ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1967
Seria: ELEKTRYKA z. 22 Nr kol. 182

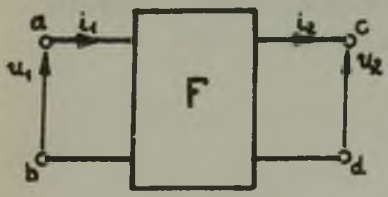
ZYGMUNT NOWOMIEJSKI
Katedra Elektrotechniki Teoretycznej

ZASTOSOWANIE UOGÓLNIONEJ METODY SYMBOLICZNEJ DO ANALIZY CZWÓRNIKÓW I UKŁADÓW 3-FAZOWYCH*)

Streszczenie: W pracy zastosowano - wprowadzoną przez Autora, uogólnioną metodę symboliczną do analizy czwórników i układów 3-fazowych o przebiegach odkształconych. W szczególności wyprowadzono równania czwórnika w nowej postaci i wykorzystano je do obliczenia współczynnika mocy układu składającego się z czwórnika i obciążenia. Wykazano, że współczynnik ten jest zależny od współczynnika autokorelacji napięcia występującego na zaciskach odbiornika a nie jest zależny od samego napięcia. W drugiej części pracy Autor zastosował uogólnioną metodę symboliczną do analizy układów 3-fazowych o przebiegach odkształconych oraz uogólnił zastosowanie metody składowych symetrycznych do takich układów.

1. Czwórniki

Rozważać będziemy czwórnik liniowy i pasywny (por. rys. 1) z zerowymi warunkami początkowymi. Korzystając z transformacji Laplace'a L (por.[3], str. 465) operatorowe równania łańcuchowe tego czwórnika dadzą się zapisać w postaci:



Rys. 1.

$$U_1(p)=A(p)U_2(p)+B(p)I_2(p)$$
$$I_1(p)=C(p)U_2(p)+D(p)I_2(p) \qquad (1)$$

gdzie: $U_1(p)$, $I_1(p)$ są transformatami przebiegów odpowiednio napięć i

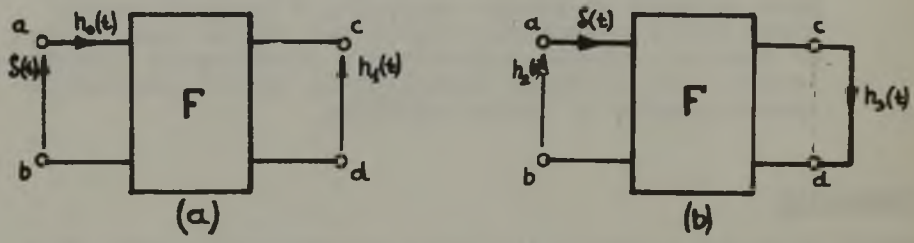
*) Niniejsza praca jest kontynuacją pracy zamieszczonej w Zeszycie Naukowym "Elektryka" z. 20.

prądów a A, B, C i D są współczynnikami czwórnika F. Aby te współczynniki obliczyć można się posłużyć analizą stanu biegu jałowego i stanu zwarcia czwórnika. W tym celu między końcówkami a i b przy otwartych końcówkach c i d wprowadzany napięciowy impuls Diraca $\delta(t)$. W odpowiedzi układu ujawnią się przebiegi $h_0(t)$ i $h_1(t)$ (por. rys. 2a).
Otrzymamy:

$$A(p) = \frac{1}{H_1(p)} \tag{2}$$

$$C(p) = \frac{H_0(p)}{H_1(p)} \tag{3}$$

gdzie: $H_0(p) = L\left\{h_0(t)\right\}$; $H_1(p) = L\left\{h_1(t)\right\}$



Rys. 2

Podobnie, wprowadzając do gałęzi a impuls prądowy $\delta(t)$, przy zwartych końcówkach c i d w odpowiedzi układu ujawnią się przebiegi $h_2(t)$ i $h_3(t)$, (por. rys. 2b).
Otrzymamy:

$$D(p) = \frac{1}{H_3(p)} \tag{4}$$

$$B(p) = \frac{H_2(p)}{H_3(p)} \tag{5}$$

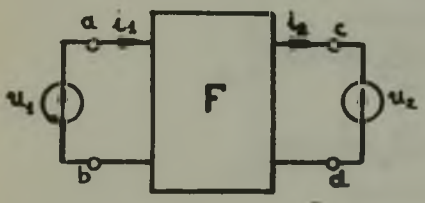
gdzie: $H_2(p) = L\left\{h_2(t)\right\}$; $H_3(p) = L\left\{h_3(t)\right\}$

Kładziemy:

$$a(t) = L^{-1}\left\{A(p)\right\}; \qquad b(t) = L^{-1}\left\{B(p)\right\}$$
$$c(t) = L^{-1}\left\{C(p)\right\}; \qquad d(t) = L^{-1}\left\{D(p)\right\} \tag{6}$$

oraz

$$\hat{A}(t) = \int_0^{\infty} a(\tau)\hat{1}\,(t-\tau)\,d\tau \;^{x)}$$
$$\hat{B}(t) = \int_0^{\infty} b(\tau)\hat{1}\,(t-\tau)\,d\tau$$
$$\hat{C}(t) = \int_0^{\infty} c(\tau)\hat{1}\,(t-\tau)\,d\tau \tag{7}$$
$$\hat{D}(t) = \int_0^{\infty} d(\tau)\hat{1}\,(t-\tau)\,d\tau$$



Rys. 3

Rozważmy czwórnik F obciążony dowolną impedancją przejścia $\hat{Z}(t)$ od strony zacisków c i d i zasilany od strony zacisków a i b napięciem $\hat{U}(t)$.

