

Jadwiga Jędrzejczyk, Jan Kubik,
Bogdan Wilk, R. Wójoik

STANY NAPRĘŻENIA W KONSTRUKCJACH PRĘTOWYCH NARAŻONYCH NA RUCHY GÓROTWORU

Streszczenie: W pracy podano sposób wyznaczania stanów naprężeń w konstrukcjach prętowych narażonych na przemieszczenie powierzchni górotworu. Zagadnienie analizowano w zakresie lepko sprężystym, wykorzystując równania podane w pracy [2]. Podane przykłady rozwiązań zadań szczególnie mogą znaleźć zastosowanie przy projektowaniu konstrukcji na terenach szkód górniczych.

Stany przemieszczeń powierzchni górotworu wywołane eksploatacją podziemną, przekazują się na konstrukcje inżynierskie znajdujące się w zasięgu wpływów eksploatacji. Zmienność w czasie tych stanów jest związana z właściwościami reologicznymi materiałów konstrukcyjnych oraz przejściem niekiedy dynamicznej. Poprawna z uwagi na wpływ czasu - analiza konstrukcji narażonych na wpływy ruchów górotworu musi być przeprowadzona w zakresie lepko sprężystym. W tym zakresie można opisać reologiczne właściwości takich materiałów konstrukcyjnych jak stal i żelbet.

Podane w następnej części pracy równania -zagadnienia są rozszerzeniem równań metody sił dla układów lepko sprężystych (por. [2]), na przypadek wymuszonych przemieszczeń w żelbetowych układach ramowych. W tym zakresie podano sposób konstruowania funkcji przemieszczeń od wpływów jednostkowych opisujący ośchy reologiczne konstrukcji wykonanej z dojrzałego betonu.

Zakres pracy obejmuje jedynie analizę stanu naprężenia w konstrukcji, pozostawiając na uboju wyznaczanie stanów naprężeń w górotworze stykającym się z konstrukcją. Sytuacja ta podyktowana jest złożonością zagadnienia, które w przypadku ogólnym jest problemem dyskretnego kontaktu dwóch ośrodków lepko sprężystych, bardzo trudnym do rozwiązania. Trudności jakie wywołują się już przy formułowaniu tych zagadnień skłaniają do poszukiwania rozwiązań szczególnych. Za jedno z takich uproszczonych rozwiązań należy uważać rozwiązanie podane w tej pracy.

2. Równanie układów prętowych współdziałających z górotworem

Rozpatrywać będziemy w przypadku ogólnym N -krotnie statycznie niewyznaczalny układ prętowy, który w punktach x_j ($j = 1, 2, \dots, N$) związany jest z przemieszczającym się górotworem. Punkty x_j doznają w czasie przejścia niekiedy dynamicznej przemieszczeń u_j , które są funkcją czasu $u_j = u(x_j, t)$. Dokładną analizę stanu przemieszczeń, jak również jego zmienność w czasie podamy w następnych częściach pracy. Podkreślimy tutaj, że w rozważaniach nie uwzględniliśmy obciążień zewnętrznych działających na konstrukcję, jak również wpływu ciężaru samej konstrukcji.

Wtedy dla rozpatrywanego układu uzyskamy następujące równanie opisujące stan naprężenia w konstrukcji współdziałającej z górotworem [2].

$$\int_0^t \frac{\partial x_j}{\partial t} \delta_{1j}(t-\tau) d\tau = u_j(t), \tau \in [0, t], \quad 1, j = 1, 2, \dots, N \quad (2.1)$$

W równaniu (2.1) należy przeprowadzić sumowanie po powtarzających się składnikach, czyli

$$\int_0^t \frac{\partial x_j}{\partial t} \delta_{1j}(t-\tau) d\tau = \dot{x}_1 * \delta_{1j} = \dot{x}_1 * \delta_{1j} + \dot{x}_2 * \delta_{2j} + \dots + \dot{x}_N * \delta_{Nj}, \quad (2.2)$$

$x_1(t)$ jest poszukiwaną siłą hiperstatyczną układu, $\delta_{1j}(t)$ jest przemieszczeniem w x_j wywołanym działaniem siły $1_1 H(t)$ w x_1 ($H(t)$ - funkcja Heaviside'a), natomiast $u_j(t)$ jest danym przemieszczeniem punktu x_j wywołanym ruchem powierzchni górotworu.

Założymy dalej, że w chwili $\tau = 0$ układ jest nienaprężony a funkcja $\delta_{1j}(t)$ jest postaci:

$$\delta_{1j}(t) = \delta_{1j}^0 R(t) \quad (2.3)$$

gdzie δ_{1j}^0 jest sprężystym ugięciem od siły jednostkowej w x_j , a $R(t)$ jest funkcją związaną z pełzaniem materiału konstrukcji. Konkretną postać tej funkcji podamy dla żelbetu.

