

Franciszek MARECKI

ANALIZA DYNAMIKI ELEKTROMECHANICZNEGO PRZETWORNIKA  
METODĄ MODELOWANIA ANALOGOWEGO

Streszczenie. W publikacji przedstawiono metodę analizy dynamiki elementów automatyki, przy wykorzystaniu elektronicznej maszyny analogowej. Jako przykład pokazano analizę dynamiki elektromechanicznego przetwornika sygnału elektrycznego na przesunięcie liniowe.

### 1. Wstęp

Maszyny matematyczne odkryły nowe możliwości w dziedzinie elektromechaniki, posiadającej szereg specyficznych problemów o złożonym opisie matematycznym. Na uwagę w tym zakresie zasługują przede wszystkim prace [1] i [2] przedstawiające zastosowanie modelowania analogowego do badania dynamiki elektromechanicznych przetworników energii, ze szczególnym uwzględnieniem maszyn indukcyjnych. Do analizy i syntezy układów dynamicznych stosuje się również modelowanie cyfrowe [3]. W niniejszej publikacji przedstawiono analizę dynamiki elektromechanicznego przetwornika sygnału elektrycznego na przesunięcie liniowe, pod wpływem wymuszenia sinusoidalnie zmiennego - metodą modelowania analogowego.

Elektromechaniczny przetwornik sygnału elektrycznego na przesunięcie liniowe cechuje prosta budowa, co jednak nie upraszcza zachodzących w nim zjawisk fizycznych. Dynamika tego mechanizmu nurtowała wielu autorów, co doprowadziło do opublikowania różnorodnych metod (np. metody: Jassego, Schuelera, Moskwitina, Liwscyzy, Sotskowa), które z uwagi na poczynione założenia upraszczające nie mają praktycznego znaczenia [4]. Rozwiązania w postaci transmitancji operatorowych podane w pracach [5] i [6] mogą być wykorzystane do analizy dynamiki układów regulacji - aczkolwiek linearyzacja niweczy ogólność podanej metody. W przytoczonych publikacjach rozważano elektromechaniczny przetwornik energii jako przekaźnik, dla którego dynamika miała istotne znaczenie tylko z uwagi na czasy: zadziałania lub zwalniania - bowiem dla przekaźnika wystarcza, by jego charakterystyka statyczna przebiegała ponad charakterystyką obciążenia [7].

Celem autora jest przeprowadzenie analizy dynamiki elektromechanicznego przetwornika sygnału elektrycznego sinusoidalnie zmiennego, na przesunięcie liniowe. A zatem obiektem badań jest elektromechaniczny element automatyki przetwarzający:

- amplitudę sygnału elektrycznego,
- częstotliwość sygnału elektrycznego,

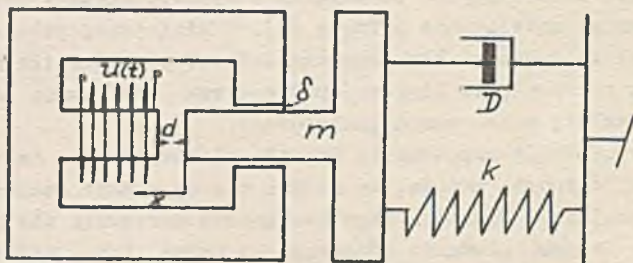
na przesunięcie liniowe. Badania przeprowadzone metodą modelowania analogowego na elektronicznej maszynie analogowej ETWAT-1M.

## 2. Modelowanie

Metodyka modelowania analogowego obejmuje idealizację obiektu rzeczywistego i sprecyzowanie modelu fizycznego, następnie sformułowanie modelu matematycznego i ostatecznego modelu analogowego. Wyniki badań modelowych w odniesieniu do obiektu rzeczywistego obciążone są błędami modelowania, które nie powinny przekroczyć tolerancji pomiarów i wykonania obiektu rzeczywistego.

### 2.1. Model fizyczny

Model fizyczny rozpatrywanego elektromechanicznego elementu automatyki stanowi magnetyczne jarzmo z nawiniętym nań uzwojeniem oraz korektor mechaniczny składający się z magnetycznej zwory, sprężyny i tłumika. Sygnałem wejściowym jest napięcie przyłożone do uzwojenia znajdującego się na jarzmie, a sygnałem wyjściowym przesunięcie zwory. Model ten pokazano na rys. 1, przyjmując następujące oznaczenia:



Rys. 1. Model fizyczny

- m - masa zwory,
- D - współczynnik tłumienia,
- k - współczynnik sprężystości,
- R - rezystancja uzwojenia,
- Z - liczba zwojów,
- $\delta$  - szerokość szczeliny stałej,
- d - początkowa szerokość szczeliny zmiennej,
- S - pole przekroju szczeliny zmiennej,
- S/2 - pole przekroju szczeliny stałej,
- U - napięcie sterujące,
- x - współrzędna układu związanej z początkowym położeniem zwory.