Zgodnie z twierdzeniem o kompensacji obwodów liniowych układ taki możemy przedstawić przy pomocy obwodu podanego na rys. 3, gdzie (dla przebiegów okresowych o okresie T):

$$\hat{U}_2(t) = \frac{1}{T}\int_0^{T} \hat{Z}(\tau)\hat{I}_2(t-\tau)d\tau \tag{8}$$

x) $\hat{1}(t)$ jest symbolicznym operatorem jednostkowym (por. [1]).

Stosując zasadę superpozycji w postaci splotu, otrzymamy:

$$\hat{U}_1(t) = \frac{1}{T}\int_0^T \hat{A}(\tau)\hat{U}_2(t-\tau)d\tau + \frac{1}{T}\int_0^T \hat{B}(\tau)\hat{I}_2(t-\tau)\,d\tau$$

$$\hat{I}_1(t) = \frac{1}{T}\int_0^T \hat{C}(\tau)\hat{U}_2(t-\tau)d\tau + \frac{1}{T}\int_0^T \hat{D}(\tau)\hat{I}_2(t-\tau)\,d\tau \tag{9}$$

Równania (9) są symbolicznymi, łańcuchowymi równaniami czwórnika dla przebiegów odkształconych o okresie T. Oznaczmy wspólnym symbolem $\hat{W}(t)$ przebiegi (napięcia i prądu) strony pierwotnej (o wskaźniku "1") czwórnika F a przez $\hat{V}(t)$ przebiegi strony wtórnej (wskaźnika "2") i połóżmy:

$$\hat{W}(t) = \frac{1}{T}\int_0^T \hat{K}(\tau)\,\hat{V}(t-\tau)d\tau \tag{10}$$

Wielkość $\hat{K}(t)$ nazywamy transmitancją przejścia czwórnika. Ogółem można wyróżnić cztery różne transmitancje przejścia. Obliczymy dwie z nich $\hat{K}_{uu}(t)$ i $\hat{K}_{iu}(t)$, gdzie:

$$\hat{U}_1(t) = \frac{1}{T}\int_0^T \hat{K}_{uu}(\tau)\hat{U}_2(t-\tau)d\tau$$

$$\hat{I}_1(t) = \frac{1}{T}\int_0^T \hat{K}_{iu}(\tau)\hat{U}_2(t-\tau)d\tau \tag{11}$$

w zależności od współczynników $\hat{A}(t)$, $\hat{B}(t)$, $\hat{C}(t)$ i $\hat{D}(t)$ oraz admitancji przejścia obciążenia $\hat{Y}(t)$.

Na podstawie relacji (8) oraz relacji (por. [1], wzór (41)):

$$\hat{i}(t) = \frac{1}{T}\int_0^T \hat{Z}(\tau)\hat{Y}(t-\tau)d\tau$$

otrzymamy:

$$\hat{I}_2(t) = \frac{1}{T}\int_0^T \hat{Y}(\tau)\hat{U}_2(t-\tau)d\tau \tag{12}$$

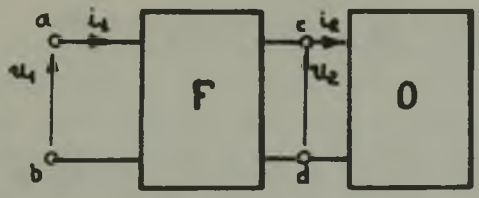
Wstawiając w miejsce $\hat{U}_1(t)$ i $\hat{I}_1(t)$ prawe strony relacji (11) do równań (9), otrzymamy:

$$\hat{K}_{uu}(t) = \hat{A}(t) + \frac{1}{T}\int_0^T \hat{B}(\tau)\hat{Y}(t-\tau)d\tau$$

$$\hat{K}_{iu}(t) = \hat{C}(t) + \frac{1}{T}\int_0^T \hat{D}(\tau)\hat{Y}(t-\tau)d\tau \qquad (13)$$

2. Współczynnik mocy

Oznaczmy układ przedstawiony na rys. 4 symbolem $\{Q \times F\}$. W teorii prowadzącej do poprawy współczynnika mocy w układach o przebiegach odkształconych istotną rolę odgrywają relacje wyrażające współczynnik mocy λ (obliczony do układu $\{Q \times F\}$) przy pomocy współczynników charakteryzujących układ $\{Q \times F\}$ oraz napięcia między zaciskami c i d.



Rys. 4

Jak wiadomo współczynnik mocy λ jest zdefiniowany przy pomocy relacji:

$$\lambda = \frac{P_1}{U_1 I_1} \qquad (14)$$

gdzie: P_1 jest mocą czynną pobieraną przez układ $\{Q \times F\}$ a U_1 i I_1 są odpowiednio równe wartościom skutecznym napięcia i prądu zasilających układ $\{Q \times F\}$.

Na podstawie (11) mamy:

$$\hat{U}_1(t) = \frac{1}{T}\int_0^T \hat{K}_{uu}(\tau)\,\hat{U}_2(t-\tau)d\tau$$

Stąd (por. [1] wzór (52)):

$$U_1^2 = \frac{1}{2T}\int_0^T |\hat{U}_1(t)|^2\,dt$$

$$= \frac{1}{2T}\left\{\frac{1}{T}\int_0^T \hat{K}_{uu}(\tau)\hat{U}_2(t-\tau)d\tau\right\}\left\{\frac{1}{T}\int_0^T \check{K}_{uu}(\tau)\check{U}_2(t-\tau)d\tau\right\}dt$$

$$= \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T \hat{K}_{uu}(\tau)\check{K}_{uu}(v)\left\{\frac{1}{2T}\int_0^T \hat{U}_2(t-\tau)\check{U}_2(t-v)dt\right\}dv\,d\tau$$

$$= \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T \hat{K}_{uu}(\tau)\check{K}_{uu}(v)\hat{\varphi}_2(v-\tau)\,dv\,d\tau$$

gdzie: (w myśl [1] relacji (68)):

$$\hat{\varphi}_2(v-\tau) = \frac{1}{2T}\int_0^T \hat{U}_2(t-\tau)\check{U}_2(t-v)dt$$

