ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Seria: GÓRNICTWO z. 54 Nr kol. 355

Mgr inż. Stanisław Chwała
Mgr inż. Zygmunt Kurczabiński
Mgr inż. Józef Straś

SPOSÓB KORZYSTANIA Z METODY ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH W ZAGADNIENIACH BUDOWNICTWA PODZIEMNEGO KOPALŃ

Streszczenie. Przedstawiono teoretyczne podstawy "metody elementów skończonych" w zastosowaniu do ośrodka ciągłego. Podano sposób wyznaczenia macierzy sztywności w zagadnieniu sprężystości płaskiej na przykładzie elementu o kształcie trójkątnym oraz w zagadnieniu symetrii cylindrycznej, w którym przyjęto element o kształcie prostokątnym o umownej grubości kątowej $\Delta\theta$.

W opracowaniu wskazano na możliwości stosowania metody do rozwiązywania zagadnień z mechaniki skał i budownictwa podziemnego kopalń.

1. Wstęp

Coraz szersze zainteresowanie metodą elementów skończonych w różnych dziedzinach nauki i techniki spowodowało konieczność bardziej kompleksowego opracowania teoretycznych podstaw metody, celem stworzenia możliwości wykorzystania jej w technice górniczej, a w szczególności w problemach budownictwa podziemnego i mechaniki górotworu.

Metoda elementów skończonych pozwala na uproszczenie skomplikowanych obliczeń wytrzymałościowych ośrodka ciągłego, przez zamianę ośrodka strukturą złożoną ze zbioru n elementów skończonych, $i = 1,2,3,\ldots,n$.

Odpowiedni dobór kształtu geometrycznego elementu umożliwia maksymalne zbliżenie obliczanych wartości do rzeczywistych panujących w rozważanym ośrodku.

W zagadnieniach płaskich można dokonać podziału ośrodka na trójkątne elementy skończone, podobnie ośrodek trójwymiarowy może być zastąpiony przez czworościany.

Opisując stan odkształcenia elementu otrzymuje się wartości przybliżone. Przybliżenie to wynika z przyjęcia skończonej liczby parametrów, gdy w rzeczywistości element ma ich nieskończenie wiele.

2. Model elementów skończonych

Aby stworzyć model oparty na metodzie elementów skończonych, wystarczy zastąpić ośrodek ciągły strukturą odpowiednio przygotowaną do obliczeń, złożoną z elementów o różnych kształtach i wielkościach, co więcej, mogących posiadać różne charakterystyki mechaniczne (moduł Young a i współczynnik Poissona). Elementy te (dla płaskiego układu najczęściej elementy trójkątne) "powiązane" są pewną liczbą wspólnych punktów węzłowych w których model poddany jest działaniu sił (np. ciśnienie jednorodne można przedstawić dyskretnym zbiorem sił odpowiednio dobranych i przyłożonych w węzłowych punktach powierzchni ściskania). Tak przedstawiona struktura odbiega od właściwości ośrodka ciągłego, można ją upodobnić do zespołu oddzielnych warstw "spiętych" w punktach węzłowych. Pod wpływem obciążenia zespół warstw ulegnie deformacji, w wyniku której ujawnią się dwa rodzaje zjawisk:

- najpierw koncentracja naprężeń wokół punktów węzłowych,
- następnie możliwości zachodzenia na siebie (nakładania się) dwu sąsiadujących warstw lub tworzenia się pustek między nimi.

Aby odtworzyć warunki bardziej realne takie jakie spotyka się w ośrodku ciągłym, należy założyć bardziej zgodny proces deformacji, tzn. dobrać taką funkcję opisującą stan odkształcenia, która spełniać będzie warunki wewnętrznych odkształceń, jak również odkształceń w punktach granicznych elementów.
Funkcja ta w zapisie macierzowym ma postać:

$$|U(x,y)| = |M(x,y)| \; |A| \tag{1}$$

gdzie:

U - oznacza macierz przemieszczeń punktów węzłowych,
M - macierz współrzędnych punktów węzłowych,
A - macierz współrzędnych uogólnionych.

Najprostszym przykładem tej zależności jest założenie, że odkształcenia zmieniają się w funkcji współrzędnych liniowo. Zakładając, że "u" oznacza przemieszczenie poziome, a "v" przemieszczenie pionowe dowolnie wybranego punktu w układzie przyjętych osi, zgodnie z zależnością (1) można napisać

