ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1976

Seria: AUTOMATYKA z. 35 Nr kol. 480

Jerzy KLAMKA

WYSTARCZAJĄCE WARUNKI STEROWALNOŚCI DLA PEWNEJ KLASY NIELINIOWYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

Streszczenie. W artykule przytoczono definicje sterowalności, quasi-sterowalności oraz lokalnej zero-sterowalności układów nieliniowych. W oparciu o wprowadzone pojęcie nawiasu Jacobiego i znane rezultaty dotyczące quasi-sterowalności i lokalnej zero-sterowalności, sformułowano warunki wystarczające quasi-sterowalności i lokalnej zero-sterowalności pewnej klasy układów nieliniowych. Przedstawiona metoda oceny sterowalności została zilustrowana przykładami.

1. Wprowadzenie

Problem sterowalności nieliniowych układów dynamicznych był w literaturze wielokrotnie poruszany, m.in. w pracach [3], [4], [5]. W niniejszej pracy przedstawiono metodę oceny sterowalności pewnej klasy stacjonarnych układów nieliniowych, które są liniowe ze względu na funkcję sterującą.

Niech będzie dany nieliniowy stacjonarny układ dynamiczny opisany równaniem stanu następującej postaci:

$$\dot{x}(t) = f(x) + G(x)u(t). \tag{1}$$

gdzie:

$x \in R^n$ jest wektorem stanu układu,

$u \in R^p$ jest wektorem sterowań,

$u(.) \in U$ zbiór sterowań dopuszczalnych, będący zbiorem funkcji mierzalnych o wartościach w przestrzeni R^p,

$G(x) = [g_1(x), g_2(x), \dots, g_p(x)]$ jest macierzą $n \times p$ wymiarową o kolumnach: $g_1(x), g_2(x), \dots, g_p(x)$, których elementy są klasy $C^{(\infty)}$,

funkcja $f: R^n \to R^n$ jest klasy $C^{(1)}$.

Przy powyższych założeniach nieliniowe równanie różniczkowe (1) posiada przy ustalonym sterowaniu $u(t)$ oraz warunku początkowym $x(0) = x_o$, dokładnie jedno rozwiązanie, które jest funkcją absolutnie ciągłą spełniającą warunek początkowy [6].

Niech funkcje $a: R^n \to R^n$ oraz $b: R^n \to R^n$ będą funkcjami klasy $C^{(\infty)}$. Nawiasem Jacobiego $[a,b](x)$ funkcji $a(x)$ i $b(x)$ nazywa się odwzorowanie typu $R^n \to R^n$ dane następującą równością [3]:

$$[a,b](x) = a_x(x)b(x) - b_x(x)a(x), \tag{2}$$

gdzie: $a_x(x)$ jest $n \times n$ wymiarową macierzą pochodnych

$$\left[\frac{\partial a_i(x)}{\partial x_j}\right] \quad \begin{array}{l} i = 1,2,\dots,n \\ j = 1,2,\dots,n \end{array}$$

$b_x(x)$ jest n n wymiarową macierzą pochodnych

$$\left[\frac{\partial b_i(x)}{\partial x_j}\right] \quad \begin{array}{l} i = 1,2,\dots,n \\ j = 1,2,\dots,n \end{array}$$

Wprowadza się następujące oznaczenia [3]:

$$D^0(G)_x = \left\{g_1(x), g_2(x), \dots, g_p(x)\right\}$$

$$D^1(G)_x = D^0(G)_x \cup \left\{[g_i, g_j](x)\ ;\ i = 1,2,\dots,p;\ j = 1,2,\dots,p\right\}$$

$$D^2(G)_x = D^1(D^1(G)_x)_x$$

. . . .

$$D^r(G)_x = D^1(D^{r-1}(G)_x)_x$$

$$D(G)_x = \bigcup_{r \geq 0} D^r(G)_x \tag{3}$$

wskaźnik sumowania r przebiega zbiór liczb naturalnych.

$\dim D(G)_x$ - wymiar podprzestrzeni w R^n rozpiętej na wektorach zbioru $D(G)_x$.

