ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1969
Seria: ELEKTRYKA z. 24 Nr kol. 238

MAREK BRODZKI
Katedra Elektrotechniki
Teoretycznej

O WSPÓŁZMIENNICZOŚCI RÓWNAŃ OPISUJĄCYCH SIECI ZŁOŻONE O PEWNYCH SYMETRIACH

Streszczenie. W pracy tej do opisu sieci używane są współrzędne powiązane transformacjami centroafinicznymi lub unitarnymi. Równania sieci sformułowane są dla tych współrzędnych w sposób współzmienniczy. Jest to przeszczepienie zasady współzmienniczości, występującej w teorii względności i elektrodynamice, na grunt teorii sieci trójfazowych oraz innych, wykazujących pewne symetrie.

1. Współrzędne i ich transformacje

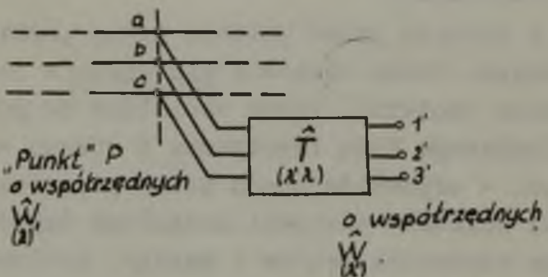
Rozpatrzmy zbiór sieci, z których każda posiada pewną podsieć o trójfazowej budowie gałęzi. Jakie elementy występują w jej gałęziach jest nam na razie obojętne. Niech wszystkie te podsieci pod względem topologicznym będą identyczne i różnią się tylko prądami i napięciami w odpowiadających sobie gałęziach 3-fazowych, przyjmującymi wszelkie wartości zespolone (chodzi tu o wartości symboliczne skuteczne prądów i napięć, ponieważ rozpatrujemy przebiegi sinusoidalne dla stanów ustalonych w liniowych siciach o parametrach skupionych). Otóż rozważając odpowiadające sobie gałęzie zbioru podsieci otrzymamy zbiór punktów (każdej gałęzi odpowiada punkt); każdemu z nich przyporządkowane są wzajemnie jednoznacznie z zachowaniem ciągłości po trzy współrzędne. W ten sposób otrzymujemy układ współrzędnych. Powtarzając wymienioną operację wprowadzenia układu współrzędnych, otrzymujemy tyle zbiorów punktów ile jest gałęzi w danej podsieci, które wzajemnie pokrywając się tworzą jeden. Dla całego zbioru będzie więc obowiązywał jeden układ współrzędnych. Współrzędne punktu prądowe, czy napięciowe (na razie wybór ten jest obojętny) układu λ będziemy zapisywali w postaci macierzy kolumnowej $\hat{W}_{(\lambda)}$. Wprowadźmy następnie dowolną transformację liniową tych współrzędnych o macierzy $\hat{T}_{(\lambda',\lambda)}$ współczynników zespolonych i wyrazach stałych równych zeru. Załóżmy ponadto, że jakobian tej macierzy $\det \hat{T}_{(\lambda',\lambda)}$ spełnia warunek:

$$\det \hat{T}_{(\lambda'\lambda)} \neq 0, \quad \hat{T}_{(\lambda'\lambda)} = \left[\hat{a}_{\lambda'\lambda}\right] \quad . \tag{1}$$

Wówczas otrzymamy inny układ współrzędnych o macierzy kolumnowej $\hat{W}_{(\lambda')}$. Zachodzi wtedy:

$$\hat{W}_{(\lambda')} = \hat{T}_{(\lambda'\lambda)}\hat{W}_{(\lambda)} . \tag{2}$$

Schematowo można interpretować to przekształcenie w ten sposób:



Np.: $\lambda \in (a,b,c)$

$\lambda' \in (1,2,3)$

Rys. 1

Kółeczka oznaczają tutaj pomiar prądu lub napięcia, blok - transformację $\hat{T}_{(\lambda'\lambda)}$. (Istnienie przewodu zerowego jest na razie obojętne, bowiem transformacji podlegają i tak tylko trzy wielkości). Wyżej wymienione transformacje można interpretować również jako przekształcenie punktowo-punktowe (porównaj [1], str. 24). Odpowiadałoby to np. przejściu od sieci fazowej do symetrycznej. Tak określone transformacje współrzędnych, jak łatwo się przekonać, spełniają warunki grupowości podane przez S. Gołąba [1], str. 21, 22, ponieważ istnieje transformacja odwrotna do podanej i superpozycja dwu transformacji oraz posiadają one również poprzednio wymienione własności.

Z punktu widzenia niektórych dalszych rozważań celowe będzie zacieśnić podaną grupę do transformacji unitarnych, tzn. spełniających relację:

$$\check{T}^{-1}_{(t)} = \hat{T}. \tag{3}$$

Indeks t na dole oznacza tu macierz transponowaną. Przykładem takiej transformacji jest przekształcenie współrzędnych symetrycznych na fazowe lub odwrotnie przy pomocy macierzy $\hat{A}$:

$$\hat{A} = \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{S}, \tag{4}$$

$$\hat{S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \hat{\alpha}^2 & \hat{\alpha} \\ 1 & \hat{\alpha} & \hat{\alpha}^2 \end{bmatrix}, \tag{5}$$

gdzie zachodzi:

$$\hat{\alpha} = e^{j\frac{2\pi}{3}}. \tag{6}$$

Mamy:

$$\hat{A}_{(t)} = \hat{A}, \tag{7}$$

$$\hat{A}^{-1}_{(t)} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \hat{\alpha} & \hat{\alpha}^2 \\ 1 & \hat{\alpha}^2 & \hat{\alpha} \end{bmatrix}, \tag{8}$$

oraz:

$$\check{A} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \hat{\alpha} & \hat{\alpha}^2 \\ 1 & \hat{\alpha}^2 & \hat{\alpha} \end{bmatrix}, \tag{9}$$

bowiem:

$$\check{\alpha} = \hat{\alpha}^2, \tag{10}$$

$$\check{\alpha}^2 = \hat{\alpha}.$$

Skąd otrzymujemy warunek unitarności macierzy $\hat{A}$.

Macierz $\hat{S}$, natomiast nie ma już tej własności. Będziemy używali w szczególności transformacji:

$$\hat{W}_{(f)} = \hat{S}\,\hat{W}_{(s)} \tag{11}$$

oraz:

$$\hat{W}_{(f)} = \hat{A}\,\hat{W}_{(s')}, \tag{12}$$

gdzie

$$\hat{W}_{(f)} = \begin{bmatrix} \hat{W}_a \\ \hat{W}_b \\ \hat{W}_o \end{bmatrix}, \quad \hat{W}_{(s)} = \begin{bmatrix} \hat{W}_0 \\ \hat{W}_1 \\ \hat{W}_2 \end{bmatrix}, \quad \hat{W}_{(s')} = \begin{bmatrix} \hat{W}_{0'} \\ \hat{W}_1 \\ \hat{W}_2 \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Macierz $\hat{W}_{(f)}$ jest macierzą współrzędnych fazowych, macierze $\hat{W}_{(s)}$ oraz $\hat{W}_{(s')}$ - symetrycznych. Łatwo wykazać, że przekształcenia unitarne spełniają warunki grupowości. Niech zachodzi:

$$\hat{U}_{(t)}^{-1} = \hat{U}, \qquad \text{oraz:} \qquad \hat{V} = \hat{U}^{-1}, \tag{14}$$

to mamy:

$$\check{V}_{(t)}^{-1} = \check{U}_{(t)} = \hat{U}^{-1} = \hat{V}; \tag{15}$$

oraz:

$$\hat{W} = \hat{U}\,\hat{V}, \tag{16}$$

to:

$$ {}_{(t)}\check{W}^{-1} = {}_{(t)}\check{U}^{-1}\,{}_{(t)}\check{V}^{-1} = \hat{U}\,\hat{V} = \hat{W}, \qquad \text{c.b.d.o.} \tag{17}$$

Oczywiście powyższe rozważania odnoszą się do macierzy dowolnych stopni. W przyszłości będziemy posługiwać się również macierzą ${}_{(3n)}\hat{A}$:

$$ {}_{(3n)}\hat{A} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \hat{\alpha}^2 & \hat{\alpha} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \hat{\alpha} & \hat{\alpha}^2 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \hat{\alpha}^2 & \hat{\alpha} \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \hat{\alpha} & \hat{\alpha}^2 \end{bmatrix}, \tag{18}$$

posiadającą 3n wierszy i 3n kolumn, o podanej budowie.
Mamy:

$$ {}_{(3n)}\hat{A}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \hat{\alpha} & \hat{\alpha}^2 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \hat{\alpha}^2 & \hat{\alpha} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \hat{\alpha} & \hat{\alpha}^2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \alpha^2 & \hat{\alpha} \end{bmatrix}. \tag{19}$$

Dalej łatwo zauważyć, że jest spełniony warunek unitarności tej macierzy. Ogólnie zachodzi związek:

$$ {}_{(n)}\hat{A}\;{}_{(n)}\hat{A}^{-1} = {}_{(n)}\hat{A}\;{}_{(n)(t)}\check{A} = E, \tag{20}$$

$$ {}_{(n)}\hat{A} = \left[\hat{a}_{\acute{\lambda}\lambda}\right], \tag{21}$$

gdzie:

"E" oznacza macierz jednostkową.