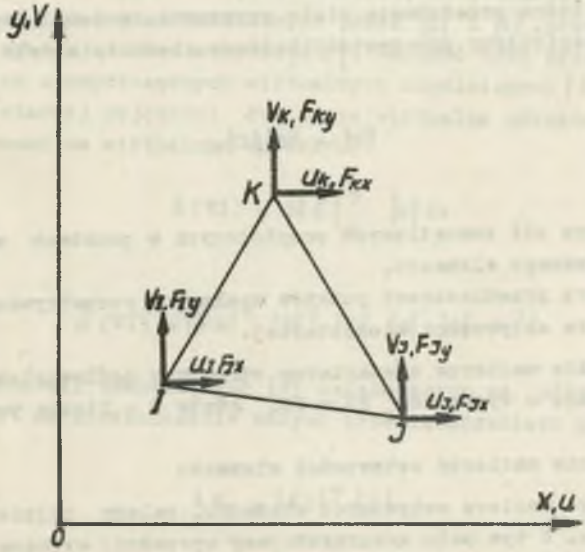
$$U = A_o + A_1 x + A_{2y}$$

$$V = B_o + B_1 x + B_{2y}$$

Dla wierzchołków dowolnego trójkąta I J K rys. 1 będzie:

$$\begin{vmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \\ U_k \\ V_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & X_i & Y_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & X_i & Y_i \\ 1 & X_j & Y_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & X_j & Y_j \\ 1 & X_k & Y_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & X_k & Y_k \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_o \\ A_1 \\ A_2 \\ B_o \\ B_1 \\ B_2 \end{vmatrix}$$

$$|U| = |M| \quad |A|$$



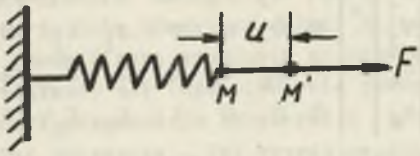
Rys. 1

3. Analiza elementu modelu

3.1. Macierz sztywności układu

Wyznaczenie macierzy sztywności jest najbardziej złożonym etapem metody elementów skończonych, wynika to z naruszenia ciągłości odkształceń na skutek podziału ośrodka na elementy oraz założenia, że elementy "związane są pewną skończoną liczbą punktów węzłowych. Zachodzi więc obawa, że sztywność wyidealizowanego układu będzie mniejsza niż układu rzeczywistego. Unikamy tego, dobierając funkcje odkształceń w zależności od przemieszczeń punktów węzłowych w taki sposób, aby uzyskać maksymalnie wysoką zgodność odkształceń, wzgłuż linii podziału na elementy.

Aby bardziej obrazowo przedstawić pojęcie macierzy sztywności rozpatrzmy sprężynę poddaną działaniu rozciągającej siły F (rys. 2). Na skutek działania tej siły dowolnie wybrany punkt M zajmie położenie M', przemieszczając się o pewną wielkość $\bar{U}$.



Rys. 2

Dla sprężyny, która przedstawia ciało sprężyste, możemy napisać F = k.u analogicznie zapisujemy sprężystość każdego elementu modelu elementów skończonych:

$$|F| = |K||U|, \tag{2}$$

gdzie

|F| - macierz sił zewnętrznych przyłożonych w punktach węzłowych rozpatrywanego elementu,

|U| - macierz przemieszczeń punktów węzłowych rozpatrywanego elementu,

|K| - macierz sztywności elementarnej.

Dodając wszystkie macierze elementarne otrzymamy ogólną(globalną) macierz sztywności układu o wymiarach 2N x 2N, gdzie N - liczba punktów siatki.

3.1.1. Obliczanie macierzy sztywności elementu

Aby wyznaczyć macierz sztywności elementu, należy najpierw określić jego deformacje. W tym celu wykorzystujemy uprzednio wybraną funkcję przemieszczeń (1) w ten sposób, że rozwijamy najpierw macierz |M| poprzez wypisanie współrzędnych punktów węzłowych, a następnie liczymy przemieszczenia tych punktów.

Znając składowe przemieszczeń liczymy odkształcenia $\varepsilon(x,y)$ przy czym:

$$\varepsilon x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma xy = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Odkształcenia zapisane w postaci macierzowej będą miały postać:

$$|\varepsilon(x,y)| = |B(x,y)|\,|A| \tag{3}$$

gdzie macierz |B| otrzymujemy poprzez zróżniczkowanie macierzy |M|.

Mając obliczone odkształcenia oraz wybraną hipotezę traktującą o zachowaniu się materiału (w przypadku mechaniki skał hipotezę sprężystości (można zachowując ważność prawa Hoocke a wyznaczyć naprężenia:

$$|\sigma(x,y)| = |T|\,|\varepsilon(x,y)| \tag{4}$$

lub

$$|\sigma(x,y)| = |T|\,|B(x,y)|\,|A| \tag{5}$$

Tak określone odkształcenia i naprężenia wykorzystujemy przy wyznaczaniu macierzy sztywności elementarnej $|K|$, poczynając najpierw od zasady pracy wirtualnej (pracy przygotowanej) mianowicie, że począwszy od pewnego stanu odkształceń i naprężeń określonych przez $|\varepsilon|$ i $|\sigma|$, przemieszczania wirtualne $|\delta u|$ wywołują odkształcenia $|\delta\varepsilon|$. Wartość tych przemieszczeń przedstawia macierz o współrzędnych wirtualnych uogólnionych $|\delta A|$.

