ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1974

Seria: Automatyka z. 28 Nr kol. 397

Andrzej Tylikowski

# STABILNOŚĆ ROZWIĄZAŃ UKŁADÓW DYNAMICZNYCH OPISANYCH STOCHASTYCZNYMI PÓŁLINIOWYMI RÓWNANIAMI CZĄSTKOWYMI

Streszczenie. W pracy sformułowano i udowodniono twierdzenie podające dostateczne warunki jednostajnej stabilności stochastycznej układów dynamicznych o stałych rozłożonych (ciągłych) opisanych półliniowymi równaniami różniczkowymi o pochodnych cząstkowych. W dowodzie korzystano ze stochastycznego analogonu metody bezpośredniej Lapunowa i supermartyngałowej własności funkcjonałów od rozwiązania równania. W charakterze przykładu przeanalizowano stabilność rozwiązania stochastycznego równania dyfuzji.

## 1. Wstęp

Wiele układów dynamicznych występujących w różnych gałęziach techniki można dobrze opisać równaniami cząstkowymi o pochodnych cząstkowych. Są to np. reaktory chemiczne i jądrowe, wymienniki ciepła, długie rurociągi transportujące ciecz, sieć wentylacyjna, duże konstrukcje mechaniczne, elektryczne linie długie. W praktyce układy te poddane są działaniu pewnych zaburzeń, których wielkość i rozkład nie są zdeterminowane. Analiza ilościowa dynamiki stochastycznych układów o stałych rozłożonych jest trudna i pracochłonna. Stąd we współczesnych badaniach rozwijane są metody analizy jakościowej, a między innymi stabilności. Wadą dotychczasowych metod badania stabilności stochastycznych układów o stałych rozłożonych [4, 5, 6] i twierdzeń podających warunki dostateczne stabilności był brak matematycznego określenia klasy równań, do których wolno stosować te metody, jak również brak dowodu istnienia i jednoznaczności rozwiązań. Lukę tę częściowo wypełnił Kushner [1, 2] definiując cząstkowe równanie stochastyczne, podobnie do równań stochastycznych Ito [7]. Niniejsza praca jest próbą opracowania nowej metody badania stochastycznej stabilności równań cząstkowych, będącej uogólnieniem bezpośredniej metody Lapunowa, opartej na supermartyngałowej własności funkcjonałów od rozwiązania równania stochastycznego oraz formule Ito. Rozważania teoretyczne ilustruje przykład badania stabilności parabolicznego równania opisującego dyfuzję ciepła (masy, strumienia neutronów) przy obecności stochastycznych zakłóceń.

## 2. Matematyczne preliminaria

Rozpatrzmy dynamiczny układ opisany półliniowym stochastycznym równaniem cząstkowym o budowie

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - L\,u(t,x) = f(x,u,\nabla_x u)\,\frac{dw(t)}{dt}, \tag{1}$$

$$(t,x)\in C \equiv \{t:\ 0\leqslant t<T\}\times D,\quad D\subset R^N,$$

z deterministycznymi warunkami brzegowymi i początkowymi

$$\begin{aligned} &u(0,x) = \phi(x), \quad x\in\partial D,\\ &u(t,\partial D) = 0, \quad t\in[0,T), \end{aligned} \tag{2}$$

gdzie $\nabla_x = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial u}{\partial x_N}\right)$,

$w(t)$ jest stochastycznym procesem Wienera (jednorodnym normalnym ciągłym procesem o przyrostach niezależnych i wariancji proporcjonalnej do czasu $t$), $\frac{dw(t)}{dt}$ jest formalną pochodną zwaną w zastosowaniach "białym szumem", $L$ jest liniowym operatorem eliptycznym o budowie

$$L(.) = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(t,x)\,\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(t,x)\,\frac{\partial}{\partial x_i} + c(t,x), \tag{3}$$

którego współczynniki są ciągłe wg Höldera, to znaczy

$$\bigvee_{K>0}\ \bigvee_{\alpha>0}\ |\beta(t,x) - \beta(t+\Delta,x+\delta)| \leqslant K\left[|\Delta|^{\alpha}+|\delta|^{\alpha}\right].$$

W podobny sposób jak Kushner [1] dla równań liniowych o budowie

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - L\,u(t,x) = f(x,t)\,\frac{dw(t)}{dt}$$

posługując się twierdzeniami Friedmana i własnym lematem [2] wykazał istnienie i jednoznaczność rozwiązania, można korzystając z teorii równań półliniowych wykazać istnienie i jednoznaczność rozwiązania równania (1). Potrzeba w tym celu ciągłości wg Höldera współczynników operatora $L$ względem $t$ i $x$ oraz funkcji $f$ względem $u$ i $\nabla_x u$. Korzystając z pojęcia całki stochastycznej i funkcji Greena $G(x,x';t,t')$ zagadnienia brzegowego (1), (2) przy $f \equiv 0$, równanie (1) można zapisać w postaci równania całkowego

$$u(t,x) = \int_D G(x,x';t,0)\,\phi(x')\,dx' + \int_0^t dw(t') \int_D G(x,x';t,t')\,f(x',u(t',x'),\nabla_{x'}u(t',x'))\,dx', \tag{3}$$

lub w postaci różniczkowej Ito

$$du(t,x) = L\,u(t,x)\,dt + f\,dw(t). \tag{4}$$

Zakładamy, że $f(x,0,0) \equiv 0$, to jest, że $u(t,x) \equiv 0$ jest rozwiązaniem trywialnym równania (1).