$\frac{df}{dx}(0) = A$ macierz $n \times n$ wymiarowa

$$G(x)_{i_1, i_2, \dots, i_k} = \left[g_{i_1}(x), g_{i_2}(x), \dots, g_{i_k}(x)\right],$$

gdzie: $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq p$

Zastępując w równości (3) macierz G jej podmacierzą $G_{i_1, i_2, \dots, i_k}$, otrzymuje się:

$$D(G_{i_1, i_2, \dots, i_k})_x = \bigcup_{r \geq 0} D^r(G_{i_1, i_2, \dots, i_k})_x. \tag{4}$$

Ponieważ układ dynamiczny (1) jest układem stacjonarnym, więc bez utraty ogólności rozważań można przyjąć, że początkową chwilą czasową jest chwila $t = 0$.

2. Podstawowe definicje

Poniżej dla wygody czytelnika, przytoczono na podstawie prac [1], [2], [3], [4], [5], podstawowe definicje z dziedziny sterowalności układów nieliniowych.

Definicja 1

Stan x_0 układu dynamicznego nazywa się sterowalnym do stanu x_1, jeżeli istnieje skończony czas $t_1 < \infty$ i sterowanie $u \in U$, określone na przedziale $[0, t_1]$ przeprowadzające stan x_0 w chwili $t = 0$, do stanu x_1 w chwili t_1.

Definicja 2

Stan x_0 układu dynamicznego nazywa się quasi-sterowalnym do stanu x_1, jeżeli w każdym otoczeniu x_1, istnieje stan, do którego x_0 jest sterowalny.

Definicja 3

Układ dynamiczny nazywa się sterowalnym do stanu x_1, jeżeli każdy stan początkowy $x_0 \in R^n$ jest sterowalny do stanu x_1.

Definicja 4

Układ dynamiczny nazywa się quasi-sterowalnym do stanu x_1, jeżeli każdy stan początkowy $x_0 \in R^n$ jest quasi-sterowalny do stanu x_1.

Definicja 5

Układ dynamiczny nazywa się sterowalnym, jeżeli jest sterowalny do dowolnego stanu $x_1 \in R^n$.

Definicja 6

Układ dynamiczny nazywa się quasi-sterowalnym, jeżeli jest quasi-sterowalnym do dowolnego stanu $x_1 \in R^n$.

Definicja 7

Układ dynamiczny nazywa się k sterowalnym $(1 \leq k \leq p)$, jeżeli jest sterowalny przez k dowolnych składowych wektora sterowań, wybranych w odpowiedni sposób spośród wszystkich składowych wektora sterowań.

Definicja 8

Układ dynamiczny nazywa się quasi k sterowalnym, $(1 \leqslant k \leqslant p)$, jeżeli jest quasi-sterowalny przez k składowych wektora sterowań, wybranych spośród wszystkich składowych wektora sterowań.

Korzystając z oznaczeń i założeń podanych we wprowadzeniu oraz powyższych definicji różnych rodzajów sterowalności, w dalszej części niniejszego opracowania sformułowano warunki wystarczające sterowalności nieliniowego układu dynamicznego (1).

3. Warunki wystarczające sterowalności

Twierdzenie 1

Jeżeli istnieją wskaźniki $i_1, i_2, \dots, i_k$, $(1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 < \dots < i_k \leqslant p)$, takie, że:

$$\bigwedge_{x \in R^n} \dim D(G_{i_1, i_2, \dots, i_k})_x = n \tag{5}$$

$$\bigwedge_{x \in R^n} \text{rząd } G(x)_{i_1, i_2, \dots, i_k} = k, \tag{6}$$

to nieliniowy układ dynamiczny (1) jest quasi k sterowalny.

Dowód

Jeżeli $\bigvee\limits_{i_1, i_2, \dots, i_k} \bigwedge\limits_{x \in R^n} \dim D(G_{i_1, i_2, \dots, i_k})_x = n$, to wówczas na mocy rezultatów uzyskanych w pracy [3] wiadomo, że układ dynamiczny:

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=1}^{j=k} g_{i_j}(x) u_{i_j}(t) \tag{7}$$

jest sterowalny.

