ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1972

Seria: GÓRNICTWO z. 52 Nr kol. 332

Jan Koszelski

WYTRZYMAŁOŚCIOWE OBLICZANIE PŁASZCZA WIELOLINOWEGO KOŁA PĘDNEGO

Streszczenie: Do obliczania momentów zginających, w południkowych płaszczyznach płaszcza wielolinowego koła pędnego, zastosowano wzory wyprowadzone dla powłoki walcowo-kolistej, utwierdzonej w jednym końcu krawędzi. Następnie sprowadzono ogólne wyrażenie do szczególnego wzoru na wyznaczenia maksymalnych momentów zginających w równoleżnikowych płaszczyznach; w końcu zaś podano wykresy pozwalające wyznaczyć momenty dla wymiarów płaszcza g = 0,5 - 2 cm, R = 50-100 cm i L = 50 - 100 cm oraz przykład obliczania naprężeń.

1. Wstęp

Pierwsze teoretyczne prace na temat wytrzymałości płaszcza wielolinowego koła pędnego opublikował Prof. O. Popowicz (1), (2). W pracach tych rozpatruje się model płaszcza koła pędnego, jako walcowo-kolistą powłokę zginaną i podpartą na krawędziach tarczami. Tarcze w kierunku promieniowym są sztywne i ich ugięcia są bliskie zeru, natomiast w kierunku osiowym mogą być sztywne lub podatne. Dla takiego modelu, przy założeniu równości sił napinających linę i jej łuku opasania 180°, wyprowadzono teoretycznie wzory na obliczenia w płaszczyznach równoleżnikowych

- ugięć promieniowych,
- momentów gnących,
- sił błonowych.

Do obliczania momentów w płaszczyznach południowych przyjęto wzór Timoshenki, dla belki nieskończenie długiej, spoczywającej na sprężystym podłożu. Późniejsze prace - (3), (4) - traktowały eksperymentalne porównanie wyników z teoretycznymi oraz zastosowanie elektrycznego urządzenia analogowego do obliczeń wytrzymałościowych płaszcza.

2. Naprężenia w płaszczyznach równoleżnikowych

W równoleżnikowych płaszczyznach działają momenty gnące i siły błonowe co daje złożony rozkład naprężeń.

Momenty te - przy obciążeniu liną w środkowej płaszczyźnie oraz podatności tarcz w kierunku osiowym - określa się wyrażeniem:

$$M(\tfrac{L}{2},\varphi) = -0{,}132\, Z \sqrt[4]{\frac{\bar{g}^3}{R^2 g}} \Big[0{,}00916\, l^3 \cdot \frac{\bar{g}^2}{Rg} \sqrt[4]{\frac{g\bar{g}}{R^2}} \cos\varphi +$$

$$- \frac{1-8\cos 3\varphi}{22{,}62}\, \Phi_{3(\frac{L}{2})} + \frac{1-24\cos 5\varphi}{117{,}58}\, \Phi_{5(\frac{L}{2})} - \frac{1-48\cos 7\varphi}{332{,}5}\, \Phi_{7(\frac{L}{2})} +$$

$$+ \frac{1-80\cos 9\varphi}{715{,}5}\, \Phi_{9(\frac{L}{2})} - \frac{1-120\cos 11\varphi}{1313}\, \Phi_{11(\frac{L}{2})} + \Big] \qquad (1)$$

gdzie:

Z - siła naciągu liny,
g - grubość płaszcza,
$\bar{g}$ - grubość równowartna,

$$\bar{g} = \sqrt[3]{\frac{12\, I}{L}} \qquad (2)$$

I - obliczone dla całej szerokości płaszcza z uwzględnieniem żeber,
L - długość płaszcza,
R - promień płaszcza,
l - wartość bezwymiarowa:

$$l = \frac{L}{R} \qquad (3)$$

$\Phi_{n(\frac{L}{2})}$, - funkcja położenia:

$$\Phi_{n(\frac{L}{2})} = \frac{\mathrm{Sh}\, m_n l - \sin m_n l}{\mathrm{Ch}\, m_n l + \cos m_n l} \qquad (4)$$