Różnica pomiędzy budową i zasadą działania rzeczywistego przetwornika a jego modelem, jest błędem modelu fizycznego.



2.2. Model matematyczny

Równanie modelu matematycznego opisującego dynamikę przyjętego modelu fizykalnego można wyprowadzić korzystając z ogólnych równań Lagrange'a-Maxwella dla holonomicznych układów elektromechanicznych [8]. Zakładając dla modelu fizykalnego z rys. 1 współrzędne uogólnione:

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= x \\ q_2 &= \int i dt \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

gdzie:

$i$  - prąd uzwojenia jarzma,

otrzymamy funkcję Lagrange'a w postaci:

$$L = \frac{1}{2} [m\dot{q}_1^2 - kq_1^2 + M(q_1) \dot{q}_2^2], \quad (2)$$

gdzie:  $M(q_1)$  - indukcyjność zależna od położenia zwory; a pracę wirtualną sił zewnętrznych i rozpraszających w postaci:

$$\delta A = (U - R\dot{q}_2) \cdot \delta q_2 - D\dot{q}_1 \cdot \delta q_1 \quad (3)$$

jako, że układ doznaje przesunięć wirtualnych podczas wirtualnych wariacji jego współrzędnych uogólnionych.

W związku z tym równania Lagrange'a 2 rodzaju

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} - \frac{\partial L}{\partial q_n} = Q_n \quad \text{dla } n = 1, 2 \quad (4)$$

po wykorzystaniu wyrażeń (2) i (3) będą miały postać:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{q}_1 + kq_1 - \frac{1}{2} \dot{q}_2^2 \frac{\partial}{\partial q_1} M(q_1) &= -D\dot{q}_1 \\ \frac{d}{dt} [M(q_1) \cdot \dot{q}_2] &= U - R \cdot \dot{q}_2 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

podstawiając (1) do (5), otrzymamy:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} + D\dot{x} + kx &= \frac{1}{2} i^2 \cdot \frac{\partial}{\partial x} M(x) \\ \frac{d}{dt} [M(x) \cdot i] &= u - R \cdot i \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Zauważymy, że w ten sposób otrzymaliśmy równania d'Alemberta i Kirchhoffa. Uwzględniając w modelu fizycznym z rys. 1 tylko reluktancje szczelin powietrznych, wyznaczmy:

$$M(x) = \frac{z^2 \mu S}{\delta + d - x} \quad (7)$$

gdzie:

$\mu$  - przenikalność magnetyczna powietrza.

Celem ułatwienia modelowania na maszynie analogowej, w modelu matematycznym (6) należy wyeliminować prądy przez liniozwoje wg zależności:

$$\dot{\psi} = M(x) \cdot i \quad (8)$$

Uwzględniając (7) i (8) w (6), po prostych przekształceniach, otrzymamy ostatecznie:

$$\left. \begin{aligned} u(t) &= \frac{R(d + \delta)}{z^2 \mu S} \dot{\psi} - \frac{R}{z^2 \mu S} x \dot{\psi} + \frac{d\dot{\psi}}{dt} \\ \frac{1}{2} \frac{1}{z^2 \mu S} \psi^2 &= kx + D \frac{dx}{dt} + L \frac{d^2 x}{dt^2} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Równania (9) stanowią model matematyczny elektromechanicznego przetwornika sygnału elektrycznego na przesunięcie liniowe. Napięcie sterujące można zmieniać dowolnie, jednakże w dalszej analizie założymy sterowanie sinusoidalne:

$$u(t) = U_0 \cdot \sin(2\pi f \cdot t + \varphi), \quad (10)$$

gdzie:

$U_0$  - amplituda,

$f$  - częstotliwość,

$\varphi$  - faza początkowa.

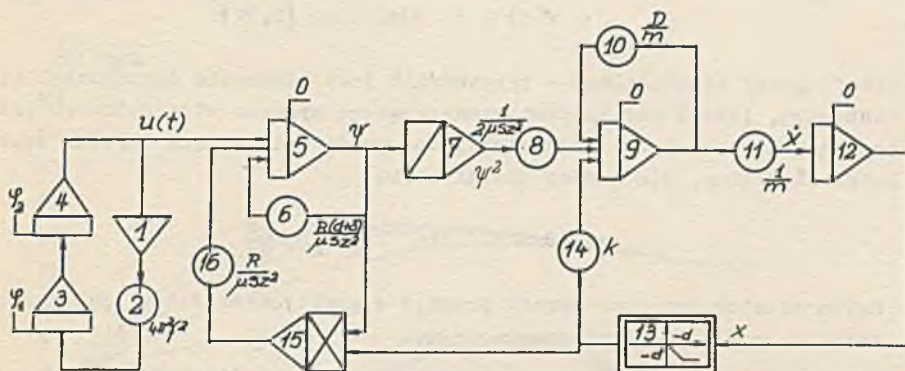
Błąd, jaki wnosi do dalszych badań model matematyczny, wynika z różnicy pomiędzy modelem fizycznym przedstawionym na rys. 1 a interpretacją fizyczną jaką dają równania (9).



