ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1974

Seria: Automatyka z. 28 Nr kol. 397

Janusz Szopa

O FUNKCJI KORELACYJNEJ DLA RÓWNANIA VOLTERRY II RODZAJU

Streszczenie. W pracy podano wzory na wartość średnią i funkcję korelacji dla procesu stochastycznego spełniającego równanie całkowe Volterry II rodzaju. Oszacowano błędy, jakie mogą powstać wskutek rozważania skończonej ilości wyrazów w rezolwencie. Otrzymane wyniki zastosowano do równania różniczkowego 2 rzędu.

Rozważać będziemy stochastyczne równanie Volterry II rodzaju, postaci

$$x(t,\omega) = h(t,\omega) + \lambda \int_0^t K(t,u)\, x(u,\omega)\, du, \tag{1}$$

gdzie

(i) $t \in [0,T]$;

(ii) $\omega \in \Omega$; $< \Omega, \mathcal{B}, \mu >$ - przestrzeń probabilistyczna;

(iii) $x: [0,T] \times \Omega \to R$ - nieznany proces stochastyczny;

(iv) $h: [0,T] \times \Omega \to R$ - znany mierzalny proces stochastyczny;

(v) $K: [0,T] \times [0,T] \to R$ - jądro - funkcja mierzalna oraz $0 \leqslant u \leqslant t \leqslant T$; i $|K(t,u)| \leqslant B$

(vi) λ - stała liczba rzeczywista.

Wprowadzamy ([1]) przestrzeń Banacha $C^m (m \geqslant 1)$ wszystkich funkcji mierzalnych $x: [0,T] \times \Omega \to R$ takich, że

$$\sup_{t \in [0,T]} \|x(t,\omega)\|_m < \infty,$$

gdzie

$$\|—\|_m \overset{df}{=} \left\{ \int_\Omega |—|^m \, d\mu(\omega) \right\}^{\frac{1}{m}}.$$

Normę w przestrzeni C^m definiujemy następująco:

$$\|x\|_{C^m} \overset{df}{=} \sup_{t\in[0,T]} \left\{\|x(t,\omega)\|_m\right\}. \tag{2}$$

Rozpatrzymy wartość średnią oraz funkcję korelacji dla procesu stochastycznego $x(t,\omega)$.
Zachodzi

$$E\,x(t,\omega) = Eh(t,\omega) + \lambda \int_0^t R(t,u,\lambda)\, Eh(u,\omega)\, du \tag{3}$$

(na podstawie tw. Fubiniego); $R(t,u,\lambda)$ - rezolwenta, a stąd funkcja korelacji ma postać

$$K_x(t_1,t_2) = E\left\{\left[x(t_1,\omega) - E\,x(t_1,\omega)\right]\cdot\left[x(t_2,\omega) - E\,x(t_2,\omega)\right]\right\} =$$

$$= K_h(t_1,t_2) + \lambda \int_0^{t_1} R(t_1,u_1,\lambda)\, K_h(t_2,u_1)du_1 + \lambda \int_0^{t_2} R(t_2,u_2,\lambda)\cdot$$

$$K_h(t_1,u_2)du_2 + \lambda^2 \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} R(t_1,u_1,\lambda)\, R(t_2,u_2,\lambda)\, K_h(u_1,u_2)du_2\, du_1. \tag{4}$$

W zagadnieniach praktycznych często zdarza się, że nie rozważamy rezolwenty jako sumy nieskończonej, lecz rozważamy sumę skończoną. Oczywiście wprowadza to pewien błąd do wzorów (3) (4), który obecnie postaramy się oszacować.
Niech

$$R(t,u,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n K_{n+1}(t,u)$$

oraz

$$R_m(t,u,\lambda) = \sum_{n=0}^{m} \lambda^n K_{n+1}(t,u), \tag{5}$$

gdzie

$$K_1(t,u) = K(t,u)$$

$$K_{n+1}(t,u) = \int_0^t K_n(t,s)\, K(s,u)\, ds$$

oraz

$$|K_{n+1}(t,u)| \leqslant B^{n+1} \frac{t^n}{n!}.$$

Oszacujemy błąd bezwzględny pomiędzy $R(t,u,\lambda)$ i $R_m(t,u,\lambda)$

$$|R(t,u,\lambda) - R_m(t,u,\lambda)| \leqslant \sum_{n=m+1}^{\infty} |\lambda|^n |K_{n+1}(t,u)| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{n=m+1}^{\infty} B^{n+1} |\lambda|^n \frac{t^n}{n!} \leqslant \sum_{n=m+1}^{\infty} B^{n+1} |\lambda|^n \frac{T^n}{n!}. \tag{6}$$

