ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Seria: GÓRNICTWO z. 54 Nr kol. 355

Prof. dr hab. inż. M. Chudek
Dr inż. B. Drzęźla
Dr inż. W. Olaszowski

METODA OKREŚLANIA DEFORMACJI GÓROTWORU PRZY EKSPLOATACJI GÓRNICZEJ WEDŁUG TEORII CAŁKOWEJ

Streszczenie. W pracy wyprowadzono, na podstawie teorii S. Knothego, wzory na wszystkie podstawowe wskaźniki deformacji górotworu pod wpływem eksploatacji w kształcie prostokąta. W oparciu o zasadę superpozycji wpływów wzory te mogą być stosowane przy eksploatacji o dowolnym kształcie. Wyprowadzenie poszczególnych wzorów było możliwe dzięki ułożeniu równania powierzchni niecki osiadania (wzór 2.1) dla eksploatacji jak na rys. 1.

1. Wstęp

W pracy podano metodę wyznaczania wielkości podstawowych wskaźników deformacji górotworu przy eksploatacji o skończonych wymiarach. Wyprowadzone w pracy wzory dotyczą eksploatacji w kształcie prostokąta, ale w oparciu o zasadę superpozycji wpływów można rozciągnąć ich stosowanie na dowolne kształty obszaru eksploatacji.

Wspomnianą metodę określania deformacji górotworu można zastosować przy dowolnej teorii całkowej. W pracy ograniczono się jednak do przedstawienia wzorów wynikających z teorii S. Knothego - W. Budryka [1, 8], ponieważ przy prognozowaniu wpływów eksploatacji podziemnej na obiekty wyżej leżące, za pomocą wzorów tej teorii, stosuje się najczęściej wzory określające maksymalne wielkości wskaźników deformacji. Wprawdzie zapewnia to często duży współczynnik bezpieczeństwa dla chronionych obiektów, ale niekiedy może być powodem niepotrzebnych obostrzeń w stosunku do projektowanej pod obiektami eksploatacji, niewskazanych z punktu widzenia interesów gospodarki narodowej. Obostrzenia takie wystąpią wtedy, gdy kształt obszaru eksploatacji znacznie odbiega od nieskończonej półpłaszczyzny lub nieskończonego pasa eksploatacji (albo calizny) o odpowiedniej szerokości. Poza tym prognozowane wskaźniki deformacji mogą być znacznie przesadzone w stosunku do rzeczywistości przy eksploatacji kilku pokładów w związku ze spotykaną często błędną interpretacją wzorów na maksymalne wskaźniki deformacji, polegającą na algebraicznym sumowaniu wielkości będących wielkoś-

ciami wektorowymi lub tensorowymi, bez uwzględnienia kierunku ich występowania.

Wzory wyprowadzone w pracy pozwalają uniknąć błędów prognozowania skutków eksploatacji, o ile znane są parametry górotworu występujące we wzorach omawianej teorii.

2. Równanie powierzchni niecki osiadania

Przyjmujemy prawoskrętny układ współrzędnych prostokątnych (x,y,z) o osi z skierowanej pionowo w górę.

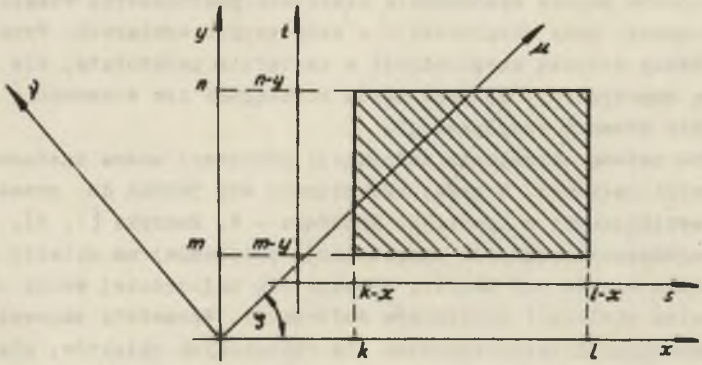
Osiadanie punktu leżącego w początku układu współrzędnych pod wpływem wybrania prostokąta o bokach równoległych do osi poziomego układu współrzędnych (x,y) (rys. 1) wyraża się w teorii S. Knothego wzorem [8]:

$$w = \frac{-w_{max}}{r^2} \int_k^l dx \int_m^n e^{-\frac{\pi}{r^2}(x^2+y^2)} dy,$$

gdzie

w_{max} - maksymalne osiadanie przy wybieraniu danego pokładu, osiadanie to wystąpi po wybraniu pokładu na dostatecznie dużym obszarze,

r - promień zasięgu wpływów głównych.



Rys. 1. Schemat do wyznaczenia równania niecki osiadania

Osiadanie traktujemy tutaj jako pionową składową przemieszczenia punktu, stąd znak minus w powyższym wzorze.

W punkcie o współrzędnych (x,y) umiejscawiamy początek nowego układu współrzędnych prostokątnych (s,t) o osiach równoległych odpowiednio do osi x i y. Osiadanie początku układu współrzędnych (s,t) wyniesie:

$$w(x,y) = \frac{-w_{max}}{r^2} \int_{k-x}^{l-x} ds \int_{m-y}^{n-y} e^{-\frac{\pi}{r^2}(s^2+t^2)} dt. \qquad (2.1)$$

Równanie (2.1) jest równaniem powierzchni niecki osiadania, z którego można otrzymać wzory na wielkości wszelkich deformacji.

