ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1974

Seria: Automatyka z. 28 Nr kol. 397

Jerzy Skrzypczyk

Instytut Konstrukcji i Technologii
Urządzeń Automatyki i Elektroniki

STABILNOŚĆ ROZWIĄZAŃ NIELINIOWEGO STOCHASTYCZNEGO RÓWNANIA CAŁKOWEGO W PRZESTRZENIACH BANACHA

Streszczenie. Praca zawiera rezultaty dotyczące stabilności nieliniowego stochastycznego równania całkowego w przestrzeniach Banacha. Szczegółowo rozpatrzono przypadek stochastycznego nieliniowego równania całkowego Volterry z jądrem symetrycznym

$$x(t,\omega) = h(t,\omega) + \int_0^t K(t-\tau,\omega)\, f(\tau,x(\tau,\omega),\omega)\,d\tau.$$

Warunki stabilności układu dynamicznego opisanego takim równaniem podano w formie kryteriów częstotliwościowych.

Wstęp

Rozpatrywanie stabilności układów dynamicznych opisanych równaniem całkowym przy wykorzystaniu metody analizy funkcjonalnej znajduje coraz szersze zastosowanie. Szczególne znaczenie posiada analiza w przestrzeniach Banacha. Stanowi ona bardzo nowoczesny i efektywny aparat badań własności sygnałów.

Szczególne miejsce wśród rozpatrywanych układów dynamicznych zajmują układy liniowe stacjonarne połączone z pewnymi elementami nieliniowymi, niekoniecznie stacjonarnymi. Taki układ dynamiczny może być opisany równaniem całkowym Volterry z jądrem symetrycznym.

$$x(t) = h(t) + \int_0^t K(t-\tau)\, f(\tau,x)\, d\tau. \tag{1}$$

Kryteria stabilności rozwiązań równania całkowego (1) z jądrem symetrycznym wyrażają się, przy pewnych ograniczeniach co do nieliniowości, przez charakterystyki częstotliwościowe liniowego operatora Volterry z jądrem symetrycznym, patrz KUDREWICZ [5]. Istnieje sporo prac traktujących o stabilności pojmowanej w różny sposób stochastycznego nieliniowego równania całkowego Volterry z jądrem symetrycznym, patrz np. Jakubowicz [4], Liewit [6], Morozan [7], Tsokos [9].

W pracy podjęto próbę ogólnego potraktowania stabilności stochastycznych równań całkowych w przestrzeniach Banacha. Konsekwencją takiego potraktowania jest to, że kryteria częstotliwościowe stają się warunkami drugorzędnymi, wystarczającymi dla spełnienia pewnych założeń twierdzenia 1 w szczególnym przypadku równania całkowego z jądrem symetrycznym.

1. Założenia

Rozpatrywać będziemy stochastyczny odpowiednik równania całkowego Volterry

$$x(t,\omega) = h(t,\omega) + \int_0^t K(t,\tau,\omega)\, f(\tau, x(\tau,\omega),\omega)\,d\tau. \tag{2}$$

W całej pracy założymy, że

(i) $\omega \in \Omega$, Ω jest zbiorem zdarzeń elementarnych przestrzeni probabilistycznej (Ω, σ, P) indukowanej przez procesy h, K i f;

(ii) x, h są procesami stochastycznymi;

(iii) K jest jądrem stochastycznym mierzalnym na produkcie $\Delta \otimes \Omega$, gdzie $\Delta = \left\{(t,\tau): 0 \leq \tau \leq t < \infty\right\}$;

(iv) f jest nieliniową funkcją przypadkową mierzalną na $R_0 \otimes \Omega$ dla każdego skończonego $x \in R = (-\infty, \infty)$.

2. Definicje stabilności

W pracy nie zajmujemy się problemami istnienia rozwiązań równania całkowego, tylko zagadnieniami stabilności tych rozwiązań, o ile istnieją.