Można go zapisać inaczej:

$$\hat{a}_{\chi\lambda}\ \underset{(P)}{\breve{a}}_{\lambda\mu'} = \delta_{\chi\mu'}, \qquad \underset{(P)}{\breve{a}}_{\lambda\mu'} = \breve{a}_{\mu'\lambda}. \tag{22}$$

Uwaga: występuje tu sumowanie podług wskaźnika λ . Umawiamy się na przyszłość sumować względem wskaźników powtarzających się.

Mamy n_z:

$$n_z = \frac{n^2 - n}{2} + n, \tag{23}$$

niezależnych związków (22).

Więc liczba swobodnych współczynników n_s wynosi:

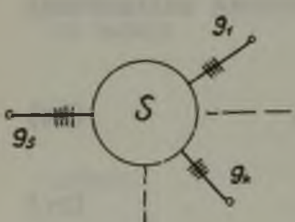
$$n_s = n^2 - n_z = \binom{n}{2}. \tag{24}$$

Grupa przekształceń unitarnych jest więc $\binom{n}{2}$ parametrową grupą. Jeśli $(n = 3)$, to $(n_s = 3)$.

Możemy zatem mówić o przestrzeni będącej zbiorem uprzednio zdefiniowanych punktów, opartej o grupę transformacji liniowych bez stałego współczynnika (centroafiniczną), bądę też o grupę transformacji unitarnych (ściślej centryczno-unitarnych).

2. Charakterystyka elementów sieci

Rozpatrywana sieć będzie mogła składać się między innymi z elementów zawierających s 4-przewodowych wejść (zakończeń gałęzi g_k), przedstawionych schematem:



$k \leqslant s.$

Rys. 2

Jest to układ należący do wielobiegunnika 4s zaciskowego.

Przez (4s) wielobiegunnik rozumiemy tu zbiór układów równoważnych, to jest o tych samych prądach w odpowiadających sobie gałęziach wejściowych przy tych samych dowolnych napięciach zasilających je.

Relacja ta, jak łatwo się przekonać, posiada własności zwrotności, symetrii i przechodniości; czyli jest faktycznie równoważnością w sensie logicznym. Klasy abstrakcji tej relacji w zbiorze układów (4s) wielozaciskowych są właśnie (4s) wielobiegunnikami. Na przedstawiony układ narzucimy tu warunki pewnych symetrii (wyrażone we współrzędnych fazowych):

$$\hat{J}_{g_k}^{\alpha(i)} = \hat{I}_{g_k}^{\alpha(i)} + \hat{Y}_{g_k g_l}^{|\alpha(i)|} \hat{U}_{g_l}^{\alpha(i)}, \qquad \begin{matrix} \alpha,\beta \in (a,b,c), \\ i \in (0,\ 1,\ 2), \\ k,\ l \in (1,\dots,s), \end{matrix} \tag{25}$$

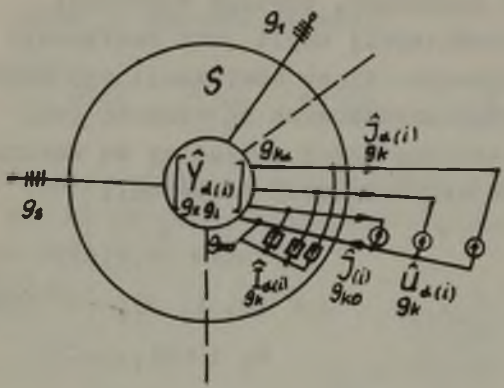
gdzie:

$$\begin{bmatrix} \hat{W}_{g_k}^{a(o)} \\ \hat{W}_{g_k}^{b(o)} \\ \hat{W}_{g_k}^{c(o)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{W}_{g_k}^{o} \\ \hat{W}_{g_k}^{o} \\ \hat{W}_{g_k}^{o} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \hat{W}_{g_k}^{a(1)} \\ \hat{W}_{g_k}^{b(1)} \\ \hat{W}_{g_k}^{c(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{W}_{g_k}^{1} \\ \hat{a}^2\hat{W}_{g_k}^{1} \\ \hat{a}\hat{W}_{g_k}^{1} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \hat{W}_{g_k}^{a(2)} \\ \hat{W}_{g_k}^{b(2)} \\ \hat{W}_{g_k}^{c(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{W}_{g_k}^{2} \\ \hat{a}\hat{W}_{g_k}^{2} \\ \hat{a}^2\hat{W}_{g_k}^{2} \end{bmatrix}. \tag{26}$$

Uwagi: Oznaczenie $\hat{W}_{g_k}^{\alpha(i)}$ stosowane jest w sensie poprzednio wyjaśnionym. Ujęcie wskaźnika w dwie pionowe kreski lub nawiasy oznacza zakaz sumowania podług niego.

$$\hat{Y}_{g_k g_l}^{\alpha(i)} = \hat{Y}_{g_k g_l}^{\beta(i)} = \hat{Y}_{g_k g_l}^{i}. \tag{27}$$

Równania (25-27) można interpretować schematowo:



Układ fazowy.

Rys. 3

Następnie umawiamy się nie przykładać żadnych źródeł pomiędzy dowolne przewody dwu różnych gałęzi g_k, g_l (tzn. dla tych źródeł zachodzi relacja: $\hat{I} = 0$). Z prawa zachowania ładunku elektrycznego widać, że zachodzi drugi warunek symetrii:

$$\underset{g_k}{\hat{J}_{a(i)}} + \underset{g_k}{\hat{J}_{b(i)}} + \underset{g_k}{\hat{J}_{c(i)}} = \underset{g_{ko}}{\hat{J}_{(i)}}. \tag{28}$$

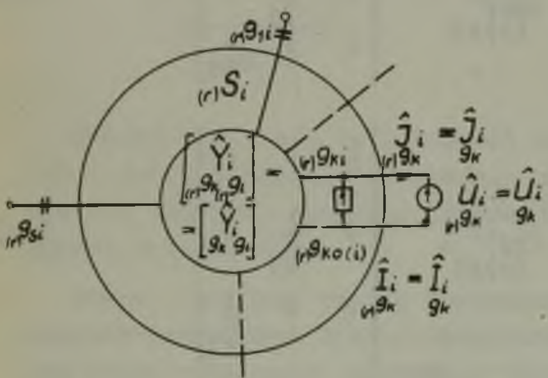
Oczywiście mamy: $(\underset{g_{ko}}{\hat{J}_{(1)}} = \underset{g_{ko}}{\hat{J}_{(2)}} = 0)$.

Relację powyższą można również spełnić, żądając by napięcia przykładane pomiędzy przewody zerowe nie miały wpływu na prądy gałęziowe. Np. przez zastosowanie we wszystkich gałęziach wejściowych transformatorów idealnych separujących galwanicznie, o przekładni 1:1. Widać jednak, że było by to żądanie zbyt krępujące.