### 2.3. Model analogowy

Model analogowy rozpatrywanego przetwornika przedstawiony na rys. 2 jest jednocześnie programem dla maszyny analogowej. Model ten składa się z następujących bloków operacyjnych:

- integratory - nr nr 3, 4, 5, 9, 12.
- inwertor - nr 1,
- mnożarka - nr 15,
- kwadrator - nr 7,
- ogranicznik - nr 13,
- potencjometry - nr nr 2, 8, 11, 10, 14.



Rys. 2. Model analogowy

Warunki początkowe dla integratorów: nr 3 i nr 4, określają fazę początkową napięcia sterującego. Pozostałe warunki początkowe (integratory: nr 5, nr 9, nr 12) są zerowe - co wynika z równowagi statycznej. Zaproponowany model matematyczny daje poprawne wyniki dla przesunięć zwory nie powodujących jej uderzeń o jarzmo. Zatem w modelu analogowym wprowadzono ogranicznik amplitudy.

Przebiegi w czasie: przesunięcia i prędkości zwory - rejestruje się na wyjściach odpowiednio: bloku nr 13 i potencjometru nr 11. Celem przeprowadzenia badań modelowych zastosowano skalowanie eksperymentalne [9], przyjmując dla liniozwojów  $\phi_{max} = 10^{-2}$  [Wb] i zwalniając czas 100 razy.

Błąd modelu analogowego wynika z różnicy pomiędzy wynikami, jakie daje model analogowy, i wynikami analitycznymi modelu matematycznego.

Badania modelowe przeprowadzono na maszynie analogowej ELWAT 1 M.

### 3. Eksperymenty

Analizę dynamiki rozpatrywanego przetwornika przedstawiono w postaci przebiegów czasowych oraz stosując klasyczną metodę badania dynamiki układów nieliniowych [10] - na płaszczyźnie fazowej. W analizie określa się strefy pracy przetwornika w sposób następujący:

- A. Strefa pracy stabilnej - przetwornik jest elementem dynamicznym stabilnym, gdy pod wpływem wymuszającego sygnału elektrycznego przesunięcie liniowe zwory (niezależnie od prędkości) jest mniejsze od szerokości szczeliny:

$$0 < x(t) < d \quad \text{dla} \quad t \in [0, \infty]$$

- B. Strefa pracy niestabilnej - przetwornik jest elementem dynamicznym niestabilnym, jeżeli pod wpływem wymuszającego sygnału elektrycznego przesunięcie liniowe zwory (niezależnie od prędkości) osiąga wartość szerokości szczeliny, dla pewnej chwili czasu:

$$x(t_k) = d \quad \text{dla} \quad t_k \in [0, \infty]$$

Zatem niestabilny przetwornik pracuje w praktyce podobnie jak przełącznik - czyli zwora uderza w jarzmo.

Przetwornik z rys. 1 opisano następującymi danymi liczbowymi:

$$\begin{aligned} R &= 1,2 \quad [\Omega] \\ \delta &= 0,1 \quad [\text{mm}] \\ d &= 4 \quad [\text{mm}] \\ S &= 4 \quad [\text{cm}^2] \\ m &= 0,3 \quad [\text{kg}] \\ K_0 &= 85 \cdot 10^3 \quad [\text{N/m}] \\ D_0 &= 500 \quad [\text{Ns/m}], \end{aligned}$$

gdzie:

R - rezystancja uzwojenia na jarzmie.

Przeprowadzone badania modelowe obejmują eksperymenty - dla różnych wartości danych liczbowych (wariantów danych liczbowych).

Wariantowano:

- parametry sterowania:

$$U_0 = 6; 12; 18; 24; 30; 36 \quad [\text{V}]$$

$$f = 25; 50; 100 \quad [\text{Hz}]$$



- parametry układu:

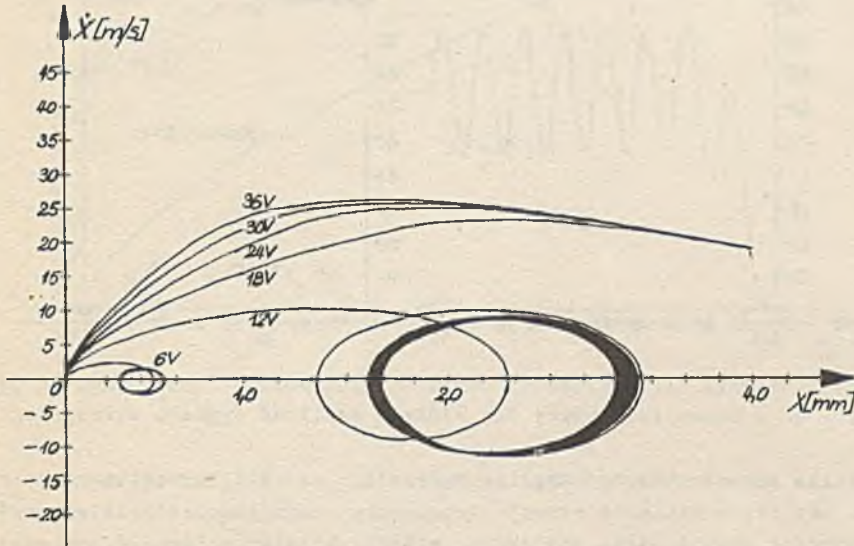
$$k = 85 \cdot 10^3 \text{ [N/m]} \pm \Delta k$$