gdzie n = 2i + 1 dla i = 1,2,3

$$m_n = \sqrt[4]{\frac{(n^2-1)^2\, I}{48\, gL\, R^2}} \qquad (5)$$

Dla płaszcza gładkiego g = g oraz

$$m_n = \frac{n}{2{,}63} \sqrt{\frac{(n^2-1)}{R}} \qquad (6)$$

Funkcja położenia jest szybko zbieżna do jedności i w zależności od wymiarów geometrycznych płaszcza wystarczy ją liczyć do dziewiątego lub jedenastego wyrazu. Czynniki wyrazów szeregu w wyrażeniu (1) liczone są następująco:

$$A_n = \frac{1-(n^2-1)\cos n}{\sqrt{(n^2-1)^3}} \cdot \sin\left[\frac{1-(-1)^n}{4} n\pi\right] \tag{7}$$

gdzie: $n = 2i + 1$ dla $i = 1,2,3, \ldots$

Szereg A_n jest przemienny i powoli malejący. Przemienność i szybkość malenia szeregu są zależne od kąta φ.
Przy małych kątach przemienności podlegają kolejno pojedyncze wyrazy szeregu, potem podwójne, a powyżej 60^0 grupy rosną coraz szybciej. Wymieniona właściwość szeregu utrudnia uogólnienie określenia wymagającej ilości wyrazów szeregu A_n, potrzebnej do otrzymania poprawnego wyniku.

Obliczone momenty zginające według wyrażenia dla płaszcza gładkiego, przedstawiono graficznie na rys. 1. Jak widzimy, przebieg momentów względem pionowej osi okręgu jest symetryczny, a na jego obwodzie zwroty momentów zmieniają swe znaki dziesięciokrotnie.

Siły wewnętrzne wyznaczamy z wyrażenia:

$$N_{(\frac{L}{2},\varphi)} = 0{,}42\, Z \sqrt[4]{\frac{g}{\tilde{g}^3 R^2}} \left[0{,}41 \sqrt[4]{\frac{\tilde{g}^3}{gR^2}} \cdot 1 \cos\varphi \cdot \frac{\cos 3}{2{,}828} \Phi_{3(\frac{L}{2})} + \right.$$

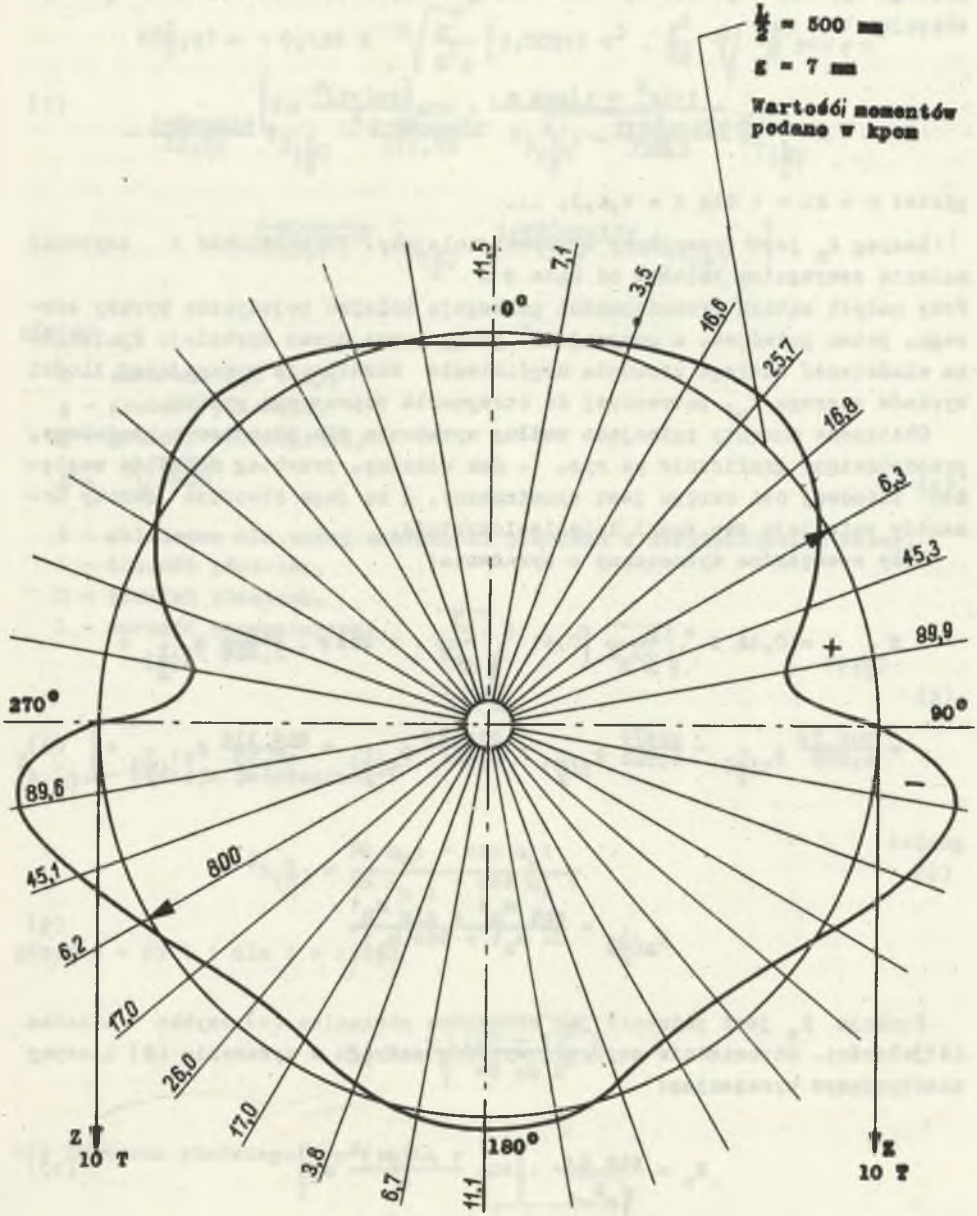
$$\left. + \frac{\cos 5\varphi}{4{,}899} \Phi_{5(\frac{L}{2})} - \frac{\cos 7\varphi}{6{,}926} \Phi_{7(\frac{L}{2})} + \frac{\cos 9\varphi}{8{,}944} \Phi_{9(\frac{L}{2})} - \frac{\cos 11\varphi}{10{,}95} \Phi_{11(\frac{L}{2})} + \right] \tag{8}$$