Otrzymamy:

$$U_1^2 = \frac{1}{T}\int_0^T \check{K}_{uu}(v)\left\{\frac{1}{T}\int_0^T \hat{\varphi}_2(v-\tau)\,\hat{K}_{uu}(\tau)\,d\tau\right\}dv$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \hat{\varphi}_2(\tau)\left\{\frac{1}{T}\int_0^T \hat{K}_{uu}(v-\tau)\check{K}_{uu}(v)dv\right\}d\tau$$

Kładziemy:

$$\hat{M}(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T \hat{K}_{uu}(v)\check{K}_{uu}(v-\tau)dv \qquad (15)$$

Stąd:

Stąd:

$$U_1 = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \hat{\varphi}_2(\tau)\check{M}(\tau)d\tau} \tag{16}$$

Podobnie:

$$I_1 = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \hat{\varphi}_2(\tau)\check{N}(\tau)d\tau} \tag{17}$$

gdzie:

$$\hat{N}(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T \hat{K}_{iu}(v)\check{K}_{iu}(v-\tau)dv \tag{18}$$

Czyli, że moc modułowa P_m (por. [2]) jest dana przy pomocy relacji:

$$P_m = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \hat{\varphi}_2(\tau)\check{M}(\tau)d\tau} \cdot \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \hat{\varphi}_2(\tau)\check{N}(\tau)d\tau} \tag{19}$$

Z relacji (19) widać, że podobnie jak moc czynna i bierna (por. [1], wzory (69) i (71) także moc modułowa P_m pobierana przez układ jest nie tyle zależna od przyłożonego napięcia ile od współczynnika autokorelacji $\hat{\varphi}_2(\tau)$. Współczynnik ten jest niezależny od przesunięcia fazowego i dlatego napięcia o całkiem różnych przebiegach mogą posiadać ten sam współczynnik autokorelacji. Otrzymany wynik jest istotny z punktu widzenia syntezy czwórnika F.

Dla mocy symbolicznej $\hat{S}$ (por. [1]), otrzymamy:

$$\hat{S} = \frac{1}{2T}\int_0^T \hat{U}_1(t)\check{I}_1(t)dt =$$

$$= \frac{1}{2T}\int_0^T \left\{\frac{1}{T}\int_0^T \hat{K}_{uu}(\tau)\,\hat{U}_2(t-\tau)d\tau\right\}\left\{\frac{1}{T}\int_0^T \check{K}_{iu}(v)\check{U}_2(t-v)dv\right\} dt$$

$$= \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T \hat{K}_{uu}(\tau)\, \check{K}_{iu}(v)\, \hat{\varphi}_2(v-\tau)\, dv\, d\tau$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T \hat{\varphi}_2(\tau) \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \hat{K}_{uu}(v-\tau)\, \check{K}_{iu}(v) dv \right\} d\tau$$

Kładziemy:

$$\hat{R}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T \hat{K}_{uu}(v) \check{K}_{iu}(v-\tau) dv \tag{20}$$

Stąd:

$$\hat{S} = \frac{1}{T} \int_0^T \hat{\varphi}_2(\tau)\, \check{R}(\tau)\, d\tau \tag{21}$$

Moc czynna:

$$P_1 = \mathrm{Re} \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \hat{\varphi}_2(\tau) \check{R}(\tau)\, d\tau \right\} \tag{22}$$

Ostatecznie współczynnik mocy:

$$\lambda = \frac{\mathrm{Re} \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \hat{\varphi}_2(\tau)\, \check{R}(\tau) d\tau \right\}}{\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \hat{\varphi}_2(\tau) \check{M}(\tau) d\tau} \cdot \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \hat{\varphi}_2(\tau) \check{N}(\tau)\, d\tau}} \tag{23}$$

Łatwo można wykazać, że λ będzie równy jedności wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzić będzie relacja:

$$\hat{K}_{iu}(t) = \alpha \hat{K}_{uu}(t) \tag{24}$$

gdzie: α jest dowolną stałą wielkością rzeczywistą.

3. Układy trójfazowe

Aby przeprowadzić analizę układów trójfazowych w sposób zwarty wprowadzimy do rozważań nowy operator $\hat{\alpha}(t)$ zdefiniowany przy pomocy relacji:

$$\hat{\alpha}(t) = \sum_{n=1} \hat{\lambda}^n e^{jn\omega t}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \tag{25}$$

gdzie:

$$\hat{\lambda} = e^{j\frac{2\pi}{3}}$$

$\hat{\alpha}(t)$ jest operatorem symbolicznym okresowym o okresie T. Zachodzi:

$$\frac{1}{T}\int_0^T \hat{\alpha}(t-\tau)\hat{\alpha}(\tau)\, d\tau = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\lambda}^{2n} e^{jn\omega t} \tag{26}$$

W celu uproszczenia zapisu splot między dwoma wielkościami symbolicznymi $\hat{F}(t)$ i $\hat{G}(t)$ (funkcjami lub operatorami) oznaczać będziemy symbolem: " * " tak, że relację (26) możemy zapisać:

$$\hat{\alpha}(t) * \hat{\alpha}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\lambda}^{2n} e^{jn\omega t}$$

lub, wprowadzając dalsze uproszczenie w zapisie:

$$\hat{\alpha}^2(t) = \hat{\alpha}(t) * \hat{\alpha}(t) \tag{27}$$

otrzymując:

$$\hat{\alpha}^2(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\lambda}^{2n} e^{jn\omega t} \tag{28}$$