3. Nachylenia przekrojów pionowych niecki osiadania

Stan nachylenia powierzchni w punkcie charakteryzują nachylenia przekrojów pionowych w dwu dowolnych kierunkach. Najlepiej, gdy są to kierunki prostopadłe.

Nachylenie przekroju pionowego jest pochodną równania niecki względem odpowiedniej zmiennej. Dla kierunków osi x i y mamy:

$$T_x(x,y) = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{w_{max}}{r^2}\left[e^{-\frac{\pi}{r^2}(l-x)^2} - e^{-\frac{\pi}{r^2}(k-x)^2}\right] \cdot \int_{m-y}^{n-y} e^{-\frac{\pi}{r^2}t^2} dt \qquad (3.1.1)$$

$$T_y(x,y) = \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{w_{max}}{r^2}\left[e^{-\frac{\pi}{r^2}(n-y)^2} - e^{-\frac{\pi}{r^2}(m-y)^2}\right] \cdot \int_{k-x}^{l-x} e^{-\frac{\pi}{r^2}s^2} dt \qquad (3.1.2)$$

Na podstawie wzorów (3.1) można określić równanie różniczkowe rodziny krzywych maksymalnego nachylenia:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{T_y(x,y)}{T_x(x,y)} \qquad (3.2)$$

oraz równanie różniczkowe rodziny krzywych zerowego nachylenia, czyli izolinii osiadania:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{T_x(x,y)}{T_y(x,y)}. \qquad (3.3)$$

Rozwiązaniem równania (3.3) są krzywe dane w postaci uwikłanej [4]

$$-\frac{w_{max}}{r^2} \int_{k-x}^{l-x} ds \int_{m-y}^{n-y} e^{-\frac{\pi}{r^2}(s^2+t^2)} dt = C, \qquad (3.4)$$

gdzie:

C - osiadanie punktu początkowego.

Obie rodziny krzywych stanowią na płaszczyźnie ortogonalną siatkę krzywych.

4. Krzywizny przekrojów pionowych niecki osiadania

Krzywiznę powierzchni w punkcie charakteryzują trzy elementy. Są to:

K_x - krzywizna przekroju pionowego równoległego do osi x,
K_y - krzywizna przekroju pionowego równoległego do osi y,
K_{xy} - skręcenie geodezyjne osi x (lub y).

Zgodnie z uproszczeniem przyjętym w pracy [8] krzywizny obliczamy jako drugą pochodną równania niecki osiadania względem odpowiedniej zmiennej.

$$K_x(x,y) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{2\pi \cdot w_{max}}{r^4}\left[(l-x) \cdot e^{-\frac{\pi}{r^2}(l-x)^2} - (k-x) \cdot e^{-\frac{\pi}{r^2}(k-x)^2}\right] \cdot \int_{m-y}^{n-y} e^{-\frac{\pi}{r^2}t^2}\,dt \tag{4.1.1}$$

$$K_y(x,y) = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{2\pi \cdot w_{max}}{r^4}\left[(n-y) \cdot e^{-\frac{\pi}{r^2}(n-y)^2} - (m-y) \cdot e^{-\frac{\pi}{r^2}(m-y)^2}\right] \cdot \int_{k-x}^{l-x} e^{-\frac{\pi}{r^2} \cdot s^2}\,ds \tag{4.1.2}$$

Natomiast skręcenie geodezyjne określono w pracy [4] według [6] z pominięciem wielkości małych wyższego rzędu, jako drugą pochodną mieszaną równania niecki osiadania:

$$K_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} = \frac{-w_{max}}{r^2}\left[e^{-\frac{\pi}{r^2}(l-x)^2} - e^{-\frac{\pi}{r^2}(k-x)^2}\right] \cdot \left[e^{-\frac{\pi}{r^2}(n-y)^2} - e^{-\frac{\pi}{r^2}(m-y)^2}\right] \tag{4.1.3}$$

5. Przemieszczenia poziome

W teorii S. Knothego, uzupełnionej przez W. Budryka [1] o rozwiązanie zagadnienia przemieszczeń i odkształceń poziomych, przyjmuje się za G. Awierszynem liniowy związek między przesunięciem poziomym a nachyleniem niecki osiadania. Stąd równania przemieszczeń poziomych będą następujące:

$$u(x,y) = - B \cdot T_x(x,y) = - B \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \tag{5.1.1}$$

$$v(x,y) = - B \cdot T_y(x,y) = - B \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \tag{5.1.2}$$

gdzie

u,w - składowe przemieszczenia odpowiednio w kierunku osi x i y,

B - współczynnik proporcjonalności, $B>0$.

Ze związków (5.1) wnioskujemy, że takie charakterystyczne kierunki jak kierunek maksymalnego i kierunek zerowego nachylenia [4], będą się pokrywać z odpowiednimi kierunkami dla przesunięć. Można tutaj również określić równania analogiczne do (3.2) i (3.4).

