ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1967
Seria: ELEKTRYKA z. 22 Nr kol. 182

ZYGMUNT NOWOMIEJSKI
Katedra Elektrotechniki Teoretycznej

O PEWNYCH ZAGADNIENIACH DOTYCZĄCYCH MOCY DEFORMACJI W UKŁADACH O PRZEBIEGACH ODKSZTAŁCONYCH

Streszczenie. W pracy omówione są zagadnienia związane z występowaniem mocy deformacji w układach o przebiegach odkształconych. Podano nową definicję mocy deformacji i omówiono jej zależność od rodzaju obciążenia oraz od pozostałych mocy układu.

W układach o przebiegach okresowych, niesinusoidalnych obok mocy czynnej P, mocy biernej Q i mocy pozornej S (por. [2]) występuje także moc deformacji K (por. [1]), której znaczenie fizykalne i techniczne można w różny sposób interpretować. Wynika to stąd, że jej własności na ogół nie odnoszą się do rzeczywiście występujących w układzie przebiegów, lecz do pewnych formalnych związków (przeważnie kwadratowych) z pozostałymi znanymi mocami pobieranymi przez układ. Autor tej pracy w szeregu wcześniejszych pracach (por. [1], [3], [4]) zaproponował interpretację mocy deformacji K w oparciu o rozkład ortogonalny symbolicznej funkcji przebiegu prądu pobieranego przez układ w odniesieniu do symbolicznej funkcji przebiegu napięcia. Pozwoliło to na wprowadzenie do rozważań nowej wielkości $\hat{I}_{\psi}(t)$ (por. [1]) nazwanej symboliczną funkcją przebiegu prądu deformacji (w skrócie: symbolicznym prądem deformacji), która pozwoliła na ścisłe sprecyzowanie samego pojęcia deformacji przebiegu oraz na wprowadzenie definicji mocy deformacji K w zależności jedynie od mocy czynnej P i mocy biernej Q, tj. wielkości posiadających wyraźny sens energetyczny.

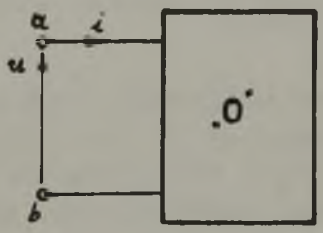
Rozważmy układ podany na rys. [1] składający się z liniowego odbiornika "O" zasilanego napięciem okresowym u i pobierającego prąd i. Tworzymy funkcje symboliczne $\hat{U}(t)$ oraz $\hat{I}(t)$

przebiegów przy pomocy transformacji Hilberta (por. [2]) w myśl relacji:

$$\hat{U}(t) = u(t) - j\,H\left\{u(t)\right\}$$
$$\hat{I}(t) = i(t) - j\,H\left\{i(t)\right\} \tag{1}$$

gdzie:

$$H\left\{f(t)\right\} = \text{V.P.}\ \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\tau)\,d\tau}{\tau - t}; \qquad f(t) = f(t+T) \tag{2}$$



Rys. 1.

przy czym transformacja Hilberta (2) posiada taką własność, że:

$$H\left[H\left\{f(t)\right\}\right] = -f(t) \tag{3}$$

Przy pomocy danych przebiegów rzeczywistych u(t) i i(t) oraz ich transformat H możemy obliczyć moc czynną P i moc bierną Q (por. [2]) przy pomocy relacji:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\,i(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T H\left\{u(t)\right\}\,H\left\{i(t)\right\}\,dt$$
$$Q = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)H\left\{(i)\right\}dt = -\frac{1}{T}\int_0^T i(t)H\left\{u(t)\right\}dt \tag{4}$$

a tym samym także zespoloną moc pozorną:

$$\hat{S} = P + j\,Q \tag{5}$$

Aby uzyskać symboliczny prąd deformacji $\hat{I}_\nu(t)$ (por. [1]), kładziemy:

$$\hat{I}_\nu(t) = \hat{I}(t) - \frac{\check{S}}{U^2}\,\hat{U}(t) \tag{6}$$

gdzie:

$\check{S}$ jest wielkością sprzężoną z mocą $\hat{S}$.