Dla elementarnej objętości dv, praca wirtualna odkształcenia odpowiada przemieszczaniom wirtualnym wg wzoru:

$$\delta(WI) = |\delta\varepsilon|^T\,|\sigma|\,dv$$

lub

$$\delta(WI) = |\delta A|^T\,|B|^T\,|T|\,|B|\,|A|\,dv^{1)} \tag{6}$$

Praca wirtualna sił zewnętrznych $|F|$ działających na odkształcalny element wykonana na nieskończenie małych przemieszczeniach przygotowanych δ_u wyniesie:

$$\delta W_E = |\delta U|^T\,|F|$$

lub

$$\delta W_E = |\delta A|^T\,|M|^T\,|F|. \tag{7}$$

Zgodnie z zasadą pracy wirtualnej możemy napisać:

$$\delta W_E = \delta W_I \tag{8}$$

lub

$$|\delta A|^T\,|M|^T\,|F| = |\delta A|^T\left(\int_V |B|^T\,|T|\,|B|\,dv\right)|A|. \tag{9}$$

---

1) Wskaźnik górny T we wzorze (6) oznacza transponowanie macierzy.

Traktując $|M|$ jako macierz regularną wg wzoru (1) napiszemy:

$$|A| = |M^{-1}| \cdot |U|.$$

Mnożąc następnie równanie (9) przez $|M^{-1}|^T$ otrzymamy:

$$|F| = |M^{-1}|^T \left(\int_V |B|^T |T| |B| \, dv \right) |M^{-1}| |U|. \tag{10}$$

Zatem macierz sztywności $|K|$ będzie miała postać:

$$|K| = |M^{-1}|^T \left(\int_V |B|^T |T| |B| \, dv \right) |M^{-1}|^T. \tag{11}$$

Wyrażenie (11) przedstawiające macierz sztywności ulega uproszczeniu w przypadku układu płaskiego. Rozpatrując warstwę elementu o jednostkowej grubości przy założeniu, że $|B|$ i $|T|$ będą miały wartości stałe otrzymamy

$$|K| = S \, |M^{-1}|^T |B|^T |T| |B| |M^{-1}|, \tag{12}$$

gdzie S - przedstawia powierzchnię elementu.
Powyższe uproszczenie nie zachodzi w przypadku symetrii obrotowej. Ponieważ $|B|$ zależy od współrzędnych punktów, nie można rozpatrywać warstewki elementu o stałej grubości, należy natomiast przeprowadzić całkowanie wycinka kołowego.

Na podstawie wzoru (11) można wykazać, że macierz K jest macierzą symetryczną. Ponieważ i macierz T jest symetryczna, otrzymamy więc

$$|K|^T = |K|.$$

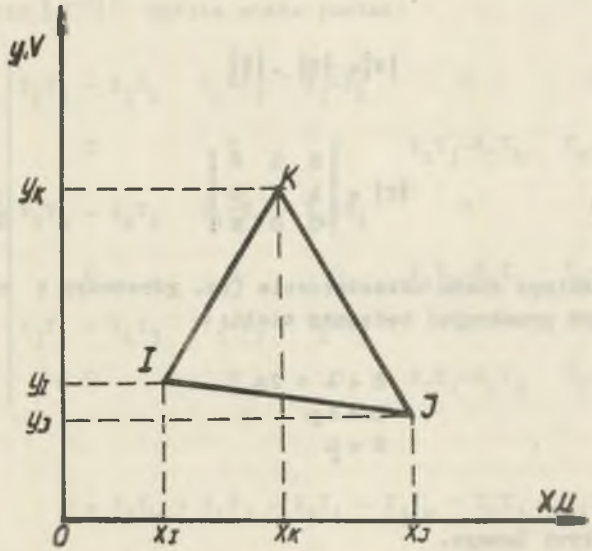
Wyznaczając dla każdego elementu modelu elementarną macierz sztywności i przepisując jej odpowiedni współczynnik ustalający jej miejsce otrzymamy w prosty sposób obraz macierzy globalnej.

3.2. Przykład

Dla przedstawienia szczegółów rachunku, który prowadzi do otrzymania globalnej macierzy sztywności wybrano dwa poszczególne przypadki mianowicie:

- pierwszy dotyczący zagadnienia sprężystości w układzie płaskim, w którym przyjęto elementy o kształcie trójkątnym,
- drugi dotyczący problemów spełniających warunki symetrii cylindrycznej, w których elementy stanowić będą regularne sekcje o różnej grubości.

Wykorzystując wzór (1) napiszemy dla wierzchołków elementu trójkątnego I J K rys. 3 pole przemieszczeń:



Rys. 3

$$\begin{vmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \\ U_k \\ V_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i & o & o & o \\ o & o & o & 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j & o & o & o \\ o & o & o & 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k & o & o & o \\ o & o & o & 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} \tag{13}$$

Otrzymane w ten sposób pole przemieszczeń dla obszaru elementu pozwala w każdym punkcie tego obszaru określić stan odkształcenia, który dla płaskiego stanu uwzględniając (3), (4), (13) zapiszemy:

$$\begin{matrix} \varepsilon x \\ \varepsilon y \\ \gamma xy \end{matrix} = \begin{matrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} |A| = |B|\,|A| \tag{14}$$

Następny etap to wyznaczenie macierzy sprężystości $|T|$, która wiąże zależność naprężenia-odkształcenia.