Łatwo wykazać, że według omawianej teorii pole przemieszczeń poziomych jest polem potencjalnym [7, 10], czyli istnieje funkcja $\phi = \phi(x,y)$ zwana potencjałem pola taka, że

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = u$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = v.$$

Istnienie funkcji ϕ o własnościach jak wyżej wynika z faktu, że

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = - B \cdot K_{xy}. \tag{5.2}$$

Potencjał pola przemieszczeń poziomych wynosi:

$$\phi(x,y) = - B \cdot w(x,y)$$

W dalszym ciągu pracy będziemy korzystać ze związków:

$$\begin{aligned} u_\mu &= u \cos\varphi + v \sin\varphi \\ u_\nu &= -u \sin\varphi + v \cos\varphi, \end{aligned} \tag{5.3}$$

gdzie

u_μ, u_ν - składowe przemieszczenia w kierunku osi układu (μ,ν) obróconego względem układu (x,y) o kąt φ (rys. 1)

oraz ze wzorów na zamianę współrzędnych:

$$x = \mu \cos\varphi - \nu \sin\varphi$$
$$y = \mu \sin\varphi + \nu \cos\varphi \tag{5.4}$$

6. Odkształcenia właściwe poziome

Płaski stan odkształcenia określają trzy elementy:

ε_x - odkształcenie właściwe w kierunku osi x,
ε_y - odkształcenie właściwe w kierunku osi y,
γ_{xy} - odkształcenie postaciowe odpowiadające kierunkom osi x i y.

Zgodnie z założeniem liniowego związku między przesunięciami a nachyleniami mamy:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = - B \cdot K_x \tag{6.1.1}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = - B \cdot K_y \tag{6.1.2}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = - 2 \cdot B \cdot K_{xy}. \tag{6.1.3}$$

Ze wzorów (6.1) wynika, że kierunki główne odkształceń będą się pokrywać z kierunkami głównymi krzywizn, a kierunki odkształceń zerowych z kierunkami asymptotycznymi. W przypadku odkształceń można również określić równania krzywych analogicznie do równań linii krzywiznowych i asymptotycznych [4, 5, 6], przy czym dla jednego i drugiego wskaźnika deformacji odpowiednie linie będą się pokrywać.

7. Obroty elementów liniowych

Przybliżone wielkości kątów obrotu elementów liniowych równoległych do osi układu współrzędnych (x,y) oblicza się następująco [7, 11]:

$$\lambda_x = \frac{\partial v}{\partial x}$$
$$\lambda_y = - \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{7.1}$$

Dla dowolnego układu współrzędnych (μ, ν) będzie analogicznie:

$$\lambda_\mu = \frac{\partial u_\nu}{\partial \mu}$$
$$\lambda_\nu = - \frac{\partial u_\mu}{\partial \nu}.$$

Jeśli układ (μ, ν) będzie, jak poprzednio, obrócony względem układu (x,y) o kąt φ, to w oparciu o wzory (5.3) i (5.4) otrzymamy wzory transformacyjne na obroty elementów liniowych równoległych do osi układu (μ,ν)

$$\lambda_\mu = -(\varepsilon_x - \varepsilon_y)\sin\varphi\cos\varphi + \lambda_x\cos^2\varphi + \lambda_y\sin^2\varphi$$
$$\lambda_\nu = (\varepsilon_x - \varepsilon_y)\sin\varphi\cos\varphi + \lambda_x\sin^2\varphi + \lambda_y\cos^2\varphi \qquad (7.2)$$

Kierunki ekstremalnych wielkości obrotów znajdziemy z równania:

$$\frac{d\lambda_\mu}{d\varphi} = 0.$$

Po kilku przekształceniach otrzymamy ([11] - str. 41, ćw. 2):

$$\operatorname{tg} 2\varphi_\lambda = -\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{\gamma_{xy}} \qquad (7.3)$$

gdzie

φ_λ - kąt między osią x a kierunkiem obrotu ekstremalnego.

Wzór (7.3) określa (poza przypadkiem, gdy każdy kierunek jest kierunkiem głównym, co zachodzi np. nad środkiem kołowego filaru) dwa prostopadłe kierunki obrotów ekstremalnych. Jeden z tych kierunków stanowi dwusieczną kąta między kierunkami odkształceń głównych. Dla układu osi obróconych o kąt 45° względem kierunków głównych zachodzi zresztą maksimum odkształcenia postaciowego. Natomiast w kierunkach głównych obroty nie występują [11].

Na podstawie wzorów (7.2) i (7.3) obliczamy wielkości obrotów ekstremalnych (podobnie jak w [7] - t. II str. 131):

$$\lambda_{M,m} = \frac{1}{2}(\lambda_x + \lambda_y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma^2_{xy}}, \qquad (7.4)$$

gdzie

λ_M, λ_m - największa i najmniejsza (co do wartości względnej) wielkość obrotu elementu liniowego w danym punkcie.

