ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1976
Seria: AUTOMATYKA z. 35 Nr kol. 480

Jerzy KLAMKA

STEROWALNOŚĆ LINIOWYCH UKŁADÓW DYSKRETNYCH Z OPÓŹNIENIEM

Streszczenie. Artykuł dotyczy względnej sterowalności liniowych układów dyskretnych z opóźnieniem w sterowaniu. Korzystając ze zdefiniowanej macierzy sterowalności podano warunki konieczne i wystarczające względnej sterowalności dla przypadku opóźnienia w sterowaniu. Sformułowano także warunki konieczne i wystarczające względnej sterowalności dla stacjonarnych układów dyskretnych z opóźnieniem w sterowaniu.

1. Wstęp

Problem sterowalności układów dyskretnych był w literaturze wielokrotnie rozpatrywany [1], [8], [9], [10]. Podobnie, zagadnienie sterowalności układów ciągłych z opóźnieniem, zarówno we współrzędnych stanu, jak i w sterowaniu, jest bogato reprezentowane w literaturze [2], [3], [4], [5], [6], [7]. W niniejszej pracy podano warunki konieczne i wystarczające względnej sterowalności niestacjonarnych liniowych układów dyskretnych,ze stałym opóźnieniem w sterowaniu. Sformułowane warunki bazują na badaniu rzędu odpowiednio zdefiniowanej macierzy sterowalności dla rozpatrywanych układów. W przypadku układów stacjonarnych ze stałym opóźnieniem uzyskane warunki konieczne i wystarczające względnej sterowalności są analogiczne, jak dla układów ciągłych ze stałym w czasie opóźnieniem w sterowaniu.

Niech będzie dany liniowy niestacjonarny dyskretny układ dynamiczny ze stałym opóźnieniem w sterowaniu, opisany liniowym wektorowym równaniem różnicowym w następującej postaci:

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k) + C(k)u(v(k)) \quad k\in\left[k_0,k_{N-1}\right] \quad (1)$$

gdzie:

$A(k)$ - jest macierzą $n\times n$ wymiarową,

$B(k),C(k)$ - są macierzami $n\times p$ wymiarowymi,

$x(k)\in R^n$ - jest wektorem stanu chwilowego,

$u(k)\in R^p$ - jest wektorem sterowań

Z - zbiór liczb całkowitych.

$[k_0,k_N] = \{k_0,k_1,\dots,k_N;$ gdzie $k_i = k_0 + i$, dla $i = 0,1,2,\dots,N\}$ Funkcja $v(k)$ typu $v:[k_0,k_{N-1}] \to Z$, jest zdefiniowana wzorem:

$$v(k) = k-h, \tag{2}$$

gdzie: h jest dodatnią liczbą całkowitą, reprezentującą stałe opóźnienie.

Wprowadza się funkcję $r(k)$, typu $r:[v(k_0),v(k_{N-1})] \to [k_0,k_{N-1}]$, określoną następującą równością:

$$r(k) = k+h \tag{3}$$

Wiadomo, że stan zupełny układu (1) w chwili k jest zdefiniowany w sposób następujący [6], [7], [8], [9]:

Definicja 1

Zbiór $z(k) = \{x(k),u(v(k)),u(v(k)+1),\dots,u(k-1)\}$ nazywa się stanem zupełnym układu (1) w chwili k.

Względną sterowalność układu (1) definiuje się następująco [6], [7],[8], [9].

Definicja 2

Układ (1) jest względnie sterowalny na odcinku $[k_0,k_N]$, jeżeli dla dowolnego stanu zupełnego $z(k_0)$ i dowolnego wektora $x_N \in R^n$, istnieje sekwencja sterowań $u(k_0),u(k_0+1),\dots,u(k_{N-1})$, taka, że zachodzi następująca równość $x(k_N) = x_N$.