$$D = 500 \text{ [Ns/m]} \pm \Delta D$$

Niecelowość wariantowania fazy  $\varphi$  sygnału elektrycznego uzasadniono niżej.

### 3.1. Przetwornik amplitudy napięcia na przesunięcie

Trajektorie fazowe dla  $f = 50 \text{ [Hz]}$  oraz parametrów układu: " $k_0$ " i " $D_0$ " - przy zmianach amplitudy sygnału sterującego przedstawiono na rys.3.



Rys. 3. Trajektorie fazowe przy zmianach amplitudy sygnału sterującego

Zakładając strefę stabilności:

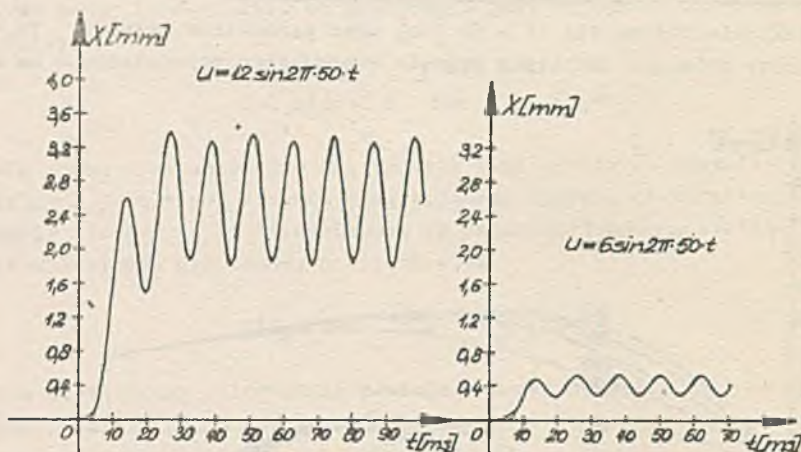
$$0 < x < d$$

z przebiegu trajektorii wnioskujemy, że:

- istnieje graniczna wartość amplitudy, powyżej której przetwornik jest niestabilny;
- podczas niestabilnej pracy przetwornika zwora uderza w jarzmo z tą samą prędkością;
- duża energia kinetyczna, z jaką zwora uderza w jarzmo, winna być brana pod uwagę przy projektowaniu przekładników;
- jeżeli amplituda sygnału sterującego nie przekracza granicznej wartości, to trajektorie fazowe tworzą stabilny cykl graniczny;

- amplituda cyklu granicznego i kształt trajektorii fazowej są zależne od amplitudy sygnału wymuszającego.

Z przebiegu trajektorii fazowych dla  $u = 6$  [V] i  $u = 12$  [V] można wnioskować, że czas dojścia do cyklu granicznego jest zależny od napięcia sterującego. Jednakże określenie ilościowe tych zależności jest trudne i wymaga przyjęcia pewnego kryterium oceny.



Rys. 4. Przesunięcie zwory dla różnych amplitud sygnału sterującego

Wyniki przeprowadzonej analizy wskazują, że dla określonego zakresu zmian amplitudy napięcia sterującego, zwora zajmuje położenie w określonej strefie stabilności. Aby jednak bliżej określić zależność pomiędzy amplitudą napięcia sterującego a parametrami stabilnego cyklu granicznego badania przeprowadzono wybierając amplitudę sygnału sterującego 6 [V].