Dla potencjalnego pola przemieszczeń podane wyżej wzory ulegają znacznemu uproszczeniu. Biorąc pod uwagę równość (5.2) oraz wzory (7.1) otrzymujemy

$$\lambda_x = -\lambda_y = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \qquad (7.1.a)$$

$$\lambda_\mu = -\lambda_\nu = -\frac{1}{2}(\varepsilon_x - \varepsilon_y)\sin 2\varphi + \lambda_x\cos 2\varphi \qquad (7.2.a)$$

$$\lambda_{M,m} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma^2_{xy}}. \tag{7.4.a}$$

Wzorów szczegółowych według teorii S. Knothego tutaj nie przytaczamy, ponieważ wszystkie wystąpiły już w punktach 5 i 6 opracowania.

8. Krzywizny poziome

8.1. Wzory ogólne

W wyniku ruchów górotworu każdy punkt ulega różnej wielkości i kierunku przesunięciom. Dlatego linia pozioma pierwotnie prosta przejdzie w pewną krzywą przestrzenną. Krzywiznę rzutu poziomego takiej krzywej nazwiemy krzywizną poziomą. Krzywizna pozioma jest więc wynikiem poziomych ruchów punktów górotworu.

Punkt (x,y,z) górotworu zmieni swe współrzędne poziome na (X,Y). Nowe współrzędne poziome punktu są określone wzorami:

$$\begin{aligned} X(x,y) &= x + u(x,y) \\ Y(x,y) &= y + v(x,y). \end{aligned} \tag{8.1}$$

Dostosowując znany z geometrii różniczkowej wzór na krzywiznę krzywej płaskiej, określonej równaniami parametrycznymi do równań (8.1), otrzymamy następujący wzór na krzywiznę poziomą w kierunku równoległym do osi x:

$$k_x = \frac{\frac{\partial X}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial Y}{\partial x}}{\left[1 + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} : \frac{\partial X}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} \cdot \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^3}.$$

Ponieważ wyrażenie

$$\frac{\partial Y}{\partial x} : \frac{\partial X}{\partial x}$$

oznacza nachylenie rozpatrywanych krzywych do osi x, które jest wielkością małą, więc jego kwadrat możemy pominąć, popełniając niewielki błąd.

Pozostałe wyrażenia wzoru rozwijamy otrzymując:

$$k_x = \frac{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}}{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^3}.$$

W dalszym ciągu pomijamy iloczyn pochodnych w liczniku, jako wielkość małą wyższego rzędu. Mamy więc:

$$k_x = \frac{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}{\left(1 + \varepsilon_x\right)^2} \tag{8.2}$$

Na ogół będzie można również przyjmować mianownik równy jedności co np przy odkształceniu $\varepsilon_x = 10\%$ spowoduje błąd obliczenia w wysokości ok 2%

$$k_x = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \tag{8.2.a}$$

Analogiczny wzór wyjściowy mamy dla kierunku równoległego do osi y:

$$k_y = \frac{\frac{\partial X}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial Y}{\partial y}}{\left[\left(\frac{\partial X}{\partial y} : \frac{\partial Y}{\partial y}\right)^2 + 1\right]^{\frac{3}{2}} \cdot \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)^3},$$

gdzie wyrażenie

$$\frac{\partial X}{\partial y} : \frac{\partial Y}{\partial y}$$

oznacza nachylenie rozpatrywanych krzywych do osi y.

Przyjmując uproszczenia jak wyżej dochodzimy do wzoru:

$$k_y = \frac{-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}{\left(1 + \varepsilon_y\right)^2} \tag{8.3}$$

lub po dalszym uproszczeniu:

$$k_y = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \tag{8.3.a}$$

Do dalszych rozważań przyjmujemy wzory na krzywiznę w najbardziej uproszczonej wersji.

Dla osi układu współrzędnych (μ, ν) będzie:

$$k_\mu = \frac{\partial^2 u_\nu}{\partial \mu^2}$$

$$k_\nu = -\frac{\partial^2 u_\mu}{\partial \nu^2}.$$

Jeśli układ (μ, ν) będzie obrócony względem (x,y) o kąt φ, to uwzględniając wzory (5.3) i (5.4) otrzymamy:

$$k_\mu = k_x \cos^3\varphi + 2\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\sin\varphi\cos^2\varphi + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\sin^2\varphi\cos\varphi -$$

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\sin\varphi\cos^2\varphi - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\sin^2\varphi\cos\varphi + k_y\sin^3\varphi$$

$$k_\nu = -k_x\sin^3\varphi + 2\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\sin^2\varphi\cos\varphi - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\sin\varphi\cos^2\varphi -$$

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\sin^2\varphi\cos\varphi + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\sin\varphi\cos^2\varphi + k_y\cos^3\varphi. \tag{8.4}$$

Kierunki ekstremalnych i zerowych wielkości krzywizn poziomych oraz ich wielkości ekstremalne można znaleźć podobnie jak w przypadku innych deformacji. Odpowiednie wzory pominiemy jednak ze względu na ich skomplikowaną postać i małe znaczenie praktyczne.

