

Stanisław Chwała, Zygmunt Kurczabiński  
Ryszard Gawroński

ZASTOSOWANIE METODY ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH  
DO ROZWIĄZYWANIA NIEKTÓRYCH PROBLEMÓW  
W MECHANICE GÓROTWORU

Streszczenie. Zwrócono uwagę na możliwości wykorzystania metody elementów skończonych do rozwiązywania problemów dotyczących mechaniki skał. W opracowaniu podano teoretyczne podstawy metody oraz sposób wyznaczania i obliczania macierzy sztywności w zastosowaniu do zagadnienia sprężystości płaskiej.

Wstęp

W mechanice górotworu zagadnienie deformacji skał i odkształceń było i nadal jest jednym z najbardziej nurtujących naukę problemów z punktu widzenia analitycznego opisanie tych zjawisk na podstawie znajomości, których opracowuje się profilaktykę opanowania i minimalizacji ich szkodliwych wpływów.

W ślad za rozwojem nauki i techniki górniczej opracowano szereg metod mniej lub więcej skomplikowanych, pozwalających na rozwiązywanie tego typu problemów.

Niniejszy artykuł traktujący o możliwości wykorzystania metody elementów skończonych do przybliżonego wyznaczania i rozwiązywania deformacji w ośrodku ciągłym został opracowany przy wykorzystaniu prac zamieszczonych w spisie literatury.

Przybliżenie rozwiązania wynika z przyjętego schematu dla rozpatrywanego ośrodka złożonego z elementów indywidualnych związanych między sobą w sposób mniej lub więcej złożony, a stanowiących pewną ciągłość materii.

Rozwiązanie równań pochodnych cząstkowych jest zastąpione przez taki układ liniowy, którego niewiadomymi są siły przyłożone w węzłach siatki odwzorowującej materię. W treści rozpatrywanego zagadnienia przedstawia się dwie metody odwzorowania ośrodka ciągłego:

- metoda różnic skończonych,
- metoda elementów skończonych.

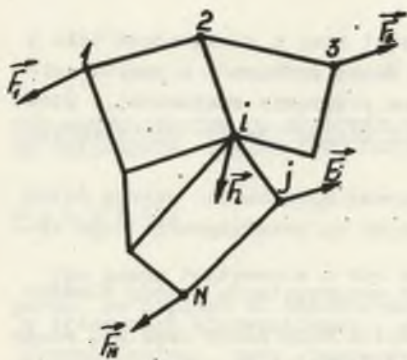
Pierwszą z nich stosuje się dla modeli sprężystych w układzie płaskim lub przestrzennym.

Warunkiem korzystania z tej metody jest założenie siatki o stałej podziałce na całym obszarze rozpatrywanego modelu ośrodka ciągłego.

Druga metoda - metoda elementów skończonych jest bardziej wszechstronna i bardziej ogólna, lecz zastosowanie jej wymaga większej uwagi w toku realizacji. Elementy siatki w tej metodzie mogą mieć dowolne kształty oraz dowolne wymiary. Metoda ta wymaga jednak długiego obliczania wstępne-go tzw. macierzy sztywności układu.

### 1. Macierz sztywności układu

Rozpatrzmy dowolny układ złożony z pewnej skończonej liczby elementów "związanych" między sobą pewną liczbą punktów węzłowych (1, 2...i, j, k...N) przy czym liczba N węzłów jest różna od liczby elementów, które tworzą sieć.



Rys. 1

Założmy w tych N węzłach układ sił zewnętrznych ( $F_1, F_2 \dots F_N$ ) rysunek 1 w ten sposób, aby układ był w równowadze, a zatem układ sił zewnętrznych statycznie wyznaczalny.

W myśl takiego założenia na dowolny węzeł  $n_{oi}$  będzie działała pewna liczba sił o wypadkowej równej zero ( $\sum f_i = 0$ ) powodująca jego przemieszczenie o pewną wielkość skalarną  $\bar{u}_i$ .

Siły  $f_i$  określane będą przez:

- siły  $f_i^w$ , siły wewnętrzne (strukturalne) zdolne do wiązania poszczególnych węzłów,
- siły zewnętrzne  $F_i$ .

Z powyższego wynika, że

$$\sum f_i = \sum f_i^w + F_i \quad (1)$$

Podajmy powyższy układ działaniu zewnętrznych sił i przeprowadźmy jego analizę.

Siły zewnętrzne zapiszemy w postaci macierzy jednokolumnowej  $(N, 1)$  mianowicie:

$$F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_N \end{bmatrix}$$

element  $n_k^0$  tej macierzy przedstawiać będzie również macierz kolumnową

$$F_k = \begin{bmatrix} F_{kx} \\ F_{ky} \\ F_{kz} \end{bmatrix}$$

o trzech elementach składowych dla osi  $O_x, O_y, O_z$ .

Pod wpływem działania sił zewnętrznych  $F$  układ ulegnie deformacji: jego deformacja będzie znana, gdy znane będą przemieszczenia  $U_1, U_2 \dots U_N$ , które zapisywać będziemy przy pomocy macierzy kolumnowej

$$U_p = \begin{bmatrix} U_{px} \\ U_{py} \\ U_{pz} \end{bmatrix}$$

Aby nie poszerzać zapisu wyrażenie trzech składowych przemieszczeń dowolnego węzła  $n_p^0$  zapisujemy krótko  $U_p$ .

Z powyższego wynikają dwa problemy:

- 1) ustalenie funkcji  $f(U, F) = 0$ ,
- 2) rozwiązanie w układzie określającym przemieszczeniu  $U$ , funkcji  $f(U, F) = 0$ .

## 2. Zależności między macierzami $U$ i $F$

Jeżeli nie założymy hipotezy o charakterze elementów sieci, funkcja  $f(U, F) = 0$  może być wyznaczona a priori dowolnie w ten jednak sposób aby w każdym węźle suma sił nań działających była równa zero.