gdzie:

$$\Phi_{n(\frac{L}{2})} = \frac{\operatorname{shh} m_n 1 + \sin m_n 1}{\operatorname{Ch} m_n 1 + \cos m_n 1} \tag{9}$$

Funkcja Φ_n jest podobnie jak oznaczona równaniem (4) szybko zbieżna do jedności. Odpowiednie czynniki wyrazów szeregu w wyrażeniu (8) liczymy następującym wyrażeniem:

$$B_n = \frac{\cos n\varphi}{\sqrt{n^2-1}} \cdot \left[\sin \frac{1-(-1)^n}{4} n\pi\right] \tag{10}$$



Rys. 1. Wykres momentów w płaszczyźnie obciążenia

3. Maksymalne momenty i siły

Do zaprojektowania płaszcza koła pędnego jest nam potrzebna wartość maksymalnego momentu zginającego, przy założonych obciążeniach i wstępnych wymiarach. Zakładając schemat usytuowania obciążenia przedstawiony na rys. 1 zauważa się, że maksymalny moment działa przy kącie 80°. Po przeliczeniu jego otoczenia potwierdza się ta uwaga. Przy wymiarowaniu płaszcza należy więc obliczyć moment działający pod kątem 80°.
Dla wielokrotności kąta 80°, wartości cosinusów i czynników wyrazu szeregu liczone są wg wyrażenia (7) i podane w tablicy 1. Ponieważ funkcja położenia nie wpływa na dalsze wyrazy szeregu, wartości tych wyrazów dla danego kąta są stałe i niezależne od parametrów płaszcza. Suma wyrazów $n = 13$ do $n = 301$ dla kąta 80° wynosi $r = -0{,}03280$, natomiast pozostałe wyrazy są do pominięcia.

Tablica 1

n	3	5	7	9	11	13
cos 80°	-0,5	0,7660	-0,9397	1	-9397	0,7660
An	0,2216	0,1488	0,1392	0,1110	0,0959	0,0595
Bn	0,1768	0,1568	0,13355	0,1118	0,0859	0,0589

Dla konstrukcyjnych obliczeń można więc napisać na maksymalny moment uproszczoną nieco równość

$$M_{(\frac{L}{2}),80^{\circ})} = 1{,}32 . Z . \sqrt[4]{\frac{g^3}{R^2 g}} . \Big[0{,}00916 . 1^3 . \frac{g^2}{R_g} \sqrt[4]{\frac{g\rho}{R^2}} . \cos\varphi +$$