Jednoznaczne rozwiązanie równania (1) z początkowym stanem zupełnym $z(k_0)$ jest następującej postaci:

$$x(k) = F(k,k_0)x(k_0) + \sum_{j=k_0}^{j=k-1} F(k,j+1)(B(j)u(j) + C(j)u(v(j))), \tag{4}$$

gdzie: $F(k,j)$ jest $n\times n$ wymiarową macierzą daną równością:

$$F(k,j) = F(k,j+1)A(j) = A(k-1)A(k-2)\dots A(j+1)A(j) \quad \text{dla } k>j \tag{5}$$

$$F(k,k) = I_n$$

gdzie: I_n jest $n\times n$ wymiarową macierzą jednostkową.

Podstawiając do równości (4) $k = k_N$, otrzymuje się relację:

$$x(k_N) = F(k_N,k_o)x(k_o) + \sum_{j=k_o}^{j={}_N-1} F(k_N,j+1)(B(j)u(j) + C(j)u(v(j))) =$$

$$= F(k_N,k_o)x(k_o) + \sum_{j=k_o}^{j=k_N-1} F(k_N,j+1)B(j)u(j) +$$

$$+ \sum_{j=v(k_o)}^{j=v(k_N)-1} F(k_N,r(j+1))C(r(j))u(j). \qquad (6)$$

Zakładając, że $v(k_N)>k_o$, równość (6) można przedstawić w następującej postaci, dogodnej w dalszej części niniejszych rozważań:

$$x(k_N) = F(k_N,k_o)x(k_o) + \sum_{j=v(k_o)}^{j=k_o-1} F(k_N,r(j+1))C(r(j))u(j) +$$

$$+ \sum_{j=k_o}^{j=v(k_N)-1} F(k_N,r(j+1))C(r(j))u(j) + \sum_{j=k_o}^{j=k_N-1} F(k_N,j+1)B(j)u(j) \qquad (7)$$

Dla skrócenia zapisu wprowadza się następujące oznaczenie:

$$q(z(k_o),x(k_N)) = x(k_N) - F(k_N,k_o)x(k_o) - \sum_{k=v(k_o)}^{j=k_o-1} F(k_N,r(j+1))C(r(j))u(j) \qquad (8)$$

Wówczas równość (7) może być przedstawiona w następującej formie:

$$q(z(k_o),x(k_N)) = \sum_{j=k_o}^{j=v(k_N)-1} F(k_N,r(j+1))C(r(j))u(j) +$$

$$+ \sum_{j=k_o}^{j=v(k_N)-1} F(k_N,j+1)B(j)u(j) + \sum_{j=v(k_N)}^{j=k_N-1} F(k_N,j+1)B(j)u(j) \qquad (9)$$

Jeżeli $v(k_N) > k_o$, to macierz sterowalności dla układu (1) definiuje się następująco:

$$W(k_o,k_N) = \sum_{j=k_o}^{j=v(k_N)-1} \left[F(k_N,r(j+1))C(r(j)) + F(k_N,j+1)B(j)\right] \cdot$$

$$\cdot \left[F(k_N,r(j+1))C(r(j)) + F(k_N,j+1)B(j)\right]' +$$

$$+ \sum_{j=v(k_N)-1}^{j=k_N-1} F(k_N,j+1)B(j)B'(j)F'(k_N,j+1) \tag{10}$$

Symbol ' oznacza transpozycję macierzy.

2. Warunki konieczne i wystarczające względnej sterowalności

W niniejszym paragrafie zakłada się, że spełniona jest nierówność:

$$v(k_N) > k_o.$$

Korzystając ze zdefiniowanej równością (10) macierzy sterowalności, można dla układu (1) podać następujący warunek konieczny i wystarczający względnej sterowalności na odcinku $[k_o,k_N]$:

Twierdzenie 1

Układ (1) jest względnie sterowalny na odcinku $[k_o,k_N]$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\text{rząd } W(k_o,k_N) = n. \tag{11}$$