Mamy:

$$\hat{\alpha}^2(t) * \hat{\alpha}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\lambda}^{3n} e^{jn\omega t} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{jn\omega t}$$

czyli (stosując oczywistą symbolikę):

$$\hat{\alpha}^3(t) = \hat{1}(t) \tag{29}$$

Niech $\hat{F}_K(t)$ będzie dowolną funkcją symboliczną. Otrzymamy:

$$\left\{\hat{1}(t) + \hat{\alpha}(t) + \hat{\alpha}^2(t)\right\} * \hat{F}_K(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[1 + \hat{\lambda}^n + \hat{\lambda}^{2n}\right] F_{kmn}\, e^{jn\omega t} =$$

$$= 3\sum_{n=1}^{\infty} \hat{F}_{km,3n}\, e^{j3n\omega t} \tag{30}$$

Szereg stojący po prawej stronie relacji (30) reprezentuje funkcję symboliczną składającą się wyłącznie z harmonicznych rzędu 3n funkcji $\hat{F}_k(t)$. Oznaczymy ją symbolem $\hat{F}_{ko}(t)$. Kładziemy także:

$$\hat{\alpha}_o(t) = \frac{1}{3}\left[\hat{1}(t) + \hat{\alpha}(t) + \hat{\alpha}^2(t)\right] \tag{31}$$

Relację (30) możemy teraz zapisać w postaci:

$$\hat{F}_{ko}(t) = \hat{\alpha}_o(t) * \hat{F}_k(t) \tag{32}$$

Definicja:

Zespół trzech funkcji symbolicznych jednoimiennych $\hat{F}_a(t)$, $\hat{F}_b(t)$ i $\hat{F}_c(t)$, gdzie wskaźniki a, b i c odnoszą się do faz układu, nazywać będziemy symetryczny względem siebie, jeżeli zachodzić będą relacje:

$$\hat{F}_a(t) = \hat{\alpha}(t) * \hat{F}_b(t) = \hat{\alpha}^2(t) * \hat{F}_c(t) \tag{33}$$

Korzystając z relacji (29) otrzymamy także:

$$\begin{aligned} \hat{F}_c(t) &= \hat{\alpha}(t) * \hat{F}_a(t) = \hat{\alpha}^2(t) * \hat{F}_b(t) \\ \hat{F}_b(t) &= \hat{\alpha}(t) * \hat{F}_c(t) = \hat{\alpha}^2(t) * \hat{F}_a(t) \end{aligned} \tag{34}$$

Niech $e_a(t)$, $e_b(t)$ i $e_c(t)$ będą funkcjami przebiegów fazowych SEM generatora trójfazowego, zasilającego układ trój- lub czteroprzewodowy. Odpowiadające im funkcje symboliczne oznaczymy odpowiednio przez $\hat{E}_a(t)$, $\hat{E}_b(t)$ i $\hat{E}_c(t)$, tzn. na przykład:

$$\hat{E}_a(t) = e_a(t) - j\,H\left\{e_a(t)\right\} \tag{35}$$

gdzie:

$$H\left\{e_a(t)\right\} = V_1\,P\,\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e_a(\tau)}{\tau - t}\,d\tau \tag{36}$$

W myśl podanej definicji generator będziemy uważali za symetryczny[x)] jeżeli spełnione będą relacje:

$$\hat{E}_a(t) = \hat{\alpha}(t) * \hat{E}_b(t) = \hat{\alpha}^2(t) * \hat{E}_c(t) \tag{37}$$

Czyli dla generatora symetrycznego, otrzymamy:

$$\frac{1}{3}\left[\hat{E}_a(t) + \hat{E}_b(t) + \hat{E}_c(t)\right] = \hat{\alpha}_o(t) * \hat{E}_a(t) = \hat{E}_{ac}(t) \tag{38}$$

Rozważmy elementarny wyidealizowany układ trójfazowy połączony w gwiazdę trójprzewodowo zasilany symetrycznym idealnym generatorem (rys. 5). Otrzymamy:

$$\hat{U}_o(t) * \left[\hat{Y}_a(t) + \hat{Y}_b(t) + \hat{Y}_c(t)\right] =$$

$$= \hat{E}_a(t) * \hat{Y}_a(t) + \hat{E}_b(t) * \hat{Y}_b(t) + \hat{E}_c(t) * \hat{Y}_c(t)$$

Stąd:

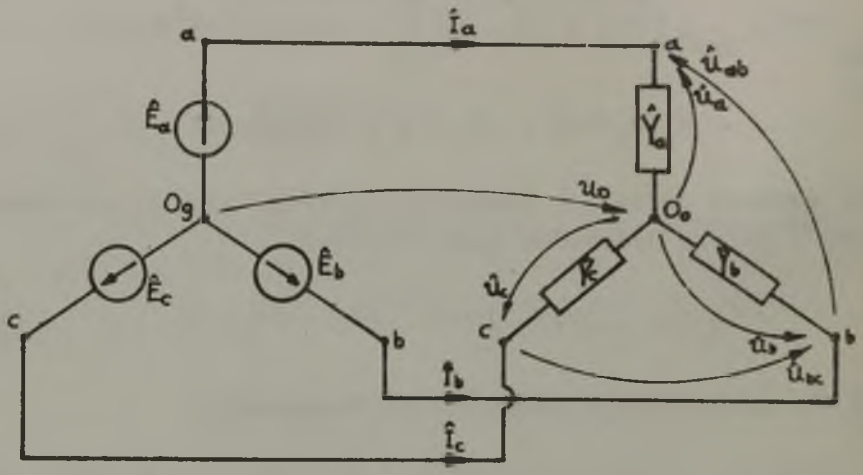
$$\hat{U}_o(t) = \left\{\sum_k \hat{Y}_k(t)\right\}^{-1} * \left\{\sum_k \hat{E}_k(t) * \hat{Y}_k(t)\right\}, \quad k = a,b,c \tag{39}$$