Z równań (26), (27) wnioskujemy, że dla każdego wskaźnika $i \in (0, 1, 2)$ równania (25) są dla kolejnych wskaźników $\alpha \in (a, b, c)$ zależne i można je zastąpić jednym:

$$\underset{g_l}{\hat{J}_i} = \underset{g_l}{\hat{I}_i} + \underset{g_l g_l}{\hat{Y}_{|i|}} \underset{g_l}{\hat{U}_i}. \tag{29}$$

Równanie (29) wyraża istotę twierdzenia o redukcji ilości faz przez podobieństwo dla wielobiegunnika symetrycznego. Stanowi ono przejście od układu fazowego, opisanego przy pomocy współrzędnych fazowych o trzech symetriach $\begin{bmatrix}\hat{W}_{a(i)}\\ \hat{W}_{b(i)}\\ \hat{W}_{c(i)}\end{bmatrix}$ (równania (25-27), rys. 3), do trzech niezależnych od siebie układów (niesprzężonych magnetycznie ani galwanicznie), opisanych kolejno współrzędnymi symetrycznymi (rżwnanie (29), rys. 4). Układy te zestawione razem wg gałęzi ${}_{(r)}g_{ki}$ ze wspólnymi przewodami ${}_{(r)}g_{ko(i)}$ stanowią jeden symetryczny.



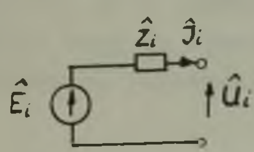
Układy zredukowane.

$i \in (0, 1, 2)$.

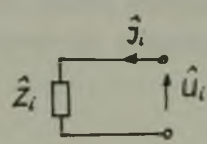
Rys. 4

W części dalszych rozważań ograniczymy się do 3-fazowych elementów sieci takich jak generator, odbiornik, transformator, linia. Ich schematy dla współrzędnych symetrycznych są następujące:

Generator. Odbiornik



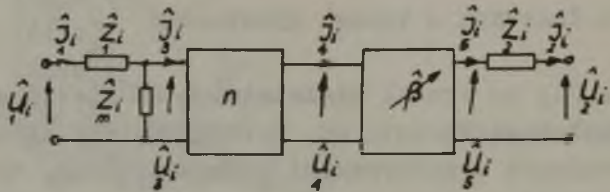
Rys. 5



Rys. 6

Zwykle: $(\hat{E}_0 = \hat{E}_2 = 0)$.

Transformator.



Rys. 7

$$\hat{U}_{(s)4} = (nu)^{P}_{(s)43}\,\hat{U}_{(s)3}, \quad (nu)^{P}_{(s)43} = \begin{bmatrix} n_{43} & 0 & 0 \\ 0 & n_{43} & 0 \\ 0 & 0 & n_{43} \end{bmatrix}. \tag{30}$$

$$\hat{J}_{(s)4} = (nJ)^{P}_{(s)43}\,\hat{J}_{(s)3}, \quad (nJ)^{P}_{(s)43} = \begin{bmatrix} \frac{1}{n_{43}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{n_{43}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{n_{43}} \end{bmatrix}. \tag{31}$$

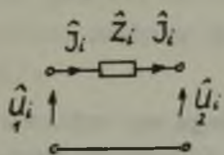
$$\hat{U}_{(s)5} = \hat{P}_{(s)54}\,\hat{U}_{(s)4}, \quad \hat{P}_{(s)54} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{\beta}_{54} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{\beta}_{54} \end{bmatrix}. \tag{32}$$

$$\hat{J}_{(s)5} = \hat{P}_{(s)54}\,\hat{J}_{(s)4}. \tag{33}$$

Łatwo zauważyć, że kolejność elementów n i $\dot{\beta}$ jest dowolna (przemienność mnożenia odpowiednich macierzy) oraz, że zachodzi dla nich prawo zachowania mocy symbolicznej:

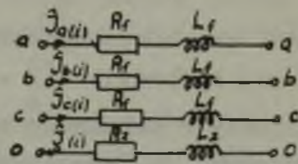
$$\underset{3}{\hat{S}}_i = \underset{3}{\hat{U}}_{|i|}\,\underset{3}{\check{J}}_i = \underset{4}{\hat{S}} = \underset{4}{\hat{U}}_{|i|}\,\underset{4}{\check{J}}_i = \underset{5}{\hat{S}} = \underset{5}{\hat{U}}_{|i|}\,\underset{5}{\check{J}}_i. \tag{34}$$

Linia



Rys. 8

Schemat fazowy linii.

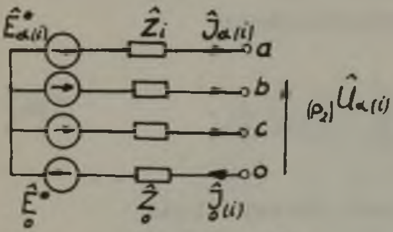


Rys. 9

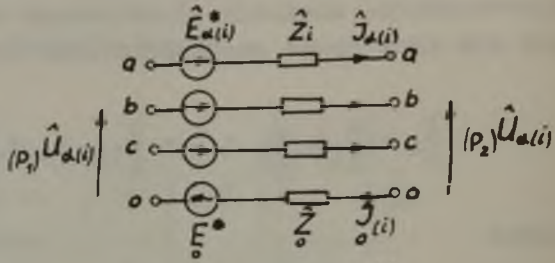
Uwaga: Dla linii taki schemat można wyprowadzić, korzystając z przedstawionych poprzednio ogólnych rozważań na podstawie jej schematu fazowego (patrz [2], str. 265-270), gdy zachodzi związek (28).

Uwaga: Pomijamy tu dla uproszczenia gałęzie poprzeczne dotyczące upływności linii. Uwzględnienie ich nie stanowiłoby, jak dalej zobaczymy, istotnych trudności. Poza tym schemat ten jest słuszny przy założeniu, że nie interesujemy się napięciami wzdłuż przewodów a, b, c, 0, a tylko napięciami fazowymi $\underset{1}{\hat{U}}_i$, $\underset{2}{\hat{U}}_i$.

Nie będziemy tu zajmowali się wyprowadzaniem wyżej wymienionych schematów ani nierównościami, jakie zachodzą, pomiędzy poszczególnymi ich impedancjami, bowiem jest to temat specjalny należący do teorii maszyn elektrycznych. Zauważmy tylko jeszcze, że w podanym węższym kontekście można wprowadzić oprócz tego do sieci fazowej dowolne elementy o następujących schematach fazowych:



Rys. 10



Rys. 11

Gwiazdki oznaczają orientację SEM zgodną z prądem.
Zazwyczaj zachodzi: $(\hat{E}_0 = 0)$.

Elementy o schemacie typu przedstawionego na rys. 10 nazwiemy końcowymi, o schemacie jak na rys. 11 - przelotowymi. Wspólnie nazwiemy je elementami prostymi. Dla obu typów zażądamy by były spełnione uprzednio sformułowane warunki symetrii. Oprócz tego w części dalszych rozważań ograniczymy SEM oraz impedancje w typie podłóżnym pewnym warunkiem. Natomiast w ujęciu ogólnym budowa sieci wewnątrz danego elementu symetrycznego nie podlega takim ograniczeniom, byle wykazywał on na zewnątrz wymienioną symetrię.

Przedstawione tu układy 4s zaciskowe symetryczne lub też ich proste elementy symetryczne będą stanowić składniki sieci symetrycznych. Wszelkie elementy nie spełniające podanych warunków symetrii będziemy zaliczać do sieci asymetrycznych. Tak dla jednych jak dla drugich, zakładamy, że są opisywane równaniami liniowymi. Dla elementów symetrycznych - równaniami (25) czy wynikającym z nich równaniem (29). Liniowość ta jest związana z liniowością charakterystyki magnesowania ferromagnetyków, występujących w sieciach oraz dla maszyn wirujących z założeniem niezależności ich obrotów od obciążenia.

3. Budowa sieci całkowitej i ogólne założenia dotyczące jej

Czynimy następujące założenia dotyczące sieci całkowitej.

1. Sieć da się rozłożyć na skończoną liczbę podsieci symetrycznych i asymetrycznych (jeśli interesujemy się ich budową

wewnętrzną, to zakładamy, że każda złożona jest ze skończonej liczby elementów).

2. Zarówno podsieci symetryczne (s.s.) jak i asymetryczne (s.a.) składają się z elementów liniowych (opisywanych równaniami liniowymi dla wartości symbolicznych skutecznych prądów i napięć).