W myśl definicji podanych przez autora (por. [1]) miarą definicji przebiegu prądu od przebiegu napięcia jest wielkość I_ψ dana przy pomocy relacji:

$$I_\psi = \sqrt{\frac{1}{2T}\int_0^T |\hat{I}_\psi(t)|^2\,dt} \tag{7}$$

a moc deformacji:

$$K = U.I_\psi \tag{8}$$

gdzie: U jest wartością skuteczną przebiegu napięcia u(t). W związku z podaną definicją symbolicznego prądu deformacji $\hat{I}_\psi(t)$ nasuwa się pytanie: czy wielkość $\hat{I}_\psi(t)$ jest "prawdziwą" funkcją symboliczną w takim samym sensie jak funkcje $\hat{U}(t)$ oraz $\hat{I}(t)$ (por. (1))? Odpowiedź na to pytanie nie jest zagadnieniem formalnym lecz istotnym. Pozwala ona bowiem na stwierdzenie czy w układzie występuje rzeczywisty prąd deformacji $i_\psi(t)$ pobierany przez układ "0" a tym samym także napięcie $u_\psi(t)$ między zaciskami a i b zależne od obciążenia oraz rzeczywistego prądu deformacji $i_\psi(t)$.

W myśl definicji (6) oraz relacji (1), otrzymamy:

$$\begin{aligned}\hat{I}_\psi(t) = i(t) - \frac{P}{U^2}u(t) + \frac{Q}{U^2}H\{u(t)\} - \\ - j\left[H\{i(t)\} - \frac{P}{U^2}H\{u(t)\} - \frac{Q}{U^2}u(t)\right]\end{aligned} \tag{9}$$

Z drugiej strony, kładąc:

$$i_\psi(t) = i(t) - \frac{P}{U^2}u(t) + \frac{Q}{U^2}H\{u(t)\} \tag{10}$$

na podstawie (2) oraz (3), otrzymamy:

$$H\{i_\psi(t)\} = H\{i(t)\} - \frac{P}{U^2}H\{u(t)\} - \frac{Q}{U^2}u(t) \tag{11}$$

Porównując z (9) widać, że:

$$\hat{I}_{\psi}(t) = i_{\psi}(t) - j\,H\left\{i_{\psi}(t)\right\} \tag{12}$$

Tak więc funkcja $\hat{I}_{\psi}(t)$ jest "prawdziwą" funkcją symboliczną rzeczywistego przebiegu prądu i_{ψ}.
Wartość skuteczną prądu i_{ψ} obliczamy przy pomocy relacji:

$$I_{\psi} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{0}^{T} i_{\psi}^{2}\,dt} = \sqrt{\frac{1}{2T}\int_{0}^{T}\left|\hat{I}_{\psi}(t)\right|^{2}dt} \tag{13}$$

Czyli, że - w myśl definicji uprzednio podanej, wartość skuteczna rzeczywistego przebiegu i_{ψ} jest miarą deformacji (dystorsji) przebiegu prądu i od przebiegu napięcia u.

Na podstawie (10) (oraz [2], wzór (14)), otrzymamy:

$$I_{\psi}^{2} = I^{2} - \frac{P^{2} + Q^{2}}{U^{2}} \tag{14}$$

Odnośnie definicji (8) mocy deformacji K, to jej zaletą jest fakt, że przy jej pomocy łatwo można nawiązać do formalnych, tradycyjnie rozważanych, zależności kwadratowych zachodzących między pozostałymi mocami występującymi w układzie (por. [1], wzór II-2.03). Budzi ona jednak zastrzeżenia natury merytorycznej.