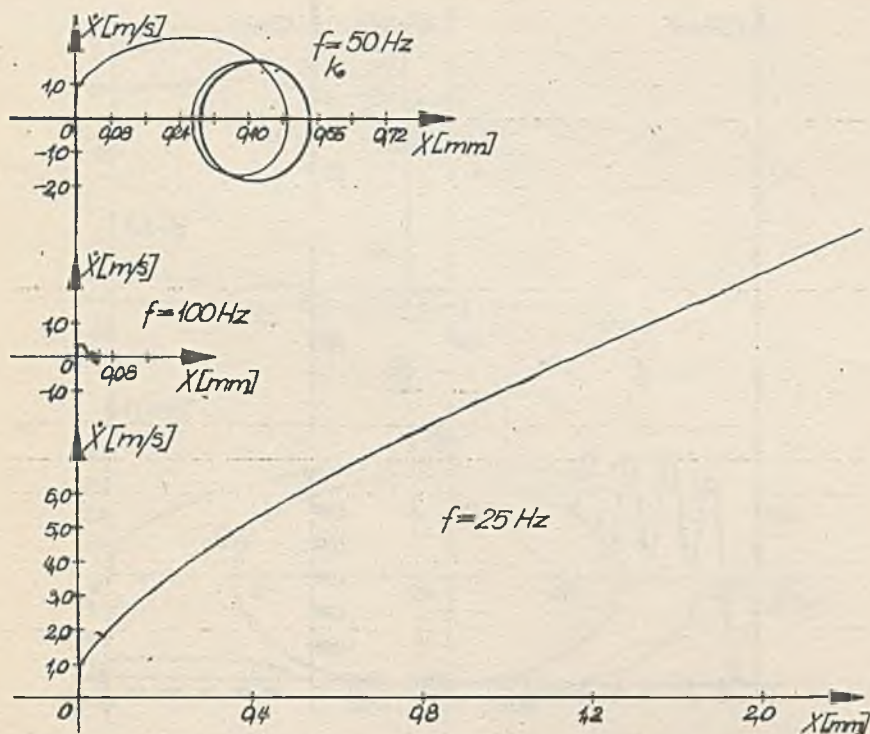
### 3.2. Przetworniki częstotliwości na przesunięcie

Zakładając strefę stabilności, parametry układu i amplitudę analogicznie jak w punkcie 3.1 przeprowadzono wariantowanie częstotliwości sygnału sterującego. Trajektorie fazowe dla tego przypadku przedstawia rys. 5.

Przebiegi trajektorii fazowych z rys. 5 pozwalają sformułować następujące wnioski:

- Istnieje pasmo częstotliwości sygnału sterującego, dla których trajektorie fazowe kończą się stabilnym cyklem granicznym w wyznaczonej strefie stabilności. Dla częstotliwości małych zwora uderza w jarzmo, a dla dużych występuje silne tłumienie sygnału amplituda jest niedostrzegalnie mała.



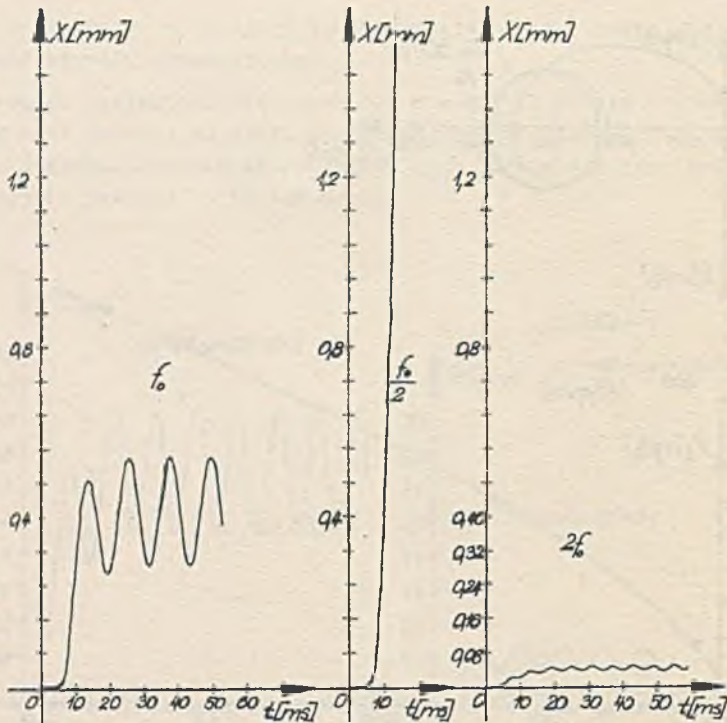


Rys. 5. Trajektorie fazowe przy zmianach częstotliwości sygnału sterującego

- Kształt trajektorii fazowej i amplituda cyklu granicznego są zależne od częstotliwości sygnału sterującego.

Zależność czasu dojścia do cyklu granicznego dla różnych częstotliwości sygnału sterującego przedstawiono na rys. 6.

Jak wynika z rys. 6 czas dojścia do stabilnego cyklu granicznego maleje wraz ze wzrostem częstotliwości. Analogicznie jak w punkcie 3.1 można stwierdzić, że badany układ może pracować jako przetwornik częstotliwości sygnału sterującego na przesunięcie liniowe, bowiem jeżeli wybrać częstotliwość określonego pasma to zwora będzie dążyć do stabilnego cyklu granicznego zajmując położenie w wyznaczonej strefie stabilności. Celem uzyskania wymaganych relacji pomiędzy częstotliwością sygnału sterującego a parametrami stabilnego cyklu pomiarowego, należy przeprowadzić wariantowanie parametrów układu. Dalszą analizę prowadzi się dla  $f = 50$  [Hz].