Rozwiązanie układu równań (2.1) uzyskamy wykorzystując przekształcenie Laplace'a [1].

3. Analityczny opis pełzania betonu

Beton jest najczęściej stosowanym materiałem konstrukcyjnym, którego właściwości reologiczne zostały dobrze poznane i opisane w literaturze dotyczącej zagadnień reologii (por. [4]).

Analizując dostępne materiały doświadczalne można zauważyć, że opis cech reologicznych betonu można realizować w ramach lepkosprężystości liniowej, liniowej teorii starzenia się lub nieliniowego pełzania.

Procesy reologiczne w betonie - praktycznie niezależne od szybkości obciążenia - są opisywane przez liniową lepkosprężystość w przypadku naprężeń $0,3 R_0 - 0,6 R_0$ lub przez nieliniowe pełzanie, gdy naprężenia są większe od $0,6 R_0$.

(R_0 - wytrzymałość betonu na ściskanie).

Związki konstytutywne teorii pełzania betonu, pozwalające opisać procesy pełzania w betonie od 2 dni okresu twardnienia są w postaci (por. [4] str. 128).

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E(t)} \left[\sigma(t) + \int_0^t \sigma(\tau) K(t, \tau) d\tau \right], \quad \tau \in [0, t], \quad (3.1)$$

gdzie:

$$K(t, \tau) = - E(\tau) \frac{\partial F(t, \tau)}{\partial \tau}, \quad (3.2)$$

$$F(t, \tau) = E^{-1}(\tau) + \varphi(\tau) [1 - e^{-\lambda(t-\tau)}], \quad (3.3)$$

$$\varphi(\tau) = C_0 + \frac{\Delta}{\tau}, \quad E(\tau) = E_0 (1 - \beta e^{-\alpha \tau}). \quad (3.4)$$

Wartości wielkości C_0 , Δ , E_0 , α i β występujące w związkach od (3.1) do (3.4) są zależne od marki betonu, przebiegu procesów twardnienia i środowiska, w którym proces ten przebiega patrz ([4] str. 129). Ze związków (3.1) - (3.4) uzyskujemy równanie liniowej lepkosprężystości opisujące proces pełzania w dojrzałym betonie:

$$E_0 \varepsilon(t) = \sigma(t) + E_0 C_0 \int_0^t \sigma(\tau) e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau. \quad (3.5)$$

W podanych wyżej wzorach $\sigma(t)$ oznacza naprężenie, $\varepsilon(t)$ odkształcenie, $E(t)$ jest zmiennym modułem sprężystości betonu $E_0 = E(\tau = \infty)$, $\varphi(t)$ - funkcją korygującą właściwości tzw. "inwariantnego pełzania betonu".

Ze związku (3.5) łatwo wyliczyć funkcję $\delta_{1j}^{\circ}(t) = \delta_{1j}^{\circ} R(t)$, wykorzystując zależności podane w [3] str. 67.

$$\bar{R}(p) = \frac{E_0}{pE^{\circ}(p)} \quad (3.6)$$

Po przekształceniach równania (3.6) z uwzględnieniem (3.5) uzyskamy ostatecznie:

$$R(t) = C_0 E_0 (1 - e^{-\lambda t}). \quad (3.7)$$

4. Kinematyka konstrukcji

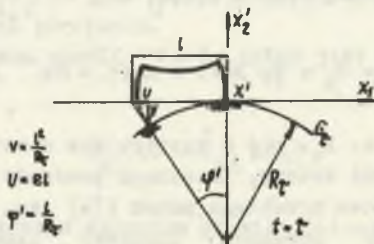
Względne ruchoy podpór konstrukcji wyznaczymy z następujących związków:

$$u(t) = l \cdot f(t),$$

$$v(t) = \frac{l^2}{R_0} \cdot f(t), \quad (x(t) = x_0 \cdot f(t) = \frac{l}{R_0} f(t)) \quad (4.1)$$

$$\varphi(t) = \frac{l}{R_0} \cdot f(t),$$

wynikających z geometrycznej analizy ruchu konstrukcji.



