ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1974

Seria: Automatyka z. 28 Nr kol. 397

Jerzy Skrzypczyk

Instytut Konstrukcji i Technologii
Urządzeń Automatyki i Elektroniki

L_m^p STABILNOŚĆ W SENSIE ŚREDNIM NIELINIOWEGO STOCHASTYCZNEGO RÓWNANIA CAŁKOWEGO

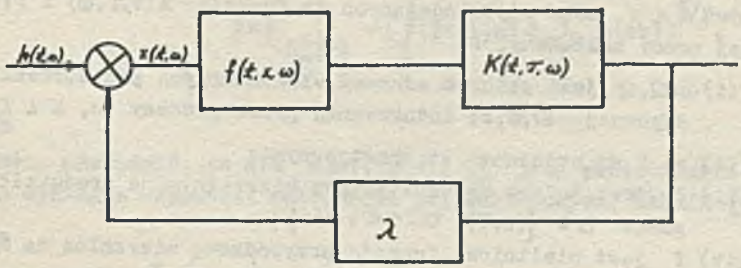
Streszczenie. Praca zawiera nowe rezultaty dotyczące L_m^p - stabilności nieliniowego układu dynamicznego opisanego stochastycznym równaniem całkowym Volterry (lub Fredholma)

$$x(t,\omega) = h(t,\omega) + \lambda \int_0^t K(t,\tau,\omega)\, f(\tau,x)\,\tau,\omega(\omega)d\tau.$$

Głównym wynikiem pracy są dwa twierdzenia, w których sformułowano warunki istnienia rozwiązań równania całkowitego w pewnej przestrzeni Banacha L_m^p, w przypadku słabej i silnej nieliniowości operatora f.

Wstęp

W ostatnich latach daje się zauważyć duże zainteresowanie problemami związanymi z teorią i zastosowaniami stochastycznych równań całkowych. Wykorzystanie równań całkowych do opisu nieliniowych układów dynamicznych daje bardzo dobre możliwości analizy zachowania się sygnałów w tych układach. W szczególnym przypadku stochastyczne nieliniowe równanie całkowe opisuje niestacjonarny układ dynamiczny ze wzmocnieniem w pętli sprzężenia zwrotnego λ, pozostający pod wpływem zakłóceń oraz zakłóconych sygnałów wejściowych (rys. 1).



Rys. 1. Model układu dynamicznego opisanego równaniem całkowym (1)

Zagadnienia deterministyczne znalazły rozwiązanie w pracach KRASNOSIELSKIJ [7, 8], Ahmed [2]. Dla operatorów stacjonarnych przegląd stosowanych metod można znaleźć w pracy KUDREWICZA [9].

W zagadnieniach probabilistycznych główne zainteresowanie koncentruje się wokół problemów dotyczących stabilności zupełnej z prawdopodobieństwem 1 i w sensie średnim, tzn. badania zachowania się pewnych momentów sygnału, będącego procesem stachostycznym. Warunki istnienia rozwiązania silnie nieliniowego (f nie spełnia warunku Lipschitza) stochastycznego równania całkowego podał AHMED, TEO [3] rozpatrując L^p - stabilność z prawdopodobieństwem 1. Są one w zasadzie powtórzeniem wyników Krasnosielskowo [7].

Praca zawiera nowe rezultaty dotyczące L^p_m - stabilności w sensie średnim przy założeniu zarówno słabej, jak i silnej nieliniowości funkcji f.

1. Założenia

W pracy rozważano problem istnienia rozwiązań stochastycznego nieliniowego równania całkowego Volterry

$$x(t,\omega) = h(t,\omega) + \lambda \int_0^t K(t,\tau,\omega)\, f(\tau, x(\tau,\omega), \omega)\, d\tau, \tag{1}$$

opisującego pewien nieliniowy, niestacjonarny (w ogólnym przypadku) układ dynamiczny pozostający pod wpływem zakłóceń.

Jak wynika z dalszych rozważań, wszystkie twierdzenia pozostają słuszne dla stochastycznego nieliniowego równania całkowego Fredholma.

W dalszym ciągu używać będziemy oznaczenia

$$(Ax)(t,\omega) = (Kfx)(t,\omega) = \int_0^t K(t,\tau,\omega)\, f(\tau, x(\tau,\omega), \omega)\, d\tau \tag{2}$$

dla $t \in R_0 = [0,\infty)$. Dalej nie wprowadzamy specjalnych oznaczeń dla operatorów K i f oraz odpowiadających im funkcji $K(t,\tau,\omega)$ i $f(t,x,\omega)$.

W całej pracy zakładamy, że

(i) $\omega \in \Omega$, Ω jest zbiorem zdarzeń elementarnych przestrzeni probabilistycznej (Ω, σ, P) indukowanej przez procesy h, K i f;

(ii) x, h są procesami stochastycznymi;

(iii) K jest jądrem stochastycznym mierzalnym na produkcie $\Delta \otimes \Omega$, gdzie $\Delta = \{(t,\tau):\ 0 \leq \tau \leq t < \infty\}$;

(iv) f jest nieliniową funkcją przypadkową mierzalną na $R_0 \otimes \Omega$, dla każdego skończonego $x \in R = (-\infty,\infty)$.

(v) λ jest liczbą rzeczywistą.

W dalszych rozważaniach przyjmiemy, że

$$\|x(t,\omega)\|_m = \left(\int_\Omega |x(t,\omega)|^m P(d\omega)\right)^{1/m}.$$

Powiemy, że zmienna losowa $x(\omega)$ jest P - istotnie ograniczona, jeżeli istnieje stała $a>0$ taka, że

$$P(\{\omega: |x(\omega)|>a\}) = 0.$$

Oznaczymy dalej

$$\|x(\omega)\| = P\text{-ess}\sup_{\omega\in\Omega}|x(\omega)| = \inf_{\Omega_0}\left\{\sup_{\Omega-\Omega_0}|x(\omega)|\right\},$$

gdzie $P(\Omega_0) = 0$ [4].

