ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1972

Seria: GÓRNICTWO z. 52 Nr kol. 332

Józef K. Sułkowski

# ZWIĄZKI MIĘDZY METODAMI OBLICZANIA ROZPŁYWU POWIETRZA W SIECIACH WENTYLACYJNYCH KOPALŃ

Streszczenie. W referacie rozpatrzono ogólne własności metod przybliżonego obliczania rozpływu powietrza w sieciach wentylacyjnych i przeprowadzono ich klasyfikację z uwagi na postać modelu matematycznego, stosunek do struktury sieci oraz występowanie uproszczeń matematycznych przy wyprowadzaniu wzorów na poprawki.

## 1. Przegląd metod obliczania rozpływu powietrza

Komputeryzacja obliczeń w zakresie przewietrzania kopalń spowodowała szersze zainteresowanie metodami obliczenia rozpływu powietrza i rozkładu ciśnień w sieciach wentylacyjnych, znanymi już od dawna, ale nie stosowanymi w praktyce. Obliczeniem rozpływu powietrza zajmowano się już od połowy XIX w., kiedy to J.J. Atkinson (1854) podał problem rozpływu powietrza w prostej sieci przekątnej. Zajmowano się jednak wtedy badaniem rozpływu powietrza w sieciach normalnych i prostych przekątnych, gdyż dla nich można było znaleźć ścisłe, analityczne rozwiązanie problemu (Guibal, Devillez, Murgue, Petit). Ogromne zasługi w tym okresie dla rozwoju metod obliczenia rozpływu powietrza położył H. Czeczott [10]. Wykazał,między innymi, że nie ma ścisłych metod obliczania rozpływu powietrza w sieciach wentylacyjnych bardziej złożonych niż sieć prosta przekątna (1910). Spowodowało to powstanie metod przybliżonych, takich jak metody M.M. Protodiakonowa i St. Doborzyńskiego, ograniczających się jednak do sieci niewielkich i prostych. Sposób obliczenia rozpływu powietrza w dowolnej sieci wentylacyjnej podał dopiero w 1935 r. w swej pracy dyplomowej S. Barczyk (tzw. metoda kolejnych przybliżeń). Publikacją tej metody był dopiero opis w podręczniku W. Budryka [4] z 1951 r., co nie zapewniło jej ani pierwszeństwa, ani rozgłosu. W 1951 r. podobną metodę opublikował D.R. Scott i F.B. Hinsley [15] modyfikując nieznacznie stworzoną w 1936 r. dla sieci wodociągowych metodę H. Crossa [9] - znaną na całym świecie. Według autorów radzieckich [8] przed H. Crossem identyczną metodę dla sieci wodociągowej opracował już w 1932 r. M.M. Andrijaszew. Jest więc kilku pretendentów do pierwszeństwa naukowego stworzenia najpopularniejszej metody iteracyjnej obliczenia rozpływu powietrza w sieciach. Po II wojnie światowej następował dalszy rozwój metod. W 1948 r. T. Kochmański [13] zmodyfikował metodę Barczyka stosując rachunek krakowianowy. W 1958 r.G.Aprile [2] i R. Sciorta [16] podali metodę "częściowych prądów" wykorzystując

przekształcenie złożonej sieci zawierającej "n" niezależnych prądów na taką sumę ilość prądów płynących przez całą sieć. W tym samym roku powstaje metoda Van den Dungena [11] oparta na twierdzeniu Kennelly'ego o zmianie układu trójkąt-gwiazda dla sieci liniowych. Ideę tę proponują też Abramow, Podolski, Frołow [1], Tołmaczew [17], chociaż nie zawsze poprawnie. Niezmiernie ciekawą metodę opublikowali równocześnie w 1967 r. Gunther [12] G. Aprile [3] oraz T.J. Matikaszwili i E.J. Chuchunaszwili [14] wykorzystując inne niż dotychczas własności struktury sieci, a mianowicie niezależność węzłów sieci. Ostatnie lata przyniosły nowe metody S. Coja, E.J. Rogowa [8], H. Bystronia [5, 7] i wiele modyfikacji metod znanych uprzednio.

Warto więc zbadać zasadnicze związki między znanymi metodami, aby ułatwić wybór jednej z nich dla konkretnych obliczeń wentylacyjnych.