---

x) Ściśle biorąc generator uważamy za symetryczny, gdy relacje (37) spełnione są dla napięć fazowych generatora. W naszych rozważaniach będziemy rozpatrywali jednak tylko przypadek idealnego generatora.

gdzie: symbol $\{..\}^{-1}$ jest zdefiniowany (w mysl [1] relacji (41)) przy pomocy zależności:

$$\left\{\sum_k \hat{Y}_k(t)\right\}^{-1} * \left\{\sum_k \hat{Y}_k(t)\right\} = \hat{1}(t) \tag{40}$$



Rys. 5

Używając innej symboliki relację (39) możemy także zapisać w postaci:

$$\hat{U}_o(t) = \frac{\sum_k \hat{E}_k(t) * \hat{Y}_k(t)}{\sum_k \hat{Y}_k(t)}, \quad k = a, b, c \tag{41}$$

pamiętając jednak jaki sens matematyczny - zgodnie z relacją (40), należy przypisać znakowi dzielenia.
Gdy obciążenie układu jest zrównoważone tzn. gdy

$$\hat{Y}_a(t) = \hat{Y}_b(t) = \hat{Y}_c(t) = \hat{Y}(t)$$

otrzymamy:

$$\hat{U}_o(t) = \frac{1}{3}\,\hat{Y}^{-1}(t) * \hat{Y}(t) * 3\,\hat{\alpha}_o(t) * \hat{E}_a(t) = \hat{\alpha}_o(t) * \hat{E}_a(t) = \hat{E}_{ao}(t) \tag{42}$$

Co oznacza, że $\hat{U}_o(t)$ zawiera wyłącznie harmoniczne rzędu $3n$ zawarte w fazowej SEM generatora.

Dla prądów fazowych zachodzi:

$$\hat{I}_a(t) = \hat{U}_a(t) * \hat{Y}_a(t) = \left[\hat{E}_a(t) - \hat{U}_o(t)\right] * \hat{Y}_a(t)$$

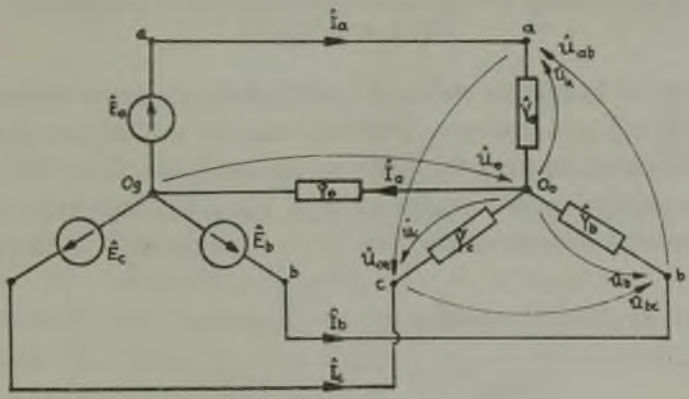
$$\hat{I}_b(t) = \hat{U}_b(t) * \hat{Y}_b(t) = \left[\hat{E}_b(t) - \hat{U}_o(t)\right] * \hat{Y}_b(t) \qquad (43)$$

$$\hat{I}_c(t) = \hat{U}_c(t) * \hat{Y}_c(t) = \left[\hat{E}_c(t) - \hat{U}_o(t)\right] * \hat{Y}_c(t)$$

gdzie: funkcje $\hat{U}_a(t)$, $\hat{U}_b(t)$ i $\hat{U}_c(t)$ reprezentują przebiegi napięć fazowych obciążenia w odpowiednich fazach.

W przypadku układu zrównoważonego zasilanego symetrycznym generatorem napięcia fazowe obciążenia oraz prądy przewodowe tworzą układy symetryczne względem siebie i, jak to widać z relacji (43) składają się z przebiegów, które nie zawierają harmonicznych rzędu $3n$. Pod tym względem inaczej zachowują się przebiegi w układzie czteroprzewodowym (por. rys. 6). Dla tego układu, otrzymamy:

$$\hat{U}_o\ t = \frac{\sum_k \hat{E}_k(t) * \hat{Y}_k(t)}{\hat{Y}_o(t) + \sum_k \hat{Y}_k(t)}, \quad k = a, b, c \qquad (44)$$



Rys. 6

Stąd, w przypadku symetrii generatora i zrównoważonego obciążenia, otrzymamy:

$$\hat{U}_o(t) = \frac{\hat{\alpha}_o(t) * \hat{E}_a(t) * \hat{Y}(t)}{\hat{Y}(t) + \frac{1}{3}\hat{Y}_o(t)}$$

$$\hat{U}_o(t) = \frac{\hat{E}_{ao}(t) * \hat{Y}(t)}{\hat{Y}(t) + \frac{1}{3}\hat{Y}_o(t)} \tag{45}$$

Relacja (45) wykazuje, że napięcie $\hat{U}_o(t)$ zawiera wyłącznie harmoniczne rzędu $3n$ lecz równocześnie także, że nie zawiera ono wszystkich harmonicznych rzędu $3n$ zawartych w zasilaniu. Fizykalnie wynika to stąd, że prąd:

$$\hat{I}_o(t) = \hat{U}_o(t) * \hat{Y}_c(t) \tag{46}$$

zawierający wyłącznie harmoniczne rzędu $3n$ przepływa przez obciążenie powodując ujawnienie się harmonicznych tego rzędu w napięciach fazowych $\hat{U}_a(t)$, $\hat{U}_b(t)$, i $\hat{U}_c(t)$ oraz w prądach przewodowych $\hat{I}_a(t)$, $\hat{I}_b(t)$ i $\hat{I}_c(t)$.