3. Jeśli s.s. oraz s.a. traktowane będą jako punkty (węzły) a bezimpedancyjne 4-przewodowe połączenia pomiędzy nimi jako boki (gałęzie), wówczas cała sieć tworzy drzewo. (Jest to taki zbiór gałęzi, że jeśli usuniemy z niego choćby jedną, to nie potrafimy wówczas połączyć 2 dowolnych węzłów pozostałymi gałęziami).

4. Niech występują oczka (4-przewodowe) w podsieciach fazowych symetrycznych, złożonych z elementów prostych 4-przewodowych. Zbiór tych oczek danej podsieci dzielimy na podzbiory, w ten sposób, że jeden taki podzbiór łączy się z sąsiednim przy pomocy pewnego podzbioru gałęzi tworzących drzewo, albo jest w ogóle izolowany. Wymienione oczka nie zawierają gałęzi z transformatorami. Dla wszystkich gałęzi ${}_{(1)}g$ 1-tego podzbioru oczek zachodzi dla składowej zerowej warunek:

$$\frac{\hat{Z}_{{}_{(1)}g^{\alpha}(o)}}{\hat{Z}_{{}_{(1)}g_{o}}} = {}_{(1)}\hat{P}\,\frac{{}^{3}\hat{E}^{\bullet}_{{}_{(1)}g^{\alpha}(o)}}{\hat{E}^{\bullet}_{{}_{(1)}g_{o}}} \qquad \alpha\epsilon(a,\ b,\ c), \qquad {}_{(1)}\hat{P} \neq 0,\infty. \tag{35}$$

$$\hat{Z}_{{}_{(1)}g^{\alpha}(o)} = \hat{Z}_{{}_{(1)}g^{o}}, \qquad \hat{E}^{\bullet}_{{}_{(1)}g^{\alpha}(o)} = \hat{E}^{\bullet}_{{}_{(1)}g^{o}}$$

(Ilustracja założenia 4 podana jest na rys. 12).

Założenie pierwsze zostało już omówione, drugie jest oczywiste (jeśli chcemy operować równaniami sieci typu algebraicznego). Trzecie wiąże się z symetryczną pracą podsieci symetrycznej w całej sieci złożonej. Można wówczas przeprowadzić powierzchnię przecinającą zawsze tylko jedną wybraną gałąź czteroprzewodową, ponieważ sieć (w zrozumieniu pkt. 3) nie tworzy oczek; następnie zastosować prawo zachowania ładunku elektrycznego i otrzymać związek (28). Sens założenia 4 zrozumiemy później, rozpatrując zagadnienie symetrii pracy dla wnętrza danej podsieci odnośnie składowej zerowej. Od założeń 3 i 4 będziemy mogli uwolnić się w przyszłości, modyfikując postępowanie dla składowej zerowej.

Uwagi: Do podsieci symetrycznych nie można dołączać żadnych elementów asymetrycznych; odwrotnie można, co jest często ze względów praktyki obliczeń wygodne. Nie wyłączamy z równań przypadku, kiedy w ogóle nie ma podsieci symetrycznych lub asymetrycznych.

4. Współzmienniczość równań opisujących sieć

Rozważajmy na razie sieć symetryczną złożoną z elementów prostych, spełniających 4 założenia wymienione w pkt. 3. (Elementy proste uzupełniamy tu ewentualnie przesuwnikami fazowymi i przekładniami transformatorów). Równania wyrażające prawa Kirchhoffa oraz prawo Ohma będą zawierały po trzy zmienne, dotyczące trzech przewodów, bowiem wymienione równania dla przewodu zerowego będą w wyniku naszych 4 założeń zależne od równań dotyczących pozostałych 3 przewodów. Wykażemy to później. Na skutek tego, dla każdej gałęzi 4-przewodowej zachodzić będzie relacja (28) (w fazowym układzie współrzędnych). Będzie można wówczas operować schematami elementów prostych o przewodzie zerowym bezimpedancyjnym (patrz rys. 8, dotyczący linii rozpatrywanej dla współrzędnych symetrycznych). Powyższe przejście do układu o przewodzie zerowym bezimpedancyjnym jest konieczne do współzmienniczego wyrażenia II prawa Kirchhoffa.

Zorientujmy 3-przewodowe gałęzie w stosunku do węzłów oraz oczek przy pomocy symboli a_{gu}, $(u)^{b}_{gk}$ (orientacja jest jednakowa dla 3 przewodów każdej gałęzi).

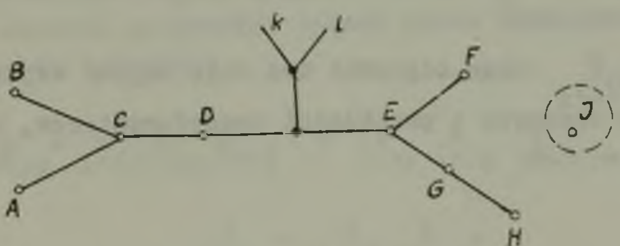
$$a_{gu} = \begin{cases} 1 & \text{jeśli prąd gałęzi } g \text{ płynie od węzła } u, \\ -1 & \text{jeśli prąd gałęzi } g \text{ płynie od węzła } u, \\ 0 & \text{jeśli gałąź } g \text{ nie kontaktuje z węłem } u. \end{cases} \tag{36}$$

$$(u)^{b}_{gk} = \begin{cases} 1 & \text{jeśli napięcie gałęzi } g \text{ jest zorient. zgodnie z ocz. } k, \\ -1 & \text{jeśli napięcie gałęzi } g \text{ jest zorient. przeciw. do ocz. } k, \\ 0 & \text{jeśli gałąź } g \text{ nie należy do oczka } k. \end{cases} \tag{37}$$

Z rozpatrywanej sieci symetrycznej wyodrębniamy, jak w założeniu 4, podzbiory oczek złożonych z 3-przewodowych gałęzi (powstałe z podzbiorów wymienionych w nim przez odrzucenie przewodu zerowego i zastąpienie go bezimpedancyjnym). Dzielimy je na części izolowane (o ile trzeba). Następnie dla podzbiorów pozostałych w danej części tworzymy drzewo uzupełniając je jedną gałęzią końcową.

Równania wyrażające I prawo Kirchhoffa tworzymy dla wszystkich węzłów drzewa, a II dla oczek powstałych z gałęzi uzupełnionego drzewa i dodatkowo po jednej gałęzi pozostałej dla każdego oczka. Jeśli występuje w naszej sieci tylko jedna gałąź końcowa (prąd w niej równy jest zeru), to II prawo Kirchhoffa wyrażamy dla niej wprowadzając jako napięcie niewiadome, napięcie pomiędzy dowolną trójprzewodową gałęzią części a bezimpedancyjnym przewodem zerowym. Jak widać niektóre oczka (drugiego rodzaju - dotyczące gałęzi końcowych) uzupełnione są bezimpedancyjnym przewodem zerowym.

Przedstawiona tu metoda pozwala na skonstruowanie niezależnych równań wyrażających I i II prawo Kirchhoffa w liczbie potrzebnej do rozwiązania rozpatrywanej sieci. Nie został tu przeprowadzony formalnie topologiczny dowód tego. Jest on prosty ale zanadto rozwlekły. Podana jest jedynie przykładowo ilustracja opisywanej sieci na rys. 12.



Rys. 12

Kółka puste oznaczają tu podzbiory oczek, wraz z dołączonymi gałęziami końcowymi. Kółka pełne - węzły drzewa łączącego podzbiory oczek. Kreski - 3-przewodowe gałęzie ("k", "l" - końcowe). Zaznaczony też jest podzbiór J izolowany.

Wyraźmy teraz I prawo Kirchhoffa w układzie współrzędnych λ:

$$a_{gu} \hat{J}_{(\lambda)g} = 0 \tag{38}$$

Będzie ono słuszne w tej samej postaci we wszystkich innych dopuszczalnych (λ'), (tzn. powiązanych transformacjami zespolonymi centroafinicznymi lub unitarnymi), bowiem:

$$a_{gu} \hat{J}_{(\lambda')g} = a_{gu} \hat{T}_{(\lambda'\lambda)} \hat{J}_{(\lambda)g} = \hat{T}_{(\lambda'\lambda)} a_{gu} \hat{J}_{(\lambda)g} = 0, \tag{39}$$

(na mocy przemienności mnożenia macierzy i stałej) i stąd:

$$a_{gu} \hat{J}_{(\lambda')g} = 0. \tag{40}$$

To samo dotyczy współzmienniczości równania opisującego II prawo Kirchhoffa:

$$(u)^{b}_{gk} \, {}_{(w)}\hat{U}_{(\lambda)g} = 0, \tag{41}$$

gdzie:

$${}_{(w)}\hat{U}_{(\lambda)g} = \hat{U}_{(\lambda)g} - \hat{E}^{*}_{(\lambda)g},$$

(patrz rys. 10, 11).

