ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1975

Seria: AUTOMATYKA z. 30 Nr kol. 447

Andrzej Świerniak
Instytut Kompleksowych Systemów Sterowania

O PEWNYCH ZAGADNIENIACH ZWIĄZANYCH Z DYSKRETNĄ ZASADĄ MAKSIMUM

Streszczenie. W pracy przedstawiono wyprowadzenie dyskretnej wersji zasady maksimum przy pomocy klasycznego rachunku różniczkowego oraz na podstawie zasady optymalności Bellmana. Omówione sposoby w ogólnym przypadku nie dają warunków słabszych niż spotykane zazwyczaj metody wariacyjne, są natomiast bardziej poglądowe i prostsze.

1. Wprowadzenie

O ile zasada maksimum Pontriagina dla układów ciągłych zdobyła sobie pozycję jednej z najefektywniejszych (obok programowania dynamicznego) metod optymalizacji dynamicznej, o tyle jej wersja dyskretna jest rzadziej stosowana. Jedną z przyczyn tego faktu jest okoliczność, że silna zasada maksimum jest zawsze prawdziwa dla układów ciągłych, natomiast obowiązuje ona tylko w pewnych szczególnych przypadkach dla układów dyskretnych. Lokalny charakter koniecznych warunków optymalności dyskretnej wersji zasady maksimum stwarza dodatkowe trudności i ograniczenia w jej praktycznym zastosowaniu. W wielu jednak wypadkach zwłaszcza dla procesów, dla których hamiltonian posiada jedno ekstremum, rezultaty są bardzo zachęcające [1], często znacznie korzystniejsze od otrzymanych drogą programowania dynamicznego. Dyskretna zasada maksimum pozwala bowiem, przy wzroście wymiarowości wektora stanu uniknąć wykładniczego wzrostu zajmowanego obszaru pamięci oraz skraca czas obliczeń.

Zastosowanie zasady maksimum do układów dyskretnych zostało przedstawione przez Changa [2], [3] w oparciu o pierwsze wariacje. Podobny sposób obrał Katz [4], przy czym dokonane przez niego próby wzmocnienia dyskretnej zasady maksimum nie zawsze były ścisłe, jak wykazali Horn i Jackson [5]. Opierając się na wyprowadzeniu Katza, Fan i Wang [1] zastosowali dyskretną wersję zasady maksimum do układów złożonych. Denn i Aris [6] wykorzystując tożsamość Greena przedstawili dowód dyskretnej zasady maksimum, wskazując jednocześnie, że silna jej wersja obowiązuje dla układów jednowymiarowych oraz dla układów liniowych względem wektora stanu. Przy tym stanowi ona warunek konieczny i wystarczający optymalności o ile zależność od sterowania daje się odseperować, tzn. w równaniu stanu o postaci $x(k+1) = Ax(k) + f(u(k))$ dla $k = 0,1,\ldots,N-1$, A nie zależy od wektora sterowań $u(k)$. Propoj [7] podaje dowód dyskretnej zasady maksi-

mum, żądając wypukłości zbiorów osiągalnych dla otrzymania warunków globalnej optymalności. Jest to oczywiście warunek bardzo silny i na ogół trudny do sprawdzenia.

W ogólnym więc przypadku można korzystać jedynie z dyskretnej zasady maksimum w jej słabej wersji, którą można by sformułować jak następuje:

Dany jest układ opisany równaniami

$$x(k+1) = f(x(k),\ u(k)) \qquad k = 0,1,\ldots,N-1 \tag{1}$$

o funkcji celu

$$\max_{u} J(N) = \sum_{k=0}^{N-1} \Phi(x(k),\ u(k)), \tag{2}$$

gdzie:

x - n wymiarowy wektor stanu,

u - r wymiarowy wektor sterowań,

f - n wymiarowa funkcja klC^1,

Φ - jest funkcją klC^1.