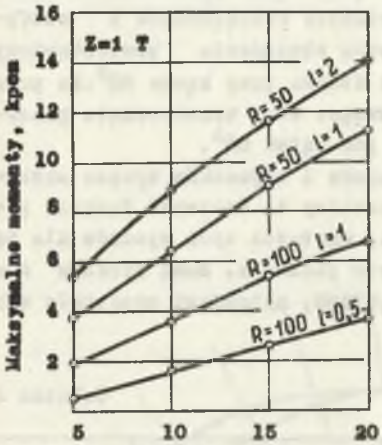
$$+ 0{,}2216 . \Phi_{3(\frac{L}{2})} + 0{,}1488\, \Phi_{5(\frac{L}{2})} + 0{,}1392\, \Phi_{7(\frac{L}{2})} + 0{,}111\, \Phi_{9(\frac{L}{2})} +$$

$$+ 0{,}0959\, \Phi_{11(\frac{L}{2})} - 0{,}0328\Big] \qquad (11)$$

Obliczając maksymalne momenty zginające przy obciążeniu równym jednej tonie oraz różnych promieniach i długościach gładkiego płaszcza, w zależności od jego grubości otrzymujemy z równania (11) wyniki, które przedstawiono na rys. 2. W podanych na wykresach parametrach, zależność momentów jest prawie wprost proporcjonalna do grubości płaszcza i w przybliżeniu odwrotnie proporcjonalna do jego promieni. Wartościom tych momentów odpo-

wiadają naprężenia przedstawione na rys. 3 przy szerokości płaszcza "a" - liczonej wzorem (7):

$$a = 0{,}76\sqrt{Rg} \tag{12}$$



Rys. 2. Wartości maksymalnych momentów, w płaszczu wielolinowego koła pędnego, w środkowej płaszczyźnie równoleżnikowej w zależności od: grubości płaszcza g, promieni R, i długości L = R.l

Największe siły występują również tak, jak maksymalny moment, to jest przy kącie 80° liczonym według przyjętego przez nas schematu obciążeń na rys. 1. Wartości czynników wyrazów szeregu dla wielokrotności kąta 80° są stałe, dla różnych przestrzennych wymiarów płaszcza oraz podane w tablicy 1, natomiast suma wyrazów szeregu od n = 15 do n = 301, wynosi $r_1 = 0{,}10208$.

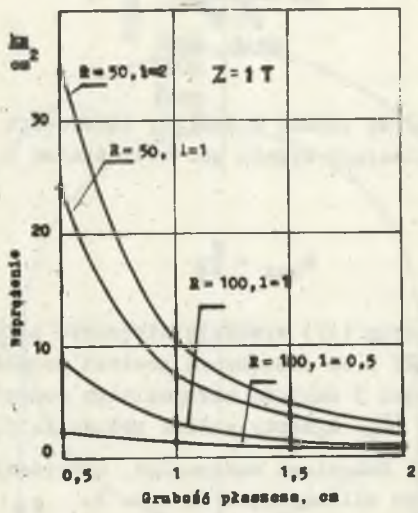
Na wyznaczenie maksymalnej siły można napisać równanie:

$$N_{(\frac{L}{2},80^\circ)} = 0{,}42.Z.\sqrt[4]{\frac{g^3}{gR^2}}\Big[0{,}41 \cdot \sqrt[4]{\frac{g^3}{gR^2}} \cdot 1 \cdot \cos\varphi + 0{,}17682\,\Phi_{3(\frac{L}{2})} + 0{,}15687\,\Phi_{5(\frac{L}{2})} + 0{,}13555\,\Phi_{7(\frac{L}{2})} + 0{,}11186\,\Phi_{9(\frac{L}{2})} + 0{,}08592\,\Phi_{11(\frac{L}{2})} + 0{,}05893\,\Phi_{13(\frac{L}{2})} - 0{,}10208\Big] \tag{13}$$

gdzie stałe czynniki wyrazów liczone są wyrażeniem (10).

Dla przykładu przedstawionego na rys. 1 wartość maksymalnej siły wynosi 508 $\frac{kp}{cmb}$, stąd naprężenie $\sigma_1 = 725\ \frac{kp}{cm^2}$, natomiast naprężenie zginające $\sigma_g = 234\ \frac{kp}{cm^2}$.