Rys. 1

Występująca we wzorach (4.1) funkcja $f(t)$ jest następująca:

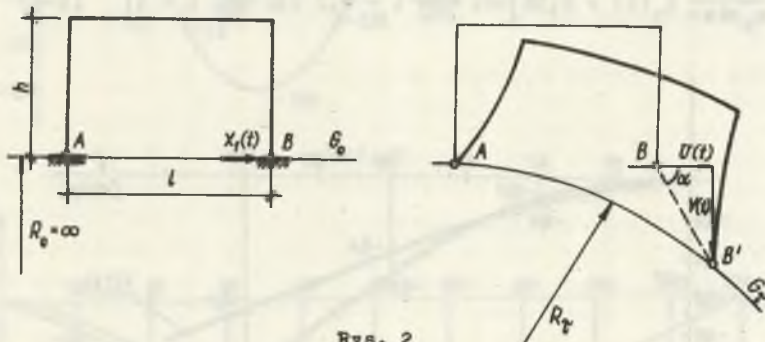
$$f(t) = f_0 \left(\cos \frac{2\pi}{T} t - 1 \right) \quad (4.2)$$

5. Przykłady wyznaczania stanów naprężenia w układach lepkosprężystych na terenach szkód górniczych

Wyznaczymy stan naprężenia w ramie jednokrotnie statycznie niewyznaczalnej związanej z odkształcającym się górotworem. Funkcja przemieszczeń $u(t)$ od wpływów ruchu górotworu jest postaci (por. (4.2)).

$$u(t) = u_0 \left(\cos \frac{2\pi}{k} t - 1 \right), \quad k - \text{połowa okresu } T,$$

$$u_0 = \varepsilon l \text{ [cm]}, \quad (5.1)$$



Rys. 2

Równanie metody sił dla ramy z rys. 2 jest następujące:

$$\int_0^t \frac{\partial X(\tau)}{\partial t} \delta R(t-\tau) d\tau = E_0 J U_0 \left(\cos \frac{2\pi}{k} t - 1 \right), \quad (5.2)$$

gdzie:

$$R(t) = E_0 C_0 (1 - e^{-\dot{t}t}).$$

Wykonując na równaniu (5.2) transformację Laplace'a [1] otrzymamy:

$$X(p) = \frac{U_0}{\delta E_0 C_0} \left(\frac{p}{p^2 + \left(\frac{2\pi}{k}\right)^2} - \frac{\left(\frac{2\pi}{k}\right)^2}{p^2 + \left(\frac{2\pi}{k}\right)^2} - \frac{1}{p} \right). \quad (5.3)$$

Retransformacją tego związku jest postaci:

$$\frac{\delta}{U_0} X(t) = \frac{1}{E_0 C_0} \left(\cos \frac{2\pi}{k} t - \frac{2\pi}{k} \sin \frac{2\pi}{k} t - 1 \right). \quad (5.4)$$

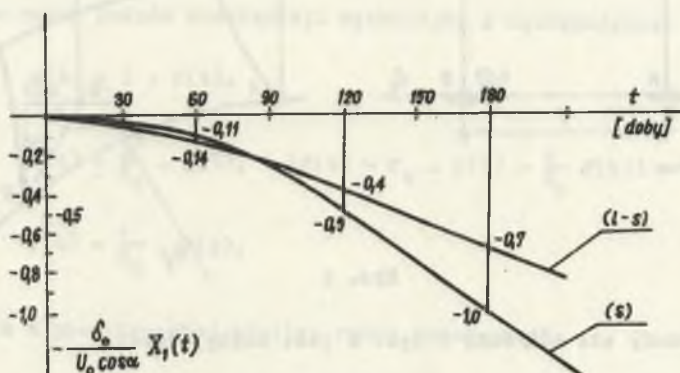
W identycznym rozwiązaniu sprężystym uzyskujemy:

$$\frac{\delta}{u_0} X(t) = \cos \frac{2\pi}{k} t - 1.$$

Zmienność w czasie siły hiperstatycznej $X(t)$ w rozwiązaniu sprężystym (s) i lepkosprężystym ($1-s$), dla różnych okresów przejść niekilkudniowych dynamicznej ilustrują wykresy:

1. Dla $k = 720$ dób, $T = 4$ lata

$$\frac{\delta}{u_0 \cos \alpha} X_1(t) = 0,52 \left[\cos \frac{2\pi}{720} t - 0,3 \sin \frac{2\pi}{720} t - 1 \right] \quad (1-s)$$