Warunkiem koniecznym optymalności ciągu sterowań u(k) jest, by hamiltonian

$$H(k+1) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i(k+1)\, f_i\,|x(k),u(k)| + \Phi|x(k),u(k)| \qquad k = 0,1,\ldots,N-1$$

spełniał dla tych sterowań zależność $\frac{\partial H(k+1)}{\partial u(k)} = 0$ lub $H(k+1)=\max$, przy ustalonym $\psi(k)$ i $x(k)$. $\psi(k)$ jest n wymiarowym wektorem sprzężonym określonym przez równania:

$$\Phi(k) = \frac{\partial H(k+1)}{\partial x(k)} \qquad k = 0,1,\ldots,N-1 \tag{3}$$

Warunki brzegowe dla równań (1) i (3) zależą od konkretnego zadania. (Dla najczęściej spotykanego zadania ze swobodnym prawym końcem mają postać $x(o) = a$, $\psi(N) = 0$). Bardzo często przyjmuje się wskaźnik jakości w postaci

$$J(N) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i(N) \tag{4}$$

Wówczas warunek brzegowy dla wektora sprzężonego ma postać $\psi_i(N) = c_i$ dla $i = 1,2,\ldots,n$, a hamiltonian

$$H(k+1) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i(k+1)\, f_i(x(k),u(k)) \qquad k = 0,1,\ldots,N-1$$

Zresztą do postaci (4) można sprowadzić również funkcję celu (2), wprowadzając dodatkową składową wektora stanu

$$x_o(k+1) = \sum_{m=0}^{k} \psi(x(m),\, u(m)) \qquad k = 0,1,\ldots,N-1$$

Składowej tej odpowiada zatem równanie:

$$x_o(k+1) = x(k) + \psi(x(k),\, u(k)) \qquad k = 0,1,\ldots,N-1$$

i warunek brzegowy $x_o(0) = 0$

Wówczas

$$c_i = 0 \quad \text{dla} \quad i = 1,2,\ldots,n$$

$$c_i = 1 \quad \text{dla} \quad i = 0.$$

Dyskretną wersję zasady maksimum można wyprowadzić również opierając się na klasycznym rachunku różniczkowym lub na zasadzie optymalności Bellmana. Wyprowadzenia te są mniej skomplikowane, a jednocześnie wskazują na związek omawianej metody z dyskretnym programowaniem dynamicznym.

2. Wyprowadzenie dyskretnej zasady maksimum za pomocą klasycznego rachunku różniczkowego

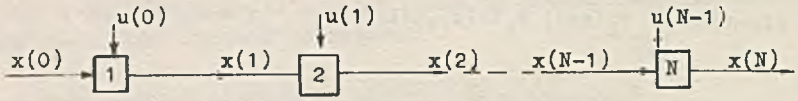
Dany jest układ (rys. 1), którego stan opisują równania

$$x(k+1) = f(x(k),\, u(k)) \qquad k = 0,1,\ldots,N-1 \tag{1}$$

z warunkiem brzegowym $x(0) = a$, a wskaźnik jakości ma postać

$$J(N) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i(N) \tag{4}$$

Nie zmienia to, jak wykazano, uniwersalności zagadnienia. Podobnie w równaniach (1) uwzględnienie zależności funkcji f od numeru etapu nie stwarza trudności [4]



Rys. 1

Aby wskaźnik jakości J(N) osiągał lokalne maksimum dla wektora sterowań u(k) bez ograniczeń, konieczne jest spełnienie związku:

$$\frac{\partial J(N)}{\partial u_s(k)} = 0 \quad \text{dla} \quad \begin{array}{l} k = 0,1,\ldots,N-1 \\ s = 1,2,\ldots,r \end{array} \tag{5}$$

Traktując J(N) jako funkcję złożoną, otrzymuje się:

$$\frac{\partial J(N)}{\partial u_s(k)} = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{\partial x_i(N)}{\partial u_s(k)} = \sum_{i=1}^{n} c_i \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(x(N-1),u(N-1))}{\partial x_j(N-1)} \times$$

$$\times \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial f_j(x(N-2),u(N-2))}{\partial x_m(N-2)} \times$$

$$\times \ldots \times \sum_{t=1}^{n} \frac{\partial f_l(x(k+1),u(k+1))}{\partial x_t(k+1)} \cdot \frac{\partial f_t(x(k),u(k))}{\partial u_s(k)} =$$

$$= \sum_{t=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} \ldots \sum_{l=1}^{n} c_i \frac{\partial f_i(x(N-1),u(N-1))}{\partial x_j(N-1)} \cdot \frac{\partial f_j(x(N-2),u(N-2))}{\partial x_m(N-2)} \ldots$$

$$\ldots \frac{\partial f_l(x(k+1),u(k+1))}{\partial x_t(k+1)} \cdot \frac{\partial f_t(x(k),\ u(k))}{\partial u_s(k)} \tag{6}$$

po podstawieniu

$$\psi_t(k+1) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} \ldots \sum_{l=1}^{n} c_i \frac{\partial f_i(x(N-1),u(N-1))}{\partial x_j(N-1)} \cdot \frac{\partial f_j(x(N-2),u(N-2))}{\partial x_m(N-2)} \times$$

$$\times \ldots \times \frac{\partial f_l(x(k+1),u(k+1))}{\partial x_t(k+1)} \tag{7}$$