## 2. Model matematyczny zagadnienia obliczenia rozpływu powietrza

Zagadnienie obliczenia rozpływu powietrza (oraz rozkładu ciśnień w sieci wentylacyjnej) formułuje się w następujący sposób:

Mając dane:

- strukturę sieci w postaci jednoznacznego modelu graficznego lub cyfrowego,
- przebiegi charakterystyk wszystkich m elementów sieci (bocznic i wentylatorów).

Znaleźć:

- natężenie przepływu $\dot{V}$ prądów (wraz ze znakami wartości) we wszystkich m elementach sieci,
- różnice ciśnień (potencjałów) H na wszystkich m elementach sieci.

Przebiegi m charakterystyk mogą być dane w dwóch równoważnych postaciach

$$\text{prymalnej:} \quad H_i = f(\dot{V}_i) \tag{1}$$

$$\text{dualnej:} \quad \dot{V}_i = f^*(H_i) \tag{2}$$

Charakterystyki (1) lub (2) dotyczą dowolnego (passywnego lub aktywnego) elementu sieci, ale z zachowaniem różnego znaku przy sumowaniu wartości H lub $\dot{V}$ po oczku lub w węźle.

Mogą więc mieć postać:

dla bocznic

$$H_i = R_i \dot{V}_i^2 \operatorname{sgn} \dot{V}_i$$

lub

$$\dot{V}_i = T_i \sqrt{|H_i|} \operatorname{sgn} H_i \tag{1'}$$

dla wentylatorów

$$H_i = a\,\dot{V}_i^2 + b\,\dot{V}_i + c \quad \text{lub} \quad \dot{V}_i = \alpha\sqrt{|H_i|} + \beta H_i + \gamma \tag{2'}$$

gdzie:

R - opór,
T - temperament,
$a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ - współczynniki określone doświadczalnie.

Oprócz m równań charakterystyk (1) lub (2) w skład modelu matematycznego zagadnienia wejdą równania Kirchhoffa zapewniające równowagę sieci:

$\varrho$ równań węzłowych $\sum_{i \in U_j} s_{ij}\,\dot{V}_i = 0 \quad i = 1,2,\ldots m \quad j = 1,2\ldots\varrho$ (3)

$\nu$ równań cyklowych $\sum_{i \in U_{\mu_j}} c_{ij}\,H_i = 0 \quad i = 1,2\ldots m \quad j = 1,2\ldots\nu$ (4)

Między ilością m elementów w sieci, ilością n węzłów a rzędem sieci $\varrho$ i liczbą cyklomatyczną $\nu$ zachodzą znane w teorii grafów związki:

$$\varrho + \nu = m \tag{4}$$

$$\nu = m - n + 1 \tag{5}$$

$$\varrho = n - 1 \tag{6}$$

Oprócz nich przyjęto oznaczenia:

$s_{ij}$ - element macierzy incydencji S,
$c_{ij}$ - " " cyklomatycznej C,
$U_j$ - zbiór wskaźników elementów incydentnych z węzłem o wskaźniku j,
$U_{\mu_j}$ - zbiór wskaźników elementów incydentnych z cyklem o wskaźniku $\mu_j$.

Po uwzględnieniu w układzie równań (2) i (3) nieliniowych charakterystyk elementów sieci otrzymuje się układ równań nieliniowych ze względu na niewiadome natężenia przepływu $\dot{V}$ lub różnice ciśnień H, prowadząc do prymalnego lub dualnego sformułowania modelu matematycznego rozważanego zagadnienia

$$\text{I)} \quad \sum_{i \in U_j} s_{ij}\dot{V}_i = 0 \qquad i = 1,2,\ldots m \quad j = 1,2,\ldots\varrho \tag{7}$$

$$\sum_{i \in U_{\mu_j}} c_{ij}\, f(\dot{V}_i) = 0 \qquad i = 1,2,\ldots m \quad j = 1,2,\ldots\nu$$

$$\text{II)} \quad \sum_{i \in U_j} s_{ij} f^*(H_i) = 0 \qquad \begin{array}{l} i = 1,2,\ldots m \\ j = 1,2,\ldots \varrho \end{array}$$

$$\sum_{i \in U_{\mu_j}} c_{ij} H_i = 0 \qquad \begin{array}{l} i = 1,2,\ldots m \\ j = 1,2,\ldots \nu \end{array} \tag{8}$$

Modele te będą się różniły między sobą typem nieliniowości równań, układ (I) będzie zawierał nieliniowość kwadratową (z uwagi na postać charakterystyk 1), a układ (II) - nieliniowość pierwiastkową (z uwagi na postać charakterystyk 2).