Zastosujemy celem bliższego poznania zagadnienia zasadę superpozycji (przypadek szczególny) i przeprowadźmy następujące rozumowanie:

jeżeli pod wpływem siły  $F$  i  $F'$  sieć przyjmie dwa stany deformacji  $U$  i  $U'$ , to pod wpływem działania siły  $(F + F')$  deformacja elementu geometrycznego sieci określona będzie przez  $(U + U')$  tę samą właściwość możemy zapisać inaczej, mianowicie:

jeżeli w macierzy  $K$  współczynniki zależą jedynie od struktury rozpatrywanego elementu sieci poddanego działaniu sił zewnętrznych to istnieje zależność

$$F = K \cdot U. \quad (5)$$

Macierz  $K$  jest o rozmiarach  $N \times N$  elementów, przy czym element  $K_{ij}$  jest sam w sobie macierzą złożoną  $3 \times 3$  wierszy i kolumn.

Dla przykładu

$$F_j = \sum_{i=1}^N K_{ij} \cdot U_i \quad \begin{bmatrix} F_{jx} \\ F_{jy} \\ F_{jz} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^N \begin{bmatrix} K_{1x} & K_{1y} & k_{1z} \\ k_{2y} & k_{2x} & k_{2z} \\ k_{3x} & k_{3y} & k_{3z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{ix} \\ U_{iy} \\ U_{iz} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Ostatni człon powyższego zapisu jest rozwinięciem zapisu skróconego  $F = K \cdot U$  lub  $F_j = \sum_i K_{ji} \cdot U_i$ .

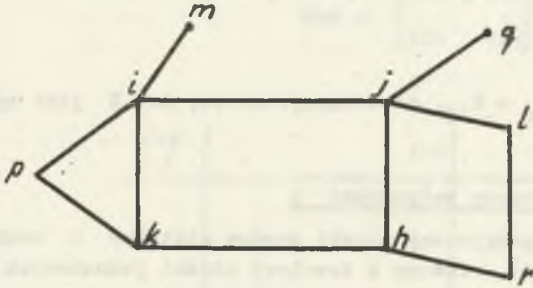
Macierz  $K$  nazwiemy macierzą sztywności układu. Znajomość tej macierzy pozwala teoretycznie rozwiązać wszystkie problemy deformacji pod warunkiem dokonania pewnych założeń mianowicie:

- jeżeli założymy przemieszczenia  $U$  w  $N$  węzłach siatki, to możemy z nich bezpośrednio wnioskować o wartości pola siły  $F$ , które należy przekazać, aby otrzymać zależność  $F = K U$ ,
- jeżeli założymy  $F$  wnioskujemy  $U$  z zależności  $U = K^{-1} \cdot F$ ,
- jeżeli założymy przemieszczenia dla  $r$  węzłów oraz siły przyłożone w  $(N - r)$  węzłach (przypadek najczęstszy w praktyce) relacja  $F = K U$ , sprowadza się do relacji zapisu układu liniowego o  $N$  równań dla  $N$  niewiadomych:  $r$  - sił i  $N - r$  przemieszczeń.

### 3. Własności podstawowe macierzy sztywności $K$

Macierz  $K$  posiada tę własność, że jest zawsze symetryczna i na ogół pusta (mało aktywna), rzadka.

Zanim wykażemy, że macierz  $K$  jest symetryczna zwrócimy uwagę na wiersz  $n_j^0$  układu  $F = K \cdot U$



Rys. 2

$$F_j = \sum_{i=1}^N K_{ji} \cdot U_i \quad (7)$$

Dla określonego "j" istnieją dwa typy węzłów, te które przylegają bezpośrednio do "j" i te które do węzła "j" nie przylegają.

Z rys. 2 widać, że węzły i, n, t i q przylegają do "j", natomiast r, k, p i m do węzła "j" nie przylegają.

Zakładając, że  $F_j = 0$  wtedy  $K_{j1} \cdot U_1 + K_{j2} \cdot U_2 + \dots + K_{ji} \cdot U_i + K_{jk} \cdot U_k + K_{jl} \cdot U_l + K_{jq} \cdot U_q + K_{jp} \cdot U_p + K_{jj} \cdot U_j + \dots + K_{jN} \cdot U_N = 0$  a więc układ jest w równowadze.

Poszczególne wyrazy powyższej sumy można określić jako udział wszystkich węzłów sieci na węzeł j.

Rozpatrzmy dla przykładu przemieszczenia pozorne pomijając wszystkie pozostałe węzły oprócz węzła  $n_p$ .

Jest oczywiste, że przemieszczenie w węzle p nie naruszy położenia węzła j. Należałoby jednak założyć, że pod działaniem siły  $F_i$  i  $F_k$  przemieszczenie  $U_i = U_k = 0$ ; z tego wynika, że  $U_r, U_n, U_q, U_l$  i  $U_m$  też będą równe zero, czyli nie będą poddane wpływom sił zewnętrznych. Inaczej mówiąc  $K_{jp} \cdot U_{jp} = 0$ , lecz  $U_p \neq 0$  pociąga to za sobą, że  $K_{jp} = 0$ .

W wierszu  $n_j^0$  równania  $K$  jedynie nie zerowe wyrazy, to  $K_{jn}, K_{jl}, K_{ji}$  i  $K_{jq}$ ; są to wyrazy, których drugi indeks odpowiada węzłom sąsiadującym z węzłem  $n_j^0$ .

Macierz sztywności jest więc na ogół mało aktywna, pusta, lecz w swym układzie symetryczna.

Przyjrzyjmy się bliżej tej własności i wykażmy ją: w tym celu rozpatrzmy dwa układy sił zewnętrznych  $F$  i  $F'$ .

Obydwa układy będą miały taki charakter, że wszystkie odkształcenia będą równe zero, przy czym w pierwszym tylko  $U_1$ , a w drugim  $U_j$  będą różne od zera ( $U_1 \neq 0$  i  $U_j \neq 0$ ).

Zastosujmy dalej zasadę wzajemności pracy pochodzącej od dwóch układów sił:  $F$  i  $F'$ .