Będziemy mówić, że rozwiązanie trywialne równania (1) jest jednostajnie stochastycznie stabilne względem norm spełniających warunek ciągłości

$$\bigwedge_{\varepsilon>0}\ \bigvee_{r>0}\ \|u\|_0 < r \Rightarrow \|u\| < \varepsilon,$$

jeżeli prawdziwe jest następujące zdanie logiczne

$$\bigwedge_{\varepsilon>0}\ \bigwedge_{\delta>0}\ \bigvee_{r>0}\ \|u(0,x)\|_0 < r \Longrightarrow P\left\{\sup_{t>0} \|u(t,x)\| > \varepsilon\right\} < \delta. \tag{5}$$

3. <u>Twierdzenie</u>

Jeżeli istnieje fukcjonał $V(t,u)$ o następujących własnościach (i) dodatniookreślony względem normy $\|.\|$

$$V(t,u) \geqslant 0 \wedge V(t,0) \equiv 0 \wedge \bigwedge_{\varepsilon>0}\ \bigvee_{\delta>0}\ \|u\| > \varepsilon \Rightarrow V(t,u) > \delta,$$

(ii) ciągły względem normy $\|\cdot\|_0$

$$\bigwedge_{\varepsilon>0}\ \bigvee_{r>0}\ \|u\|_0 < r \Longrightarrow V(t,u) < \varepsilon,$$

(iii) funkcjonał $V(\tau_r(t), u(\tau_r(t),x))$ jest supermartyngałem względem $\sigma$ - ciała zdarzeń generowanych zdarzeniami, które zaszły do chwili $s>t$, to jest

$$E\left[V(\tau_r(t), u(\tau_r(t),x)) \mid N_s\right] < V(x,u(x,x)),$$

gdzie $\tau_r(t) = \min\{\tau_r, t\}$, $\tau_r$ jest momentem pierwszego wyjścia procesu $u(t,x)$ z kuli $U$ o promieniu $r$, określonej za pomocą normy

$$U \equiv \left\{u(t,x) : \|u(t,x)\| < r\right\},$$

to rozwiązanie trywialne równania (1) jest jednostajnie stochastycznie stabilne.

Dowód

Oznaczmy przez $V_r = \inf\limits_{\|u\|>r,\ t>0} V(t,u)$ dodatnie na podstawie założenia (i).
Na podstawie nierówności Czebyszewa mamy

$$P\left\{\sup_{s<\xi<t} \|u(\xi,x)\| > r\right\} \leq E\left[V(\tau_r(t), u(\tau_r(t),x))\right]/V_r.$$

Przejście do granicy $t\to\infty$ i wykorzystanie założenia (iii) daje

$$P\left\{\sup_{\xi>s} \|u(\xi,x)\| > r\right\} \leq V(s,u)/V_r.$$

Uwzględnienie założenia (i) $(V(s,0) = 0)$ kończy dowód.

Uwaga

Jeżeli funkcjonał $V$ określony jest wzorem

$$V(t,u) = \int_D F(t,u)\, dx, \tag{6}$$

to warunek (iii) twierdzenia jest spełniony, gdy dla $u(t,x)$ takich, że $\|u(t,x)\| \neq 0$ zachodzi nierówność

$$\int_D \left[\frac{\partial F(t,u)}{\partial t} + \frac{\partial F(t,u)}{\partial u} Lu + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F(t,u)}{\partial u^2} f^2\right] dx \leq 0. \tag{7}$$

Wynika to bezpośrednio z formuły Ito zastosowanej do wyrażenia podcałkowego w nierówności (7)

$$d\,V(t,u) = d\int_D F(t,u)\,dx = \int_D dF(t,u)\,dx =$$

$$= \int_D \left[\left(\frac{\partial F(t,u)}{\partial t} + \frac{\partial F(t,u)}{\partial u}\,Lu + \frac{\partial^2 F(t,u)}{\partial u^2}\,f^2\right) dt + \frac{\partial F(t,u)}{\partial u}\,f\,dw(t)\right] dx.$$

Całkując otrzymujemy

$$V(\tau_r(t),\ u(\tau_r(t),x)) - V(s,u(s,x)) =$$

$$= \int_D \int_s^{\tau_r(t)} \left[\frac{\partial F(t,u)}{\partial t} + \frac{\partial F(t,u)}{\partial u}\,Lu + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 F(t,u)}{\partial u^2}\,f^2\right] dt\,dx +$$

$$+ \int_D \int_s^{\tau_r(t)} \frac{\partial F(t,u)}{\partial u}\,f\,dw(t)\,dx.$$

Uśredniając i wykorzystując założenie (7) mamy założenie (iii).