Napięcia ${}_{(w)}\hat{U}_{(\lambda)g}$ mogą odgrywać też rolę napięć wejściowych przesuwników fazowych i przekładni transformatorów, o ile występują one w s.s.

Uwagi: Współczynniki a_{gu} i $\underset{(u)}{b}_{gk}$ są ze względu na transformację $\underset{(\lambda'\lambda)}{T}$ skalarami. Przyporządkowanie dopuszczalnym układom współrzędnych macierzy $\underset{(\lambda)g}{\hat{J}}$ czy też $\underset{(\lambda)g}{\hat{U}}$ można interpretować również jako wprowadzenie wektorów $\underset{g}{\hat{J}}$ lub $\underset{g}{\hat{U}}$, ponieważ przy transformacjach centroafinicznych i tym bardziej unitarnych znika różnica pomiędzy wzorami transformacyjnymi dotyczącymi współrzędnych punktu i wektora kontrawariantnego.

Wyraźmy teraz w układzie współrzędnych λ prawo Ohma:

$$\underset{(\lambda)g}{\hat{U}} = \underset{(\lambda)|g|}{\hat{Z}} \; \underset{(\lambda)g}{\hat{J}} . \tag{42}$$

(Dotyczy ono jednego punktu naszej przestrzeni, przy założeniu, że wektory $\underset{g}{\hat{J}}$, $\underset{g}{\hat{U}}$ traktować będziemy jako zaczepione, a nie jako swobodne; natomiast prawa Kirchhoffa dotyczą wielu).

Macierz $\underset{(\lambda)g}{\hat{Z}}$ jest macierzą impedancji w układzie współrzędnych λ o stopniu (3,3). Będziemy o niej zakładali, że jest nieosobliwa.

Dla układu λ' będziemy mieli:

$$\underset{(\lambda')g}{\hat{U}} = \underset{(\lambda')|g|}{\hat{Z}} \; \underset{(\lambda')g}{\hat{J}} \tag{43}$$

gdzie:

$$\underset{(\lambda')g}{\hat{Z}} = \underset{(\lambda'\lambda)}{\hat{T}} \; \underset{(\lambda)g}{\hat{Z}} \; \underset{(\lambda'\lambda)}{\hat{T}^{-1}} \tag{44}$$

Transformacja współrzędnych obiektu $\underset{g}{\hat{Z}}$, jak łatwo wykazać, spełnia warunki grupowości podane przez S.Gołąba [1], str. 47-51, wobec związków:

$$\underset{(\lambda')g}{\hat{Z}} = \underset{(\lambda'\varkappa)}{\hat{T}} \; \underset{(\varkappa)g}{\hat{Z}} \; \underset{(\lambda'\varkappa)}{\hat{T}^{-1}} = \underset{(\lambda'\lambda)}{\hat{T}} \; \underset{(\lambda)g}{\hat{Z}} \; \underset{(\lambda'\lambda)}{\hat{T}^{-1}} , \tag{45}$$

$$\underset{(\lambda'\lambda)}{\hat{T}} = \underset{(\lambda'\varkappa)}{\hat{T}} \; \underset{(\varkappa\lambda)}{\hat{T}} , \tag{46}$$

oraz relacji (1).

Transformacja (44) posiada charakter tensorowy. Teraz możemy wnioskować o współzmienniczości związku (42) oraz o tym, że dotyczy on współrzędnych obiektów geometrycznych - wektorów i tensorów.

W przypadku szczególnym będziemy mieli podaną macierz impedancji jakiegoś elementu prostego s.s. we współrzędnych symetrycznych, która jest diagnolana (dotyczy elementów bez sprzężeń magnetycznych):

$$\underset{(s)g}{\hat{Z}} = \begin{bmatrix} \underset{g}{\hat{Z}}_{0} & 0 & 0 \\ 0 & \underset{g}{\hat{Z}}_{1} & 0 \\ 0 & 0 & \underset{g}{\hat{Z}}_{2} \end{bmatrix}. \tag{47}$$

We współrzędnych fazowych otrzymamy wówczas macierz:

$$\underset{(f)g}{\hat{Z}} = \hat{S}\,\underset{(s)g}{\hat{Z}}\,\hat{S}^{-1}, \tag{48}$$

gdzie:

$$\underset{(f)g}{\hat{Z}} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} \underset{g}{\hat{Z}}_{a} & \underset{g}{\hat{Z}}_{c} & \underset{g}{\hat{Z}}_{b} \\ \underset{g}{\hat{Z}}_{b} & \underset{g}{\hat{Z}}_{a} & \underset{g}{\hat{Z}}_{c} \\ \underset{g}{\hat{Z}}_{c} & \underset{g}{\hat{Z}}_{b} & \underset{g}{\hat{Z}}_{a} \end{bmatrix} \tag{49}$$

oraz:

$$\begin{aligned} \underset{g}{\hat{Z}}_{a} &= \underset{g}{\hat{Z}}_{0} + \underset{g}{\hat{Z}}_{1} + \underset{g}{\hat{Z}}_{2} \\ \underset{g}{\hat{Z}}_{b} &= \underset{g}{\hat{Z}}_{0} + \hat{\alpha}^{2}\,\underset{g}{\hat{Z}}_{1} + \hat{\alpha}\,\underset{g}{\hat{Z}}_{2} \\ \underset{g}{\hat{Z}}_{c} &= \underset{g}{\hat{Z}}_{0} + \hat{\alpha}\,\underset{g}{\hat{Z}}_{1} + \hat{\alpha}^{2}\,\underset{g}{\hat{Z}}_{2}. \end{aligned} \tag{50}$$

Widać, że jeśli byłoby:

$$\hat{Z}_{g^0} = \hat{Z}_{g^1} = \hat{Z}_{g^2} = \hat{Z}_{g}, \tag{51}$$

to wówczas:

$$\hat{Z}_{(f)g} = \begin{bmatrix} \hat{Z}_{g} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{Z}_{g} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{Z}_{g} \end{bmatrix}. \tag{52}$$

Związek (52) zachodziłby wtedy oczywiście dla dwu dowolnych układów współrzędnych. Wówczas w żadnym układzie współrzędnych nie występowałyby sprzężenia magnetyczne i z tego punktu widzenia układ symetryczny nie byłby uprzywilejowany (chodzi tu o prostotę obliczeń).

Prawa opisujące przesuwniki fazowe i przekładnie można wyrazić również w sposób współzmienniczy. Jeśli mamy w układzie symetrycznym dla przesuwnika fazowego relacje:

$$\hat{U}_{(s)g_2} = \hat{P}_{(s)g_2|g_1|}\,\hat{U}_{(s)g_1}, \quad \hat{J}_{(s)g_2} = \hat{P}_{(s)g_2|g_1|}\,\hat{J}_{(s)g_1}, \tag{53}$$

gdzie:

$$\hat{P}_{(s)g_2g_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{\beta}_{g_2g_1} & 0 \\ 0 & 0 & \check{\beta}_{g_2g_1} \end{bmatrix}, \tag{54}$$

to w dowolnym innym układzie współrzędnych λ, będzie:

$$ {}_{(\lambda)}\hat{U}_{g_2} = {}_{(\lambda)}\hat{P}_{g_2|g_1|}\,{}_{(\lambda)}\hat{U}_{g_1}, \qquad {}_{(\lambda)}\hat{J}_{g_2} = {}_{(\lambda)}\hat{P}_{g_2|g_1|}\,{}_{(\lambda)}\hat{J}_{g_1} \tag{55} $$

oraz macierz ${}_{(\lambda)}\hat{P}_{g_2g_1}$ będzie podlegała transformacjom tensorowym typu (44). Podobnie dla przekładni:

$$ {}_{(s)}\hat{U}_{g_4} = {}^{(nu)}_{(s)}P_{g_4|g_3|}\,{}_{(s)}\hat{U}_{g_3}, \qquad {}_{(s)}\hat{J}_{g_4} = {}^{(nJ)}_{(s)}P_{g_4|g_3|}\,{}_{(s)}\hat{J}_{g_3}, \tag{56} $$

gdzie:

$$ {}^{(nu)}_{(s)}P_{g_4g_3} = \begin{bmatrix} n_{g_4g_3} & 0 & 0 \\ 0 & n_{g_4g_3} & 0 \\ 0 & 0 & n_{g_4g_3} \end{bmatrix}, \qquad {}^{(nJ)}_{(s)}P_{g_4g_3} = \begin{bmatrix} \frac{1}{n}_{g_4g_3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{n}_{g_4g_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{n}_{g_4g_3} \end{bmatrix}. \tag{57} $$