W potencjalnym polu przemieszczeń (wzór 5.2) będzie:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = k_x$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -k_y \tag{8.5}$$

w związku z czym wzory transformacyjne (8.4) ulegną uproszczeniu:

$$k_\mu = k_x \cdot \cos\varphi(3\cos^2\varphi - 2) + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\sin^2\varphi\cos\varphi -$$

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\sin\varphi\cos^2\varphi + k_y\sin\varphi(3\sin^2\varphi - 2)$$

$$k_\nu = -k_x\sin\varphi(3\sin^2\varphi - 2) - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\sin\varphi\cos^2\varphi -$$

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\sin\varphi\cos^2\varphi + k_y\cos\varphi(3\cos^2\varphi - 2) \tag{8.4.a}$$

3.2. Wzory szczegółowe

Poszczególne pochodne obliczymy w punkcie $x = 0$, $y = 0$:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{2\pi \cdot w_{max}}{r^4} \cdot B\left(l \cdot e^{-\frac{\pi}{r^2} l^2} - k \cdot e^{-\frac{\pi}{r^2} k^2}\right) \cdot \left(e^{-\frac{\pi}{r^2} n^2} - e^{-\frac{\pi}{r^2} m^2}\right) \tag{8.6.1}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} = \frac{2\pi \cdot w_{max}}{r^4} \cdot B\left(e^{-\frac{\pi}{r^2} l^2} - e^{-\frac{\pi}{r^2} k^2}\right) \cdot \left(n \cdot e^{-\frac{\pi}{r^2} n^2} - m \cdot e^{-\frac{\pi}{r^2} m^2}\right) \tag{8.6.2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2\pi \cdot w_{max}}{r^4} \cdot B\left[\left(2\pi \frac{k^2}{r^2} - 1\right) \cdot e^{-\frac{\pi}{r^2} k^2} - \left(2\pi \frac{l^2}{r^2} - 1\right) \cdot e^{-\frac{\pi}{r^2} l^2}\right] \cdot \int_m^n e^{-\frac{\pi}{r^2} t^2}\, dt \tag{8.6.3}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{2\pi \cdot w_{max}}{r^4} \cdot B\left[\left(2\pi \frac{m^2}{r^2} - 1\right) \cdot e^{-\frac{\pi}{r^2} m^2} - \left(2\pi \frac{n^2}{r^2} - 1\right) \cdot e^{-\frac{\pi}{r^2} n^2}\right] \cdot \int_k^l e^{-\frac{\pi}{r^2} s^2}\, ds \tag{8.6.4}$$

9. Wzajemne położenie charakterystycznych kierunków poszczególnych wskaźników deformacji w płaszczyźnie poziomej

Zagadnienie wzajemnego położenia charakterystycznych kierunków poszczególnych deformacji częściowo już poruszano w artykule. Obecnie wypowiedziane na ten temat uwagi zbierzemy w punktach i uzupełnimy o dalsze.

1. Kierunki główne krzywizn i odkształceń pokrywają się.
2. Kierunek maksymalnego nachylenia w punkcie pokrywa się z kierunkiem przesunięcia punktu, a kierunek zerowego nachylenia (czyli kierunek izolinii osiadania w danym punkcie) pokrywa się z kierunkiem prostopadłym do kierunku przesunięcia.

3. W kierunkach głównych krzywizn i odkształceń nie występują obroty i odkształcenie postaciowe.
4. W kierunkach odchylonych o kąt 45° od kierunków głównych występują maksymalne obroty i zachodzi maksimum odkształcenia postaciowego.

10. Odkształcenia właściwe pionowe

Wzory na odkształcenie pionowe podaje autor omawianej teorii m.in. w pracy [9]. W niniejszej pracy wzory na odkształcenie pionowe zostaną wyprowadzone dla eksploatacji w kształcie prostokąta, ponieważ w tym przypadku wielkość odkształcenia pionowego łatwo wyraża się przez krzywizny przekrojów pionowych.

W równaniu (2.1) podstawiamy r_z zamiast r, gdzie r_z jest funkcją określającą wielkość promienia zasięgu wpływów głównych w zależności od pionowej współrzędnej punktu górotworu [1, 9].

Po kilku przekształceniach otrzymamy:

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{r_z}{2\pi} \cdot \frac{dr_z}{dz} \cdot (K_x + K_y). \tag{10.1}$$

Wielkość ε_z nie zależy oczywiście od wyboru kierunków osi x i y, ponieważ dla danego punktu suma krzywizn pionowych w dwu prostopadłych kierunkach jest wielkością stałą [7].

11. Odchylenie linii pionowej od pionu

11.1. Wzory ogólne

Przyjmujemy, że oś z układu współrzędnych pokrywa się z rozpatrywaną linią pionową w górotworze. W wyniku eksploatacji linia ta przejdzie w krzywą o równaniu wektorowym:

$$\vec{\xi} = (u(z), v(z), z), \tag{11.1}$$

gdzie

u(z), v(z) - składowe przemieszczenia w kierunku osi x i y.

Ze względu na małe wielkości kąta odchylenia krzywej $\vec{\xi}$ od pionu będziemy przyjmować tangens tego kąta za jego wielkość. Podobnie zresztą postępuje się przy obliczaniu obrotu poziomego elementu liniowego.

Odchylenie od pionu rzutu krzywej $\vec{\xi}$ na płaszczyznę (x, z) wyniesie:

$$t_x = \frac{du}{dz}. \tag{11.2.1}$$

W dalszym ciągu wielkość t_x będziemy dla prostoty nazywać odchyleniem krzywej $\vec{\xi}$ w kierunku osi x lub odchyleniem w kierunku osi x.