Dowód

Warunek wystarczający: Niech $z(k_o)$ będzie dowolnym stanem zupełnym, a x_N dowolnym wektorem w przestrzeni R^n. Sterowanie:

$$u(j) = \begin{cases} \left[F(k_N,j+1)B(j)+F(k_N,r(j+1))C(r(j))\right]'^{-1} W(k_o,k_N)q(z(k_o),x_N) \\ \qquad \text{dla } j \in \left[k_o,v(k_N)-1\right] \\ \left[F(k_N,j+1)B(j)\right]'^{-1} W(k_o,k_N)q(z(k_o),x_N) \text{ dla } j \in \left[v(k_N),k_N-1\right] \end{cases} \tag{12}$$

przeprowadza układ (1) z początkowego stanu zupełnego $z(k_0)$, do x_N. Łatwo można to sprawdzić, podstawiając (12) do (7) i wykorzystując relacje (8), (9) oraz (10). Ponieważ $z(k_0)$ oraz x_N zostały wybrane dowolnie, więc zgodnie z definicją 2 układ (1) jest względnie sterowalny na odcinku $[k_0,k_N]$.

Warunek konieczny: Dowód nie wprost. Załóżmy, że układ (1) jest względnie sterowalny na odcinku $[k_0,k_N]$, lecz rząd $W(k_0,k_N)<n$. Wówczas istnieje niezerowy wektor $g\in R^n$, taki, że zachodzi równość:

$$\langle g,W(k_0,k_N)g\rangle = g'W(k_0,k_N)g = 0, \tag{13}$$

gdzie $\langle\cdot,\cdot\rangle$ oznacza iloczyn skalarny w przestrzeni R^n.

Wykorzystując relację (10) oraz własności iloczynu skalarnego w przestrzeni R^n, po prostych przekształceniach uzyskuje się następującą równość:

$$g,W(k_0,k_N)g\rangle = \sum_{j=k_0}^{j=v(k_N)-1} \left\| \left[F(k_N,r(j+1))C(r(j))+F(k_N,j+1)B(j)\right]'g \right\|^2 +$$

$$+\sum_{j=v(k_N)}^{j=k_N-1} \left\| \left[F(k_N,j+1)B(j)\right]'g \right\|^2 = 0 \tag{14}$$

Na mocy równości (14), otrzymuje się następujące relacje:

$$\begin{aligned} &\left[F(k_N,r(j+1))C(r(j)) + F(k_N,j+1)B(j)\right]'g = 0 \quad \text{dla} \quad j\in\left[k_0,v(k_N)-1\right] \\ &\left[F(k_N,j+1)B(j)\right]'g = 0 \quad \text{dla} \quad j\in\left[v(k_N),k_N-1\right] \end{aligned} \tag{15}$$

Z założenia, układ (1) jest względnie sterowalny na odcinku $[k_0,k_N]$, więc wybierając $z(k_0)$ oraz x_N, tak aby $q(z(k_0),x_N) = g$, otrzymuje się

$$q(z(k_0),x_N) = g = \sum_{j=k_0}^{j=v(k_N)-1} \left[F(k_N,r(j+1))C(r(j)) + F(k_N,j+1)B(j)\right]u(j) +$$

$$+\sum_{j=v(k_N)}^{j=k_N-1} F(k_N,j+1)B(j)u(j) \tag{16}$$

Uwzględniając (15) i (16), otrzymuje się następujące równości:

$$\langle g,g\rangle = g'g = \sum_{j=k_0}^{j=v(k_N)-1} g'\left[F(k_N,r(j+1))C(r(j)) + F(k_N,j+1)B(j)\right]u(j) +$$

$$+ \sum_{j=v(k_N)}^{j=k_N-1} g'F(k_N,j+1)B(j)u(j) = 0 \tag{17}$$

Równość (17) implikuje, że wektor $g = 0$, co jest sprzeczne z założeniem. Stąd rząd $W(k_0,k_N) = n$, co kończy dowód twierdzenia 1.