Oczywiście będziemy tu mieli:

$$ {}^{(nu)}_{(\bar{\lambda})}P_{g_4g_3} = {}^{(nu)}_{(\lambda)}P_{g_4g_3}, \qquad {}^{(nJ)}_{(\bar{\lambda})}P_{g_4g_3} = {}^{(nJ)}_{(\lambda)}P_{g_4g_3}. \tag{58} $$

Uwaga: Łańcuchowe połączenie przekładni i przesuwnika fazowego (rys. 7) jest opisywane, jak łatwo zauważyć, również w sposób tensorowy. Kolejność występowania obu wymienionych elementów jest dla każdego z dopuszczalnych układów współrzędnych λ obojętna, ponieważ dla każdego "λ" zachodzi przemienność mnożenia ich macierzy.

Widzimy więc, że dla sieci symetrycznej złożonej z elementów prostych, potrafimy skonstruować współzmiennicze równania wyrażające jej prawa.

Zajmijmy się teraz siecią symetryczną o dowolnej wewnętrznej budowie i o s wejściach 4-przewodowych (rys. 2, 3). (Punkt będzie tu określony przez wszystkie gałęzie wejściowe i będzie posiadać w danym układzie 3s współrzędnych. Dalsze operacje wprowadzające pojęcie przestrzeni są podobne jak w pkt. 1).

Równania (29) opisujące ją można przedstawić w postaci macierzowej:

$$\underset{(s)}{\hat{J}} = \underset{(s)}{\hat{I}} + \underset{(s)}{\hat{Y}}\ \underset{(s)}{\hat{U}}, \tag{59}$$

gdzie:

$$\underset{(s)}{\hat{J}} = \begin{bmatrix} \underset{g_1}{\hat{J}_0} \\ \underset{g_1}{\hat{J}_1} \\ \underset{g_1}{\hat{J}_2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \underset{g_s}{\hat{J}_0} \\ \underset{g_s}{\hat{J}_1} \\ \underset{g_s}{\hat{J}_2} \end{bmatrix}, \quad \underset{(s)}{\hat{I}} = \begin{bmatrix} \underset{g_1}{\hat{I}_0} \\ \underset{g_1}{\hat{I}_1} \\ \underset{g_1}{\hat{I}_2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \underset{g_s}{\hat{I}_0} \\ \underset{g_s}{\hat{I}_1} \\ \underset{g_s}{\hat{I}_2} \end{bmatrix}, \quad \underset{(s)}{\hat{U}} = \begin{bmatrix} \underset{g_1}{\hat{U}_0} \\ \underset{g_1}{\hat{U}_1} \\ \underset{g_1}{\hat{U}_2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \underset{g_s}{\hat{U}_0} \\ \underset{g_s}{\hat{U}_1} \\ \underset{g_s}{\hat{U}_2} \end{bmatrix}, \quad \underset{(s)}{\hat{Y}} = \begin{bmatrix} \underset{g_1 g_1}{\hat{Y}_0} & 0 & 0 & \dots & \underset{g_1 g_s}{\hat{Y}_0} & 0 & 0 \\ 0 & \underset{g_1 g_1}{\hat{Y}_1} & 0 & \dots & 0 & \underset{g_1 g_s}{\hat{Y}_1} & 0 \\ 0 & 0 & \underset{g_1 g_1}{\hat{Y}_2} & \dots & 0 & 0 & \underset{g_1 g_s}{\hat{Y}_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \underset{g_s g_1}{\hat{Y}_0} & 0 & 0 & \dots & \underset{g_s g_s}{\hat{Y}_0} & 0 & 0 \\ 0 & \underset{g_s g_1}{\hat{Y}_1} & 0 & \dots & 0 & \underset{g_s g_s}{\hat{Y}_1} & 0 \\ 0 & 0 & \underset{g_s g_1}{\hat{Y}_2} & \dots & 0 & 0 & \underset{g_s g_s}{\hat{Y}_2} \end{bmatrix}$$

(60)

Zakładamy, że macierz $\underset{(s)}{\hat{Y}}$ jest nieosobliwa. Na podstawie przeprowadzonych już poprzednio rozważań można napisać dla dowolnego układu współrzędnych λ (w ramach przyjętych transformacji), że:

$$\underset{(\lambda)}{\hat{J}} = \underset{(\lambda)}{\hat{I}} + \underset{(\lambda)}{\hat{Y}}\ \underset{(\lambda)}{\hat{U}}, \tag{61}$$

gdzie: wielkości $\underset{(\lambda)}{\hat{J}}$, $\underset{(\lambda)}{\hat{I}}$, $\underset{(\lambda)}{\hat{U}}$ mają reguły transformacyjne typu (2), a wielkość $\underset{(\lambda)}{\hat{Y}}$ – (44). Chcąc np. wyrazić wzór (61) we współrzędnych fazowych, wystarczy we wzorach (2), (48) i (59) użyć macierzy $_{(3n)}\hat{A}$ zdefiniowanej wzorem (18). Otrzymamy wówczas uogólnienie wzorów (49), (50). Stosując do wzoru (59) dowolne transformacje unitarne zagubilibyśmy prostotę macierzy $\underset{(s)}{\hat{Y}}$ czy też $\underset{(f)}{\hat{Y}}$.

Uwaga: Trzeba tu podkreślić, że symetria rozpatrywanego wielobiegunnika wyrażająca się budową macierzy $\underset{(s)}{\hat{Y}}$ ma miejsce tylko w symetrycznym układzie współrzędnych, nie jest własnością niezmienniczą. Jeśli jest ona rozumiana jako istnienie takiej transformacji unitarnej, która sprowadza macierz $\underset{(\lambda)}{\hat{Y}}$ do postaci $\underset{(s)}{\hat{Y}}$ – to można powiedzieć, że jest ona własnością dowolnego układu współrzędnych (ze względu na dowolność "λ"). O tym, że nie zawsze istnieje taka transformacja, można się przekonać porównując liczbę jej swobodnych współczynników $n_s = \binom{3s}{2}$ z liczbą z góry zadanych (równych zeru) współczynników macierzy $\underset{(s)}{\hat{Y}}$ w układzie współrzędnych symetrycznych – $6s^2$. Otóż mamy $6s^2 > \binom{3s}{2}$ dla $s \in N$. Warunek wystarczający do spełnienia drugiej relacji symetrii podany w pkt. 2: nieprzykładanie źródeł pomiędzy zaciski różnych gałęzi wejściowych, jest określony w ten sam sposób dla każdego układu współrzędnych, bowiem zmienne $\hat{I}$ tych źródeł (prądomotorycznych) nie ulegają transformacjom.

Relacja (61) jest więc dla sieci symetrycznej jako całości, bez wnikania w jej budowę wewnętrzną, współzmienniczym sposobem wyrażenia jej praw. Jeśli chodzi o sieci symetryczne, które posiadają p gałęzi wejściowych 3-przewodowych (bez przewodów zerowych), to mamy wówczas:

$$\hat{Y}_{\substack{0 \\ g_k g_l}} = \hat{Y}_{\substack{0 \\ g_l g_k}} = 0, \quad \begin{matrix} k \in (1,\ldots, p), \\ l \in (1,\ldots, s), \end{matrix} \quad p < s. \tag{62}$$

Należy wówczas w macierzy $\hat{Y}_{(s)}$ skreślić p zerowych wierszy i kolumn i operować następnie macierzą stopnia $(3s - p, 3s - p)$, o której zakładamy, że będzie nieosobliwą. Dla sieci asymetrycznej z punktu widzenia a zacisków wejściowych postępujemy podobnie jak dla symetrycznej, tworząc w układzie współrzędnych λ równanie typu (61) o macierzy nieosobliwej $\hat{Y}_{(\lambda)}$ stopnia (a, a) (czyli rzędu a), która w układzie współrzędnych symetrycznych nie będzie już posiadała budowy określonej wzorem (60). Do obu ostatnich przypadków odnosi się również uwaga o współzmienniczości ich opisu.

