von Trägern	3.25
SR 713	Eisenbetonbalken und -platten (mit Läufer)	4.—
SR 714	Holzdeckenbalken	3.25
SR 715	Niete für Stahlhochbau	3.25
SR 724	Holzdeckenbalken (Durchbiegung)	3.25
SR 725	Profilstahlgewichte	4.25
SR 728	Wärme- und Kälteschutz (mit Läufer)	4.—
SR 742	Bemessung von Trägern	3.25
	Werkstoffprüfung:	
SR 733	Berstdruckversuch (mit Läufer)	4.—
SR 741	Dielektrizitätskonstante	3.25
	Gas- und Wasserfach:	
SR 712	Gewichte von Rohren	3.25
SR 721	Mischgasbetrieb	3.25

SR 722	Wasserrohrberechnung (Lummert-Formel)	3.25
SR 726	Gasrohrberechnung für Hoch- und Niederdruck, Dampfrohrberechnung, Wasserrohrberechnung (mit Beikarte)	4.25

Holzbearbeitung:

SR 723	Rund- und Schnittholzberechnung	3.25
SR 727	Künstliche Holztrocknung: Trockenzeit (mit Läufer)	4.—

Kostenberechnung:

SR 718	Zinseszins	3.25

Zeichner und Schriftleiter:

SR 729	Druck- und Glasbildvorlagen	3.25

Elektrotechnik:

SR 709	Gesamtwiderstand	3.25
SR 716	Blindwiderstand	3.25
SR 717	Nebensprechdämpfung	3.25
SR 719	Charakteristik und Grenzfrequenz	3.25
SR 720	Mittlere Nebensprechdämpfung	3.25
SR 741	Dielektrizitätskonstante	3.25
SR 745	Plattenkondensator	3.25

Textilindustrie:

SR 746	Webstuhlausnutzung	3.25
SR 733	Berstdruckversuch (mit Läufer)	4.—

Bestellungen auf Sonderrechenstäbe des AWF sind an den Beuth-Vertrieb GmbH, Berlin SW 68, Dresdener Str. 97, zu richten, eine Lieferung ist aber z. Zt. nur in beschränktem Umfang und nur an kriegswichtige Benutzer möglich. — Auskünfte über Sonderrechenstäbe erteilt der AWF.

2. AWF-Rechenkurse

Die Rechentechnik (Nomographie) ist heute ein unentbehrliches betriebswirtschaftliches Hilfsmittel; ihre Bedeutung wird daher von jedem neuzeitlichen Betrieb anerkannt.

Der AWF hat es sich zur Aufgabe gemacht, nicht nur durch seine Veröffentlichungen sondern auch durch Rechenkurse für die Verbreitung der Nomographie Sorge zu tragen.

Seit mehr als anderthalb Jahrzehnten in Berlin und seit einigen Jahren auch in vielen anderen Städten des Reiches sind in Zusammenarbeit mit den Organisationen der Technik, der Wissenschaft und Wirtschaft sowie neuerdings auch in Gemeinschaft mit der DAF zahlreiche AWF-Rechenkurse mit Erfolg durchgeführt worden. Diese Kurse bezwecken, weitere Kreise mit Anfertigung und Gebrauch von Rechentafeln und Rechenstäben vertraut zu machen. Das Ziel ist, Zeit und Mühe für häufig wiederkehrende Rechnungen im Büro und Betrieb zu sparen.

Die AWF-Rechenkurse gliedern sich in zwei Lehrgänge, und zwar

1. Grundlehrgang: Vor-, Haupt- und evtl. Übungskursus.
2. Sonderlehrgang: Sonderkursus.

Die Teilnehmer werden im Vorkursus mit den Grundlagen der Nomographie bekannt gemacht. Im Hauptkursus wird die Selbstanfertigung der wichtigsten Rechenhilfsmittel behandelt. Übungen an praktischen Beispielen sind im Übungskursus vorgesehen. Im Sonderkursus werden schwierige und neuere Aufgaben der Nomographie besprochen. Für die Dauer des Krieges ist die Zahl der durchgeführten Kurse wegen Einberufung oder starker beruflicher Belastung der Lehrkräfte und der Teilnehmer stark eingeschränkt.

3. Rechentechnische Berichte in den „AWF-Mitteilungen"

Die „Rechentechnischen Berichte", die seit Januar 1938 in den AWF-Mitteilungen erscheinen, bringen laufend Arbeitsergebnisse des Ausschusses Rechentechnik. Es wird darin über den Stand der Nomographie sowie über andere Gebiete der Rechentechnik in Form von Originalarbeiten, Besprechungen von Büchern, Aufsätzen und Nomogrammen berichtet.

