ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1967
Seria: ELEKTRYKA z. 22 Nr kol. 182

MAGDALENA UMIŃSKA-BORTLICZEK
Katedra Elektrotechniki Teoretycznej

O WŁASNOŚCIACH TRANSFORMACYJNYCH PEWNEGO TYPU RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH NIELINIOWYCH, cz. I

Streszczenie. Opracowanie zawiera analizę istnienia i jednoznaczności rozwiązania równania różniczkowego

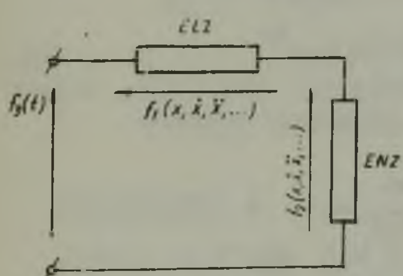
$$f_1(x,\dot{x},\ddot{x},\dots) + f_2(x,\dot{x},\ddot{x},\dots) = f_3(t) \qquad (1)$$

Równanie tego typu opisuje pewną klasę zastępczych układów elektrycznych przedstawionych w postaci blokowej na rys. 1 oraz rys. 2.

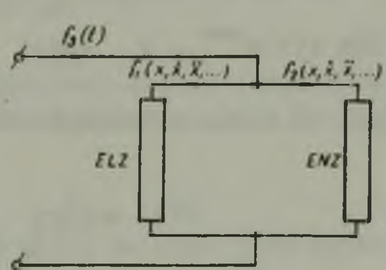
Na podstawie przeprowadzonych dowodów twierdzeń I, II, III wykazano, że przy pewnych ograniczeniach dla funkcji $f_2(x,\dot{x},\ddot{x},\dots)$ oraz $f_3(t)$ równanie (1) jest transformowalne wraz z rozwiązaniem według prostego i odwrotnego przekształcenia Laplace'a.

1. Sformułowanie problemu

Pewne zagadnienia spotykane w elektrotechnice obwodów nieliniowych można przedstawić w postaci prostego zastępczego układu szeregowego (rys. 1) lub równoległego (rys. 2),



Rys. 1



Rys. 2

gdzie:

ELZ – element liniowy zastępczy, pasywny,
ENZ – element nieliniowy zastępczy, pasywny,
$f_3(t)$– funkcja zmiennej rzeczywistej reprezentująca element aktywny obwodu zastępczego.

Obwody takie można opisać równaniem różniczkowym nieliniowym (r.r.n.) o postaci:

$$f_1(x,\dot{x},\ddot{x},\ldots) + f_2(x,\dot{x},\ddot{x},\ldots) = f_3(t) \qquad (1)$$

gdzie:

$x(t)$ jest zmienną zależną zmiennej rzeczywistej t,
$f_1(x,\dot{x},\ddot{x},\ldots)$ jest liniową funkcją $x(t)$,
$f_2(x,\dot{x},\ddot{x},\ldots)$ jest nieliniową funkcją $x(t)$,
$f_3(t)$ jest funkcją zmiennej rzeczywistej.

Udowodnimy, że przy pewnych ograniczeniach co do charakteru funkcji nieliniowej f_2 oraz funkcji wymuszającej f_3 rozwiązanie równania (1) istnieje, jest jednoznaczne oraz analityczne. Na tej podstawie będzie można stwierdzić, że równanie (1) jest transformowalne wg przekształcenia Laplace'a $\alpha\{\}$ a otrzymane tą drogą rozwiązanie operatorowe można odtworzyć na płaszczyźnie zmiennej rzeczywistej przez zastosowanie transformacji odwrotnej Laplace'a $\alpha^{-1}\{\}$.

Wykażemy, że konieczne są następujące ograniczenia:

1) Odpowiedź impulsowa $y(t)$ części liniowej r.r.n (1) $f_1(x,\dot{x},\ddot{x},\ldots)$ spełnia warunki następujące:

$$\lim_{t\to\infty} y(t)e^{-at} = 0 \quad \text{czyli} \quad |y(t)| \leqslant k.e^{bt} \qquad (2)$$

gdzie: k,b,a – rzeczywiste dla $t \geqslant 0$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{Br} \frac{e^{st}}{z(s)}\, ds$$

$z(s)$ – operatorowa impedancja ELZ.