## 3. Podział metod ze względu na postać wykorzystywanego modelu matematycznego

Równania nieliniowe (kwadratowe) w modelu (I) opisują równowagę cyklów sieci, a zmienną niezależną jest natężenie przepływu. Metody wykorzystujące ten model nazywać się będzie cyklowymi. Niezależnych równań cyklowych jest $\nu'$, a więc tyle ile jest elementów w antydrzewie sieci. Wartość ta, jak widać z zależności (5), jest dużo mniejsza od ilości wszystkich elementów sieci. Stwarza to możliwość pojawienia się tysięcy kombinacji dla wyboru odpowiednich $\nu$ elementów niezależnych spośród m elementów. W praktyce wybór niezależnych cyklów dla dużych sieci zajmuje znaczną część programu obliczeniowego przy obliczeniu rozpływu powietrza komputerem. Metodami cyklowymi są metody: Crossa, Barczyka, Scotta-Hinsleya, klasyczna Newtona, gradientu, linearyzacji Coja-Rogowa, krakowianowa Kochmańskiego, Suzuki, Aprile-Sciorty, Van den Dungena, rekurencyjna Bystronia i wszystkie inne, które wykorzystują model (I).

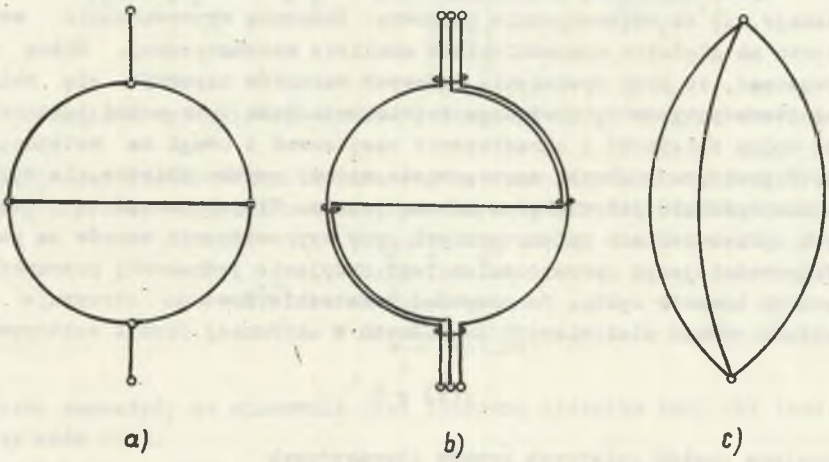
W modelu (II) równania nieliniowe (pierwiastkowe) opisują równowagę węzłów sieci, a zmienną niezależną jest różnica ciśnień H. Metody, wykorzystujące ten model, nazywa się więc węzłowymi.

Spośród wszystkich n węzłów wybiera się $\varrho$ węzłów niezależnych, dla których pisze się równania nieliniowe. Z zależności (6) widać, że wybór węzłów niezależnych sprowadza się do odrzucenia jednego z nich, co w porównaniu z wyborem niezależnych cyklów jest czynnością łatwą. W przypadku metod cyklowych ułożenie równań wiązało się z analizą topologiczną sieci, w przypadku metod węzłowych analiza ta nie jest potrzebna. Metody węzłowe powstały w ostatnich latach (1967), teoria ich nie jest jeszcze dostatecznie rozwinięta, a wykorzystanie w praktyce nieznaczne. Stworzyli je niezależnie od siebie Gunther, Aprile, Matikaszwili i Chuchunaszwili.