Bezugsbedingungen der AWF-Mitteilungen: *RM* 3.— für den Jahrgang von 12 Heften, z. Zt. jedoch können keine Neubestellungen angenommen werden. Probehefte und Auskünfte kostenlos durch die Geschäftsstelle des AWF, Berlin W 9, Linkstraße 18.

4. Auskünfte und Beratungen

Im Ausschuß Rechentechnik beim AWF ist eine große Zahl von Mitarbeitern, die langjährige Erfahrungen auf dem Gebiete der Nomographie und ihrer Anwendung besitzen, ehrenamtlich tätig. Durch die tatkräftige Unterstützung dieser Mitarbeiter war und ist der AWF in der Lage, auf den verschiedensten Gebieten der Rechentechnik Auskünfte zu erteilen.

BIBLIOTEKA GŁÓWNA

IV. Teiltafel

für logarithmische Leitern

$$v = l \cdot \log u$$

Die fettgedruckten Zahlen deuten verlängerte Teilstriche an

u	Zeicheneinheit *l* in mm									u
	20	25	30	33 1/3	40	50	60	66 2/3	70	
1,0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1,0**
						2,1	2,5	2,8	2,9	
2	1,6	2,0	2,4	2,6	3,2	4,0	4,8	5,3	5,5	2
						5,7	6,8	7,6	8,0	
4	2,9	3,7	4,4	4,9	5,8	7,3	8,8	9,7	10,2	4
						8,8	**10,6**	**11,7**	**12,3**	
6	4,1	5,1	6,1	6,8	8,2	10,2	12,2	13,6	14,3	6
						11,5	13,8	15,4	16,1	
8	5,1	6,4	7,7	8,5	10,2	12,8	15,3	17,0	17,9	8
						13,9	16,7	18,6	19,5	
2	**6,0**	**7,5**	**9,0**	**10,0**	**12,0**	**15,1**	**18,1**	**20,1**	**21,1**	**2**
						17,1	20,5	22,8	24,0	
						19,0	22,8	25,3	26,6	
	8,0	9,9	11,9	13,3	15,9					
						20,7	24,9	27,7	29,0	
						22,4	26,8	29,8	31,3	
3	**9,5**	**11,9**	**14,3**	**15,9**	**19,1**	**23,9**	**28,6**	**31,8**	**33,4**	3
						25,3	30,3	33,7	35,4	
						26,6	31,9	35,4	37,2	
	10,9	13,6	16,3	18,1	21,8					
						27,8	33,4	37,1	38,9	
						29,0	34,8	38,7	40,6	
4	**12,0**	**15,1**	**18,1**	**20,1**	**24,1**	**30,1**	**36,1**	**40,1**	**42,1**	4
						31,2	37,4	41,6	43,6	
						32,2	38,6	42,9	45,0	
	13,1	16,3	19,6	21,8	26,1					
						33,1	39,8	44,2	46,4	
						34,1	40,9	45,4	47,7	
5	**14,0**	**17,5**	**21,0**	**23,3**	**28,0**	**34,9**	**41,9**	**46,6**	**48,9**	**5**
						37,0	44,4	49,4	51,8	
6	15,6	19,5	23,3	25,9	31,1	**38,9**	**46,7**	**51,9**	**54,5**	6
						40,6	48,8	54,2	56,9	
7	16,9	21,1	25,4	28,2	33,8	**42,3**	**50,7**	**56,3**	**59,2**	7
						43,8	52,5	58,3	61,3	
8	18,1	22,6	27,1	30,1	36,1	**45,2**	**54,2**	**60,2**	**63,2**	8
						46,5	55,8	62,0	65,1	
9	19,1	23,9	28,6	31,8	38,2	**47,7**	**57,3**	**63,6**	**66,8**	9
						48,9	58,7	65,2	68,4	
10	**20,0**	**25,0**	**30,0**	**33,33**	**40,0**	**50,0**	**60,0**	**66,67**	**70,0**	**10**