Formalnie - napięcie fazowe $\hat{U}_a(t)$ da się przedstawić przy pomocy relacji:

$$\hat{U}_a(t) = \frac{\left[\hat{E}_a(t) - \hat{E}_{ao}(t)\right] * \hat{Y}(t) + \frac{1}{3}\hat{E}_a(t) * \hat{Y}_o(t)}{\hat{Y}(t) + \frac{1}{3}\hat{Y}_o(t)} \tag{47}$$

Drugi wyraz w liczniku relacji (47) zawiera harmoniczne rzędu $3n$ SEM $\hat{E}_a(t)$ generatora. Jeżeli więc w zasilaniu układu występują harmoniczne rzędu $3n$ (co na ogół ma miejsce) to w przypadku układu czteroprzewodowego harmoniczne tego rzędu wystąpią także w napięciach fazowych obciążenia i prądach przewodowych.

Dla napięć międzyprzewodowych, otrzymamy:

$$\hat{U}_{ab}(t) = \hat{U}_a(t) - \hat{U}_b(t)$$

$$\hat{U}_{bc}(t) = \hat{U}_b(t) - \hat{U}_c(t) \tag{48}$$

$$\hat{U}_{ca}(t) = \hat{U}_c(t) - \hat{U}_a(t)$$

Stąd, w przypadku układu zrównoważonego:

$$U_{ab}^2 = \frac{1}{2T}\int_0^T \left|\hat{U}_{ab}(t)\right|^2 dt =$$

$$= \frac{1}{2T}\left\{\int_0^T \hat{U}_a(t)*\left[\hat{1}(t) - \hat{\alpha}^2(t)\right]\right\}\left\{\check{U}_a(t)*\left[\check{1}(t)-\check{\alpha}^2(t)\right]\right\} dt =$$

$$= 3\, U_a^2 - \frac{3}{T}\int_0^T \hat{\alpha}_0(t)\, \check{\varphi}_a\,(t)\, dt \tag{49}$$

gdzie: $\hat{\varphi}_a(t)$ jest współczynnikiem autokorelacji funkcji $\hat{U}_a(t)$ a całka w wyrażeniu (49) jest wielkością rzeczywistą nieujemną. Operator $\hat{\alpha}_0(t)$ zawiera wyłącznie harmoniczne rzędu $3n$. Czyli, że w przypadku gdy napięcie fazowe $\hat{U}_a(t)$ nie zawiera harmonicznych tego rzędu (układ trójprzewodowy) to całka w wyrażeniu (49) jest równa zeru i otrzymamy:

$$U_{ab} = \sqrt{3}\, U_a.$$

W układzie połączonym w trójkąt, jeżeli generator jest symetryczny (rys. 7) a obciążenie zrównoważone, przez uzwojenie generatora popłynie prąd wyrównawczy $\hat{I}_w(t)$, przy czym:

$$\hat{I}_w(t) = \hat{E}_{ao}(t) * \hat{Y}_G(t) \tag{50}$$

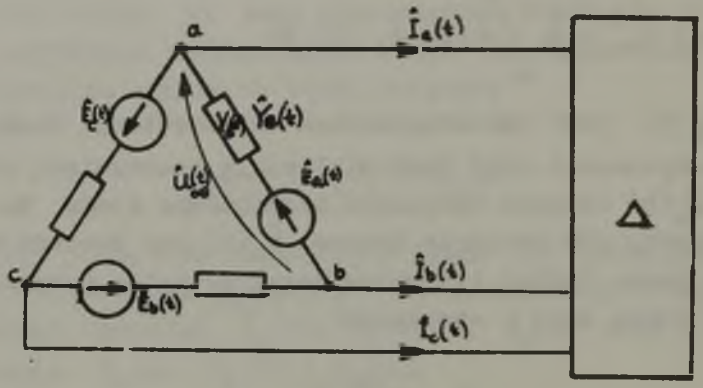
gdzie: $\hat{Y}_G(t)$ jest admitancją przejścia jednej fazy generatora, a $\hat{E}_{ao}(t)$ jest napięciem, które się na tej admitancji ujawni. Jak widać prąd wyrównawczy składa się wyłącznie z harmonicznych rzędu $3n$. Harmoniczne rzędu $3n$ nie ujawnią się w napięciach fazowych (skojarzonych) generatora. Wynika to stąd, że na przykład dla napięcia fazowego fazy a, otrzymamy:

$$\hat{E}_a(t) - \hat{E}_{ao}(t) = \hat{U}_{aG}(t) \tag{51}$$

W rozważanym układzie prądy przewodowe $\hat{I}_a(t)$, $\hat{I}_b(t)$ i $\hat{I}_c(t)$ tworzą układ symetryczny. Stąd, na podstawie I prawa Kirchoffa zachodzi:

$$\frac{1}{3}\left[\hat{I}_a(t) + \hat{I}_b(t) + \hat{I}_c(t)\right] = \hat{\alpha}_o(t) * \hat{I}_a(t) = 0 \qquad (52)$$

Czyli, że prądy przewodowe także nie zawierają harmonicznych rzędu 3n.