Naprężenia złożone będą wynosić 959 $\frac{kp}{cm^2}$.



Rys. 3. Wartości maksymalnych naprężeń, w środkowej płaszczyźnie równoleżnikowej w zależności od: grubości płaszcza g, promieni R i długości L = = l . R

4. Naprężenia w płaszczyznach południkowych

Na obliczenie momentów w płaszczyznach południkowych w długiej walcowo-kolistej powłoce, obciążonej siłami skupionymi, na równoleżniku oddalonym w dostatecznej odległości od krawędzi podano wzory w literaturze (5):

$$M_x = \frac{P}{4} \cdot \psi(\beta x) \tag{14}$$

gdzie:

M - moment w odległości x od przyłożonego obciążenia,

P - siła skupiona i równomierna rozłożona na okręgu,

ψ - funkcja obliczona wzorem:

$$\psi(\beta x) = e^{-\beta x} (\cos x - \sin \beta x) \tag{15}$$

β – oznacza wyrażenie

$$\beta = \frac{3(1-\nu^2)}{g^2 R^2} \tag{16}$$

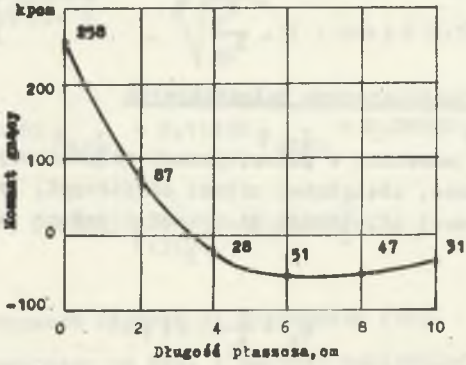
ν – liczba Poissona.

Wartości funkcji $\psi(\beta x)$ są podane w tablicy literatura (5) str. 423.

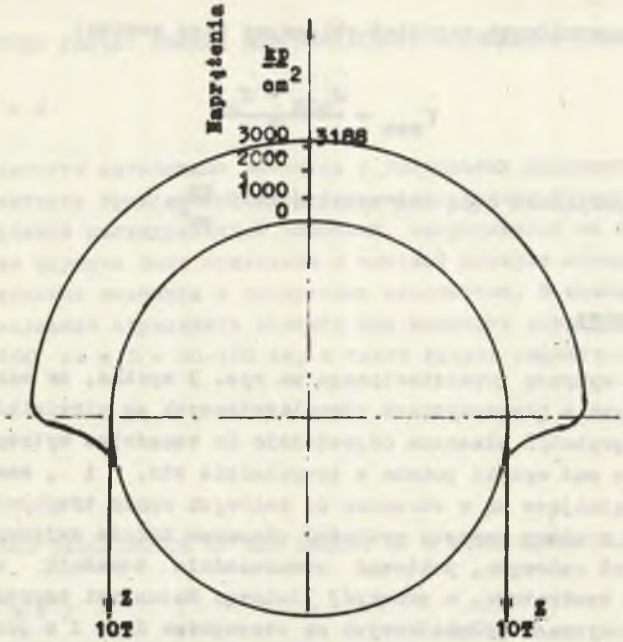
Największy moment zginający wypada pod obciążeniem i jego wartość określona z równania

$$M_{max} = \frac{P}{4\beta} \tag{17}$$

Momenty obliczone równością (17) wywołują miejscowe zginania, które szybko znikają, gdy odległość x od obciążenia powłoki wzrasta. Dla przykładu podanego na rys. 1 i w pkt 3 wartość maksymalnego momentu wynosi 258 kpcm a naprężenie $\sigma_{E1} = 3188 \frac{kp}{cm^2}$. Momenty wzdłuż południka dla tego przykładu przedstawiono na rys. 4. Natomiast maksymalne naprężenia w południkach rozłożone po równoleżniku zilustrowano na rys. 5.