Definicja 1

Rozwiązanie stochastycznego równania całkowego (2) $x(t,\omega)$ nazwiemy stabilnym (w sensie Lapunowa) w przestrzeni Banacha (z normą $\|\cdot\|$), jeżeli

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \|h(t,\omega)\| < \delta \Longrightarrow \|x(t,\omega)\| < \varepsilon.$$

Definicja 2

Rozwiązanie stochastycznego równania całkowego (2) $x(t,\omega)$ nazwiemy stabilnym asymptotycznie, w sensie średnim, jeżeli jest stabilne w sensie definicji 1 i ponadto

$$\lim_{t\to\infty} \|x(t,\omega)\|_m = 0,$$

gdzie $\|x\|_m = \left(\int_\Omega |x(t,\omega)|^m P(d\omega)\right)^{1/m}$.

3. Stabilność rozwiązań równania całkowego w przestrzeni Banacha

Dla większej czytelności pracy podamy niżej treść pewnych twierdzeń, z których będziemy później korzystać już bez dodatkowych wyjaśnień.

Twierdzenie Yosida [11, str. 191].

Niech (R_0, A, M) będzie przestrzenią Lebesgue'a z miarą; niech $x(t,\omega)$ będzie mierzalną funkcją $t \in R_0$ z wartościami w przestrzeni Banacha $L^m(\Omega,\sigma,P)(m \geq 1)$ i niech $\|x(t,\omega)\|_m$ jest lokalnie całkowalna. Wtedy

$$\left\|\int_B x(t,\omega)dt\right\|_m \leq \int_B \|x(t,\omega)\|_m dt \text{ dla każdego } B \in A.$$

Nierówność Höldera

Jeżeli p i q są liczbami dodatnimi spełniającymi związek $p^{-1} + q^{-1} = 1$ i jeżeli $f \in L^p(a,b)$, $g \in L^q(a,b)$, to $fg \in L(a,b)$ i

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \quad \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{1/q};$$

nierówność ta jest prawdziwa zarówno dla przedziału skończonego, jak i nieskończonego.

Nierówność Minkowskiego

Jeśli $p \geq 1$ i $f \in L^p(a,b)$, $g \in L^p(a,b)$, to $f + g \in L^p(a,b)$ i

$$\left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx\right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx\right)^{1/p};$$

nierówność jest prawdziwa dla przedziału skończonego, jak i nieskończonego.

Powiemy, że zmienna losowa $x(\omega)$ jest P - istotnie ograniczona, jeżeli istnieje stała $a > 0$ taka, że

$$P(\{w: |x(\omega)| > a\}) = 0.$$

Oznaczymy dalej

$$\|x(\omega)\|_\infty = P\text{-ess}\sup_{\omega\in\Omega} |x(\omega)| = \inf_{\Omega_0}(\sup_{\Omega-\Omega_0} |x(\omega)|),$$

gdzie $P(\Omega_0) = 0$ [10].

Przejdziemy teraz do sformułowania podstawowego twierdzenia. Oznaczmy normę rozpatrywanej przestrzeni Banacha $\|\cdot\|$, normę operacji $|\cdot|$.

Twierdzenie 1

Jeżeli spełnione są następujące warunki:

$$\text{(i)} \underset{\lambda>0}{\exists} \underset{r>0}{\exists} \|f(t,x,\omega)\lambda - x\| \leq r\|x\|;$$

$$\text{(ii)} \underset{N>0}{\exists} |A| < N;$$

$$\text{(iii)} |\lambda| > (r+1)N;$$

to rozwiązanie równania całkowego (2) jest stabilne (w sensie Lapunowa) w rozpatrywanej przestrzeni Banacha. A - oznacza operator określony przez całkę w równaniu (2).

Dowód

Oznaczmy $u = f(t,x,\omega)$. Wówczas równanie (2) możemy zapisać w postaci

$$x = h + Au. \tag{3}$$

Równanie (3) napiszemy w postaci równoważnej

$$\lambda x = \lambda h + \lambda Au$$

lub

$$\lambda x - Ax = \lambda h + A(\lambda u - x),$$

$$(\lambda I - A/x = \lambda h + A(\lambda u - x). \tag{4}$$

Z warunku (iii) wynika, że λ nie należy do widma operatora A patrz np. [5], a równanie (3) lub (4) staje się równoważne równaniu

$$x = (\lambda I - A)^{-1} A(\lambda u - x) + (\lambda I - A)^{-1} \lambda h,$$

$$\|x\| \leq |(\lambda I - A)^{-1} A| \|\lambda u - x\| + |(\lambda I - A)^{-1}| \|h\| |\lambda|.$$