Według takiej relacji praca pochodząca od uogólnionej siły  $F$  na odpowiadającym jej uogólnionym przemieszczeniu pochodzącym od siły  $F'$  równa

jest pracy siły  $F'$  na odpowiadającym jej uogólnionym przemieszczeniu pochodzącym od siły  $F$ , a więc

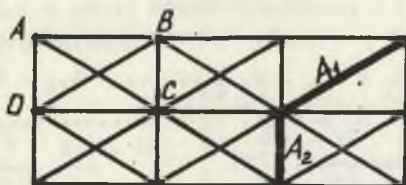
$$(K_{ji} \ U_i)^t \cdot U_j = (K_{ij} \ U_j)^t \cdot U_i \quad \text{kładąc, że } U_i = U_j, \text{ wtedy}$$

$$U_i^t \cdot (K_{ji}^t - K_{ij}^t) \cdot U_i = 0,$$

a więc dla dowolnego  $U_i$ ,  $K_{ji} = K_{ij}$ , co wskazuje na to, że  $K$  jest symetryczna.

### 3.1. Przykład obliczenia macierzy sztywności $K$

Do obliczeń macierzy  $K$  przyjmijmy płaski system siatkowy o oczkach kwadratowych o boku  $a$  (rys. 3), złożony z dowolnej ilości jednakowych powierzchni ułożonych obok siebie i związanych między sobą na wzór sieci strukturalnej sprężystego modelu.



Rys. 3

Oczko A B C D składać się będzie z czterech prętów o długości "a" ułożonych w kwadrat oraz dwóch prętów ułożonych po przekątnych AC i BD zapewniających spójność elementu.

Jeżeli oznaczymy boki kwadratu AB, BC, CD i DA przez  $A_2$ , przekątną kwadratu przez  $A_1$  oraz moduł sprężystości

prętów przez  $E$  i założymy, że nie istnieje tarcie na węzłach łączących pręty, to moduł sprężystości struktury  $E$  str i współczynnik Poissona można określić jako funkcję  $E$ ,  $a$ ,  $A_2$  i  $A_1$ .

Pomijając wyprowadzenie tego rachunku napiszemy:

$$\delta = \frac{1}{3} \quad \text{oraz} \quad E \text{ str} = \frac{4}{3} \frac{E' A_2}{a}. \quad (8)$$

Niech  $F$  będzie macierzą sił zewnętrznych przyłożonych w  $N$  węzłach siatki i  $U$  macierzą kolumnową przemieszczeń tych węzłów zadaniem będzie znaleźć macierz sztywności  $K$  układu określonego wzorem  $F = K \cdot U$ .

Dla ścisłości podaje się, że węzły zawsze opisujemy w przyjętej kolejności współczynników macierzy według przyjętych osi, rys. 4.

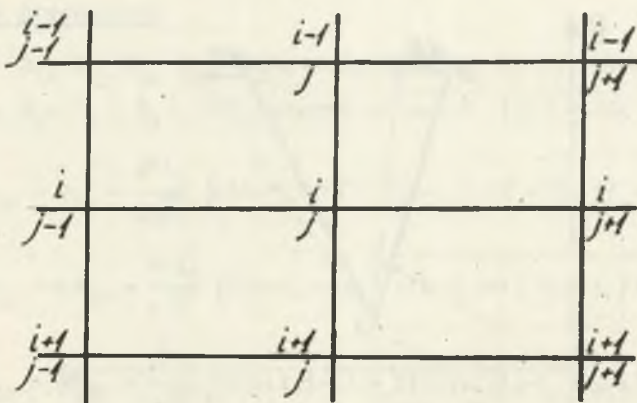
Osie współrzędnych są równoległe do boku kwadratu.

Elementy  $F_{ij}$  i  $U_j$  macierzy  $F$  i  $U$  będą miały postać

$$F_{ij} = \begin{bmatrix} F_{ijx} \\ F_{ijy} \end{bmatrix} \quad U_{ij} = \begin{bmatrix} U_{ijx} \\ U_{ijy} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

natomiast element macierzy  $K$

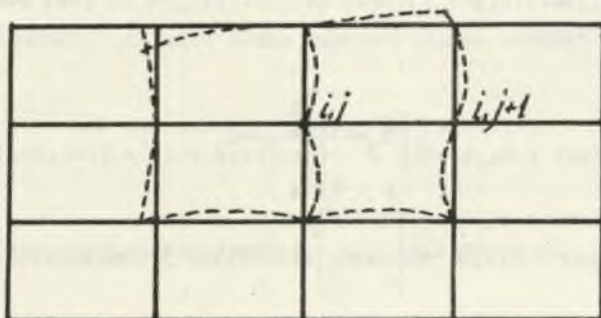
$$K_{mn} = \begin{bmatrix} k_{1x} & k_{1y} \\ k_{2x} & k_{2y} \end{bmatrix}_{mn} \quad (10)$$



Rys. 4

### 3.1.1. Równowaga w węźle $(i, j)$

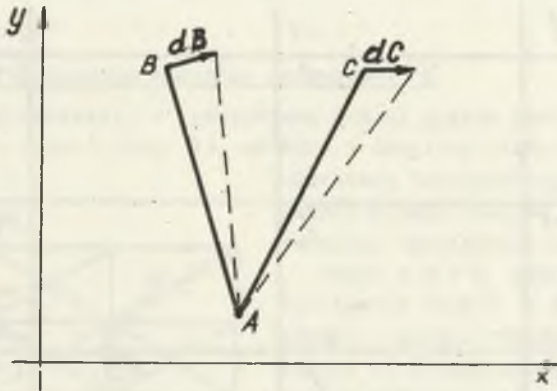
Umieścimy w strukturze siatki punkt  $(i, j)$  i zapiszmy, że suma sił przyłożonych w tym punkcie równa się zero. Pod wpływem sił  $F$  struktura ulegnie deformacji i zdeformuje się w sąsiedztwie węzła  $(i, j)$ . Deformacja będzie przebiegać tak jak na rys. 5, linie przerywane.