u	Zeicheneinheit *l* in mm									u
	75	80	90	100	120	140	150	180	200	
1,0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1,0**
					2,5	3,0	3,2	3,8	4,2	
1	3,1	3,3	3,7	4,1	**5,0**	**5,8**	**6,2**	**7,5**	**8,3**	1
					7,3	8,5	9,1	10,9	12,1	
2	5,9	6,3	7,1	7,9	**9,5**	**11,1**	**11,9**	**14,3**	**15,8**	2
					11,6	13,6	14,5	17,4	19,4	
3	8,5	9,1	10,3	11,4	**13,7**	**16,0**	**17,1**	**20,5**	**22,8**	3
					15,6	18,2	19,5	23,5	26,1	
4	11,0	11,7	13,2	14,6	**17,5**	20,5	**21,9**	**26,3**	**29,2**	4
					19,4	22,6	24,2	29,0	32,3	
5	**13,2**	**14,1**	**15,8**	**17,6**	**21,1**	**24,7**	**26,4**	**31,7**	**35,2**	5
					22,8	26,6	28,5	34,3	38,1	
6	15,3	16,3	18,4	20,4	**24,5**	**28,6**	**30,6**	**36,7**	**40,8**	6
					26,1	30,4	32,6	39,1	43,5	
7	17,3	18,4	20,7	23,0	**27,7**	**32,3**	**34,6**	**41,5**	**46,1**	7
					29,2	34,0	36,5	43,7	48,6	
8	19,1	20,4	23,0	25,5	**30,6**	**35,7**	**38,3**	**45,9**	**51,1**	8
					32,1	37,4	40,1	48,1	53,4	
9	20,9	22,3	25,1	27,9	**33,5**	**39,0**	**41,8**	**50,2**	**55,8**	9
					34,8	40,6	43,5	52,2	58,0	
2,0	**22,6**	**24,1**	**27,1**	**30,1**	**36,1**	**42,1**	**45,2**	**54,2**	**60,2**	**2,0**

u	Zeicheneinheit *l* in mm								u
	75	80	90	100	120	140	150	180	200	
2,0	**22,6**	**24,1**	**27,1**	**30,1**	**36,1**	**42,1**	**45,2**	**54,2**	**60,2**	**2,0**
					38,7	45,1	48,3	58,0	64,4	
2	25,7	27,4	30,8	34,2	41,1	47,9	51,4	61,6	68,5	2
					43,4	50,6	54,3	65,1	72,3	
4	28,5	30,4	34,2	38,0	45,6	53,2	57,0	68,4	76,0	4
					47,8	**55,7**	**59,7**	**71,6**	**79,6**	
6	31,1	33,2	37,3	41,5	49,8	58,1	62,2	74,7	83,0	6
					51,8	60,4	64,7	77,6	86,3	
8	33,5	35,8	40,2	44,7	53,7	**62,6**	67,1	80,5	89,4	8
					55,5	64,7	69,4	83,2	92,5	
3,0	**35,8**	**38,2**	**42,9**	**47,7**	**57,3**	66,8	**71,6**	**85,9**	**95,4**	**3,0**
					59,0	68,8	73,7	88,4	98,3	
2	37,9	40,4	45,5	50,5	60,6	70,7	75,8	90,9	101,0	2
					62,2	72,6	77,8	93,3	103,7	
4	39,9	42,5	47,8	53,1	63,8	74,4	79,7	95,7	106,3	4
					65,3	**76,2**	**81,6**	**97,9**	**108,8**	
6	41,7	44,5	50,1	55,6	66,8	77,9	83,4	100,1	111,3	6
					68,2	79,5	85,2	102,3	113,6	
8	43,5	46,4	52,2	58,0	69,6	81,2	87,0	104,4	116,0	8
					70,9	82,7	88,7	106,4	118,2	
4,0	**45,2**	**48,2**	**54,2**	**60,2**	**72,2**	**84,3**	**90,3**	**108,4**	**120,4**	**4,0**
					73,5	85,8	91,9	110,3	122,6	
2	46,7	49,9	56,1	62,3	74,8	87,3	93,5	112,2	124,7	2
					76,0	88,7	95,0	114,0	126,7	
4	48,3	51,5	57,9	64,3	77,2	90,1	96,5	115,8	128,7	4
					78,4	**91,4**	**98,0**	**117,6**	**130,6**	
6	49,7	53,0	59,6	66,3	79,5	92,8	99,4	119,3	132,6	6
					80,7	94,1	100,8	121,0	134,4	
8	51,1	54,5	61,3	68,1	81,7	95,4	102,2	122,6	136,2	8
					82,8	96,6	103,5	124,2	138,0	
5	**52,4**	**55,9**	**62,9**	**69,9**	**83,9**	**97,9**	**104,8**	**125,8**	**139,8**	**5**
					85,9	**100,2**	107,4	128,9	143,2	
					87,9	102,5	109,9	131,8	146,5	
	55,5	59,2	66,6	74,0						
					89,8	104,7	112,2	134,7	149,6	
					91,6	106,9	114,5	137,4	152,7	
6	**58,4**	**62,3**	**70,0**	**77,8**	**93,4**	**108,9**	**116,7**	**140,1**	**155,6**	6
					95,1	110,9	118,9	142,6	158,5	
					96,7	112,9	120,9	145,1	161,2	
	61,0	65,0	73,2	81,3						
					98,3	114,7	122,9	147,5	163,9	
					99,9	116,6	124,9	149,9	166,5	
7	**63,4**	**67,6**	**76,1**	**84,5**	**101,4**	**118,3**	**126,8**	**152,1**	**169,0**	7
					102,9	120,0	128,6	154,3	171,5	
					104,3	121,7	130,4	156,5	173,8	
	65,6	70,0	78,8	87,5						
					105,7	123,3	132,1	158,5	176,2	
					107,1	124,9	133,8	160,6	178,4	
8	**67,7**	**72,2**	**81,3**	**90,3**	**108,4**	**126,4**	**135,5**	**162,6**	**180,6**	8
					109,7	127,9	137,1	164,5	182,8	
					110,9	129,4	138,6	166,4	184,9	
	69,7	74,4	83,6	92,9						
					112,1	130,8	140,2	168,2	186,9	
					113,3	132,2	141,7	170,0	188,9	
9	**71,6**	**76,3**	**85,9**	**95,4**	**114,5**	**133,6**	**143,1**	**171,8**	**190,8**	9
					115,7	134,9	144,6	173,5	192,8	
					116,8	136,2	146,0	175,2	194,6	
	73,3	78,2	88,0	97,8						
					117,9	137,5	147,3	176,8	196,5	
					118,9	138,8	148,7	178,4	198,2	
10	**75,0**	**80,0**	**90,0**	**100,0**	**120,0**	**140,0**	**150,0**	**180,0**	**200,0**	**10**