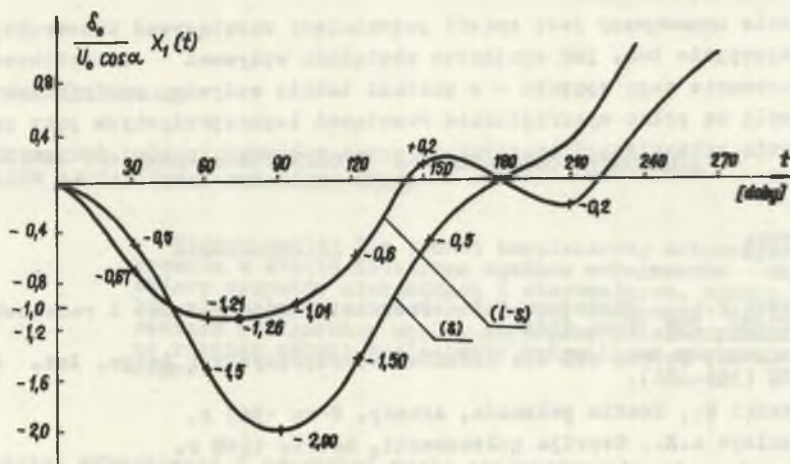
Rys. 3

2. Dla $k = 180$ dób, $T = 1$ rok

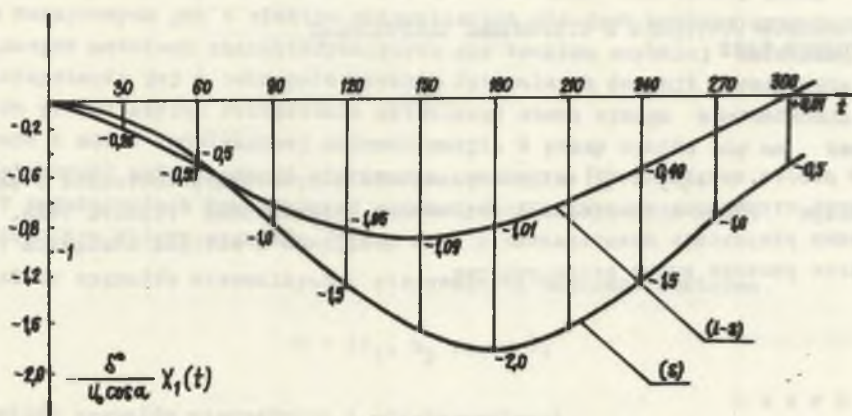
$$\frac{\delta}{u_0 \cos \alpha} X_1(t) = 0,52 \left[\cos \frac{2\pi}{180} t - 1,2 \sin \frac{2\pi}{180} t - 1 \right] \quad (1-s)$$

3. Dla $k = 360$ dób, $T = 2$ lata

$$\frac{\delta}{u_0 \cos \alpha} X_1(t) = 0,52 \left[\cos \frac{2\pi}{360} t - 0,6 \sin \frac{2\pi}{360} t - 1 \right] \quad (1-s)$$



Rys. 4



Rys. 5

6. Wnioski

1. Rozwiązania lepko-sprężyste w porównaniu ze sprężystymi dają 30%-50% obniżenia wartości sił hiperstatycznych w konstrukcji, pozwalając na oszczędniejsze projektowanie.
2. Lepko-sprężysta analiza konstrukcji ujmuje prawidłowo wpływ ruchów powierzchni górotworu na zmiany naprężenia w konstrukcji.

3. Obecnie opracowywany jest sposób pozwalający rozwiązywać konstrukcje lepko-sprężyste tak, jak sprężyste obciążane wpływami zmodyfikowanymi. Opracowanie tego sposobu - w postaci tablic wpływów zmodyfikowanych - pozwoli na pełne wykorzystanie rozwiązań lepko-sprężystych przy projektowaniu zabezpieczeń konstrukcji przed wpływami ruchów górotworu.

LITERATURA

1. Ditkin W.A., Prudnikow A.P., Przekształcenia całkowe i rachunek operatorów, PWN, W-wa 1964 r.
2. Kubik J., Metoda sił dla układów lepko-sprężystych Rozpr. Inż. 4(18), 1970 (596-606).
3. Nowacki W., Teoria pełzania, Arkady, W-wa 1963 r.
4. Rżanicyn A.R., Teoriya polzuchestii, Moskwa 1968 r.

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В СТЕРЖНЕВЫХ СООРУЖЕНИЯХ НА ГОРНОМ ТЕЛЕ

Р е з ю м е

В работе представлено метод определения напряженного состояния в вязкоупругих стержневых сооружениях подгнутых перемещениям горного тела. Полученные результаты представлено в виде диаграмм в которых находится тоже упругое решения кроме вязко-упругих.

S u m m a r y

This paper shows the calculation method of stress conditions in rod construction subjected to displacements of the rock surface. This problem has been analysed in the visco-elastic scope, making use of the equations which have been prescuted in paper [2]. The examples show some detailed results which may be applied to the design of constructions on rock surfaces with mining damages.