(6) przyjmuje postać:

$$\sum_{t=1}^{n} \psi_t(k+1) \frac{\partial f_t(x(k),u(k))}{\partial u_s(k)} = 0 \qquad s = 1,2,\ldots,r \qquad k = 0,1,\ldots,N-1 \tag{8}$$

Warunek maksymalizacji wskaźnika jakości $J(N) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i(N)$ pociąga więc za sobą warunek stacjonarności funkcji

$$H(k+1) = \sum_{t=1}^{n} \psi_t(k+1)\, f_t(x(k),u(k)) \tag{9}$$

względem wektora sterowań dla $k = 0,1,\ldots,N-1$, przy ustalonym $x(k)$ i $\psi(k+1)$.

Równanie (7) definiuje wektor sprzężony, który, jak łatwo zauważyć, spełnia równanie:

$$\psi_t(k) = \sum_{l=1}^{n} \psi_l(k+1) \frac{\partial f_l(x(k),u(k))}{\partial x_t(k)} \qquad t = 1,2,\ldots,n \qquad k = 0,1,\ldots,N-1 \tag{10}$$

i warunek brzegowy

$$\psi_t(N) = c_t \qquad t = 1,2,\ldots,n$$

Z (7), po podstawieniu $k = N-1$, otrzymuje się bowiem

$$\frac{\partial J(N)}{\partial u_s(N-1)} = \sum_{t=1}^{n} c_t \frac{\partial f_t(x(N-1),u(N-1))}{\partial u_s} = \sum_{t=1}^{n} \psi_t \frac{\partial f_t(x(N-1),u(N-1)}{\partial u_s}$$

Ponieważ równanie (9) definiuje hamiltonian dla rozważanego zadania, otrzymane warunki są równoważne dyskretnej wersji zasady maksimum dla zagadnienia bez ograniczeń.

W przypadku ograniczeń narzuconych na sterowanie np.: w postaci $g_j(u) \geqslant 0$ $j = 1,2,\ldots,m$, gdzie $g_j(u)$ są funkcjami ciągłymi, można wykorzystać twierdzenie Kuhna-Tuckera i wprowadzić mnożniki Lagrange'a $\lambda_j(k)$ $j = 1,2,\ldots,m$, $k = 0,1,\ldots,N-1$. Wówczas w miejsce (8) otrzyma się:

$$\sum_{t=1}^{n} \psi_t(k+1) \frac{\partial f_t(x(k),u(k))}{\partial u_s(k)} + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{\partial g_j(u(k))}{\partial u_s(k)} = 0 \tag{11}$$

$k = 0,1,\ldots,N-1$

$s = 1,2,\ldots,r,$

przy czym mnożniki $\lambda_j(k) \geqslant 0$ spełniają warunek

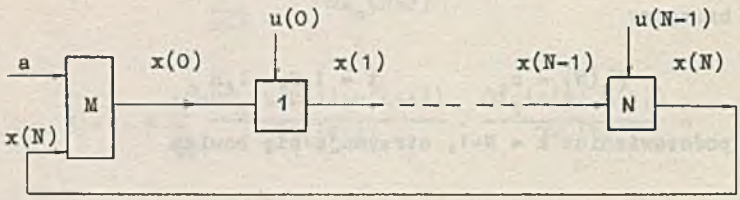
$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j(k)\, g_j(u(k)) = 0 \quad \text{dla} \quad k = 0,1,\ldots,N-1 \tag{12}$$

Można też rozpatrywać, w przypadku ograniczeń na wektor sterowań, oprócz warunku stacjonarności hamiltonianu, warunek jego maksymalności na ograniczeniach. Odpowiada to brzmieniem wersji dyskretnej zasady maksimum. Wynika to zresztą z przytoczonego wyżej rozumowania przy rozważeniu znaku pochodnych jednostronnych wskaźnika jakości i hamiltonianu względem sterowań na ograniczeniach. Wówczas w związkach (5) i (8), znak równości zostaje zastąpiony znakiem słabej nierówności.