Przykład

Zajmijmy się jednowymiarowym parabolicznym równaniem opisującym dyfuzję ciepła w jednowymiarowym pryzmatycznym ciele, którego wymiary poprzeczne można pominąć w porównaniu z długością. Zakładamy, że ciepło jest wymieniane na pobocznicy wg prawa Newtona. Początek i koniec pręta jest utrzymywany w stałej temperaturze równej zero. Temperatura otoczenia jest szerokopasmowym procesem stochastycznym.

Równanie opisujące rozkład temperatury po przejściu na wielkości bezwymiarowe ma budowę

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + c\,u(t,x) + c_1\,u(t,x)\,\frac{dw(t)}{dt},\ x \in (0,1), \tag{8}$$

$$u(t,0) = u(t,1) = 0,$$

lub w postaci Ito

$$du(t,x) = \left(\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + c\, u(t,x)\right) dt + u(t,x)\, c_1\, dw(t). \tag{9}$$

Wybierzmy funkcjonał o budowie

$$V(u) = \int_0^1 u^2(t,x)\, dx, \tag{10}$$

a w charakterze norm

$$\|u(t,x)\|_0 = \|u(t,x)\| = \sqrt{V(u)}. \tag{11}$$

Pochodna funkcjonału wzdłuż trajektorii równania (9) przedstawia się wzorem

$$dV(u) = \int_0^1 d\, u^2(t,x)\, dx = \int_0^1 \left[2\, u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + cu\right) + c_1^2\, u^2\right] dt\, dx +$$

$$+ \int_0^1 2\, u^2\, c_1\, dw(t)\, dx.$$

Uśredniając mamy

$$E[dV(u)] = \int_0^1 \left[(2c + c_1^2)\, u^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right] dx\, dt. \tag{12}$$

Na podstawie warunków brzegowych można napisać nierówność

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx \geqslant \pi^2 \int_0^1 u^2\, dx, \tag{13}$$

Wykorzystując nierówność (13) w zależności (12) na podstawie warunku (7) twierdzenia mamy

$$E[dV(u)] \leqslant -(\pi^2 - 2c - c_1^2) \int_0^1 u^2\, dx,$$

zatem kryterium stabilności rozwiązania trywialnego równania (8) względem norm (11) ma budowę jak następuje

$$\pi^2 \geqslant 2c + c_1^2. \tag{14}$$

Warto podkreślić, że metodę tę można stosować w przypadku niejednorodnych stałych materiałowych

$$c = c(x), \quad c_1 = c_1(x).$$

Wówczas kryterium stabilności ma budowę

$$\int_0^1 (\pi^2 - 2c - c_1^2)\, u^2\, dx \geqslant 0.$$

Metoda zaprezentowana w pracy posiada przewagę nad pośrednią metodą Wanga [6] wykorzystującą wykładnicze oszacowanie normy operatora półgrupowego rozwiązania i zastosowaną do badania stabilności stochastycznej rozwiązania równania przewodnictwa ciepła.

## LITERATURA


1. Kushner H.J.: On the Optimal Control of a System Governed by a Linear Parabolic Equation with White Noise Inputs, SIAM Journal on Control, Vol. 6, 1968, No 4, str. 596-614.
2. Kushner H.J.: Filtering for Linear Distributed Parameter Systems, SIAM Journal on Control, Vol. 8, 1970, No 3, str. 346-359.
3. Friedman A.: Partial Differential Equations of Parabolic Type, Prentice Hall, New York, 1964, rozdz. VII.
4. Skalmierski B., Tylikowski A.: Stabilność układów dynamicznych, PWN, Warszawa 1973.
5. Tylikowski A.: Stabilność stochastyczna ciągłych układów dynamicznych, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, seria "Automatyka", z.20, 1973.
6. Wang P.K.C.: On the Almost Sure Stability of Linear Stochastic Distributed Parameter Dynamical Systems, Trans. ASME, ser. E, Vol. 33, No 1, 1966, str. 182-186.
7. Гихман И.И., Скороход А.В.: Стохастические дифференциальные уравнения, Наукова Думка, Киев, 1968.

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ОПИСАННЫХ ПОЛУЛИНЕЙНЫМИ СТОХАСТИЧЕСКИМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Р е з ю м е

В статье сформулирована и доказана теорема обеспечивающая достаточные условия равномерной стохастической устойчивость динамических систем с распределёнными параметрами описанных полулинейными параболическими уравнениями с частными производными.
В доказательстве была использована стохастическая аналогия прямого метода Ляпунова и то что функционал от решений стохастического уравнения есть супермартингалом. В качестве примера рассмотрена устойчивость решения стохастического уравнения диффузии.

STABILITY OF DYNAMICAL SYSTEMS DESCRIBED BY SEMILINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

S u m m a r y

In the paper the theorem which yields sufficient conditions for analysing uniform stochastic stability of continuous dynamical systems described by semilinear partial differential equations has been proved. The stochastic analogy of direct Liapunov's method was applied. Further analysis was based on the assumption that functional of solution of stochastic equation is supermartingales. The method is applied to the stability problem of stochastic diffusion, e.g. to the stability of temperature distribution in the thin rod with random external temperature.