2. Istnienie rozwiązań silnie nieliniowego równania całkowego

Wprowadzimy pewną przestrzeń funkcyjną L_m^p, którą wykorzystamy do badania stabilności rozwiązań równania całkowego (1).

Definicja 1

Niech $L_m^p(T)$ oznacza przestrzeń Banacha, $m>1$, $p>1$, wszystkich funkcji $x(t,\omega)$ mierzalnych względem produktu $T\otimes\Omega$ takich, że

$$\int_T (\|x(t,\omega)\|_m)^p \mu(dt) < \infty, \quad T\subset R_0, \quad (T,\mu) \text{ - przestrzeń z miarą}, \tag{3}$$

gdzie $\|-\|_m$ określona wyżej.

Normę w przestrzeni $L_m^p(T)$ zdefiniujemy jako

$$\|x\|_{L_m^p(T)} = \left(\int_T (\|x(t,\omega)\|_m)^p \mu(dt)\right)^{1/p}. \tag{4}$$

Uwaga

Można udowodnić, że dla $m>1$, $p>1$, L_m^p jest przestrzenią Banacha. Dowód wynika z własności całkowania pól wektorowych, MAURIN [10, str.407].

Uwaga

Przestrzeń L_m^1 wprowadził pierwszy Bochner, dlatego często nazywana jest całką Bochnera.

Definicja 2

Rozwiązanie $x^*(t,\omega)$ równania całkowego (1) nazwiemy L_m^p - stabilnym, jeżeli $x^* \in L_m^p$.

Definicja 3

Powiemy, że funkcja $f(x(t,\omega),\omega)$ zmiennych $-\infty < x < \infty, \omega \in \Omega$, jest ciągła w sensie m - średnim $(m \geqslant 1)$, jeżeli warunek

$$\lim_{t\to\infty} \|x(t,\omega) - x_0(t,\omega)\|_m = 0$$

powoduje, że

$$\lim_{t\to\infty} \|f(x,\omega) - f(x_0,\omega)\|_m = 0.$$

Uwaga

Jeżeli $f(x,\omega)$ jest ciągła z prawdopodobieństwem 1, to jest również ciągła w sensie m - średnim, co wynika między innymi z nierówności

$$\|f(x,\omega) - f(x_0,\omega)\|_m \leqslant \sup_{\omega\in\Omega} |f(x,\omega) - f(x_0,\omega)|.$$

Definicja 4

Ciąg funkcji przypadkowych $x_n(t,\omega)$ $(x \in R, t \in (G,\mu))$ nazwiemy zbieżnym według miary w sensie m - średnim do funkcji $x_0(t,\omega)$, jeżeli

$$\forall_{\varepsilon>0} \lim_{n\to\infty} \mu(\{t: \|x(t,\omega) - x_0(t,\omega)\|_m > \varepsilon\}) = 0.$$

Uwaga

Ze zbieżności z prawdopodobieństwem 1 wynika zbieżność wg miary w sensie m - średnim.

Definicja 5

Powiemy, że funkcja $f(t,x,\omega)$ zmiennych $-\infty < x < \infty$, $t \in G, \omega \in \Omega$ spełnia warunki Caratheodory'ego w sensie m - średnim, jeżeli jest ciągła względem x w sensie średnim dla prawie wszystkich $t \in G$ i mierzalna względem $G \otimes \Omega$ dla wszystkich x. Przez G oznaczymy zbiór przestrzeni n-wymiarowej miary skończonej lub nieskończonej.

Uwaga

Oczywiście z ciągłości funkcji f względem x z prawdopodobieństwem 1 wynika ciągłość w sensie m - średnim. W całej pracy zakładamy, że funkcja f spełnia warunki definicji 5.
W dalszych rozważaniach wykorzystujemy pewne twierdzenia, bez żadnych dodatkowych wyjaśnień. Dla większej czytelności pracy cytujemy je poniżej.

Nierówność Höldera

Jeśli p i q są liczbami dodatnimi spełniającymi związek $p^{-1} + q^{-1} = 1$ i jeżeli $f \in L^p(a,b)$, $g \in L^q(a,b)$, to $fg \in L(a,b)$ i

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{1/q};$$

nierówność ta jest prawdziwa zarówno dla przedziału skończonego, jak i nieskończonego.

Nierówność Minkowskiego

Jeżeli $p \geq 1$ i $f \in L^p(a,b)$, $g \in L^p(a,b)$, to $f + g \in L^p(a,b)$ i

$$\left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx\right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{1/q};$$

nierówność jest prawdziwa dla przedziału skończonego, jak i nieskończonego.

Twierdzenie YOSIDA [11, str. 191]

Niech (R_o, A, M) będzie przestrzenią Lebesgue'a z miarą, niech $x(t,\omega)$ będzie mierzalną funkcją $t \in R_o$ z wartościami w przestrzeni Banacha $L^m(\Omega, \sigma, P)$ $(m \geq 1)$ i niech $\|x(t,\omega)\|_m$ jest lokalnie całkowalna.
Wtedy

$$\left\|\int_B x(t,\omega)dt\right\|_m \leq \int_B \|x(t,\omega)\|_m \, dt \text{ dla każdego } B \in A.$$

Przed udowodnieniem twierdzenia o istnieniu udowodnimy kilka lematów pomocniczych.