2)

2) Część nieliniowa r.r.n (1) $f_2(x,\dot{x},\ddot{x},\ldots)$ spełnia zmodyfikowany warunek Lipschitza o postaci:

$$\left|f_2\{v(t)\} - f_2\{w(t)\}\right| < M\, e^{-at}\left|v(t) - w(t)\right| \quad (3)$$

dla M, a rzeczywistych oraz $t \geqslant 0$.

3) Funkcja wymuszająca $f_3(t)$ jest funkcją lokalnie całkowalną, majoryzowaną przez funkcję wykładniczą;

$$|f_3(t)| \leqslant M. e^{qt} \quad (4)$$

dla M, q rzeczywistych $t \geqslant 0$.

2. Dowód na istnienie i jednoznaczność rozwiązania równania r.n. (1).

Posłużmy się metodą Picarda, w myśl której kolejnymi przybliżeniami rozwiązania są:

$$X_o(t) = \int_0^t f_3(t)\, y(t-\tau)d\tau$$

$$X_1(t) = x_o(t) - \int_0^t f_2\left\{x_o(\tau)\right\}\, y(t-\tau)\, d\tau$$

$$X_n(t) = x_o(t) - \int_0^t f_2\left\{x_{n-1}(\tau)\right\} y(t-\tau)\, d\tau$$

gdzie: $y(t)$ jest odpowiedzią liniowej części r.r.n (1) na funkcję impulsową, spełniającą warunek (2).

Twierdzenie I

Jeżeli istnieje $\lim\limits_{n\to\infty} X_n(t) = x(t)$; to $x(t)$ jest rozwiązaniem r.r.n. (1)

1^{o} sprawdzimy, czy ciąg $\{x_n\}$ jest zbieżny:

$$x_{n+1}(t) = x_o(t) - \int_0^t f_2\{x_n(\tau)\}y\,(t-\tau)\,d\tau$$

$$x_n(t) = x_o(t) - \int_0^t f_2\{x_{n-1}(\tau)\}y(t-\tau)\,d\tau$$

$$x_{n+1}(t) - x_n(t) = \int_0^t f_2\{x_{n-1}(\tau) - x_n(\tau)\}y(t-\tau)\,d\tau$$

Zachodzi:

$$|x_{n+1}(t) - x_n(t)| \leqslant \int_0^t |f_2\{x_{n-1}(\tau) - x_n(\tau)\}|\,|y(t-\tau)|\,d\tau$$

a ponieważ:

$$\lim_{t\to\infty} y(t)e^{-at} = 0 \qquad \text{to:} \quad |y(t)| < k.e^{bt}$$

dla $t > 0$ $k > 0$ $b \in N$ będzie:

$$|x_{n+1}(t) - x_n(t)| \leqslant K.e^{bt} \int_0^t |f_2\{x_{n-1}(\tau) - x_n(\tau)\}|\, e^{-b\tau}\,d\tau$$

Jeżeli $f_2(x,\dot{x},\ddot{x},\ldots)$ będzie spełniała zmodyfikowany warunek Lipschitza o postaci (3) dla każdego $t \geqslant 0$,
to:

$$|x_{n+1}(t) - x_n(t)| < M.K.e^{bt} \int_0^t |x_{n-1}(\tau) - x_n(\tau)|\, e^{-(a+b)\tau}\,d\tau$$

i możemy wybrać takie $q \geqslant 0$ rzeczywiste, że dla każdego $t > 0$ będzie zachodzić:

$$\max |x_{n-1}(t) - x_n(t)| \leqslant q \tag{6}$$

Możemy powiedzieć, że $\{x_n(t)\}$ jest zbieżny jeżeli $f_2(x,\dot{x},\ddot{x},..)$ spełnia zmodyfikowany warunek Lipschitza oraz udowodnić metodą indukcji, że istnieje $\lim_{n\to\infty} \left| \int_0^t f_2\left\{x_{n-1}(\tau)\right\} y(t-\tau)\, d\tau \right|$:

Dla $n = 1$:

$$|x_2(t) - x_1(t)| < M.K.e^{bt} \int_0^t e^{-(a+b)\tau} |x_0(\tau) - x_1(\tau)|\, d\tau =$$

$$= \frac{M.K}{b+a} e^{bt}\ ,\ q\ .\ \left|1 - e^{-\beta t}\right| \quad \text{gdzie} \quad \beta = (b + a)$$

dla $n = 2$:

$$|x_3(t) - x_2(t)| < M.K.e^{bt} \int_0^t e^{-(a+b)\tau} |x_1(\tau) - x_2(\tau)|\, d\tau =$$

$$= \left[\frac{M.K}{\beta}\right]^2 . \frac{e^{2bt}}{2} . q\left[1-2\, e^{-\beta t} + e^{-2\beta t}\right]$$

dla $n = k$:

$$\left|x_{k+1}(t) - x_k(t)\right| \leq \left[\frac{M.K\ e^{bt}}{\beta}\right]^k . \frac{q}{k!}\left[1-e^{-\beta t}\right]^k$$

a więc dla danego $\varepsilon > 0$ istnieje $N > 0$ takie, że dla wszystkich $n > N$ oraz $\beta > 0$

$$|x_{n+1}(t) - x_n(t)| < \varepsilon$$

Oszacujemy teraz granicę $\lim_{n\to\infty} X_n(t) = x(t)$

$$X_n(t) = x_0(t) + \sum_{r=1}^{n-1} \left[x_{r+1}(t) - x_r(t)\right]$$

$$\lim_{n\to\infty} |x_n(t)-x_0(t)| \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n-1} \left[x_{r+1}(t)-x_r(t)\right] \leq \lim_{n\to\infty} q\ .\ \frac{s^n}{n!}$$

ponieważ

$$\left\{q\,\frac{s^n}{n!}\right\}$$

jest szeregiem potęgowym, granica jego istnieje (cbdo); a z twierdzenia Weierstrassa szereg:

$$\sum_{r=1}^{n-1}\left|x_{r+1}(t) - x_r(t)\right| \tag{8}$$

jest szeregiem jednostajnie zbieżnym.

2^0 Jeżeli zatem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t)$ istnieje, to spełnia równanie (1),

a więc:

$$\left|x(t) - x_n(t)\right| < \varepsilon \tag{9}$$

gdzie: ε dowolnie małe, a $x_n(t)$ jest całką r.r.n. (1). Dane jest arbitralnie $\varepsilon > 0$. Wykażemy, że dla wszystkich $n > N$ oraz wszystkich $t \geqslant 0$ jest spełnione.

$$\left|x(t) - \left[x_o(t) - \int_o^t f_2\left\{x_n(\tau)\right\}y(t-\tau)d\tau\right]\right| < \varepsilon \tag{10}$$

Pisząc tożsamość:

$$x(t)-\left[x_o(t)-\int_o^t f_2\left\{x_n(\tau)\right\}y(t-\tau)d\tau\right] \equiv x(t)-\left[x_o(t)-\int_o^t f_2\left\{x_n(\tau)\right\}y(t-\tau)d\tau\right]$$

oraz uwzględniając wyrażenia (2) mamy:

$$x_n(t) + x(t) - \left[x_o(t) - \int_o^t f_2\left\{x_n(\tau)\right\}y(t-\tau)d\tau = \right.$$

$$= x(t)-\left[\int_o^t f_2\left\{x_n(\tau)\right\}y(t-\tau)d\tau - \int_o^t f_2\left\{x_{n-1}(\tau)\right\}y(t-\tau)\,d\tau\right]$$

$$x(t) -\left[x_o(t)-\int_o^t f_2\left\{x_n(\tau)\right\}y(t-\tau)d\tau\right] = x(t)-x_n(t)-[A] \tag{11}$$

gdzie:

$$[A] = \left[\int_0^t f_2\{x_n(\tau)\}\, y(t-\tau)d\tau - \int_0^t f_2\{x_{n-1}(\tau)\} y(t-\tau)d\tau \right]$$