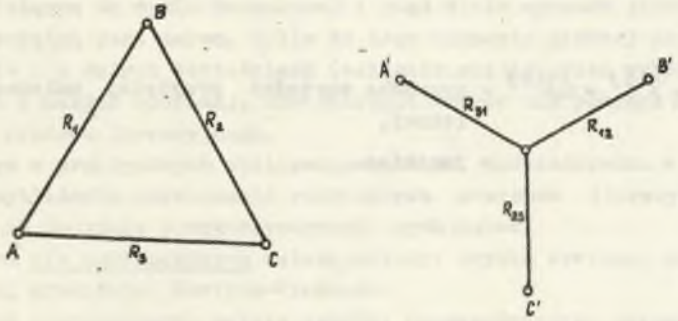
## 4. Podział metod ze względu na stosunek do struktury sieci

Przy dokładnej analizie metod cyklowych widać między innymi dosyć duże różnice w odniesieniu do struktury sieci. Jedne z nich, jak np. metody Crossa-Barczyka, Coja-Rogowa, Newtona, gradientu, zachowują strukturę sieci w procesie obliczeniowym, a drugie, jak np. metody Aprile-Sciorty, Van den Dungena, rekurencyjna Bystronia tę strukturę zmieniają. H. Bystroń określa [6] zmianę struktury jako tworzenie modelu sieci, a metody zmieniające strukturę jako metody modelowe.

W pracy niniejszej przyjmuje się podział metod na zachowujące i zmieniające strukturę sieci. Zmiana struktury polega na różnym rozszczepieniu bocznic (rys. 1) lub przekształceniu trójkąt-gwiazda (rys. 2). Zasadniczą korzyścią, dla której stosuje się rozszczepienie bocznic, jest obliczenie




Rys. 1




Rys. 2

poprawek natężenia przepływu $\Delta\dot{V}$ dla bocznic należących do różnych cyklów niezależnych z uwzględnieniem tylko części oporu tych bocznic. Poprawki nie są więc sumowane. W metodach zachowujących strukturę pojedyncze poprawki posiadają prądy niezależne, wszystkie inne mają poprawkę będącą sumą poprawek kilku prądów niezależnych. Poza tym w poprawkach częściowych uwzględnione są całe opory bocznic. Stosowanie metod ze zmianą struktury sieci wpływa zazwyczaj na wzrost szybkości i zbieżności obliczeń w porównaniu z metodami zachowującymi tę strukturę.

## 5. Podział metod ze względu na matematyczną poprawność wyprowadzenia wzorów poprawek

Sposób rozwiązania układów równań nieliniowych, oparty na analogii z przybliżonym rozwiązaniem układu równań nieliniowych podanym przez Newtona, uznaje się za matematycznie poprawny. Podobnie wyprowadzenie metody gradientu ma głębokie uzasadnienie w analizie matematycznej. Można więc przypuszczać, że przy spełnieniu żądanych warunków uzyskuje się zbieżny proces iteracyjny do istniejącego rozwiązania. Wadą tych metod jest jednak bardzo wolna zbieżność i ograniczenie zastosowań z uwagi na wstępne założenia. W praktyce znalazły zastosowanie metody szybko zbieżne, ale wyprowadzone niepoprawnie pod względem matematycznym. Niepoprawność ta polega na grubych uproszczeniach matematycznych przy wyprowadzeniu wzorów na poprawki. Najpoważniejszym uproszczeniem jest przyjęcie jednakowej poprawki dla wszystkich bocznic cyklu. Na przykład w metodzie Newtona otrzymuje się dla układu równań nieliniowych zapisanych w skróconej formie wektorowej

$$f(\vec{x}) = 0 \tag{9}$$

następująca postać kolejnych kroków iteracyjnych

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} - \left[J(\vec{x})^{(k)}\right]^{-1} f(\vec{x})^{(k)} \tag{10}$$

gdzie:

$\vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^{(k)} = \Delta\vec{x}^{(k)}$ - poprawka wartości przyjętej zmiennej niezależnej,

$J(\vec{x})$ - jakobian.

Dużą trudnością jest odwrócenie i obliczenie jakobianu, toteż w metodach uproszczonych pomija się wszystkie elementy jakobianu poza główną przekątną ( przyjmując je równe zeru). Otrzymuje się następującą postać rozpisanego jakobianu:

$$J(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Każde równanie układu (9) można więc rozpatrywać osobno,określając poprawkę:

$$\Delta x^{(k)} = x^{(k+1)} - x^{(k)} = - \frac{f_1(x_1)^{(k)}}{\left[\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right]} = - \frac{f_1(x_1)^{(k)}}{f_1'(x_1)^{(k)}} \qquad (12)$$

W równaniach wystąpi więc zawsze jeden element głównej przekątnej jakobianu.