Rys. 5

Osiem prętów zbieżnych w węźle jest poddane działaniu sił podłużnych, które równoważą  $F_{ij}$ , siłę zewnętrzną przyłożoną w węźle  $(i, j)$ .

Chodzi o to aby w pierwszym etapie ocenić zmiany długości  $\frac{dl}{L}$  i  $\frac{da}{a}$  czterech przekątnych i czterech boków w węźle  $(i, j)$ . Należy podkreślić, że końce przekątnych i boków ulegają wpływowi dowolnych względnie małych odkształceń.



Rys. 6

Istnieje jednak pewna trudność w orientacji rozpatrywanej płaszczyzny (rys. 6). Otóż jeżeli unieruchomimy punkt A zakładamy, że w punkcie B i C wystąpią nieznaczące odkształcenia  $dB = dC$ , jednak zmiany AB i AC nie będą tej samej długości, wartości tych wydłużeń zależą od numeru rozpatrywanego segmentu.

Niech  $X_1, Y_2, X_3$  i  $Y_4$  będą miarami algebraicznymi sił, których cztery boki wychodzą z węzła  $(ij)$  oddziaływując na węzeł, np.: jeżeli pręt  $(i, j) \dots (i, j + 1)$  oraz  $(i, j) \dots (i, j - 1)$  jest rozciągany, wtedy  $X_1 > 0$  a  $X_3 < 0$



Jeżeli  $U(i, j)$  i  $V(i, j)$  nazwiemy składowymi przemieszczenia węzła  $(ij)$ , wtedy

$$X_1 = \frac{E'A_2}{a} [U(i, j + 1) - U(i, j)]$$

$$X_2 = \frac{E'A_2}{a} [V(i - 1, j) - V(i, j)]$$

(11)



$$\begin{aligned}
 X_3 &= \frac{E^1 A_2}{a} [U(i, j-1) - U(i, j)] \\
 Y_4 &= \frac{E^1 A_2}{a} [V(i+1, j) - V(i, j)].
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

### Przypadek przekątnych

Niech  $D_{1x}$ ,  $D_{1y}$ ,  $D_{2x}$ ,  $D_{2y}$  będą składowymi sił wewnętrznymi (dla przekątnych  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$  i  $D_4$ ) działających na węzeł  $(i, j)$  wtedy

$$\begin{aligned}
 D_{1x} = D_{1y} &= \frac{E^1 A_1}{a\sqrt{2}} [U(i-1, j+1) + V(i-1, j+1) - U(i, j) - V(i, j)] \\
 D_{2x} = -D_{2y} &= \frac{E^1 A_1}{a\sqrt{2}} [V(i-1, j-1) - U(i-1, j-1) + U(i, j) - V(i, j)] \\
 -D_{3x} = -D_{3y} &= \frac{E^1 A_1}{a\sqrt{2}} [-U(i+1, j-1) - V(i+1, j-1) + U(i, j) + V(i, j)] \\
 D_{4x} = -D_{4y} &= \frac{E^1 A_2}{a\sqrt{2}} [U(i+1, j+1) - V(i+1, j+1) - U(i, j) + V(i, j)].
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

Warunek równowagi można więc napisać w następujący sposób:

$$\begin{aligned}
 X_1 + X_3 + D_{1x} + D_{2x} + D_{3x} + D_{4x} + F_{ijx} &= 0 \\
 Y_2 + Y_4 + D_{1y} + D_{2y} + D_{3y} + D_{4y} + F_{ijy} &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

Te dwa równania skalarne można napisać jednym równaniem w formie macierzy

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} [(i-1, j-1) + (i+1, j+1)] + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} [(i-j, j) + (i+1, j)] + \\
 &+\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} [(i-1, j+1) + (i+1, j-1)] + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} [(i, j-1) + (i, j+1)] - \\
 &- 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} (i, j) = - \frac{F_{ij}}{E^1 A_2 / a},
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

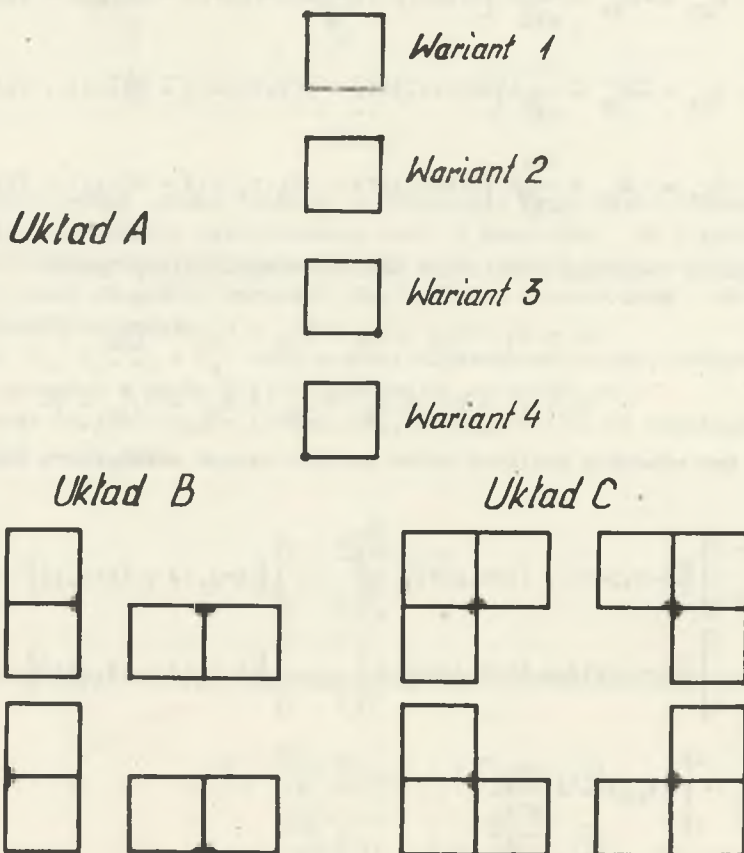
w którym indeks  $(i,j)$  przyporządkowany jest składowym przemieszczeń  $U(i,j)$  i  $V(i,j)$ , przy czym

$$\frac{P_{1j}}{E^1 A_2} \quad \text{będzie mieć wymiar długości, natomiast}$$

$$\frac{E^1 A_2}{a} = \lambda, \quad \text{gdzie } \lambda - \text{oznacza współczynnik krotności równy modułowemu } E_{st} \text{ struktury.}$$

### 3.1.2. Równowaga w punktach granicznych

Poprzednio przedstawiona relacja równowagi jest ważna dla wszystkich punktów wewnętrznych, lecz nie dla tych, które leżą na jej granicach.