Z definicji tej wynika bowiem, że moc deformacji jest zależna w każdym przypadku (tj. niezależnie od rodzaju obciążenia) od wartości skutecznej przyłożonego napięcia u, gdy tylko $I_{\psi} > o$. Tymczasem znacznie słuszniej jest przyjąć, że moc deformacji jest zależna od przebiegu napięcia u_{ψ} ujawniającego się między zaciskami a i b układu pod wpływem przepływu prądu deformacji i_{ψ} przez układ. Mówiąc inaczej: moc deformacji powinna ściśle określić średni za okres wydatek energii dostarczonej do układu w wyniku odkształcenia przebiegów: napięcia i prądu względem siebie. (Uwaga marginalna: W tej pracy przyjęto za wielkość odniesienia funkcję symboliczną przebiegu napięcia, względem której przeprowadzono rozkład ortogonalny

funkcji symbolicznej $\hat{I}(t)$ przebiegu prądu, uzyskując prąd deformacji. Oczywiście można także przyjąć za wielkość odniesienia funkcję symboliczną przebiegu prądu i przeprowadzić w odniesieniu do niej rozkład ortogonalny funkcji symbolicznej przebiegu napięcia). Jednak takie postawienie zagadnienia wymaga wprowadzenia nowej definicji mocy deformacji.

Nowa definicja mocy deformacji

Załóżmy, że symboliczna impedancja przejścia odbiornika "0" dla przebiegów okresowych o okresie T jest dana i wynosi $\hat{Z}(t)$ (por. [2], wzory (20) i (21)). Otrzymamy (na podstawie [2], wzór (38)):

$$\hat{U}_{\psi}(t) = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} \hat{Z}(t-\tau)\,\hat{I}_{\psi}(\tau)\,d\tau \tag{15}$$

gdzie: $\hat{U}_{\psi}(t)$ jest symboliczną funkcją napięcia rzeczywistego $u_{\psi} = \mathrm{Re}\left\{\hat{U}_{\psi}(t)\right\}$ występującego na zaciskach a i b układu "0" pod wpływem przepływu prądu i_{ψ}.

Otrzymamy:

$$\hat{U}_{\psi}(t) = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} \hat{Z}(t-\tau)\left[\hat{I}(\tau) - \frac{\check{S}}{U^2}\,\hat{U}(\tau)\right]d\tau$$

$$= \frac{1}{T}\int_{0}^{T} \hat{Z}(t-\tau)\,\hat{I}(\tau)d\tau - \frac{\check{S}}{U^2}\cdot\frac{1}{T}\int_{0}^{T} \hat{Z}(t-\tau)\,\hat{U}(\tau)\,d\tau$$

Czyli:

$$\hat{U}_{\psi}(t) = \hat{U}(t) - \frac{\check{S}}{U^2}\cdot\frac{1}{T}\int_{0}^{T} \hat{Z}(t-\tau)\,\hat{U}(\tau)d\tau \tag{16}$$

Kładziemy:

$$\hat{A}(t) = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} \hat{Z}(t-\tau)\hat{U}(\tau)d\tau \tag{17}$$

Z relacji (17) wynika, że funkcja $\hat{A}(t)$ jest funkcją symboliczną czyli, że można ją przedstawić w postaci:

$$\hat{A}(t) = a(t) - j\,H\left\{a(t)\right\} \tag{18}$$

Stąd:

$$\hat{U}_{\psi}(t) = \hat{U}(t) - \frac{\check{S}}{U^2}\,\hat{A}(t) \tag{19}$$

oraz:

$$u_{\psi}(t) = u(t) - \frac{P}{U^2}\,a(t) + \frac{Q}{U^2}\,H\left\{a(t)\right\}$$

$$H\left\{u_{\psi}(t)\right\} = H\left\{u(t)\right\} - \frac{P}{U^2}\,H\left\{a(t)\right\} - \frac{Q}{U^2}\,a(t) \tag{20}$$

<u>Zespoloną mocą deformacji</u> $\hat{K}$ pobieraną przez układ "0" nazwiemy wielkość zdefiniowaną przy pomocy relacji:

$$\hat{K} \overset{df}{=} \frac{1}{2T}\int_0^T \hat{U}_{\psi}(t)\,\check{I}_{\psi}(t)\,dt \tag{21}$$