Lemat 1

Niech G zbiór miary skończonej. Wtedy operator $f(t,x,\omega)$ przekształca każdy zbieżny wg miary w sensie p - średnim ciąg funkcji

$$x_1(t,\omega),\ x_2(t,\omega),\dots \qquad (t\in G,\ \omega\in\Omega) \tag{5}$$

w ciąg funkcji także zbieżny wg miary w sensie p - średnim.

Dowód

Niech ciąg (5) zbieżny wg miary w sensie p - średnim do funkcji $x_0(t,\omega)$. Oznaczmy przez G_k $(k = 1,2,\dots)$ zbiór tych $t\in G$, dla których z nierówności

$$\|x(t,\omega) - x_0(t,\omega)\|_p < \frac{1}{K}$$

wynika

$$\|f(t,x,\omega) - f(t,x_0,\omega)\|_p < \varepsilon,$$

gdzie ε - dowolna liczba dodatnia.

Oczywiście, $G_1 \subset G_2 \subset G_3 \dots$

Z ciągłości w sensie p - średnim funkcji $f(t,x,\omega)$ dla prawie wszystkich $t\in G$ wynika, że

$$\mu\Big(\bigcup_{K=1}^{\infty} G_K\Big) = \mu(G),$$

skąd

$$\lim_{k\to\infty} \mu(G_k) = \mu(G). \tag{6}$$

Niech będą dane liczby dodatnie η i ε. Wybierzmy liczbę k_0 tak, że

$$\mu(G_{k_0}) > \mu(G) - \eta/2,$$

a to jest możliwe na podstawie (6). Przez F_n oznaczymy zbiór tych punktów $t\in G$, dla których

$$\|x_n(t,\omega) - x_0(t,\omega)\|_p < \frac{1}{k_0}.$$

Weźmy takie N, że dla wszystkich $n>N$

$$\mu(F_n) > \mu(G) - \eta/2.$$

Niech będzie dany ciąg funkcji

$$fx_1(t,\omega) = f(t,x_1,\omega),\ fx_2(t,\omega) = f(t,x_2,\omega),\ldots$$

Przez D_n oznaczymy zbiór tych punktów $t \in G$, dla których

$$\|fx_o - fx_n\|_p < \varepsilon .$$

Oczywiście

$$G_{k_o} \cap F_n \subset D_n$$

skąd wynika, że

$$\mu(D_n) > \mu(G) - \eta.$$

Ponieważ ε i η dowolne, więc ostatnia nierówność dowodzi lematu.

Lemat 2

Niech operator przekształca każdą funkcję z $L_m^{p_1}(G)$ w funkcję z $L_m^{p_2}(G)$ $(p_1,p_2 \geqslant 1)$. Wtedy operator f jest ciągły.

Dowód

Niech $\mu(G)<\infty$. Założymy, że $f\Theta = \Theta$ i pokażemy, że operator f ciągły w zerze przestrzeni $L_m^{p_1}$

Przypuśćmy, że tak nie jest. Wtedy istnieje taki silnie zbieżny ciąg funkcji $x_n(t,\omega) \in L_m^{p_1}$ $(n = 1,2,\ldots)$, że

$$\int_G \|fx_n(t,\omega)\|_m^{p_2}\ \mu(dt) > \alpha, \quad (n = 1,2,\ldots), \tag{7}$$

gdzie α - pewna liczba dodatnia. Założymy przy tym, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_G \|x_n(t,\omega)\|_m^{p_1}\ \mu(dt) < \infty. \tag{8}$$

Zbudujmy takie ciągi liczb ε_k, funkcji $x_{n_k}(t,\omega)$ i zbiorów $G_k \subset G$ $(k = 1,2,\ldots)$, że będą wypełnione warunki

a) $\varepsilon_{k+1} < \varepsilon_k/2$,

b) $\mu(G_k) \leqslant \varepsilon_k$,

c) $\int\limits_{G_k} \left\| fx_{n_k}(t,\omega) \right\|_m^{p_2} \mu(dt) > \frac{2}{3}\alpha$

d) z warunku $\mu(D) \leqslant 2\,\varepsilon_{k+1}$ dla dowolnego $D \subset G$ wynika, że

$$\int\limits_D \left\| fx_{n_k}(t,\omega) \right\|_m^{p_2} \mu(dt) < \frac{\alpha}{3}.$$

Szeregi wielkości ε_k, $x_{n_k}(t,\omega)$ i G_k $(k = 1,2,\ldots)$ będziemy budować rekurencyjnie. Niech

$$\varepsilon_1 = \mu(G),\ x_{n_1}(t,\omega) = x_1(t,\omega),\ G_1 = G.$$

Jeśli ε_k, $x_{n_k}(t,\omega)$, G_k istnieją, to w charakterze ε_{k+1} wybierzemy taką liczbę, żeby był wypełniony warunek d), co możliwe jest na mocy absolutnej ciągłości całki

$$\int\limits_G \left\| fx_{n_k}(t,\omega) \right\|_m^{p_2} \mu(dt).$$

Przy tym automatycznie będzie wypełniony warunek a), ponieważ funkcja $x_{n_k}(t,\omega)$ spełnia warunek c). Na mocy lematu 1 można pokazać takie n_{k+1} i zbiór $F_{k+1} \subset G$, że dla $t \in F_{k+1}$

$$\left\| fx_{n_{k+1}}(t,\omega) \right\|_m < \left(\frac{\alpha}{3\mu(G)}\right)^{1/p_2} \tag{9}$$

przy czym

$$\mu(G) - \mu(F_{k+1}) < \varepsilon_{k+1}. \tag{10}$$

Niech $G_{k+1} = G \setminus G_{k+1}$. Wtedy z (10) wynika wypełnienie dla G_{k+1} warunku b). Wypełnienie warunku c) wynika z (7) i (9):

$$\int_{G_{k+1}} \| fx_{n_{k+1}}(t,\omega) \|_m^{p_2} \mu(dt) =$$

$$= \int_G \| fx_{n_{k+1}} \|_m^{p_2} \mu(dt) - \int_{F_{k+1}} \| f_{x_{n_{k+1}}} \|_m^{p_2} \mu(dt) > \frac{2\alpha}{3}.$$

