

Tadeusz GRABOWIECKI
Instytut Elektroniki

KONCEPCJA DOBORU I ZMIANY KROKU CAŁKOWANIA
W PROCESIE ANALIZY LINIOWYCH OBWODÓW ELEKTRYCZNYCH
W STANIE NIEUSTALONYM, DOKONYWANEJ METODĄ WEKTORA STANU

Streszczenie. W artykule omówiono sposób obliczania początkowej wartości kroku całkowania i maksymalnego czasu obliczeń oraz metodę zmian tego kroku, mających na celu skrócenie procesu obliczeniowego przy pobudzaniu obwodu wymuszeniami w postaci skoku jednostkowego, impulsu i in.
Porównano czas obliczeń w przypadku stałego i zmiennego kroku całkowania dla różnych typów obwodów.

1. WSTĘP

Jedną z najczęściej stosowanych metod analizy stanów nieustalonych w liniowych obwodach elektrycznych przy pomocy maszyn cyfrowych jest metoda wektora stanu [1,2]. Obwód elektryczny opisuje się przy pomocy dwóch równań wektorowych

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A} \underline{x} + \underline{B} \underline{u} \quad (1)$$

$$\underline{y} = \underline{C} \underline{x} + \underline{D} \underline{u}, \quad (2)$$

gdzie

- \underline{x} - wektor stanu obwodu,
- \underline{y} - wektor prądów i napięć w obwodzie,
- \underline{u} - wektor wymuszeń (SEM i SPM),
- $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \underline{D}$ - macierze, opisujące obwód.

Całka równania (1) przy warunku początkowym $\underline{x}(0)$ ma postać

$$\underline{x}(t) = e^{\underline{A}t} \underline{x}(0) + \int_0^t e^{\underline{A}(t-\tau)} \underline{B} \underline{u}(\tau) d\tau, \quad (3)$$

gdzie

$$e^{\underline{A}t} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\underline{A}t)^k}{k!} \approx \sum_{k=0}^N \frac{(\underline{A}t)^k}{k!} \quad (4)$$

Jeżeli przyjąć, że wektor wymuszeń można aproksymować schodkowymi funkcjami czasu z punktami nieciągłości dla $t = nT$ dla pewnego T i $n = 0, 1, 2, \dots$, wówczas całka (3) da się przedstawić w sposób jawny

$$\underline{x}[(n+1)T] = e^{\underline{A}T} \underline{x}(nT) + (e^{\underline{A}T} - \underline{1}) \underline{A}^{-1} \underline{B} u(nT) \quad (5)$$

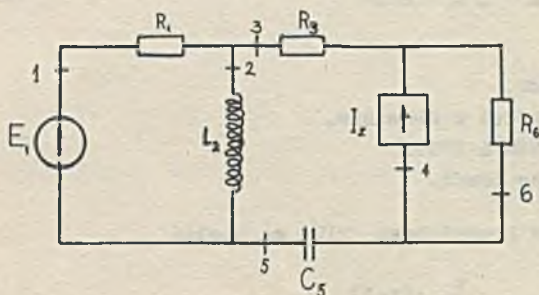
Stała T zwana jest krokiem całkowania.

Przyjmowanie stałego kroku całkowania T przez cały czas trwania obliczeń jest niewygodne i nieekonomiczne, szczególnie gdy w przebiegach czasowych prądów i napięć występują stałe czasowe, znacznie różniące się od siebie.

Artykuł poświęcony jest opisowi sposobu doboru i automatycznej regulacji kroku całkowania T . Regulacja taka znalazła zastosowanie w programie analizy liniowych obwodów elektrycznych ANNIE [3].