Rys. 7

Niech  $(ij)$  będzie oznaczało zawsze węzeł graniczny, w którym założymy relację równowagi.

Istnieją trzy możliwe układy zapisane w (A), (B) i (C), rys. 7, przy czym każdy z nich można rozpatrzyć w czterech wariantach.

Każdemu z tych dwunastu wariantów odpowiada wariant podstawowej relacji równowagi, której znajomość pozwala skonstruować macierz sztywności (K) dla oczek o dowolnych kształtach geometrycznych.

Przy ustalaniu tych dwunastu "peryferyjnych" wzorów należy pamiętać, że ilość prętów ograniczająca model jest zmniejszona do połowy.

### 3.4. Tworzenie macierzy sztywności (K)

Zapiszmy najpierw 13 poprzednich zależności w formie ogólnej

$$A(i-1,j-1) + B(i-1,j) + C(i-1,j+1) + D(i,j-1) + E(i,j) + F(i,j+1) + \\ + I(i+1)(j-1) + I(i+1,j) + L(i+1,j+1) + \lambda F_{ij} = 0, \quad (15)$$

gdzie

A, B, C.....L są macierzami z 2 x 2 wierszy i kolumn.

Następnie postawmy pytanie?

Jak skonstruować wiersz  $n^o$ i macierzy K?

Wiersz  $n^o$ i odpowiada węzłowi  $n^o$ i struktury i składa się:

- 1) z permutacji dziewięciu macierzy A B...L położonych w polach  $(i,k)$ , dla których "i" oraz "k" są dwoma węzłami sąsiednimi,
- 2) z macierzy zerowych położonych w polach  $(i,j)$ , dla których "i" oraz "j" są dwoma węzłami nie sąsiadującymi.

Skonstruowanie zatem macierzy K nawet dla dużego M przy użyciu maszyny matematycznej nie powinno przedstawiać większych trudności.

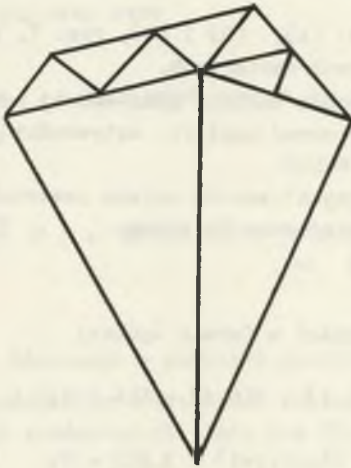
Mając wyznaczoną macierz sztywności K układ liniowy  $F = K \cdot U$  rozwiązujemy przy pomocy jednej z metod iteracji (np. Gauss-Seidel).

### 4. Metoda elementów skończonych z zastosowaniem do zagadnienia sprężystości płaskiej

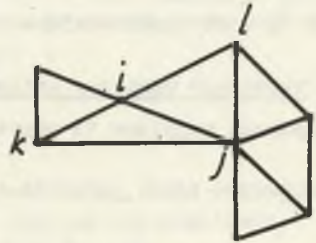
Metoda elementów skończonych odróżnia się od metody różnic skończonych dwiema następującymi cechami:

1. Podstawowy element w miejsce formy kwadratu o boku "a" jest elementem o formie i wymiarach dowolnych (rys. 8). Na ogół jest to trójkąt; dwa elementy struktury mogą mieć różne wymiary.

2. Każdy element jest niezależny i może posiadać dowolne charakterystyki mechaniczne  $(E, \nu)$  różne od charakterystyk sąsiednich.



Rys. 8

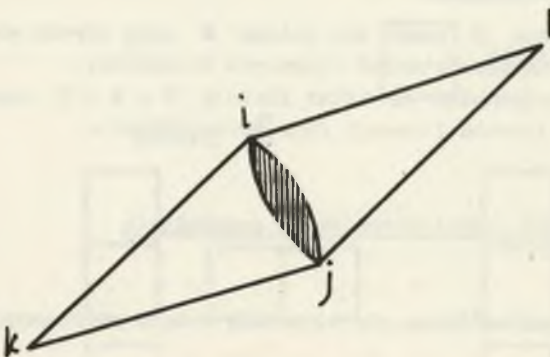


Rys. 9

Tak jak w przypadku układów siatkowych należy rozwiązać układ w formie  $F = K \cdot U$ . Obliczenie macierzy sztywności w tym przypadku jest bardziej złożone.

Dla przykładu posłużymy się strukturą złożoną z zespołów wielu trójkątnych płytek "spiętych" między sobą u ich wierzchołków (rys. 9).

Podajmy węzły działaniu sił  $F$ . Na skutek działania tych sił struktura ulegnie deformacji:

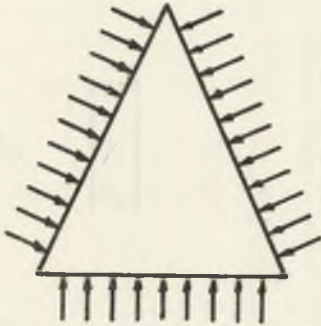


Rys. 10

I. Boki dwóch trójkątów sąsiednich  $i, j, k$  oraz  $i, j, l$  mogą się zachowywać niezależnie jeden od drugiego (rys. 10), może nastąpić również ich nałożenie wzdłuż  $AB$  w tej samej płaszczyźnie wystąpić "pustka", znaczy to, że ciągłość ośrodka nie będzie zachowana.