Należy jednak pamiętać, że stosownie do rozpatrywanego ośrodka, np. izotropowego, macierz $|T|$ może przyjmować różne wartości w zależności czy mamy do czynienia z odkształceniami, czy naprężeniami w układzie płaskim.

Zapiszmy że:

$$|\sigma| = |T| \cdot |\varepsilon|$$

oraz

$$|T| = \begin{vmatrix} H & L & 0 \\ L & H & 0 \\ 0 & 0 & M \end{vmatrix} \tag{15}$$

W przypadku płaskiego stanu odkształcenia (np. górotworu o nieskończonej grubości i stałym przekroju) będziemy mieli:

$$\begin{aligned} H &= \lambda + 2\mu \\ L &= \lambda\mu \\ M &= \mu \end{aligned} \tag{16}$$

gdzie

λ i μ są stałymi Lamego.

Zależności wiążące współczynniki Lamego z wielkościami modułu Younga i współczynnika Poissona ujmuje wzór:

$$\lambda = \frac{E \cdot \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \tag{17}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Mając obliczone macierze $|T|$ $|B|$ i $|M|$ należy dokonać obliczenia powierzchni (S) elementów oraz wykonać iloczyn:

$$|K| = S\,|M^{-1}|^T\,|B|^T\,|T|\,|B|\,|M^{-1}|. \tag{18}$$

Jeżeli Xi, Yi, Xj, Yj, Xk, Yk, przedstawiają współrzędne wierzchołków elementu trójkątnego, to ich wektory zapiszemy:

$$\begin{aligned} YKJ &= Y_k - J_j \\ YIK &= Y_i - Y_k \\ YJI &= Y_j - Y_i \\ XJK &= X_j - X_k \\ XKI &= X_k - X_i \\ XIJ &= X_i - X_j \end{aligned}$$

A więc macierz $|M^{-1}|^T$ będzie miała postać:

$$|M^{-1}|^T = -\frac{1}{D}\begin{vmatrix} X_kY_j - X_jY_k & Y_k-Y_j & X_j-X_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X_kY_j-X_jY_k & Y_k-Y_j & X_j-X_k \\ X_iY_k - X_kY_i & Y_i-Y_k & Y_k-X_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X_iY_k-X_kY_i & Y_i-Y_k & X_k-X_i \\ X_jY_i - X_iY_j & Y_j-Y_i & X_i-Y_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X_jY_i-X_iY_j & Y_j-Y_i & X_i-Y_j \end{vmatrix} \tag{19}$$

przy czym

$$D = X_jY_k + X_iY_j + X_kY_i - X_jY_y - X_kY_j - X_iY_k \tag{20}$$

Macierz $|K|$ sprowadzimy teraz do postaci:

$$k = \frac{S}{D^2}\,|k_o|, \tag{21}$$

gdzie $|k_o|$ przedstawia niżej rozpisana macierz:

$$\begin{vmatrix} H.YKJ^2 + M.XJK^2 & M.XJK.YKJ + L.YKJ.XJK & H.YKJ.YIK + M.XJK.XKI & M.XJK.YIK + L.YKJ.XKI & H.YKJ.YJI + M.XJK.XIJ & M.XJK.YJI + L.YKJ.XIJ \\ L.XJK.YKJ + M.XJK.YKJ & H.XJK^2 + M.YKJ^2 & L.XJK.YIK + M.YKJ.XKI & H.XJK.XKI + M.YKJ.YIK & L.XJK.YJI + M.YKJ.XJI & H.XJK.XIJ + M.YKJ.YJI \\ H.YIK.YKJ + M.XKI.XJK & M.XKI.YKJ + L.YIK.XJK & H.YIK^2 + M.XKJ^2 & M.XKI.YIK + L.YIK.XKI & H.YIK.YJI + M.XKI.XIK & M.XKI.YJI + L.YIK.XIJ \\ L.XKI.YKJ + M.YIK.XJK & H.XKI.XJK + M.YIK.YKJ & L.XKI.YIK + M.YIK.XKI & H.XKI^2 + M.YIK^2 & L.XKI.YJI + M.YIK.XIJ & H.XKI.XIJ + M.YIK.YJI \\ H.YJI.YKJ + M.XIJ.XJK & M.XIJ.YKJ + L.XJK.YJI & H.YJK.YIK + M.XIJ.XKI & M.XIJ.YIK + L.XKJ.YJI & H.YJI^2 + M.XIJ^2 & M.XIJ.YJI + L.XIJ.YJI \\ L.XIJ.YKJ + M.YJI.XJK & H.XIJ.XJK + M.YJI.YKI & L.XIJ.YIK + M.XKI.YJI & H.XIJ.XKI + M.YJI.YIK & L.XIJ.YJI + M.XIJ.YJI & H.XIJ^2 + M.YJI^2 \end{vmatrix} \tag{22}$$

3.2.1. Ogólny rachunek naprężeń

Przystępując do ogólnego rachunku naprężeń przyjmujemy najpierw założenia, że układ liniowy $|F| = |K|\,|U|$ został rozwiązany oraz, że znamy macierz globalną $|U|$ określającą przemieszczenia węzłowych punktów siatki.