Zachodzi:

$$\left| x(t) - x_0(t) - \int_0^t f_2\{x_n(\tau)\}\, y(t-\tau)\, d\tau \right| \leqslant \left| x(t) - x_n(t) + \right.$$
$$\left. + \int_0^t \left| f_2\{x_n(t)\} - f_2\{x_{n-1}(\tau)\} \right| \left| y(t-\tau) \right| d\tau \right. \qquad (12)$$

lecz:

$$\int_0^t \left| f_2\{x_n(\tau)\} - f_2\{x_{n-1}(\tau)\} \right| \left| y(t-\tau) \right| d\tau \leqslant q \left[\frac{M \cdot K}{b} \right]^n \frac{\left[1-e^{-bt}\right]^n}{n!} < \frac{\varepsilon}{2}$$

dla wszystkich $t \geqslant 0$

więc teraz:

$$\left| x(t) - \left[x_0(t) - \int_0^t f_2\{x_n(\tau)\} y(t-\tau)d\tau \right] \right| \leqslant \left| x(t) - x_n(t) \right| + \frac{\varepsilon}{2} \qquad (13)$$

oraz:

$$\lim_{n \to \infty} \left| x(t) - x_{n+1}(t) \right| \leqslant \lim_{n \to \infty} \left| x(t) - x_n(t) \right| + \frac{\varepsilon}{2} \qquad (14)$$

Na podstawie (8) możemy przewidzieć, że dla równania (1)

$$\left| x(t) - x_n(t) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{dla} \qquad t \geqslant 0 \qquad (15)$$

Twierdzenie II

Jeżeli rozwiązanie równania (1) istnieje jako

$$x(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t),$$

to jest ono rozwiązaniem jednoznacznym.
Zakładamy, że istnieje inne rozwiązanie równania (1) i że jest nim

$$x^*(t) \tag{16}$$

Dowodzimy:

$$x_n^*(t) = x_o^*(t) - \int_0^t f_2\left\{x_{n-1}^*(\tau)\right\} y(t-\tau)d\tau$$

$$\left|x^*(t) - x_{n+1}^*(t)\right| < \varepsilon$$

Ponieważ dla równania (1) zachodzi (10), możemy napisać:

$$\begin{aligned} x^*(t) &= x_o^*(t) - \int_0^t f_2\left\{x_n^*(\tau)\right\} y(t-\tau)\, d\tau \\ x(t) &= x_o(t) - \int_0^t f_2\left\{x_n(\tau)\right\} y(t-\tau)\, d\tau \end{aligned} \tag{17}$$

gdzie: $x_o^*(t) \equiv x_o(t)$ bo rozwiązanie części liniowej równania (1) jest jednoznaczne.

Po odjęciu stronami otrzymujemy

$$\left[x^*(t) - x(t)\right] = \int_0^t \left[f_2\left\{x_n^*(\tau)\right\} - f_2\left\{x_n(\tau)\right\}\right] \cdot y(t-\tau)\, d\tau \tag{18}$$

Uwzględniając warunek Lipschitza (5) mamy:

$$\int_0^t \left[f_2\{x_n(\tau)\} - f_2\{x_n^*(\tau)\}\right] y(t-\tau)d\tau < M \int_c^t e^{-a\tau} |x_n(\tau) - x^*(\tau)| |y(t-\tau)| d\tau \quad (19)$$

Jeżeli

$$|x_n(t) - x_n^*(t)|_{max} < q^*$$

to na podstawie twierdzenia o indukcji otrzymujemy jak poprzednio:

$$|x^*(t) - x(t)| < M \int_0^t e^{-a\tau} |x_n^*(\tau) - x_n(\tau)| . K e^{b(t-\tau)} d\tau$$

$$\leqslant q^* \left[\frac{M.K.}{\beta}\right]^n . \frac{\left[1-e^{-\beta t}\right]^n}{n!} . e^{-btn} = q^* \frac{s^n}{n!} \quad (20)$$

gdzie:

$$\frac{MK}{\beta}\left[1 - e^{-\beta t}\right] e^{-bt} = s$$

Dla $\quad t > 0 \quad \lim_{n \to \infty} q^* \frac{s^n}{n!} \to 0$

a ponieważ z założenia (16)

$$|x^*(t) - x(t)| \neq 0$$

musi zachodzić

$$x^*(t) \equiv x(t) \quad (21)$$

3. Dowód analityczności rozwiazania r.r.n. (1)

Twierdzenie III

Jeżeli kolejne całki równania (1) są typu wykładniczego oraz istnieje granica $x(t)$, to rozwiązanie r.r. jest funkcją analityczną w przedziale zbieżności szeregu Taylora $x(t)$.