Przyjmując postać równań kwadratowych, opisujących charakterystykę elementów, poprawkę wartości zmiennej niezależnej określać będzie znany wzór

$$\Delta \dot{V}^{(k)} = - \frac{\sum_i R_{ki} \dot{V}_{ki}^2}{2 \sum_i R_{ki} |\dot{V}_{ki}|} \qquad (13)$$

Łatwo zauważyć, że mianownik jest pochodną licznika tak, jak tego żąda ogólny wzór (12).

Przedstawione grube uproszczenia w wyprowadzeniu wzoru na poprawki w metodach uproszczonych znajduje usprawiedliwienie w strukturze sieci.

Równania nieliniowe cyklów zawierają znikomą ilość wyrazów (odpowiadających należącym do cyklu bocznicom) i stąd wiele wyrazów jakobianu poza główną przekątną jest zerem. O ile do tego elementy głównej przekątnej będą dodatnie i o dużych wartościach (osiągnie się je przez wybór drzewa z bocznicami o małych oporach), uproszczenie wzorów nie pociąga zupełnej rozbieżności procesu iteracyjnego.

Poza tym w praktycznych obliczeniach dzięki doświadczeniu w doborze zerowego przybliżenia uzyskiwanie rozbieżnych procesów iteracyjnych jest rzadkie i to decyduje o wykorzystywaniu tych metod.

Do metod nie uproszczonych należą metody: zwykła Newtona, zmodyfikowana Newtoda, gradientu, Newtona-Wychandu.

Do metod uproszczonych należą metody: Crossa-Barczyka,Coja-Rogowa,Scota-Hinsleya, Bystronia, Aprile-Sciorty i inne stosowane w praktyce.

Tablica 1

Podział metod przybliżonego rozwiązania rozpływu powietrza w sieci wentylacyjnej

| Podział ze względu na postać równań (sformułowanie) | Podział ze względu na stosunek do struktury sieci | Podział ze względu na matematyczną poprawność | Przykłady metod bardziej znanych w literaturze |
|---|---|---|---|
| Cyklowe (oczkowe) | Zachowujące strukturę | Nie uproszczone | Metoda Newtona, zmodyfikowana metoda Newtona. Metoda gradientu (najszybszego spadku), metoda Newtona-Wychandu, metoda parametryczna Bystronia |
| | | Uproszczone | Metoda Barczyka, metoda Crossa, metoda Scotta-Hinsleya, metoda Łobaczewa, metoda Andrijaszewa, metoda Suzuki, metoda linearyzacji Coja-Rogowa, metoda krakowianowa Kochmańskiego, metoda ekstrapolacyjna Abramowa-Tjana-Potjemkina, metoda linearyzacji Jepiszewa, metoda nadrelaksacji (Tuppeck, Mc Pherson) |
| | Zmieniające strukturę | Nie uproszczone | Brak |
| | | Uproszczone | Metoda Protodjakonowa, metoda Aprilego-Sciorty, metoda Greuera, metoda Abramowa-Podolskiego-Frołowa (trójkąt-gwiazda) i wykorzystanie metody najmniejszych kwadratów, metoda Vanden Dungena (trójkąt-gwiazda), metoda rekurencyjna Bystronia |
| Węzłowe | Zachowujące strukturę | Nie uproszczone | Nie stosowano dotąd, ale istnieje możliwość zastosowania klasycznych metod: Newtona, gradientu i ich modyfikacji |
| | | Uproszczone | Metoda Aprilego, metoda Gunthera, metoda Matikaszwili-Chuchunaszwili |
| | Zmieniające strukturę | Nie uproszczone | Brak |
| | | Uproszczone | Brak |

## Zakończenie

Zestawienie podziału metod przybliżonego rozwiązywania rozpływu powietrza w sieciach wentylacyjnych (bardziej znanych w literaturze) dla pokazania zasadniczych związków między nimi przedstawia tablica 1. Oprócz związków zasadniczych istnieje wiele pomniejszych wynikających z uwzględnienia lub pomijania rzeczywistego przebiegu charakterystyk wentylatorów, stosowania lub niestosowania nadrelaksacji w postaci współczynników korygujących, stosowania różnych sposobów linearyzacji charakterystyk elementów, wykorzystywania lub nie wykorzystywania wyników częściowych obliczeń itp.