Niech $P(k_0,k_N)$ będzie $n\times pN$ wymiarową macierzą blokową postaci:

$$P(k_0,k_N) = \left[F(k_N,r(k_0+1))C(r(k_0)) \,\vdots\, F(k_N,k_0+1)B(k_0) \,\vdots\, \ldots\right.$$

$$\ldots \vdots\, F(k_N,r(v(k_N)))C(r(v(k_N)-1)) + F(k_N,v(k_N))B(v(k_N)-1)) \,\vdots\, F(k_N,v(k_N)=1)\,.$$

$$\left.. \, B(v(k_N)) \,\vdots \ldots \vdots\, F(k_N,k_N)B(k_N-1)\right] \tag{18}$$

Wniosek 1

Układ (1) jest względnie sterowalny na odcinku $[k_0,k_N]$ wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi następująca relacja:

$$\text{rząd } P(k_0,k_N) = n. \tag{19}$$

Dowód

Ponieważ $W(k_0,k_N) = P(k_0,k_N)P'(k_0,k_N)$

więc

$$\text{rząd } W(k_0,k_N) = \text{rząd } P(k_0,k_N)$$

Stąd na mocy twierdzenia 1 układ (1) jest względnie sterowalny na odcinku $[k_0,k_N]$, wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi relacja (19).

W dalszej części rozważań niniejszego paragrafu zakłada się, że macierze $A(k)$ są nieosobliwe dla $k \geqslant k_0$. Nieosobliwość macierzy sterowalności $W(k_0,k_N)$ zależy w sposób, istotny od N. Jeżeli wymiar sterowania p jest mniejszy lub równy wymiarowi wektora stanu n, to warunkiem koniecznym nieosobliwości $W(k_0,k_N)$ jest, aby $N \geqslant \frac{n}{p}$. Wprowadza się następującą definicję:

Definicja 3

Indeksem sterowalności względnej w chwili k_o, nazywa się najmniejszą liczbę naturalną $s(k_o)$, taką, że zachodzą relacje:

$$\text{rząd } W(k_o,k_{s(k_o)-1})<n \quad \text{oraz} \quad \text{rząd } W(k_o,k_{s(k_o)}) = n \tag{20}$$

Wniosek 2

Jeżeli macierze $A(k_j)$ są nieosobliwe dla $j \geqslant s(k_o)$, to układ (1) jest względnie sterowalny na dowolnym odcinku $[k_o,k_j]$.

Dowód

Wykorzystując zależności (5) oraz (10), po prostych przekształceniach, otrzymuje się następującą równość:

$$W(k_o,k_{s(k_o)+1}) = A(k_{s(k_o)})W(k_o,k_{s(k_o)})A'(k_{s(k_o)}) + Q(k_{s(k_o)})Q'(k_{s(k_o)}),$$

gdzie:

$$Q(k_{s(k_o)}) = A(k_{s(k_o)+1})B(k_{s(k_o)}) +$$

$$+ \sum_{j=v(k_{s(k_o)})}^{j=v(k_{s(k_o)-1})-1} \Big[A(k_{s(k_o)+1})\ldots A(r(j+1))C(r(j)) +$$

$$+ A(k_{s(k_o)+1})\ldots A(j+1)B(j)\Big]$$

Ponieważ macierz $Q(k_{s(k_o)})Q'(k_{s(k_o)})$ jest nieujemnie określona, więc macierz $W(k_o,k_{s(k_o)+1})$ jest dodatnio określona, co kończy dowód.

3. Względna sterowalność układów stacjonarnych

Niech będzie dany liniowy stacjonarny dyskretny układ dynamiczny ze stałym opóźnieniem w sterowaniu, opisany liniowym wektorowym równaniem różnicowym następującej postaci:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + Cu(v(k)) \qquad k \in [0 \quad N-1] \tag{21}$$

Występujące w równaniu (21) wielkości zostały zdefiniowane w paragrafie 1. Korzystając z rezultatów uzyskanych w paragrafie 2, można sformułować następujące warunki konieczne i wystarczające względnej sterowalności układu (21) na odcinku $[0,N]$.