Istnienie granicy dla r.r.n.(1): $x(t)$, zostało poprzednio udowodnione (9). Wystarczy zatem udowodnić, że kolejne całki równania (1) są typu wykładniczego:

1^{o} jeżeli $f_3(t)$ jest funkcją lokalnie całkowalną, majoryzowaną przez funkcję wykładniczą (4) oraz odpowiedź impulsowa liniowej części układu spełnia warunek (2):

$$|y(t)| \leqslant K.e^{bt}$$

to:

$$|f_3(t).\ y(t)| = |f_3(t)||y(t)| < M.K.\ e^{(q+b)t} = \Lambda e^{at} \tag{22}$$

i całka

$$x_o(t) = \int_0^t f_3(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau$$

jest typu wykładniczego.

2^{o} Podobnie:

$$x_1(t) = x_o(t) - \int_0^t f_2\{x_o(\tau)\}\, y(t-\tau) d\tau$$

jest typu wykładniczego, jeżeli:

$$|f_2\{x_o(t)\}| < N\, e^{\eta t} \tag{23}$$

to wtedy:

$$\left|f_2\left\{x_0(t)\right\}\cdot y(t)\right| = \left|f_2\left\{x_0(t)\right\}\right|\left|y(t)\right| < N.K\ e^{(b+\eta)t}$$

oraz

$$\left|\int_0^t f_2\left\{x_0(\tau)\right\}y(\tau)d\tau\right| < \int_0^t N\ K\ e^{(b+\eta)\tau}d\tau = \Omega e^{(b+\eta)t} \tag{24}$$

a także ponieważ suma funkcji typu wykładniczego jest funkcją typu wykładniczego:

$$x_0(t) - \int_0^t f_2\left\{x_0(\tau)\right\}y(t-\tau)d\tau = \Lambda^{*} e^{\lambda^{*}t} - \Omega e^{\Omega^{*}t} = Z\ e^{\zeta t} \tag{25}$$

3^{0} W rezultacie

$$x_n(t) = x_0(t) - \int_0^t f_2\left\{x_{n-1}(\tau)\right\}y(t-\tau)d\tau$$

jest funkcją typu wykładniczego na podstawie 1^{0} oraz 2^{0} i rozumowania indukcyjnego, jeżeli tylko zachodzi (25).

4. Wnioski

Na podstawie dowiedzionych twierdzeń, możemy powiedzieć, że r.r.n. jest transformowalne wg Laplace'a wraz z rozwiązaniami i wszystkimi jego kolejnymi przybliżeniami, jeżeli to równanie spełnia następujące warunki:

1) r.r.n. musi się dać przedstawić w postaci (1),
2) zastępcza funkcja wymuszająca $f_3(t)$ jest typu wykładniczego,
3) część nieliniowa r.r.n. (1) musi spełniać zmodyfikowany warunek Lipschitza (3) oraz $f_2\left\{x_0(t)\right\} < M.e^{qt}$ (26) dla każdego $t > 0$ przy M, q rzeczywistych,

4) część liniowa r.r.n. jest dowolnego rzędu pochodnej.

Teraz możemy napisać:

$$x_0(t) = \int_0^t f_3(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau = f_3(t) * y(t)$$

$$x_1(t) = x_0(t) - \int_0^t f_2\{x_0(\tau)\} y(t-\tau) d\tau = x_0(t) - f_2\{x_0(t)\} * y(t) \qquad (27)$$

- -

$$x_n(t) = x_0(t) - \int_0^t f_2\{x_{n-1}(\tau)\}\, y(t-\tau) d\tau = x_0(t) - f_2\{x_{n-1}(t)\} * y(t)$$