W sąsiedztwie wierzchołków będzie miała miejsce koncentracja naprężeń, przy czym rozkład naprężeń będzie inny niż w ośrodku ciągłym.

Zespolecie poszczególnych elementów struktury w całości w formie "spięcia", okazuje się niewłaściwe, daje niewłaściwe przybliżenie ośrodka ciągłego. Dokładniejszą charakterystykę ośrodka można uzyskać redukując sukcesywnie rozmiary trójkątów.



Rys. 11

Wyobraźmy sobie dodatkowo, że oprócz siły  $F$  przyłożonej do  $N$  węzłów (1,2...  $N$ ) przyłożymy siły rozłożone na bokach trójkątów (rys. 11).

Dodanie rozłożonych sił ma na celu:

- 1) zapewnić ciągłość ośrodka w przypadku, gdy odcinek  $ij$  pozostaje odcinkiem prostym nawet po deformacji,
- 2) odciążyć węzły  $ij$ .....

Z powyższego wynikałoby, że tak pomyślane i zrealizowane przybliżenie ośrodka ciągłego jest bardziej słuszne niż w przypadku pierwszym "spinania" poszczególnych elementów w całość.

Dodanie rozłożonych sił oznacza, że zakładamy odkształcenia jednorodne dla każdego trójkąta, tzn. takie w których wektor odkształceń jest stały na całym obszarze trójkąta (pociąga to, że wektor naprężeń jest również stały).

Odcinek prosty  $PQ$  w trójkącie  $ijk$  przekształci się w odcinek  $P'Q'$ ; odcinek prosty w trójkącie zdeformowanym.

#### Uwaga

- Wektory naprężeń  $\sigma_{ij}$  i  $\sigma_{jk}$  dwóch sąsiednich elementów  $\delta$  i  $\mu$  nie są równe; istnieje więc nieciągłość naprężeń wzdłuż  $i, j$ .
- Siły rozłożone nie mają charakteru naturalnego więc nie będziemy dalej ich rozważać, zajmiemy się siłami skupionymi w węzłach  $i, j, k$ ...

#### 4.1. Tworzenie macierzy sztywności

##### 1) Współrzędne uogólnienie elementu $\delta$ struktury

Jeżeli wektor odkształceń  $\epsilon_{\delta}$  jest stały w elemencie  $n^{\circ}\delta$  znaczy, że  $\frac{\partial U}{\partial x}$  i  $\frac{\partial V}{\partial y}$  oraz  $\frac{\partial U}{\partial y}$  i  $\frac{\partial V}{\partial x}$  są stałe dla całego punktu  $M$  należącego do  $\delta$  ( $U$  i  $V$  oznaczają składowe przemieszczenia p.  $M$ ), tzn., że  $U_M$  i  $V_M$  można zapisać w formie liniowej w układzie współrzędnych  $x, y$ .

$$U_M = A_0 + A_1x + A_2y$$

$$V_M = B_0 + B_1x + B_2y$$

(16)

Współczynniki równań  $A_i$  i  $B_j$  są stałe dla określonego elementu i dokładnie charakteryzują jego deformacje.

Przez  $A_\partial$  oznaczają będziemy macierz kolumnową złożoną ze współczynników elementów  $n^\partial$

$$A_\partial = \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ B_0 \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Powyższe równania  $U_M$  i  $V_M$  można zapisać w formie macierzy

$$\begin{matrix} U_M \\ V_M \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ B_0 \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad \text{gdzie } U_M = X A_\partial \quad (18)$$

#### 4.2. Sztywność elementarna $k$ elementu $n^\partial$

Sztywność  $k$  określona jest równością

$$\begin{bmatrix} \vec{f}_1 \\ \vec{f}_j \\ \vec{f}_k \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} U_i \\ U_j \\ U_k \end{bmatrix}, \quad (19)$$

gdzie

$\vec{U}_i, \vec{U}_j, \vec{U}_k$  - oznaczają wektory przemieszczeń wierzchołków  $i, j, k$  elementu  $\partial$ ,

$\vec{f}_1, \vec{f}_j, \vec{f}_k$  - oznaczają siły zewnętrzne przyłożone w tych wierzchołkach,

$k_\partial$  - jest macierzą złożoną z  $3 \times 3$  elementów, przy czym każdy element jest sam w sobie macierzą o  $2 \times 2$  wierszach i kolumnach.

Bezpośredni rachunek  $k$  jest narazie niemożliwy, gdyż nie posiadamy informacji w zakresie charakteru siły  $f_1$ . Wykorzystując jednak twierdze-

nie o pracach przygotowanych do wywołania deformacji przygotowanej elementu  $n^{\circ}$  potrafimy rachunek taki przeprowadzić.

Przypomnijmy, że przemieszczenie punktu M określone jest równaniem  $U_M = X_M A$ . Wyprowadźmy macierz kolumnową przemieszczeń wierzchołków i, j, k elementu  $\delta$ .

$$U_{\delta} = \begin{bmatrix} U_i \\ U_j \\ U_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \\ U_k \\ V_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_i & Y_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & X_i & Y_i \\ 1 & X_j & Y_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & X_j & Y_j \\ 1 & X_k & Y_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & X_k & Y_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ B_0 \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad (20)$$

gdzie

$$U = X_{\delta} \cdot A_{\delta}.$$

Wprowadźmy wektor odkształceń

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}, \quad \text{gdzie: } \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial U}{\partial x} = A_1 \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial V}{\partial y} = A_2 \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial x} = A_2 + B_1 \end{aligned} \quad (21)$$

i zastąpmy dalej operator różniczkowy  $\delta$  przez operator algebraiczny stały B.

$$\varepsilon_{\delta} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ B_0 \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad (22)$$

gdzie

$$\varepsilon_{\delta} = B \cdot A_{\delta}. \quad (23)$$

Operator algebraiczny B jest niezależny od rozpatrywanego elementu  $n^{\circ}$ .