2. DOBÓR POCZĄTKOWEGO KROKU CAŁKOWANIA T_{pocz}

Dobór początkowego kroku całkowania opiera się zazwyczaj na określeniu najmniejszej i największej wartości własnej macierzy \underline{A} . Dokładne określenie wartości własnych macierzy \underline{A} wymaga obliczenia pierwiastków jej wielomianu charakterystycznego. W ogólnym przypadku prowadzi to do bardzo skomplikowanych obliczeń. Mniej czasochłonne, lecz i mniej dokładne, są metody szacowania maksymalnej i minimalnej części rzeczywistej pierwiastków wielomianu charakterystycznego.



Rys. 1

Omawiana metoda daje wyniki, których dokładność niewiele ustępuje poprzednim, natomiast jej numeryczna realizacja jest ogromnie prosta.

Szacowanie najmniejszej i największej wartości własnej macierzy \underline{A} odbywa się przez obliczenie funkcji elementów obwodu: $R_j C_j$; L_i/R_j ; $0.1\sqrt{L_i C_j}$ we wszystkich stykających się ze sobą gałęziach oraz wzięcie wartości minimal-

nej T_{min} i maksymalnej T_{max} z tych funkcji po wszystkich gałęziach obwodu.

Dla obwodu z rys. 1 i gałęzi 2 tymi funkcjami będzie L_2/R_1 ; L_2/R_3 $0.1\sqrt{L_2 C_5}$, a dla gałęzi 5 $R_1 C_5$; $R_6 C_5$ i $0.1\sqrt{L_2 C_5}$.

Przyjęto początkowy krok całkowania $T_{pocz} = 0.005 T_{min}$.

3. SPOSÓB ZMIANY KROKU CAŁKOWANIA PRZY WYMUSZENIACH W POSTACI SKOKU JEDNOSTKOWEGO

Początkowy krok całkowania zostały wybrany tak, by na początku obliczeń, gdy w obwodzie dominuje wpływ najmniejszej stałej czasowej, otrzymać przebiegi napięć i prądów z dostateczną dokładnością. Po wykonaniu stu kroków obliczeniowych z taką stałą T następuje jej zwiększenie.

Krok całkowania T zwiększany jest według ciągu Fibonacciego.

Taki sposób zwiększania kroku całkowania T zapewnia otrzymanie w przybliżeniu jednakowej dokładności obliczanych przebiegów czasowych w przypadku, gdy macierz A posiada szereg różnych wartości własnych, rozmieszczonych w dowolny sposób między wartością najmniejszą i największą.

Zakończenie obliczeń powinno nastąpić, gdy przebiegi czasowe w obwodzie ustalą się. W omawianym programie przyjęto, że obliczenia przerywa się, gdy $t > 5 \cdot T_{\max}$ lub gdy t większe od przeczytanej wielkości t_{\max} .

W celu zmniejszenia ilości wyników drukowanie napięć i prądów nie następuje po każdym kroku obliczeniowym. W omawianym programie przyjęto, że drukowania dokonuje się co 10 kroków obliczeniowych.

4. SPOSÓB ZMIANY KROKU CAŁKOWANIA PRZY ZMIENNYCH WYMUSZENIACH

Program ANNIE przewiduje możliwość występowania kilku typów zmiennych wymuszeń, periodycznych o okresie T_p lub nieperiodycznych, które ilustruje rys. 2.

Do możliwości tego programu dostosowano sposób zmian kroku całkowania T . W celu uzyskania maksymalnej szybkości obliczeń dla każdego typu zmiennego wymuszenia dobrano inny sposób zmieniania kroku T .

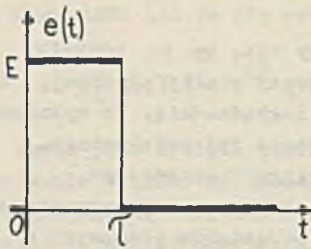
a. Impuls prostokątny

W czasie trwania impulsu ($t < T$) krok całkowania jest zmieniany tak, jak podano w punkcie 3. Gdy $t + T > T$, zmienia się krok całkowania do nowej wartości $T = T - t$, wykonuje jeden krok obliczeniowy z taką stałą T , po czym podstawią się $T = T_{\text{pocz}}$. Dalsze zmiany kroku następują zgodnie z punktem 3. Jeżeli mamy do czynienia z pojedynczym impulsem, wówczas obliczenia kończy się po czasie $T + 5 T_{\max}$.