Jeśli zażądamy, aby błąd bezwzględny był mniejszy od pewnego $\varepsilon > 0$, to z warunku

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} B^{n+1} |\lambda|^n \frac{T^n}{n!} < \varepsilon \tag{7}$$

można znaleźć m, dla którego

$$\bigwedge_{t,u \in [0,T]} |R(t,u,\lambda) - R_m(t,u,\lambda)| < \varepsilon. \tag{8}$$

Przy warunku (8) oszacujemy różnicę pomiędzy wartością przeciętną Ex obliczoną wg wzoru (3)
dla

$R(t,u,\lambda)$ oraz $Ex_{,m}$ - dla $R_m(t,u,\lambda)$.

Zachodzi

$$|Ex(t,\omega) - Ex_{,m}(t,\omega)| \leqslant |\lambda| \int_0^t |R(t,u,\lambda) - R_m(t,u,\lambda)| \cdot |Eh(u,\omega)|\, du \leqslant$$

$$\leqslant |\lambda|\ \varepsilon \int_0^t |Eh(u,\omega)|\, du,$$

bądź też

$$|Ex(t,\omega) - Ex_{,m}(t,\omega)| \leqslant |\lambda| \varepsilon T \sup_{t \in [0,T]} |Eh(t,\omega)|. \tag{9}$$

Gdy dla $\eta > 0$ ma być

$$|Ex(t,\omega) - Ex_{,m}(t,\omega)| < \eta, \tag{10}$$

to z warunku

$$|\lambda|\ \varepsilon T \sup_{t \in [0,T]} |Eh(t,\omega)| < \eta$$

wynika, że musi być

$$\varepsilon < \frac{\eta}{|\lambda| T \sup\limits_{t \in [0,T]} |Eh(t,\omega)|} \tag{11}$$

i $\sup\limits_{t \in [0,T]} |Eh(t,\omega)| \neq 0$ (gdyby supremum było równe zero to,

$$\bigwedge_m Ex_{,m}(t,\omega) \equiv 0 \quad i \quad Ex(t,\omega) \equiv 0),$$

a stąd można obliczyć z (8) m, dla którego jest spełnione (10).
Obecnie przy warunku (8) oszacujemy różnicę pomiędzy wartością funkcji korelacyjnej $K_x(t_1,t_2)$ obliczoną wg wzoru (4) dla $R(t,u,\lambda)$ oraz $K_{x,m}(t_1,t_2)$ - dla $R_m(t,u,\lambda)$.

Zachodzi

$$|K_x(t_1,t_2) - K_{x,m}(t_1,t_2)| \leq |\lambda| \int_0^{t_1} |R(t_1,u_1,\lambda) - R_m(t_1,u_1,\lambda)| \cdot$$

$$\cdot |K_h(t_2,u_1)| du_1 + |\lambda| \int_0^{t_2} |R(t_2,u_2,\lambda) - R_m(t_2,u_2,\lambda)| \cdot |K_h(t_1,u_2)| du_2 +$$

$$+ \lambda^2 \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} |R(t_1,u_1,\lambda) \cdot R(t_2,u_2,\lambda) - R_m(t_1,u_1,\lambda) \cdot R_m(t_2,u_2,\lambda)| \cdot$$

$$\cdot |K_h(u_1,u_2)| du_2 du_1. \tag{12}$$

Jeżeli

$$\bigwedge_{t,u \in [0,T]} |R(t,u,\lambda) - R_m(t,u,\lambda)| < \varepsilon, \text{ to}$$

$$|R(t_1,u_1,\lambda) \cdot R(t_2,u_2,\lambda)| - R_m(t_1,u_1,\lambda) \cdot R_m(t_2,u_2,\lambda)| \leq 2\varepsilon Be^{|\lambda|BT}$$

