ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1974

Seria: Automatyka z. 28 Nr kol. 397

Lesław Socha

CZĘSTOTLIWOŚCIOWE KRYTERIA STABILNOŚCI STOCHASTYCZNEJ PEWNYCH NIELINIOWYCH UKŁADÓW AUTOMATYKI

Streszczenie. W pracy przedstawiono częstotliwościowe kryteria stabilności stochastycznej zupełnej oraz średniej stabilności z p-tą potęgą dla pewnej klasy nieliniowych układów regulacji stacjonarnych i niestacjonarnych.

Wstęp

W ostatnich latach nastąpił duży rozwój częstotliwościowych kryteriów stabilności, o czym świadczy duża ilość publikacji na ten temat. Na szczególne wyróżnienie zasługują prace Jakubowicza, Popowa, Zamesa, Piatnickiego. Obserwuje się również rozwój częstotliwościowych kryteriów stabilności stochastycznych, gdzie do najważniejszych prac zaliczają się [5], [6], [7], [8], [9], [10].

W teorii tej brak jednak jednolitego systematycznego opracowania takie, jakie występują już w teorii stabilności stochastycznych równań różniczkowych. Świadczy to o otwartości i ciągłym rozwoju tego problemu. W niniejszym artykule postaramy się wykorzystać wyniki uzyskane w badaniu stabilności stochastycznej przy pomocy funkcji Lapunowa w [1] i przenieść je do metod częstotliwościowych.

Postawienie problemu

Na początku omówimy kilka oznaczeń, którymi będziemy się posługiwać w dalszej części artykułu.

$$E_1 = E_n \times I,$$

gdzie

E_n - przestrzeń Euklidesa n wymiarowa

$I = \{t: 0 \leq t < \infty\}$

$$|X| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|A\| = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

C - klasa funkcji absolutnie ciągłych względem t spełniających globalny warunek Lipszica.

Rozważmy układ opisany równaniami

$$\frac{dx}{dt} = Ax + [b + \xi(t,\beta)] \varphi(\sigma) \tag{1}$$

$$\sigma = c^T x,$$

gdzie

- A - macierz kwadratowa $n \times n$ o współczynnikach stałych,
- b, c - wektory o n wymiarowe o współczynnikach stałych,
- $\xi(t,\beta)$ - proces stochastyczny,
- β - element przestrzeni probabilistycznej (B, δ, P),
- $\varphi(\sigma)$ - funkcja nieliniowa.

Podamy teraz kilka definicji, z których będziemy korzystać przy badaniu stabilności.

Definicja 1

Rozwiązanie $x \equiv 0$ układu 1 nazywamy lokalnie stabilnym stochastycznie, jeśli prawdziwe jest zdanie logiczne.

$$\Gamma^* \bigwedge_{\varepsilon>0} \bigwedge_{\delta>0} \bigvee_{r>0} |x_0| < r \Longrightarrow \bigwedge_{r \geq t_0} P\left\{\beta : \left|x(t,x_0,t_0,\beta)\right|\right\} < \delta$$

Definicja 2

Rozwiązanie $x = 0$ równania 1 nazywamy asymptotycznie lokalnym stabilnym stochastycznie, jeżeli oprócz warunku I^* zachodzi

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{r>0} |x_0| < r \Longrightarrow \lim_{t \to \infty} P\{\beta : |x(t,\beta)| > \varepsilon\} = 0.$$

Definicja 3

Rozwiązanie $x \equiv 0$ układu1 nazywamy średnio stabilnym z p-tą potęgą, jeżeli słuszne jest następujące zdanie logiczne

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{r>0} |x_0|<r \Rightarrow \bigwedge_{t\geq t_0} E|x(t,\beta,x_0,t_0)|^P<\varepsilon.$$

Definicja 4

Rozwiązanie $x \equiv 0$ układu 1 nazywamy eksponencjalnie p-stabilnym, jeśli istnieją stałe $A>0, \alpha>0$ takie, że

$$E|x(t,\beta,x_0,t_0)|^P \leq A|x_0|^P \exp\{-\alpha(t-t_0)\}.$$

Definicja 5

Rozwiązanie $x \equiv 0$ jest zupełnie stabilne stochastycznie, gdy zachodzi I^* i ponadto

$$\bigwedge_{x_0} \bigwedge_{\varepsilon>0} \bigwedge_{\delta>0} \bigvee_{T} \bigwedge_{t>T} P\{\beta: x(t,\beta,x_0,t_0)|>\varepsilon\}<\delta.$$