Rys. 6. Przesunięcie zwory dla różnych częstotliwości sygnału sterującego

### 3.3. Wariantowanie parametrów korektora mechanicznego

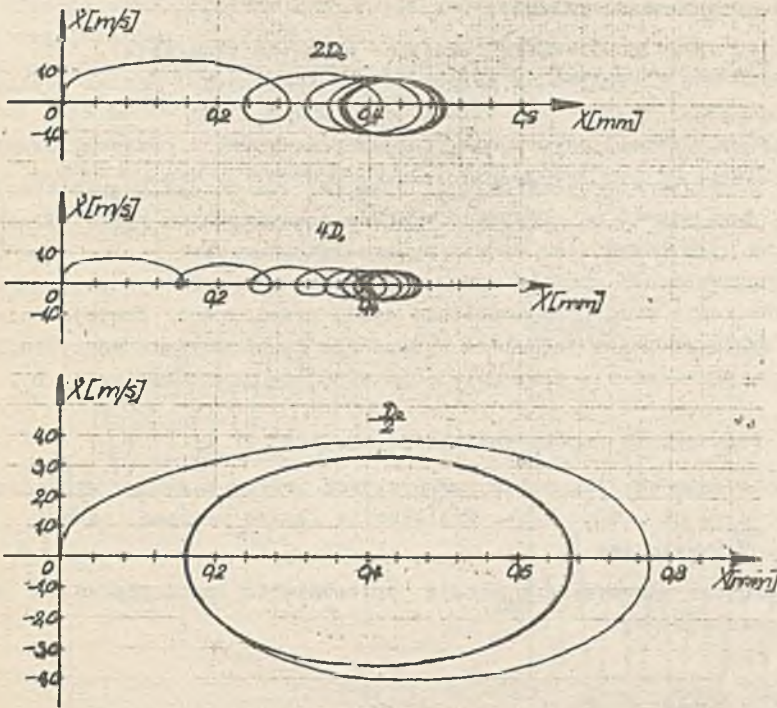
Jak wynika z analiz przeprowadzonych w punktach 3.1 oraz 3.2 przesunięcie zwory jest zależne nieliniowo od amplitudy i częstotliwości sygnału sterującego. Położenie i kształt cyklu granicznego w sensie geometrycznym są jednak nieliniowymi funkcjami nie tylko sterowania ale i parametrów korektora mechanicznego. Zatem własności statyczne i dynamiczne przetwornika dla amplitudy lub częstotliwości napięcia na przesunięcie liniowe wybranych zakresów przetwarzania napięcia na przesunięcie liniowe wybranych zakresów przetwarzania można optymalizować poprzez dobór parametrów korektora mechanicznego. W dalszym ciągu przeprowadzono wariantowanie współczynników: sprężystości i tłumienia przy ustalonych parametrach sterowania.

#### 3.3.1. Wariantowanie współczynnika tłumienia

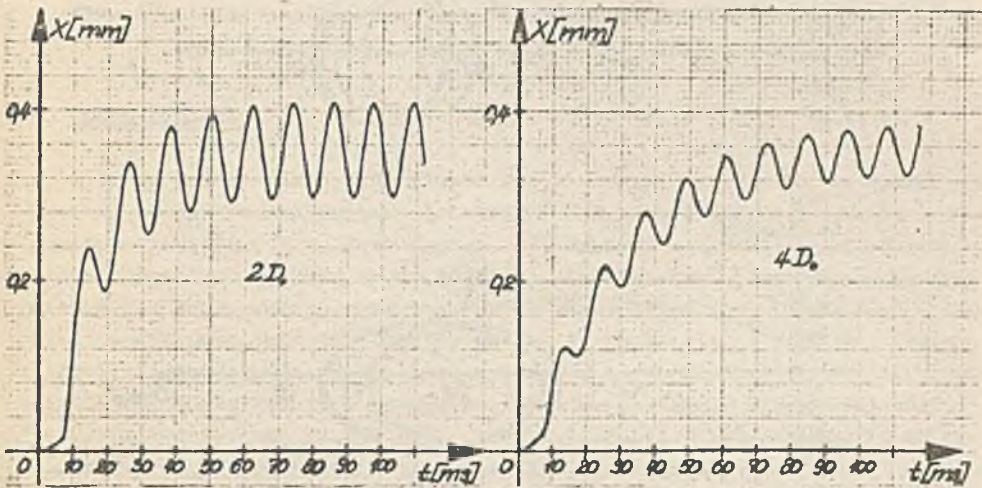
Wariantowanie współczynnika tłumienia przeprowadzono dla ustalonego współczynnika sprężystości przy założeniu  $D_0 = 500$  [Ns/m].

Przebieg trajektorii fazowych pokazano na rys. 7.