(dodajemy i odejmujemy $R(t_1,u_1,\lambda) \cdot R_m(t_2,u_2,\lambda)$

oraz korzystamy z warunku $|R_m(t_2,u_2,\lambda)| \leq |R(t_2,u_2,\lambda)| < Be^{|\lambda|BT}$),

stąd

$$|K_x(t_1,t_2) - K_{x,m}(t_1,t_2)| \leq |\lambda| \varepsilon \int_0^{t_1} |K_h(t_2,u_1)| du_1 +$$

$$+ |\lambda| \varepsilon \int_0^{t_2} |K_h(t_1,u_2)| du_2 + 2\lambda^2 \varepsilon B e^{|\lambda|BT} \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} |K_h(u_1,u_2)| du_2 du_1,$$

lub też

$$|K_x(t_1,t_2) - K_{x,m}(t_1,t_2)| \leq |\lambda| \varepsilon B_1(t_1 + t_2) + 2\lambda^2 \varepsilon BB_1 t_1 t_2 e^{|\lambda|BT} \leq$$

$$\leq 2|\lambda| \varepsilon B_1 T + 2\lambda^2 \varepsilon BB_1 T^2 e^{|\lambda|BT}. \tag{13}$$

gdzie $B_1 = \sup\limits_{[0,T]\times[0,T]} K_h(t,u)$

Gdy dla $\varkappa > 0$ ma być

$$\left|K_x(t_1,t_2) - K_{x,m}(t_1,t_2)\right| < \varkappa, \tag{14}$$

to z warunku

$$2|\lambda|\,\varepsilon B T_1 + 2\,\lambda^2\,\varepsilon B B_1 T^2\, e^{|\lambda| BT} < \varkappa$$

wynika, że musi być

$$\varepsilon < \frac{\varkappa}{2|\lambda| B T_1 (1 + |\lambda| B T e^{|\lambda| BT})} \tag{15}$$

a stąd można obliczyć z (8) m, dla którego jest spełnione (14).

Wyprowadzoną zależność dla równań całkowych można wykorzystać w przypadku równań różniczkowych. Rozpatrzmy równanie

$$m(t)\,\ddot{y} + \alpha(t)\,\dot{y} + c(t)\,y = P(t,\omega), \tag{16}$$

gdzie $P(t,\omega)$ jest procesem stochastycznym, a $m(t)$, $\alpha(t)$ i $c(t)$ są funkcjami całkowalnymi i $m(t) \geqslant m_0 > 0$.

Przez podstawienie

$$m(t)\,\ddot{y}(t) \overset{\mathrm{df}}{=} x(t)$$

otrzymamy

$$\dot{y} - \dot{y}_0 = \int_0^t \frac{x(t)}{m(t)}\,dt \tag{17}$$

$$y - \dot{y}_0\, t - y_0 = \int_0^t\!\!\int_0^t \frac{x(t)}{m(t)}\,dt^2 = \int_0^t (t-u)\,\frac{x(u)}{m(u)}\,du,$$

gdzie $y(0) = y_0$, $\dot{y}(0) = \dot{y}_0$.

Równanie (16) przyjmie postać

$$x(t,\omega) = h(t,\omega) - \int_0^t \frac{\alpha(t) + c(t)\,.\,(t-u)}{m(u)}\,x(u,\omega)\,du, \tag{18}$$

gdzie

$$h(t,\omega) = -\left[\alpha(t)\,\dot{y}_0 + c(t)(\dot{y}_0 t + y_0)\right] + P(t,\omega),$$

$$\lambda = -1 \quad \text{i} \quad K(t,u) = \frac{\alpha(t) + c(t)\cdot(t-u)}{m(u)}.$$

Wartość średnia "na wyjściu" ma postać

$$Ey(t,\omega) = E(\dot{y}_0\cdot t) + Ey_0 + \int_0^t (t-u)\,\frac{Ex(u,\omega)}{m(u)}\,du \tag{19}$$

dla losowych warunków początkowych oraz

$$Ey(t,\omega) = \dot{y}_0 t + y_0 + \int_0^t (t-u)\,\frac{Ex(u,\omega)}{m(u)}\,du \tag{20}$$

dla zdeterminowanych warunków początkowych.
($x(u,\omega)$ - spełnia równanie (18)).
Wariancja "na wyjściu" dla zdeterminowanych warunków początkowych ma postać

$$\sigma_y^2 = E(y - Ey)^2 = \int_0^t\int_0^t \frac{(t-u_1)(t-u_2)}{m(u_1)\,m(u_2)}\,K_x(u_1,u_2)\,du_1du_2 \tag{21}$$

($K_x(u_1,u_2)$ - spełnia związek (4) i dla zdeterminowanych warunków początkowych $K_h(u_1,u_2) = K_p(u_1,u_2)$).