Rys. 7

4. <u>Zastosowanie metody składowych symetrycznych</u>

Załóżmy, że dane są trzy funkcje symboliczne $\hat{F}_a(t)$, $\hat{F}_b(t)$ i $\hat{F}_c(t)$ reprezentujące wielkości jednoimienne odpowiednio w fazach a, b, i c układu. Ich składowe symetryczne $\hat{F}_o(t)$, $\hat{F}_1(t)$ i $\hat{F}_2(t)$ w odniesieniu do fazy "a" definiujemy przy pomocy relacji:

$$\hat{F}_o(t) = \frac{1}{3}\left[\hat{F}_a(t) + \hat{F}_b(t) + \hat{F}_c(t)\right]$$

$$\hat{F}_1(t) = \frac{1}{3}\left[\hat{F}_a(t) + \hat{\lambda}\,\hat{F}_b(t) + \hat{\lambda}^2\,\hat{F}_c(t)\right] \qquad (53)$$

$$\hat{F}_2(t) = \frac{1}{3}\left[\hat{F}_a(t) + \hat{\lambda}^2\,\hat{F}_b(t) + \hat{\lambda}\hat{F}_c(t)\right]$$

gdzie: jak uprzednio

$$\hat{\lambda} = e^{j\frac{2}{3}\pi}$$

Aby rozważyć fizykalne znaczenie tak zdefiniowanych składowych symetrycznych załóżmy, że funkcje $\hat{F}_a(t)$, $\hat{F}_b(t)$ i $\hat{F}_c(t)$ tworzą względem siebie układ symetryczny.
Tzn. zakładamy, że:

$$\hat{F}_b(t) = \hat{\alpha}^2(t) * \hat{F}_a(t); \quad \hat{F}_c(t) = \hat{\alpha}(t) * \hat{F}_a(t)$$

Na podstawie (53) otrzymamy:

$$\hat{F}_o(t) = \hat{\alpha}_o(t) * \hat{F}_a(t) \tag{54}$$

$$\hat{F}_1(t) = \frac{1}{3}\left[\hat{1}(t) + m\hat{\lambda}\hat{\alpha}^2(t) + \hat{\lambda}^2\hat{\alpha}(t)\right] * \hat{F}_a(t) \tag{55}$$

$$\hat{F}_2(t) = \frac{1}{3}\left[\hat{1}(t) + \hat{\lambda}^2\hat{\alpha}^2(t) + \hat{\lambda}\hat{\alpha}(t)\right] * \hat{F}_a(t) \tag{56}$$

Z relacji (54) (por. (32)) widać, że:

$$\hat{F}_o(t) = \hat{F}_{ao}(t) \tag{57}$$

tzn., że $\hat{F}_o(t)$ jest funkcją symboliczną zawierającą wyłączenie harmoniczne rzędu $3n$ funkcji $\hat{F}_a(t)$. Dla składowej $\hat{F}_1(t)$ otrzymamy:

$$\hat{F}_1(t) = \hat{F}_a(t) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3}\left[1 + \hat{\lambda}^{2n+1} + \hat{\lambda}^{n+2}\right] e^{jn\omega t} =$$

$$= \hat{F}_a(t) \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\lambda}^{n+2} \frac{1}{3}\left[1 + \hat{\lambda}^{(n-1)} + \hat{\lambda}^{2(n-1)}\right] e^{jn\omega t} \tag{58}$$

W powyższym wyrażeniu czynnik w kwadratowym nawiasie jest różny od zera wyłącznie dla harmonicznych rzędu $3n + 1$. Wynika stąd, że składowa $\hat{F}_1(t)$ zawiera wyłącznie harmoniczne tego

rzędu funkcji symbolicznej $\hat{F}_a(t)$. Podobnie - dla składowej $\hat{F}_2(t)$ otrzymamy:

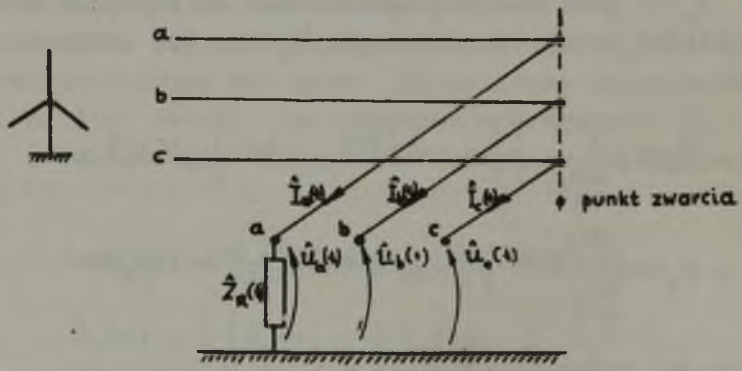
$$\hat{F}_2(t) = \hat{F}_a(t) * \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3}\left[1 + \hat{\lambda}^{(n+1)} + \hat{\lambda}^{2(n+1)}\right] e^{jn\omega t} \tag{59}$$

Z relacji (59) widać, że czynnik w kwadratowym nawiasie jest różny od zera wyłącznie dla harmonicznych rzędu 3 n-1. Stąd wynika, że $\hat{F}_2(t)$ zawiera wyłącznie harmoniczne tego rzędu funkcji $\hat{F}_a(t)$.

Powracając do przypadku ogólnego łatwo sprawdzić, że zachodzą relacje:

$$\begin{aligned} \hat{F}_a(t) &= \hat{F}_o(t) + \hat{F}_1(t) + \hat{F}_2(t) \\ \hat{F}_b(t) &= \hat{F}_o(t) + \hat{\lambda}^2 F_1(t) + \hat{\lambda}\hat{F}_2(t) \\ \hat{F}_c(t) &= \hat{F}_o(t) + \hat{\lambda}\,\hat{F}_1(t) + \hat{\lambda}^2\,\hat{F}_2(t) \end{aligned} \tag{60}$$

Przykład: Rozważmy zwarcie doziemne fazy "a" przez impedancję $\hat{Z}_R(t)$ przy uziemionym punkcie zerowym zasilania (rys. 8).



Rys. 8

Zakładamy:

(I) że SEM zasilania tworzą układ symetryczny, i że przed wystąpieniem zwarcia układ był zrównoważony,

(II) że znana jest zastępcza SEM $\hat{E}_a(t)$ oraz impedancje przejścia obwodu zwarciowego.