Wprowadźmy zbiory

$$D_k = G_k \setminus \bigcup_{i=k+1}^{\infty} G_i \qquad (k = 1,2,\ldots).$$

Na mocy a) i b)

$$\mu\Big(\bigcup_{i=k+1}^{\infty} G_i\Big) \leq \sum_{i=k+1}^{\infty} \varepsilon_i < 2\,\varepsilon_{k+1} \quad (k = 1,2,\ldots). \tag{11}$$

Określimy funkcję $\psi(t,\omega)$ jako

$$\psi(t,\omega) = \begin{cases} x_{n_k}(t,\omega), & \text{jeśli } t \in D_k \\ 0, & \text{jeśli } t \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i \end{cases}$$

Oczywiście proces $\psi(t,\omega)$ pozostaje procesem m-rzędu,

Z warunków o), d) i (11) wynika, że

$$\int_{D_k} \|\psi\|_m^{p_2} \mu(dt) = \int_{D_k} \| fx_{n_k}(t,\omega) \|_m^{p_2} \mu(dt) \geq$$

$$\geq \int_{G_k} \| fx_{n_k} \|_m^{p_2} \mu(dt) - \int_{G_k/D_k} \| fx_{n_k} \|_m^{p_2} \mu(dt) > \frac{\alpha}{3} \tag{12}$$

dla $k = 1,2,\ldots$

Na mocy (8), $\psi \in L_m^{p_1}$ i z warunków twierdzenia $f\psi \in L_m^{p_2}$.

Z drugiej strony na mocy (12) $f\psi \notin L_m^{p_2}$, ponieważ $D_i \cap D_j = 0$ przy $i \neq j$ i stąd

$$\int_G \|f\psi\|_m^{p_2} \mu(dt) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{D_k} \|f\psi\|_m^{p_2} \mu(dt) = \infty.$$

Otrzymujemy sprzeczność z przyjętym założeniem, co dowodzi ciągłości operatora f w punkcie Θ (przy założeniu, że $f\Theta = \Theta$). Uwolnimy się od tego założenia i udowodnimy ciągłość operatora w dowolnym punkcie $x_0 \in L_m^{p_1}$.

Niech $g(t,x,\omega) = f(t,x_0 + x,\omega) - f(t,x_0,\omega)$, $t \in G$, $-\infty < x < \infty$, $\omega \in \Omega$.

Operator g

$$gx = g(t,x(t,\omega),\omega)$$

spełnia warunek $g\Theta = \Theta$ i jak wykazano jest ciągły w punkcie Θ.
To dowodzi, że operator f jest ciągły w punkcie $x_0 \in L_m^{p_1}$.

To stwierdzenie kończy dowód w przypadku, gdy $\mu(G) < \infty$.
Niech teraz $\mu(G) = \infty$. Założymy ponownie, że operator jest nieciągły. Bez zmniejszenia ogólności rozważań można założyć, że podobnie jak poprzednio jest on nieciągły w punkcie Θ i że $f\Theta = \Theta$.
Przypuśćmy, że $x_n(t,\omega) \in L_m^{p_1}$ $(n = 1,2,\ldots)$ - taki ciąg funkcji, że

$$\int_G \|fx_n(t,\omega)\|_m^{p_2} \mu(dt) > \alpha \qquad (n = 1,2,\ldots), \tag{13}$$

gdzie α - pewna liczba dodatnia. Założymy ponownie, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_G \|x_n(t,\omega)\|_m^{p_1} \mu(dt) < \infty. \tag{14}$$

Zbudujmy takie ciągi funkcji $x_{n_k}(t,\omega)$ i zbiorów $D_k \subset G$ $(k = 1,2,\ldots)$, że

a) $\mu(D_k) < \infty$, $D_i \cap D_j = 0$ przy $i \neq j$;

b) $\int_{D_k} \|fx_{n_k}(t,\omega)\|_m^{p_2} \mu(dt) > \frac{\alpha}{2}$ $\quad (k = 1,2,\ldots)$.

Konstrukcja będzie podobna jak poprzednio. Niech $x_{n_1}(t,\omega) = x_1(t,\omega)$. Zbiór D_1 można skonstruować na mocy (13).

Niech $x_{n_k}(t,\omega)$ i D_k już istnieją. Zbiór $\bigcup_{i=1}^{k} D_i$ będzie posiadał miarę skończoną, co wynika z a). Korzystając z ciągłości operatora f w przypadku, gdy $\mu(G) < \infty$ można pokazać takie n_{k+1}, że

$$\int_{\bigcup_{i=1}^{k} D_i} \|fx_{n_{k+1}}(t,\omega)\|_m^{p_2} \mu(dt) < \frac{\alpha}{2}. \tag{15}$$

Jednocześnie istnieje zbiór G_{k+1} miary skończonej taki, że

$$\int_{G_{k+1}} \|fx_{n_{k+1}}(t,\omega)\|_m^{p_2} \mu(dt) > \alpha. \tag{16}$$

Oznaczmy

$$D_{k+1} = G_{k+1} \setminus \bigcup_{i=1}^{k} D_i.$$

Oczywiście spełniony jest warunek a). Warunek b) dla funkcji $x_{n_{k+1}}(t,\omega)$ zachodzi na mocy (15) i (16).

