ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1974
Seria: Automatyka z. 28 Nr kol. 397

Janusz Szopa

O ROZWIĄZYWANIU PEWNEGO TYPU STOCHASTYCZNYCH RÓWNAŃ CAŁKOWYCH

Streszczenie. W pracy rozpatrzono istnienie i jednoznaczność rozwiązania stochastycznego liniowego równania całkowego Volterry II rodzaju. Następnie wyrażono je za pomocą szeregu oraz badano rezolwentę tego równania.

Rozważać będziemy stochastyczne, liniowe równanie Volterry II rodzaju. Ma ono postać

$$x(t,\omega) = h(t,\omega) + \lambda\int_0^t K(t,u,\omega)\, x(u,\omega)du, \tag{1}$$

gdzie

(i) $t \in R_0 = [0,\infty)$;

(ii) $\omega \in \Omega; <\Omega, \mathcal{B}, \mu>$ - przestrzeń probabilistyczna;

(iii) $x: R_0 \times \Omega \to R$ jest nieznanym procesem stochastycznym;

(iv) $h: R_0 \times \Omega \to R$ jest znanym mierzalnym procesem stochastycznym;

(v) $K: R_0 \times R_0 \times \Omega \to R$ jest jądrem - mierzalnym procesem stochastycznym oraz $0 \leqslant u \leqslant t < \infty$

(vi) λ - stała liczba rzeczywista.

Wprowadzamy ([4]) przestrzeń Banacha $C^m (m \geqslant 1)$ wszystkich funkcji mierzalnych $x: R_0 \times \Omega \to R$ takich, że

$$\sup_{t \in R_0} \|x(t,\omega)\|_m < \infty,$$

gdzie

$$\|-\|_m \overset{df}{=} \left\{\int_\Omega |-|^m \, d\mu(\omega)\right\}^{\frac{1}{m}}.$$

Normę w przestrzeni C^m definiujemy następująco:

$$\|x\|_{C^m} \overset{df}{=} \sup_{t \in R_0} \left\{\|x(t,\omega)\|_m\right\}. \tag{2}$$

Niech

$$x_0(t,\omega) = h(t,\omega)$$

$$x_1(t,\omega) = \int_0^t K(t,u,\omega)\, h(u,\omega)\, du$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n(t,\omega) = \int_0^t K(t,u,\omega)\, x_{n-1}(u,\omega)\, du$$

oraz

$$x(t,\omega) \overset{df}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n x_n(t,\omega). \tag{3}$$

Zachodzi następujące twierdzenie:

Twierdzenie: $x(t,\omega)$ zdefiniowane wg (3) jest sumą jednostajnie zbieżnego szeregu i jest jednoznacznym rozwiązaniem równania (1) w przestrzeni C^m, jeżeli:

(i) $0 \le t \le T < \infty$

(ii) $\|h(t,\omega)\|_{C^m} \overset{df}{=} A_m < \infty, h \in C^m$

(iii) $\|K(t,u,\omega)\|_\infty \overset{df}{=} B < \infty$, gdzie $\bigwedge_{t,u} \|K(t,u,\omega)\|_\infty = \inf_{\Omega_0} \left\{ \sup_{\Omega-\Omega_0} |K(t,u,\omega)| \right\}$,

$$P(\Omega_0) = 0.$$

Dowód

Dowód twierdzenia zostanie przeprowadzony w kilku etapach.

1) Dowód jednostajnej zbieżności szeregu (3) w przestrzeni C^m

Zachodzi następujące oszacowanie:

$$\|x_0(t,\omega)\|_{C^m} = \|h(t,\omega)\|_{C^m} = A_m$$

$$\|x_1(t,\omega)\|_{C^m} \le \int_0^t \|K(t,u,\omega)\|_\infty \|h(u,\omega)\|_{C^m}\, du \le BA_m \cdot t$$

$$\|x_2(t,\omega)\|_{C^m} \leq \int_0^t \|K(t,u,\omega)\|_\infty \|x_1(u,\omega)\|_{C^m} \, du \leq B^2 A_m \frac{t^2}{2!}$$

. . . .

$$\|x_n(t,\omega)\|_{C^m} \leq B^n A_m \frac{t^n}{n!},$$

stąd

$$\|x(t,\omega)\|_{C^m} \leq \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda^n| \, \|x_n(t,\omega)\|_{C^m} \leq \sum_{n=0}^{\infty} A_m \frac{(|\lambda|Bt)^n}{n!} \leq$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} A_m \frac{(|\lambda|BT)^n}{n!} < \infty$$

cbdu.