Podobnie można otrzymać warunki brzegowe dla zmiennej sprzężonej w wypadku innych warunków brzegowych dla wektora stanu, np. dla układów ze sprzężeniem zwrotnym strumieniowym (rys. 2), w których

$$x(0) = M(a,x(N)), \tag{13}$$

gdzie $M \in C^1$



Rys. 2

Wówczas:

$$\frac{\partial J(N)}{\partial u_s(N-1)} = \sum_{t=1}^{n} c_t \frac{\partial x_t(N)}{\partial u_s(N-1)} = \sum_{t=1}^{n} c_t \frac{\partial f_t(x(N-1),u(N-1))}{\partial u_s(N-1)} +$$

$$+ \sum_{m=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_m \frac{\partial f_m(x(N-1),u(N-1))}{\partial x_i(N-1)} \cdots \frac{\partial f_l(x(0),u(0))}{\partial x_j(0)} \times$$

$$\times \frac{\partial M_j(a,x(N))}{\partial x_t(N)} \frac{\partial f_t(x(N-1),u(N-1))}{\partial u_s(N-1)} =$$

$$= \sum_{t=1}^{n} \left[c_t + \sum_{j=1}^{n} \psi_j(0) \frac{\partial M_j(a,x(N))}{\partial x_t(N)} \right] \frac{\partial f_t(x(N-1),u(N-1))}{\partial u_s(N-1)} = 0$$

a z drugiej strony

$$\sum_{t=1}^{n} \psi_t(N) \frac{\partial f_t(x(N-1),u(N-1))}{\partial u_s(N-1)} = 0$$

Wynika stąd, że

$$\psi_t(N) = c_t + \sum_{j=1}^{n} \psi_j(0) \frac{\partial M_j(a,x(N))}{\partial x_t(N)} \qquad t = 1,2,\ldots,n \tag{14}$$

3. Dyskretna zasada maksimum a zasada optymalności Bellmana

Dany jest układ opisany równaniami:

$$x(k+1) = f(x(k),u(k)) \qquad k = 0,1,\ldots,N-1 \tag{1}$$

z warunkiem brzegowym $x(0) = a$ o wskaźniku jakości w postaci

$$J(N) = \sum_{k=0}^{N-1} \phi(x(k),u(k)) \tag{2}$$

Niech

$$S_m\left[x(m)\right] = \max_u \sum_{k=m}^{N-1} \phi(x(k),u(k)) \tag{15}$$

wówczas

$$S_o\left[x(m)\right] = \max_u J(N) \tag{16}$$

$$S_N\left[x(N)\right] = 0 \tag{17}$$

Zgodnie z zasadą optymalności Bellmana [8] można napisać równanie funkcyjne:

$$S_{m-1}\left[x(m-1)\right] = \max_{u}\left[\Phi(x(m-1)) + S_m\, s(m))\right] =$$

$$= \max_{u(m-1)} \left[\Phi(x(m-1),u(m-1) + S_m\left[f(x(m-1),u(m-1))\right]\right] \tag{18}$$

Warunkiem koniecznym spełniania równania (18) jest zerowanie się pierwszej pochodnej S_{m-1} względem składowych wektora sterowania

$$\frac{\partial\Phi\left[x(m-1),u(m-1)\right]}{\partial u_s(m-1)} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S_m}{\partial x_i(m)} \cdot \frac{\partial f_i\; x(m-1),u(m-1)}{\partial u_s(m-1)} = 0 \tag{19}$$

Przyjmując

$$\psi_i(m) = \frac{\partial S_m}{\partial x_i(m)} \tag{20}$$

$$m = 1,2,\ldots,N \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

można stwierdzić, że warunek (19) jest równoważny warunkowi stacjonarności hamiltonianu, definiowanego jako

$$H(m) = \Phi\left[x(m-1),u(m-1)\right] + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S_m}{\partial x_i(m)} \cdot f_i\left[x(m-1),u(m-1)\right] =$$

$$= \Phi\left[x(m-1),u(m-1)\right] + \sum_{i=1}^{n} \psi_i(m)\, f_i\left[x(m-1),u(m-1)\right] \tag{21}$$

dla $m = 1,2,\ldots,N$

względem wektora sterowań przy ustalonych $x(m-1)$ i $\psi(m)$. Wystarczy wykazać, że zdefiniowane przez (20) wielkość spełniania równanie dla wektora sprzężonego.