Określimy ponownie funkcję:

$$\psi(t,\omega) = \begin{cases} x_{n_k}(t,\omega), & \text{jeśli } t \in D_k \quad (k = 1,2,\ldots), \\ 0 & \text{jeśli } t \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i. \end{cases}$$

Z (14) wynika $\psi \in L_m^{p_1}$ i z warunków lematu $f\psi \in L_m^{p_2}$. Z drugiej strony, z b) wynika $f\psi \notin L_m^{p_2}$. Otrzymana sprzeczność dowodzi lematu.

Lemat 3

Przypuśćmy, że istnieją liczby rzeczywiste $\alpha \geq 1$, $p_2 \geq 1$, $m \geq 1$, $\beta \geq 0$ i nieujemna funkcja mierzalna $g(t) \in L^{p_2}(T)$ taka, że dla prawie wszystkich t T i wszystkich $x(t,\omega) \in L_m^{p_1}(T)$

$$\|f(t,x)\ t,\omega(t,\omega)\|_m \leq g(t) + \beta(\|x(t,\omega)\|_m)^{\alpha}. \tag{17}$$

Wtedy dla $p_1 = \alpha p_2$ operator f odwzorowuje $L_m^{p_1}$ w $L_m^{p_2}$, jest ciągły i ograniczony.

Dowód

Pierwsza część tezy wynika z nierówności

$$\|fx\|_{L_m^{p_2}} \leq \|g(t)\|_{L^{p_2}} + \beta(\|x(t,\omega)\|_{L_m^{p_1}})^{\alpha}$$

dla każdego $x(t,\omega) \in L_m^{p_1}$ zachodzi $f: L_m^{p_1}(T) \longrightarrow L_m^{p_2}(T)$.
Ciągłość wynika z lematu 2.

Lemat 4

Przestrzeń $L_m^p(T)$ jest przestrzenią refleksywną dla $p>1$, $m>1$.

Dowód. MAURIN [10, str. 412].

Twierdzenie 1

Jeżeli jądro $K(t,\tau,\omega)$ jest istotnie ograniczone ze względu na $\omega \in \Omega$ i $\|K(t,\tau,\omega)\|_{\infty}$ jest mierzalna na trójkątcie $0 \leq \tau \leq t < \infty$ i spełnia warunek

$$\hat{K}(t) = \left(\int_0^t (\|K(t,\tau,\omega)\|_{\infty})^{q_2} d\tau\right)^{1/q_2} \in L^{p_1}(T), \tag{18}$$

gdzie $p_2^{-1} + q_2^{-1} = 1$ i f spełnia wszystkie założenia lematu 3, $m>1, p_1>1$, wtedy operator $A = Kf$ odwzorowuje $L_m^{p_1}(T)$ w siebie i jest operatorem pełnociągłym na $L_m^{p_1}(T)$.

Dowód

Pierwsza część dowodu wynika z nierówności

$$\|Ax\|_m \leq \int_0^t \|K(t,\tau,\omega)\|_{\infty} \|f(\tau,x,\omega)\|_m d\tau \leq \left(\int_0^t \|K(t,\tau,\omega)\|_{\infty}^{q_2} d\tau\right)^{1/q_2} \left(\int_0^t \|f(\tau,x,\omega)\|_m^{p_2} d\tau\right)^{1/p_2}$$

$$\|Ax\|_{L_m^{p_1}} \leq \|\hat{K}\|_{L^{p_1}} \|f_x\|_{L_m^{p_2}}$$

dla wszystkich $x(t,\omega) \in L_m^{p_1}$, więc operator A odwzorowuje $L_m^{p_1}$ w siebie. Dla dowodu pełnociągłości operatora musimy wykazać, że A jest ciągły (na $L_m^{p_1}$) i zwarty (tzn. odwzorowuje każdy ograniczony podzbiór przestrzeni $L_m^{p_1}$ w jej zwarty podzbiór).
Ciągłość operatora A wynika z ciągłości operatora f i z nierówności

$$\|Ax - Ay\|_{L_m^{p_1}} \leq \|\hat{K}\|_{L^{p_1}} \|fx - fy\|_{L_m^{p_2}}.$$

Pozostaje do udowodnienia zawartość.

Niech podzbiór $D_1 \subset L_m^{p_1}$ będzie ograniczony. Z lematu 3 wiemy, że $f: L_m^{p_1} \longrightarrow L_m^{p_2}$ jest ograniczony. Niech

$$\sup_{x \in D_1} \|fx\| \leq d_1,$$

dla pewnego $0 \leq d_1 < \infty$. Zdefiniujemy $D_2 = \{z : z = fx,\ x \in D_1\}$.
Oczywiście, $D_2 \subset L_m^{p_2}$ jest ograniczony i stąd, dla $p_2 > 1$, $m > 1$, $L_m^{p_2}$ jest refleksywną przestrzenią Banacha (lemat 4), D_2 jest słabo zwarty YOSIDA [11, str. 200].
Niech $\{z_n : z_n = fx_n,\ x_n \in D_1\}$ będzie pewnym ciągiem. Oczywiście dla prawie wszystkich $t \in T$

$$y_n(t,\omega) = \int_0^t K(t,\tau,\omega)\, z_n(\tau,\omega)d\tau$$

jest dobrze określony. Co więcej, z założeń na K wynika, że dla prawie wszystkich $t \in T$, $\|K(t,\tau,\omega)\|_\infty \in L^{p_2}[0,t)$.
Ponieważ D_2 jest słabo zwarty, istnieje podciąg $\{z_k\}$ $(k = n_1, n_2, \ldots)$ ciągu $\{z_n\}$ i $z_0 \in L_m^{p_2}$ takie, że dla prawie wszystkich $t \in T$