Poczynimy obecnie następujące założenia dla układu, w którym nie występuje proces stochastyczny.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax + b\varphi(\sigma) \\ \sigma &= C^T x \end{aligned} \qquad (2)$$

a) $0 \leq \varphi(\sigma) \cdot \sigma \leq M\sigma^2, \quad \varphi(0)=0$

b) $\left|\frac{\partial\varphi(\sigma)}{\partial\sigma}\right|$ istnieje dla każdego σ i jest ograniczona,

c) niech widmo macierzy A leży w obszarze

$$\mathrm{Re}\,\lambda < -\alpha_0 \leq 0,$$

jeśli teraz spełnione są założenia (a) i (c) oraz dla pewnego ϑ i wszystkich $\omega \geq 0$ zachodzi

d) $\frac{1}{M} + \mathrm{Re}\left\{(1+j\omega\vartheta)\, C^T\left[A-(j\omega-\alpha_0)\,I\right]^{-1} b\right\}>0,$

to na mocy tw. 2 [2] dla dowolnych $t \geq t_0$ i pewnego $\alpha > \alpha_0$ zachodzi następujące oszacowanie:

$$|x(t)| \leq L|x(t_0)| \exp\left[-\alpha(t - t_0)\right] \tag{3}$$

$x(t)$ - dowolne rozwiązanie, stała L zależy tylko od A, b, c, M, stąd na mocy ([3] str. 72) dla układu 2 istnieje funkcja $W(x,t)$, dla której zachodzą oszacowania

$$\text{I} \quad c_1|x|^2 < W(x,t) < c_2|x|^2$$

$$\text{II} \quad \frac{d^oW}{dt} \leq - c_3|x|^2$$

$$\text{III} \quad \left|\frac{\partial W}{\partial x}\right| < c_4|x|,$$

gdzie

$$\frac{d^oW(x,t)}{dt} \stackrel{df}{=} \frac{d}{dt} W(x(t), t)\Big|_{x(t)=x},$$

gdzie $x(t)$ rozwiązanie równania (2),

jeśli $\left\|\frac{\partial F}{\partial x}\right\|$ jest ograniczona w E_1

w naszym przypadku, gdzie

$$F = Ax + b\varphi(c^T x) \tag{4}$$

związek ten zachodzi bowiem

$$\left\|\frac{\partial F}{\partial x}\right\| \leq \|A\| + |b|\left|\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma}\right| |c| \tag{5}$$

a $\left|\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma}\right|$ jest ograniczona na mocy założenia b.

Przyjmijmy teraz, że

$$V(x,t) = W(x,t)^{\frac{1}{2}}. \tag{6}$$

Wówczas na mocy I i II

$$\frac{d^oV}{dt} \leq - c_4 V. \tag{7}$$

Również z założenia (a) i I wynika, że

$$|\varphi(\sigma)| < M|\sigma| \leqslant M\,|c|\,|x| \leqslant c_3 V, \tag{8}$$

gdzie

$$\frac{M|c|}{\sqrt{c_1}} \leqslant c_3.$$

Zauważmy również, że istnieje

$$R = \sup_{\substack{t>0 \\ X_i \in E_n}} \frac{|V(x_2,t) - V(x_1,t)|}{|x_2 - x_1|} \tag{9}$$

na mocy III jak również

$$\inf_{t>0\,|x|>r} V(x,t) = V_r > 0 \quad \text{dla} \quad r>0 \tag{10}$$

$$V(0,t) \equiv 0. \tag{11}$$

Jeżeli teraz założymy, że proces $|\xi(t,\beta)|$ spełnia prawo wielkich liczb, tzn.

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigwedge_{\delta>0} \bigvee_{T>0} \bigwedge_{t>T} P\left\{\left|\frac{1}{r}\int_{t_o}^{t_o+t} |\xi(s,\beta)|dx - \frac{1}{t}\int_{t_o}^{t_o+t} E|\xi(t,\beta)|\;ds\right|>\delta\right\} < \varepsilon \tag{12}$$

i warunek

$$\sup_{t>0} E|\xi(t,\beta)| < \frac{c_4}{c_3 \cdot R}, \tag{13}$$

to trywialne rozwiązanie układu (1) jest zupełnie stabilne stochastycznie. Jeśli natomiast proces $|\xi(t,\beta)|$ spełnia silne prawo wielkich liczb, tzn.

$$P\left\{\left(\frac{1}{t}\int_{t_o}^{t_o+t} |\xi(t,\beta)|\;ds - \frac{1}{t}\int_{t_o}^{t_o+t} E|\xi(t,\beta)|\;ds\right) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0\right\} = 1 \tag{14}$$

to rozwiązanie układu (1) $x = 0$ jest asymtotycznie stabilne zupełnie z prawdopodobieństwem 1, co wynika z(tw. 5. 1[1] str. 45.)
Udowodniliśmy zatem następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1

Jeżeli dla układu (2) spełnione są warunki (a), (b), (c),(d),(12) oraz (13), to rozwiązanie $x \equiv 0$ układu (1) jest stabilne stochastyczne zupełnie.