Jeżeli $\bigwedge\limits_{x \, R^n} \text{rząd } G(x)_{i_1, i_2, \dots, i_k} = k$ oraz układ (7) jest sterowalny, to na mocy wyników pracy [5] wiadomo, że układ dynamiczny:

$$\dot{x}(t) = f(x) + \sum_{j=1}^{j=k} g_{i_j}(x) u_{i_j}(t) \tag{8}$$

jest quasi-sterowalny. Stąd, na podstawie definicji 8, układ dynamiczny (1) jest quasi k sterowalny.

Q.E.D.

Wniosek 1

Jeżeli spełnione są następujące założenia:

$$\bigwedge_{x \in R^n} \dim D(G)_x = n \tag{9}$$

$$\bigwedge_{x \in R^n} \text{rząd } G(x) = p, \tag{10}$$

to nieliniowy układ dynamiczny (1) jest quasi-sterowalny.

Q.E.D.

Twierdzenie 2

Jeżeli istnieją wskaźniki $i_1, i_2, \ldots, i_k$ $(1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant p)$, takie, że:

$$\bigwedge_{x \in R^n} \dim D(G_{i_1, i_2, \ldots, i_k})_x = n \tag{11}$$

$$\bigwedge_{x \in R^n} \text{rząd } G(x)_{i_1, i_2, \ldots, i_k} = k \tag{12}$$

$$f(0) = 0 \tag{13}$$

$$\text{rząd} \left[G(0)_{i_1, i_2, \ldots, i_k} \,\vdots\, AG(0)_{i_1, i_2, \ldots, i_k} \,\vdots\, \ldots \,\vdots\, A^{n-1}G(0)_{i_1, i_2, \ldots, i_k} \right] = n, \tag{14}$$

to nieliniowy układ dynamiczny (1) jest k sterowalny do zera.

Dowód

Jeżeli spełnione są założenia (11) oraz (12), to na mocy twierdzenia 1 nieliniowy układ dynamiczny (1) jest quasi k sterowalny.

Jeżeli spełnione są założenia (13) oraz (14), to na mocy rezultatów pracy [4] wiadomo, że nieliniowy układ dynamiczny (1) jest lokalnie k sterowalny do zera.

Ponieważ nieliniowy układ dynamiczny (1) jest quasi k sterowalny, więc w szczególności jest quasi k sterowalny do zera, co przy jednoczesnej lokalnej k sterowalności do zera, implikuje k sterowalność do zera.

Q.E.D.

Wniosek 2

Jeżeli spełnione są następujące założenia:

$$\bigwedge_{x\in R^n} \dim D(G)_x = n \tag{15}$$

$$\bigwedge_{x\in R^n} \text{rząd } G(x) = p \tag{16}$$

$$f(0) = 0 \tag{17}$$

$$\text{rząd } \left[G(0) \mid AG(0) \mid \ldots \mid A^{n-1}G(0)\right] = n, \tag{18}$$

to nieliniowy układ dynamiczny (1) jest sterowalny do zera.

Q.E.D.

4. Przykłady

Przykład 1

Niech będzie dany układ dynamiczny postaci (1), przy czym:

$$n = 3, \quad p = 3, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix}, \quad f(x) = \begin{bmatrix} \exp(x_1) \\ 2x_2 \\ 3x_3 \end{bmatrix}$$

$$G(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x_1 & 1 & 1 + x_1 \\ \exp(x_3), & \exp(2x_3), & \exp(x_3)+\exp(2x_3) \end{bmatrix}.$$

Wybierając $i_1 = 1$, $i_2 = 2$, czyli $k = 2$, otrzymuje się:

$$G(x)_{1,2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x_1, & 1 \\ \exp(x_3), & \exp(2x_3) \end{bmatrix}$$

Łatwo można sprawdzić, że $\bigwedge_{x\in R^3}$ rząd $G(x)_{1,2} = 2 = k$

$$D^o(G_{1,2})_x = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ \exp(x_3) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \exp(2x_3) \end{bmatrix} \right\}$$

$$[g_1, g_2](x) = \frac{dg_1(x)}{dx} g_2(x) - \frac{dg_2(x)}{dx} g_1(x) =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \exp(x_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \exp(2x_3) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\exp(2x_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \exp(x_3) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \exp(3x_3) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\exp(3x_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\exp(3x_3) \end{bmatrix}$$

Stąd zbiór $D^1(G_{1,2})_x$ jest następującej postaci:

$$D^1(G_{1,2})_x = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \exp(x_3) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \exp(2x_3) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\exp(3x_3) \end{bmatrix} \right\}$$

czyli: $\bigwedge_{x\in R^3}$ $\dim D(G_{1,2})_x = \dim D^1(G_{1,2})_x = 3 = n$

Ponieważ są spełnione założenia twierdzenia 1, więc na mocy jego tezy rozpatrywany układ dynamiczny jest quasi 2 sterowalny.