Relacja typu (61) dla dowolnego wielobiegunnika może posłużyć do stworzenia nowej analitycznej definicji wielobiegunnika - obiektu: jest to przyporządkowanie obiektom geometrycznym $\hat{U}$, obiektów geometrycznych $\hat{J}$ wg relacji (61) (tzn. przy pomocy obiektów geometrycznych $\hat{I}$ oraz $\hat{Y}$ stanowiących własność wielobiegunnika zdefiniowanego w pkt. 2).

Ponieważ operujemy tu obiektami geometrycznymi takimi jak wektory i tensory, więc może wydawać się dziwne niezastosowanie symboliki tensorowej. Jest to związane z tradycyjnym zapisem macierzowym stosowanym dla składowych symetrycznych, chociaż w naszym przypadku chodzi o przyporządkowanie w pewien sposób macierzy dopuszczalnym układom współrzędnych, a nie tylko o działania na macierzach wykonywane w jednym układzie. Zastosowanie symboliki tensorowej wiąże się np. z rozróżnieniem 4 rodzajów wektorów zespolonych o regułach transformacyjnych:

$$\text{a)}\ \hat{V}^{\lambda'} = \hat{A}^{\lambda'}_{\lambda}\, \hat{V}^{\lambda}, \quad \text{b)}\ \hat{V}^{\bar{\lambda}'} = \check{A}^{\bar{\lambda}'}_{\bar{\lambda}}\, \hat{V}^{\bar{\lambda}}, \quad \text{c)}\ \dot{V}_{\lambda'} = \dot{A}^{\lambda}_{\lambda'}\, \dot{V}_{\lambda}, \quad \text{d)}\ \hat{V}_{\bar{\lambda}'} = \check{A}^{\bar{\lambda}}_{\bar{\lambda}'}\, \hat{V}_{\bar{\lambda}}, \tag{63}$$

gdzie: współczynniki są pochodnymi cząstkowymi transformacji układu współrzędnych (patrz [1], str. 271-275). W naszym przypadku w tej symbolice wzór (61) można by zapisać następująco:

$$\hat{J}^{\lambda} = \hat{I}^{\lambda} + \hat{Y}^{\lambda}{}_{\mu}\hat{U}^{\mu}, \qquad \lambda,\mu \in (1,\ldots, 3s), \tag{64}$$

lub podobnie przy użyciu wektorów kowariantnych napięcia i prądu (przyjmując, że w pewnym układzie współrzędnych λ współrzędne ko i kontrawariantne są sobie równe - w innym układzie λ' równość ta nie będzie już obowiązywać, czyli wybór wektora kowariantnego zależy tu od ~~w~~ układu współrzędnych λ). Ponieważ dla transformacji unitarnych zachodzi związek (3) zapisany teraz następująco:

$$\hat{A}^{\lambda'}_{\mu} = \hat{A}^{\mu}_{\lambda'}, \tag{65}$$

więc można identyfikować wektory o regułach transformacji (63a) i (63d) oraz (63b) i (63c). Związek (64) można wobec tego zapisać:

$$\hat{J}_{\lambda} = \hat{I}_{\lambda} + \hat{Y}_{\lambda\mu}\hat{U}^{\mu}, \qquad \begin{matrix}\mu \in (1, \ldots, 3s),\\ \lambda \in (1, \ldots, 3s),\end{matrix} \tag{66}$$

gdzie: "$\hat{Y}_{\lambda\mu}$" odgrywa rolę współrzędnych tensora Hermite'a, lub jego odwrotności, (można przyjąć, że zachodzi relacja symetrii $\hat{Y}_{\lambda\mu} = \hat{Y}_{\mu\lambda}$).
Analogicznie można by zapisać wzór (42) oraz wzory (38), (41) i wszystkie pozostałe o charakterze tensorowym.

5. Moce i zasady zachowania

Rozpatrzmy najpierw jak w pkt. 4 sieć symetryczną złożoną z elementów prostych. Sieć ta spełnia założenia wymienione w pkt. 3 i wobec tego możemy wprowadzić przewód zerowy bezimpedancyjny.

Dla dowolnego elementu (gałęzi ${}_{s}g$) tej sieci możemy wprowadzić w układzie współrzędnych λ pojęcie mocy symbolicznej:

$$\underset{(\lambda)}{\hat{S}}{}_{s}g = \underset{(\lambda)(t)}{\hat{U}}|{}_{s}g| \; \underset{(\lambda)}{\check{J}}{}_{s}g = \underset{(\lambda)(t)}{\check{J}}{}_{s}g \; \underset{(\lambda)}{\hat{U}}|{}_{s}g|. \tag{67}$$

W innym układzie współrzędnych λ' powiązanym z układem λ transformacją unitarną $\underset{(\lambda'\lambda)}{\hat{V}}$ mamy:

$$\underset{(\lambda')}{\hat{S}}{}_{s}g = \underset{(\lambda')(t)}{\hat{U}}|{}_{s}g| \, \underset{(\lambda')}{\check{J}}{}_{s}g = \underset{(\lambda)(t)}{\hat{U}}|{}_{s}g| \; \underset{(\lambda'\lambda)(t)}{\hat{V}} \; \underset{(\lambda'\lambda)}{\check{V}} \; \underset{(\lambda)}{\check{J}}{}_{s}g =$$

$$= \underset{(\lambda)(t)}{\hat{U}}|{}_{s}g| \; \underset{(\lambda'\lambda)(t)}{\hat{V}} \; \underset{(\lambda'\lambda)(t)}{\hat{V}^{-1}} \; \underset{(\lambda)}{\check{J}}{}_{s}g = \tag{68}$$

$$= \underset{(\lambda)(t)}{\hat{U}}|{}_{s}g| \; E \; \underset{(\lambda)}{\check{J}}{}_{s}g = \underset{(\lambda)(t)}{\hat{U}}|{}_{s}g| \; \underset{(\lambda)}{\check{J}}{}_{s}g = \underset{(\lambda)}{\hat{S}}{}_{s}g = \underset{(\;)}{\hat{S}}{}_{s}g.$$

Zatem moc symboliczna gałęzi ${}_{s}g$ opisana jest za pomocą skalara $\underset{(\;)}{\hat{S}}{}_{s}g$. Podobnie można wprowadzić skalary napięcia modułowego ${}^{(m)}\underset{(\;)}{U}{}_{s}g$, prądu modułowego ${}^{(m)}\underset{(\;)}{J}{}_{s}g$ oraz modułowego prądu asymetrii ${}^{(\psi m)}\underset{(\;)}{J}{}_{s}g$:

$$ {}^{(m)}\underset{(\;)}{U}{}_{s}g = \underset{(\lambda)(t)}{\hat{U}}|{}_{s}g| \; \underset{(\lambda)}{\check{U}}{}_{s}g, \qquad {}^{(m)}\underset{(\;)}{J}{}_{s}g = \underset{(\lambda)(t)}{\hat{J}}|{}_{s}g| \; \underset{(\lambda)}{\check{J}}{}_{s}g, $$

$$ {}^{(\psi m)}\underset{(\;)}{\hat{J}}{}_{s}g = {}^{(\psi)}\underset{(\lambda)(t)}{\hat{J}}|{}_{s}g| \; {}^{(\psi)}\underset{(\lambda)}{\check{J}}{}_{s}g. \tag{69}$$

Wzory (68), (69) przedstawiają dla transformacji unitarnych iloczyn skalarny Hermite'a. W oparoiu o wzory (68) można wprowadzić pojęoie mocy modułowej ${}_{(m)}P_{s^g}$ i mooy asymetrii K_{s^g} (patrz [3]):

$$ {}_{(m)}P_{()_{s^g}} = {}_{(m)}U^{*}_{(\,)|s^g|}\,{}_{(m)}J_{()_{s^g}}, \tag{70}$$

$$ K_{(\,)_{s^g}} = {}_{(m)}U_{()|s^g|}\,{}_{(\psi m)}J^{*}_{(\,)_{s^g}}. \tag{71}$$

Dla całkowitej sieci symetrycznej (złożonej ze wszystkich podsieci symetrycznych) możemy odnośnie mocy symbolicznej napisać zasadę zachowania:

$$ \hat{S}_{(\,)_{s^C}} = \sum_{s^g} {}_{(w)}\hat{S}_{(\,)_{s^g}} - \sum_{s^g} {}_{(o)}\hat{S}_{()_{s^g}}, \quad s^g \in G_s. \tag{72}$$

" $\hat{S}_{()_{s^C}}$ ".- oznaoza macierz całkowitej mocy pobieranej przez elementy na wejściach s.s. (patrz rys. 3).