$$y_k(t,\omega) = \int_0^t K(t,\tau,\omega)\, z_k(\tau,\omega)d\tau \longrightarrow \int_0^t K(t,\tau,\omega)\, z_0(\tau,\omega)d\tau = y_0(t,\omega)$$

w sensie m - średnim,
ponieważ

$$\|y_k(t,\omega) - y_0(t,\omega)\|_m \leq \int_0^t \|K(t,\tau,\omega)\|_\infty \|z_k(t,\omega) - z_0(t,\omega)\|_m d\tau \leq \hat{K}(t)\|z_k - z_0\|_{L_m^{p_2}},$$

więc

$$\lim_{k\to\infty} \|y_k(t,\omega) - y_o(t,\omega)\|_m = 0 \text{ pr.wsz. na } T.$$

Konsekwentnie

$$\lim_{k\to\infty} \|y_k(t,\omega) - y_o(t,\omega)\|_m^{p_1} = 0 \text{ pr. wsz. na } T.$$

Dalej

$$\|y_k(t,\omega) - y_o(t,\omega)\|_m \leq \hat{K}(t)\,(d_1 + \|z_o\|_{L_m^{p_2}}) \tag{19}$$

równomiernie po k i dla pr. wsz. $t \in T$. Ponieważ $\hat{K} \in L^{p_1}$ więc, stąd

$$\{y_k - y_o\} \in L_m^{p_1}.$$

Funkcja po prawej stronie nierówności (19) czyni zadość założeniom twierdzenia Lebesgue'a o całkowaniu szeregu, więc

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^t \|y_k(t,\omega) - y_o(t,\omega)\|_m^{p_1} dt = \int_0^t \lim_{k\to\infty} \|y_k - y_o\|_m^{p_1} dt = 0.$$

Czyli $y_k \to y_o$ wg silnej topologii przestrzeni $L_m^{p_1}$.
Ponieważ $y_o = y_o - y_k + y_k$, więc z równomiernej ograniczoności ciągu $\{z_k\} \in L_m^{p_2}$ wynika $\{y_k\} \in L_m^{p_1}$ i konsekwentnie $y_o \in L_m^{p_1}$.
Stąd $AD_1 \subset L_m^{p_1}$ jest zwarty, pod warunkiem, że $D_1 \subset L_m^{p_1}$ jest ograniczony.
To stwierdzenie kończy dowód. Do dalszych rozważań wykorzystamy twierdzenie Schaudera, które poniżej cytujemy AHMED [2].

Twierdzenie Schaudera

Jeśli w przestrzeni Banacha operacja ciągła przekształca ograniczony i wypukły zbiór punktów w jego podzbiór zwarty, to istnieje przynajmniej jeden punkt niezmienniczy tej operacji. Na podstawie tego twierdzenia udowodnimy istnienie rozwiązań stochastycznego równania całkowego w przestrzeni L_m^p.

Twierdzenie 2

Dla określonego ale skończonego $r \in R_0$ oznaczmy $S_r = \{x(t,\omega) \in L_m^{p_1}; \|x(t,\omega)\|_{L_m^{p_1}} \leq r\}$. Jeżeli $\sup_{x \in S_r} \|Ax\|_{L_m^{p_1}} = a(r)$ i stała $\lambda \in R$ spełnia warunek

$$\theta(r) = r - |\lambda| a(t) > 0,$$

to dla każdego $h(t,\omega) \in S_\theta \subset L_m^{p_1}$, gdzie $\theta < \theta(r)$, równanie całkowe (1) posiada przynajmniej jedno rozwiązanie $x^* \in S_r \subset L_m^{p_1}$.

Dowód

Ponieważ operator $A: L_m^{p_1} \longrightarrow L_m^{p_1}$ i jest operatorem pełnociągłym, więc operator $B: Bx = h + \lambda Ax$ jest również operatorem pełnociągłym dla każdego $h \in L_m^{p_1}$.
Konsekwentnie, dla każdego $h(t,\omega) \in S_\theta$, $\theta < \theta(r)$ operator B odwzorowuje $S_r \subset L_m^{p_1}$ w podzbiór S_r, co łatwo wynika z nierówności

$$\sup_{x \in S_r} \|Bs\|_{L_m^{p_1}} \leq \|h\|_{L_m^{p_1}} + \|\lambda\| \sup_{x \in S_r} \|Ax\|_{L_m^{p_1}} = \|h\|_{L_m^{p_1}} + \|\lambda\| a(r) \leq$$

$$\leq r - \|\lambda\| a(r) + \|\lambda\| a(r) = r.$$

Z tego ostatniego i pełnociągłości operatora B wynika, na podstawie twierdzenia Schaudera, że równanie całkowe (1) posiada przynajmniej jedno rozwiązanie $x^* \in S_r$.

Uwaga

Jeżeli jądro $K(t,\tau,\omega)$ jest istotnie ograniczone ze względu na $\omega \in \Omega$, $\|K(t,\tau,\omega)\|_\infty \leq K_1(t,\tau)$, K_1 jest mierzalna na trójkącie $0 \leq \tau \leq t < \infty$ i spełnia warunek

$$\hat{K}_1(t) = \left(\int_0^t K_1(t,\tau)^{q_2} d\tau\right)^{1/q_2} \in L^{p_1}(T),$$

to jeżeli spełnione są pozostałe założenia twierdzenia 1 i 2, wówczas równanie całkowe (1) posiada co najmniej jedno rozwiązanie. Dowód wynika z powyższych rozważań.