Na podstawie założenia (i)

$$\|x\| \leq |(\lambda I - A)^{-1} A| r \|x\| + |\lambda| |(\lambda I - A)^{-1}| \|h\|.$$

Ponieważ

$$|(\lambda I - A)^{-1}A| \leqslant |(\lambda I - A)^{-1}|\ |A| \leqslant \frac{|A|}{|\lambda| - |A|} < \frac{N}{|\lambda| - N}$$

patrz np. [5], więc

$$\|x\| < \frac{N}{|\lambda| - N}\, r\, \|x\| + \frac{|\lambda|}{|\lambda| - N}\, \|h\|.$$

Ponieważ z założenia (iii) wynika

$$\frac{Nr}{|\lambda| - N} < 1,$$

więc

$$\|x\| \left(1 - \frac{rN}{|\lambda| - N}\right) \leqslant \frac{|\lambda|}{|\lambda| - N}\, \|h\|$$

lub

$$\|x\| < \frac{|\lambda|}{|\lambda| - (r+1)N}\, \|h\|$$

co kończy dowód.

4. Stabilność w sensie Lapunowa równania całkowego Volterry z jądrem symetrycznym

Definicja 3

Niech $L_2^2(T)$ oznacza przestrzeń Banacha ((T,μ) - przestrzeń z miarą) wszystkich funkcji $x(t,\omega)$ mierzalnych względem produktu $\Omega \otimes T$ takich, że

$$\int_T \left(\|x(t,\omega)\|_2\right)^2 \mu(dt) < \infty,$$

gdzie $|\cdot|_2$ określona wzorem z definicji 2.

Normę w przestrzeni $L_2^2(T)$ zdefiniujemy jako

$$\|x\|_{L_2^2} = \left(\int_T \left(\|x(t,\omega)\|_2\right)^2 (dt)\right)^{1/2}.$$

Uwaga. Aby wykazać, że L_2^2 jest przestrzenią Banacha zauważmy, że jest to przestrzeń Lebesgue'a określona na produkcie $\Omega \otimes T$. Ponadto jest to przestrzeń Hilberta z iloczynem skalarnym określonym w sposób następujący:

$$\langle x(t,\omega), y(t,\omega)\rangle = \iint_{T\Omega} x(t,\omega)\overline{y(t,\omega)}P(d\omega)\mu(dt).$$

Lemat 1

Jeżeli $y(t) \leq \int_0^t x(t-\tau)h(\tau)d\tau$ i $h \in L[0,\infty]$, to dla każdej funkcji $x \in L^2[0,T]$ zachodzą relacje:

$$\text{(i)} \quad \int_0^T |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X_T(j\nu)|^2 d\nu;$$

$$\text{(ii)} \quad \int_0^T y(t)^2 dt \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |K(j\nu)X_T(j\nu)|^2 d\nu;$$

(iii) jeżeli ponadto $x(t) \geq 0$, to

$$\int_0^T x(t)y(t)dt \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Re}K(j\nu)|X_T(j\nu)|^2 d\nu,$$

gdzie $X_T(j\nu) = \int_0^T \exp(-j\nu t)x(t)dt$, $K(j\nu) = \int_0^\infty \exp(-j\nu t)h(t)dt$.

Dowód

Wynika prosto z twierdzenia 2.4, Kudrewicz [5, str. 86] i z pewnych elementarnych nierówności.

ad. (i) Jest to jedna z postaci równości Parsewala.

$$\text{ad. (ii)} \quad \int_0^T |y(t)|^2 dt \leq \int_0^T |z(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |K(j\nu)X_T(j\nu)|^2 d\nu,$$

gdzie $z(t) = \int_0^t x(t-\tau)h(\tau)d\tau$.

$$\text{ad. (iii)} \quad \int_0^T x(t)y(t)dt \leq \int_0^T x(t)z(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Re}K(j\nu)|X_T(j\nu)|^2 d\nu.$$

Lemat 2

Dla każdego $0 < T \leqslant \infty$ operator

$$(Ax)(t,\omega) = \int_0^t K(t-\tau,\omega)x(\tau,\omega)d\tau$$

przekształca przestrzeń $L_2^2(T)$ w siebie i zachodzą nierówności:

(i) $|A| \leqslant \sup_{\nu} |K(j\nu)|$, gdzie $K(j\nu) = \int_0^\infty \|K(t,\omega)\| \exp(-j\nu t)dt$;

(ii) $\sup A \leqslant \sup_{\nu} \operatorname{Re}K(j\nu)$.