"G_s" - oznacza zbiór wskaźników gałęzi s.s. Indeksy w, o odnoszą się do wydajników (SEM i SPM) i do odbiorników.

Zasadę tę można wykazać, wyohodząo z równań wyrażająoyoh prawa Kirohhoffa i prawo Ohma dla sieoi (oraz ewentualnie równań przesuwników fazowych i przekładni transformatorów), niezależnie od tego czy w układzie występują magnetyozne sprzężenia symetryczne ozy nie. Jeśli postulaty 3 i 4 punktu 3 nie były by spełnione, skutkiem ozego nie można by wprowadzić bezimpedancyjnego przewodu zerowego - można by zasadę zachowania wyrazić również w postaoi związku (72) uzupełniając mooe ${}_{(w)}\hat{S}_{s^g}$ ${}_{(o)}\hat{S}_{s^g}$ odnoszące się do gałęzi 3-fazowych mocami ${}_{(w)}\hat{S}_{s^g{}_o}$ ${}_{(o)}\hat{S}_{s^g{}_o}$ odnoszącymi się do przewodów zerowych (w układzie fazowym), które nie byłyby transformowane przy przejśoiu od jednego układu współrzędnych do drugiego. Jest to konsekwencją tego, że spełnienie zasady zachowania mocy symbolicznej nie zależy w ogóle od jakiejkolwiek symetrii układu czy to elektrycznej, czy topologicznej.

Podobnie możemy wyrazić zasadę zachowania dla całkowitej sieci asymetrycznej:

$$\overset{\hat{S}}{(\ )}_{aC} = \sum_{a^g} (o)\overset{\hat{S}}{(\ )}_{a^g} - \sum_{a^g} (w)\overset{\hat{S}}{(\ )}_{a^g}, \quad g \in G_a. \tag{73}$$

Po wprowadzeniu zasady wyodrębnienia rozdzielającej całkowitą s.s. i s.a., które są połączone n 4 względnie 3-przewodowymi łączami bezimpedancyjnymi (spełnienie postulatów 3 i 4 pkt. 3 nie jest w tej chwili istotne), możemy napisać:

$$\overset{\hat{S}}{(\ )}_{sC} = \overset{\hat{S}}{(\ )}_{aC}. \tag{74}$$

Uwaga: Umawiamy się strzałkować prądy w gałęziach łączących obie sieci całkowite od s.s. do s.a. Stąd:

$$\begin{aligned} &\sum_g (w)\overset{\hat{S}}{()}_g = \sum_g (o)\overset{\hat{S}}{()}_g, \qquad g \in G = G_s + G_a, \\ &\sum_g ()^{\hat{S}}_g = 0. \end{aligned} \tag{75}$$

Drugi wzór (75) obowiązuje przy wspólnej umowie "wydajnikowego" lub "odbiornikowego" oznaczenia mocy. Np.: $\left({}_{(o)}\overset{\hat{S}}{()}_g = -{}_{(w)}\overset{\hat{S}}{(\ )}_g = -\overset{\hat{S}}{(\ )}_g \right)$. Zasada zachowania dla mocy modułowej i asymetrii na ogół nie obowiązuje.

W przypadku drugiej metody opisywania sieci jako należącej do wielobiegunnika, możemy czy to dla s.s. czy dla s.a. zdefiniować wszystkie poprzednio wprowadzone moce podobnie.

Definicje te będą różniły się jedynie stopniami macierzy (w zależności od ilości wejść), nie ma więc sensu powtarzać ich tutaj. Warto tu jeszcze podać tensorowy odpowiednik związku (67). Na mocy identyfikacji reguł transformacyjnych (63a) i (63d) dla przekształceń unitarnych, możemy napisać:

$$\underset{s^g}{\hat{S}} = \underset{|s^g|}{\hat{U}}{}_{\bar{\lambda}} \underset{s^g}{\check{J}^{\bar{\lambda}}} = \underset{|s^g|}{\hat{Z}}{}_{\bar{\lambda}\mu} \underset{|s^g|}{\check{J}^{\bar{\lambda}}} \underset{s^g}{\hat{J}^{\mu}}, \tag{76}$$

gdzie: współrzędne $\underset{s^g}{\check{J}^{\bar{\lambda}}}$ są identyfikowane ze współrzędnymi $\underset{s^g}{\check{J}^{\lambda}}$ – sprzężonymi w stosunku do " $\underset{s^g}{\hat{J}^{\lambda}}$". Można tej identyfikacji dokonać, bowiem reguły transformacyjne obu wielkości są te same. Podobny związek można napisać przy użyciu współrzędnych $\underset{s^g}{\check{J}_{\bar{\lambda}}}$ oraz $\underset{s^g}{\hat{U}^{\bar{\lambda}}}$.

Uwaga: We wzorze (68) zmienna $\underset{()_{s^g}}{\hat{S}}$ oznaczała macierz stopnia (1,1) o elemencie $\underset{s^g}{\hat{S}}$ określonym wzorem (76).

Analogicznie możemy przedstawić wzory (69) we wspólnej postaci tensorowej:

$$\delta_{\bar{\lambda}\mu} \check{W}^{\bar{\lambda}} \hat{W}^{\mu} = \hat{W}_{\bar{\lambda}} \check{W}^{\bar{\lambda}}, \tag{77}$$

reprezentującej formę metryczną przestrzeni opartej o grupę transformacji unitarnych z tensorem metrycznym Hermite'a $\delta_{\bar{\lambda}\mu}$

Widać, że wszystkie wprowadzone tu (wzory (76), (77)) wielkości (niezależnie od ilości współrzędnych) są skalarami. Gdyby rozszerzyć grupę transformacji do centroafinicznej, wyrażenia te przestałyby być niezmiennikami, bowiem np. nie można wtedy przyrównać współzmienniczo "$\hat{U}^{\lambda}$" do "$\hat{U}_{\lambda}$"; a "$\hat{U}^{\lambda} \check{J}^{\bar{\lambda}}$" nie jest niezmiennikiem.

Przykładem tego może być zastosowanie transformacji (11) zamiast (12) i wówczas zachodzi: $\left(\hat{S}_{(f)_s g} = 3\, \hat{S}_{(s)_s g} \right)$.

Rękopis złożono w redakcji w maju 1968 r.

LITERATURA

[1] Gołąb S.: Rachunek tensorowy. Wyd. II.

[2] Zeweke G.W., Jonkin P.A.: Podstawy teorii obwodów elektrycznych. Warszawa 1958.

[3] Nowomiejski Z.J.: Moc i energia elektryczna w układach elektrycznych o dowolnych ustalonych przebiegach. "Elektryka" z. 15.

КОВАРИАНТНОСТЬ УРАВНЕНИЙ ОПИСЫВАЮЩИХ СЛОЖНЫЕ СЕТИ
С НЕКОТОРЫМИ СИММЕТРИЯМИ

Р е з ю м е

В этой разработке для описания сети употребляются координаты, увязанные центроафиническими трансформациями или унитарными. Уравнения сети сформулированы для этих координат ковариантным способом. Это применение принципа ковариантности, выступающей в теории относительности и электродинамике, на грунте теории 3-фазных и других сетей, проявляющих некоторые симметрии.

THE EQUATIONS COVARIATION WHICH
DESCRIBE THE COMPLES NETWORK OF
ONES SYMMETRIES

S u m m a r y

In this elaboration, the coordinates connected with unitary or centroafinic transformation are used for network description.

The networks equations are covariation way formulated for this coordinates.

It is transplantation of the covariation principle, which occurs in the theory of relativity and in dynamics to the theory of three-phase network and other ones indicating some symmetries.