3. Istnienie rozwiązań słabo nieliniowego równania całkowego

Jeżeli funkcja f spełnia warunek Lipschitza, to rozważania znacznie się upraszczają. Zmodyfikujemy nieco definicję przestrzeni Banacha wprowadzoną w definicji 1. Normę w przestrzeni Banacha $L^p_{mq}(T)$ zdefiniujemy w sposób następujący:

$$\|x\|_{L^p_{mq}(T)} = \left(\int_T \left(\frac{\|x(t,\omega)\|_m}{q(t)} \right)^p \mu(dt) \right)^{1/p},$$

gdzie $q(t)$ jest dodatnią funkcją ciągłą. Podobnie jak w wypadku przestrzeni L^p_m można wykazać, że tak zdefiniowana przestrzeń jest zupełna przy $m \geqslant 1$, $p \geqslant 1$.

Lemat 5

Przypuśćmy, że istnieją liczby rzeczywiste $\alpha > 0$, $p \geqslant 1$, $m \geqslant 1$ oraz nieujemna funkcja mierzalna $g(t)$ na R_o i dodatnia funkcja ciągła $q(t)$ taka, że funkcja $f(t,x,\omega)$ spełnia warunki

$$\text{(i)} \quad \frac{\|f(t,o,\omega)\|_m}{g(t)} \in L^p(T);$$

$$\text{(ii)} \quad q(t)|f(t,x,\omega) - f(t,y,\omega)| \leqslant \alpha g(t)\ |x - y|$$

dla wszystkich $x, y \in R$ i dla wszystkich $t \in T$.

Wtedy dla każdego $x(t,\omega) \in L^p_{mq}(T)$

$$\frac{\|f(t,x,\omega)\|_m}{g(t)} \in L^p(T) \tag{20}$$

i dla każdego $t \in T$

$$\frac{\|f(t,x,\omega) - f(t,y,\omega)\|_m}{g(t)} \leqslant \alpha \frac{\|x - y\|_m}{q(t)}. \tag{21}$$

Dowód

Nierówność (20) wynika ze znanej nierówności Minkowskiego

$$\frac{\|f(t,x,\omega)\|_m}{g(t)} \leqslant \frac{\|f(t,x,\omega) - f(t,o,\omega)\|_m}{g(t)} + \frac{\|f(t,o,\omega)\|_m}{g(t)} \leqslant$$

$$\leqslant \alpha \frac{\|x\|_m}{q(t)} + \frac{\|f(t,o,\omega)\|_m}{g(t)}.$$

Z założenia (i) wynika, że dla $x \in L^p_{mq}(T)$

$$\frac{\|f(t,x,\omega)\|_m}{g(t)} \in L^p(T).$$

Dowód części drugiej jest analogiczny jak w pracy AHMED'TEO [3, str.280].

Uwaga

Możliwe jest przy małych zmianach osłabienia warunku (ii) na następujący:

$$\text{(ii)}' \quad q(t)\,\|f(t,x,\omega) - f(t,y,\omega)\|_m \leqslant \alpha g(t)\,\|x - y\|_m.$$

Oczywiście z (ii) wynika (ii)'.

Twierdzenie 3

Przypuśćmy, że istnieją liczby rzeczywiste $\alpha > 0$, $p > 1$, $q > 1$ $(p^{-1} + q^{-1} = 1)$, $m \geqslant 1$, nieujemna funkcja mierzalna $g(t)$ na R_o, dodatnia ciągła funkcja $q(t)$ na R_o takie, że

(i) $h(t,\omega) \in L^p_{mq}$;

(ii) $\left(\int_0^t (\|K(t,\tau,\omega)\|_\infty g(\tau))^q \, d\tau\right)^{1/q} \leqslant q(t)\, r(t)$, gdzie $r \in L^p$,

dla każdego $(t,\tau) \in \{(t,\tau): 0 \leqslant \tau \leqslant t < \infty$

(iii) $|\lambda|\, \alpha \|r(t)\|_{L^p} < 1$;

i f spełnia założenia (i) i (ii) lematu 5.
Wtedy równanie (1) posiada jedno rozwiązanie $x^* \in L^p_{mq}$.

Dowód

Niech U będzie operatorem w przestrzeni Banacha L^p_{mq}

$$(Ux)(t,\omega) = h(t,\omega) + \lambda \int_0^t K(t,\tau,\omega) f(\tau, x(\tau,\omega), \omega)\, d\tau$$

dla $t \in T$, $\omega \in \Omega$ $h \in L^p_{mq}$.

Pokażemy, że operator $U: L^p_{mq} \longrightarrow L^p_{mq}$ i jest operatorem zwężającym. Otrzymamy

$$\|Ux\|_m \leqslant |\lambda| \int_0^t \|K(t,\tau,\omega)\|_\infty \|f(\tau,x,\omega)\|_m d\tau + \|h\|_m \leqslant$$

$$\leqslant \|h\|_m + |\lambda| \left(\int_0^t \left(\|K(t,\tau,\omega)\|_\infty g(\tau) \right)^q d\tau \right)^{1/q} \left(\int_0^t \left(\frac{\|f(\tau,x,\omega)\|_m}{g(\tau)} \right)^p d\tau \right)^{1/p}.$$

Wykorzystując założenie (ii) dostaniemy

$$\|Ux\|_m \leqslant |\lambda| q(t) r(t) \gamma + \|h\|_m ,$$

gdzie

$$\gamma = \sup_{x \in L^p_{mq}} \left(\int_T \left(\frac{\|f(t,x,\omega)\|_m}{g(t)} \right)^p dt \right)^{1/p}$$

i $\gamma < \infty$ na podstawie lematu 5.