2) Dowód przynależności (3) do przestrzeni C^m

Rozpatrujemy warunek Cauchiego $(n > k)$

$$\left\|\sum_{i=0}^{n} \lambda^i x_i(t,\omega) - \sum_{i=0}^{k} \lambda^i x_i(t,\omega)\right\|_{C^m} \leq \sum_{i=k}^{n} A_m \frac{(|\lambda|BT)^i}{i!}.$$

ostatnia suma z powodu zbieżności szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} A_m \frac{(|\lambda|BT)^n}{n!}$ jest mniejsza od dowolnego $\varepsilon > 0$, jeśli tylko n i k są większe od pewnego $N = N(\varepsilon)$. Ponieważ przestrzeń C^m jest przestrzenią Banacha [4], więc ze spełnienia warunku Cauchiego wynika, że

$$x(t,\omega) \in C^m \quad \text{cbdu.}$$

3) Dowód, że (3) jest rozwiązaniem (1)

Niech

$$y(t,\omega) \stackrel{df}{=} h(t,\omega) + \lambda \int_0^t K(t,u,\omega)\, x(u,\omega)\, du,$$

gdzie $x(u,\omega)$ jest zdefiniowane poprzez (3).

Rozpatrzmy różnicę pomiędzy $y(t,\omega)$ i $\sum_{i=0}^{n} \lambda^i x_i(t,\omega)$.

$$\Big\| y(t,\omega) - \sum_{i=0}^{n} \lambda^i x_i(t,\omega) \Big\|_{C^m} = \Big\| h(t,\omega) + \lambda \int_0^t K(t,u,\omega)\, x(u,\omega)\, du -$$

$$- h(t,\omega) - \sum_{i=1}^{n} \lambda^i \int_0^t K(t,u,\omega)\, x_{i-1}(u,\omega) du \Big\|_{C^m} = \Big\| \lambda \int_0^t K(t,u,\omega) \cdot \Big[x(u,\omega) -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} \lambda^{i-1} x_{i-1}(u,\omega) \Big] du \Big\|_{C^m} \leq |\lambda| TB \Big\| x(u,\omega) - \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^i x_i(u,\omega) \Big\|_{C^m} \longrightarrow 0$$

dla $n \to \infty$.

Czyli $y(t,\omega) = x(t,\omega)$ cbdu.

4) Dowód jednoznaczności rozwiązania

Poprowadzimy go niewprost, zakładając, że istnieją dwa rozwiązania $x(t\omega)$ i $\tilde{x}(t,\omega)$ równania (1).

Wtedy

$$x(t,\omega) = h(t,\omega) + \lambda \int_0^t K(t,u,\omega)\, x(u,\omega)\, du$$

$$\tilde{x}(t,\omega) = h(t,\omega) + \lambda \int_0^t K(t,u,\omega)\, \tilde{x}(u,\omega)\, du.$$

Dla

$$\Psi(t,\omega) \stackrel{df}{=} x(t,\omega) - \tilde{x}(t,\omega) \quad \text{zachodzi}$$

$$\| \Psi(t,\omega) \|_{C^m} \leq |\lambda| \int_0^t \| K(t,u,\omega) \|_{\infty} \| \Psi(u,\omega) \|_{C^m}\, du \leq |\lambda| B \int_0^t \| \Psi(u,\omega) \|_{C^m}\, du.$$