Twierdzenie 2

Jeżeli $N>h$, to układ (21) jest względnie sterowalny na odcinku $[0,N]$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\text{rząd}\left[A^{N-1}B+A^{N-1-h}C\,\vdots\,\ldots\,\vdots\,A^{h}A+C\,\vdots\,A^{h-1}B\,\vdots\,\ldots\,\vdots\,AB\,\vdots\,B\right]=n. \tag{22}$$

Dowód

Ponieważ macierz A jest niezależna od k, więc na podstawie relacji (5) zachodzi następująca równość:

$$F(k,j)=A^{k-j} \quad \text{dla} \quad k>j \tag{23}$$

Na mocy (2) oraz (3) otrzymuje się następujące zależności:

$$v(N)=N-h, \quad f(0)=h \tag{24}$$

Wykorzystując relacje (18), (23) oraz (24) otrzymuje się:

$$P(0,N)=\left[A^{N-1}B+A^{N-1-h}C\,\vdots\,\ldots\,\vdots\,A^{h}B+C\,\vdots\,A^{h-1}B\,\vdots\,\ldots\,\vdots\,AB\,\vdots\,B\right] \tag{25}$$

Stąd na mocy wniosku 1 układ (21) jest względnie sterowalny na odcinku $[0,N]$ wtedy i tylko wtedy gdy zachodzi relacja (22).

Wniosek 3

Jeżeli $N\leqslant h$, to układ (21) jest względnie sterowalny na odcinku $[0,N]$ wtedy i tylko wtedy gdy:

$$\text{rząd}\left[A^{N-1}B\,\vdots\,A^{N-2}B\,\vdots\,\ldots\,\vdots\,AB\,\vdots\,B\right]=n \tag{26}$$

Dowód

Jeżeli $N\leqslant h$, to na mocy relacji (9), otrzymuje się:

$$q(z(0),x(N))=\sum_{j=0}^{j=N-1} A^{N-1-j}Bu(j) \tag{27}$$

Stąd względna sterowalność układu (21) jest równoważna sterowalności następującego układu dyskretnego bez opóźnień:

$$x(k+1)=Ax(k)+Bu(k), \tag{28}$$

który jest sterowalny wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi relacja (26).

Wniosek 4

Jeżeli $N > n+h$, to układ (21) jest względnie sterowalny na odcinku $[0,N]$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\text{rząd}\left[B \vdots AB \vdots \ldots \vdots A^{n-1}B \vdots C \vdots AC \vdots \ldots \vdots A^{n-1}C\right] = n. \tag{29}$$

Dowód

Jeżeli $N \geqslant n+h$, to wówczas na mocy znanych rezultatów [11] rachunek macierzowego, otrzymuje się następujące równości:

$$\text{rząd}\left[A^{N-1}B+A^{N-1-h}C \vdots \ldots \vdots A^{h}B+C \vdots A^{h-1}B \vdots \ldots \vdots AB \vdots B\right] =$$
$$\text{rząd}\left[A^{n+h-1}B+A^{n-1}C \vdots \ldots \vdots A^{h}B+C \vdots A^{h-1}B \vdots \ldots \vdots AB \vdots B\right] =$$
$$\text{rząd}\left[B \vdots AB \vdots \ldots \vdots A^{n-1}B \vdots C \vdots AC \vdots \ldots \vdots A^{n-1}C\right]. \tag{30}$$

Stąd na mocy twierdzenia 2 układ (21) jest względnie sterowalny na odcinku $[0,N]$ wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi relacja (29).