W kierunku osi y krzywa $\vec{\xi}$ będzie się odchylać o kąt:

$$t_y = \frac{dv}{dz} \tag{11.2.2}$$

W kierunku osi układu (μ,ν) obróconego względem układu (x,y) o kąt φ (rys. 1) wielkości odchylenia wyniosą:

$$t_\mu = \frac{du_\mu}{dz} = t_x \cos\varphi + t_y \sin\varphi \tag{11.3}$$

$$t_\nu = \frac{du_\nu}{dz} = - t_x \sin\varphi + t_y \cos\varphi,$$

gdzie

u_μ, u_ν - składowe przemieszczenia w kierunkach osi μ i ν (wzory 5.3)

Kierunek największego odchylenia wyznaczymy z równania:

$$\frac{dt_\mu}{d\varphi} = 0.$$

Otrzymamy stąd:

$$\operatorname{tg}\varphi_t = \frac{t_y}{t_x}, \tag{11.4}$$

gdzie

φ_t - kąt między kierunkiem osi x a kierunkiem największego odchylenia krzywej $\vec{\xi}$ od pionu.

Po wstawieniu (11.4) do pierwszego z równań (11.3) otrzymamy wielkość największego odchylenia:

$$t_M = \sqrt{t_x^2 + t_y^2}. \tag{11.5}$$

Podnosząc równania (11.3) obustronnie do kwadratu i dodając stronami dowodzimy następującego związku:

$$t_x^2 + t_y^2 = t_\mu^2 + t_\nu^2 = t_M^2, \tag{11.6}$$

czyli suma kwadratów odchyleń linii pionowej w dwu prostopadłych kierunkach jest dla danego punktu wielkością stałą i równa się kwadratowi odchylenia maksymalnego w tym punkcie.

Z kolei kierunek zerowego odchylenia wyznaczamy z równania $t_\mu = 0$, otrzymując:

$$\operatorname{tg}\varphi_{to} = - \frac{t_x}{t_y},$$

czyli

$$\varphi_{to} = \varphi_t \pm 90^o, \tag{11.7}$$

gdzie

φ_{to} - kąt między osią x a kierunkiem zerowego odchylenia prostej od pionu.

Kąt między krzywą $\bar{\xi}$ a osią z będzie właściwym odchyleniem rozpatrywanej linii od pionu. Kosinus tego kąta wyniesie:

$$\cos t = \frac{\dot{\bar{\xi}} \cdot \bar{k}}{|\dot{\bar{\xi}}| \cdot |\bar{k}|} = \frac{1}{\sqrt{1 + t_M^2}},$$

gdzie

$\bar{k}$ - wersor osi z, $\bar{k} = (0,0,1)$.

Powyższy wzór upraszczamy kolejno:

$$\sin t = \frac{t_M}{\sqrt{1 + t_M^2}}$$

$$t \cong \frac{t_M}{\sqrt{1 + t_M^2}} \cong t_M. \tag{11.8}$$

Przyjęte uproszczenia są uzasadnione małymi wielkościami maksymalnego odchylenia t_M.

Właściwe odchylenie linii pionowej od pionu jest więc w przybliżeniu równe odchyleniu od pionu rzutu krzywej $\bar{\xi}$ na płaszczyznę pionową przechodzącą przez oś z i nachyloną do osi x pod kątem φ_t (wzór 11.4).

11.2. Wzory szczegółowe

We wzorach (3.1) i (5.1) podstawiamy x = y = 0, a wielkości r i B traktujemy jako funkcje określające dane parametry w zależności od pionowej współrzędnej punktu górotworu. Składowe przemieszczeń poziomych punktów rozpatrywanej linii pionowej wyniosą (przy eksploatacji jak na rys.1)

$$u = u(z) = B \cdot \frac{w_{max}}{r^2} \left(e^{-\pi k^2/r^2} - e^{-\pi l^2/r^2}\right) \cdot \int_m^n e^{-\pi t^2/r^2}\, dt$$

$$v = v(z) = B \cdot \frac{w_{max}}{r^2} \left(e^{-\pi m^2/r^2} - e^{-\pi n^2/r^2}\right) \cdot \int_k^l e^{-\pi s^2/r^2}\, ds \tag{11.9}$$

Odchylenia linii pionowej od pionu w kierunkach obu osi poziomego układu współrzędnych obliczamy według wzorów (11.2) otrzymując:

$$t_x = \frac{du}{dz} = L \cdot u - M\, k_y + N \left[k^2 f(k) - l^2 f(l)\right] J(m,n)$$

$$t_y = \frac{dv}{dz} = L \cdot v + M\, k_x + N \left[m^2 f(m) - n^2 f(n)\right] J(k,l), \tag{11.10}$$

gdzie

$$L = \frac{1}{B}\frac{dB}{dz} - \frac{1}{r}\frac{dr}{dz}$$

$$M = \frac{r}{2\pi}\frac{dr}{dz} \; (= B)$$

$$N = B\,\frac{2\pi\, w_{max}}{r^5}\frac{dr}{dz}$$

$$f(\alpha) = e^{-\pi\alpha^2/r^2}$$

$$J(\alpha, \beta) = \int_{\beta}^{\alpha} e^{-\pi\gamma^2/r^2}\, d\gamma$$

k_x, k_y - krzywizny poziome odpowiednio w kierunku osi x i y (wzory 8.2a, 8.3a, 8.6).