Zachodzi:

$$\hat{K} = \frac{1}{2T}\int_0^T \left[u_{\psi} - j\,H(u_{\psi})\right]\left[i_{\psi} + j\,H(i_{\psi})\right]dt$$

$$= \frac{1}{2T}\int_0^T \left[u_{\psi}i_{\psi} + H(u_{\psi})H(i_{\psi})\right]dt + j\,\frac{1}{2T}\int_0^T \left[u_{\psi}\,H(i_{\psi}) - i_{\psi}H(u_{\psi})\right]dt \tag{22}$$

oraz (por. [2], str. 44):

$$\int_0^T \hat{U}_{\psi}(t)\,\hat{I}_{\psi}(t)dt = 0$$

Stąd:

$$\int_0^T u_\psi \, i_\psi \, dt = \int_0^T H(u_\psi) \, H(i_\psi) \, dt$$

$$\int_0^T u_\psi H(i_\psi) \, dt = - \int_0^T i_\psi \, H(u_\psi) \, dt \tag{23}$$

Wstawiając (23) do (22), otrzymamy:

$$\hat{K} = \frac{1}{T} \int_0^T u_\psi \, i_\psi \, dt + j \frac{1}{T} \int_0^T u_\psi H(i_\psi) \, dt \tag{24}$$

Kładziemy:

$$D = \frac{1}{T} \int_0^T u_\psi \, i_\psi \, dt = \frac{1}{T} \int_0^T H(u_\psi) H(i_\psi) dt \tag{25}$$

$$D = \frac{1}{T} \int_0^T u_\psi H(i_\psi) dt = - \frac{1}{T} \int_0^T i_\psi H(u_\psi) dt \tag{26}$$

Moc D jest równa części rzeczywistej z zespolonej mocy deformacji a moc T jest równa jej części urojonej tak, iż:

$$\hat{K} = D + j \, T \tag{27}$$

Fizykalne znaczenie tak zdefiniowanych mocy deformacji jest jasne. Jeżeli w zasilaniu wystąpi rzeczywisty prąd deformacji i_ψ to pod wpływem przepływu tego prądu przez układ "O" na zaciskach a i b tego układu ujawni się rzeczywiste napięcie u_ψ. Do układu doprowadzona zostaje więc energia E_ψ dana przy pomocy relacji:

$$E = \int_{t_1}^{t_2} u_\psi \, i_\psi \, dt \tag{28}$$

Dla układów o przebiegach okresowych możemy obliczyć jej średnią wartość za okres tj. czynną moc deformacji D. Bierna moc deformacji T odgrywa w odniesieniu do przebiegów u_ψ oraz i_ψ analogiczną rolę jaką odgrywa moc bierna Q w odniesieniu do przebiegów u oraz i.

Mamy:

$$\hat{U}_{\psi mn} = \frac{1}{T}\int_0^T \hat{U}_\psi(t)e^{-jn\omega t}dt$$

$$\hat{I}_{\psi mn} = \frac{1}{T}\int_0^T \hat{I}_\psi(t)e^{-jn\omega t}\,dt, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \tag{29}$$

Wstawiając tak obliczone harmoniczne przebiegów $\hat{U}_\psi(t)$ i $\hat{I}_\psi(t)$ do relacji (21) otrzymamy:

$$\hat{K} = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{U}_{\psi n}\,\check{I}_{\psi n} \tag{30}$$

gdzie: $\hat{U}_{\psi n}$ i $\hat{I}_{\psi n}$ są zespolonymi wartościami skutecznymi n-tej harmonicznej przebiegów: napięcia i prądu deformacji.