W przypadku, gdy macierz A jest nieosobliwa można dla układów stacjonarnych określić indeks sterowalności względnej s, który dla tych układów jest niezależny od zmiennej k. Jeżeli wymiar sterowania p jest mniejszy lub równy wymiarowi wektora stanu chwilowego n, to wówczas indeks sterowalności względnej s, spełnia następujące ograniczenia:

$$\frac{n}{p} \leqslant s \leqslant n - p + 1.$$

4. Wnioski końcowe

W niniejszym opracowaniu sformułowano szereg warunków koniecznych i wystarczających względnej sterowalności liniowych dyskretnych układów dynamicznych z opóźnieniem niezależnym od czasu w sterowaniu. Rozpatrzono zarówno układy stacjonarne jak i układy niestacjonarne. Przedyskutowano pojęcie i własności indeksu względnej sterowalności oraz jego związki z występujących w równaniu układu dynamicznego.

Uzyskane rezultaty mogą być uogólnione na przypadek wielu stałych opóźnień w sterowaniu, jak również na przypadek zmiennych opóźnień. Stosując analogiczną metodę postępowania, można uzyskać podobne rezultaty dla układów ze stałymi lub zmiennymi opóźnieniami w wektorze stanu chwilowego.

LITERATURA

[1] Choudhury A.K.: A contribution to the controllability of time lag systems, International Journal of Control, vol. 17, no 2, March 1973, s. 365-373.

[2] Chyung D.H.: On the controllability of linear systems with delay in control, I.E.E.E. Transactions on Automatic Control, vol. AC-15, no 2, April 1970, s. 255-257.

[3] Delfour M.C., Mitter S.K.: Controllability, Observability and Optimal Feedback Control of Affine Hereditary Differential Systems, SIAM Journal on Control, vol. 10, no 2, May 1972, s. 298-328.

[4] Kaczorek T.: Sterowalność liniowych układów stacjonarnych z opóźnieniem przy wymuszeniach stochastycznych, Podstawy Sterowania, tom 1, zeszyt 3, 1971, s. 161-167.

[5] Manitius A., Olbrot A.W.: Controllability Conditions for Linear Systems with Delayed State and Control, Archiwum Automatyki i Telemechaniki, tom 17, zeszty 2, 1972, s. 119-131.

[6] Manitius A.: On the Controllability Conditions for Systems with Distributed Delays in State and Control, Archiwum Automatyki i Telemechaniki, tom 17, zeszyt 4, 1972, s. 363-377.

[7] Olbrot A.W.: On Controllability of Linear Systems with Time Delays in Control, I.E.E.E. Transactions on Automatic Control, vol. AC-17, no 5, October 1972, s. 664-666.

[8] Sebakhy O., Bayoumi M.M.: A Simplified Criterion for the Controllability of Linear Systems with Delay in Control, I.E.E.E. Transactions on Automatic Control, vol. AC-16, no 4, August 1971, s. 364-365.

[9] Sebakhy O., Bayoumi M.M.: Controllability of Linear Time Varying Systems with Delay in Control, International Journal of Control, vol. 17 no 1, January 1973, s. 127-135.

[10] Weiss L.: Controllability, Realization and Stabilityof Discrete Time Systems, SIAM Journal on Control, vol. 10, no 2, May 1972, s.230-251.

[11] Zadeh L.A., Desoer C.A.: Linear System Theory, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1963.

УПРАВЛЯЕМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Р е з ю м е

В статье рассмотрена проблема относительной управляемости линейных дискретных систем и неизменяемым запаздыванием по управлению. С помощью понятия матрицы управляемости получены необходимые и достаточные условия относительной управляемости этих систем. Сформулированы необходимые и достаточные условия относительной управляемости стационарных дискретных систем с запаздыванием.

CONTROLLABILITY OF LINEAR DISCRETE SYSTEMS WITH DELAY

S u m m a r y

This paper is devoted to a study of relative controllability of linear discrete systems with constant delay in the control. Using the controllability matrix, necessary and sufficient conditions for relative controllability of these systems have been given. Necessary and sufficient conditions for relative controllability of stationary discrete systems with delay were formulated.