12. Krzywizna linii pionowej

12.1. Wzory ogólne

Krzywizna rzutu krzywej ξ (równanie 11.1) na płaszczyznę (x,z) wyraża się wzorem:

$$h_x = \frac{\frac{d^2u}{dz^2}}{\left[1 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{\frac{d^2u}{dz^2}}{(1 + t_x^2)^{3/2}}.$$

Popełniając minimalny błąd przyjmujemy

$$1 + t_x^2 \cong 1,$$

wobec czego wzór na krzywiznę uprości się do postaci:

$$h_x = \frac{d^2u}{dz^2}. \tag{12.1.1}$$

Z kolei krzywizna rzutu krzywej $\bar{\varrho}$ na płaszczyznę (y,z) wyniesie:

$$h_y = \frac{d^2 y}{dz^2} \tag{12.1.2}$$

Wielkości h_x i h_y będziemy w dalszym ciągu nazywać krzywiznami linii pionowej odpowiednio w kierunkach osi x i y.

Łatwo wykazać, że dla krzywizn linii pionowej zachodzą wzory całkowicie analogiczne do wzorów (11.3 ÷ 11.7), a w szczególności można dowieść że

$$h_M = \sqrt{h_x^2 + h_y^2} \tag{12.2}$$

gdzie

h_M - największa wielkość krzywizny rzutu krzywej $\bar{\varrho}$ na płaszczyznę pionową. Płaszczyzna ta jest nachylona do osi x pod kątem φ_h określonym równaniem:

$$\operatorname{tg} \varphi_h = \frac{h_y}{h_x}. \tag{12.3}$$

Właściwą wielkość krzywizny krzywej przestrzennej $\bar{\varrho}$ obliczamy według wzoru [6]:

$$h = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}{(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{z}^2)^{3/2}},$$

gdzie

$$A = \begin{vmatrix} \dot{v} & \dot{z} \\ \ddot{v} & \ddot{z} \end{vmatrix} = - h_y$$

$$B = \begin{vmatrix} \dot{z} & \dot{u} \\ \ddot{z} & \ddot{u} \end{vmatrix} = h_x$$

$$C = \begin{vmatrix} \dot{u} & \dot{v} \\ \ddot{u} & \ddot{v} \end{vmatrix} = t_x \cdot h_y - t_y h_x.$$

Pomijając wyrazy małe wyższego rzędu, otrzymujemy:

$$h \cong h_M \tag{12.4}$$

Krzywizna krzywej $\bar{\varrho}$ jest więc w przybliżeniu równa największej krzywiźnie rzutu tej krzywej na płaszczyznę pionową.

12.2. Wzory szczegółowe

W celu określenia krzywizny linii pionowej w kierunkach osi płaskiego układu współrzędnych (x,y) według teorii S. Knothego różniczkujemy równania (11.9) dwukrotnie względem współrzędnej z. Po przekształceniach otrzymamy:

$$h_x = \frac{d^2u}{dz^2} = P \cdot u + Q \cdot E_x + R(F_x + G_x + H_y) - S \cdot k_y$$
$$h_y = \frac{d^2v}{dz^2} = P \cdot v + Q \cdot E_y + R(F_y + G_y + H_x) + S \cdot k_x \qquad (12.5)$$

gdzie

$$P = \frac{1}{B}\frac{d^2B}{dz^2} - \frac{1}{r}\frac{d^2r}{dz^2} + \frac{2}{r}\left(\frac{dr}{dz}\right)^2 - \frac{2}{rB}\frac{dB}{dz}\frac{dr}{dz}$$

$$Q = \frac{w_{max}}{r^2}\left[2\frac{dB}{dz}\frac{dr}{dz} - 5\frac{B}{r}\left(\frac{dr}{dz}\right)^2 + B\frac{d^2r}{dz^2}\right]$$

$$R = B \cdot \frac{w_{max}}{r^3}\left(\frac{dr}{dz}\right)^2$$

$$S = \frac{1}{2\pi}\left[2\frac{r}{B}\frac{dB}{dz}\frac{dr}{dz} - 4\left(\frac{dr}{dz}\right)^2 + r\frac{d^2r}{dz^2}\right]$$

u, v - składowe przemieszczenia w kierunkach osi x i y
k_x, k_y - krzywizny poziome w kierunkach osi x i y.