Weitere Schriften
des Reichsausschusses für wirtschaftliche Fertigung (AWF.) beim RKW.

Fehse / Hartmetallwerkzeuge

Bearbeitung von Metallen und Isolierstoffen. Von Obering. A. Fehse. 1939. 111 S. mit 107 Abb. und 3 Taf. DIN A 5. Geb. ℛℳ 4.80 (Best.-Nr. 12073)

Leyensetter / Grundlagen und Prüfverfahren der Zerspanung

Von Dr.-Ing. W. Leyensetter. 1938. 154 S. mit 107 Abb. und 5 Taf. DIN A 5. Kart. ℛℳ 5.50 (Best.-Nr. 12075)

In gedrängter Darstellung bringt das Buch alles Wissenswerte über die Zerspanung der wichtigsten Werkstoffe. Die Begriffe Standzeit und Schnittgeschwindigkeit, Schnittkraft und Leistung, Oberflächenbeschaffenheit usw. werden eingehend erklärt, sowie Prüfverfahren und -ergebnisse bei Untersuchungen an Automatenstählen und Leichtmetallen dargestellt.

Wirtschaftlichkeit von Vorrichtungen

3. Aufl. 1941. 57 S. mit 19 Abb. DIN A 5. Geb. ℛℳ 3.60 (Best.-Nr. 12056)

Hauptzweck der vorliegenden Schrift ist es, dem Fachmann ein Mittel in die Hand zu geben, um sich vor Schaffung der Vorrichtung die Höhe der Kosten und die Ausnutzungsmöglichkeit der Vorrichtung klarlegen zu können.

Wiederholt / Metallschutz

Band 1: Ursachen der Korrosion und allgemeine Schutzmaßnahmen. Von Oberreg.-Rat Dr. W. Wiederholt. 1938. 106 S. mit 57 Abb. DIN A 5. Kart. ℛℳ 3.60 (Best.-Nr. 12074)

Band 2: Schutz- und Oberflächenbehandlung von Leichtmetallen. Von Oberreg.-Rat Dr. W. Wiederholt. 1941. 164 S. mit 82 Abb. DIN A 5. Geb. ℛℳ 6.80 (Best.-Nr. 12078)

Eine groß angelegte Schriftenreihe, in der die Erfahrungen zahlreicher Forscher und Forschungsanstalten sowie herstellender und verarbeitender Betriebe gesammelt und ausgewertet werden.

Der Spritzguß. Verfahren — Werkstoffe — Anwendung

4. Aufl. 78 S. mit 46 Abb. Kart. ℛℳ 3.20 (Best.-Nr. 12031)

AWF.-Härtebuch

Beispiele aus der Härtepraxis. 5. Aufl. in Vorbereitung. (Best.-Nr. 12068)

Nachdem der Härteprozeß heute zu einem meß- und regelbaren Arbeitsgang geworden ist, ist es wichtig, die jüngsten wissenschaftlichen Erkenntnisse darüber einem möglichst großen Kreis von Fachleuten zur Anwendung zu übermitteln. Dies ist die Aufgabe des stark gefragten „AWF.-Härtebuches".

Über weitere AWF.-Schriften unterrichtet der Verlag

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

BG Politechniki Śląskiej
nr inw.: 102 - 139280
Dyr.1 139280