W rozdziale 3.1.1 podano, że:

$$|\sigma| = |T|\,|\varepsilon| \qquad \text{(wg wzoru 4)}$$

oraz że

$$|\varepsilon| = |B|\,|A| \qquad \text{(wg wzoru 3)}$$

a więc

$$|A| = |M^{-1}|\,|U| \qquad \text{(wg wzoru 1)}$$

dokonując podstawień (3) i (1) do wzoru (4) otrzymamy:

$$|\sigma| = |T|\,|B|\,|M^{-1}|\,|U| \tag{23}$$

Dokonując obliczeń poszczególnych macierzy we wzorze (23) i ich iloczynu, otrzymamy macierz naprężeń dla rozpatrywanego elementu. Dla uzupełnienia warto wspomnieć, że macierz U występująca we wzorze (23) zbudowana jest ze współrzędnych przemieszczeń wierzchołków elementu.

3.2.2. Płaski stan naprężeń

W przypadku płaskiego stanu rachunek jest prosty, w jego rezultacie otrzymamy stałą macierz naprężeń.
Uwzględniając (19) otrzymamy:

$$\begin{vmatrix} \sigma x \\ \sigma y \\ \tau xy \end{vmatrix} = |MAT| \begin{vmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \\ U_k \\ V_k \end{vmatrix} \tag{24}$$

przy czym

$$|MAT| = |T|\,|B|\,|M^{-1}|$$

MAT jest macierzą złożoną z 3 X 6 składników.
Wartość iloczynu $|T|\,|B|$ wynosi:

$$|T|\,|B| = \begin{vmatrix} 0 & H & 0 & 0 & 0 & L \\ 0 & L & 0 & 0 & 0 & H \\ 0 & 0 & M & 0 & M & 0 \end{vmatrix} \tag{25}$$

Przyjmując $|M^{-1}|$ zapisane (19) znajdujemy:

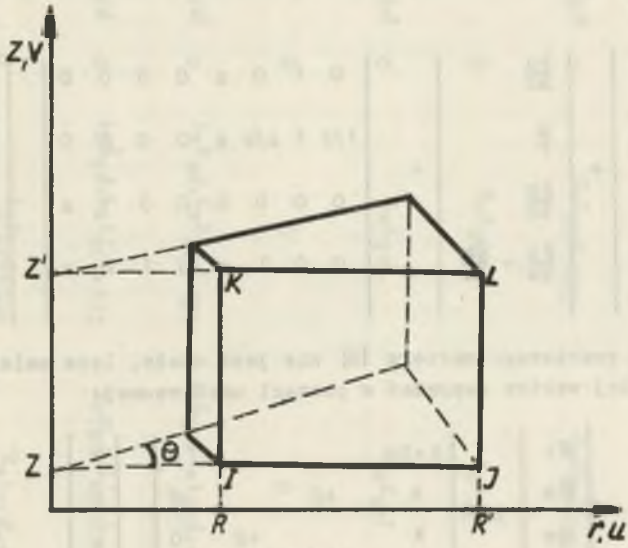
$$|M\,A\,T| = -\frac{1}{D}\,|M\,A\,T_o|, \tag{26}$$

gdzie

$$|M\ A\ T_o| = \begin{vmatrix} HYKJ & LXJK & HYIK & LXKI & HYJI & LXIJ \\ LYKJ & HXJK & LYIK & HXKI & LYIJ & HXIJ \\ MXJK & MYKJ & MXKI & MYIK & MXIJ & MYJI \end{vmatrix}$$

3.2.2. Zagadnienie symetrii cylindrycznej

Rozpatrując model spełniający warunki symetrii cylindrycznej tak geometrycznej, jak i mechanicznej dojdziemy do macierzy naprężeń i odkształceń o czterech parametrach (np. dla naprężeń σr, $\sigma \theta$, σz, τrz). Rozpatrzmy więc element prostokątny w płaszczyźnie (r,z) o umownej grubości kątowej $\Delta\ \theta$ jako jednostkowej (rys. 4).