$$E_x = \frac{2\pi}{r^3}\left[k^2 f(k) - l^2 f(l)\right] \cdot J(m,n)$$

$$E_y = \frac{2\pi}{r^3}\left[m^2 f(m) - n^2 f(n)\right] \cdot J(k,l)$$

$$F_x = \frac{4\pi^2}{r^5}\left[k^4 f(k) - l^4 f(l)\right] \cdot J(m,n)$$

$$F_y = \frac{4\pi^2}{r^5}\left[m^4 f(m) - n^4 f(n)\right] \cdot J(k,l)$$

$$G_x = \frac{4\pi}{r^3}\left[k^2 f(k) - l^2 f(l)\right]\left[mf(m) - nf(n)\right]$$

$$G_y = \frac{4\pi}{r^3}\left[m^2 f(m) - n^2 f(n)\right]\left[kf(k) - lf(l)\right]$$

$$H_x = \frac{2\pi}{r^3}\left[k^3 f(k) - l^3 f(l)\right]\left[f(m) - f(n)\right]$$

$$H_y = \frac{2\pi}{r^3}\left[m^3 f(m) - n^3 f(n)\right]\left[f(k) - f(l)\right],$$

gdzie z kolei:

$$f(\alpha) = e^{-\pi\alpha^2/r^2}$$

$$J(\alpha,\beta) = \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\pi\gamma^2/r^2}\, d\gamma.$$

12. Zakończenie

Wzory teorii S. Knothego - W. Budryka są najczęściej stosowane w codziennej praktyce inżynierskiej. Stosuje się jednak wzory najbardziej uproszczone odnoszące się do eksploatacji w kształcie półpłaszczyzny. Utrudnia to lub uniemożliwia nawet rozwiązywanie szeregu zagadnień inżynierskich takich jak odpowiednie kształtowanie frontów wybierania w danym pokładzie oraz koordynacja frontów w różnych pokładach. Niniejsza praca przynosi pełny zestaw potrzebnych do takich celów wzorów wyprowadzonych w oparciu o podstawowe wzory i założenia omawianej teorii.

LITERATURA

1. W. Budryk - "Wyznaczenie wielkości poziomych odkształceń terenu" Archiwum Górnictwa i Hutnictwa, t. I zeszyt 1 - 1953 r.
2. M. Chudek, W. Olaszowski, B. Drzęźla - "Obliczanie deformacji szybu pod wpływem eksploatacji. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, seria Górnictwo z. 48, 1972 r.
3. C. Daunesse, Y. Rambaud - Les affaissements miniers dans le bassin du Nord et du Pas - de - Calais. Les Annales des Mines no 10, 1963.
4. B. Drzęźla - "Pionowe deformacje górotworu przy eksploatacji górniczej", Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej seria Górnictwo, z. 37, 1969.
5. B. Drzęźla - "Poziome deformacje górotworu przy eksploatacji górniczej", Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej seria Górnictwo, z. 44, 1971 r.
6. A. Goetz - "Geometria różniczkowa", PWN - Warszawa 1965.
7. M. Huber - "Teoria sprężystości", PWN - Warszawa 1954 r.
8. S. Knothe - "Równanie profilu ostatecznie wykształconej niecki osiadania", Archiwum Górnictwa i Hutnictwa, t. I zeszyt 1 - 1953 r.
9. S. Knothe, J. Leśniak - "Wyznaczenie wielkości spodziewanych wpływów eksploatacji w szybowych filarach ochronnych" Archiwum Górnictwa t.XI zeszyt 4, 1966 r.

10. B. Średniawa, J. Weyssenhoff - "Mechanika środowisk rozciągłych" PWN Warszawa 1967 r.

11. S. Timoshenko, J.N. Goodier - "Teoria sprężystości", Wydawnictwo "Arkady" Warszawa 1962.

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДЕФОРМАЦИЙ ГОРНЫХ ПОРОД ПРИ ГОРНОЙ ЭКСПЛУАТАЦИИ ПО ИНТЕГРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ

Р е з ю м е

В статье выведены на основе теории С. Кноте формулы наклона и вертикальной кривизны горных пород при эксплуатации в виде прямоугольника, а также обсуждены производные деформации вышеуказанных, а именно горизонтальные сдвижения, горизонтальные относительные сопроматы, повороты линейных элементов и горизонтальную кривизну. Кроме того выведена формула горизонтального относительного сопромата.

С целью выведения формул отдельных деформаций, составлено уравнение поверхности мульды оседания для эксплуатации, как на рис. 1 (формула 2.1).

Уравнение мульды оседания дало возможность вывести формулы величин отдельных деформаций в параллельных направлениях к оси принятой прямоугольной системы координат.

Величины деформаций в других направлениях а также величины и направления экстремальных деформаций в точке можно определить, основываясь на формулах теории скалярного поля, дифференциальной геометрии и стереомеханики.

A METHOD OF DETERMINING ROCK DEFORMATIONS RESULTING FROM THE EXPLOITATION OF COAL MINES, ACCORDING TO THE INTEGRAL THEORY

S u m m a r y

The article develops - basing on S. Knothe's theory - formulae both for the slope and vertical curvature of rock, resulting from rectangular exploitation. There are also discussed deformations deriving from those mentioned above, viz. horizontal shifts, horizontal deformations proper, torsions of linear elements, as well as the horizontal curvature.

In order to derive formulae for the various kinds of deformation, an equation has been set up to determine the surface of the subsiding basin for the case of exploitation shown in Fig. 1 (formula 2.1).

The equation for determining the subsiding basin has made it possible to develop formulae for the magnitude of the individual deformations, running parallally to the axes of the accepted system of rectangular coordinates.

The magnitudes of deformations running in other directions, as well as the magnitudes and directions of extreme deformations in one point may be determined by means of the formulae of the scalar field theory, of differential geometry and of stereomechanics.