ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1974

Seria: Automatyka z. 28 Nr kol. 397

Lesław Socha

CZĘSTOTLIWOŚCIOWE KRYTERIA STABILNOŚCI NIELINIOWYCH UKŁADÓW AUTOMATYKI PRZY WYMUSZENIACH PRZYPADKOWYCH

Streszczenie. W pracy przedstawiono częstotliwościowe kryteria stabilności przy stale działających zaburzeniach przypadkowych dla pewnej klasy nieliniowych układów regulacji stacjonarnych i niestacjonarnych.

Wstęp

Zagadnienie stabilności układów równań różniczkowych nieliniowych przy stale działających wymuszeniach przypadkowych były rozważane w [1]. Podano tam między innymi dwa twierdzenia podstawowe dotyczącej tej stabilności w dowodach, których posłużono się funkcją Lapunowa.

W niniejszym artykule przedstawimy w oparciu o wyniki prac [1],[2],[4] częstotliwościowe kryteria stabilności nieliniowych układów automatyki przy wymuszeniach przypadkowych. Najpierw wprowadzimy oznaczenia, którymi będziemy się później posługiwali

$$E_1 = E_n \times I,$$

gdzie

E_n - przestrzeń Euklidesa n-wymiarowa

$I = \{t:\ 0 \leqslant t < \infty\}$

$$|x| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|A\| = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

C_0 - klasa funkcji absolutnie ciągłych względem t spełniających globalny warunek Lipszica.

Rozpatrzmy układ równań

$$\frac{dx}{dt} = Px + q\varphi(\sigma) + R(x,t,\beta) \quad \langle r,x\rangle = \sigma \tag{1}$$

$$\frac{dx}{dt} = Px + q\varphi(\sigma) \quad \langle r,x\rangle = \sigma, \tag{1}$$

gdzie

P - macierz Hurwitza o współczynnikach stałych,

q,r - wektory n-wymiarowe o współczynnikach stałych,

$\varphi(\sigma)$ - funkcja nieliniowa ciągła spełniająca nierówność

$$0 \leqslant \sigma \cdot \varphi(\sigma) \leqslant \mu_0 \sigma^2 \qquad (\mu_0 < -\infty)$$

β - element przestrzeni probabilistycznej $(B,\mathfrak{B},P)$

$R(x,t,\beta)$ proces stochastyczny taki, że dla równania (1) spełnione są warunki twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania.
Załóżmy, że przypadkowy proces

$$\eta(t,\beta) = \sup_x |R(x,t,\beta)| \tag{2}$$

ma skończoną wartość oczekiwaną.

Podamy teraz definicję stabilności przy stale działających zaburzeniach przypadkowych.

Definicja 2

Rozwiązanie $x \equiv 0$ układu (1') jest stabilnie przy stale działających zaburzeniach opisanych równaniem (1), jeśli spełnione jest następujące zdanie logiczne:

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigwedge_{\delta>0} \bigvee_{\gamma>0} (x_0 + \sup E\eta(t,\beta)) < \Rightarrow \bigwedge_{t \geqslant t_0} P\left\{\beta : |x(t,\beta)| > \delta\right\} < \varepsilon,$$

gdzie $x_0 = x(t_0,\beta)$.

Sformułujemy teraz twierdzenie orzekające o stabilności przy stale działających zaburzeniach przypadkowych.

Twierdzenie 1

Niech wartości własne macierzy P położone będą w obszarze

$$\mathrm{Re}\lambda < -\alpha_0 \leqslant 0 \tag{3}$$

$$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}\right| \text{ istnieje i jest ograniczona.} \tag{4}$$

Jeśli dla pewnego V i wszystkich spełniony jest warunek

$$\mu_0^{-1} + \mathrm{Re}\left\{(1 + i\omega V)\, r^T\left[P - (i\omega - \alpha_0)\, I\right]^{-1} q\right\} > 0 \qquad (5)$$

dla równania (1), to rozwiązanie $x \equiv 0$ równania (1) stabilne dla $t \geqslant t_0$ przy małych przypadkowych wymuszeniach.

Dowód

Na mocy twierdzenia 2 w [2] wynika, że zachodzi następujące oszacowanie rozwiązania równania (1') dla dowolnych $t \geqslant t_0$ i pewnego $\alpha > \alpha_0$

$$|x(t,x_0,t_0)| \leqslant k\,|x(t_0)|\, \exp\left[-\alpha(t - t_0)\right], \qquad (6)$$

gdzie stałe k i α są niezależne od x_0 i t_0.