Rys. 7. Trajektorie fazowe przy zmianach współczynnika tłumienia



Rys. 8. Przesunięcie zwory dla różnych współczynników tłumienia

Z rys. 7 wynika oczywiście, że:

- amplituda cyklu granicznego maleje ze wzrostem tłumienia,
- tłumienie nie ma wpływu na położenie geometrycznego środka cyklu granicznego,
- dla małego tłumienia występuje przesunięcie zwory z przeregulowaniem.

Wpływ współczynnika tłumienia na czas dojścia do cyklu granicznego można łatwo przedstawić na podstawie wyników pokazanych na rys.8. Ilustracja ta jest na tyle oczywista, że nie wymaga komentarzy.

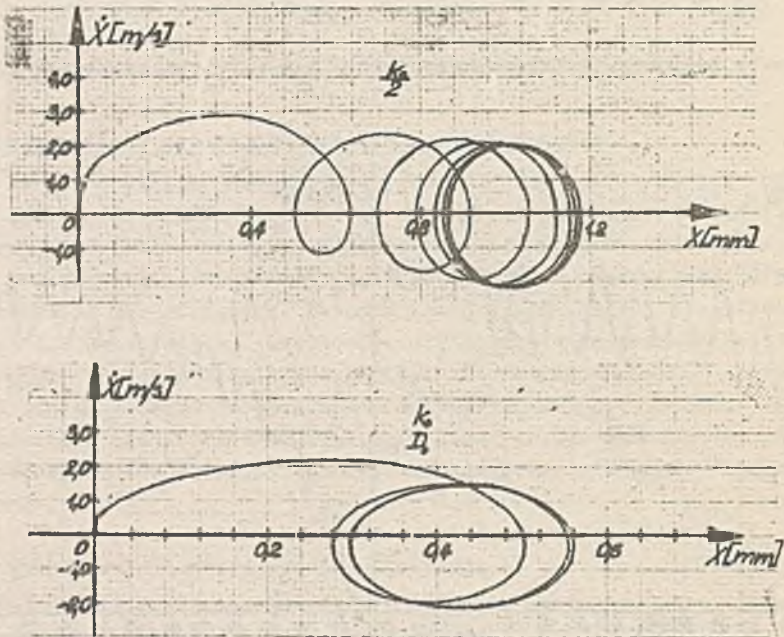
Z przeprowadzonej analizy wynika, że tłumienie może być parametrem użytym do uzyskania założonej amplitudy cyklu granicznego. Zmniejszanie amplitudy cyklu prowadzi jednak do wydłużenia czasu dojścia do cyklu. Dalsze rozważania prowadzi się przy ustalonym współczynniku tłumienia  $D_0$ .

### 3.3.2. Wariantowanie współczynnika sprężystości

Wariantowanie współczynnika sprężystości przeprowadzono wychodząc od wartości  $k_0 = 85 \cdot 10^3$  N/m. Trajektorie fazowe pokazano na rys. 9.

Z rys. 9 wynika że:

- przy wzroście sprężystości maleje przesunięcie geometrycznego środka cyklu granicznego,

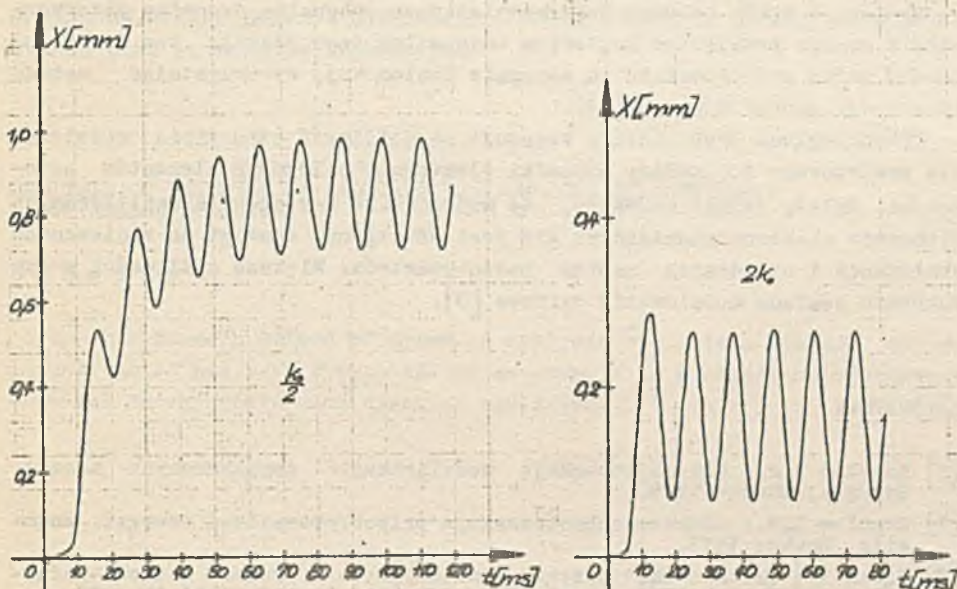


Rys. 9. Trajektorie fazowe przy zmianach współczynnika sprężystości



- dla dużego współczynnika sprężystości występuje przesunięcie zwory z przeregulowaniem,
- współczynnik sprężystości zmienia amplitudę cyklu granicznego.