Oczywiste jest zatem

$$\|Ux\|_{L^p_{mq}} \leqslant \|h\|_{L^p_{mq}} + |\lambda| \gamma \|r\|_{L^p} < \infty.$$

Stąd $Ux \in L^p_{mq}$ dla każdego $x \in L^p_{mq}$, zatem $U: L^p_{mq} \longrightarrow L^p_{mq}$.

Dla dowodu, że U jest operatorem zwężającym załóżmy, że $x, y \in L^p_{mq}$. Wtedy dla każdego $t \in T$ z lematu 5 wynika

$$\|(Ux - Uy)(t,\omega)\|_m \leqslant \lambda \int_0^t \|K(t,\tau,\omega)\|_\infty \|f(\tau,x,\omega) - f(\tau,y,\omega)\|_m d\tau \leqslant$$

$$\leqslant |\lambda| \left(\int_0^t \left(\|K(t,\tau,\omega)\|_\infty g(\tau) \right)^q d\tau \right)^{1/q} \left(\int_0^t \left(\frac{\|f(t,x,\omega) - f(t,y,\omega)\|_m}{g(\tau)} \right)^p d\tau \right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \alpha |\lambda| q(t) r(t) \|x - y\|_{L^p_{mq}} .$$

Zatem

$$\|Ux - Uy\|_{L^p_{mq}} \leq \alpha\, |\lambda|\, \|r\|_{L^p}\, \|x - y\|_{L^p_{mq}} .$$

Z założenia (iii) wynika, że U jest operatorem zwężającym i na podstawie twierdzenia Banacha o punkcie stałym operacji stwierdzamy, że istnieje jedno rozwiązanie równania całkowego (1) w przestrzeni $L^p_{mq}(T)$.

Uwaga

Jeżeli $q(t) = 1$, wówczas rozważania dotyczą tej samej przestrzeni $L^p_m(T)$, w przypadku silnej i słabej nieliniowości operatora f.

Wnioski

Jeżeli wszystkie funkcje występujące w równaniu (1) nie są procesami stochastycznymi bądź polami losowymi, wówczas wyniki sprowadzają się do wyników deterministycznych prawie bez dokonywania żadnych zmian.

Weryfikacja założeń twierdzeń nie powinna być w konkretnym przypadku zbyt trudna, oczywiście dla mniej skomplikowanych modeli probabilistycznych.

Aparat matematyczny stosowany do analizy stabilności układu dynamicznego wydaje się być stosunkowo prosty. Ze względu na łatwość analizy, dużą efektywność otrzymanych wyników, stosowanie równań całkowych do badań dynamiki złożonych stochastycznych układów automatyki wydaje się być całkowicie uzasadnione.

LITERATURA

1. Ahmed N.U.: A class of stochastic nonlinear integral equations on L^p spaces and its application to optimal control, Information and Control, 1969, Vol. 14, No 6, 512-523.
2. Ahmed N.U.: L^p(p 1) and Orlicz Stability of a class of nonlinear time varying feedback control systems, Information and Control, 1971, Vol. 19, No 2, 114-123.
3. Ahmed N.U., Teo K.L.: On the stability of a class of nonlinear stochastic systems, Information and Control, 1972, Vol. 20, No 3, 276-293.
4. Bharucha-Reid A.T.: Random Integral Equations, Academic Press, New York and London 1972.
5. Gichman I.I., Skorochod A.W.: Wstęp do teorii procesów stochastycznych, PWN, Warszawa 1968.
6. Gichman I.I., Skorochod A.W.: Tieorija słuczajnych prociessow, T.1, Izd. Nauka, Moskwa 1971.

7. Krasnosielskij M.A.: Topołogiczeskije mietody w tieorii nieliniejnych intiegralnych urawnienij, Gos. Izd. Tiech.-Tieor. Lit.,Moskwa 1956.
8. Krasnosielskij M.A., Zabriejko P.P., Pustylnik Je.U., Soboliewskij P. Je.: Intiegralnyje opieratory w prostranstwach summirujemych funkcij, Izd. Nauka, Moskwa 1967.
9. Kudrewicz J.: Częstotliwościowe metody w teorii nieliniowych układów dynamicznych, WNT, Warszawa 1970.
10. Maurin K.: Analiza, cz. I, PWN, Warszawa 1971.
11. Yosida K.: Funkcionalnyj analiz, Izd. Mir, Moskwa 1967.

L_m^p - УСТОЙЧИВОСТЬ В СРЕДНЕМ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Р е з ю м е

Рассмотрены проблемы L_m^p - устойчивости динамической системы, описываемой стохастическим нелинейным интегральным уравнением типа Вольтерры Фредгольма)

$$x(t,\omega) = h(t,\omega) + \lambda \int_0^t k(t,\tau,\omega)\, f(\tau,x,\omega)\,d\tau.$$

Главным результатом являются две теоремы, в которых представлены условия существования решений этого уравнения в случае, когда оператор f слабо и сильно нелинейный.

L_m^p - STABILITY IN THE MEAN OF A CLASS OF NONLINEAR STOCHASTIC INTEGRAL EQUATIONS

S u m m a r y

In this paper we consider the questions of L_m^p - stability of systems described by stochastic nonlinear Volterra (Fredholm) integral equations

$$s(t,\omega) = h(t,\omega) + \lambda \int_0^t K(t,\tau,\omega)\, f(\tau,x(\tau,\omega),\omega)\,d\tau.$$

The main result of the paper are two theorems in which we formulate conditions of existence of solutions of the system in the L_m^p space in the case of weak and strong nonlinearity.