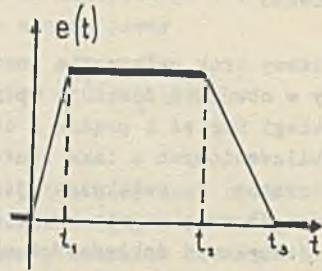
Jeżeli natomiast wymuszenie jest ciągiem impulsów o okresie T_p , krok całkowania jest regulowany jak w przypadku stałego wymuszenia do chwili, gdy $t + T$ nie przekroczy T_p . W momencie, gdy $t + T > T_p$ obliczana jest nowa wartość $T = T_p - t$, wykonywany jeden krok obliczeniowy, następnie za T przedstawia się T_{pocz} i proces ten powtarza się okresowo.

Zakończenie obliczeń przy wymuszeniu okresowym następuje po czasów równy

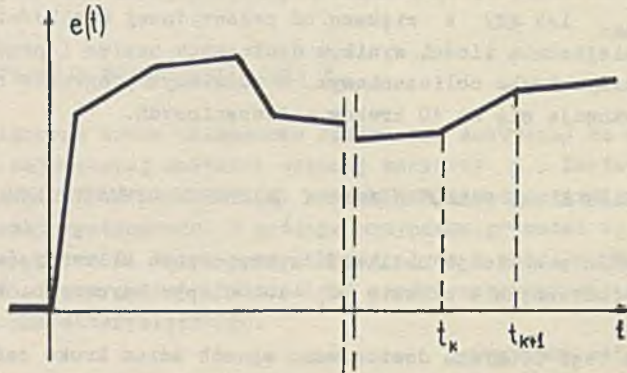
4 T_p .



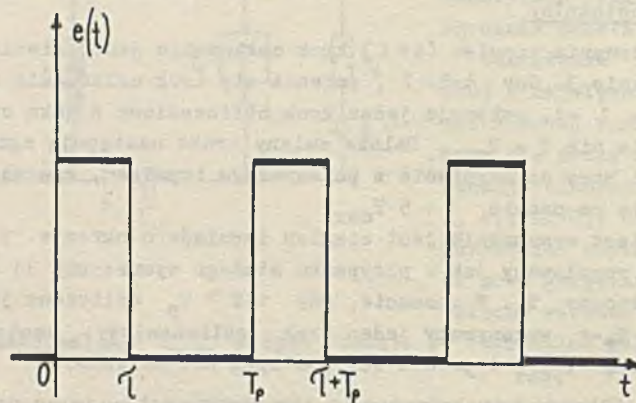
Rys. 2a



Rys. 2b



Rys. 2c



Rys. 2d

b. Impuls o kształcie trapezowym

W czasie, gdy wymuszenie zmienia się liniowo (tj. dla $0 < t < t_1$ i $t_2 < t < t_3$) przyjmuje się $T = T_{\text{pocz}} = \text{const}$. Poza tym zmiany kroku całkowania odbywają się podobnie jak dla wymuszenia w postaci impulsu prostokątnego, tj. przy ustalonym wymuszeniu ($t_1 < t < t_2$ i $t > t_3$) krok całkowania zmieniany jest zgodnie z ciągiem Fibonacciego aż do momentu, gdy $t+T > t_2$ (względnie w przypadku wymuszenia okresowego, gdy $t+T > T_p$). Następnie wykonywany jest jeden krok obliczeniowy przy $T = t_2 - t$ (odpowiednio $T = T_p - t$) i podstawia się ponownie $T = T_{\text{pocz}}$. Zakończenie obliczeń następuje po czasie $t_3 + 5 T_{\text{max}}$.

c. Dowolne wymuszenie zapisane w postaci tabelarycznej zależności $E(t)$ lub $J_2(t)$

Wartość wymuszenia w dowolnej chwili czasu obliczana jest przy założeniu, że między kolejnymi danymi punktami tabeli wymuszenie zmienia się w sposób liniowy.