Stosowanie w praktyce tej lub innej metody wiąże się obecnie w poszczególnych krajach z istnieniem własnych osiągnięć w teorii sieci, a mniej z bezstronnym doborem właściwej dla danej sieci metody.

Wskazanie czynników wiążących metody może prowadzić do wyboru kryteriów oceny przydatności poszczególnych metod w obliczeniach wentylacyjnych.

## LITERATURA


1. Abramow F.A. - Novyj mietod raščeta složnogo diagonol-nogo sojedinie nija. Gornyj Żurnał, 1957 nr 2.
2. Aprile G. - Il metodo delle correnti parziali, nel calcolo dei circuiti ventilazione mineraria. L'Ind. Min., giugno 1958.
3. Aprile G. - Risoluzione delle reti di ventilazione mediante il rilassamento delle pressioni ai nodi. Ind. Min. 1968, 10, nr 9, s. 467-469.
4. Budryk W. - Wentylacja Kopalń, WGH, 1951.
5. Bystroń H. - Metoda modelowa wyznaczania rozpływu powietrza w specjalnych sieciach wentylacyjnych. Prace Naukowe Inst. Górn. Pol. Wrocław. nr 3 serii St.iMat.
6. Bystroń H. - Metody modelowe wyznaczania rozpływu powietrza w aktywnych sieciach wentylacyjnych, Przegl. Górn. 1970, nr 10, s.428-451.
7. Bystroń H. - Rekurencyjna metoda modelowa wyznaczania rozpływu powietrza w pasywnych sieciach wentylacyjnych. Przegl. Górn. 1970, nr 9.
8. Coj S., Rogow E.J. - Osnovy tieorii ventilacjonnych setiej. Ałma-Ata, Nauka 1965.
9. Cross H. - Analysis of flow in networks of conduits of conduktors. Bull. 286 Eng. Expt. Station 1936 Univ. of Illinois.
10. Czeczott - Teoria prądów przekątnych. Praca AG z. 1 Kraków 1925.
11. Dungen Von den L. Calcul des réseaux de ventilation - méthode directe. Ann. Min. Belg. 1958 nr 7/8, s. 689-96.
12. Gunther J. - Une nouvelle methode de calcul des réseaux d'aérage. Rev. ind. miner. 1967, 49, nr 11.
13. Kochmański T. - Zastosowanie krakowianów do obliczenia wentylacji kopalń i problemu odwracania prądów, ZN AGH nr 2 Górnictwo z. 2, 1954.

14. Matikaszwili T.J., Chuchunaszwili E.J. - Mietod iteracjonnoga rasčeta słożnoj ventilacjonnoj sistiemy biez jejo topologičeskogo analiza. Vopr. dinamiki šachtnych turbomašin i ich sietiej. Tbilisi 1967, s. 12-22.

15. Scott D.R., Hinsley F.B. - Ventilation Network Theory. Coll. Engng. nr 324, 326, 328, 334, 1951-52.

16. Sciorta R. - Risoluzione numerica delle reti di ventilazione mineraria. Rivista Min. Sic., luglio-ottobre, 1958, Palermo.

17. Tołmaczew S.T. - Rasčet słożnych diagonolnych sojedinienij mietodom prieobrazovonija trieugolnika ekvivalentnuju zviezdu. Izv. VUZ G. Ž. 1967/12.

Р е з ю м е

В статье рассматриваются общие свойства методов приближённого расчета распределения потоков воздуха в вентиляционных сетях и даётся их классификацию по виду математической модели, по отношению к структуре сети и по математическим упрощениям при выводе формулы для определения поправки корня.

R é s u m é

Dans l'exposé sont mentionnées les principes des méthodes approximatives de calcul de la répartition du courant d'air dans les rés eaux d'aéra ge. On présente de même leur classification en rapport avec:
- le modèle mathématique,
- leurs relations avec la structure du réseua,
- ainsi qu'une simplification methématique se rapportant aux élaborations des formules de correction.

S u m m a r y

In the paper the motives of methods approximatives calculation of the draught repartition air in ventilation networks has been presented.

We give also theirs division in dependence with mathematic model, theirs relations with the networks structure and also in depending on mathematic simplification during the elaboration of corrections formulae.