Rys. 4

Dla uproszczenia obliczeń przemieszczenia dowolnego punktu będą związane z odpowiednimi współrzędnymi zależnościami:

$$\begin{vmatrix} U \\ W \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & r & z & rz & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & r & z & rz \end{vmatrix} |A| \qquad (27)$$

W wyniku czego dla wszystkich punktów węzłowych elementu prostokątnego wyciętego z kontinuum otrzymamy:

$$\begin{vmatrix} U_i \\ U_j \\ U_k \\ U_l \\ W_i \\ W_j \\ W_k \\ W_l \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & r_i & z_i & r_i z_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & r_j & z_j & r_j z_j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & r_k & z_k & r_k z_k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & r_l & z_l & r_l z_l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 00 & 1 & r_i & z_i & r_i z_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & r_j & z_j & r_j z_j \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & r_k & z_k & r_k z_k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & r_l & z_l & r_l z_l \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_o \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ B_o \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{vmatrix} \tag{28}$$

Odkształcenie elementu wyznaczamy różniczkując (28) w współrzędnych cylindrycznych biorąc pod uwagę symetrię osiową. Stąd również otrzymujemy macierz $|B|$.

$$\begin{vmatrix} \varepsilon r \\ \varepsilon \theta \\ \varepsilon z \\ \gamma rz \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{u}{r} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/r & 1 & z/r & z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 & r & 0 & 1 & 0 & z \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_o \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ B_o \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{vmatrix} \tag{29}$$

Jak wynika z powyższego macierz $|B|$ nie jest stała, lecz zależy od r i z Napiszemy dalej wektor naprężeń w postaci macierzowej:

$$\begin{vmatrix} \sigma r \\ \sigma \theta \\ \sigma z \\ \tau rz \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda + 2\mu & & & 0 \\ \lambda & +2 & & 0 \\ \lambda & & +2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} r \\ 0 \\ z \\ rz \end{vmatrix} \tag{30}$$

$$|\sigma| = |T| \quad |\varepsilon|$$

Następny etap obliczeń to wykonanie iloczynu macierzy $|B|^T \, |T| \, |B|$. W tym celu liczymy całkę $\iint |B|^T \, |T| \, |B| \, r \, dr \, dz$.

Jeżeli oznaczymy (rys. 4):

$$\begin{aligned} L &= \log \frac{R'}{R} & z_1 &= z - z \\ R_1 &= \frac{1}{2}(R^{12} - R^2) & z_2 &= \frac{1}{2}(z^{12} - z^2) \\ R_3 &= \frac{1}{3}(R^{13} - R^3) & z_3 &= \frac{1}{3}(z^{13} - z^3) \\ R_4 &= \frac{1}{4}(R^{14} - R^4) \end{aligned} \tag{31}$$

to powyższą całkę można rozpisać następująco:

$$
\begin{vmatrix}
(\lambda+2\mu)Lz_1 & 2(\lambda+\mu)R_1z_1 & (\lambda+2\mu)\,Lz_2 & 2(\lambda+\mu)R_1z_1 & 0 & 0 & \lambda R_1Z_1 & \lambda R_2z_2 \\
2(\lambda+\mu)R_1z_1 & 4(\lambda+\mu)R_2z_2 & 2(\lambda+\mu)R_1z_2 & 4(\lambda+\mu)R_2z_2 & 0 & 0 & 2\lambda R_2z_1 & 2\lambda R_3z_1 \\
(\lambda+2\mu)L\,z_2 & 2(\lambda+\mu)R_1z_1 & (\lambda+2\mu)Lz_3+\mu R_2z_1 & 2(\lambda+\mu)R_1z_3+\mu R_3z_1 & 0 & \mu R_2z_2 & \lambda R_1z_2 & (\lambda+\mu)R_2z_2 \\
2(\lambda+\mu)R_1z_2 & 4(\lambda+\mu)R_2z_2 & 2(\lambda+\mu)R_1z_3+\mu R_3z_1 & 4(\lambda+\mu)R_2z_3+\mu R_4z_1 & 0 & \mu R_3z_1 & 2\lambda R_2z_2 & (2\lambda+\mu)R_3z_2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \mu R_2z_1 & \mu R_3z_1 & 0 & \mu R_2z_1 & 0 & \mu R_2z_2 \\
\lambda R_1z_1 & 2\lambda R_2z_1 & \lambda R_1z_1 & 2\lambda R_2z_2 & 0 & 0 & (\lambda+2\mu)R_2z_1 & (\lambda+2\mu)R_3z_1 \\
\lambda R_2z_1 & 2\lambda R_3z_1 & (\lambda+\mu)R_2z_2 & (2\lambda+\mu)R_3z_2 & 0 & \mu R_2z_2 & (\lambda+2\mu)R_3z_1 & (\lambda+2\mu)R_4z_1+\mu R_2z_3
\end{vmatrix}
$$

Następnie obliczyć macierz $|M^{-1}|$

$$|M^{-1}| = \frac{1}{R_1 Z_1}\begin{vmatrix} R'Z' & R\,Z' & RZ' & RZ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -Z' & Z' & Z & -Z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -R & R & R' & -R & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R'Z' & -RZ' & -RZ & RZ \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -Z' & Z' & Z & -Z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -R' & R & R' & -R \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \tag{32}$$

Aby obliczyć wreszcie elementarną macierz sztywności k, pozostaje do wykonania iloczyn:

$$|M^{-1}|^T \iint |B|\,T\,|B|\ rdr\ dz\ .\ |M^{-1}|.$$

Z uwagi na to, że macierze tutaj są bardziej złożone niż przy macierzy $|k|$ dla modelu dwu wymiarowego nie podaje się wyniku iloczynu. Iloczyn macierzy można wykonać maszyną cyfrową.