Jeżeli wymuszenie na pewnym odcinku jest stałe lub zmienia się nieznacznie, wówczas krok całkowania T zmieniany jest tak, jak podano w poprzednich punktach. Jeżeli natomiast na pewnym odcinku wymuszenie zmienia się szybko, wówczas $T = T_{\text{pocz}}$ i nie ulega zmianie. Przyjęto, że wymuszenie jest wolnozmiennie, gdy

$$\frac{|u_{k+1} - u_k|}{\max(|u_k|, |u_{k+1}|)} < \delta, \quad (6)$$

gdzie δ jest pewną stałą rzędu 10^{-2} .

d. Dowolne wymuszenie zapisane w postaci analitycznej (wzorem)

Krok całkowania zmieniany jest tu tak samo jak w przypadku c, inne jest tylko kryterium oceny szybkości zmian wymuszenia. Za wolnozmiennie wymuszenie uważa się takie, dla którego

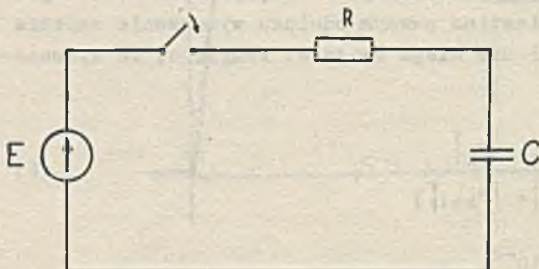
$$\frac{|u(t-2T) - u(t-T)| + |u(t-T) - u(t)|}{\max |u(\tau)|} \quad (7)$$

$$0 \leq \tau \leq t$$

5. ZAKOŃCZENIE

Podany sposób obliczenia T_{pocz} i t_{max} jest bardzo prosty, ale nie zapewnia uzyskania optymalnych (ze względu na czas wykonywania obliczeń) wartości kroku początkowego i czasu, po którym należy przerwać obliczenia. Chcąc w pełni wykorzystać możliwości, jakie daje opisany wyżej sposób, zmiany kroku całkowania i otrzymać jeszcze krótsze wyniki, można podawać z zewnątrz wartości T_{pocz} lub t_{max} (albo obie razem). W programie przewidziano także możliwość wykonywania obliczeń ze stałym krokiem całkowania.

Sposób dokonywania zmian kroku całkowania został oparty o badanie szybkości zmian wymuszenia, a nie zmian przebiegów wyjściowych, co wydawałoby się rzeczą bardziej naturalną. Sama znajomość przebiegu wyjściowego nie pozwala jednak przewidzieć zachowania się układu w przyszłości, co prowadzi do powstania znacznych błędów, szczególnie w przypadku, gdy wymuszenie będące przez pewien czas stałe zaczyna się ponownie zmieniać.



Rys. 3

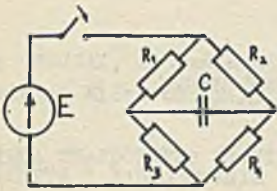
Jako przykład może posłużyć obwód z rys. 3, gdzie SEM E ma charakter impulsu prostokątnego o czasie trwania τ . Jeżeli $\tau > (3+4)RC$ wówczas w czasie trwania impulsu wszystkie przebiegi w układzie dla t bliskiego τ będą prawie ustalone i krok całkowania będzie duży. W związku z tym nie da się wychwycić szybkiej zmiany napięć i prądu bezpośrednio po końcu im-

pulsu. Problemy te nie występują przy proponowanym sposobie zmieniania kroku całkowania na podstawie zmian wymuszeń.