Kładąc:

$$\hat{K}_n = \hat{U}_{\psi n}\,\check{I}_{\psi n} \tag{31}$$

otrzymamy:

$$\hat{K} = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{K}_n \tag{32}$$

a więc analogiczny wzór do wzoru dla pozornej mocy zespolonej $\hat{S}$, dla której zachodzi:

$$\hat{S} = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{U}_n\,\check{I}_n = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{S}_n \tag{33}$$

gdzie: $\hat{U}_n$ i $\hat{I}_n$ są zespolonymi wartościami skutecznymi n-tej harmonicznej przebiegów u oraz i.
Na podstawie (17), (19) i (6), otrzymamy:

$$\hat{U}_{\psi n} = \hat{U}_n - \frac{\check{S}}{U^2} \cdot \hat{Z}(n\omega)\, \hat{U}_n = \hat{U}_n\left[1 - \frac{\check{S}}{U^2} \cdot \hat{Z}(n\omega)\right] \tag{34}$$

$$\hat{I}_{\psi n} = \hat{I}_n - \frac{\check{S}}{U^2} \cdot \hat{U}_n = \hat{I}_n\left[1 - \frac{\check{S}}{U^2} \cdot \hat{Z}(n\omega)\right] \tag{35}$$

gdzie:

$$\hat{Z}(n\omega) = \frac{\hat{U}_n}{\hat{I}_n} = \frac{1}{T}\int_0^T \hat{Z}(t)e^{-jn\omega t}\, dt$$

Kładziemy:

$$\hat{\alpha}_n = 1 - \hat{Z}(n\omega) \cdot \frac{\check{S}}{U^2} \tag{36}$$

Otrzymamy:

$$\begin{aligned} \hat{U}_{\psi n} &= \hat{\alpha}_n \hat{U}_n \\ \hat{I}_{\psi n} &= \hat{\alpha}_n \hat{I}_n \end{aligned} \tag{37}$$

oraz:

$$\hat{K}_n = \alpha_n^2\ \hat{S}_n \tag{38}$$

$$\hat{K} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2\ \hat{S}_n \tag{39}$$

Dla mocy deformacji D i T zachodzi:

$$D = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 \; U_n \; I_n \; \cos\varphi_n \tag{40}$$

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 \; U_n \; I_n \; \sin\varphi_n \tag{41}$$

gdzie: kąt φ_n jest kątem przesunięcia fazowego między n-tą harmoniczną prądu i oraz n-tą harmoniczną napięcia u.

Rękopis złożono w redakcji w grudniu 1966 r.

LITERATURA

[1] Nowomiejski Z.J.: Moc i energia elektryczna w układach elektrycznych o dowolnych ustalonych przebiegach. Z.Nauk. Pol. Śl. "Elektryka" z. 15.

[2] Nowomiejski Z.J.: Uogólniona metoda symboliczna. Z.Nauk. Pol. Śl. "Elektryka" z. 20.

[3] Nowomiejski Z.J.: Moszcznost aktivnaja, reaktivnaja i moszcznost iskarzenia v elektriczeskich sistemach s periodiczeskimi niesinusoidalnymi processami. Izviestia Vysszich Uczebnych Zaviedenij. Elektromechanika Nr 6/1964.

[4] Nowomiejski Z.J.: Moc elektryczna w układach o przebiegach odkształconych. Biul. Inst. Energ. 5/6 - 1960, Energetyka Nr 8, 1960.

О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ В ОТНОШЕНИИ МОЩНОСТИ ДЕФОРМАЦИИ В СИСТЕМАХ С ДЕФОРМИРОВАННЫМИ ПРОЦЕССАМИ

Р е з ю м е

В работе рассматриваются вопросы, связанные с выступанием мощности деформации в системах с деформированными процессами. Приведено новое определение мощности деформации и рассмотрено ее зависимость от рода нагрузки, а также от остальных мощностей системы.

SOME PROBLEMS REFERRING TO DEFORMATION POWER IN THE SYSTEMS WITH THE DEFORMED TRANSIENTS

S u m m a r y

The paper deals with the problems of the occurence of the deformation power in the systems with the deformed transients. The new definition of the deformation power and discussion of its dependence from the type of the leading and the remained system powers.