Impedancje przejścia obwodu zwarciowego dla poszczególnych składowych symetrycznych definiujemy przy pomocy relacji:

$$\hat{Z}_k(t) = \left\{\hat{I}_k(t)\right\}^{-1} * \hat{U}_k(t); \qquad k = 0,\ 1,\ 2 \tag{61}$$

(odnośnie symboliki por. (40)):

Równania warunkowe układu w miejscu zwarcia mają postać:

$$\begin{gathered} \hat{I}_b(t) = \hat{I}_c(t) = 0, \qquad \hat{I}_a(t) = \hat{I}_z(t) \\ \hat{U}_a(t) = \hat{Z}_R(t) * \hat{I}_a(t) \end{gathered} \tag{62}$$

Na podstawie (62) i (53) otrzymamy:

$$\begin{gathered} \hat{I}_o(t) = \hat{I}_1(t) = \hat{I}_2(t) = \frac{1}{3}\,\hat{I}_z(t) \\ \hat{U}_o(t) + \hat{U}_1(t) + \hat{U}_2(t) = \hat{U}_a(t) = \hat{Z}_R(t)\ \ \hat{I}_a(t) \end{gathered} \tag{63}$$

Czyli:

$$\hat{U}_o(t) + \hat{U}_1(t) + \hat{U}_2(t) = \hat{I}_o(t) * 3\hat{Z}_R(t) = \hat{I}_1(t) * 3\hat{Z}_R(t) = \hat{I}_2(t) * 3\hat{Z}_R(t) \tag{64}$$

Dla schematów zastępczych poszczególnych składowych symetrycznych otrzymamy:

$$\begin{aligned} \hat{U}_o(t) &= \hat{E}_{Go}(t) - \hat{Z}_o(t) * \hat{I}_o(t) - 3\hat{Z}_R(t) * \hat{I}_o(t) \\ \hat{U}_1(t) &= \hat{E}_{G1}(t) - \hat{Z}_1(t) * \hat{I}_1(t) - 3\hat{Z}_R(t) * \hat{I}_1(t) \\ \hat{U}_2(t) &= \hat{E}_{G2}(t) - \hat{Z}_2(t) * \hat{I}_2(t) - 3\hat{Z}_R(t) * \hat{I}_2(t) \end{aligned} \tag{65}$$

przy czym (por. (58) i (59)):

$$\hat{E}_{G1}(t) = \hat{E}_G(t) * \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\lambda}^{n+2} \frac{1}{3} \left[1 + \hat{\lambda}^{(n-1)} + \hat{\lambda}^{2(n-1)}\right] e^{jn\omega t} \tag{66}$$

$$\hat{E}_{G2}(t) = \hat{E}_G(t) * \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3} \left[1 + \hat{\lambda}^{(n+1)} + \hat{\lambda}^{2(n+1)}\right] e^{jn\omega t} \tag{67}$$

Prąd zwarcia:

$$\hat{I}_z(t) = \frac{3 \cdot \hat{E}_G(t)}{\hat{Z}_0(t) + \hat{Z}_1(t) + \hat{Z}_2(t) + 3\hat{Z}_R(t)} \tag{68}$$

(Symbol dzielenia należy interpretować tak samo jak w wyrażeniu (41)). Znając prąd zwarcia $\hat{I}_z(t)$ możemy łatwo obliczyć składowe symetryczne układu napięć fazowych w miejscu zwarcia (por. (65)) a przy ich pomocy oraz relacji (60) także napięcia fazowe w tym miejscu.

Rękopis złożono w redakcji we wrześniu 1966 r.

LITERATURA

[1] Nowomiejski Z.: Uogólniona metoda symboliczna. Zeszyty Naukowe Pol. Sl. "Elektryka" z. 20.

[2] Nowomiejski Z.: Moc i energia elektryczna w układach elektrycznych o dowolnych ustalonych przebiegach. Zeszyty Naukowe Pol. Śl. "Elektryka" z. 15.

[3] Osiowski J.: Zarys rachunku operatorowego. WNT, Warszawa 1965 r.

ПРИМЕНЕНИЕ ОБОБЩЕННОГО СИМВОЛИЧЕСКОГО МЕТОДА
ДЛЯ АНАЛИЗА ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ И ТРЕХФАЗНЫХ СИСТЕМ

Р е з ю м е

В работе применяется - введенный автором, обобщенный символический метод для анализа четырехполюсников и трехфазных систем с деформированными процессами. В особенности выведены уравнения четырехполюсника в новом виде и использовано их для вычисления коэффицента мощности системы, состоящей из четырехполюсника и приемника. Констатировано, что коэффициент этот зависит от коэффициента автокорреляции напряжения, выступающего на зажимах приемника, а не зависит именно от напряжения. Во второй части работы автором применяется обобщенный символический метод для анализа трехфазных систем с деформированными процессами, а также приводится обобщенное применение метода симметричных составляющих для таких систем.

APPLIANCE OF THE GENERALIZED SYMBOLIC METHOD
FOR THE FOUR-POLES AND 3- PHASE - SYSTEMS ANALYSIS

S u m m a r y

In this paper is applied introduced by the author the generalized symbolic method for the analysis of the four - poles and 3- phase systems with the deformed transients.
Particulary are derived four - poles equations in the new form and utilized for the calculation of the power factor of the system composed of four - poles and loading. It is pointed out that this factor is dependent from the factor of the autocorelation of the voltage occured on the clamps of the receiver and is independent from the only voltage. In the second part

of this paper the author has applied the generalized symbolic method for the analysis of the 3- phase systems with the deformed transients and has generalized the applying of the method of the sequence components for such systems.