Na podstawie warunków 1^o, 2^o, 3^o możemy do równań (27) zastosować twierdzenie Borela o transformacie splotu i otrzymamy:

$$\alpha\{x_0(t)\} = \alpha\{f_3(t) * y(t)\} = F_3(s).Y(s) = X_0(s)$$

$$\alpha\{x_1(t)\} = \alpha\{x_0(t)\} - \alpha\{f_2\{x_0(t)\} * y(t)\} = X_0(s) - F_2\{x_0(s)\} Y(s) \qquad (28)$$

$$\alpha\{x_n(t)\} = X_0(s) - F_2\{x_{n-1}(s)\}.\ Y(s) = X_n(s)$$

oraz:

$$\lim_{s \to 0} X_n(s) = X(s) \qquad (29)$$

$$X(s) \mathrel{\hat{=}} x(t)$$

lub

$$X_n(s) \mathrel{\hat{=}} x_n(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{Br} \left[F_3(s) - F_2\{x_{n-1}(s)\}\right] Y(s) e^{st}\, ds \qquad (30)$$

oraz $$\lim_{t \to \infty} x_n(t) = x(t)$$

5. Przykłady zastosowania

Równania różniczkowe nieliniowe opisujące pewną klasę układów elektrycznych spełniają wymagania postawione dla równania (1) ograniczonego warunkami (29). Są to układy elektryczne w których:

1° zastępcza funkcja wymuszająca jest typu wykładniczego

$[1(t).U]$; $[1(t)U \sin t]$; $[1(t).U(t)] \leq Me^{qt}$ M, q rzeczyw.

$[1(t).I]$; $[1(t)I \sin t]$; $[1(t).I(t)] \leq Me^{qt}$

2° układ elektryczny da się sprowadzić przez kombinację łączeniowe, do układu zastępczego jak na rys. 1 lub 2,

3° funkcja $f_2(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots)$ opisująca w układzie elektrycznym własności ENZ spełnia warunek 3° z (26). Warunek ten spełniają w obwodach elektrycznych elementy, których charakterystyki prądowo-napięciowe są aproksymowalne z dostateczną dokładności przez wielomiany potęgowe, lub funkcje wykładnicze.

Uwagi końcowe

Przytoczona powyżej metoda pozwala na algebraizację równań różniczkowych nieliniowych o postaci (1), co może skutecznie prowadzić do analizy jakościowej układów nieliniowych.

Rękopis złożono w redakcji w styczniu 1967 r.

LITERATURA

[1] Cholewicki T.: Metody obliczania obwodów elektrycznych. PWN 1960.

[2] Osiowski J.: Zarys rachunku operatorowego. WNT/1965.

[3] Saaty L.: Nonlinear mathematies., Mc Graw Hill 1965.

О ТРАНСФОРМАЦИОННЫХ СВОЙСТВАХ НЕКОТОРОГО ТИПА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ч. I

Р е з ю м е

Статья содержит анализ наличия и однозначности решения дифференциального уравнения

$$f_1(x,\dot{x},\ddot{x}, \ldots) + f_2(x,\dot{x},\ddot{x},\ldots) = f_3(t) \tag{1}$$

Этого типа уравнение описывает некоторый класс электрических схем замещения в виде структурных схем (рис. 1 и рис. 2).

На основании проведенных доказательств теоремы I, II, III доказано, что при некоторых ограничениях для функции $f_2(x,\dot{x},\ddot{x}, \ldots)$ а также $f_3(t)$ уравнение (I) является трансформовальным вместе с решением согласно прямому и обратному преобразованию Лаплас'а.

TRANSFORMATION PROPERTIES OF THE CERAIN TYPE OF THE NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS (PART ONE)

S u m m a r y

The paper deals with the analysis of the existence and univocalness of the differential equation solution

$$f_1(x,\dot{x},\ddot{x},\ldots) + f_2(x,\dot{x},\ddot{x},\ldots) = f_3(t) \tag{1}$$

Equation of this type is describing certain class of the equivalent electrical systems, presented in the block form on the fig. 1 and fig. 2.

Based on the experimented proofs of the statements I,II,III it is pointed out, that at the certain limits for the fuction $f_2(x,\dot{x},\ddot{x},\ldots)$ and $f_3(t)$ the equation (1) is tranformable with the solution after the simple and inverse Laplace transformation.