Czas dojścia do cyklu granicznego rośnie przy zmniejszaniu współczynnika sprężystości, co pokazano na rys. 10. Zatem zmiana sprężystości powoduje zmianę własności statycznych i dynamicznych przetwornika.



Rys. 10. Przesunięcie zwory dla różnych współczynników sprężystości

#### 4. Uwagi końcowe

Z przeprowadzonych badań zilustrowanych fragmentarycznie na rysunkach wynika, że elektromechaniczny przetwornik sygnału elektrycznego na przesunięcie liniowe pod wpływem sygnału sterującego zachowuje stan równowagi elektrodynamicznej, przejawem którego jest obserwowany stabilny cykl graniczny położenia zwory w czasie. Rozpatrywany układ może pracować jako przetwornik amplitudy lub częstotliwości na przesunięcie liniowe. Charakterystyki statyczne i dynamiczne rozpatrywanego przetwornika są funkcjami nieliniowymi sterowania i parametrów układu. Uzyskanie określonej charakterystyki statycznej przetwornika jako zależności położenia środka geometrycznego cyklu granicznego od amplitudy lub częstotliwości wymaga doboru parametrów korektora mechanicznego, przy założeniu, że dane są zakresy zmian parametrów sterowania. Charakterystyka statyczna może być zmieniona jedynie przy zmianach współczynnika sprężystości. Przy pomocy współczyn-

nika tłumienia można ograniczyć amplitudę cyklu granicznego do wartości tolerancji pomiarów przesunięcia liniowego przetwornika.

Własności dynamiczne przetwornika są zależne zarówno od parametrów sterowania jak i parametrów układu. Należy zwrócić uwagę na fakt, że korektor mechaniczny wprowadza do układu dużą inercję - co ogranicza pasmo przenoszonych częstotliwości i jest przyczyną zbyt dużych błędów przy śledzeniu przebiegów elektrycznych o zmiennej amplitudzie lub częstotliwości.

Syntezę i wybór parametrów zapewniających optymalną dynamikę przetwornika w sensie przyjętego kryterium (minimalny czas reakcji bez przeregulowań) można przeprowadzić na maszynie analogowej, wykorzystując metodę relaksacji zmodyfikowanej [9].

Przedstawiona problematyka wskazuje na możliwość stosowania modelowania analogowego do analizy dynamiki elektromechanicznych elementów automatyki. Należy jednak zauważyć, że modelowanie analogowe skomplikowanych elementów elektromechanicznych nie jest efektywne, z uwagi na konieczność skalowania i obliczania nastaw potencjometrów. Większe możliwości w tym zakresie posiada modelowanie cyfrowe [3].

#### LITERATURA

- [1] Kopyłow I.P.: Matematyczeskije modelirovanie asynchronnych maszyn. Energia, Moskwa 1969.
- [2] Kopyłow I.P.: Elektromechaniceskije priobrazowatieli energii. Energija, Moskwa 1973.
- [3] Kącki E.: Zastosowanie języków symulacyjnych w pracach naukowo-badawczych. II Krajowa Konferencja Informatyków, Poznań 11-13 IV 1973 r.
- [4] Elbaum J.: Obwody magnetyczne. PWT, Warszawa 1959.
- [5] Bortliczek Z.: O właściwościach dynamicznych prostego mechanizmu elektromagnetycznego. Zeszyty Naukowe Pol. Śl. "Automatyka", 1972.
- [6] Meisel J.: Principles of electromechanical-energy conversion McGRAW-HILL BOOK COMPANY 1966.
- [7] Kowalowski H.: Laboratorium elektromechanicznych i magnetycznych elementów Automatyki, cz. II, Skrypty Uczelniane Pol. Śl. nr 188, Gliwice 1967.
- [8] Nejmark J.I., Fufajew N.A.: Dynamika układów nieholonomicznych. PWN, Warszawa 1971.
- [9] Levine L.: Metody stosowania maszyn analogowych do rozwiązywania problemów w technice. PWT, Warszawa 1965.



АНАЛИЗ ДИНАМИКИ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ  
МЕТОДОМ АНАЛОГОВОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Р е з ю м е

В работе представлен метод анализа динамики элементов автоматики при использовании электронной аналоговой вычислительной машины. В качестве примера показан анализ динамики электромеханического преобразователя электрического сигнала на линейное перемещение.

ANALYSIS OF DYNAMICS OF ELECTROMECHANICAL ENERGY CONVERSION  
USING ANALOG COMPUTER

S u m m a r y

In this paper a method of dynamics analysis of automatization system investigation has been presented. As an example an analysis of electromechanical energy conversion dynamics was given.