Podamy obecnie oszacowanie błędu bezwzględnego dla wartości średniej oraz wariancji "na wyjściu", o ile zamiast $x(t,\omega)$ będziemy rozważań $x_{,m}(t,\omega)$.
Zachodzi wg (20):

$$\left|Ey(t,\omega) - Ey_{,m}(t,\omega)\right| \leqslant \int_0^t (t-u)\,\frac{\left|Ex(u,\omega) - Ex_{,m}(u,\omega)\right|}{m(u)}\,du \leqslant$$

$$\leqslant \frac{t}{m_0}\,\varepsilon T \sup_{t\in[0,T]} |Eh(t,\omega)| \tag{22}$$

gdzie $\quad m_0 = \inf\limits_{t\in[0,T]} m(t) \quad$ i przy zał. $m_0 \neq 0$

Jeśli ma być $|Ey(t,\omega) - Ey_{,m}(t,\omega)| < \nu$,

to wystarczy, aby

$$\varepsilon < \frac{m_0 \nu}{T^2 \sup\limits_{t\in[0,T]} |Eh(t,\omega)|} . \tag{23}$$

Natomiast dla wariancji

$$|\sigma_y^2 - \sigma_{y,m}^2| \leqslant \int_0^t\int_0^t \frac{(t-u_1)(t-u_2)}{m(u_1)\, m(u_2)} |K_x(u_1,u_2) - K_{x,m}(u_1,u_2)| du_1 du_2$$

$$|\sigma_y^2 - \sigma_{y,m}^2| \leqslant 2\varepsilon BT(1 + BTe^{BT}) \frac{1}{m_0^2} T^4. \tag{24}$$

Jeśli żądamy, aby $|\sigma_y^2 - \sigma_{y,m}^2| < \delta$ to wystarczy, aby

$$\frac{2\, BT^5 \varepsilon (1 + BTe^{BT})}{m_0^2} < \delta$$

$$\varepsilon < \frac{\delta m_0^2}{2\, BT^5(1 + BTe^{BT})} , \tag{25}$$

a wg (7)

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} B^{n+1} \frac{T^n}{n!} < \varepsilon,$$

czyli

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{(BT)^n}{n!} = e^{BT} - \sum_{n=0}^{m} \frac{(BT)^n}{n!} < \frac{\varepsilon}{B},$$

ponadto

$$e^{BT} = 1 + \frac{BT}{1!} + \ldots + \frac{(BT)^m}{m!} + \frac{(BT)^{m+1}}{(m+1)!} e^{\Theta BT}$$

i $\Theta \in (0,1)$,

stąd

$$\frac{(BT)^{m+1}}{(m+1)!}\, e^{\Theta BT} < \frac{(BT)^{m+1}}{(m+1)!}\, e^{BT} < \frac{\varepsilon}{B}. \tag{26}$$

Ostatecznie z (25) i (26) wynika, że

$$\frac{(BT)^{m+1}}{(m+1)!} < \frac{\delta m_o^2}{2\, BB_1T^5(1 + BTe^{BT})\, e^{BT}}. \tag{27}$$

Na podstawie tej nierówności można dobrać m tak, żeby był spełniony związek $\left|\sigma_y^2 - \sigma_{y,m}^2\right| < \delta$.

LITERATURA

1. Ahmed N.U. and Teo K.L.: On the Stability of a Class of Nonlinear Stochastic Systems, Information and Control 20, 1972, 276-293.
2. Skalmierski B., Tylikowski A.: Procesy stochastyczne w dynamice, PWN, Warszawa 1972.
3. Smirnow W.I.: Matematyka wyższa, t. IV, PWN, Warszawa 1962.
4. Piskorek A.: Równania całkowe, WNT, Warszawa 1971.

О КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРЫ

Р е з ю м е

В работе выведены формулы для среднего значения и корреляционной функции стохастического процесса отвечающего уравнению Вольтерры. Определены ошибки которые могут возникать при этом. Полученные результаты были применены к дифференциальному уравнению.

A NOTE OF THE COVARIANCE FUNCTION OF THE VOLTERRA EQUATION

S u m m a r y

In this paper the patterns of the expectation and the covariance function of the random integral equation of the Volterra type were presented. These patterns were applied to the differential equations.