Wprowadźmy wektor naprężeń

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (24)$$

oraz moduł sprężystości  $T$  wiążący  $\sigma$  i  $\varepsilon$ , gdzie

$$\sigma = T \times \varepsilon.$$

### Przykład

Dla deformacji płaskiej - moduł sprężystości  $T$  elementu można zapisać w następującej formie:

$$T = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ & \lambda + 2\mu & 0 \\ \lambda_0 & 0 & \mu \end{bmatrix}, \quad (25)$$

gdzie:  $\lambda$  i  $\mu$  są stałymi Lamego, przy czym  $T$  dla różnego  $\sigma$  można przyjmować różne wartości. Ostatecznie wielkość naprężeń w rozpatrywanym elemencie można wyznaczyć ze wzoru

$$\sigma_0 = T \varepsilon_0 = T(B A_0) = TB \cdot A_0. \quad (26)$$

Korzystając z twierdzenia o pracach przygotowanych prześledźmy w badanym elemencie przemieszczenia wirtualne poczynając od pewnego stanu zdeformowanego, scharakteryzowanego przez  $\varepsilon_0$  i  $\sigma_0$ .

Przemieszczenia te określa macierz

$$dA_0 = \begin{bmatrix} d A_0 \\ d A_1 \\ d A_2 \\ d B_0 \\ d B_1 \\ d B_2 \end{bmatrix} \quad (27)$$

oraz

$$d\varepsilon_0 = B d A_0. \quad (28)$$



Zmiana energii potencjalnej odkształcenia w wirtualnym (przygotowanym) przemieszczeniu wyniesie

$$dW = S_0 (d\varepsilon_0)^t \sigma_0, \quad (29)$$

gdzie

- s - oznacza powierzchnię trójkąta  $n_0^0$ ,
- t - oznacza transponowanie.

Rozpisując odpowiednio wzór na  $dW$  otrzymamy

$$dW = S_0 (d\varepsilon_x, d\varepsilon_y, \gamma_{xy}) \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}. \quad (30)$$

Zapiszmy, że zmiana energii sprężystości  $dW$  jest równa pracy  $dW_f$  sił  $\vec{f}_i, \vec{f}_j, \vec{f}_k$  na drodze przemieszczeń  $d\vec{U}_i, d\vec{U}_j, d\vec{U}_k$  wierzchołków  $i, j, k$ , czyli

$$dW_f = \vec{f}_i \cdot d\vec{U}_i + \vec{f}_j \cdot d\vec{U}_j + \vec{f}_k \cdot d\vec{U}_k, \quad (30)$$

gdzie

$$\vec{f}_0 = \begin{bmatrix} f_i \\ f_j \\ f_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{ix} \\ f_{iy} \\ f_{jx} \\ f_{jy} \\ f_{kx} \\ f_{ky} \end{bmatrix} \quad (31)$$

oraz  $dW_f = dU^t f$ , ponieważ

$$\begin{aligned} U &= X Y \\ dU &= X dA \\ dU^t &= d A^t X^t \end{aligned}$$

ostatecznie

$$dW_f = d A^t X^t f. \quad (32)$$

Zapisując, że  $dW = dW_f$ : (na podstawie twierdzenia o pracach przygotowanych) oraz, że  $S(d\varepsilon)^t = d A^t X^t f$ , gdy  $d\varepsilon^t = A^t B^t$  i dokonując odpowiednich podstawień ostatecznie

$$d A^t S B^t = d A^t X^t f. \quad (33)$$

Ponieważ  $dA$  w równości (33) może być dowolne wynika stąd, że

$$S B^t \sigma = X^t f,$$

gdzie

$$f = S(X^t)^{-1} B^t,$$

ponieważ  $\sigma = T_{\mathcal{E}} = T(BA)$  i  $A = X^{-1} U$  zatem  $\sigma = TB X^{-1} U$ , a więc ostatecznie

$$r = S \left[ (X^t)^{-1} (B^t T B) X^{-1} \right] U. \quad (34)$$

Rozważania powyższe pozwalają na zdefiniowanie w formie macierzy sztywności  $k$  elementu  $\theta$ .

Kładąc, że  $f = k_{\theta} \cdot U$  otrzymujemy

$$k_{\theta} = S \left[ (X^t)^{-1} (B^t T B) X^{-1} \right]_{\theta}. \quad (35)$$

Pamiętając, że  $S_{\theta}$  = powierzchnia trójkąta  $n^{\circ}$  zapiszemy, że

$$X = \begin{pmatrix} 1 & X_i & Y_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & X_i & Y_i \\ 1 & X_j & Y_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & X_j & Y_j \\ 1 & X_k & Y_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & X_k & Y_k \end{pmatrix} \quad (36)$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (37)$$

oraz, że  $T$  określone jest przez  $\sigma = T \cdot \xi$  jak również, że  $k$  jest symetryczne, ponieważ  $k^t = k(T^t = T)$ .

### 3. Konstrukcja ogólnej (globalnej) macierzy sztywności $K$

Na podstawie znajomości macierzy sztywności  $k$  wszystkich elementów, które budują sieć możemy zbudować ogólną (globalną) macierz sztywności  $K$ .

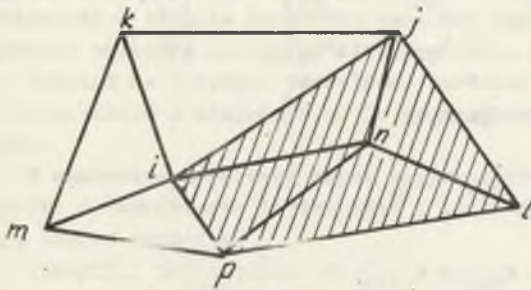
Zwróćmy najpierw uwagę na węzeł  $n^{\circ}$  struktury rys. 12.

Węzły będą się dzielić na dwie grupy:

- 1) te, które sąsiadują z n (i, j, l, p),
- 2) te, które z węzłami nie sąsiadują (m, k...).