3.2.1. Rachunek naprężeń w zagadnieniu symetrii cylindrycznej

W przypadku modelu o symetrii osiowej zauważyliśmy, że macierz B nie była stała. Przeprowadźmy zatem całkowanie objętości elementu tej macierzy dzieląc równocześnie przez objętość elementu.

$$|\sigma| = |T|\,\frac{\iint |B|\ rdr\ dz}{\iint rdr\ dz} = \frac{1}{R_2 Z_1}\ .\ |M\ A\ T|. \tag{33}$$

Stosując oznaczenia użyte wg (31) otrzymamy

$$|T|\ .\ \frac{\iint |B|\ rdr\ dz}{\iint rdr\ dz} = \frac{1}{R_2 Z_1}\ .\ |M\ A\ T|$$

Przy czym:

$$|MAT| = \begin{vmatrix} R_1Z_1 & 2(\lambda+\mu)R_2Z_2 & R_1Z_1 & 2(\lambda+\mu)R_2Z_2 & 0 & 0 & \lambda R_2Z_1 & \lambda R_3Z_1 \\ (\lambda+2\mu)R_1Z_1 & 2(\lambda+\mu)R_2Z_2 & (\lambda+2\mu)R_1Z_2 & 2(\lambda+\mu)R_2Z_2 & 0 & 0 & \lambda R_2Z_1 & \lambda R_3Z_1 \\ \lambda R_1Z_1 & 2\lambda R_2Z_2 & \lambda R_1Z_2 & 2\lambda R_2Z_2 & 0 & 0 & (\lambda+2\mu)R_2Z_1 & (\lambda+2\mu)R_3Z_1 \\ 0 & 0 & \mu R_2Z_1 & \mu R_3Z_1 & 0 & \mu R_2Z_1 & 0 & \mu R_2Z_2 \end{vmatrix}$$

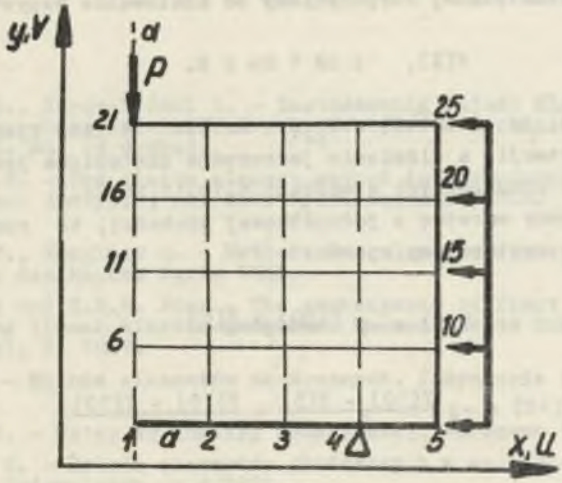
Pozostaje w dalszym ciągu obliczenie iloczynu prawej strony równania (33) przez macierz $|M^{-1}|$ rozwiniętą we wzorze (32) oraz przez macierz kolumnową $|U|$.
Przy czym:

$$|U| = \begin{vmatrix} U_i \\ U_j \\ U_k \\ U_l \\ W_i \\ W_j \\ W_k \\ W_l \end{vmatrix}$$

Obliczenie powyższego iloczynu dokonuje się bezpośrednio maszyną cyfrową. Ze względu na jego szeroki i skomplikowany zapis nie podaje się go.

4. Warunki graniczne macierzy sił

Ze względu na symetrię modelu bardzo często można zredukować jego rozmiar. Zdarza się jednak i to dość często, że w niektórych punktach modelu można założyć warunki szczególnych przemieszczeń (np. w miejscu podpory). Potwierdzenie takich założeń otrzymamy, zmieniając pewne równania układu $|F| = |K| \cdot |U|$, tzn. modyfikując odpowiednio wiersze lub kolumny odpowiadające macierzy $|K|$.
Dla przykładu rozpatrzmy model jak na rys. 5



Rys. 5

Posiada on geometryczną oś symetrii a-a oraz symetrię obciążenia. W efekcie zakłada się że proces deformacji w modelu również będzie przebiegał wg zasad symetrii, co można zapisać:

$$U(I) = 0 \quad \text{dla} \quad I = 1,6,11,16,21$$

Tak samo na podporze w punkcie 4

$$V(4) = 0$$

Wykonując taką operację anulujemy wszystkie współczynniki linii n_0 I + N dla V(I) oraz przyrównujemy do 1 współczynniki n^0 1 tej linii (lub też n^0 I + N dla przemieszczenia pionowego, przy czym N jest liczbą punktów siatki; w naszym przypadku N = 25). Macierz sił zewnętrznych |F| jest macierzą kolumnową składającą się z 2xN elementów, ponieważ N pierwsze reprezentuje siły poziome przyłożone w N punktach siatki; natomiast następne N - siły pionowe

$$|F| = \begin{vmatrix} Fx1 \\ \vdots \\ FxN \\ Fy1 \\ \vdots \\ FyN \end{vmatrix}$$

Model rys. 5 obciążony jest jedną siłą pionową przyłożoną w punkcie 21 oraz obciążeniem ciągłym w punktach wzdłuż brzegu pionowego. Rachunek przy użyciu maszyny matematycznej rozpoczniemy od anulowania wszystkich

$$f(I), \quad I \text{ od } 1 \text{ do } 2\,N.$$

Następnie założymy, że $F(21+N) = F_{y21}$; wartość ta jest ujemna na skutek wybranej orientacji, a ciśnienie jednorodne zastąpione jest przez zespół sił poziomych przyłożonych w węzłach 5,10,15,20,25.