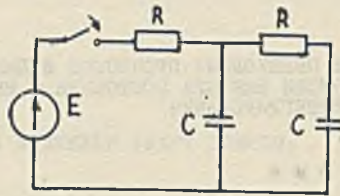
Dla zbadania skuteczności podanej metody doboru i zmian kroku całkowania dokonano analizy kilku prostych obwodów ze stałym i zmiennym krokiem całkowania. Badania przeprowadzono przy pobudzaniu układów skokiem jednostkowym. Wybrano ten rodzaj wymuszenia, aby otrzymać prostą zależność czasu obliczeń od stosowanej metody.

Dla obwodu podanego na rys. 3 czas obliczeń ze stałym krokiem wyniósł 102 s, ze zmiennym - 56 s.

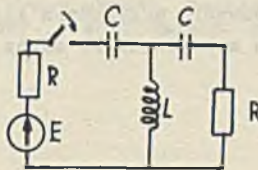
Dla obwodu z rys. 4 liczby te wyniosły odpowiednio 111 s i 83 s. Analiza obwodu pokazanego na rys. 5 ze zmiennym krokiem całkowania trwała około 4 razy krócej niż ze stałym, dla obwodu z rys. 6 - 5 razy, krócej, a dla obwodu na rys. 7 kilkanaście razy krócej.



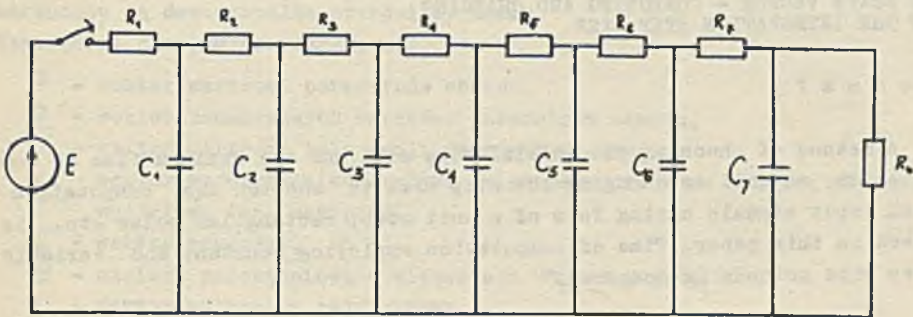
Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6



Rys. 7

Omawiany program został napisany w języku ALGOL 1204, a powyższe wyniki odnoszą się do jego realizacji na maszynie ODRA 1204.

LITERATURA

- [1] CALAHAN D.: Computer - aided network design. Mc Graw Hill Book Company 1968
- [2] BENJAMIN C.Kuo: Linear Networks and Systems Mc Graw-Hill Book Company 1967

- [3] GRABOWIECKI T.: Analiza liniowych obwodów prądu zmiennego w stanie nieustalonym. Skrypty Uczelniane Politechniki Śląskiej Nr 454 Gliwice 1975.

АНАЛИЗ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ
ПРИ ПОМОЩИ ВЕКТОРА СОСТОЯНИЯ - МЕТОДА ВЫБОРА И ПЕРЕМЕНЫ
ШАГА ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Р е з ю м е

В настоящей статье рассматривается метод выбора начального значения шага интегрирования и максимального времени расчётов, а также метод перемены шага с целью сокращения расчётов, при возбуждении входными сигналами в виде единичного импульса, прямоугольного импульса и др. Сделано сравнение времени расчётов для постоянного и переменного шагов интегрирования для разных типов цепей.

TRANSIENT ANALYSIS OF LINEAR ELECTRICAL CIRCUITS
BY STATE VECTOR - COMPUTING AND CHANGING
OF THE INTEGRATION STEP SIZE

S u m m a r y

A method of choosing the initial step size and the maximum time of computation, as well as changing the step size to shorten the computation with input signals having form of a unit step, rectangular pulse etc. is given in this paper. Time of computation employing constant and variable step size methods is compared.