Twierdzenie 2

Jeżeli spełnione są wszystkie założenia tw. 1, a zamiast (12) $|\xi(t,\beta)|$ spełnia (14), wówczas rozwiązanie $x \equiv 0$ jest asymptotycznie stochastycznie stabilne z prawdopodobieństwem 1.
Jeśli teraz narzucimy pewne ograniczenie na proces $|\xi(t,\beta)|$, to uzyskamy kryterium p-stabilności.

Twierdzenie 3

Niech dla układu 2 spełnione będą warunki (a), (b), (c), (d), a proces $|\xi(t,\beta)|$ dla pewnych stałych k_1, k_2 i $t>0$ spełnia oszacowanie

$$E \exp k_1 \left\{ \int_0^t |\xi(s,\beta)| \, ds \right\} \leqslant \exp\left\{k_2 \, t\right\}, \tag{15}$$

przy czym stałe k_1, k_2, c_3, c_4, B związane są nierównością

$$B\, k_2\, c_3 \leqslant k_1\, c_4, \tag{16}$$

wtedy rozwiązanie $x \equiv 0$ układu (1) jest p-stabilne przy $p \leqslant \frac{k_1}{B\, c_3}$.

Jeśli spełniona jest silniejsza nierówność

$$B\, k_2\, c_3 < k_1\, c_4, \tag{17}$$

to przy tym samym p rozwiązanie jest eksponencjalnie p-stabilne.

Dowód

Wystarczy pokazać, że spełnione są założenia (tw. 5.2 [1] str.46),które orzeka o p-stabilności.
Na mocy (3), (4), (5) istnieje $V(x,t) \in C_0$ wyrażona poprzez (6),dla której zachodzi (7), (8), (11) oraz na mocy (I) taka stała C', że

$$V(x,t) > C'|x|,$$

a zatem w uzupełnieniu z warunkiem (15), (16) i (17) daje cały komplet założeń twierdzenia 5.2 [1].

CBDO.

Postępując w podobny sposób i wykorzystując wyniki [4] można uzyskać kryteria stabilności dla układów niestacjonarnych. W tym celu rozpatrzmy układ

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \left[b + \xi(t,\beta)\right] \varphi(\sigma,t) \qquad 1'$$

$$\sigma = C^T x$$

$$\varphi(0,t) \equiv 0,$$

gdzie A, b, c są określone tak jak poprzednio, a odnośnie $\varphi(\sigma,t)$ zakłada się, że spełnia warunek twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania układu

$$\frac{dx}{dt} = Ax + b\varphi(\sigma,t) \qquad 2'$$

$$\sigma = C^T x$$

$$\varphi(0,t) = 0$$

i dla wszystkich $t \geq t_0$ i dowolnych σ spełnia nierówność

a) $\quad 0 < \varphi(\sigma,t)\sigma < M\sigma^2 \qquad M < \infty$

zbiór tych funkcji oznaczmy przez N.

Niech będą spełnione następujące założenia:

b') $\left|\frac{\partial\varphi(\sigma,t)}{\partial\sigma}\right|$ istnieje dla każdego σ i $t \geq t_0$ i jest ograniczona

c') układ 2' jest sterowalny i obserwowalny oraz macierze A i $A + Mbc^T$ są macierzami Hurwitza (wartości własne tych macierzy leżą w lewej półpłaszczyźnie)

d') dla każdego $\omega \geq 0$ zachodzi

$$\frac{1}{M} + \operatorname{Re} K(j\omega) > 0,$$

gdzie $K(j\omega) = c^T \left[A - j\omega I\right]^{-1} b,$

wówczas dla układu 2' na mocy tw. [4] słuszne jest oszacowanie

$$|x(x_0,t_0,t)| \leqslant L'|x_0|\ e^{-\alpha(t-t_0)} \qquad t \geqslant t_0,$$

gdzie liczby α i L' nie zależą od wyboru $\varphi \in N$. Dalej postępując identycznie jak w dowodzie tw. 1 otrzymujemy następujące tezy twierdzenia.