Jeżeli rozpatrzymy warstwę o jednostkowej grubości, to rozważania powyższe zapiszemy w następujący sposób:

$$F(5) = -p\,\frac{Y(10) - Y(8)}{2}$$

$$F(10) = -p\,\frac{Y(10) - Y(5)}{2} + \frac{Y(15) - Y(10)}{2}$$

i tak dalej.

Tak przedstawione ciśnienie jednorodne przez zespół sił poziomych przyłożonych w odpowiednich punktach węzłowych jest ważne w przypadku dostatecznie zagęszczonej siatki na ściance rozpatrywanego modelu. Zagęszczenie to wynika z żądanej dokładności jaką chcemy uzyskać.

Zakończenie

Metoda "elementów skończonych" poprzez możliwość szerokiego zastosowania przy wykorzystaniu matematycznych maszyn cyfrowych pozwala na szybkie przybliżenie licznych problemów z mechaniki górotworu. Można za jej pomocą analizować ośrodki sprężyste o charakterze izotropowym bądź anizotropowym, w jedno, dwu i trójosiowym stanie napięcia.
W mechanice górotworu dotyczy to:

1. Określenia naprężeń i odkształceń wokół wyrobisk górniczych o dowolnym kształcie.
2. Określenie naprężeń i odkształceń wokół wyrobisk górniczych w górotworze skotwionym.
3. Określenie naprężeń w resztkach pokładów i filarach.
4. Badań laboratoryjnych próbek cylindrycznych bądź prostopadłościennych poddanych ciśnieniu.
5. Określenia wymaganej charakterystyki obudowy górniczej itd.

Przy czym nie są to oczywiście jej ostateczne zastosowania. Posługując się tą metodą można badać i analizować bardziej złożone programy, np.: lepkosprężyste, sprężysto-plastyczne oraz inne.

LITERATURA

1. Chwała St., Kurczabiński Z. - Zastosowanie Metody Elementów Skończonych do rozwiązywania niektórych problemów w mechanice górotworu. Zesz. Nauk. Pol. Sl. (w druku).
2. Clough R.W. - The finite element method in structural mechanics Chpter 7 of Stress Analysis, cd. O.C. Zienkiewicz and C.S. Holister, Wiley, 1965.
3. Drouard J., Templier A. - Methode des elements finis. Centre d'Etudes Mecanigue des Roches Paris 1968.
4. Ping Tong and T.H.H. Pian - The convergence of finit element method in solving linear elastic problems. Massachusetts Institute of Technology Vol. 3. 1967.
5. Kisiel I - Metoda elementów skończonych. Inżynieria i Budownictwo nr 11/1970.
6. Ralston A. - Wstęp do analizy numerycznej, Warszawa 1971.
7. Rakowski G. - Metoda elementów skończonych w mechanice budowli. Inżynieria i Budownictwo nr 4/1971.

8. Telega J.J. - Zastosowanie programowania liniowego do wyznaczania nośności granicznej konstrukcji. Mechanika Teoretyczna i Stosowana. Tom 9 zeszyt 1 1971 r.

9. Walczak J. - Wytrzymałość materiałów oraz podstawy teorii sprężystości i plastyczności. Tom I, II PWN Warszawa - Kraków 1971.

10. Zienkiewicz O.C. - The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics. Mc Graw - Hill Publishig Company Limited London 1968..

СПОСОБ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ВОПРОСАХ ПОДЗЕМНОГО СТРОИТЕЛЬСТВА ШАХТ

Р е з ю м е

Представлены теоретические основы метода конечных элементов в применении к среде континуум.

Подан способ определения матрицы упругости в проблеме плоской упругости на примере элемента треугольной формы, а также в проблеме цилиндрической симметрии, в которой принято элемент прямоугольной формы с условной угловой толщиной $\Delta\theta$

В статье указаны возможности применения метода для решения проблем по механике горных пород.

THE WAY USING FINITE ELEMENTS METHOD IN UNDERGROUND BUILDING OF COAL MINES

S u m m a r y

Theoretical foundations in the paper of finite element method Appered to the continuens midium have been presented et way of determinty rigidity matrix in the problem of plane elasticity and in the problem of cylindrical symmetry in which the element with a rectangular shape and the angular thicknes $\Delta\theta$ was accepted has been given.

In the paper a possibility of this method application in solution of problems connected with the rocks mechanics has been shown.