Dowód

ad. (i)

$$|A| = \sup_{x \in L_2^2} \frac{\left\| \int_0^t K(t-\tau,\omega)x(\tau,\omega)d\tau \right\|_{L_2^2}}{\|x(t,\omega)\|_{L_2^2}} \leqslant \sup_{x \in L_2^2} \frac{\left\| \int_0^t \|K(t-\tau,\omega)\|_\infty \|x(\tau,\omega)\|_2 \, d\tau \right\|_{L^2}}{\|x(t,\omega)\|_{L_2^2}} . \tag{5}$$

Oznaczymy $X_T(j\nu) = \int_0^T \exp(-j\nu t) \|x(t,\omega)\|_2 dt$, po wykorzystaniu nierówności (ii) lematu 1 i nierówności (5) otrzymamy

$$|A| \leqslant \sup_{x \in L_2^2} \frac{\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |K(j\nu)\, X_T(j\nu)|^2 \, d\nu\right)^{1/2}}{\|x(t,\omega)\|_{L_2^2}} \leqslant \sup_{x \in L_2^2} \frac{\sup_{\nu} |K(j\nu)| \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X_T(j\nu)|^2 d\nu\right)^{1/2}}{\|x(t,\omega)\|_{L_2^2}}$$

$$= \sup_{\nu} |K(j\nu)| .$$

ad. (ii)

$$\sup A = \sup_{x \in L_2^2} \frac{\operatorname{Re}\langle Ax, x\rangle}{\|x\|^2_{L_2^2}} =$$

$$= \sup_{x \in L_2^2} \frac{\operatorname{Re} \int_0^T \int_\Omega \left(x(t,\omega) \int_0^t K(t-\tau,\omega)x(\tau,\omega)d\tau \right) P(d\omega)dt}{\|x\|^2_{L_2^2}} .$$

Po wykorzystaniu nierówności Höldera

$$\sup A \leqslant \sup_{x \in L_2^2} \frac{\mathrm{Re} \int_0^T (\|x(t,\nu)\|_2 \int_0^t \|K(t-\tau,\omega)\|_\infty \|x(\tau,\omega)\|_2 d\tau) dt}{\|x\|^2_{L_2^2}} .$$

Korzystając z nierówności (iii) lematu 1 otrzymamy

$$\sup A \leqslant \frac{\mathrm{Re}(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Re}\, K(j\nu) |X_T(j\nu)|^2 d\nu)}{\|x\|^2_{L_2^2}} \leqslant \sup_{\nu} \mathrm{Re} K(j\nu).$$

Twierdzenie 2

Jeżeli

(i) $\underset{\lambda>0}{\exists} \ \underset{r>0}{\exists} \ \int_0^T (\|f(t,x,\omega)\lambda - x\|_2)^2 \, dt \leqslant r \int_0^T (\|x(t,\omega)\|_2)^2 dt;$

(ii) $|\lambda| > (r+1) \sup_{\nu} \mathrm{Re} K(j\nu)$

to rozwiązanie stochastycznego równania całkowego Volterry z jądrem symetrycznym (1) jest stabilne w sensie Lapunowa w przestrzeni $L_2^2(T)$.

Dowód

Wynika bezpośrednio z treści twierdzenia 1 i lematu 2.

5. Stabilność asymptotyczna w sensie średnim

Lemat Kudrewicz [5, str. 149].

Jeżeli $k \in L^2[0,\infty]$ i u $L^2[0,\infty]$, to splot

$$v(t) = \int_0^{\infty} k(t-\tau) u(\tau) d\tau$$

jest funkcją ograniczoną i dąży do zera przy $t \to \infty$.

Twierdzenie 3

Jeżeli spełnione są założenia twierdzenia 2 i ponadto

(i) $\|K(t,\omega)\|_\infty \in L^2[0,\infty]$;

(ii) $h(t,\omega) \in L_2^2[0,\infty]$;

(iii) $\lim\limits_{t\to\infty} \|h(t,\omega)\|_2 = 0$,

to rozwiązanie równania całkowego (1) jest stabilne asymptotycznie w sensie średnim.