Rozpatrzmy równanie  $n^o_n$  wg  $F = K U$ , a zatem

$$F_n = K_{n1} U_1 + K_{2n} U_2 + \dots + K_{ni} U_i + K_{nj} U_j + K_{nl} U_l + \dots + \dots + K_{nk} U_k + \dots + K_{nN} U_N^m.$$



Rys. 12

Jest oczywiste, że wszystkie  $K_{nq}$  są zerowe oprócz  $q = i, j, l, p$ , tzn. dla węzłów sąsiadujących z n

$K_{ni}$  - przedstawia siłę strukturalną.

Przeprowadźmy rachunek  $K_{ni}$  - w tym celu rozpatrzmy sztywności elementarne elementów  $\lambda$  i  $\omega$  posiadające wspólny brzeg  $n_i$  oraz założmy, że wszystkie  $U_j = 0$  oprócz  $U_i = 1$

$$\begin{bmatrix} f_n \\ f_j \\ f_p \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} k_{\lambda}$$

$$\begin{bmatrix} U_n \\ U_j \\ U_i \end{bmatrix} \quad \text{stąd}$$

$$\begin{bmatrix} f_n \\ f_j \\ f_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (38)$$

oraz

$$\begin{bmatrix} f_n \\ f_i \\ f_p \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} k_\omega \begin{bmatrix} U_n \\ U_i \\ U_p \end{bmatrix} \quad \text{stąd}$$

$$\begin{bmatrix} f_n \\ f_i \\ f_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_n \\ U_i \\ U_p \end{bmatrix} \quad (39)$$

Rozwiązując powyższe macierze otrzymamy

$$f_n/\lambda = k_{13}$$

oraz

$$f_n/\omega = k_{12}/\omega$$

a więc

$$K_{ni} = k_{13}/\lambda + k_{12}/\omega \quad (40)$$

Element  $K_{ni}$  jest więc równy sumie dwóch elementów macierzy sztywności dla dwóch trójkątów mających boki  $n_i$  wspólne.

Wykażemy teraz, że  $K_{ni} = K_{in}^t$  (zasada wzajemności pracy).

Rozpatrzmy przemieszczenia  $U_1 = U_2 = \dots = 0$  oprócz  $U_n = 1$  i zapiszmy

$$\begin{bmatrix} f_n \\ f_j \\ f_i \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} k_\lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow f_i = k_{31}/\lambda$$

$$\begin{bmatrix} f_n \\ f_i \\ f_p \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} k_\omega \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow f_i = k_{21}/\omega \quad (42)$$

Wyprowadzmy macierz kolumnową przemieszczeń wierzchołków  $i, j, k$  elementu.

Rozwiązując powyższe macierze otrzymamy analogicznie jak w przypadku poprzednim, że

$$K_{in} = k_{31/\lambda} + k_{21/\omega}$$

Powyższe rozważania teoretyczne są przyczynkiem do realizacji programu problemowego na bazie metody elementów skończonych przy wykorzystaniu do rozwiązywania zagadnień jednej z metod iteracji, których dobór gwarantuje konwergencje i czas obliczeń (np. metoda Gauss-Seidla), przez co uzyskuje się możliwość dokonania niezbędnych obliczeń na maszynie cyfrowej, otrzymując w efekcie konkretne wartości naprężeń i odkształceń w każdym punkcie węzłowym założonej siatki modelu.

Podział na trójkąty pozwala na bardziej szczegółowe rozeznanie naprężeń i odkształceń w miejscach, gdzie gradient naprężeń i odkształceń jest wysoki.

W mechanice górotworu można za pomocą omawianej metody analizować ośrodki o charakterze izotropowym i anizotropowym w jedno, dwu i trójosiowym stanie napięcia.

Specyfika modelowania ośrodka ciągłego pozwala na analizę naprężeń i odkształceń wokół wyrobisk górniczych w górotworze skotwionym, na analizę stanu naprężeń i odkształceń w resztkach pokładów i filarach, cylindrycznych próbkach poddanych ciśnieniom itp.

Stosując różne modyfikacje metody można rozszerzyć jej zakres na programy lepkie, lepko-sprężyste, sprężysto-plastyczne, sypkie oraz inne.

#### LITERATURA

1. Borecki M., Chudek M.: Mechanika Górotworu. Gliwice - 1968.
2. Clough R.W.: The finite element method in structural mechanics chapter 7 of Stress Analysis, ed O.C. Zienkiewicz and G.S. Holister, Wiley 1965.
3. Kisiel J.: Metoda elementów skończonych, Inżyniera Budownictwo nr 11/1970.
4. Ping Tong and T.H.H. Pian.: The convergence of finite (element method in solving linear elastic problems Massachusetts Institute of Technology Vol. 3, 1967.
5. Rakowski G.: Metoda elementów skończonych w mechanice budowlnej. Inżynieria, Budownictwo nr 4/1971.
6. Ralston A.: Wstęp do analizy numerycznej. Warszawa 1971.
7. Telega J.J.: Zastosowanie programowania liniowego do wyznaczenia nośności granicznej konstrukcji. Mechanika Teoretyczna i Stosowana Tom 9, zeszyt 1, 1971.
8. Walczak J.: Wytrzymałość materiałów oraz podstawy teorii sprężystości i plastyczności. Tom I, II, Państwowe Wydawnictwo Naukowe Warszawa, Kraków, 1971.
9. Zienkiewicz O.C.: The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics. Graw.-Hill Publishing Company Limited London 1968.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ  
ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ПРОБЛЕМ В МЕХАНИКЕ ГОРНЫХ ПОРОД

Р е з ю м е

В статье обращается внимание на возможности использования метода конечных элементов для решения проблем, связанных с механикой горных пород.

В статье представлены теоретические основания метода, а также способ определения и расчёта матриц жёсткости системы в применении к вопросам плоской упругости.

FINITE ELEMENTS METHOD APPLIED TO THE SOLUTION  
OF SOME PROBLEMS IN ROCK MECHANICS

S u m m a r y

Attention has been turned to the possibilities of using finite elements method in the solution of some problems concerning rock mechanics.

In the paper theoretical foundations of the method and ways of determining and calculation of rigidity matrix applied to the problems of planar elasticity were given.