Wtedy (patrz Krasowski [3], str. 72) dla układu (1') istnieje funkcja $W(x,t)$ spełniająca oszacowania

I. $c_1|x|^2 < W(x,t) < c_2|x|^2$

II. $\frac{d^oW}{dt} \leqslant -c_3|x|^2$

III. $\left|\frac{\partial W}{\partial x}\right| < c_4\, x,$

gdzie

$$\frac{d^oW\ x,t}{dt} \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{d}{dt}\, W(x(t),\, t)\Big|_{s(t)=x}.$$

Założenie ograniczoności $\left\|\frac{\partial F}{\partial x}\right\|$ jest spełnione,

gdzie

$$F = Px + q\varphi\left[(r,x)\right] \qquad (7)$$

$$\text{bo } \left\|\frac{\partial F}{\partial x}\right\| < \|P\| + |q|\left|\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma}\right| |r|.$$

Z tych oszacowań wynika, że funkcja $V(x,t) = [W(x,t)]^{\frac{1}{2}}$ spełnia warunki twierdzenia (6.1 str. 50 [1]), tzn. W E_1 istnieje funkcja Lapunowa $V(x,t) \in C_0$ o właściwościach

1. $V(0,t) = 0, \quad V > 0$ przy $\delta > 0$
2. dla każdego $\delta > 0$ istnieje $c_\delta > 0$ takie, że w obszarze $\{|x| > \delta\} x \{t > t_0\}$ spełniona jest nierówność

$$\frac{d^0 V}{dt} < - c_\delta V$$

$$V = \inf_{t>0, |x| > \delta} V(x,t)$$

Na mocy twierdzenia (6.1 str. 50 [1]) rozwiązanie równania 1 $x = 0$ jest stabilne dla $t \geqslant t_0$ przy małych stale działających zaburzeniach przypadkowych (w sensie powyższej definicji)

CBDO.

W podobny sposób można wyprowadzić częstotliwościowe kryterium stabilności dla nieliniowych niestacjonarnych układów automatyki przy stale działających zaburzeniach przypadkowych. W tym celu sformułujemy zagadnienie:

Rozważmy układ regulacji, który opisany jest równaniami

$$\frac{dx}{dt} = Px + q\varphi(\sigma,t) + R(x,t,\beta) \qquad 1^*$$

$$\sigma = \langle r, x \rangle$$

$$\varphi(0,t) = 0,$$

gdzie macierz P i wektory r, q oraz proces $R(x,t,\beta)$ są określone tak jak w równaniu 1.

Odnośnie funkcji $\varphi(\sigma,t)$ zakłada się, że spełnia ona warunki istnienia i jednoznaczności rozwiązań i że dla każdego $t \geqslant t_0$ i dowolnych σ spełnia nierówność

$$0 \leqslant \sigma\varphi(\sigma) \leqslant \mu_0 \sigma^2 \quad \mu_0 < \infty.$$

Sformułujemy teraz twierdzenie.

Twierdzenie 2

Niech układ

$$\frac{dx}{dt} = Px + q\varphi(\sigma,t) \qquad \sigma = (r,x) \qquad 2^*$$

będzie sterowalny i obserwowalny. Niech także dla każdego $\omega \geq 0$ spełniona będzie nierówność

$$\frac{1}{\mu_0} + \mathrm{Re}\left\{r^T(P - i\omega I)^{-1} q\right\} > 0$$

oraz $\left|\frac{\partial\varphi(\sigma)}{\partial\sigma}\right|$ jest ograniczona (istnieje).

Jeśli macierze P i $P + \mu_0 \cdot q \cdot r$ spełniają warunek Hurwica, ro rozwiązanie $x \equiv 0$ 2^* jest stabilne dla $t \geq t_0$ przy małych stale działających przypadkowych zaburzeniach.

Dowód

Na mocy twierdzenia [4] otrzymujemy oszacowanie takie jak w twierdzeniu (1), tzn.

$$|x(x_0,t_0,t)| \leq k|x_0| \, e^{-\alpha(t-t_0)}$$

$$t \geq t_0$$

stałe k, α nie zależą od x_0 i t_0,

a dalej dowód przebiega analogicznie jak w twierdzeniu 1.

LITERATURA

1. Chaśminskij R.Z.: Ustojcziwost sistiem difierienc jalnych urawnienii pri słuczajnych wozmuszczeniach ich paramietrow. Izd. Nauka. Moskwa 1969.
2. Jakubowicz W.A.: Rieszienie niekatorych matricznych nierawienstw wstrieczajuszczichsia w nieliniejnoj tieori regulirowania. Dokłady Akademii Nauk ZSRR 156, No 2.
3. Krasowskij N.N.: Niekatoryje zadaczi tieori ustojcziwosti dwiżenia. Fizmatfiz. Moskwa 1959.
4. Piatnickij E.S.: Razszirenie czastnowo kritieria absoliutnoj ustojcziwosti regulirujemych sistiem s odnim nieliniejnym niestacjonarnym eliemientom. Radiofizika, No 3, 1972.

ЧАСТОТОЧНЫЕ КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИКИ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

Р е з ю м е

В работе представлены частоточные критерия стабильности при постоянно действующих случайных возмущениях для определенного класса нелинейных стационарных и нестационарных систем регулирования.

FREQUENCY CRITERIA OF STABILITY OF NONLINEAR AUTOMATION SYSTEMS WITH SANDOM PARAMETERS

S u m m a r y

In the paper there was presented the theorem in which was consider ed the stability with constantly acting stochastic perturbation for the nonlinear system with rondom parameters.