Dowód

Ze wstępnych założeń wynika, że rozwiązanie równania (1) o ile istnieje jest stabilne w sensie przestrzeni L_2^2, a to łącznie z założeniem (i) zapewnia, że

$$\forall_{x \in L_2^2} \|u(t,\omega)\|_2 \in L^2[0,\infty].$$

Ponieważ

$$\|x(t,\omega)\|_2 \leq \int_0^t \|K(t-\tau,\omega)\|_\infty \|u\|_2 d\tau + \|h(t,\omega)\|_2,$$

więc spełnione są wszystkie założenia cytowanego lematu i stąd

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t \|K(t-\tau,\omega)\|_\infty \|u\|_2 d\tau = 0,$$

co kończy dowód.

Wnioski

Najważniejszym chyba wynikiem pracy jest to, że wyniki prac pokrywają się ze znanymi wynikami deterministycznymi w przypadku braku losowości rozpatrywanych zjawisk.

Stosowane metody są bardzo przejrzyste i czytelne w odróżnieniu od większości rozważań z tej tematyki.

Wykorzystanie twierdzenia 1 do badania stabilności układu niestacjonarnego jest oczywiście możliwe i jest stosunkowo łatwe. Rozważania te zostały przytoczone tylko ze względu na ograniczony zakres pracy.

LITERATURA

1. Ahmed N.U., Teo K.: On the stability of a class of nonlinear stochastic systems, Information and Control, 1972, Vol. 20, No 3, 276-293.
2. Gichman I.I., Skorochod A.W.: Tieorija słuczajnych prociessow, T. 1, Izd. Nauka, Moskwa 1971.
3. Gichman I.I., Skorochod A.W.: Wstęp do teorii procesów przypadkowych, PWN, Warszawa 1968.
4. Jakubowicz W.A.: Czastotnyje usłowija ustojcziwosti rieszenij nieliniejnych intiegralnych urawnienij awtomaticzeskowo uprawlienija, Wiestnik Lieningradskowo Uniwiersitietata, 1967, No 7, 109-125.
5. Kudrewicz J.: Częstotliwościowe metody w teorii nieliniowych układów dynamicznych, WNT, Warszawa 1970.
6. Liewit M.W.: Czastotnyje usłowija absoliutnoj stchasticzeskoj ustojcziwosti sistiem awtomaticzeskowo uprawlienija so słuczajnymi wniesznimi wozdiejstwiami, Dokł. ANSSSR, 1970, 195, No 4, 769-772.
7. Morozan T.: The method of V.M. Popov for control systems with random parameters, J. Math. Anal. Appl., 1966, 16, 201-215.
8. Padgett W.J., Tsokos C.P.: On a stochastic integral equation of the Volterra type in telephone theory, J. Appl. Probability, 1971, 8, No 2, 269-275.
9. Tsokos C.P.: The method of V.M. Popov for differential systems with random parameters, J. Appl. Probability, 1971, 8, No 2, 298-310.
10. Tsokos C.P., Hamdan M.A.: Stochastic asymptotic exponential stability of stochastic integral equations, J. Appl. Probability, 1972, 9, No 1, 169-177.
11. Yosida K.: Funkcjonalnyj analiz, Izd. Mir. Moskwa 1967.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКОГО НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Р е з ю м е

Рассмотрены проблемы устойчивости решений стохастического интегрального уравнения в Банаховых пространствах.

Подробно рассмотрено стохастическое нелинейное интегральное уравнение Вольтерры с симметрическим ядром.

$$x(t,\omega) = h(t,\omega) + \int_0^t k(t,\tau,\omega)\, f(\tau,x(\tau,\omega),\omega)d\tau.$$

Условия стабильности динамической системы изображенной таким уравнением поданы в виде частоточных критериев.

ON THE STABILITY OF SOLUTIONS OF STOCHASTIC NONLINEAR INTEGRAL EQUATIONS IN BANACH SPACES

S u m m a r y

In the paper we consider problems of stability of a class of stochastic nonlinear integral equations in Banach spaces. Particularly the case of stochastic nonlinear symmetric Volterra equations are treated in great detail.