Twierdzenie 4

Jeżeli dla układu 2 spełnione są warunki (a'), (b'), (c'), (d') i proces $|\xi(t,\beta)|$ spełnia prawo wielkich liczb oraz warunek

$$\sup_{t>0} E|\xi(t,\beta)| < \frac{c_4'}{B'c_3'}$$

(gdzie stałe c_3', c_4' i B' wprowadza się tak jak w tw. 1), to trywialne rozwiązanie układu 1 jest zupełnie stochastycznie stabilne.

Twierdzenie 5

Jeżeli dla układu 2 spełnione są warunki (a'), (b'), (c'), (d') i proces $|\xi(t,\beta)|$ spełnia silne prawo wielkich liczb oraz warunek

$$\sup_{t>0} E|\xi(t,\beta)| < \frac{c_4}{B\,c_3},$$

to trywialne rozwiązanie układu 1 jest asymtotycznie stochastycznie stabilne z prawdopodobieństwem 1.

Twierdzenie 6

Jeżeli dla układu 2 spełnione będą warunki (a'), (b'), (c'), (d') a proces $|\xi(t,\beta)|$ dla pewnych stałych k_1', k_2' i $t>0$ spełnia oszacowanie:

$$E\exp\left\{k_1\int_0^t|\xi(s,\beta)|\,ds\right\} < \exp\left\{k_2t\right\},$$

przy czym stałe k_1', k_2', c_3', c_4' B' są związane nierównością

$$B'k_2'c_3' < k_1\ c_4,$$

wtedy rozwiązanie $x(t) = 0$ układu (1') jest p-stabilne przy

$$p < \frac{k_1'}{B'c_3'}.$$

Jeżeli spełniona jest silniejsza nierówność

$$B' k_2' c_3' < k_1' c_4',$$

to przy tym samym p rozwiązanie jest ekspenencjalnie p-stabilne.

LITERATURA

1. Chasminskij R.Z.: Ustojcziwost sistiem difleriencjalnych uprawnienii pri słuczajnych wozmuszczeniach ich paramietrow. Izd. Nauka. Moskwa 1969.
2. Jakubowicz W.A.: Rieszienie niekatornych matricznych nierawienstw wstrieczajuszczichsia w nieliniejnoj tieori regulirowania. Dokłady Akademii Nauk ZSRR 156, No 2.
3. Krasowskij N.N.: Niekatoryje zadaczi tieori ustojcziwosti dwiżenia. Fizmatfiz. Moskwa 1959.
4. Piatnickij E.S.: Razszirenie czastnowo kritieria absoliutnoj ustojcziwosti regulirujemych sistiem s odnim nieliniejnym niestacjonarnym elemientom. Radiofizika, No 3, 1972.
5. Lewit M.W.: Czastotnyje usłowia absolutnoj stochasticzieskoj ustojcziwosti sistiem awtomaticzieskowo uprawlienia. Dokłady Akademii Nauk ZSRR 195, No 4, 1970.
6. Liczak M.M., Tunik A.A.: Czastotnyje usłowia stochasticzeskoj ustojcziwosti uprawlajemych sistiem. Awtomatika 1971, No 2.
7. Dutczak B.I., Liczak M.M., Tunik A.A.: Analog czastnowo kriteria W.M. Popowa dla słuczaja stochasticzieskich nieliniejnych niepprierywnych sistiem. Awtomatika 1972, No 1.
8. Morozan T.: The Mettod of V.M. Popov for Control Systems with Random Parameters. J. Math. Anal. Appl. 16, 201-215 (1966).
9. Chris P. Tsokos: The Method of V.M. Popov for differential systems with random parameters. J. Appl. Prob. 8, 298-310 (1971).
10. Kawashima H.: Nonlinear Feedback Systems and Weakly Stationary Stochastic Processes. Information and Control 22, 283-295 (1973).

ЧАСТОТОЧНЫЕ КРИТЕРИИ СТОХАСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИКИ

Р е з ю м е

В работе представлено несколько теорем об устойчивости с вероятностью один и устойчивости в целом для определённого класса нелинейных систем со случайными параметрами.

FREQUENCY CRITERIA OF STOCHASTIC STABILITY
OF SOME NONLINEAR AUTOMATIC

S u m m a r y

In the paper was presented some theorem in which was consider ed the stability with probability one and stability in large for the nonlinear system with rondam porameters.