Rys. 4. Wykres momentów gnących w płaszczyźnie południkowej dla danych: g = 0,7 cm, R = 40 cm, L = 100 cm i Z = 10 T



Rys. 5. Maksymalne naprężenia w płaszczyznach południkowych przedstawione po równoleżniku dla danych: grubość płaszcza 7 mm, promień R = 40 cm, długość L = 100 cm i Z = 10 T

5. Naprężenia styczne

Maksymalne naprężenie styczne występuje w środkowej płaszczyźnie obciążenia liną i przy kącie 80° wg schematu ustalonego na rys. 1. Wynika to z następujących rozważań:

- w kierunku południkowym na zewnętrznej powierzchni maksymalna wartość naprężeń jest ujemna,
- w kierunku równoleżnikowym siły błonowe dają wartość naprężenia na całym przekroju dodatnią,
- na zewnętrznej powierzchni w kierunku równoleżnikowym wartość sił błonowych będzie zmniejszona o naprężenie wywołane momentem zginającym i będzie wynosić:

$$\sigma_{min} = \sigma_1 - \sigma_g \tag{18}$$

σ_{min} jest zawsze dodatnie, gdyż σ_1 jest przeszło trzykrotnie większe od σ_g

(19)

Wartość maksymalnych naprężeń obliczymy więc wzorem:

$$\sigma_{max} = \frac{\sigma_{min} + \sigma_{g1}}{2} \tag{19}$$

Dla naszego przykładu będą one wynosić 1839 $\frac{kp}{cm^2}$.

6. Uwagi końcowe

Z analizy wykresu przedstawionego na rys. 3 wynika, że wartości naprężeń zginających w płaszczyznach równoleżnikowych są niewielkie i maleją ze wzrostem grubości płaszcza odpowiednio do wskaźnika wytrzymałości.

Porównując zaś wyniki podane w przykładzie str. i , zauważamy, że naprężenia zginające są w stosunku do osiowych około trzykrotnie mniejsze. Stosunek ten w miarę wzrostu grubości płaszcza będzie zwiększał się na korzyść naprężeń osiowych, ponieważ równocześnie wskaźnik wytrzymałości jest funkcją kwadratową, a przekrój liniową. Natomiast naprężenia zginające w płaszczyznach południkowych są stosunkowo duże i w porównaniu do zginających równoleżnikowych około dwunastokrotnie większe.

Również wartości naprężeń stycznych, wynikające z działania sił błonowych i momentów w płaszczyźnie południkowej, są znaczne i dla podanego przykładu wynoszą 1839 $\frac{kp}{cm^2}$.

LITERATURA

1. Popowicz O., Beitrag zu den Festigkeitproblemen der Trommeln und Seilträger im Bergbau. Freiberger Forschungshefte 1961.
2. Popowicz O., Problemy wytrzymałości powłokowej bębnów i kół pędnych. Materiały na konferencję Naukowo Techniczną 1963 r. Wyd. Politechniki Śląskiej.
3. Popowicz O., Maszyny Wyciągowe Bębny i Koła Pędne, Politechnika Śląska. Gliwice 1964.
4. Antoniak J., Dembnicki S., Badania ugięć promieniowych płaszcza modelu bębna. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej Górnictwo, Zeszyt 7 1963.
5. Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S., Teoria Płyt i Powłok ARKADY Warszawa 1962.
6. Girkmann K., Dźwigary Powierzchniowe ARKADY, Warszawa 1957.
7. Prace Magisterskie. Katedra Maszyn Górniczych. Politechnika Śląska, Gliwice.

ПРОЧНОСТНЫЙ РАСЧЕТ КОЖУХА МНОГОКАНАТНОГО ПРИВОДНОГО ШКИВА

Р е з ю м е

Для расчёта изгибающих моментов в продольных плоскостях сечения кожуха многоканатного приводного шкива были использованы формулы, выведенные для кругообразной цилиндрической оболочки, закреплённой на одном конце. Затем общая формула была приведена к частной формуле определения максимальных изгибающих моментов в поперечных плоскостях. В конце представлены эпюры, позволяющие определить моменты для размеров кожуха $g = 0,5 \div 2$ см, $R = 50-100$ см и $L = 50-100$ см, а также пример расчёта напряжений.

MECHANICAL CALCULATION OF THE JACKET OF A MULTICABLE DRIVING PULLEY

S u m m a r y

For calculation of bending moments in meridional planes of the jacket of a multi-cable driving pulley formulae were used as derived for the cylindro-circular shell fastened at one and of the edge. Next, the general term was reduced to a particular formula for the determination of maximum bending moments in parallel planes. Finally, diagrams are given which allow to determine the moments for the size of the jacket: with the thickness, $g = 0,5 - 2$ cm, radius, $R = 50 \div 100$ cm and length $L = 50 \div 100$ cm. An example of calculation of stresses is also given.