Różniczkując (21) względem $x_j(m-1)$ przy ustalonych $u(m-1)$ i $\psi_i(m)$ otrzymuje się:

$$\frac{\partial H(m)}{\partial x_j(m-1)} = \frac{\partial\Phi\left[x(m-1),u(m-1)\right]}{\partial x_j(m-1)} + \sum_{i=1}^{n} \psi_i(m)\, \frac{\partial f_i\left[x(m-1),u(m-1)\right]}{\partial x_j(m-1)} =$$

$$= \frac{\partial \Phi\left[x(m-1),u(m-1)\right]}{\partial x_j(m-1)} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S_m}{\partial x_i(m)} \frac{\partial f_i\left[x(m-1),u(m-1)\right]}{\partial x_j(m-1)} =$$

$$= \frac{\partial S_{m-1}\left[x(m-1)\right]}{\partial x_j(m-1)} = \psi_j(m-1) \qquad \begin{array}{l} j = 1,2,\ldots,n \\ m = 1,2,\ldots,N \end{array} \tag{22}$$

przy założeniu, że $u(m-1)$ maksymalizuje $S_{m-1}\left[x(m-1)\right]$, co odpowiada równaniom (3).

Z (17) wynika warunek brzegowy

$$\psi(N) = 0$$

Analiza w przypadku ograniczeń narzuconych na sterowanie jest taka sama jak przy wyprowadzeniu na zasadzie różniczkowania wskaźnika jakości.

Równanie (18) stanowiące równanie programowania dynamicznego dla układów dyskretnych implikuje zatem dyskretną wersję zasady maksimum.

Wnioski

Przytoczone rozważania wskazują na związek zasady maksimum dyskretnej z niektórymi innymi metodami optymalizacji układów dyskretnych, mianowicie z klasyczną metodą opartą na rachunku różniczkowym oraz dyskretnym programowaniem dynamicznym. Opisane metody wyprowadzenia dyskretnej zasady maksimum są prostsze od spotykanych zazwyczaj w literaturze metod wariacyjnych, które w ogólnym przypadku nie dają warunków silniejszych.

LITERATURA

[1] Fan L.T., Wang C.S.: The Discrete Maximum Principle, John Willey, 1964, New Jork.

[2] Chang S.S.L.: Digitized Maximum Principle, Proceedings IRE, 1960.

[3] Chang S.S.L.: Synthesis of Optimum Control Systems, Mc Graw-Hill, 1961, New Jork.

[4] Katz S.: Best Operating Points for Staged Systems, Ind. Eng. Chemistry Fundamentals, 1, 1962.

[5] Horn F., Jackson R.: Discrete Maximum Principle, Ind. Eng. Chemistry Fundamentals, 4, 1965.

[6] Denn M.M., Aris R.: Second Order Variational Equations and the Strong Maximum Principle, Chemistry Eng. Science, 20, 1965.

[7] Propoj A.J.: O principie maksimuma dla diskretnych sistiem uprawlenia, Awtomatika i tielemechanika, XXVI, 1965.

[8] Bellman R.: Dynamic Programming, Princeton Univ. Press, New Jersey, 1957.

О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ СВЯЗАННЫХ С ДИСКРЕТНЫМ ПРИНЦИПОМ МАКСИМУМА

Р е з ю м е

В статье выведён дискретный вариант принципа максимума при помощи классического дифференциального исчисления и на основе принципа оптимальности Бельмана. Эти способы в общем случае не дают условий более слабых, чем вариационные методы, но являются более простыми и наглядными.

ON CERTAIN PROBLEMS CONNECTED WITH THE DISCRETE MAXIMUM PRINCIPLE

S u m m a r y

This paper presents the derivation of the discrete maximum principle with the help of the classical differential calculus method and on the base of the principle of optimality stated by Bellman. The ways discussed provide to the results not weaker, in the common case, than usually met calculus of the variations method, but they are more objective and easier.