Ponadto zachodzą następujące relacje:

$$f(0) = 0$$

$$G(0)_{1,2} = \begin{bmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \\ 1, & 1 \end{bmatrix} \qquad \frac{df}{dx}(0) = A = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 2, & 0 \\ 0, & 0, & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^{n-1} = A^2 = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 4, & 0 \\ 0, & 0, & 9 \end{bmatrix}$$

Stąd:

$$\text{rząd}\left[G(0)_{1,2} \,\vdots\, AG(0)_{1,2} \,\vdots\, A^2G(0)_{1,2}\right] = 3 = n$$

Ponieważ są spełnione założenia twierdzenia 2, więc na mocy jego tezy rozpatrywany układ dynamiczny jest 2 sterowalny do zera.

Przykład 2

Niech będzie dany nieliniowy układ dynamiczny postaci (1), przy czym:

$$n = 3, \quad p = 3, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix},$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2x_3 \\ x_1x_3 \\ x_1x_2 \end{bmatrix}, \quad G(x) = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ \exp(x_3), & \exp(2x_3), & \exp(3x_3) \end{bmatrix}$$

Stąd: $\bigwedge_{x \in R^3}$ rząd $G(x) = 3 = p$ oraz: $\bigwedge_{x \in R^3}$ dim $D(G)_x = n = 3$, dla $r = 0$.

Ponieważ są spełnione założenia wniosku 1, więc na mocy jego tezy rozpatrywany układ dynamiczny jest quasi sterowalny.

5. Podsumowanie

W niniejszej pracy sformułowano warunki wystarczające quasi k sterowalności oraz k sterowalności do zera pewnej szczególnej klasy nieliniowych układów dynamicznych. Należy podkreślić, że ocena sterowalności przy użyciu podanych powyżej twierdzeń i wniosków nie wymaga skomplikowanych obliczeń, co jest uwidocznione w przedstawionych konkretnych przykładach.

LITERATURA

[1] Amborski K.: Stopień sterowalności liniowych układów danymicznych, Podstawy Sterowania, tom 3, zeszty 2, 1973, s. 91-97.

[2] Athans M., Falb P.: Sterowanie optymalne. Wstęp do teorii i jej zastosowania, WNT, Warszawa 1969.

[3] Haynes G., Hermes H.: Nonlinear controllability via Lie theory SIAM Journal on Control, vol. 8, no 4, 1970, pp. 450-460.

[4] Lee E., Marcus L.: Foundations of optimal control theory, John Wiley and Sons, INC, New York 1967.

[5] Tokumaru H., Adachi N.: On the controllability of nonlinear sytems, Materiały IV Kongresu IFAC, sekcja techniczna r 34, "Nonlinear Systems" Warszawa 1969, s. 3-13.

[6] Willems J.L.: Stability theory of dynamical systems, Nelson, London, 1970.

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ УПРАВЛЯЕМОСТИ ДЛЯ НЕКОТОРО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Р е з ю м е

В статье представлена дефиниция управляемости, квази-управляемости и локальной ноль-управляемости нелинейных динамических систем. Используя понятие скобки Якоби и известные результаты теории квази-управляемости и локальной ноль-управляемости, предлагаются новые достаточные условия квази-управляемости и локальной ноль-управляемости некоторого класса нелинейных динамических систем. Представленный метод оценки управляемости иллюстрируется несколькими примерами.

SUFFICIENT CONDITION FOR CONTROLLABILITYFOR SOME CLASS OF NONLINEAR DYNAMICAL SYSTEMS

S u m m a r y

In the paper the definitions of controllability, quasi-controllability, and local null-controllability of nonlinear systems have been given. Using the Jacoby brackets and some well known results concerning quasi-controllability and local null-controllability, the new sufficient conditions for quasi-controllability of some types of nonlinear dynamical systems were formulated. Some illustrative examles were given.