Za $\psi(u,\omega)$ można podstawić

$$\psi(u,\omega) = \lambda \int_0^u K(u,u_1,\omega)\psi(u_1,\omega)\, du_1,$$

czyli

$$\psi(t,\omega) = \lambda^2 \int_0^t \int_0^u K(t,u,\omega)\, K(u,u_1,\omega)\psi(u_1,\omega)\, du_1 du,$$

a po n-razach

$$\psi(t,\omega) = \lambda^n \int_0^t \int_0^u \int_0^{u_1} \cdots \int_0^{u_{n-2}} K(t,u,\omega)\, K(u,u_1,\omega)\, K(u_1,u_2,\omega) \cdots$$

$$K(u_{n-2},u_{n-1},\omega) \cdot \psi(u_{n-1},\omega)\, du_{n-1}\, du_{n-2} \cdots du.$$

Wstawiając do $\|\psi(t,\omega)\|_{C^m} \leqslant B|\lambda| \int_0^t \|\psi(u,\omega)\|_{C^m}\, du$ powyższe wzory otrzymamy

$$\|\psi(t,\omega)\|_{C^m} \leqslant |\lambda|^n\, B^n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \int_0^T \|\psi(u,\omega)\|_{C^m}\, du \to 0 \quad \text{dla} \quad n \to \infty$$

czyli $\psi(t,\omega) \equiv 0$, a więc $x(t,\omega) \equiv \tilde{x}(t,\omega)$
co kończy dowód całego twierdzenia.

Wniosek 1

Jeśli szereg (3) wstawimy do wzoru (1) i zmienimy kolejność całkowania i sumowania (na podstawie jednostajnej zbieżności), to otrzymamy wtedy związek

$$x(t,\omega) = h(t,\omega) + \lambda \int_0^t R(t,u,\lambda,\omega)\, h(u,\omega)\, du, \tag{4}$$

gdzie rezolwenta

$$R(t,u,\lambda,\omega) \stackrel{df}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n K_{n+1}(t,u,\omega)$$

oraz

$$K_1(t,u,\omega) \stackrel{df}{=} K(t,u,\omega)$$

$$K_{n+1}(t,u,\omega) \stackrel{df}{=} \int_0^t K_n(t,s,\omega)\, K(s,u,\omega)\, ds$$

$$n = 1,2, \ldots$$

Wniosek 2

Słuszne jest następujące oszacowanie rezolwenty:

$$\|K_1(t,u,\omega)\|_\infty = \|K(t,u,\omega)\|_\infty < B$$

$$\|K_2(t,u,\omega)\|_\infty \le \int_0^t B\, \|K_1(t,s,\omega)\|_\infty\, ds < B^2 \frac{t}{1!}$$

$$\|K_{n+1}(t,u,\omega)\|_\infty < \int_0^t B\, \|K_n(t,s,\omega)\|_\infty\, ds \le B^{n+1} \frac{t^n}{n!},$$

a stąd

$$\|R(t,u,\lambda,\omega)\|_\infty < \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda|^n B^{n+1} \frac{t^n}{n!} = Be^{|\lambda|Bt} \le Be^{|\lambda|BT}.$$

LITERATURA

1. Smirnow W.I.: Matematyka wyższa, t. IV. PWN, Warszawa 1962.
2. Piskorek A.: Równania całkowe, WNT, Warszawa 1971.
3. Голубенцев А.Н.: Интегральные методы в динамике. Техника, Киев 1967.
4. Ahmed N.U. and Teo K.L.: On the Stability of a Class of Nonlinear Stochastic Systems. Information and Control 20, 1972, 276-293.

О РЕШЕНИИ НЕКОТОРЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Р е з ю м е

В работе рассмотрено стохастическое интегральное уравнение Вольтерры

$$x(t,\omega) = h(t,\omega) + \lambda \int_0^t K(t,u,\omega)\, x(u,\omega)du.$$

Показано существование и однозначность решения.

A NOTE OF A SOLJTION OF THE VOLTERA INTEGRAL EQUATION

S u m m a r y

In this paper was analysed a random integral equation of the Volterra type

$$x(t,\omega) = h(t,\omega) + \lambda \int_0^t K(t,u,\omega)\, x(u,\omega)\, du.$$

Ther were presented the results of existence and uniqueness of the random solution.